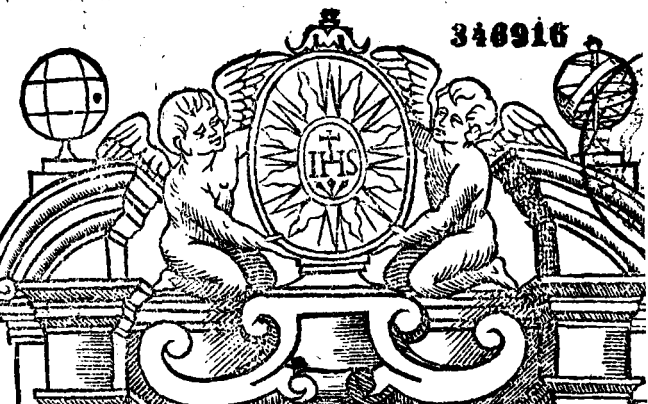


Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres



EVCLIDIS
POSTERIORES

Libri sex a x. ad xv.

ACCESSIT XVI. DE SO-
lidorum Regularium com-
paratione.

OMNES PERSPICVIS DE-
monstrationibus, accuratisq; scho-
lyis illustrati.



AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.



R O M A E,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

1286E

EVLIDIS

ELEMENTVM X.



DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

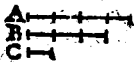


BSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quae ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse

superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida, tum plana, neque perfecte intelligi possunt; neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerumque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hac incommensurabilia saepe numero existant, ut ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus differit, obscuritatem; oes nervos industria mea in eo contendam, ut ex his, quae hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, ut sine multo labore a quovis, qui precedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmeticos,

metices, quæ de radicibus numerorū, tam rationalibus quàm irrationalibus, ut vocāt, sermonē instituit: Immo cōtra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionē p̄fectā illius partis Arithmetices p̄dere ex hoc 10. lib. tān̄ abest, ut existimē, tractationē illam radicū requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicū atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quā qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad usum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora desēm theorematā secundi lib. numeris accommodauimus, ut oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum, non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dices aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorū, quibus Algebra utitur, vsurpasti, ut ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, ridebantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

IT A Q V E, ut ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit; declarat primo loco, quam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quæ iter repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem



dem modo commensurabiles sunt; linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam unius palmi; quam dimidiati palmi, quam tertia partis unius palmi; &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solidanè commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, ut propositione ultima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicuntur incommensurabiles, nec non, & solida, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE linearum potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARUM rectarum quaedam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defini commensurabiles simpliciter diximus; quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, ut & qua

drata earum incommensurabilia sint . Lineæ ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est secundum earum quadrata (est enim, ut ad propof. 47. lib. I. diximus, potentia cuiusq; lineæ, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles .

Q U O D si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia cõmensurabiles, nõ autẽ cõmensurabiles longitudine; respondendũ est, lineas longitudine cõmensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione cõmensurabiliũ magnitudinũ, cũ huiusmodi lineas vna cõmunis mensura metiatur, ut dictũ est: At vero quoniã lineas potẽtia cõmensurabiles nulla cõmunis mensura metiri potest, sed tantũmodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, ut ea propria definitione explicarentur .

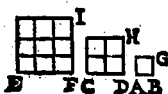
I I I I .

I N C O M M E N S U R A B I L E S autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri .

L I N E A S reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia .

H A B E N T autem lineæ cõmensurabiles tã longitudine quã potẽtia, hãc quasi conuenientiã õnter se, & connexionẽ; ut lineæ longitudine cõmensurabiles, sint etiã cõmensurabiles potentia, ita ut nulla lineæ dari possint cõmensurabiles longitudine,

quin earũ quadrata cõmensurabilia quoq; sint; quoniã quadratum ex cõmuni earum mensura descriptum metitur tanquã mensura cõmunis earũ quadrata, ut in subiecta figura apparet:



paret: sicut enim recta AB , metitur rectas CD, EF , ita quoque quadratum AG , quadrata CH, EI , metitur: Non autem, ut omnes lineae potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multa enim lineae sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quae tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes lineae potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes lineae longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa lineae reperiuntur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propof. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarum, quae cum ipsa comparantur, quadam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quadam vero potentia tantum: Item quadam illi incommensurabiles longitudine tantum; quadam vero longitudine, & potentia, ut hoc decimo libro demonstrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamvis eius verba hoc sonare videantur) haec ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse proposita recta linea commensurabiles longitudine,

A 4

& po

et potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

L I N E A autem illa proposita, ratione cuius alia commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis *ῥητὴ*; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, et nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamvis singulæ seorsum sumptæ existant certa quoque, ac notæ; cū qualibet in quocumque partes æquales possit dividi.

VI.

E T huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

D O C E T lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparata reperiuntur ei commensurabiles longitudine et potentia, vel potentia tantum.

I T A Q U E ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.

VII.

H V I C vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

Q U O N I A M in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine et potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles proposita recta Rationali, appellavit Rationales.

les; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine, videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesne dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur, non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo tollata reperiantur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocumque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QUONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plane quadrato a Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali proposita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunq; figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITUR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrata Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabiturq; in coroll. propof. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREUNDUM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incommensurabiles: Vix autem, & rarissime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque, sint locuti.

CETERVM his definitionibus adiungemus postulatū unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, siue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem.

AXIOMATA, SIVE

Pronunciata .

I.

MAGNITVDO quocunq; magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur .

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur .

III.

MAGNITVDO metiens totā magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquā.

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, praesertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocē magnitudinis.

C A T E R V M quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propof. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri; curauimus, ut duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstrat. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter
Theonē

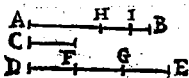
Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. I. PROPOS. I.

I.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

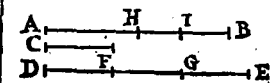
PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales A B, & C, quarum A B, sit maior. Dico si ex A B, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quædam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta D E, maior sit quam A B, ita ut D E, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes D F, F G, G E, ipsi C, æquales; detrahatur ex A B, maius quam dimidium A H, & ex reliqua H B, maius quam dimidium H I; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius A B,



multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot sunt ipsæ D F, F G, G E. Quia igitur D E, maior est quam A B; At ex D E, ablatum est D F, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si D E, ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum F E, reliquo H B, maius (Cum enim D E, maior sit quam A B; si ex D E, dimidium auferretur, nec non & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex D E, maius reliquo ex A B. Si ergo ex D E, auferatur minus quàm dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium;

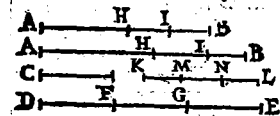
midium; erit reliquum ex D E, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam F E, maior est quàm H B, auferaturq; ex F E, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, si F E, maior sit quam duplex ipsius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum G E, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius D E, qualis hic est G E, maiorem esse postrema parte ipsius A B, qualis hic est I B. Cum ergo G E, postrema pars ipsius D E, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quam I B, postrema pars ipsius A B. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.

Idem demonstrabitur, si ex A B, auferat dimidiū A H, & ex reliquo H B, rursus dimidiū H I, &c. Næcadē rōne



erit reliquū F E, mai^r reliquo H B, nec nō & reliquū G E, maius reliquo I B; Cū ex maiori D E, ablatū sit D F, min^r q̃ dimidiū, vel certe dimidiū; & ex minori A B, dimidiū A H, &c.

A L I T E R. Facta constructione, ut prius, sumatur K L, ita multiplex ipsius I B, ut est multiplex D E, ipsius C. Diuisa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipsi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero A H,



maior est quam H B, vel certe illi æqualis, si ablatū sit dimidium ex A B; & H B, maior est, quam I B; erit quoq; A H, maior quam I B, hoc est, quam

K M. Rursus quia H I, maior est quàm I B, vel certe illi æqualis; est autē I B, ipsi M N, æqualis: erit quoq; H I, maior quàm M N, vel illi æqualis; atq; adeo tota A I, maior, quàm tota K N. Additis ergo æqualib⁹ I B, N L, erit tota A B, maior quàm tota K L: Est autē D E, maior adhuc, quàm A B. Multo ergo maior erit D E, quàm K L. Quare cū sit ut D E, ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta. n. fuit K L, ipsius I B, eā multiplex, quàm multiplex est D E, ipsius C,) erit quoq; C, maior quàm I B. Ac proinde relictæ est I B, minor quam C. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIION.

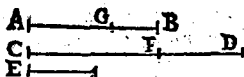
L.V.C.E. clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inaequales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Pelesarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

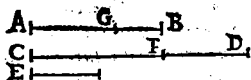
SI duabus magnitudinibus inaequalibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inaequalibus magnitudinibus propositis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B, & sic deinceps, alterna quadam detractiōe, auferatur semper minor de maiore, & nunquā reliqua metiatur præcedentē. Dico magnitudines A B, C D, incommensurabiles esse. Si. n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mēsurā cōmunis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi A B, vel minor. Detracta aut A B, ex C D, quoties pōt, relinquat F D, se minore, ita ut A B, ipsam C F, metiatur. Rursus detracta F D, ex A B, relinquat se minore G B, ita ut F D, metiatur ipsam A G; atq; hoc semper fiat. Relinquetur ergo tādē ex C D, vel A B, magnitudo quēdā minor quā E. (Qm̄ cū A B, ablata ex C D, relinquat E D, se minorem, erit C F, ablata maior, quā dimidia ipsius C D, alias si esset dimidia, vel minor quā dimidia, posset adhuc A B, detrahi ex C D. Eodē modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipsius A B: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam



i. decimi.

quam dimidium, relinquetur tandem magnitudo quædā minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E.



Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur C F; metietur quoque E, ipsam C F: Metitur autem E, &

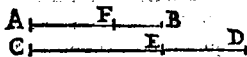
totam C D. Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliqua sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac



alterna detractioe nunquā reliquam metiri præcedentē.

Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quo-

niam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem & se ipsam: Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E. Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Oñsa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, utranq; A B, C D, metitur. quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D, incommen-

incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum. SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quadam reliqua præcedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines, incommensurabiles, ut demonstravit hoc theorema Euclides. Quod est absurdum. possuntur enim commensurabiles.

ITAQUE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ, sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quopiam metiatur præcedentem, erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematidis huius scholii: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo FB , metiri dicebatur præcedentem ED , ostensum est, eandem reliquam FB , metiri utramque magnitudinem AB, CD . Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstravit.

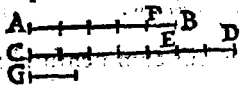
PROBL. I. PROPOS. 3.

3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD , quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD , commensurabiles sunt, sit ut si minor AB , ex maiore CD , detracta, quoties potest, reliquas B & ED ,

& E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractio; tandē reliqua quę-



piam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentę

E D. Dico F B, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita ostendemus. Quoniā F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoq; F B, ipsam A F. At metitur F B, & se ipsam: Igitur F B, totam A B, metietur; atque adeo & ipsam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipsam E D, metiatur; metietur quoq; F B, totā C D. Metitur ergo F B, utranq; A B, C D. Quare utriusque A B, C D, communis mensura est F B.

Quod autem F B, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia cōmunis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipsam C E; metietur quoque G, ipsam C E: At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipsam A F: Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

Quod si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex G D, nihil relinquat; erit ipsa A B, earum maxima mensura cōmunis, cū & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

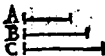
ELICITUR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D.

Demon-

Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademque est ratio de cæteris.

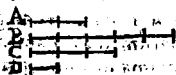
SCHOLIUM.

Ex his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quoslibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, necne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non.



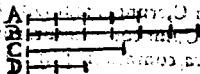
Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commensurabiles; sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.

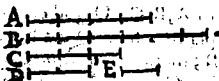


3. decimi.

Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, & C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesein.



Si vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. Inuenta n. E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B, metietur quoque



3. decimi.

2. pron.

B 2 E, ipsas

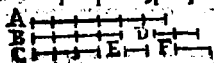
E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metiatur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

SIMILITER explorabimus, an plures datae magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datae sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datae tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam



si maior magnitudo quā D, metiri dicatur magnitudines A, B,

C; metietur eadem. per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quaelibet earum mensura communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. praecedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita patrum fiet. Quia E, metiens D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo

de confirmari potest, Si non est maxima, sit F , maior quā E , si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F , metitur A , & B ; metietur quoque D , earum maximam mensuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C : Igitur F , metiens D , & C , metietur quoque E , earum mensuram maximam, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E , magnitudines A, B, C , metitur; Ac propterea E , maxima est earum communis mensura: Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

APERTET quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

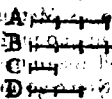
INPRÆTER autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F , si metiatur ipsæ A, B, C , metitur quoque E , maximam illarum communem mensuram: Eademque de ceteris est ratio.

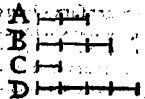
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inuenimus; locumque habebit hoc idem corollarium: Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua uero omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

L E M M A.

SI sint quocunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SI N T quocunque magnitudines A, B, C, D , in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H : Ut quidem A , ad B , ita E , ad F ; & ut B , ad C , ita F , ad G ; &

G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex his, quæ ad de

E, 3. fin. 5. lib. 6. a nobis demon
B, 4. strata sunt, tam propor
C, 1. tio A, ad D, componitur
D, 2. ex proportionibus A, ad
B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex
proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspi
cuum est, cum proportionibus componentes proportio
nem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ
proportionem E, ad H, componunt, & compositas
proportionibus, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales es
se, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est pro
positum.

I D E M sequitur, si magnitudinum, & numero

rum proportio fuerit per
E, 3. turbata, ut in hoc exem
B, 12. plo apparet, in quo est, ut
C, 4. A, ad B, ita G, ad H; &
D, 6. ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Ea
de enim prorsus est demonstratio.

S C H O L I O N.

Q U O N I A M precedenti lemma. & in propositione,
quæ sequitur, & in alijs multis, sciendum nobis erit; placuit
illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur
ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa
genera quantitatis constituunt. At proportio ex æqualitate in
precedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem
generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero & in magnitudi
nibus, quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc
lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri
numeris quoque conueniant. Vel certe demonstratio facta in 7.
lib. hinc ei tem lemmati congruet, cum magnitudines A, B,
C, D,

C, D, quæ proportionē habent eandem, quā numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

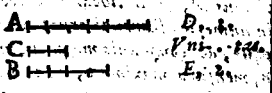
THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

S I N T magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C : Et quoties ea repetita metit A, toties unitas repetita metiatur numerum D : Et quoties eadem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur ; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinē C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C ita numerus D, ad unitatem : Est autē & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E ; quod C, ipsam B, atq; unitas numerum E, æque metiatur . Igitur plēna præcedēs, erit ex equo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinē, ita D, numerus ad E, numerum. Cōmensurabiles ergo magnitudines inter se rationē habent, &c. Quod erat demonstrandum.

3. decimi.



SCHOLION.

C V M Euclides ad demonstrationem huius theoremat is assumat maximā cōmunē mensurā propositarū magnitudinū cōmensurabilū, qualis fuit C, ipsarū A, & B perspicuū est, lineas debere esse longitudine, & ob id potētia quoq; cōmensurabiles, ut rationē habeāt inter se, quā numerus ad numerū. Hæc. n. sola cōmunē recipiūt mēsurā, atq; adeo in eis demonstratio locū habet.

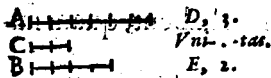
Q V O D si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidē earū quadrata inter se rationē, quā numerus ad numerū, quia cōmensurabilia sunt, atq; idcirco mensurā habent cōmunē, ipsi q; demonstratio huius theoremat is cōvenit: At ipsa lineæ nequaquā, quā longitudine incōmensurabiles cū sint,

B 4. com.

communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorema-
tis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

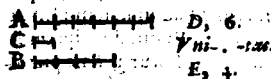
Ex demonstratione porro eiusdem huius theoremat^{is} liqui-
do constat, commensurabilitum magnitudinum proportionem
esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis men-
sura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere

proportionē magnitudines
A, & B, quam habent ni-
meri D, & E, per quos sci-
licet earum mensura com-
munis maxima C, ipsas metitur.



Quod si propositis duabus magnitudinibus commensura-
bilibus A, & B, libeat inuenire quam proportionem habeant
in numeris; sciendum erunt dati numeri D, & E, quos unitas
atque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, &
B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut
demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habet,
quam numeri D, & E.

Quod si loco maxima mensura C, sumamus aliam quā-
cunque communem earum mensuram, nihilo minus hoc theo-



rema demonstrabimus eodē
argumento. Quāvis enim
numeri D, & E, maiores in-
ueniantur in hac posteriori

demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem propor-
tionem cum illis, ut ex appposita figura apparet. Quoniam ue-
ro in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi om-
nium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea
forte Euclides in demonstratione maximam communem mensu-
ram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

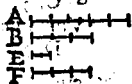
THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportio-
nem habeant, quam numerus ad numerū:
commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportio-

ncm

nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō
 menfurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero
 C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A,
 quarum partium uni equa-
 lis sit magnitudo E. Deinde
 de quoties unitas repetita
 metitur numerum D, to-
 ties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā
 aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, conti-
 netur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam
 E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad
 unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod
 E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per
 lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad
 D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut
 A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines
 æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metia-
 tur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem
 & ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, meti-
 tur; Ac proinde A, & B, cōmenfurabiles sunt. Si igitur
 duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod
 erat demonstrandum.

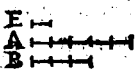


C, 5.
 Vni. tas.
 D, 3.

9. quinti.

1. definit.

ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes equa-
 les intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni
 æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A,
 ita unitas ad C, quod E, ip-
 sam A, & unitas ipsum C,
 æque metiantur; ponit urq;
 ut A, ad B, ita C, ad D; erit
 per idem lemma superius,
 ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas
 numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B,
 metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, &
 B, habentes eandem communem mensuram E, cōmenfu-
 rabiles sunt. Quod est propositum.



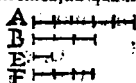
Vni. tas.
 C, 5.
 D, 3.

COROLLARIUM.

Ex priori autem demonstratione theorematris sapientia est nobis
 via qua lineam rectam inuenimus, ad quam ita se habeat quævis
 alia

EUCLID. GEOM.

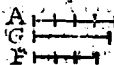
alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si invenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot aequales partes, quot unitates sint in C; & sumenda alia linea F, tot eandem partium, quot unitates sunt



C, 5.
Un- . ias.
D, 3.

in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratum est.

Hinc rursus apparet, quam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ,



C, 5.
D, 3.

ut numerus ad numerum. Si namque invenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueni-

enda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quâ sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus, ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sine similia similiterque descripta.

S C H O L I O N.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione, constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSURABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

S I N T incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum; erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, &

A, & B, proportionē habēt, quā numerus ad numerū. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

QUOCUNQUE modo linea incōmensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerū, ut vult theorema. Nam alias, ut demonstratum est, essent longitudine cōmensurabiles. Quod non ponitur.

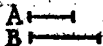
THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.

o.

SI duæ magnitudines inter se proportionē nō habeant, quā numerus ad numerū: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quā numerus ad numerū. Dico eas incōmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cōmensurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerū. Nō igitur cōmensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionē habeāt, &c. Quod erat ostendendum.



3. decimi

SCHOLION.

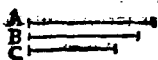
QUOD si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipse necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionē haberēt, quam numerus ad numerum, ut ad propos. 5. inius lib. demonstramus, quod est contra hypothesis. Non autē colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionē nō habent, quā numerus ad numerū, necessario & potentia incōmensurabiles esse, ut manifestū est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantū sint cōmensurabiles, eas proportionē habere, quā numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos.

Propos. 5. huius lib. docuimus. Solam igitur inferitur ex huius theorematibus demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

Si sint tres quantitates continue proportionales, & aliae tres continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque ut A, ad



D, 35. C, ita D, ad F. Dico
E, 28. quoque esse ut A, ad
F, 21. B, ita D, ad E. Quo-

niam tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportionis A, ad C, & D, ad F, aequales; Erunt quoque proportionis A, ad B, & D, ad E, aequales, quandoquidem earum proportionis duplicatae aequales sunt.

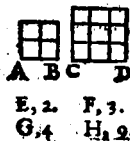
Idem sequitur, si plures quantitates sint, quā tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatae, ad demonstrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

Quae a rectis lineis longitudine com-
mensu-

mensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

S I N T primum rectæ A B, C D, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ A B, C D, longitudine sunt commensurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportionēs, duplicatæ sunt proportionū æqualium. Quod est propositum.



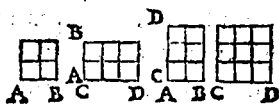
5. decimi.

20. sexti.

11. octavi.

ALITER.

ALTER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum B D, sub rectis A B, C D. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, ut

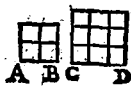


E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

constat ex demonstratio-
ne propos. 1. lib. 8. atq;
adeo in proportione late-
ris E, ad latus F, ut dixi-
mus in scholio eiusdem
propos. Quoniam igitur
est A B, ad C D, ut E, ad
F: Vt autē A B, ad C D,

ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandē al-
titudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item ut
E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad
rectangulum B D, ut quadratus numerus G, ad numerū I.
Rursus quia est A B, ad C D, ut E, ad F: Vt autē A B, ad C D,
ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandē
altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item ut
E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulū B D, ad qua-
dratū ex C D, ut I, numerus ad numerum quadratum H.
Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, re-
ctangulū B D, & quadratū ex C D, in eadē ratione sunt, in
qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lēma ppos. 4.
huius lib. erit quadratū ex A B, ad quadratū ex C D, ut nu-
merus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod
est propositum.

S I T secundo quadratū ex A B, ad quadratū ex C D, ut
numerus quadratus G, ad numerū quadratū H. Dico rectas



E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

A B, C D, esse longitudine cōmensurabi-
les. Sint numeri E, & F, latera quadrato-
rū numerorū G, & H, ut in priori figura.

Quoniam igitur est quadratū ex A B, ad
quadratum ex C D, ut quadratus nume-
rus G, ad quadratū numerum H: Habet
autem quadratum ex A B ad quadratum
ex C D, proportionem duplicatam lateris A B, ad latus C D;
Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerū H,
proportionē habet duplicatā lateris E, ad latus F: Erit pro-
portio

portio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportionnes, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

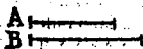
6. decimi

A L I T E R. Reperatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratū ex A B, ad rectangulū B D; itē ut A B, rursū ad C D, ita rectangulū B D, ad quadratū ex C D, ut supra diximus; erunt quadratū ex A B, rectangulū B D, & quadratū ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineā C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerū F, ut supra ostendimus; poniturq; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D; ut quadratus numerus G, ad quadratū numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cōmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositū.

1. sexti.

6. decimi.

S I N T tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earū quadrata proportionē non habere, quā numerus quadratus ad numerū, quadratū. Si enim quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionē dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, ut iam est demonstratū. Quod est absurdū. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionē habet, quam numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositum.



Q U A N T O, ac postremo quadratū ex A, ad quadratū ex B, nō habeat proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incōmensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credantur; habebūt earū quadrata, ut est demonstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Quod est absurdū. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus sunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROL

Ex his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erunt. Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia erunt. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

DENIQUE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamē quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematum.

RVRSUS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidē sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus; huiusmodi constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solum enim ex lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTERMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarii. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIUM.

VI autem scopus priorum duarum partium huius theore-

matum

matris planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideranda sunt hac, quae sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematum, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quae numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur, quales sunt illae, quae in demonstratione sunt posita: (est enim recta AB , 2. & CD , 3.) verum etiam illas, quae nullis possunt numeris efferi, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum linea, seu latera, ex secunda theorematum parte longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda quae continent totidem quadratas mensuras aequales illis, in quas quadratum Rationalis lineae resoluitur, quot sunt unitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB , quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD , novem; quot nimirum unitates sunt in quadratis numeris G, H .) Sed ea etiam, quae vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quae sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineae Rationalis conferantur. Saepe numero enim lineae datae tum mensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris unitates. Hac autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATUR linea Rationalis AB , expressa numero 4. cuius quadratum AC , continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E , plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, ut in Arithmetice est demonstratum, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI , constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC , quot nimirum unitates in D , numero continentur; atque ipsi HI , quadratum

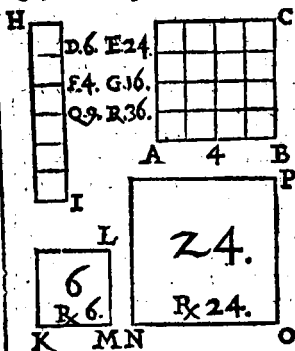
C aequale

16. octavi

14. secundi

septimi.

equale constiuatur KL , cuius latus KM . Postremo per ea, quae i coroll. propof. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO , ad cuius quadratum NP , ita se habeat KL , quadratum



recte KM , ut numerus D , ad numerum E , vel ut quadratus F , ad quadratū G . Quoniam igitur est ut quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , vel ut numerus D , ad numerum E , videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL , ad quadratum NP , per constructionem; Continet autem quadratum KL , 6. mensuras quadratas, quarum 16. continet quadratum Rationale AC : (con-

structum enim est quadratum KL , equale rectangulo HI , constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum NP , earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea M , NO , latera quadratorum KL , NP , erunt $R. 6.$ & $R. 24.$ quae numeris exprimi nequeunt, cū 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntq; linea Rationali AB , longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G . Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL , NP , proportionem habeant, ex coroll. propof. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM , NO ; sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commensurabiles sunt rectae KM , NO , cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate linea etiā illa longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem linea KM , NO , simpliciter, & absolute, nulla habita ratione lineae Rationalis AB , numeris poterunt esse
ri. Cum

6. decimi.

12. Cum enim proportionem habeant subduplam, si $K M$, dividatur in duas partes aequales, dividetur $N O$, in eiusdem magnitudinis partes 4, si illa in 3, secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo aequales sūt partib⁹ lineæ Rationalis $A B$, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles.

$R V R S V S$, quia quadrata $K L$, $N P$, proportionem habentia quam quadratus numerus F , ad quadratum numerum G , plures quadratas mensuras continent aequales illis, in quas $A C$, quadratum Rationalis lineæ $A B$, resolvitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis F , G ; (Nam $K L$, æquale est sex huiusmodi mensuris, & $N P$, continet 24. At numerus quadratus F , componitur ex quatuor unitatibus, & G , ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur Q , R , pauciores tales mensuras complectuntur quadrata $K L$, $N P$, quam sunt unitates in numeris quadratis Q , R , cum alter ex 9, alter vero ex 36. unitatibus constituitur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoq; esse quadrata proportionem habentia, quæ numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quæ unitates, in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cū quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadē quadrata $K L$, $N P$, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati $A C$, ex Rationali lineæ $A B$, descripti, resolvi poterūt in toride mēsuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F , G , vel Q , R , continentur. Nā si recta $K M$, dividatur in duas partes, & $N O$, in quatuor, ut dictum est, continebit quadratum $K L$, quatuor mensuras quadratas, & quadratum $N P$, sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris F , G . Item, si eadē lineæ secantur in partes tres, & sex, habebunt earū quadrata mēsuras quadratas 9. & 36. quot nimirū unitates comprehenduntur in numeris quadratis Q , R , &c. At hmoi mēsuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum $A C$, Rationalis lineæ $A B$, resolvitur.

I D E M dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorū superficies nō exprimuntur numeris quadratis, dāmodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16, ad quadratum numerum 4. &c.

ITAEQUE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, ut sit sensus. Quadrata quæ describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsæ quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propos. 47. lib. 1. demonstravimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematidis eorum latera, nempe diameter & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. ultima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit in-

commen-

commensurabilis; & tertia quartæ incom-
mensurabilis erit.

S I N T proportionales quatuor magnitudines A, B, C,
D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & ter-
tiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam A,
& B, inter se commensurabi-
les sunt, habebit A, ad B, pro-
portionem quam numerus ad
numerus, nempe quam E,
ad F: Ponitur autē ut A, ad B,
ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam
numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commensura-
biles inter se sunt.

S E D sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C,
ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam A, & B, iacom-
mensurabiles sunt, non habebit A, ad B, proportionē quā
numerus ad numerum: Ponitur autem ut A, ad B, ita C,
ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam nu-
merus ad numerum. Quare C, & D, incommensurabiles
sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales
fuerint, &c. Quoderat ostendendum.

S C H O L I O N. I.

Q U O D si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ,
prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine,
erit & tertia quarta longitudine commensurabilis, ut ex de-
monstratione huius theorematidis apparet. Eodem enim modo
ostendemus posteriores duas proportionē habere numeri ad nu-
merum. Quare, ut in scholio propof. 5. huius lib. diximus, lon-
gitudine commensurabiles sunt.

S I autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia
tantum, erit & tertia quarta potentia tantum commensurabi-
lis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, com-
mensurabilis est potentia ipsi B, erunt earum quadrata com-
mensurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam nu-
merus ad numerum. Est autem, ut quadratum ex A, ad qua-
dratum

5. decimi.

6. decimi.

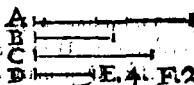
7. decimi.

8. decimi.

3. defin.

5. decimi.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod quatuor linea propofita A, B, C, D, proportionales fnt, & earū quadrata figura fimiles fimiliterq; defcriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commenfurabiles erunt; Ac propterea linea C, D, potentia cōmenfurabiles.



Quod autem potentia tantum fnt commenfurabiles, ita manifeftum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum fnt commenfurabiles potentia tantum, longitudine incommenfurabiles funt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ut in fchollio propof. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neq; C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenfurabiles funt C, D, ex fchollio propof. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenfurabiles, ut oftendimus. Igitur potentia tantum funt commenfurabiles. Quod eft propofitum.

EADEM rōne, fi prima feclūda fit incōmēfurabilis longitudine tātū, erit & tertia quartæ longitudine tantū incōmēfurabilis. Nā fi A, & B, fnt lōgitudine tātū incōmēfurabiles, erūt ipfarū potētia cōmenfurabiles; ac propterea ipfæ potētia tantū cōmēfurabiles erūt. Igitur, ut nūc oftēdimus, erunt quoq; rectæ C, D, potētia tātum cōmenfurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenfurabiles erunt. Quod eft propofitum.

R V R S V S fi quatuor magnitudinū priores due fuerint linea, due vero reliquæ superficies, vel folida; fequetur nihilo minus, fi linea fnt longitudine cōmmenfurabiles, vel incōmmenfurabiles, & reliquas duas magnitudines commenfurabiles, vel incommenfurabiles effe. Si enim linea longitudine fnt commenfurabiles, erit earū proportio, quæ numeri ad numerum, ex q̄s, quæ in fchollio propof. 5. huius lib. docuimus. Cū ergo habeant reliquæ dua magnitudines proportionem eandē, quam linea, erit quoque illarū proportio, quæ numeri ad numerum; atq; adeo commenfurabiles erunt. Si vero linea lōgitudine incommenfurabiles fnt, fiue potētia commenfurabiles exiftant, fiue non; non erit earū proportio, quæ numeri ad numerum, ut conftat ex fchollio propof. 7. huius lib. Igitur neque reliquatum duarū magnitudinū eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. Quæ

re incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

EODEM modo, si priores dua magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero dua, linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si. n. plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur et linea eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, ut diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque, linea eadem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, qua docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.

8. decimi.

5. decimi.

L E M M A.

Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENTIANTUR duo plani numeri non similes, per ea, qua ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QUOD si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quoscunque numeros primos, per ea, qua in

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

scholio propos. 20.

lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli. n. horum primorum acceptorum proportionem inter se habet, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, ut ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLION. I.

PORRO inuentionē numerorū planorū nō similium, qui videlicet proportionē nō habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco. Quod ut ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur, Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTUR quatuor numeri A, B, C, D, ita ut non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E & F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat.

A, 2.	C, 3.	sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E & F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nō sūt, qđ facere oportebat.
B, 6.	D, 16.	
E, 12.	F, 48.	

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium, Errant autem huiusmodi interpretes, quia saepe numeros inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quā quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut cōstat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 6. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnus proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quacunque duo latera vnus proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio proposit. 23. lib. 8.

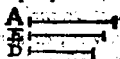
PROBL. 3. PROPOS. II.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum: Inueniantur,

per

per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, ut numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, ut numerus B, ad numerum C, non est autem proportio B ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autē tantū longitudine sint incommensurabiles, patet. Cū enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantū incommensurabiles sunt.



9. decimi.

6. decimi.

13. sexti.

10. decimi.

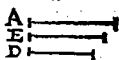
S i t iam eidem rectæ propositæ A, invenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabilis, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, ut iam est ostensum; erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM

S i igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita ut ab ea mensura caserarum sumantur; erit & recta D, per definitionem.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illa est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, ex demonstratione huius theoremat li-
quido constat, rectam mediam proportionalem inter duas re-
ctas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas
longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum inco-
mensurabile longitudine, & potentia; atque adeo appellari Irra-
tionale, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo. n. quod



B, 10. recta A, D, sunt longitudine ta-
tum incommensurabiles, vel com-

C, 6. mensurabiles potentia tantum, de-

monstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi
A, incommensurabile longitudine, & potentia: Eodemque argumento
ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensu-
rabile. Cum, n. recta D, E, A, sint continue proportionales, erit ex
coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita
recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis
longitudine. Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensu-
rabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt
potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

IN codicibus vulgaris preponitur hac undecima propositio
a Theone propositiōi decima precedenti: quod errore librario-
rum factum esse puto; cum secunda pars huius ex precedenti
propositione decima demonstretur, ut ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt com-
mensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensu-
rabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum. n. A, &
C, sint commensurabiles, habebit A, ad C, proportionem, quam
numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum
E. Rursum quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C,
ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam nu-
merus F, ad numerum G. sumanturque tres numeri H, I, K, mini-
mi de-

mi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F,
 ad G; sitq; H, ad I, ut A ——— D, 10. E, 8.
 D, ad E, hoc est, ut A, C ——— F, 2. G, 3.
 ad C; & I, ad K, ut F, B ——— H, 5. I, 4. K, 6.
 ad G, hoc est, ut C, ad
 B. Quoniam igitur est A, ad C, ut H, ad I; & C, ad B, ut I, ad
 K; erit ex æquo A, ad B, ut H, ad K; numerus ad numerum.
 Quare A, B, proportionē habētes, quam numeri H, K, inter
 se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini cō
 mensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

6. decimi.

S C H O L I O N.

Q U O D si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B,
 ipsæ C longitudine cōmensurabiles existant, erunt quoq; A, &
 B, inter se longitudine commensurabiles, ut constat ex demon
 stratione theoremati, quia eodem modo ostendemus, lineas A,
 & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K:
 Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propos. 6. di
 ximas. Si vero A, & B, fuerint ipsæ C, potentia cōmensurabi
 les, licet eisdem longitudine sint incommensurabiles, demonstra
 buntur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potentia.
 Cum enim A, & C, sint potentia cōmensurabiles, erit quadra
 tum ex A, ad quadratum ex C, ut numerus ad numerum, nempe
 D, ad E, cum quadrata ex A, C, per definit. sint commensu
 rabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B,
 ut numerus ad numerum, nimirum ut F, ad G. Sumptis ergo in eis
 de rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H,
 I, K, deinceps proportionalibus, erit rursum ex æquo quadratū
 ex A, ad quadratum ex B, ut numerus H, ad numerum K. Quare
 quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atq; adeo lineæ
 A, B, potentia cōmensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur,
 A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim
 esse due lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet utra
 que cuiuspiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis;
 quales sunt due Rationales longitudine inter se commensura
 biles, potentia vera tantum Rationali exposita commensura
 biles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19.
 huius lib.

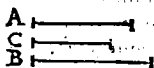
3. decimi.

4. octavi

6. d. schmi.

S E D & conuersum quodammodo huius theoremat^{is} demonstrabimus hoc modo.

S I sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuiuspiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



S I N T enim *A*, & *B*, commensurabiles, sitq; *A*, ipsi *C*, commensurabilis.

Dico & *B*, eidem *C*, commensurabilem esse. Cum enim tam *B*, quam *C*, ipsi *A*, sit commensurabilis; erunt quoque *B*, & *C*, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

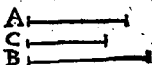
Q V O D si magnitudines *A*, *B*, *C*, sint lineæ, & *A*, *B*, commensurabiles longitudine, sit autem *A*, ipsi *C*, commensurabilis longitudine; erit & *B*, reliqua eidem *C*, longitudine commensurabilis. Nam cum tam *B*, quam *C*, ipsi *A*, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam *B*, *C*, inter se commensurabiles longitudine, & ostendimus. At vero si lineæ *A*, & *B*, potentia tantum sint commensurabiles, & *A*, ipsi *C*, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam *B*, eidem *C*, potentia esse commensurabilem; quia utraq; *B*, *C*, ipsi *A*, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si *A*, ipsi *C*, commensurabilis sit longitudine, reliquam *B*, eidem *C*, longitudine commensurabilem esse, quia non utraq; *B*, *C*, ipsi *A*, longitudine commensurabilis est, sed *C*, quidem longitudine, at vero *B*, potentia tantum, ut ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

S I sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

S I N T

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, d. catur esse commensurabilis ipsi



A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C, erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

12. decimi.

SCHOLION.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, utraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

12. decimi.

QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, & post hæc in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus, n. dedit opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

13.

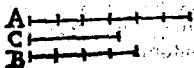
8.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudinum a cuius

cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

S I N T duę magnitudines cõmensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse



commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabiles: erunt & A, C, inter se cõmensurabiles.

Quod est absurdum. Positur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines cõmensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

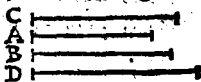
H I C quoq; , si magnitudines A, B, C, sint lineę, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, sine longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

COLLIGUNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, q̃ in hoc lib. demonstrantur, permixte.

Q V A E incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

S I N T duę magnitudines incommensurabiles A, B, quibus

has commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis.



14. decimi.

Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.

14. decimi.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsi A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsi potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

LEMMA.

De duobus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus potest, quam minor.

Quamvis id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamē quia hic brevius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C,

quarum AB, maior. oporteatque invenire, quo AB, plus possit quam C. Divisa AB, bisariam in D, describatur ex centro D, & inter-



uallo DA, vel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB. Cum enim angulus E, in semicirculo

1. quæ ii.

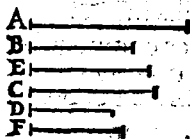
1. terti.

rectus

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D; possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A, & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniã

est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotesin; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



22. sexti.

22. sexti.

SCHOLIUM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constat ex
 ijs, quæ in scholio propos. 10.
 huius lib. scripsimus.

D THEOR.

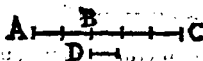
15.

9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utriusque ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONANTUR duæ magnitudines commensurabiles AB, BC . Dico totam quoque magnitudinem AC , utriusque ipsarum AB, BC , commensurabilem esse. Sit enim ipsarum AB, BC , communis mensura D . Quoniam



metitur D , ipsas AB, BC , metitur, metietur quoque D , totam AC , ex ipsis cõpositam. Cum ergo D , metiatur AC , & AB ; erunt AC, AB , commensurabiles. Similiter cum D , metiatur AC , & BC ; erunt & AC, BC , cõmensurabiles; Ac propterea AC , utrique ipsarum AB, BC , cõmensurabilis erit.

SED iam tota AC , ex AB, BC , cõposita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC , nempe ipsi AB . Dico & AB, BC , inter se commensurabiles esse. Sit enim D , communis mensura ipsarum AC, AB . Quoniam igitur D , metitur totam AC , & ablata AB ; metietur quoque D , reliquam BC . Quare cum D , metiatur AB, BC ; cõmensurabiles erunt AB, BC , inter se. Eodem argumento ostendemus AB, BC , esse commensurabiles, si AC , ipsi BC , fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ cõmensurabile esse. Ut si AC , ipsi AB , sit cõmensurabilis, esse quoque eandem AC , reliquæ BC , cõmensurabile. Nam ut in posteriori parte theorematum ostensum est, semper D , communis mensura totius AC , & ablatæ AB , cum metiatur totam AC , & ablata AB , metietur quoque reliquam BC , ex 3. pronuntiatio. Quare cõmensurabiles sunt AC, BC . Quod est præpositum.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

16.

9.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utriusque ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONENTUR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est utrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB, sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur utranque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

3. decimi
3. pron.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit uni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, erit quoque tota AC, utrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

16. decimi

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reli-

D 2 quæ

que incommensurabilem esse. Nempe si $A C$, incommensurabilis sit ipsi $A B$, esse quoque eandem $A C$, reliquæ BC , incommensurabilem. Si enim $A C$, ipsi BC , foret commensurabilis, esset quoque $A C$, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ $A B$, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo $A C$, ipsi BC , commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

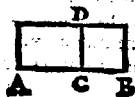
SCHOLIION. I.

PERSPICUUM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollaris, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura D , &c. quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

Ad rectam $A B$, applicetur parallelogrammum $A D$, deficiens figura quadrata $B D$. Dico parallelogrammum $A D$, æquale esse rectangulo sub segmentis $A C, C B$, comprehenso. Cum enim $B D$, quadratum sit, erit angulus ACD , rectus. Parallelogrammum igitur rectangulum est $A D$, contentum sub $A C, C D$, rectis. Quare cum $C D$, æqualis sit rectæ $C B$, ob quadratum $B D$; continebitur idem parallelogrammum rectangulum $A D$, sub segmentis $A C,$

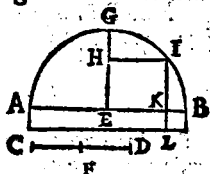


AC, CB ; ac proinde parallelogrammum AD , applicatum æquale est rectangulo sub segmentis AC, CB , quæ ex applicatione in recta AB , sunt facta, comprehenso. Quod est propositum.

LEMMA II.

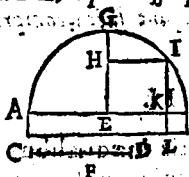
DV ABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod in hoc lemmate proponitur, facile absolui possit ex propos. 28. lib. 6. libet tamen id ipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliore. Sint igitur data rectæ inæquales AB, CD , quarum AB , maior sit, oporteatque ad AB , applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati



ex recta CD , descripti. Sectis rectis AB, CD , bisariam in E, F , describatur ex centro E , & intervallo EA , uel EB , semicirculus AGB ; & ex E , perpendicularis ad AB , ducatur EG . Et quia tota AB , maior ponitur quam tota CD , erit quoque AE , dimidia ipsius AB , hoc est EG , ipsi AE , æqualis, maior quam CF , dimidia ipsius CD . Posita igitur EH , æquali ipsi CF , agatur per H , ipsi AB , parallela HI , demittaturque IKL , ad AB , perpendicularis, & sit KL , ipsi KB , æqualis; ac tandem perficiantur rectangulum AL , & quadratum BL . Dico parallelogrammum AL ,

applicatum ad rectam AB , deficiens figura quadrata BL , æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD .



Quoniam KI , media proportionalis est inter AK , KB , ut in scholio propos. 13. lib. 6. tra didimus; erit rectangulū sub AK , KB , hoc est, rectangulum AL , æquale quadrato ex KI , hoc est, quadrato ex EH ; (est enim KI , ipsi EH , æqualis, ob parallelogrammum EL ;) hoc est, quadrato ex CF : Est autem quadratum ex CF , quarta pars quadrati ex CD ; quod quadratum ex CD , per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF . Igitur parallelogrammū AL , ad rectam AB , applicatum deficiensq; quadrato BL , æquale est quartæ parti quadrati ex CD , descripti. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB , & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF , nō maius quam quadratum ex dimidia AE , ita ut latus CF , non maius sit latere AE . Edm. Et ergo ad AB , perpendiculari EG , sit EH , æqualis ipsi CF . Deinde acta HI , parallela ipsi AB , demittatur IK , perpendicularis ad AB . Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus AK , KB , æquale esse quadrato ex IK , hoc

hoc est, quadrato ex CF , atque adeo & rectilineo dato, cui equal
le est positum quadratum ex CF . Quod est propositum. Diximus
autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadra
tum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esses, esset quoque
recta CF , maior quam recta EG . Quare ex EG , abscondi
non posset recta ipsi CF , equalis: quod tamen ad problema ef
ficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem
applicetur quarta pars quadrati ex minore de
scripti, deficiens figura quadrata; Non erunt seg
menta, quæ ex applicatione fiunt, equalia.

SINT duæ rectæ inæquales AB , & C & ad ma
iorem AB , applicetur parallelogrammum deficiens
quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati
ex minore C , descripti, ita ut DB , latus sit quadra
ti, quo parallelogrammum ap
plicatum deficit. Dico segmen
ta AD , DB , inæqualia esse. Si enim AD , DB , seg
menta dicantur esse equalia; cum ex 1. lemmate pa
rallelogrammum applicatum ad AB , deficiensque
figura quadrata ex DB , descripta, æquale sit rectan
gulo sub AD , DB ; sit autem quod sub equalibus
 AD , DB , quadratum; erit dictum parallelogram
mum, quadratum ex AD , dimidio ipsius AB , descri
ptum; atq; adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadra
tum ex AB , quadruplum erit ipsius parallelogrammi:
Est autem & quadratum ex C , per hypothesim, qua
druplū eiusdē parallelogrammi applicati, nempe quar
tæ partis quadrati ex C . Igitur quadrata rectarū ex
 AB , et C , equalia sunt, atq; rectæ AB , et C , equalēs.

D 4 quod

Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD , DB . Quod est propositum.

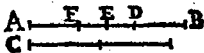
HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH , æqualis dimidiata parti ipsius CD , nempe ipsi CF , ductaque HI , parallela ipsi AB , & tandem demissa perpendicularis IK , ut partes factæ ex applicatione sint AK , KB ; manifestum est AK , KB , segmenta esse inæqualia, cum AB , in E , secta sit bisariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, de-
ficiens figura quadrata; in partes longitudi-
ne commensurabiles ipsam diuidet.

S I N T duæ rectæ inæquales AB , & C , quarum maior
 AB ; quartæ autem parti quadrati ex minori C , descripti, per
lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB , pa-
rallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque seg-
menta AD , DB , longitudine commensurabilia. Dico AB ,
plus posse quam C , quadrato lineæ
longitudine sibi commensurabilis.



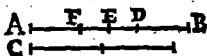
Quoniam per 3. lemma præceden-
tis propos. AD , maior est, quam DB ; diuidatur AB , bifa-
riam in E , & ipsi ED , æqualis sumatur EF . Quo facto,
cum totæ EA , EB , æquales sint, & ablatae quoque EF , ED ;
erunt & reliquæ AF , BD , æquales. Et quia recta AB , diui-
sa est bifariam in E , & non bifariam in D ; erit rectangulum
sub AD , DB , una cum quadrato ex ED , æquale quadrato
ex EB ; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD , DB ,
& quadrati ex ED , æquale erit quadruplo quadrati ex EB .
Est autem quadruplo rectanguli sub AD , DB , æquale qua-
dratum ex C ; (Ponitur enim rectangulum sub AD , DB ,
æquale quartæ parti quadrati ex C ,) & quadruplo quadra-
ti ex ED , æquale est quadratum ex FD ; (quadratum enim
ex FD , quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadra-
ti ex ED , cum FD , dupla sit ipsius ED ,) & quadruplo qua-
drati ex EB , æquale est quadratum ex AB . (quod quadra-
tum ex AB , quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2.
quadrati ex EB ; dimidiata parte ipsius AB .) Igitur & qua-
drata ex C , & FD , æqualia sunt quadrato ex AB ; Ac pro-
inde recta AB , plus potest quam recta C , quadrato rectæ
 FD . Hanc igitur FD , demonstrare oportet longitudine cõ-
mensurabilem esse ipsi AB . Quoniam rectæ AD , DB ,
longitudine ponuntur commensurabiles; erit quoque to-
ta AB , parti DB , commensurabilis longitudine. Est autem
& ipsi DB , composita ex DB , AF , longitudine commen-
surabilis: (quod cõposita ex DB , AF , dupla sit ipsius DB)
Igitur cum utraque AB , & composita ex DB , AF , longitu-
dine

5. secundi

16. decimi

1. decimi.

dine sit commensurabilis ipsi DB; erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles;



Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. comensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.

Si iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, comensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine comensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum utraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

12. decimi.

16. decimi.

18.

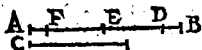
14.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, &

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat ; maior tanto plus poterit, quam minor, quātum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis . Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficientis figura quadrata ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet .

SINT duæ rectæ inæquales $A B$, & C , quarū maior $A B$; quartæ autem parti quadrati ex C , minori descripti applicetur ad $A B$, per autem lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficientis figura quadrata, quod faciat in recta $A B$, partes $A D$, $D B$, longitudine incommensurabiles . Di-



co $A B$, plus posse quam C , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis . Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus $A B$, plus posse quam C , quadrato rectæ $F D$. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A , longitudine esse incommensurabilem . Quoniam rectæ $A D$, $D B$, ponuntur longitudine incommensurabiles ; erit quoque tota $A B$, parti $D B$, longitudine incommensurabilis . Sed $D B$, longitudine commensurabilis est compositæ ex $D B$, $A F$, cum hæc illius sit dupla . Igitur cum duarum linearum commensurabilium $D B$, & quæ componitur ex $D B$, $A F$, ipsa $D B$, longitudine sit incommensurabilis rectæ $A B$: erit quoque reliqua composita ex $D B$, $A F$, eidem $A B$, longitudine incommensurabilis : Ac præterea cum $A B$, composita ex $A F$, $D B$, tanquam una, & ex $F D$, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex $A F$, $D B$, erit eadem $A B$, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ $F D$, longitudi-

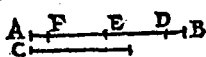
ne

17. dec imi

14. decim

ne incommensurabilis. Ergo AB , plus potest quam C , quadrato rectæ FD , longitudine sibi incommensurabilis.

Iam vero AB , plus possit quam C , quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati



ex C , æquale parallelogrammum applicetur ad AB , deficiens figura quadrata, faciatque in recta AB ,

partes AD , DB . Dico & rectas AD , DB , esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus ut prius, rectam AB , plus posse quam C , quadrato rectæ FD . Quare cum AB , ponatur plus posse, quam C , quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit AB , ipsi FD incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota AB , composita ex FD , & ex AF , DB , tanquam una, longitudine incommensurabilis sit ipsi FD ; erit eadem AB , per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex AF , DB , longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex AF , DB , ipsi DB , longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex AF , DB , componitur, & DB , ipsa composita ex AF , DB , longitudine incommensurabilis sit rectæ AB ; erit & reliqua DB , eidem AB , longitudine incommensurabilis; Ac proinde cum tota AB , composita ex AD , DB , incommensurabilis sit ipsi DB , longitudine; erunt & ipsæ AD , DB , longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM. I.

EGIT hætenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA. I.

QUONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles

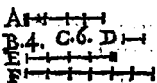
rabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

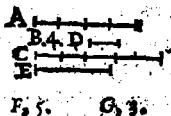
EX PROCLO. Rationales uocat eas lineas, quæ expositæ Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum: Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

S C H O L I O N. II.

ITAQUE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera equalis est expositæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expositæ equalis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis *A*, diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero *B*. Sumpto deinde quolibet alio numero *C*, sit *D*, recta vna partium rectæ *A*; & quoties *D*, metitur lineam *A*, toties metiatur quandam aliam *E*. Item quoties unitas est in *C*, toties eadem *D*, metiatur quampiam aliam lineam *F*. Quoniam igitur *A*, & *E*, componuntur ex paribus multitudine equalibus; quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi *D*; ipsæ æquales erunt. Rursus quia *D*, metitur omnes tres *A*, *E*, & *F*, erunt omnes tres *A*, *E*, & *F*, longitudine commensurabiles. Quare *E*, & *F*, Rationali *A*, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant *D*, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt due Rationales *E*, *F*, longitudine cōmensurabiles & inter se, & expositæ Rationali *A*, & quarū una, nempe *E*, equalis est Rationali expositæ *A*.



I A M uero *D*, metiatur duas lineas quasdam *C*, *E*, per duos numeros *F*, *G*, quorum neuter idem sit, qui *B*, ita ut utraque linea *C*, & *E*, inequalis sit ipsi *A*. Erunt igitur ut prius, tres rectæ *A*, *C*, *E*, mensuram habentes communem *D*, longitudine commensurabiles. Quare *C*, *E*, Rationali *A*, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt due Rationales *C*, *E*, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali *A*,

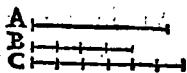


li *A*,

li A , quarum neutra aequalis est Rationali exposita A .

POSTREMO exposita Rationali A , inueniatur recta B , longitudine tantum incommensurabilis, qua secetur in quot

cunque partes aequales, & sumatur C , composita ex alijs quocun-



facto, erunt B , & C , longitudine

commensurabiles. Dico easdem exposita Rationali A , potentia solum esse commensurabiles. Quoniam A , B , potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A , quadrato ex B , commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B , commensurabile quadratum ex C , quod B , C , longitudine sint commensurabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum

A , & C , commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C , ip-

si A , potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B , C , longitudine commensurabilium B , est ipsi A , lon-

gitudine incommensurabilis; erit quoque reliqua C , eidem A , longitudine incommensurabilis. Est ergo C , solum potentia

ipsi A , commensurabilis. Et quia B , & C , Rationali-exposita A , potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta

erunt duae Rationales B , C , longitudine quidem inter se com-

mensurabiles, potentia uero tantum commensurabiles expositae Rationali A . Quod est propositum.

QVOD si quis optet inuenire quocunque lineas Ratio-

nales longitudine inter se commen-

surabiles, id efficiet hoc modo. Sum

pta mensura quauis A , componan-

tur quotlibet lineae B , C , D , ex tot

partibus ipsi A , aequalibus, quot

sunt unitates in totidem numeris

inaequalibus E , F , G . Nam lineae B , C , D , habentes communem

mensuram A , longitudine cummensurabiles erunt.

CATERVM & omnes lineae Rationales, non solum ex-

posita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc

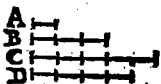
modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae ex-

posita Rationali sunt commensurabiles uel longitudine & po-

tentia, uel potentia tantum; quae autem eidem commensu-

rabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,

Rati-



E , 3.

F , 5.

G , 4.

1. decim

12. decim

14. decim

6. desin

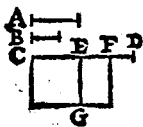
12. decim

Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratū ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. Quo-



niam igitur est ut CE, ad EF, hoc est, ut A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, ut B, ad A, ita rectangulū FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurable, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurable Rationali spa-

sio

no B. Dico & A, Rationale esse. Sit C, quadratum
 Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur,
 uel irrationalia, quod nimirum ab ex
 posita Rationali describitur. Quonia 
 igitur B, Rationale est, erit ipsum Rationali C, com-
 mensurabile? Est autem & A, ipsi B, commensurabi-
 le. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B,
 inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde
 A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expo-
 sita descripto commensurabile, Rationale est. Quod
 erat demonstrandum.

2. defin.

12. decimi

9. defin.

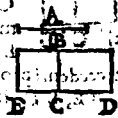
19.

15.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine
 commensurabilibus rectis lineis, secundum
 aliquem prædictorum modorum, contine-
 tur rectangulum; Rationale est.

Si exposita Rationalis A, & spatium rectangulum
 B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensu-
 rabilibus B C, C D, secundum aliquem prædictorum mo-
 dorum (hoc est, secundum aliquem trium
 modorum, quos in scholio 2. antecedentis
 propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsa-
 rum B C, C D, Rationali exposita A, sit
 æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque
 commensurabilis sit aut longitudine, aut
 potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale esse.
 Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadra-
 tum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expo-
 sitæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel
 potentia solum, erit quoque quadratum B E, ex B C, descri-
 ptum quadrato ex A, commensurabile. Est autem quada-



2. defin.

12. decimi

3. defin.

E tum

tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est ut E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali b E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

S i t rursus exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. præcedentis exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia; vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendimus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem ut B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine; ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine; sed & Rationalis; quippe quæ Rationali B C, atque idcirco Rationali expositæ A, commensu-



mensurabilis sit, ut in scholio propof. 12. huius lib. demon-
strauimus. Quare latitudo CD , Rationalis est, & longi-
tudine commensurabilis ipsi BC . Si igitur Rationale ad
Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat
demonstrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale,
Irrationalis est.

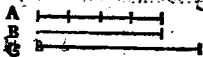
POSSIT recta A , spatium Irrationale, hoc est,
quadratum ex A , æquale sit spatio cuipiam Irrationa-
li. Dico A , Irrationalem esse. Si e-
nim dicatur Rationalis; erit eius qua A ———
dratum Rationale quoq; , ut in demonstratione pro-
pos. 26. huius lib. ostensum est. quod est absurdum.
ponitur enim Irrationale. Non ergo A , Rationalis
est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib.
Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, uocantur Ir-
rationales.

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia solum
commensurabiles inuenire.

DVO genera sunt linearum Rationalium poten-
tia tantum inter se commen-
surabilium. Aut enim altera
earum est æqualis expofitæ



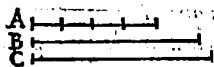
Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita
inueniemus. Sit expofita Rationalis A , cui æqua-
lis sumatur B . Deinde ipsi B , inueniatur C , longitu-
dine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est)

E 2 poten-

11. decimi.

potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt (B, quidem, quod et sit equalis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, equalis est.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui



longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B; & huic rursus longitudine

tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propos. 12. huiuslib. demonstrauimus. Quare cum utraque B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; erunt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

SCHOLION.

QVOD si inueniente sint quocunque linea Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequatur id hæc ratio.

SUMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot linea Rationales querun-

rum, nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationalis, et
 fiat, ut A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, ut in
 coroll. propof. 6. huius lib. ostenditur. Item, ut B, ad C, ita
 quadratum ex F, ad quadratum ex G, ut in
 A, ut in E, ut in F, ut in G, ut in H.
 ut C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H.
 tum ex G, ad quadratum ex H.

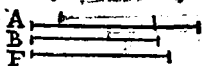
ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tan-
 tum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sunt,
 manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem ha-
 beant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex B, ad
 quadratum ex F, ut numerus A, ad numerum B; ex construc-
 ctione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, ut B, ad C;
 & quadratum ex G, ad quadratum ex H, ut C, ad D. At
 vero ex eoque quadratum ex E, ad quadratum ex G, ut A, ad C;
 similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, ut A, ad D;
 & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, ut B, ad D.)
 erunt ipsa inter se commensurabilia; ac pro-
 pterea & recte ipse potentia saltem commensurabiles. Existen-
 te ergo E, Rationali, primi & relique F, G, H, Rationales.
 Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita osten-
 demus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt nume-
 ris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non
 habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus;
 non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportio-
 nem, quam numeri quadrati. Quare recte E, F, G, H, longitu-
 dine incommensurabiles sunt. Ostense sunt autem Rationales,
 & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & poten-
 tia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

Quod si propositum, quaecunque Rationalibus potentia so-
 lum commensurabilibus, inveniunda sit adhuc alia, qua omni-
 nibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc mo-
 do. Sint propositae due Rationales potentia tantum
 commensurabiles A, B, ut in E, ut in F, ut in G, ut in H.
 quarum quadrata propor-
 tionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto
 autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit;
 Invenietur autem huiusmodi numerus facile, si fuerit pri-

6. decimi

9. decimi.

num, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat ut D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. prop. 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit,



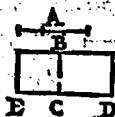
C, 10. ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, E, 7. saltem potentia, cum qua-

drata rectarum B, F, sita portionem habentia, quam numeri D, E, commensurabilia sunt. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus, quod D, & E, sint inter se primi; erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex aequo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, ut C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; erunt A, F, longitudine incommensurabiles; &c.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposta Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali, expostæ A, siue non.)



Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, ut ex B C, quadratum B E, quod

quod erit Rationale, ut in demonstratione propos. 10. diximus. Et quoniam est ut EC , hoc est, BC , ad CD , ut BE , ad BD : Est autem BC , ipsi CD , longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex his, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE , ipsi BD , incommensurabile. Quare cum BE , commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A : Sit autem BE , ipsi BD , incommensurabile; erit quoque quadratum ex Rationali exposita A , eidem BD , incommensurabile; Ac propterea BD , quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD , Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

Vocatur autem hæc linea potens ipsum BD , Media; propterea quod media proportionalis sit inter duas BC , CD , Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD , sub ipsis BC , CD , comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

ITAQUE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se incommensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus cõsentire. Nã sola hac linea Media hoc loco appellatur.

UT autem recte hoc loco monet Campanus, nõ solũ recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus cõsentire, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipsius, vel rectangulum illud Mediũ dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum

1. sexti.

9. definit.

14. decimi.

10. definit.

17. sexti.

17. sexti.

ilatarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilem, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter distas Rationales. Nam si tres linee sine continue proportionales, quales sunt $B'C$, & recta irrationalis, qua Media dicitur, & $C'D$; erunt quoque rectilinea similia, similiterq; descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propof. 22. lib. 6. demonstratumus. Quare quadratum ex Media descripta proportionale est inter quadrata rectarum $B'C$, $C'D$, ideoq; Medium appellari potest.

Hoc autem non ita intelligat, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium $B'D$. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medys longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propof. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

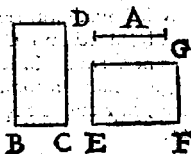
Vnde Medium describi sic poteris, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aequale est, ita ut ipsum possit linea recta, qua Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt dua linee Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematu ostendemus.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Si Γ linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturque ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulum, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilem. Quoniam A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus inter se contentum; alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et



quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D; æqualia erunt B D, & E G, lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit ut B C, ad E F, ita F G, ad C D; Ac propterea quoque ut quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales, atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum,) Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; proptereaque & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo etiam F G, Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, exposita Rationali commensurabilis, ut ostendimus in scholio propos. 2. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam

22.

20.

45. primi

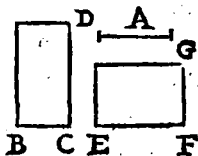
14. sexti.

22. sexti.

10. decimi.

nam

niam $E F$, $F G$, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est ut $E F$, ad $F G$, ita quadratum ex $E F$ ad rectangulum $E G$, sub $E F$, $F B$, contentum, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit



quadratum ex $E F$, incommensurable rectangulo $E G$, atq; adeo rectangulo $B D$, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex $E F$, commensurable est quadrato ex $C D$. (quod $E F$, $C D$, Rationales sunt, atq; idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum

quadratum ex $C D$, commensurable sit quadrato ex $E F$; at rectangulum $B D$, eidem quadrato ex $E F$, incommensurable; incommensurabilia erunt quadratū ex $C D$, & rectangulum $B D$. Est autem ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. quadratum ex $C D$, ad rectangulum $B D$, ut recta $C D$, ad rectam $B C$. Incommensurabiles ergo sunt longitudine $C D$, & $B C$. Rationalis ergo est $C D$, & Rationali $B C$, longitudine incommensurabilis. Quamobrē, quod a Media fit, ad Rationalem applicatū, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

FACILIVS quam ex propof. 45. lib. 1. applicabimus ad $B C$, rectangulum quadrato ex A , æquale, si ipsis $B C$, & A , sumatur tertia proportionalis pro latere $C D$. Cum enim $B C$, A , & $C D$, proportionales sint; erit rectangulū $B D$, sub extremis $B C$, $C D$, contentum æquale quadrato medie proportionalis A .

HAC arte utendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam linea recte.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Mediū, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidā alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurable. Quare rectangulum hoc applicatum Medio

dio aequale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia so-
lum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quod-
cunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub
duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE cōmensurabilis, Media est.

S. I. r. Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudi-
ne & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam
esse. Exposita enim sit Rationalis CD, ad quam applicetur
rectangulum DE, æquale quadra-
to ex A. Media. Quoniam igitur
DE, Medium ad Rationalem CD,
applicatum, facit CE, latitudinē;
erit CE, Rationalis ipsi CD, lon-
gitudine incommensurabilis. Rur-
sus ad CD, Rationalem applice-
tur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia re-
ctæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque ro-
rum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, DE, DF,
cōmensurabilia. Est autem ut DE, ad DF, ita recta EC,
ad rectam CF. Igitur EC, CF, longitudine sunt cōmen-
surabiles: Sed EC, ostensa est Rationalis, & longitudine
ipsi CD, incommensurabilis. Igitur & CF, longitudine
eidem CD, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationa-
lis sit, propterea quod Rationali expositæ CD, sit cōmen-
surabilis; (Nam cum EC, CF, sint longitudine ostensæ
cōmensurabiles, & EC, ipsi CD, cōmensurabilis saltē
potentia, quod Rationalis sit, erit & CF, eidem CD, com-
mensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propos. 12.
huius lib. scripsimus.) erunt CD, CF, Rationales poten-
tia tantum cōmensurabiles; Ac proinde recta B,
potens rectangulum DF, sub Rationalibus po-
tentia tantum cōmensurabilibus CD, CF,
Media est. Mediæ igitur cōmensura-
bilis, Media est. Quod osten-
dendum erat.

COROL.

23.

21.

45. primi.

13. decimi.

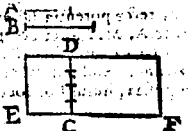
45. primi.

1. sexti.

10. decimi.

14. decimi.

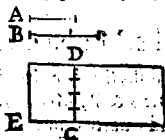
22. decimi.



COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est DE , commensurabile esse Medio DE , ostensum ex eo mox fuit DE , esse quoque Medium. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

S i τ spatium DE , spatio Medio DE , commensurabile. Dico



& DE , Medium esse. Possit enim A , Media ipsum DE , Medium. (Nam cū DE , Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, ut in scholio propof. 22. huius lib. tradidimus.) & B , ipsum DE . Quoniam DE , DE , commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A , & ipsis æqualia, commensurabilia. Quare

A , B , rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Ac idcirco existente A , Media, erit & B , illi commensurabilis Media, ut in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DE , Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propof. 22. huius lib. docuimus.

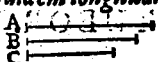
LEMMA. I.

QVEMADMODUM autem in Lemmate 1. propof. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuerse enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis:

LEM.

LEMMA. 11.

D. V. A s rectas Medias longitudine commen-
surabiles; Item duas potentia tantum commen-
surabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur due
recte commensurabiles B, C; illa quidem longitudine,
hec vero potentia tantum; erit 
utraq; B, C, Media A, com-
mensurabilis; Media: Cum ergo A, B, sint longitu-
dine commensurabiles; & A, C, potentia tantum;
erunt inuenta A, B, Media longitudine commensura-
biles; & A, C, Media potentia solum commensura-
biles. Quod est propositum.

SCHOLION.

Q. V. A M V I S omnis linea recta Media commensurabilis,
Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Media est com-
mensurabilis; eiq; duae Medi adari possint prorsus incommen-
surabiles; longitudine videlicet, & potentia, ut ex propos. 36.
huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, qua nam via in-
uenienda sint duae Media longitudine & potentia incommensu-
rabiles.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

Q. V. O D sub Medijs longitudine com-
mensurabilibus rectis lineis continetur re-
ctangulum, Medium est.

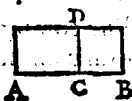
CONTINEATUR rectangulum A D, sub Medijs
A C, E D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Me-
dium

24. definit.

24.

23.

dium esse. Describatur ex CD , Media quadratū BD , quod erit Mediū. Et quoniam est ut AC , ad CB , ita AD , ad DB :



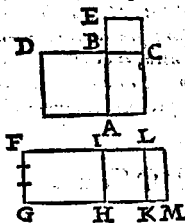
Sunt autem AC , CB , hoc est, AC , CD , longitudine cōmensurabiles; erunt AD , DB , cōmensurabilia. Quare spatiū AD , Medio DB , cōmensurabile, Mediū est, ex coroll. præcedentis propos. Quod er

go sub Medijs longitudine cōmensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur re ctangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC , comprehensum sub Medijs AB , BC , potentia tantum cōmensurabilibus. Dicō AC , esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB , BC , quadrata AD , CE , quæ Media erunt, ut in scholio propos. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB , BC , Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG , ad quam applicetur



rectangulum FH , quadrato AD , ex AB , descripto æquale; & ad HI , rectangulum IK , rectangulo AC , æquale; & denique ad KL , rectangulum LM , æquale quadrato CE , ex BC , descripto; eritque totum FM , vnum rectangulum, quemadmodum propos. 43. lib. 1. est ostensum. Quia verō AD , CE , Media sunt, erunt & FH , LM , illis æqua-

lia, Media: quæcum applicentur ad Rationales FG , KL , (est enim & KL , Rationali FG , æqualis; ob parallelogrammum FK , Rationalis.) faciantque latitudines GH , KM , erunt rectæ GH , KM , Rationales, ipsi FG , seu KL , longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB , BC , potentia inter se sunt cōmensurabiles, erunt & eorū qua-

dra

drata AD , CE , atque adeo ipsis equalia rectangula FH , LM , commensurabilia: Vt autem FH , ad LM , ita est recta GH , ad KM . Igitur GH , KM , longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH , KM Rationales ostense, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali uero FG , solum commensurabiles potentia, cum ei ostense sint longitudine incommensurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis GH , KM , Rationale est. Et quoniam est, ut DB , ad BC , ita AB , ad BE ; (quod DB , BC , ipsi AB , BE , sint æquales, utraq; utrique.) & ut DB , ad BC , ita AD , ad AC ; & ut AB , ad BE , ita AC , ad CE ; erit quoque ut AD , ad AC , ita AC , ad CE ; atque adeo AD , AC , CE , proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH , HL , LM , proportionalia erunt: Habent autem rectæ GH , HK , KM , eandem proportionem, quas rectangula FH , HL , LM . Igitur & rectæ GH , HK , KM , proportionales sunt, proptereaque rectangulum sub GH , KM , quadrato ex HK , æquale est. Est autem rectangulum sub GH , KM , ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK , Rationale est; ideoque & recta HK , Rationalis erit; & ob hoc ipsi FG , Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI , commensurabilis uel longitudine, uel solū potētia. Et si qui dē HK , ipsi HI , longitudine sit commensurabilis; rectangulū HL , sub Rationalibus HI , HK , longitudine commensurabilibus contentū, hoc est, AC , illi æquale, erit Rationale. Si uero HK , ipsi HI , potētia solū commensurabilis sit; erit rectangulū HL , sub Rationalibus HI , HK , potētia tantū commensurabilibus contentū, hoc est, AC , illi æquale, Mediū. Est ergo AC , rectangulū sub Medijs AB , BC , potētia tantū commensurabilibus contentū, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

FACILIVS quā ex 45. propof. lib. 1. applicabim⁹ ad HI , rectangulū ipfū AC , æquale; si tribus rectis HI , AB , BC , quarta proportionalis sumatur pro basere HK . Nā rectangulū sub extremis HI , HK , æquale erit rectangulo sub medijs AB , BC . Hac eadē arte usemur in sequētib⁹, quādo ad aliquā rectā applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

Q V O.

1. sexti
10. decimi.

20. decimi.

1. sexti

1. sexti

17. sexti

6. defin.

20. decimi.

22. decimi

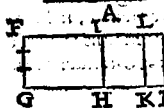
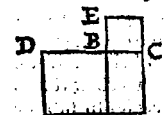
12. sexti.

16. sexti.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, ne-
ctangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tan-
tum commensurabilibus esse uel Rationale, uel Medium; do-
cebit Euclides propos. 28 quam ratione inuenienda sint due
Media potentia tantum commensurabiles, quae Rationale
comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum
commensurabiles inquiret, quae spatium Medium contineant.

ITA QV B habemus ex his, rectangulum contentum sub
20. decimi. duabus Rationalibus longitudine cōmensurabilibus esse Ratio-
nale; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantū cōmensura-
22. decimi. bilibus contentum rectangulam esse Irrationale, appellariq;
Medium, & rectam, quae ipsum potest, Medium. Rursus ex
25. decimi. demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus
26. decimi. Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; Rectan-
gulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensura-
bilibus comprehensum esse uel Rationale, uel Medium.

QV O P si quis roget, qualemam rectangulum sit illud,
quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensu-
rabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse,
nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe
equale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali,
& Irrationali, quae Media appellatur.



S I C enim rectangulum A C, com-
prehensum sub duabus Medijs AB, BC,
longitudine & potentia incommensura-
bilibus. Dico A C, neque Rationale ef-
se, neque Medium, &c. Constructis
eisdem, ut in theoremate, ostendemus
similiter, rectas G H, K M, Rationa-
les esse, & ipsi F G, longitudine in-
commensurabiles. Et quia recta AB,
B C, ponuntur incommensurabiles
longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D,
C E, atque adeo ipsi equalia rectangula F H, I M,
incommensurabilia: Vt autem F H, ad I M, ita est recta
G H, ad rectam K M. Igitur rectae G H, K M, longitudine
inter se sunt incommensurabiles. Quare G H, K M, offensa
Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles;
Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Irrationale
est.

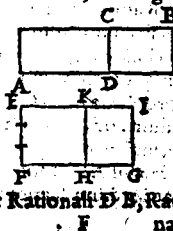
1. sexti.
10. decimi.
22. decimi.

est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis. 22. decimi.
 lya, que dicitur Media. Potest autem rectangulum sub ipse 17. sexti.
 $G H, K M$, recta $H K$. (Nam, ut prius, ostendimus, uter $G H, H K, K M$, esse proportionales.) Igitur $H K$, Irrationalis
 est, & Media. Quare $I K$, Rationale non est: si enim Rati- 21. decimi.
 onale esset, faceret ipsum ad Rationalem $H I$, applicatum latus
 dinem $H K$, Rationalem, & ipsi $H I$, longitudine commensura 23. decimi.
 bilem. Quod est absurdum. ostensa enim est $H K$, Irrationalis,
 ac Media. Eodem modo neque $I K$, Medium est; Si enim esset
 Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem $H I$, latus
 dinem $H K$, Rationalem, & ipsi $H I$, longitudine incommen-
 surabilem. quod est absurdum. ostensa est enim $H K$, Irrati-
 onalis, & Media. Itaque cum $I K$, neque Rationale sit, neque
 Medium; necessario neque $A C$, illi aequale, Rationale erit,
 neque Medium, sed tertium quoddam genus constituens, nempe
 aequale erit ipsi $I K$, quod sub Rationali, & Media, continetur,
 cum $H I$, Rationalis sit, & $H K$, ostensa Media. Ex quibus ef-
 ficitur, rectam qua potest spatium sub duabus Medijs longitu-
 dine & potentia incommensurabilibus (quales ponuntur $A B$,
 $B C$, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali,
 & Irrationali, qua Media vocatur, consentum. Quod est
 propositum.

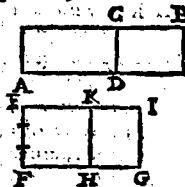
THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIUM non superat Medium Ra-
 tionali.

SUPERAT Medium $A B$, Medium $A C$, rectangulo
 $D B$. Dico $D B$, non esse Rationale.
 Sit enim, si fieri potest, $D B$, Rationa-
 le. Exposita ergo Rationali linea $E F$;
 ad ipsam applicetur rectangulum $E G$,
 Medio $A B$, aequale; & Medio $A C$,
 rectangulum $E H$, aequale, ut sit reli-
 quum $H I$, Rationali $D B$, aequale.
 Erunt igitur $E G, E H$, aequalia Me-
 dijs $A B, A C$, Media; & $H I$, aequale Rationali $D B$, Rati-
 onale.



nale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad Rationalem B F, sunt applicata; erunt rectæ F G, F H, Rationales, & ipsi E F, incommensurabiles longitudine. Rursum, quia



Rationale H I, applicatum est ad Rationalem H K; (est enim recta H K, Rationali E F, æqualis) erit recta H G, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabiles. Quare cum H G, E F, longitudine sint commensurabiles; & E F, ipsi F H, longitudine incommensurabiles, ut est

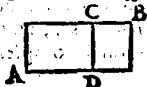
ostensum, erit & H G, eidem F H, longitudine incommensurabilis. Est autem ut F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum sub F H, H G, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. Igitur quadratum ex F H, incommensurabile est rectangulo sub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commensurabile est quadratum ex H G; (quod sint ambo ex lineis Rationalibus E H, H G, descripta) atque adeo & duo quadrata ex F H, H G, simul, quadrato ex F H, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub F H, H G, commensurabile est id, quod bis continetur sub F H, H G, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F H, H G, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F H, H G, bis. Quare & compositum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectangulo bis sub F H, H G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G. At quadratis ex F H, H G, una cum rectangulo bis sub F H, H G, æquale est quadratū ex F G. Igitur & quadratū F G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G: Est autem compositū hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F G, erit quadratum ex F G, Irrationale; ac propterea & recta F G, Irrationalis exister. Quod est absurdum. ostensa enim est F G, Rationalis longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Non ergo D B, quo Mediū A B, superat Mediū A C, Rationale est. Quam ob rem Mediū non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

SCHO.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationa e Rationali.

RATIONALE enim AB , superet Rationale AC , spatio DB . Dico DB , quoque esse Rationale. Quoniam AB, AC , Rationalia sunt; erunt AB, AC , commensurabilia quadrato Rationalis exposita; atq; adeo & inter se commensurabilia. Quare etiam totum AB , compositum ex AC, DB , commensurabile sit ipsi AC ; erit quoq; idem AB , reliquo DB , commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB , Rationale. Igitur & DB , ex lemme 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.



9. defn.
12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

27.
0.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTUR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B , potentia tantum commensurabiles, inter quas media proportionalis sumatur C ; fiatque ut A , ad B , ita C , ad D . Dico C, D , esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam A, B , Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Mediū uocatur; atq; adeo cū ipsum possit recta C , erit C , Media. Et quoniam est ut A , ad B , ita C , ad D ; suntq; A, B , potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D , solum commensurabiles potentia, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Est ergo & D , Mediae C , commensurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediae C, D , potentia tantum commensurabiles. Dico iam ip-

13. sexti.
12. sexti.

22. decimi.
17. sexti.

24. decimi.

fas continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum;

Est autem quadratum ex B, linea Rationale, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

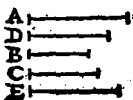
28.

PROBL. 5. PROPOS. 29.

O.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineat.

EXPONANTUR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad



C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, quod illi æquale est,

Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media. Ac propterea D, E, Medias sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationibus po-

tena

tentia solum commensurabilibus, Irrationale, & Medium. 22. decim
 Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo
 inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ
 Medium continent. Quod faciendum erat.

S C H O L I O N. I.

In ijs quæ sequuntur, indigebimus hoc problemate.

Dv o s numeros planos similes inuenire.

S Y M A N T V R quatuor quicunque numeri proportiona-
 les A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplican-
 tes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se mul-
 tiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri piani similes, quandoquidem
 latera habens proportionalia, ut ex con-
 structione est manifestum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Q V O N I A M autem in lib. 9. osten-
 sum est, si impar numerus, uel par parem multiplicet, procrea-
 ri numerum parem; Imparem uero, si impar multiplicet im-
 parem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo pla-
 ni similes, quorum uterque par sit, uel impar; Vel unus qui-
 dem par, alter uero impar. Si enim latera sumpta, sint nume-
 ri pares, erunt eorum piani pares etiam: si autem numeri sint
 impares, erunt & piani eorum impares. Quod si unus latera
 sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidē
 planus, impar; horum uero par: Similiter pares erant piani,
 si quilibet habeat unum latus numerum parem, alietum uero
 imparem, &c. 28. & 29. noni.

L E M M A I.

Dv o s numeros quadratos inuenire, ita
 ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

I N V E N I A N T V R per ea, quæ in scholio pro-
 ximo dicta sunt, duo piani similes A B, & C, quorum

F 3 vierque

uterque vel par sit, vel impar. Et quoniam, siue a pari
 & 26. par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est;

A E D B C
 detracto B D, ex AB, qui
 equalis sit ipsi C, erit reli-

quus AD, par. Quo diui-
 so bisariam in E; Dico
 numerum factum ex AB, in BD, qui quidem qua-
 dratus est, compositum cum quadrato numeri ED,
 facere quadratum. Quoniam numerus AD, bifa-
 riam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6.
 theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demon-
 strauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, una cum
 quadrato numeri DE, equalis quadrato numeri EB.
 Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD,
 & quadratus numeri DE, compositi faciunt qua-
 dratum, eum uidelicet, qui ex BE, gignitur. quod
 est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuen-
 tos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BB, ED,
 quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam
 numerus quadratus fit.

Quod si numeri sumantur AB, & C, non similes, uterq; tamē
 par, uel impar; inuenti erūt eodē modo duo quadrati numerorū BE,
 ED, quorū excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non est
 quadratus. Si. n. quadratus esset, numeri AB, BD, hoc est, AB, & C,
 plani similes essent. Quod est absurdū. ponuntur enim non similes.

SCHOLION. II.

ITAQUE si iubeamur inuenire duos quadratos nume-
 ros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sume-
 mus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, vel
 impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, ut in
 proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex BE,
 ED,

E D, descripti sunt illi, quos iquerimus. Excedit enim quadratus ex *B E*, quadratum ex *E D*, numero, qui producitur ex *A B*, in *B D*, qui etiam quadratus est.

A *E* *D* *B*
C

*S*i vero inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani *A B*, & *C*. non similes, quorum uterque par sit, vel impar, & veli-

A ... *E* ... *D* ... *B*
C

qua peragenda, ut prius. Nam similiter ostendemus, quadratum ex *B E*, equals esse quadrato ex *D E*, una cum eo qui ex *A B*, in *B D*, sit; Quare excessus quadratorum ex *B E*, *E D*, est numerus factus ex *A B*, in *B D*, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent *A B*, *B D*, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

*H*oc posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

LEMMA. II.

*D*uos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

*S*int duo numeri plani similes *A B*, & *C*, pares, vel impares, ut in lem-

A .. *H* .. *I* .. *E* .. *F* .. *G* ... *D* *B*
C

mate precedenti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus quadratus, qui sit ex multiplicatione similium numerorum *AB*, *DB*, inter se,

una cum quadrato ex D E, equalis sit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, unitas E F. Erit ergo quadratus ex A . . H . . I . E . F . G . . . D B . D E, minor C quadrato ex D E, quod & latus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex D F, in se fit, compositos non sufficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is uel maior quadrato ex B F, uel equalis, uel minor, quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit ergo latus ipsius uel aequale numero B E, uel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola unitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne unitas ipsa secetur; Eset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam B F, minus uero quam B E.) Si dicatur aequale, ita ut quadrato ex B E, equalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E, sit, ostensus in precedenti lemmate equalis numerus, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, equalis ei, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex A B, in D B; erit reliquus quadratus ex D F, equalis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, aequale, pars toti. Quod est absurdum.

absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter uero ex DF , in se fit, aequale est numero BE . Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequale numero BI , qui maior sit, quam BE , ita ut quadrato ex BI , aequalis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI , latere maiori, maior est quadrato ex BE , latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex AB , in BD , alter uero ex BF , in se fit, (cum hic compositus aequalis ponatur quadrato ex BI ,) maior quadrato ex BE . Est autem quadrato ex BE , ostensus in lemmate precedenti, aequalis numerus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DE . Ablato ergo communi, qui fit ex AB , in BD ; erit reliquus quadratus ex DF , reliquo quadrato ex DE , maior; ac proinde latus DF , latere DE , maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB , in BD , alter uero ex DF , in se, maius est latere BE . Sed neque aequale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex BF .

SIT iam, si fieri potest, numerus qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , aequalis quadrato ex BF ; & ponatur numerus AH , duplus unitatis EF . Quia igitur totus AD , totius ED , duplus est, (diuisus enim est AD in E , bisariam) & ablati AH , ablaque unitatis EF ; erit & reliquus HD , reliqui FD , duplus, ex us , quae ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD , in F , bisariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quae ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonstravimus, erit numerus qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis quadrato ex BF . Sed eadem

$A \dots H \dots I \dots E \dots F \dots G \dots D \dots B$ quadrato ex $C \dots$ BF , æqualis ponitur nume

rus, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato DF . Igitur qui fit ex HB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis est ei, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF ; & detracto communi quadrato ex DF , relinquetur, qui fit ex HB , in BD , ei qui fit ex AB , in BD , æqualis. Quare cum HB , AB , multiplicantes eundem BD , producant æquales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB , ipsi AB , æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , quadrato ex BF , æqualis.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF , ac propterea & latus eius latere BF , minus, quod sit BG , ita ut qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , æqualis sit quadrato ex BG . Sumatur autem ipsius EG , duplus AI . Quoniam igitur totus AD , totius ED , duplus est, & ablati AI , ablati EG ; erit rursus & reliquus ID , reliqui GD , duplus; ac propterea ID , in G , diuidetur bifariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , æqualis quadrato ex BG ; ponitur autem eidem quadrato ex BG , æqualis

equalis, qui fit ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Igitur qui fit ex IB , in BD , una cum quadrato ex DG , equalis est ei, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Ablatis igitur quadratis ex DG , & DF , quorum qui ex DG , minor est, remanebit qui ex IB , in BD , maior eo, qui ex AB , in BD , pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF , minor quadrato ex BF . Sed neque maior est ostensus, neque equalis. Non igitur quadratus est, qui ex AB , in BD , una cum quadrato ex DF . Quod est propositum.

SCHOLION. III.

Ex hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedent inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ linæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPO-

29.

17.

EXPONATUR linea Rationalis AB , & inveniatur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD , CE , quorum excessus DE , non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut



$C \dots E \dots D$ Quoniam ergo angulus F , rectus est in semicirculo; erit quadratum ex AB , æquale duobus quadratis ex AF , & FB ; hoc est, recta AB , plus poterit quam AF , quadrato rectæ FB . Et quia est quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , ut numerus CD , ad numerum DE ; erunt quadrata ex AB , AF , commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex AB , sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB , descriptum; erit & quadratum ex AF , Rationale, proptereaque & recta AF , ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB , AF ; atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia vero quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD , ad non quadratum DE , proportionem habeat quam quadratus ad quadratum; alias & DE , quadratus esset, ut in Arithmetiis est demonstratum. quod non ponitur) erunt rectæ AB , AF , longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur AB , AF , Rationales sunt, potentia tantum commensurabiles.

Item uero, quoniam est ut CD , ad DE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex AF , erit per conuersionem rationis, ut quadratus numerus CD , ad quadratum numerum CE , ita quadratum ex AB , ad quadratum ex FB . (sicut enim CD , superat DE , quadrato CE , ita etiam quadratum ex AB , superat quadratum ex AF , quadrato ex FB .) Quare rectæ AB , FB , longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB , AF , potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor

AF .

A F, quadrato lineæ FB, sibi longitudine commensurabilis.
Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

30.
18.

INVENIRE duas Rationales poten-
tia tantum commensurabiles, ita ut ma-
ior, quam minor, plus possit quadrato re-
ctæ lineæ sibi longitudine incommensura-
bilis.

EXPONATUR Rationalis linea A B, inuenianturque
per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati
C E, E D, ita ut ex illis compositus C D, non sit quadratus,
uel certe numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos
numeros non quadratos C E, E D: Vtrumvis enim horum
fiat, totus C D, ad neutrum
ipsorum C E, E D, propor-
tionem habebit, quam qua-
dratus ad quadratum, alias
secundum priorem modum,
esset totus C D, etiam qua-
dratus: iuxta posteriorem
uero, quilibet ipsorum C E,
E D, quadratus quoque, ut in Arithmetis ostensum est.



C, 144. E, 16. D C, 60. D
C..... E... D

quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius
lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadra-
tum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in se-
micirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur
recta F B. Poterit igitur, ut in præcedenti, A B, plus quam
A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales
potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est de-
monstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam uero
rursus; ut prius, est per conuersionem rationis, ut C D, ad
C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non ha-
bet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad
quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad qua-

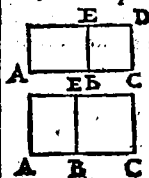
24. offani

mi. quadratum ex FB, proportionem, quā quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

L E M M A.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, ut AB,



ad BC, ita rectangulū sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis:

sexti.

perspicuum autem est, esse ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

Eodem modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quam BC.

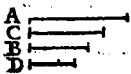
I.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

.25.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quam minor,

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudi-
ne commensurabilis.

REPERTÆ sint duæ Rationales A, B, potentia tan-
tum commensurabiles, ita ut A, maior plus possit quam B, 30. decimi.
minor, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis;
sitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A,
ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationa-
les, potentia solum commensurabiles;
erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & 22. decimi.
recta C, ipsum potens, linea Media. Et 
quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt au-
tem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt
quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in
scholio propos. 10. huius libri ostendimus. Quare D,
Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. 24. decimi.
Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensura-
biles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit
ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad
D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad
B, ita B, ad D; Ac propterea rectangulum sub C, & D,
æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadra-
tum ex B, Rationale Rationale sit; erit & rectangulum sub
C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C,
D, potentia tantum comensurabiles, Rationale. Quo-
niam uero est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autē A, plus
quam B, quadrato lineæ longitudine sibi cōmensurabilis, ex
constructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato
lineæ longitudine sibi commensurabilis. 17. sexti.
Inuenimus igitur
duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ
Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam mi-
nor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensura-
bilis. Quod faciendum erat. 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia
tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam
B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis;
reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem mo-
do, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum
commen-

commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

S C H O L I O N.

A L I I hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac facilius idem sine ipso ostendimus, ut facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solū commensurabiles, quæ Rationale contineant; non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

L E M M A.

S I sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

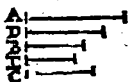
S I N T tres rectæ *AB, BC, CD*, in rectum constitutæ. Dico esse ut *AB*, ad *CD*, ita rectangulum sub *AB, BC*, ad rectangulum sub *BC, CD*. Describatur ex *BC*, quadratū *BCDE*, perficiaturque rectangulum *AF*; Eritque *AE*, contentum sub *AB, BC*; & *CF*, sub *BC, CD*; quod *BE, CD*, ipsi *BC*, æquales sint. Perspicuum autem est esse *AB*, ad *CD*, ut *AE*, ad *CF*. Quod est propositum.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant.

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus; A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propof. 21. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; fiatq; ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulum sub A, B, æquale quadratum ex D; & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propof. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles, Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propof. 10. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulo sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia so-



30. decimi.

13. sexti.

12. sexti.

17. sexti.

16. sexti.

22. decimi.

24. decimi.

22. decimi.

15. decimi.

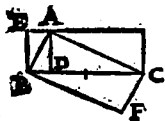
lum commensurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato linę rectę longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

Q u o n si repertę fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato linę sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quę Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato linę sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparet potest ex adducta demonstratione.

L E M M A. I.

S i t triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, a quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.

Q u o n i a m ex coroll. propof. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C B, B D, erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.



E A D E M ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll.

A C, media proportionalis est inter B C, C D.

R v r s v s quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo-

do rectángulū sub BD, DC, æquale quadrato ex A D.

POSTREMO, quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD, Quare rectángulum sub BC, AD, æquale est rectángulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectángulū CE, contentum sub BC, AD: Item rectángulum AF, sub AB, AC, contentum. Quoniam igitur rectángulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectángulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectángula CE, AF. quod est propositum.

8. sexti.

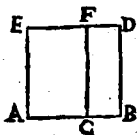
17. sexti.

41. primi

LEMMA. II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita rectángulum sub tota & maiore parte, ad rectángulum sub tota & minore parte contentum

SECETUR recta AB, non bisariam in C, sitq; maior pars AC. Dico esse ut AC, ad CB, ita rectángulum sub AB, AC, ad rectángulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC; & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. Quoniam igitur est ut AC, ad CB, ita AF, ad CD; cōstat propositū.



1. sexti.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

L E M M A I I I .

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales , minor autem secetur bifariam ; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli , quod sub maiori lineâ & dimidia parte minoris continetur .

S I N T duæ rectæ inæquales AB, BC , angulum rectum constituentes ABC , seceturq; minor BC , bifariam in D . Dico rectangulum



sub AB, BC , duplum esse rectangulum sub AB, BD . Compleatur rectangulum AC , sub AB, BC ; ducaturq; DE , ipsi AB , parallela; eritq; BE , contentum sub AB , &

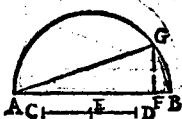
BD , dimidia minoris . Quoniam igitur AC , ipsius BE , duplum est, quod & basis BC , dupla sit basis BD ; constat propositum .

E O D E M modo , si BC , secta bifariam , sit maior , erit quod sub AB, BC , continetur, duplum eius, quod continetur sub AB , minore & BD , dimidia maioris , ut ex secunda figura apparet .

P R O B L . I O . P R O P O S . 34 .

I N V E N I R E duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium .

REPERIANTUR duæ Rationales AB, CD , potentia solum commensurabiles, ita ut maior AB , plus possit, quam minor CD , quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturq; CD , bifariam in E . Deinde per lemma 1. propof. 17. huius lib. ad AB , applicetur quadrato ex CE , hoc est, quartæ parti quadrati ex CD , æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB , continetur. Postremo descripto semicirculo AGB , circa AB , erigatur FG , ad AB , perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB . Quoniam igitur AB , plus potest, quam CD , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB , rectangulum sub AF, FB , æquale quartæ parti quadrati ex CD , deficiens figura quadrata; erit AF , ipsi FB , longitudine incommensurabilis. Est autem ut AF , ad FB , ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF , ad rectangulum sub AB, FB ; Rectangulum vero sub AB, AF , quadrato ex AG , & rectangulum sub AB, FB , quadrato ex GB , est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus AGB , rectus sit in semicirculo AGB . Igitur quoque erit ut AF , ad FB , ita quadratum ex AG , ad quadratum ex GB ; ac propterea cum AF, FB , longitudine sint incommensurabiles, erunt quadrata ex AG, GB , incommensurabilia. Igitur rectæ AG, GB , potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB , Rationale est, æqualeq; quadratis ex AG, GB ; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB , Rationale. Rursus, quia ex 1. lemma propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB , quod quadrato ex CE , æquale est factum, æquale est quadrato ex FG ; (propterea quod angulus AGB , rectus est, & FG , ad AB , perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE , æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE , æquales. Quare CD , dupla existens ipsius CE , dupla etiam erit ipsius FG . Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD , duplum erit rectanguli sub AB, FG . (cum FG , dimidia sit minoris CD ,)



31. decimi.

19. decimi.

31. tertij.

10. decimi.

4. defn.

47. primi.

E U C L I D . G E O M .

Sed rectangulum sub A B, C D, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub A B, F G, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub A G, G B. Contentum igitur sub A G, G B, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ



A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

S C H O L I O N.

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATUR Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum, fiatq; ut C, ad D,



A E B

- ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E, & eadem descripto quadrato ex A B, educatur E F, ad A B, perpendicularis. Quoniam igitur est ut C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum, erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum A B, tota longitudine sit incommensurabilis parti A E, erit eadem A B, & reliqua E B, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. Ut autem A B, ad A E, ita est quadratum ex A B, ad A E. Igitur cum A B, A E, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex A B, & rectangulum A F, incommensurabilia. Quare quadrato ex A B, existente Rationali,

li,

li, quod & $A B$, Rationalis ponatur, erit $A F$, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus $B F$, Irrationale esse. Quia vero $A F$, $B F$, componunt quadratum Rationale ex $A B$; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

$A T$ vero si $A F$, $F B$, Rationalia sint, ostendemus & totum $A F B$, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumq; $A F$, $F B$, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum $A F B$, ex ipsis compositum utriq; eorum commensurabile erit. Quare $A F B$, totum commensurabile utrique Rationali $A F$, $F B$, Rationale quoque est. Quod est propositum.

16. decimi.

9. desin.

PROBL. II. PROPOS. 35.

34.
28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

REPERIANTUR duæ Mediæ $A B$, $C D$, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior $A B$, plus possit quam minor $C D$, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas $A G$, $G B$, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media $A B$, æquale existens quadratis rectarum $A G$, $G B$, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum $A G$, $G B$, Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub $A B$, $C D$, duplum esse rectanguli sub $A B$, $F G$; atq; adeo

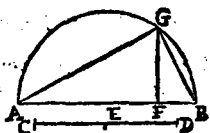
32. decimi.

47. primi.



G 4 illud

illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub A B, C D, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile, Rationale:



Sed per 1. lemma propos. 3. huius lib. rectangulo sub A B, F G, æquale est rectangulum sub A G, G B. Igitur & rectangulum sub A G, G B, Rationale est. O stensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum A G, G B, esse Medium. Inuentæ ergo sunt duæ

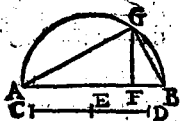
rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

35.
29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediū, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis.

33. decimi. REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior A B, plus possit quam minor C, D, quadrato lineæ



sibi longitudine incommensurabilis, fiantq; reliqua, ut I propos. 34. Ostendamus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, & quadratis rectæ

47. primi.

rum A G, G B, æquale, erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, ut in 14. demonstrabimus,

bimus, rectangulum sub $A B, C D$, duplum esse rectangu-
li sub $A B, F G$; atq; adeo illud esse huic commensurable.
Quare cum ex constructione, rectangulum sub $A B, C D$,
Medium sit; erit quoque rectangulum sub $A B, F G$, hoc
est, sub $A G, G B$, q; illi per 1. lemma propof. 33. huius lib.
æquale est, Mediū, ex coroll. propof. 24. huius lib. Quoniā
vero $A B$, longitudine incōmensurabilis ponitur ipsi $C D$;
Est autem eidē $C D$, ipsa $C E$, longitudine commensurabi-
lis, quod illa huius sit dupla; erunt $A B, C E$, longitudine
incommensurabiles: Sed vt $A B$, ad $C E$, ita est per lemma 3.
propof. 19 huius lib. quadratum ex $A B$. ad rectangulum
sub $A B, C E$, hoc est, ad rectangulum sub $A B, F G$, hoc
est, sub $A G, G B$. (sunt enim rectangula sub $A B, F G$, &
sub $A G, G B$, per 1. lemma propof. 33. huius lib æqualia.)
Igitur quadratum ex $A B$, hoc est, compositum ex quadra-
tis rectorum $A G, G B$, incommensurable est rectangulo
sub $A G, G B$. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ $A G$,
 $G B$ potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compo-
situm ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub
ipsis contentum Medium, incommensurableq; composito
ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

13. decimi.

10. decimi.

SCHOLIION.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad
propof. 24. huius lib. nos demonstratuos recapimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, &
potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadra-
tis rectorum $A G, G B$, quā rectangulum sub ipsis, esse Me-
dium, & hoc illi composito incommensurable; erunt quoque
lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum
Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam
potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent &
earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectorum
 $A G, G B$, & rectangulum sub $A G, G B$, commensurabilia,
quod

quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB , potens compositum ex quadratis rectarum AG , GB , & alia recta potens rectangulum sub AG , GB , idest, media proportionalis inter AG , GB ; inuenta erunt duæ Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIUM SENARIORVM
per compositionem.

36.
30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB , BC , potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lemma proposit. 21. huius lib. Dico totam AC , Irrationalem esse.

A ——— B ——— C

Quoniam AB , longitudine incommensurabilis est ipsi BC , & ut AB , ad BC , ita est rectangulum sub AB , BC , ad quadratum ex BC , per lemma

proposit. 31. huius lib. erit rectangulum sub AB , BC , quadrato ex BC , incommensurabile. Sed rectangulo sub AB , BC , commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB , BC , continetur; & quadrato ex BC , commensurabilia sunt quadrata rectarum AB , BC ; (omnia enim sunt Rationalia) atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB , BC , eidem quadrato ex BC , commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio proposit. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB , BC , continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB , BC . Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub AB , BC , & ex composito quadratorum rectarum AB , BC , hoc est, quadratum ex tota AC , (Est enim hoc quadratum æquale qua-

o. decimi.

16. decimi

le qua-

le quadratis rectorum A B, B C, vna cum rectangulo sub A B, B C, bis) composito ex quadratis rectorum A B, B C, incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectorum A B, B C, Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommensurabile, Irrationale est; atq; adeo & recta ipsa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis A B, B C, potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles, &c. Quod ostendendum erat.

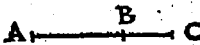
SCHOLIUM.

ITAEQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsis, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTUR duæ Mediæ superius inuictæ A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quia A B, est ad B C, vt rectangulum sub A B, B C, ad quadratum ex B C, vt in lemmate propos. 1. huius lib. est ostensum; sunt autem A B, B C, longitudine incommensurabiles; erunt rectangulum sub A B, B C, & quadratum ex B C, incommensurabilia: Sed rectangulo sub A B, B C, com-



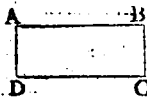
commensurabile est, quod sub AB , BC , bis; & quadrato ex BC , commensurabile est compositum ex quadratis rectorum AB , BC : (Nam cum AB , BC , potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC , commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB , BC , bis,

& compositum ex quadratis rectorum AB , BC , incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 4. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectorum AB , BC , una cum rectangulo bis sub AB , BC , hoc est, quadratum ex AC , quod huic composito æquale est, incommensurabile quoque est rectangulo sub AB , BC , bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB , BC , commensurabile rectangulum semel sub AB , BC , cum hoc sit illius dimidiū. Igitur quadratum ex AC , incommensurabile est rectangulo sub AB , BC : Ponitur autem rectangulum sub AB , BC , Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex AC ; & ob id recta quoque AC , Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.

LEMMA.

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATUR rectangulum $ABCD$, sub Rationali AB , & Irrationali BC . Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem AB , applicatum latitudinem BC , Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC , Irrationalis. Non ergo AC .



AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

38.

32.

COMPONANTUR duæ Mediæ superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, æquale est duobus quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, contineatur. Quoniam uero, ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurable, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum DG, utriusque ipsorum commensurable: Sed utrumque quadratorum ex Medijs AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (est enim GH, Rationali DE, æqualis.) erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles.

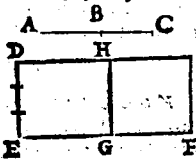
29. decim.

45. prim.

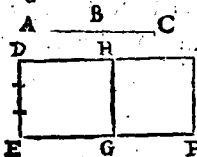
4. secund.

16. decim.

34. pri
23. decim.



mensurabiles sunt; & est vt $A B$, ad $B C$, ita quadratum ex $A B$, ad rectangulum sub $A B$, $B C$, ex lemmate 3. propof. 19. huius lib. erit quadratum ex $A B$, incommensurable re-
crangulo sub $A B$, $B C$, vt in scholio propof. 10. huius lib. ostē-
sum est: Atqui quadrato ex $A B$, ostensum est commensu-
rabile compositum ex quadratis rectorum $A B$, $B C$; & re-
ctangulo sub $A B$, $B C$, commensurable est, quod contine-



tur bis sub $A B$, $B C$, cum hoc il-
lius sit duplum. Igitur per ea, quæ
in scholio propof. 14. huius lib.
diximus, erit & compositum ex
quadratis rectorum $A B$, $B C$, hoc
est, rectangulum $D G$, incommen-
surabile rectangulo bis sub $A B$,

sexti.
decimi.
decimi.

$B C$, hoc est, rectangulo $H F$. Cum ergo sit vt $D G$, ad $H F$,
ita $E G$, ad $G F$; erit $E G$, ipsi $G F$, longitudine incommen-
surabilis: ostensum autem iam fuit $E G$, $G F$, esse Rationa-
les. Rationales igitur sunt $E G$, $G F$, potentia tantū comē-
surabiles; ac, ppter ea, & tota $E F$, cōposita, Irrationalis est.
Quare, per lemma antecedens, $D F$, cōtentū sub Rōnali $D E$,
& Irrationali $E F$, Irrationale est; Ac propterea & quadratū
ex $A C$, ipsi $D F$, æquale, Irrationale est. Quare & recta $A C$,
Irrationalis est. Vocetur aut ex binis Medijs secunda, seu vt
alijs placet, Bimediale secundū. Si duæ ergo Mediæ potentia
tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandū.

SCHOLION.

VOCAVIT Euclides in precedēti propositione lineā Ir-
rationalē $A C$, quæ cōponitur ex duabus Medijs potētia tantū
cōmēsurabilibus, quæ Rationale cōtineāt, ex binis Medijs pri-
mā: Hic vero lineā Irrationalē $A C$, quæ cōponitur ex duabus
Medijs potētia tantū cōmēsurabilibus, quæ Mediū cōtineāt, ex
binis Medijs secundā, quoniā Rationale & natura, & cognitio-
ne prius est Medio, quod Irrationale est, ex propof. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit cō-
positum ex quadratis partium maius, quàm re-
ctangulū

Et angulū sub partibus bis cōprehensum, quadrato eius lineę, quā maior pars minorem superat.

SECE TV R recta AD , in B , non bisariam, sitq; maior pars AB ; in qua sumatur BC , minori parti BD , æqualis, ut sit AC , excessus, quo AB , superat BD , hoc est, BC , ipsi BD , æqualem. Dico quadrata rectarū AB , BD , simul ma-

iora esse rectangulo bis sub AB , BD , quadrato rectę AC . Quo



niā quadrata ex AB , BC , æqualia sunt rectangulo bis sub AB , BC , una cum quadrato ex AC ; estq; BC , ipsi BD , æqualis; erunt quoq; quadrata ex AB , BD , æqualia rectangulo bis sub AB , BD , una cū quadrato ex AC . Quare quadrata ex AB , BD , maiora sunt, quā rectangulum bis sub AB , BD quadrato rectę AC . quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.

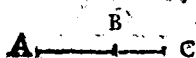
33.

SI duę rectę lineę potētia incōmēsurabiles cōponantur, quę faciāt cōpositū quidē ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub ipsis cōtinetur, Mediū: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duę rectę superius inuētę AB , BC , potētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū quadratis Rōnale; rectangulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico totā AC , esse Irrationālē. Qm rectangulū sub AB , BC , Mediū ponitur, erit & rectangulū bis sub AB , BC , illi cōmēsurabile, Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale.

Ponitur

- defin.* Ponitur autē cōpositū ex quadratis rectorū AB, BC , Rōnale Incōmēsurabile ergo est rectāgūlū bis sub AB, BC , cōposito ex quadratis rectorū AB, BC . Igitur & rectāgūlū bis sub AB, BC , una cum quadratis ex AB, BC , hoc est, quadratum ex AC , incommensurabile est composito ex quadratis rectorū AB, BC . Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; erit quadratum ex AC , illi incommensurabile, Irrationale; Ac propterea recta AC , Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex AB, BC , & rectāgūlū bis sub AB, BC , compositum ex quadratis rectorū AB, BC , per lemma antecesses, maius est rectāgulo bis sub AB, BC . Quare cum compositum ex quadratis rectorū AB, BC , Rationale sit, rectāgūlū uero bis sub AB, BC , Medium; recte uocabitur AC , Maior, si quidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



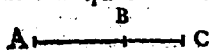
BC, & rectāgūlū bis sub AB, BC , compositum ex quadratis rectorū AB, BC , per lemma antecesses, maius est rectāgulo bis sub AB, BC . Quare cum compositum ex quadratis rectorū AB, BC , Rationale sit, rectāgūlū uero bis sub AB, BC , Medium; recte uocabitur AC , Maior, si quidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

40.
34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

- 3. decimi.* COMPONANTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC , potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectāgūlū uero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC , Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectorū AB, BC , Medium est; quod uero continetur bis sub AB, BC , Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC , semel continetur, Rationale ponatur;



rationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectorū AB, BC , Medium est; quod uero continetur bis sub AB, BC , Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC , semel continetur, Rationale ponatur;

ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurable rectangulo bis sub A B, B C. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, quadratum ex A C, incommensurable est rectangulo bis sub A B, B C. Cum ergo rectangulum bis sub A B, B C, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex A C, illi incommensurable, Irrationale; Ac proinde & recta A C, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandū erat.

10. defin.

17. decimi.

10. defin.

11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

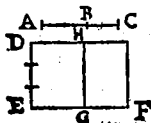
41.

35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurableque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONENTUR duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurableque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarum AB, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, re-

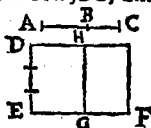
6. decimi.



45. primi.

H rectangu-

Secundi. Et angulum D F, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam uero tam



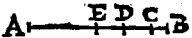
compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, at-

que adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illi sit commensurabile) Medium ponitur ; facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, id est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C : Eidem autem rectangulo sub A B, B C, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F ; erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F ; erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles : Atqui E G, G F, ostense sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles ; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali E F, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale est, ideoque & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.

L E M M A.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales ; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECTVR recta AB, inaequaliter in C, & rursus inaequaliter in D, sintque priores partes AC, CB, magis inaequales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diui

sa enim AB, bifariam in E,  cadet punctum D, uel inter E, C, uel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex EC, aequale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex ED, aequale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex EC, aequale rectangulo sub AD, DB, una cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inaequalibus rectarum inaequalium EC, ED, cum quadratu ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quonia uero quadratu ex AB, aequale est tam rectangulo bis sub AC, CB, una cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, una cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, una cum quadratis ex AC, CB, aequale rectangulo bis sub AD, DB, una cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB; erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

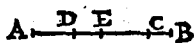
SE D cadat ia D, inter A, E. Quonia igitur partes AC, CB, magis inaequales ponuntur, quam partes AD, DB: erit AD; (qua minor est posterioru) maior quam

H 2 CB;

5. secundi

4. secundi

CB; (quæ priorū minor est) ac proinde cū AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.



Itaque quia rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex

EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, una cum quadrato ex DE. Igitur ut prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

secundi

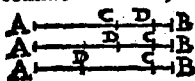
42.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

36.

QV AE ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina./

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut AC, CB, sint Rationales potentia tantū commensurabiles, ut uult propositio 37. huius libri. Dico



AB, ad aliud punctū diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiā Rationales. lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri pos-

test, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantū commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, uel minus inæquales sunt, quam partes AD, DB, uel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB,

CB,

C B, uel minora sunt quadratis ex A D, D B, uel maiora. (Neque enim partes A D, D B, ubicunque punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia uero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, ut in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, una cum rectangulo bis sub A D, D B, quod tam illa, quam hæc, æqualia sint quadrato ex A B; fit, ut qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in scholio propos. 34. huius. libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri demonstrauius; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

4. secundi

22. decimi.

27. decimi.

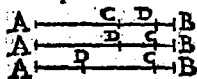
43.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

37.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB , diuisa ad punctum C , in sua nomina, ita ut AC , CB , sint Mediae potentia solum commensurabiles, quae Rationale contineant, ut uult propositio 38. huius libri. Dico AB , ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam Mediae lineae potentia tantum commensurabiles, continentisque



Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina AD , DB . Igitur ubicunque punctum D , existat, similiter probabimus,

ut in praecedenti propositione, excessum rectanguli bis sub AC , CB , & rectanguli bis sub AD , DB , eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC , CB , & compositi ex quadratis rectarum AD , DB : Sed excessus rectanguli bis sub AC , CB , & rectanguli bis sub AD , DB , spatium est Rationale. (Cum enim AC , CB , ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub AC , CB , ei, quod continetur semel sub AC , CB , commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub AD , DB . Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectangulibis sub AC , CB , & rectanguli bis sub AD , DB , spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC , CD , & compositi ex quadratis rectarum AD , DB , spatium Rationale est. Quia uero rectae AC , CB , Mediae sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrunque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD , DB . Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC ,

16. decimi.

27. decimi.

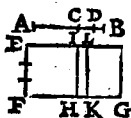
AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autē & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quā ob rem ad unum duntaxat punctum, diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44.
38.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad unū duntaxat punctū diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut AC, CB, Mediae sint potentia tantum commensurabiles, quae Medium contineant, ut uult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quae scilicet sint etiam lineae Mediae potentia tantum commensurabiles, continentisque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur ubi cunque punctum D, existat, similiter



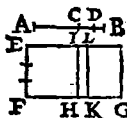
ostendemas, ut in propositione 43. quadrata ex AC, CB, uel maiora esse quadratis ex AD, DB, uel minora. Exponatur Rationalis EF, ad quam applicetur rectangulū EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquales erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quae illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erūt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quā IG; ac propterea EH, maius quā dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quā dimidiū ipsius FG. Eadē ratione osten-

45. primi

4. secundi.

H 4 demus

demus FK , maiorem esse d. mid. o ipsius FG . Inæquales ergo sunt partes FH , HG , partibus FK , KG , singulæ singulis. Quoniam uero AC , CB , Mediæ sunt, & potentia



commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH , per coroll.

propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit FK . Quare EH , EK , ad Rationalem EF , applicata faciunt latitudines FH , FK , Rationales ipsi EF , longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC , CB , ponatur Medium, erit & quod bis sub AC , CB , hoc est, IG , illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI , erit HG , Rationalis ipsi HI , longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG , Medium esse, & KG , Rationalem ipsi KL , longitudine incommensurabile. Rursus quia AC , CB , longitudine sunt incommensurabiles; & est ut AC , ad CB , ita per lemma 3. propos. 9. huius libri, quadratum ex AC , ad rectangulum sub AC , CB ; erit quadratum ex AC , rectangulo sub AC , CB , incommensurabile. Sed quadrato ex AC , commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC , CB : (cum enim AC , CB , potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis, utribet ipsorum, nimirum quadrato ex AC , commensurabile.) Rectangulo uero sub AC , CB , commensurabile est, quod bis sub AC , CB . Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC , CB , hoc est, rectangulum EH , incommensurabile est, per scholion propos. 4. huius libri, rectangulo bis sub AC , CB . hoc est, ipsi IG . Quocirca cum sit ut EH , ad IG , ita FH , ad HG ; erunt FH , HG , longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH , HG , potentia solum commensurabiles. Igitur FG , tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H . Eodem modo ostendemus & FG , ex binis nominibus, diuisam

sam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in præcedentibus. Igitur 43. decimi.
 A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū.

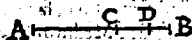
THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.

39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum uero sub ipsis Mediū, ut uult propositio 40. huius libri.



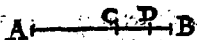
Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbique ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, cum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum utrumque compositum ex hypothese sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit, rectangulū bis sub A D, D B. Igitur cum Medium non superet Medium Rationale; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, spatium 27. decimi.

spatium Rationale : Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

S I T linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum uero sub ipsis Rationale, ut uult propos 41. huius libri.



Dico A B, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quoniam nimirum sint lineae quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B. Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est, quod ostendemus, ut in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale. Quia uero composita ex his quadratis ponuntur esse Media : Medium autem non superat Medium Rationale, non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur A P, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

etum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

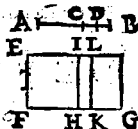
THEOR. 36. PROPOS. 48.

47.

41.

BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

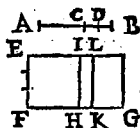
S I T linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurableque composito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huius libri. Dico, A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, in-



commensurableque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurable est. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (est enim I H, ipsi E F, æqualis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipsi E F, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi E F. Quia uero compositum ex quadratis rectarum A C, C B, descriptis, hoc est, rectangulum E H, incommensurable est, ex hypothesi, rectangulo bis sub A C, C B, nempe rectangulo I G, estq; ut E H, ad

2 B. decimi.

ad I G, ita FH, ad H G; erunt FH, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus: Sed & ostensæ sunt Rationales.



Rationales ergo sunt FH, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur A B, binæ Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

DEFINITIONES

SECUNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomē plus possit quam minus, quadrato rectæ linæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

III.

QVOD si neutrum ipforum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali ; Vocetur ex binis nominibus tertia .

RVRSVS si maius nomen plus possit , quam minus , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis ,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cōmensurabile sit longitudine ; Vocetur ex binis nominibus quarta .

V.

SI uero minus nomen ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipforum nominum ; Vocetur sexta .

SCHOLION.

NUMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ potentia tantum commensurabiles, non poterit utrunque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine ; (alias enim nomi-

na

na ipsa essent linea longitudine inter se commensurabiles, ut in scholio propos. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel unum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quae ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inaequalia sunt; (alias enim essent lineae inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur.) posueris maius nomen plus, quam minus, quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine sibi commensurabilis, constituentur una cum tribus dictis generibus, tres diuersae lineae ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine sibi incommensurabilis, efficientur una cum eisdem tribus generibus aliae tres diuersae lineae ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersae lineae ex binis nominibus appellatae.

P V L C H R E autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile, antecedit incommensurabile.

R V R S V S recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita linea Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineae exposita longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile:

Et in reliquis tribus eodem modo, pri-

nam dicti secundi ordinis quar-

tam appellans; secun-

dam, quintam; &

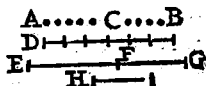
tertiam, sex-

tam.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex
ijs, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quo-
rum excessus A C, non sit quadratus, ita ut A B, C B, propor-
tionem quidem habeant, quam
quadratus ad quadratum; at A B,
A C, proportionem non habeant,
quam quadratus ad quadratum:
Exponatur Rationalis quæpiam



D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit er-
go & E F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat
deinde ut numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6.
huius libri, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico
E G, esse ex binis nominibus primam. Quoniam quadra-
ta ex E F, F G, cum proportionem habeant, quam numeri
A B, A C, commensurabilia sunt; erunt & rectæ E F, F G,
commensurabiles, saltem potentia; Ostensa autem est E F,
Rationalis. Igitur & F G, Rationalis est. Quia uero A B,
ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad qua-
dratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, pro-
portionem, quam numerus quadratus ad quadratum. In-
commensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt
igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabi-
les; Ac idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis no-
minibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit
ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex
E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior, quam
A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam qua-
dratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propos. 14. hu-
ius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est ut A B,
numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex
F G; erit quoque, per conuersionem rationis, ut A B, ad
C B, uideb. et ad excessum quo antecedens A B, supe-
rat consequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadra-
tum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens qua-
dratum

48.

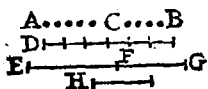
42.

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

dratum ex E F, superat consequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionē



decimi.

habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen E F, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

43.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita, per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque idcirco tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit ut numerus A C, ad numerum A B; ita quadratū ex F G, ad quadratū ex E F:

6. decimi.

7. decimi.

37. decimi.

Et

Et convertendo ut AB , ad AC , ita quadratum ex EF , ad quadratum ex FG ; sic autem AB , maior quam AC ; erit & quadratum ex EF , maius, quam quadratum ex FG . Sit, per lemma propof. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H . Ostendemus iam, ut in præcedenti propof. H , ipsi EF , longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF , plus potest, quam minus FG , quadrato rectæ H , sibi longitudine commensurabilis est; & minus nomen FG , expositæ Rationali D , commensurable longitudine, erit EG , per definitionem, ex binis nominibus secunda. Invenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

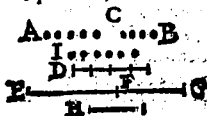
PROBL. 15. PROPOS. 51.

50.
44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPORTIS duobus numeris quadratis AB , CB , ut in propof. 49. Sumatur alius numerus I , qui ad neutrum ipsorum AB , AC , proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I , non quadratus numerus proxime maior quam AC . Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB , proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quā AC , differet uel sola unitate ab AC , uel binario.

(Unitate quidem, quando AC , numerus fuerit, cui addita unitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad AC , quadratum facit. Ut si



AC , sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC , sit 5. erit nō quadratus proxime maior 6. differens a 5. Unitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I , & AC , medius proportionalis. Igitur nō
I erunt

erunt similes plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quā numeri quadrati. Exposita iā Rationali quapiā D, fiat per coroll. propof. 6. huius lib. ut I, ad AB, ita quadratū

A.....C.....B

I.....

D.....E.....F.....G

E.....H.....

ex D, ad quadratū ex EF. Erūt ergo quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, cōmensurabilia; atq; adeo & lineę D,

EF, cōmensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia uero I, ad AB, hoc est, quadratū ex D, ad quadratū ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū,

erunt D, & EF, rectę inter se longitudine incōmensurabiles.

Rursus per dictū coroll. fiat ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG. Erūt ergo quadrata ex EF, FG, proportionē habentia, quā numerus ad numerū, cōmensurabilia; Ideoq; & lineę EF, FG, cōmensurabiles saltem potētia. Igitur cū EF, ostensa sit Rationalis, erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratū ex EF, ad quadratū ex FG, proportionē nō habet, quā numerus quadratus ad numerum quadratū, erūt EF, FG, longitudine incōmensurabiles. Sūt ergo EF, FG, Rationales potētia tantum cōmensurabiles;

Atq; idcirco tōta EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiā esse. Quoniā est ut I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG; erit ex æqualitate ut I, ad AC, ita quadratū ex D, ad quadratū ex FG. Nō habet autē I, ad AC, proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionē habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectę D, & FG, longitudine incōmensurabiles sunt. Quoniā autē est ut AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex FG: Est autē AB, maior, quā AC; erit & quadratū ex EF, maius quā quadratū ex FG. Sit ergo mai;

per lēma propof. 14. huius lib. quadrato rectę H. Ostēdem iā similiter, ut in 49. propof. H, ipsi EF, longitudine cōmensurabilē esse. Quoniā igitur maius nomē EF, plus pōt, quā numerus FG, quadrato rectę H, sibi lōgitudine cōmensurabilis; & neutra ipsarū EF, FG, lōgitudine cōmensurabilis est exposita

Ratio

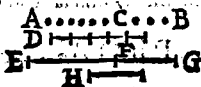
Rationali D, ut demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 32.

51.
45.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cōpositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionē habeat, quā quadratus ad quadratū, ex ijs, quæ in scholiq. 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quedam D, cui longitudine cōmēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cū Rationali D, cōmēsurabilis sit. Quod si reliqua cōstruantur,



ut in propos. 49. ostēdemus similiter, ut ibi, totā EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartā esse. Erit

enim rursus, ut in 49. propos. quadratū ex EF, maius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodē modo, ut in 49. propos. per cōuersionē rōnis, est ut AB, ad CB, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex H: Nō est aut AB, ad CB, ut quadratus ad quadratū; neq; quadratū ex EF, ad quadratū ex H, erit ut numerus quadratus ad numerū quadratū. Lōgitudine ergo incōmēsurabiles sūt rectę EF, & H. Itaq; cū maius nomē EF, plus possit, quā minus FG, quadrato rectæ H, sibi lōgitudine incōmēsurabilis, & maius rursus nomē EF, lōgitudine cōmēsurabile exposita Rōnali D; erit EG, p. defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartā. Q. d. faciendū erat.

9. decimi.

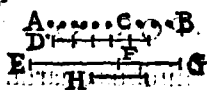
PROBL. 17. PROPOS. 53.

52.
46.

INVENIRE ex binis nominib⁹ quintā.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ut in precedenti propos. fiat constructio, ut in propos. 50. nepe sumatur FG, longitudine commensurabilis exposita Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico, & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, ut in 50. propos. quadratū ex EF, maius esse,

esse; quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato
rectæ H. Quoniam uero, ut in propos. 49. ostensum est,
per conuersionem rationis, est ut A. B, ad C B, ita quadra-



tum ex E F, ad quadratum ex
H. Ostendimus, ut in proposi-
tione antecedenti, rectas E F, &
H, longitudine incommensura-

biles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quā
minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommen-
surabilis, & minus nomen F G, longitudine commensura-
bile exposita Rationali D; erit per definitionem E G, ex bi-
nis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus
quintam. Quod faciendum erat.

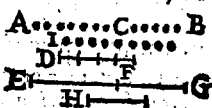
53.
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus
sextam.

R E P E R T I S duobus numeris A C, C B, planis non
similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex
ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ip-
sorum proportionem, quam quadratus numerus ad qua-
dratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quili-
bet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se pri-
mos. Nam hac ratione & totus ad utrumque ipsorum pri-
mus erit; atq; idcirco proportionem ad illos non habebit,
quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finē lib. 8.
demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I,

30. *septimi*



qui nec ad A B, nec ad A C, ha-
beat proportionem, quam qua-
dratus ad quadratum; qualis est
quiuis numerus quadratus. Hic
enim ad A B, & A C, non qua-

dratos proportionem non habebit, quam quadratus ad
quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut
I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F,
per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in pro-
pos. 51.

pos. 51.

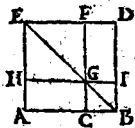
pos. 5. ostendimusq; ut ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 5. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendamus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratū ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurable expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextā. Quod faciendum erat.

9. decimi.

L E M M A.

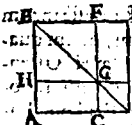
S i recta linea secta sit utcumque, erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

S E C T A sit recta A B, utcumq; in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Dueta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; utrunq; autem rectangulorum



I 3

lorum DG , GA , comprehensum sub eisdem partibus: At uero rectangula CD , AI , sub tota AB , & parte CB , contenta. Dico DG , medium proportionale esse inter quadrata FH , CI : At CD , medium esse proportionale inter quadrata AD , CI . Quoniam ut HG , ad GI , ita est tam FH , ad DG , quam AG , ad CI ; erit ut FH , ad DG , ita AG , ad CI : Est autem AG , ipsi DG , æquale. Igitur erit quoque ut FH , ad DG , ita DG , ad CI ; Atque adeo DG , medium proportionale est inter quadrata FH , CI .



1. sexii.
43. primi

1. sexii.

$RVRSVS$ quia est ut AB , ad CB , ita $tā AD$, ad CD , quam AI , ad CI ; erit ut AD , ad CD , ita AI , ad CI : Est autem AI , ipsi CD , æquale. Igitur erit ut AD , ad CD , ita quoque CD , ad CI . Quare CD , medium proportionale est inter quadrata AD , CI . Eodem modo erit AF , medium proportionale inter quadrata AD , FH .

54.
48.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali AB , & ex binis nominibus prima AD . Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC , Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipsius AD , maius nomen AE . Erunt igitur ex defin. AE , ED , Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE , plus poterit, quam ED , quadrato

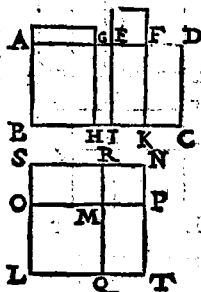
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis ; & denique
A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabi-
lis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus
potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, qua-
drato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G B,
contentum, per 2. lemma propof.

17. huius lib. applicetur deficiens fi-
gura quadrata ; in partes longitu-
dine commensurabiles ipsam diui-
det. Quare A G, G E, partes inter
se longitudine cōmēsurabiles sunt.

Ducantur iam per puncta G, E, F,
ipsis A B, D C, parallelæ G H, E I,
F K. Et parallelogrammo A H,
æquale quadratum fiat L M : At
parallelogrammo G I, æquale fiat
quadratum M N; coniunganturq;
quadrata L M, M N, ita ad angulū

M, ut latera M O, M P, unam rectam lineam constituent
O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam
Q R, ut demonstratum est a nobis ex Proclo ad propof.
15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad uerti-
cem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem re-
ctangulo L N, cum sectæ O M, M P, rectis Q M, M R,
æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R, sit autem O P,
ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis ; æquila-
terum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.

Q V O N I A M uero rectangulum sub A G, G E, æqua-
le est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut
A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H,
ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium propor-
tionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M,
M N, illis æqualia : Sed inter eadem quadrata L M, M N,
medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate.
Æquale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M,
æquale sit M S; & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ip-
si F C, æquale. Quocirca totū quadratū L N, toti rectāgulo
A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest spatium A C, con-



18. decimi.

14. secundi

34. primi.

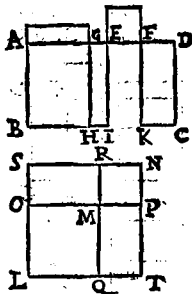
17. sexti.

1. sexti.

43. & 36. primi.

tentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

Quoniam A G, G E, ostensæ sunt longitudine



commensurabiles; erit & tota A E, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propof. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare rectangula A H, G I, sub Rationalibus cõrëta Rationalia sunt; Ideoque

& quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

Et quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G; & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propof. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommensurabilia sunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, sunt incommensurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales ostensæ. Igitur O M, M P, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quapropter tota O P, potens spatium A C, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

SI spatium contineatur sub Rationali,
&c.

55.

49.

1. decimi.

2. decimi.

1. sexti

0. decimi.

0. decimi.

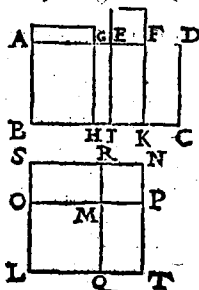
1. sexti

7. decimi.

& ex binis nominibus secunda; Recta line a spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis. Secetur E D, bifariam in F; & reliqua construuntur, ut in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, ut ibi, rectam O P, posse spatium A C, contentum sub Rationali A B, & ex binis nominibus secunda A D. Dico iam O P, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QUONIAM A E, longitudine incommensurabilis est ipsi E D; & E D, minus nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, longitudine commensurabilis est Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommensurabiles. Et quia A G, G E, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; erit quoque tota A E, utriusque ipsarum commensurabilis. Quare cum A E, maius nomen existens ipsius A D, ex binis nominibus secunda, linea sit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales: quod cum utraque A G, G E, ipsi A E, sit longitudine commensurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis; erit utraque A G, G E, eidem A B, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula A H, G I, Media sunt, proptereaque



13. decimi

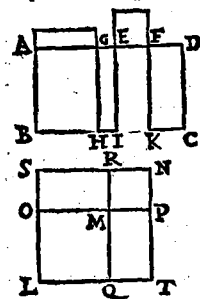
15. decimi

14. decimi

22. decimi

pterea; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ O M, M P, sunt Mediæ.

Quia uero A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commensurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ O M, M P, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi uero A E, ostensa est longitudine commensurabilis A G; & ipsi E D, longitudine commensurabilis est E F, eius dimidia; erunt per scholiū propo. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommensurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cum ipsis, incommensurabilia sunt. Igitur & L M, M T, ipsis A H, & E K, æqualia, incommensurabilia sunt. Ideoque & rectæ O M, M P, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. Cum ergo ostensum sit O M, M P, Medias esse, & commensurabiles; erunt O M, M P, Mediæ



potentia solum commensurabiles. Quoniam denique E D, minus nomē ipsius A D, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi A B, hoc est, ipsi E I: Est autem E F, ipsi E D, quoque longitudine commensurabilis; Erunt etiam E I, E F, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum E I, Rationalis sit, erit & E F, Rationalis. Quare E K, rectangulum, Rationale est: Est autem M T, sub O M, M P, contentum ipsi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale est. Quapropter O M, M P, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleq; continentes; atq; adeo

O P, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

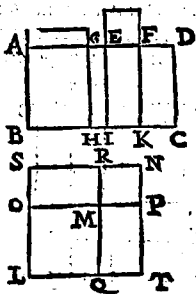
THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.

50.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectā, quæ pōt spatium AC, Irrationalē esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantū cōmensurabiles; & AE, plus poterit, quā ED, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Ratio nali expositæ AB, longitudine cōmensurabilis est. Secta ED, bifariam in F. reliqua oīa fiāt, ut in propos. 55. Similiter ergo, ut ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantū cōmensurabiles; propterea quod



AE, Rationali AB, ponatur longitudine incōmensurabilis, quēadmodū & ibi eadē AE, ipsi AB, longitudine erat incōmensurabilis. Quoniā uero ED, EF, sunt cōmensurabiles longitudines; estq; ED, ipsi AB, Rōnali, hoc est, ipsi EI, longitudine incōmensurabilis; erit quoq; EF, eidē EI, longitudine incōmensurabilis: Sūt aut EF, EI, Rōnales, qđ EF, dimidia sit ipsius ED, Rōnalis; & EI, expositæ Rōnali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rōnales sunt potētia tantū cōmensurabiles; Ac propterea EK, Mediū est; ideoq; & MT, æquale ipsi EK, Mediū est, qđ sub Medijs OM, MP, cōtinetur. Itaq; cū OP, MP, Mediæ sint potētia solū cōmensurabiles, cōtineantq; spatium Mediū; erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secūda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rōnali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

14. decimi.

22. decimi.

39. decimi

THEO.

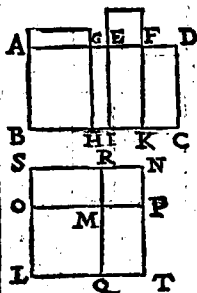
THEOR. 40. PROPOS. 58.

57.

51.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta^a linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipsius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defn. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ



19. decimi.

20. decimi.

20. decimi.

longitudine sibi incommensurabilis; & deniq; A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propo^s. 55. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus ita eodem modo, ut ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis ha-

bentia proportionem, incommensurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipsis A H, G I, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autē A I, æquale composito ex quadratis L M, M N: Compositum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale est.

E r quoniam E D, minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Ra-

lis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, longitudine incommensurabilis; Et est E F, Rationalis, cum sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cum O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis M T, Medium; Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. decimi

40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

58.

52.

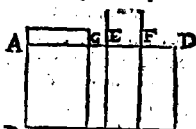
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATUR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus potest, quam E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & denique E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propof. 55. Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propof. 53. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propof. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt;

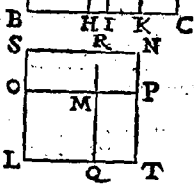
19. decimi

22. decimi.

erunt AE, AB, Rationales potētia tantū cōmensurabiles. Quare rectangulū AI, sub ipsis contentū, Mediū est. Est autē AI, æquale cōposito ex quadratis L M, M N. Igitur & cōpositū hoc, Mediū erit. Rursus quia



20. decimi.



ED, Rōnalis ponitur lōgitudine cōmensurabilis Rōnali AB, cū sit minus nomē ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidē AB, cōmensurabilis lōgitudine, & Rōnalis. Quare EK, sub Rōnālibus EI, EF, lōgitudine cōmensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentū Rōnale erit, cū ipsi EK, sit æquale. Quāobrē cū rectæ OM, MP, potētia incōmēsurabiles sint,

41. decimi.

faciantq; cōpositū quidē ex ipsarū quadratis LM, MN, Mediū; Rectangulū verō MT, sub ipsis cōtentū, Rōnale; Irrationalis erit tota OP, quæ dicitur potēs Rationale & Mediū. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

59.

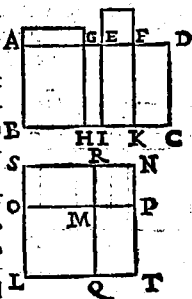
53.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est; quæ bina Media potens nominatur.

CONTINĒATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectā, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sic ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitōe Rationales potentia tantum cōmensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabilis; & deniq; neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit cōmēsurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in su-

in superioribus; eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam uero ostendemus similiter, ut in propof. 55. recta OP, posse spatiū AC: Item, ut in propof. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti propof. erit cōpositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autē in propof. 58. erit quoq; MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi E D; hæc uero eidē cōmensurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles. Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & cōpositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & cōpositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileq; cōposito ex ipsarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



19. decimi

13. decimi
10. decimi
1. sexti.

42. decim.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

60.

54.

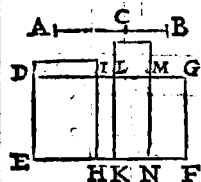
QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominib⁹ A B, cuius maius nomē AC; & ad Rōnālē expositā DE, applicetur rectangulū DF, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciēs D G. Dico DG, ex binis

45. primi.

nomi-

nomini-
bus esse primam . Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erigitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, una cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quænammodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsi L K, G F, parallela agatur M N: eritque utrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum utriusque cum enam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.



R v r s v s. quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propof. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

Q V O N I A M ex lemmate propof. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum recta D I, L M, I L, eandem

candem

eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K, erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commensurabilia sunt, quod A C, C B, ponuntur potentia commensurabiles, erunt & D H, I K, ipsi æqualia, commensurabilia. Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem D K, maius est, quam L E, quod & quadrata ex A C, C B, maiora sint, per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub A C, C B, sitit & recta D L, maior quam L G, cum D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L E. Itaque quoniam D L, maior est, quam L G, & ad D I, applicatur rectangulum sub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore L G, descripti, (ostensum enim est rectangulum sub D I, I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurque D L, ad I, in partes D I, I L, longitudine commensurabiles, ut est demonstratum, poterit D L, maior plus quam L G, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum D G, ostensa sit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus posse, quam L G, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commensurabile Rationali expositæ D E, erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

S I T ex binis Medijs prima A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F,

K æquale

1. se. xii.

17. sexti.

10. decimi.

1. sexti.

18. decimi.

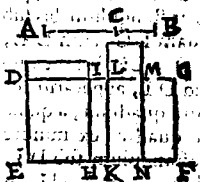
63.

55.

5. primi

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse secundam. Construantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, equalia sint quadratis ex A C, C B, & utrumque ipsorum L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; et sunt quadrata ex A C, C B, atque adeo rectangula ipsi æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Media. Cum ergo propterea & totum D K, utrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. sitius lib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationale D E, erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam vero ut in antecessenti propos. demonstrabimus. D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

8. decimi.



16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

17. decimi.

87. decimi.

quoniam autem
est incommensurabile
propter

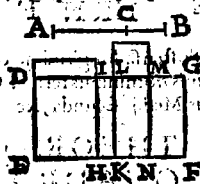
THEOR.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationale applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

§ 1. ex binis Medijs secunda A B, cuius maius nomen A C, & ad Rationale D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico D G, esse ex binis nominibus tertiam. Construis iisdē, quæ in propos. 61.

quoniā A C, C B, ex binis Medijs secunda A B, cōponētes, Mediæ sūnt potentia solū cōmensurabiles, quæ Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex A C, C B, atq; adeo rectangula ipsa æqualia D H, I K, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propter ea & totum D K, utriq; ipsorū D H, I K, sit cōmensurabile; erit & ex



coroll. propos. 24, huius libri D K, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationale D E; erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub A C, C B, Mediū est ferit & eius duplū L F, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationale L K; erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Et quia A C, ipsi C B, longitudine est incōmensurabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B, erit quoque quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensurabile. Est autē quadrato ex A C, cōmensurabile cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, cōmensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia pōnantur cōmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, cōmensurabile est eius duplū; nimirū rectangulum bis sub A C, C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulū D K, incōmensurabile est rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholia propos. 14. huius libri, conscripsimus. Quæ rectæ D E, L G, eandem

K 2 rationem

62.

56.

45. primi

39. decimi.

16. decimi.

23. decimi.

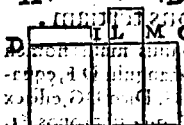
23. decimi.

20. decimi.

2. sextissimi.

rationem cum DK , LF , habentes, longitudine sunt incom-
mensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Ra-
tionales ergo, sunt potentia tantum commensurabiles; ac
propterea tota DG , ex binis nominibus est. Iam uero ut in

A C B



E HKN F

propos. 61. ostendimus DL esse
maius nomen, posseque plus, quā
minus LG , quadrato rectæ sibi lo-
gitudine commensurabilis. Quā
ob rem, cum DE sit maius nomen
plus possit, quā B & G , minus, qua-
drato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, & acutius ipsarum
 DE , LG Rationali expositæ DE ,
si ostensa longitudine commensurabilis, peno ex defini-
tione G , ex
binis nominibus est. Quadrato ergo eius, quæ ex bi-
nis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Ratio-

nalem applicatum, latitudinem facit ex bi-
his nominibus quartam.

A C B



E HKN F

Si r Maior AB , cuius maius no-
men AC , & ad Rationale DE , appli-
cetur rectangulū DF , æquale quadra-
to ex AB , latitudinem faciens DG .
Dico DG , ex binis nominibus esse
quartā. Construantur eadē prorsus,
quæ in propos. 61. Et quia AC , CB ,
Maiorem AB , componentes potentia
incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem
ex quadratis rectarum AC , CB , Rationale; rectan-
gulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque DK , compo-
sito ex quadratis rectarum AC , CB , æquale existens, Ratio-
nale; At uero LF , duplum eius, quod sub AC , CB , conti-
netur, Medium. Quoniam igitur Rationale DK , ad Ra-
tionalem DE , est applicatum; erit DL , Rationalis ipsi DE ,
longitudine commensurabilis. Item cum DF , Medium sit
appli-

applicatum ad Rationale $L G$; erit $L G$, Rationalis ipsi $L K$, hoc est, ipsi $D E$, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum $D L$, $L G$, illa quidem ipsi $D E$, incommensurabilis sit longitudine; hæc uero eidem $D E$, longitudine incommensurabilis; Incommensurabiles erunt longitudine $D L$, $L G$: ostense sunt autem & Rationales. Sunt igitur $D L$, $L G$, Rationales potentia tantum commensurabiles; ideoque $D G$, ex binis nominibus est. Jam uero ut in propos. 61. demonstrabimus, rectangulum sub $D I$, $I L$, æquale esse quadrato ex $L M$. Quia autem quadrata ex $A C$, $C B$, incommensurabilia sunt, quod rectæ $A C$, $C B$, potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia $D H$, $I K$, incommensurabilia; atque adeo & rectæ $D I$, $I L$, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propos. 61. ostendimus, $D L$, maior est, quam $L G$; & ad $D L$ applicatum est rectangulum sub $D I$, $I L$, quadrato ex $L M$, hoc est, quartæ parti quadrati ex $L G$, æquale, deficiens figura quadrata; quod diuisit ipsam $D L$, ad I , in partes longitudine incommensurabiles; poterit $D L$, plus quam $L G$, quadrato rectæ sub longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa $D L$, (maius nomen ipsius $D G$, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali $D E$; erit ex defin. $D G$, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

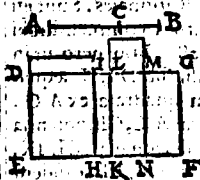
THEOR. 47. PROPOS. 65.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

S I T recta potens Rationale ac Medium $A B$, cuius maius nomen $A C$; & ad Rationalem $D E$, rectangulum $D F$, applicetur æquale quadrato ex $A B$, latitudinem faciens $D G$. Dico $D G$, ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

K 3 omnino

omniā, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, exponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, ac rectangulum sub ipsis con-



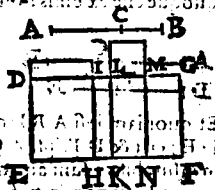
tenum Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Mediū; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudinem Rationalem DE, incommensurabile. At uero Rationale LE, ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudinem ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudo nec commensurabilis est Rationali DE, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Jam uero, ut in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecedenti propos. DL, maius nomen est, atque posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DE, æquale

æquale quadrato, ex AB , latitudinem faciens DG . Dico
 DG , esse ex binis nominibus sextam. Constructis hisdem
 quæ in propos. 47. quoniam rectæ AC , CB , componen-
 tes ipsam AB , potentem binâ Media, potentia incommen-
 surabiles sunt, faciuntq; & cõpo-
 situm ex ipsarum quadratis Me-
 dium, & quod sub ipsis cõtinetur,
 Medium, & incommensurabile cõ-
 posito ex quadratis ipsarum; erit
 tam DK , illi composito æquale,
 quam LF , rectangulo bis sub AC ,
 CB , æquale, Medium. Et quia
 Media DK , LF , applicata sunt ad
 Rationalem DE , erunt eorum latitudines DL , LG , Ratio-
 nales ipsi DE , longitudine incommensurabiles. Quoniã ue-
 ro cõpositum ex quadratis rectarum AC , CB , incommensu-
 rabile est rectangulo sub AC , CB ; eidem uero rectangulo
 sub AC , CB , cõmensurabile est rectangulu bis sub AC , CB ,
 cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadra-
 tis hoc est DK , incommensurabile rectangulo bis sub AC , CB ,
 hoc est, ipsi LF , Ac propterea rectæ DL , LG , eandẽ rationẽ
 habentes cum DE , longitudine incommensurabiles sunt.
 Rationales ergo sunt DL , LG , potentia solum cõmensura-
 biles; Ac proinde DG , est ex binis nominibus. Tam uero, ut
 in præcedenti propos. demonstrabimus DL , esse maius no-
 men, posseq; plus quam minus LG , quadrato rectæ sibi lon-
 gitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrà
 ipsarum DL , LG , longitudine commensurabilem esse expo-
 sitæ Rationali DE , erit ex defin. DG , ex binis nominibus
 sexta. Quadratum igitur eius, quæ binâ Media potest, &c.
 Quod erat ostendendum.



THEOR. 49. PROPOS. 67.

Et, quæ est ex binis nominibus, longitu-
 dine commensurabilis, & ipsa ex binis no-
 minibus est, atque ordine eadem.

42. decimi.
 23. decimi.
 42. decimi.
 13. decimi.
 10. decimi.
 37. decimi.

66.
 60.

Si ex binis nominibus quaecunque A B, ducta in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.



Facit tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F; erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E.

Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E, erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis; sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; & propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus secunda; Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defn. est ex binis nominibus tertia.

At si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectæ sibi

longi-

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrata recte sit longitudine incommensurabilis. Quare ut prius ostendimus D E, ex binis nominibus quartam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Et igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

SCHOLIION.

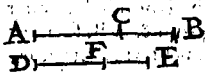
Quod si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendimus quidem eodem modo, (si locò) Commensurabilis longitudine: in demonstratione respondentibus ubique: commensurabilis potentia tantum: & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non utraque, nempe exposita Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo uero, si A B sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D E, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, uel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D F, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas adhas eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defn. Rationali exposita commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erant. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita A B, ad D E, erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia

12. decimi

10. decimi

potentia, solum commensurabilis. Non ergo utraque AB , DE ,
ex binis nominibus prima est. Eodem modo, neque utraque



ex binis nominibus quarta erit. Sed
neque secunda, vel quinta. Effer
enim utrunque nomen minus CB ,
 FE , ex defin. longitudine commen-
surabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur &
totæ AB , DE , longitudine, forent commensurabiles. quod
non ponitur.

S E M P E R tamen verum est, si AB , est ex binis
nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , ipsi
 AB , potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex il-
lis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit
 AC , plus quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine commen-
surabilis. Cum ergo sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; pote-
rit quoque DF , plus quam FE , quadrato rectæ sibi longitudi-
ne commensurabilis. Quare ex defin. erit DE , ex binis nomi-
nibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est
ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC ,
plus possit, quam CB , quadrato rectæ sibi longitudine incom-
mensurabilis; poterit quoque DF , plus quam FE , quadrato re-
ctæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut AC , ad CB ,
ita DF , ad FE . Igitur ex defin. erit DE , ex binis nominibus
etiâ quarta, vel quinta, vel sexta, licet nō eadē ordine ipsi AB .

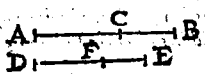
I N sequentibus autem quinque propositionibus necessario
erit DE , eadem ordine ipsi AB , quanquam, potentia tantum
illi commensurabilis sit.

67.
61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudi-
ne commensurabilis, & ipsa ex binis Me-
dijs est, atque ordine eadem.

S I T ex binis Medijs AB , quæcunque diuisa in sua nomi-
na, quorum AC , maius, & CB , minus, sitque ei recta DE ,
longitudine commensurabilis. Dico DE , quoque ex binis
Medijs esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut tota AB ,
ad

ad totū D E, ita ablata A C, ad ablata D F. Erit ergo & re-
liqua C B, ad reliquā F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quo-
niam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E,
erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B,
longitudine commensurabilis. 
Sunt autem A C, C B, Medix. Igi-
tur & D F, F E, illis commensura-
biles, Medix sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B,
ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Sūt
autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt
& D F, F E, solum commensurabiles potentia. Cum ergo
& ostensae sint Medix, erunt D F, F E, Medix potentia tan-
tum commensurabiles; Atque idcirco D E, erit ex binis Me-
dijs. Dico & ipsi A B, eandem esse ordine. Quoniam est
ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; Est autem ut A C, ad C B,
ita, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, & ut
D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F,
F E, ex lemmate 3. propos. 19, huius libri; erit quoque ut
quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B, ita quadra-
tum ex D F, ad rectangulum sub D F, F E; & permutando
ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum
sub A C, C B, ad rectangulum sub D F, F E. Commensura-
bile est autem quadratum ex A C, quadrato ex D F; quod
rectae A C, D F, commensurabiles ostensae sint longitudine.
Igitur & rectangulum sub A C, C B, rectangulo sub D F,
F E, commensurabile est. Quare si rectangulum sub A C,
C B, fuerit Rationale, ita ut A B, sit ex binis Medijs pri-
ma; erit & rectangulum sub D F, F E, Rationale, cum illi
sit commensurabile; atque adeo & D E, ex binis Medijs pri-
ma erit. Si uero rectangulum sub A C, C B, fuerit Me-
dium, ita ut A B, sit ex binis Medijs secunda; erit & rectan-
gulum sub D F, F E, ei commensurabile, Medium, ex coroll.
propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, erit ex binis Me-
dijs secunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs, longitudine com-
mensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Et uero, prout modo demonstrabimus, rectam lineam
D E.

D E, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi A B, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsæ A B, cui commensurabilis est, si modo loco, commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

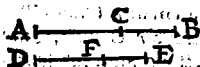
68.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

S I T linea Maior A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sic D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem esse. Fiant enim eadæ,



quæ superius; ita ut partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem

habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E. Quoniam igitur A B, D E, commensurabiles sunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum, erunt quoque tam

A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; erit ut quadratum ex

A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo ut compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compositum ex quadratis rectorum D F, F E, ad quadratum ex

F E. Et conuertendo ut quadratum ex C B, ad compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compositum ex quadratis rectorum D F, F E; Et permutando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita compositum ex quadratis rectorum A C, C B, ad compositum

ex quadratis rectorum D F, F E. Commensurabile est autem quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E, ostensæ sint commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compositum ex quadratis

rectarum A C, C B, commensurabile est composito ex quadratis rectarum D F, F E. Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, component Maiorem A B. Igitur

est Maior D E, commensurabilis ipsi A B, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsæ A B, cui commensurabilis est, si modo loco, commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. ut manifestum est.

10. decimi.

22. sexsi.

10. decimi.

40. decimi

tur

tur & hoc Rationale est, ex 9. definit.
 R. V. h. s. v. s. quia est ut $A C$, ad $C B$, ita $D F$, ad $F E$;
 Vt autem $A C$, ad $C B$, ita est quadratum ex $A C$, ad rectan-
 gulum sub $A C$, $C B$; & ut $D F$, ad $F E$, ita quadratum ex
 $D F$, ad rectangulum sub $D F$, $F E$; ex similitudine; propos. 19.
 huius libri; Erunt quoque ut quadratum ex $A C$, ad rectan-
 gulum sub $A C$, $C B$; ita quadratum ex $D F$, ad rectan-
 gulum sub $D F$, $F E$; et permittendo ut quadratum ex $A C$,
 ad quadratum ex $D F$, ita rectangulum sub $A C$, $C B$, ad re-
 ctangulum sub $D F$, $F E$. Est autem quadratum ex $A C$,
 quadratum ex $D F$, commensurabile; quod recte $A C$, $D F$,
 ostensa sint commensurabiles uel longitudine & potentia,
 uel potentia tantum; Igitur & rectangulum sub $A C$, $C B$,
 rectangulum sub $D F$, $F E$, commensurabile est. Est autem re-
 ctangulum sub $A C$, $C B$, Medium. Igitur & rectangulum
 sub $D F$, $F E$, incommensurabile; Medium est, ex coroll.
 propos. 24. huius libri. Quoniam vero est ut $A C$, ad $C B$,
 ita $D F$, ad $F E$; suntque $A C$, $C B$, potentia incommensura-
 biles, cum componant Maiorem $A B$; Erunt quoque $D F$,
 $F E$, potentia incommensurabiles. Itaque cum $D F$, $F E$,
 sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum
 quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub
 ipsis continetur, Medium; ut ostensum est; erit tota $D E$,
 Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est.
 Quod demonstrandum erat.

10. decimi.
 40. decimi.
 10. decimi.
 10. decimi.
 40. decimi.

THEOR. 52. PROPOS. 70.

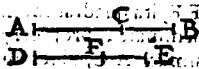
69.
 63.

RATIONALE ac Medium poten-
 ti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Me-
 dium potens est.

Si recta $A B$, potens Rationale ac Medium, diuisa in
 sua nomina ad C , eique commensurabilis $D E$, siue longitu-
 dine & potentia, siue potentia tantum. Dico & $D E$, esse po-
 tentem Rationale ac Medium. Constructis iisdem, quae su-
 pra ostendimus; ut in precedenti propos. compositum ex
 quadratis rectarum $A C$, $C B$, commensurabile est compo-
 sito

41. de imi.

sito ex quadratis rectarum DF, FE . Est autem illud compositum Medium, cum recte AC, CB , componant ipsam AB , potentem Rationalem ac Medium. Igitur per coroll. prop.



41. decimi.

pos. 14. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB , quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE , atque adeo & rectangulum sub DF, FE , Rationale est, ex 9. defin. Denique in eadem superioris propos. erunt DF, FE , potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE , sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est, erit tota DE , Rationale quoque Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. decimi.

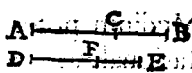
70.

64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens A, B , diuisa in sua nomina ad C , eique commensurabilis DE , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE , esse bina Media potentem. Constructis ipsis, quae supra ostendemus, ut in propo.



42. de cimi.

69. compositum ex quadratis rectarum AC, CB , compositum ex quadratis rectarum DF, FE , commensurabile esse. Nec non & rectangulum sub AC, CB , esse commensurabile rectangulo sub DF, FE . Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB , quam rectangulum sub AC, CB , Medium sit, erit etiam ex coroll. propo. 2. huius libri, tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE , quam rectangulum sub DF, FE , Medium. Sed & DE, FE , potentia incommensurabiles sunt, ut prius. Postremo, quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB , & rectangulum sub $AC,$

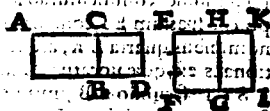
A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; compositum ex quadratis ipsarum erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

Si Rationale & Medium componatur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus; uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Medium potens.

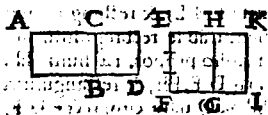
Si Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius quam C D, uel minus.

Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad



Ratio-

21. *decimi.* Rationalem E F; erit E H, Rationalis, & ipsi E F longitudo
23. *decimi.* dine commensurabilis; At uero H K, Rationalis, & eadem



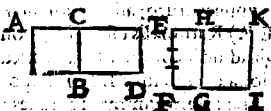
10. *decimi.* H K, eandem cum illis habentes, rationem incommensurabiles longitudine, Rationales ergo sunt E H, H K, potentia
17. *decimi.* solum commensurabiles; Ac propterea E H, ex binis nominibus est. Et quoniam maius, ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque E H, maior quam

1. *secunda.* H K, cum E H, H K, eandem rationem habeant, quā E G, H I. Iam uero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defn. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

55. *decimi.* Si uero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit E K, ex binis nominibus quarta, ex defn. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ uocatur Maior.

58. *decimi.* Si uero A B, minus quam C D; & eadem construuntur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, E K, ex binis nominibus, & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quæ est ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine

tudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit $H K$, quam $E H$, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis erit $E K$, ex binis nominibus secunda, cum



$E H$, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali $E F$, vi ostensum est. Quare recta potens spatium $E I$, contentum sub Rationali $E F$, & ex binis

nominibus secunda $E K$, atq; adeo & spatium $A D$, ex Rationali $A B$, & Medio $C D$, compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima.

Si vero $H K$, plus possit quam $E H$, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit $E K$, ex binis nominibus quinta, cum $E H$, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali $E F$. Quare recta potens spatium $E I$, contentum sub Rationali $E F$, & ex binis nominibus quinta $E K$, atq; adeo & spatium $A D$, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Sigitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONENTUR duo Media incommensurabilia $A B$, $C D$. Dico rectam, quæ potest totum spatium $A D$, esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus $A B$, vel maius, quam $C D$, vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent $A B$, $C D$, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Equia spatia $A B$, $C D$, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

L &

56. decimi.

59. decimi.

72.
66.

& spatia $E G, H I$; Media & incommensurabilia, cum illis sint
 aequalia. Igitur recta $E H$; $H K$, eandem cum illis habentes
 rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & utraq;
 (cum $E G, H I$, Media sint, applicenturq; ad Rationalem



$E F$. Rationalis est, ipsi $E F$, lon-
 gitudine incommensurabilis. Ra-
 tionales ergo sunt $E H, H K$, po-
 tensia solum incommensurabiles;
 ac propterea $E K$, ex binis nomi-
 nibus est. Quoniam vero $A B$;
 maior ponitur quam $C D$; erit
 utranq; antecedenti propof. $E H$;
 maius nomen ipsius $E K$. Poterit ergo plus quam $H K$, qua-
 drato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommen-
 surabilis. Si plus possit $E H$, quam $H K$, quadrato recta sibi
 commensurabilis longitudine, cum utranq; nome $E H$,
 $H K$, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationa-
 li $E F$, erit $E K$, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare
 recta potens spatium $E I$, contentum sub Rationali $E F$, &
 ex binis nominibus tertia $E K$, atque adeo &c. spatium
 $A D$, Irrationalis est; quae ex binis Medijs secunda di-
 citur.

Si vero $E H$, plus possit quam $H K$; quadrato recta
 longitudine sibi incommensurabilis, cum utrunq; nomen
 $E H, H K$, longitudine sit incommensurabile Rationali $E F$;
 erit $E K$, ex binis nominibus sexta, ut constat ex defin. Re-
 cta igitur potens spatium $E I$, siue spatium $A D$, Irrationa-
 lis est, quae hinc Media potens nominatur.

Quod si $A B$, minus sit, quam $C D$; non aliter pro-
 positum concludemus, ut ex figura constat. Quapropter
 si duo Media inter se incommensurabilia componantur, &c.
 Quod ostendendum erat.

C O R O L L A R I U M.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quae ex binis nomi-
 nibus, & reliquis ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque
 Medijs, neque inter se eandem esse.
 Nam quadratum Mediae ad Rationalem lineam applicatum,
 latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommen-
 surabilem.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

61. decimi.

ET quadratum eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

62. decimi.

QUADRTVM deinde eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

63. primi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

64. decimi.

QUINTVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

66. decimi.

ITAQUE cum hæc latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, ille vero Irrationalis; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hætenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLION.

HACTENUS egit Euclides de septem senariis.

IN primo, qui continetur propof. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propof. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum divisionibus; docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde continetur propof. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absolunt propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæc sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quamam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima; & ex bi-

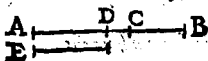
nis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quem reperies in propof. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quafiam latitudines Irrationales faciant quadratilinearum Irrationalium in primo fenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propof. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abfoluitur, demonftravit lineam quamcunque commenfurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo fenario, effe Irrationalem eandem illi, cui commenfurabilis eft.

IN feptimo deniq; contento duabus propofitionibus, nimirum 72. & 73. explicatis rursus differentiam aliam sex predictarum Irrationalium.

RE P E R I T U R autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo fenario, Analogia feu proportionalitas Arithmetica, quae quidem confiftit in exceffu eodem. Et recta media proportionalis, fecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusvis lineae Irrationalis, eft quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiftit.



SI T enim quaecunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus

A, B , cuius maius nomen A, C ; & dividatur A, B , bifariam in D , & eius dimidia A, D , vel D, B , aequalis fumatur E . Dico E , mediani effe, fecundum Analogiam Arithmeticam, inter A, C , C, B : & E , effe, quoque ex binis nominibus. Quoniam A, C , fuperat dimidiam A, D , recta D, C , & dimidia D, B , fuperat ipsam C, B , eadem recta D, C perfpicuum eft, dimidiam ipfius A, B , nempe E , effe mediani proportionalem inter A, C , C, B , in Analogia Arithmetica.

R V R S V S quia E , commenfurabilis eft longitudine ipsius A, B , cum hac illius fit dupla, tripla, & E , Irrationalia eadem ipfi A, B , ut in sexto fenario eft demonftratum.

I D E M offendemus non aliter in ceteris lineis Irrationalibus contingere.

S E Q V V N T U R iam feptem alij fenarij, in quibus eadem Euclides demonftrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quae per detractionem generantur, quae in praecedentibus feptem fenarijs de Irrationalibus, quae per compofitionem fiunt, cum offendiffe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM
per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

73.
68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATUR a Rationali AB , Rationalis AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB . Dico reliquam BC Irrationalem esse. Quoniam per lemma 3. propos. 9. huius lib. est ut AB , ad AC ,
ita quadratum ex AB , ad re- A ————— B
ctangulū sub AB , AC : Et sunt

AB , AC , longitudine incommensurabiles; erunt incommensurabilia quadratum ex AB , & rectangulum sub AB , AC . Sed quadrato ex AB , commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB , AC ; (Cum enim AB , AC , potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB , AC , commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC .) rectangulo vero sub AB , AC , commensurabile est rectangulum sub AB , AC , his. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB , AC , & rectangulum sub AB , AC , bis contentum, incommensurabilia sunt, ut in scholio prop. 14. huius libri demonstraui. Est autem compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC , incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AC , linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC , Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC , Ir-
L 3 ratio-

10. decimi

16. decimi

7. secund

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

POTUISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est, Vocetur autem Apotome.

37. decimi.

NAM cum AB, AC , sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex A B C B ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus, dicitur, cuius maius nomen AB , et minus AC . Auferatur igitur AC , minus nomen ex maiori nomine AB , ut reliquatur Apotome BC .

74.

69.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

16. decimi.

DETRAHATUR a Media AB , Media AC , potentia solum commensurabilis ipsi AB . sitq. rectangulum sub AB, AC , Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam AB, AC , potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC , commensurabilia; atque adeo &c. compositum ex ipsis commensurabile erit.

erit quadrato ex AC . Est autem quadratum ex AC , Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. prop. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB , AC , ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB , AC , Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB , AC , rectangulo bis sub AB , AC . Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB , AC , aequale sit rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; erit quoque rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurabile rectangulo bis sub AB , AC . Quare, & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia sunt. Existent ergo rectangulo bis sub AB , AC , Rationali; erit quadratum ex BC , Irrationale; ideoq; & recta BC , Irrationalis erit. Vocetur autem Medix Apotome prima, quia uidelicet relinquitur post detractionem minoris nominis linea ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Medix Apotome prima. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

POTVISSET hæc propositis proponi hoc modo.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Medix Apotome prima.

CVM enim AB , AC , sint Media potentia solum com-

7. secundi.

17. decimi.

mensurabilis, continetur; Rationale; erit composita ex ipsis
 8. decimi. Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius
 nomen AB ; & minus AC . Aufer
 tur igitur AC , minus nomen ex ma
 iori AB , ut reliquatur BC , Me
 dia Apotome prima.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia
 tantum commensurabilis existens toti, quæ
 cum tota Medium contineat; Reliqua Irra
 tionalis est. Vocetur autem Mediæ Apoto
 me secunda.

DETRAHATUR a Media AB , Media AC , poten
 tia solum commensurabilis ipsi AB ; sitq; rectangulum sub
 AB , AC , Medium. Dico reliquam BC , esse Irrationalem.
 Quoniam quadrata ex AB , AC , potentia commensura
 bilibus commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis
 utrique ipsorum commensurabile:
 Est autem utrumque ipsorum Me
 dium, quod & rectæ AB , AC , Me
 diæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique com
 mensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib.
 Rursus quia rectangulum sub AB , AC , Medium ponitur;
 erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub AB , AC ,
 ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Cum ergo com
 positum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale sit rectan
 gulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC ; supera
 bit compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod Me
 dium est, rectangulum bis sub AB , AC , quod etiam Me
 dium est, quadrato ex BC . Medium autem non superat
 Medium Rationale. Non ergo quadratum ex BC , Ratio
 nale est. ergo Irrationale, & ipsa recta BC , Irrationalis.
 Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relin
 quitur post deductionem minus nominis eius, quæ ex bi
 nis

75.
70.

6. decimi.

7. secundi.

27. decimi.

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Siquitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QUONIAM AB, AC, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.

39. decimi.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

76.

71.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

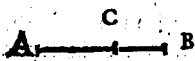
DETRAHATUR a recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atq;

adeo,

o. defn.
secundi.

o. defn.

adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei cōmensurable; hoc est, rectangulū bis sub AB, AC . Mediū, hoc est, Irrationale; erit cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC , in cōmensurable rectangulo bis sub AB, AC . Est autē cōpositū ex quadratis rectarū AB, AC , æquale rectangulo bis sub AB, AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & cōpositum ex quadratis rectarū AB, AC , per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC , incommensurable erit. Ponitur autem cōpositum ex quadratis rectarū AB, AC , Ratio-



nale. Igitur quadratum ex BC , illi incommensurable, Irrationale est, & linea BC , Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam

relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in scholio sequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

40. decimi.

NAM cum AB, AC , sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit cōposita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maioris nomen AB , minus autem AC . Auferatur igitur AC , minus nomen ex maiori AB , ut relinquatur Minor BC .

77.

72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum

tota

tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AB , AC , Medium est.

hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB , AC , atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB , AC , Rationale; est compositum ex quadratis rectarum AB , AC , incommensurable rectangulo bis sub AB , AC . Est autem compositum ex quadratis rectarum AB , AC , æquale rectangulo bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC . Igitur & rectangulum bis sub AB , AC , una cum quadrato ex BC , incommensurable est rectangulo bis sub AB , AC . Sunt ergo & rectangulum bis sub AB , AC , & quadratum ex BC , incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB , AC , Rationale sit; erit quadratum ex BC , Irrationale, & recta BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB , AC , quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB , AC , quod Medium existit. Si igitur a recta AB auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod ostendendum erat.

10. defin.

7. secundi.

17. decimi.

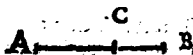
10. defin.

SCHOLIUM.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CUM enim AB, AC , sint potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis. Medium; quod autem sub ipsis continetur;



41. decimi.

le; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens; cuius maius nomen est AB , minus autem AC . Auferatur igitur minus nomen AC , a maiori AB , ut BC , cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

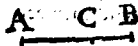
78.

73.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta AB , recta AC , potentia ipsi AB , incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC , esse Irrationalem. Quoniam



7. secundi

compositum ex quadratis rectarum AB, AC , æquale est rectangulo bis sub AB, AC , una cum quadrato ex BC ; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC , quod

quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC , quod ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC , continetur, sit commensurable) quadrato ex BC . Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC , Rationale est. ergo Irrationale, & recta ipsa BC , Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC , quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC , quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

27. decimi.

SCHOLION.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QUONIAM cum AB, AC , sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; erit composita ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB , & minus AC . Aufertur igitur minus nomen AC , ex maiori AB , ut relinquatur BC , cum Medio Medium totum efficiens.

42. decimi.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui

qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH , sitq; IB , excessus inter AB, CD , equalis excessui KF ; inter EF, GH . Dico eundem esse excessum inter AB, EF , qui inter CD, GH . Quoniam IB , excessus est inter $AB, \& CD$; erit AI , ipsi CD , equalis. Eodem modo equalis erit EK , ipsi GH . Idem igitur excessus erit inter $AI, \& EK$, qui inter $CD, \& GH$; cum hæc magnitudines illis sint æquales, singule singulis. Est autem totorum AB, EF , ex pronunciato 15. lib. 1. idem excessus, quæ inter AI, EK ; quod IB, KF , æquales ponuntur. Igitur idem quoque excessus erit inter $AB, \& EF$, qui inter $CD, \& GH$. quod est propositum.



COROLLARIUM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmetica Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmetica Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmetica habeant.

79.

74.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE una tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotoma AB ; congruens autem ei Rationalis BC ,

B C, potentia solum toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita ut B D, ipsi A D, sit potentia solum commensurabilis. Et quia B C, A B C D Rationalis est; erit & A C, illi solû potētia commensurabilis, Rōnalis. Rōnales ergo sunt A C, B C, potētia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositum ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; quod compositum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vna cum quadrato ex A B.) erit quoque perturbando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propof. 27. huius lib. quod vtrunque Rationale sit. (Nam cum A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium Rationale est. Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex collario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe

102

7. secundi.

7. secundi.

16. decimi.

12. decimi.

27. decimi.

nempe rectangulum bis sub $A C$, $B C$, Medium. Eadem-
que ratione Medium erit rectangulum bis sub $A D$, $B D$.
Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur
excessus inter rectangulum bis sub $A C$, $B C$, & rectan-
gulum bis sub $A D$, $B D$, Rationale spatium non est.
Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum.
Ergo ipsi $A B$, alia Rationalis non congruit, præter
 $B C$, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apo-
tomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat osten-
dendum.

80.

75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ una tan-
tum congruit recta linea Media, potentia
solum commensurabilis existens toti, &
cum tota Rationale continens.

24. decimi

SIT Mediæ Apotomæ prima $A B$; & ipsi congruat $B C$,
Media toti $A C$, potentia solum commensurabilis, & rectan-
gulum sub $A C$, $B C$, sit Rationale. Dico ipsi $A B$, aliam
Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum com-
mensurabilis, contineturq; cum tota Rationale. Si enim fie-
ri potest, congruat alia $B D$, Media toti $A D$, potentia tan-
tum commensurabilis, sitq; rectangulum
sub $A D$, $B D$, Rationale. Et quia $B C$,
Media est potentia solum ipsi $A C$, commensurabilis; erit
& $A C$, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo
sunt $A C$, $B C$, potentia tantum commensurabiles. Simili-
ter & $A D$, $B D$, Mediæ erunt potentia solum commensu-
rabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum
ex quadratis rectarum $A C$, $B C$, & compositum ex qua-
dratis rectarum $A D$, $B D$, qui inter rectangulum bis sub
 $A C$, $B C$, & rectangulum bis sub $A D$, $B D$, ut in propos.
præcedenti ostensum est. Est autem excessus inter hæc re-
ctangula, ex khollis propos. 27. huius lib., spatium Rato-
nale; quod utrunq; sit Rationale. (cum enim rectangulum
sub

sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C illis commensurabile. Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, B D. Igitur & ex illis inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam recte A C, B C, Medie sunt potentie solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis eritque ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex corollario propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectarum A C, B D. Medium quidem non superat Medium Rationale. Igitur excessus in eo compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, congruatque cum tota Rationale Media. Igitur Apotome prima una aptarum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

16. decimi

27. decimi

16. decimi

16. decimi

81.

26.

16. decimi

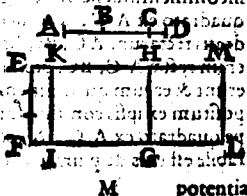
16. decimi

16. decimi

THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIAE Apotome secunda una tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

S i t Media Apotome secunda A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantum commensurabilis; & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri possit, congruat ipsi alia B D, Media toti A D,



5. primi

subo A B C D

מִי־יָדָע.

1. secundi.

24. decimi

16. decimi

13

23. *facim*

23. decimi

10. decimal

16. decim.

26. decim.

1009107

M

incom-

incommensurabile est; ex his, quæ in scholio præpositi habu-
 imus. docuimus. Rectæ igitur EH , KH , tandem habentes
 rationem EH ad EG , KG , longitudine incommensurabiles sunt. Sed
 & Rationales sunt ut ostendimus. Rationales ergo sunt potentia
 tantum commensurabiles. Quapropter etiam ex Rationali
 EH , auferatur Rationalis KH , potentia solum commen-
 surabilis, EH erit EK , Apotoma, scilicet congruens KH .
 Similiter demonstrabimus EK , Apotomen esse, scilicet con-
 gruam KM . Non igitur Apotoma una tantum con-
 gruam rectæ lineæ Rationali, potentia solum commensura-
 bilis existens toti, quod est absurdum. Unam autem tantum
 congruere, demonstratum est in illis. Mediæ Apotomæ
 secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demon-
 strandum.

10. decimi.

74. decimi.

incommensurabilis.

80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 82.

MINOR AB congruens BC totæ AC potentia
 incommensurabilis, faciens quæ compositum quidæ
 ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem
 sub ipsis continetur, Medium.

82.
77.

Sit AB Minor congruens BC totæ AC poten-
 tia incommensurabilis, faciens quæ compositum ex quadra-
 tis rectarum AC , BC , Rationale, & rectangulum sub AC ,
 BC , Medium. Dico ipsam AB aliam non congruere,
 quæ eadem præster. Si enim, ut fieri potest, alia congruens
 BD totæ AD , potentia incommensurabilis, faciens quoque
 sit quidæ ex quadratis rectarum AD , BD , Rationale, & rectan-
 gulū sub AD , BD , Medium. Quomodo igitur, ut in propo-
 sito demonstratum est, idem excessus CA inter compositū ex quadra-
 tis rectarum AC , BC , & compositū ex quadratis rectarum
 AD , BD , qui inter rectangulū bis sub AC , BC , & rectange-
 lum bis sub AD , BD , est autem excessus inter illa composita,
 spatium Rationale, ex scholio præpositi, & perinde est.

M 2 quod

quedam rumpitur. Rationale ponatur. Igitur & excessus inter
 rectangulum his sub A C, B C, & rectangulum his sub A D,
 B D, spatium est Rationale. sed & non Rationale est. (C
 A, B, C, D, Medium, erit quoque ex eor. pro
 portione multo. pos. 2. huius. hb. eius duplum, nempe
 rectangulum his sub A C, B C, Medium. Similiterque Medi
 erit rectangulum his sub A D, B D. Quare unum non su
 perabile alterum Rationale. 9. Quod est absurdum. Ergo
 ipsi A B, aliam rectam preter B C, non congruit potentia non
 incommensurabilis, &c. Minus ergo uhe tantum cognuit deo.
 Quod erat demonstrandum. *non est incommensurabile*

THEOR. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum
 facit, una tantum cōgruit recta linea poten
 tia incommensurabilis existens toti, & cum
 tota faciens compositum, quidem ex ipsa
 sua quadratis Medium; quod autem sub
 ipsis continetur, Rationale, cum aliquo

Sic recta cum Rationali Medium totum faciens A B,
 cui congruat recta B C, non A C, potentia incommensurabi
 lis, faciesque compositum quidem ex quadratis rectarum
 A C, B C, Medium, rectangulum uero sub A C, B C, Rationa
 le. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hoc
 non faciat. Si enim fieri potest congruat ipsi alia recta
 B D, non A D, potentia incommensura
 bilis, faciesque compositum quidem ex
 quadratis rectarum A D, B D, Medium,
 rectangulum uero sub A D, B D, Rationale. Quoniam
 tur, ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter
 compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositu
 ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum his
 sub A C, B C, & rectangulum his sub A D, B D. Est autem
 beup s. M. excessus

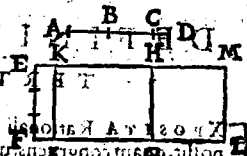
excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in pro-
 pos. 21 demonstravimus. Igitur & excessus inter hæc com-
 posita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est, ut
 utrumque sit Medium. Medium enim Medium non supe-
 rat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi, A B,
 alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommensu-
 rabili, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum
 facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandū.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

Et, quæ cum Medio Medium totum
 facit, una tantum congruit rectæ lineæ po-
 tentia incommensurabilis existens toti, &
 cum tota faciens & compositum ex ipsarū
 quadratis Medium, & quod sub ipsis con-
 stitetur Medium, incommensurabileq; co-
 posito ex ipsarum quadratis.

§ 1. T. recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi
 uero congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis,
 faciensque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C,
 Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommen-
 surabileque composito

ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam
 non congruere, quæ eadē
 hæc faciat. Si enim fieri po-
 test, congruat ipsi recta alia
 B D, toti A D, potentia inco-
 mensurabilis, ita ut & com-
 positum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & re-
 ctangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensu-
 rabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constru-
 as autem ipsam, quæ in propos. 82. quoniam compositū
 ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est, et rectam E G,



longitudine communurabilis; Vocetur
Apotome prima.

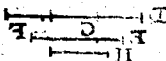
communis; Venerum Apocynum Linn.

SI uero congruens expositæ Rationali
fit longitudine commensurabilis; Vocetur
Apotome secunda.

III

QUOD si neque tota, neque con-
gruens expositæ Rationali sit longitudi-
ne commensurabilis; Vocetur Apotome
tertia.

R v r s v s si tota plus possit, quam congruens, qua-
drato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.



Si vero congruens exposita Rationa-
li sit longitudine commensurabilis; Voce-
tur Apotome quinta.

QUOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

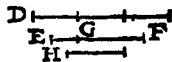
NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotoma, recta linea, quæ relinquuntur post deductionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, & ex definitiõibus est perspicuum.

85.
80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

RESPICE duobus numeris quadratis AB, CB , ut in scholio 2. propos. 19. huius libri docuimus, quorum excessus AC , non sit quadratus, ita ut AB, CB , proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at AB, AC , non: Exponatur Rationalis quæpiam D , cui sit longitudine commensurabilis sit AE .



EF. Erig; EF , cū commensurabilis sit Rationali D , Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB , ad numerū AC , ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF , ad quadratū ex GF . Dico EG , esse primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF , proportionem habentia, quam numeri AB, AC , commensurabilia sunt. Erunt & rectæ EF, GF , commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF , ostensa sit Rationalis, erit & GF , Rationalis. Quia uero AB, AC , proportionem non habent, quam quadrata numeri

6. decimi.

numeri, neque quadrata ex E, F, G, H, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommensurabiles ergo sunt longitudines rectarum E, F, G, F. Rationales ergo sunt E, F, G, F, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua E, G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta E, F, plus quam recta G, F, quadrato recta H. Et quia est ut numerus A, B, ad numerum A, C, ita quadratum ex E, F, ad quadratum ex G, F, scilicet per conversionem rationis, ut A, B, ad C, B, ita quadratum ex E, F, ad quadratum ex H. Habent autem A, B, C, B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E, F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectae E, F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam, igitur, recta E, F, plus potest, quam congruens G, F, quadrato rectae H, sibi longitudine commensurabilis estque tota eadem E, F, exposita Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E, G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

74. decimi.

9. decimi.

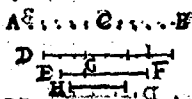
PROBL. 20. PROPOS. 87.

86.

81.

INVENTIO secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A, B, C, B, ut in propos. praecedentibus, expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis G, F, cuiusque G, F, Rationali D, commensurabilis; Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus A, C, ad numerum A, B, ita quadratum ex E, F, ad quadratum ex G, F, per eorundem propos. 6. huius libri. Dico E, G, esse secundam Apotomen. Quoniam quadrata ex G, F, E, F, proportionem habent, quam numeri A, C, A, B, commensurabiles sunt; Erunt igitur rectae G, F, E, F, commensurabiles, saltem potentia. Cuiusmodi G, F, in officina Rationalis, veris quoque E, F, Rationalis. Quia ut numeri A, C, A, B, itaque ad quadrata ex G, F, E, F, proportionem non habent, quam numeri quadrati erunt G, F, E, F, longitudine incommensurabiles.



6. decimi.

9. decimi.

6. decimile:

les. Rationales ergo sunt $G F$, $B F$; potentia solum com-
mensurabiles; Ideoque $E G$, reliqua, Apotome est. Dico
ergo, in quibus solentur & secundam esse. Possit enim re-
cti, cuius dupli- $E F$, plus quam $G F$, qua-
dratum ex H . Quoniam ergo est
 D ~~$E G$~~ $E F$ ~~ex $A C$, ad $A B$, ita quadratum~~
~~ex $E F$, ad quadratum ex $E F$, de~~
~~convertendo, ut $A B$, ad $A C$, ita~~
~~quadratum ex $E F$, ad quadratum~~
~~ex $G F$.~~ Ostendemus iam, ut in antecedenti proposi-
tione H , ipsi $E F$, longitudine esse commensurabilem.
Quam ob rem cum tota $E F$, plus possit, quam congrua
 $G F$, quadrato recte H , sibi longitudine commensura-
bilis; Itaque congruenti $G F$, exposita Rationali D , lon-
gitudine commensurabilis; erit $B G$, ex defn. secunda
Aporome. Invenimus ergo secundam Apotomen. Quid
erit faciendum.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apo-
men.

R. E. F. & R. T. s duobus numeris quadratis A B, C B, ut
in propof. 86. Sumatur alius numerus I, cuius proposui. hu-
juslibet doctrina est, quia ad neutrum
A. . . . G. . . . B A ipforum A B p. A. U. q. p. proportio-
nem habeat, quam quadratus ad
quadratum. Exposita deinde Ra-
tionalis D, fiat ut D, ad A B, ita
quadratus ex D, ad Quadratum
ex E. F., per coroll. propof. 86. hu-
juslibet. Et unque quadrata ex B,
& E. F., proportionem habentia, quam numeri I, & A B, co-
mensusurabilia, atque adeo & rationes D, & E. F., comensura-
les, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit &
E. F., Rationalis. Bequa numeri I, & A B, ac propterea
qua-

quadrata ex D , & $B F$, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D , & $E F$, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut $A B$, ad $A C$, ita quadratum ex $E F$, ad quadratum ex $G F$; ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico $E G$, esse tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex $E F$, & $G F$, proportionem habent, quam numeri $A B$, & $A C$, incommensurabiles sunt, necesse est rectæ $E F$, & $G F$, incommensurabiles, saltem potentia. Cum ergo $E F$, ostensu sit Rationalis, erit & $G F$, Rationalis, cum non hæc sit incommensurabilis, ut demonstratum est. Et quia $A B$, & $A C$, atque adeo & quadrata ex $E F$, & $G F$, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ $E F$, & $G F$, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo super $E F$, & $G F$, potentia solum incommensurabiles; At propterea cum ex $B F$, auferatur $G F$, potentia illi solum incommensurabilis; reliqua $E G$, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam est ut I , ad $A B$, ita quadratum ex D , ad quadratum ex $E F$; & ut $A B$, ad $A C$, ita quadratum ex $B F$, ad quadratum ex $G F$; erit ex æquo ut I , ad $A C$, ita quadratum ex D , ad quadratum ex $G F$. Non habent autem numeri I , & $A C$, proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D , & $G F$, proportionem habebunt, quam numeri quadrati; sunt ergo rectæ D , & $G F$, longitudines incommensurabiles. Ostensa sunt autem & D , & $E F$, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum $E F$, & $G F$, longitudine incommensurabilis est exposita Rationali D . Possit iam $E F$, plus quam $G F$, quadrato rectæ H . Ostendemusque, ut in præfati 26. rectam H , esse ipsi $E F$, longitudine incommensurabilem. Quapropter cum tota $E F$, plus possit quam congruus $G F$, quadrato rectæ H , longitudine sibi incommensurabilis, & neutra ipsarum $E F$, & $G F$, longitudine incommensurabilis sit Rationali D , exposita; erit ex definit. $E G$, tertia Apotome. Invenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

9. decimi.

6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

incommensurabilis.

9. decimi.

28

42

PROBL.

88. PROBL. 22. PROPOS. 89.

83. INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A, C, C, B , ut A, B , ex illis compositus ad neutram ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quae in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D , cui longitudine commensurabilis sit E, F ; et ita propterea & B, F , Rationalis. Quod si reliqua fiant, quae in propos. 86. ostendimus, ut ibi E, G , esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim B, F , plus quam G, F , quadrato rectae H . Et quia est ut A, B ad A, C , ita quadratum ex B, F , ad quadratum ex G, F , ostendit per conuersionem rationis, ut A, B , ad C, B , ita quadratum ex E, F , ad quadratum ex H . Cum ergo A, B , & C, B , proportionem non habeant, quam numeri quadrati sunt, rectae B, F , & H , longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E, F , plus potest, quam congruas G, F , quadrato rectae H , sibi longitudine incommensurabilis, et ita eadem tota E, F , commensurabilis longitudine Rationali D , et ita defin. E, G , quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

9. decimi.

89. THEOR. 23. PROPOS. 90.

84. INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A, C, C, B , ut in propos. praecedenti, fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G, F , longitudine commensurabilis Rationali D , &c. Ostendimus ergo ut in propos. 87. E, G , esse Apotomen. Dico & secundam esse. Possit enim E, F , plus quam G, F , quadrato rectae H . Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendimus.

demus, per conversionem rationis, esse ut $A.B.$, ad $C.B.$, ita
 quadratum ex $E.F.$, ad quadratum ex $H.$; et tunc sursum, ut
 in propos. antecedenti, tota $E.F.$, & $H.$, longitudine incom-
 mensurabilis. Quia ergo tota $E.F.$, plus potest, quam con-
 gruens $G.F.$, quadrato recta $H.$, sibi longitudine incommen-
 surabilis; estque congruens $G.F.$, Rationali $D.$, commensura-
 bilis longitudine; erit ex defin. $E.G.$, quinta Apotome. Inve-
 nimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 81.

INVENIRE sextam Apotomen.

RESERVA: tribus numeris $A.G.B.$, & $I.$, ut in pro-
 pos. 54, ita ut $A.B.$, ad neutrum ipsorum $A.C.$, $G.B.$, & $I.$, ad
 neutrum ipsorum $A.B.$, $A.C.$, proportionem habeat, quam
 quadratus ad quadratum: expona-

tur Rationalis $D.$, & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendemus ergo
 similiter, ut ibi, $D.$, & $E.F.$, longitu-
 dine incommensurabiles esse. E $G.$, Apotomen esse; Dico, & sex-
 tam esse. Nam ut in propos. 88. et sunt $D.$, & $G.F.$, longitu-
 dine quoque incommensurabiles; Atque addo neutrum ipso-
 rum $E.F.$, $G.F.$, longitudine commensurabilis est exposita
 Rationali $D.$. Porro etiam $E.F.$, plus quam $G.F.$, quadrato re-
 cta $H.$, quam ostendimus, ut in propos. 89. longitudine in-
 commensurabilem esse ipsi $E.F.$. Igitur cum tota $E.F.$, plus
 possit, quam congruens $G.F.$, quadrato recta $H.$, sibi longitu-
 dine incommensurabilis, & neutra ipsarum $E.F.$, $G.F.$, longi-
 tudine sit commensurabilis Rationali $D.$; erit ex defin. $E.G.$,
 sexta Apotome. Invenimus ergo sextam Apotomen.

Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Sed & expeditius sex dictas Apotomas inveniemus hac
 ratione, ut Theon docet hoc loco.



90.
85.

10
28

49. decimi.

[illegible]

74. decimi.

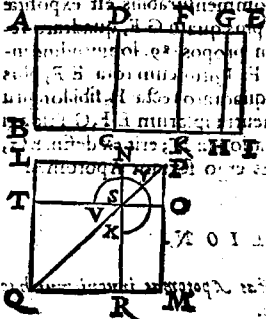
quia $A C$, plus potest, quam $C B$, hoc est, quam $D C$, quadra-
to recta lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est $A C$, Ra-
tionali expressa longitudine commensurabilis, ex definitione
eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur, erit ex definitione
Apollonis prima, & secunda Apollonis. Eadem ratione ex
ceteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apoto-
mæ inveniuntur, & Descentia secundam, excuria versam,
ex quâta quârtam, & quintam quintam, & de sua sectione,
semper a notis axonometricis auferamus. analogia

91.

86.

THEOR. 68. PROPOS. 22.

Δ Ipatium continetur sub Rationali,
 & Apotoma prima; Recta linea Ipatium po-
 tens. Apotome est.



quam congruent. DE, quod dato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis. Secetur DE sibi fariam in F, & quadrato ex FE,
hoc est, quatuor partibus quadrati ex DE, applicetur ad AE, re-
ctangulum æquale sub A, G, & G, E, deficiens figura quadra-
ta, per lemma 2. præpositi huius lib. Et quia AE, plus
potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis, erunt rectæ A, G, & G, E, longitudine com-
mensurabiles; At propterea & utraque toti AE, longitudine
commensurabilis erit. Est autem AE, Rationali AB,
longitudine commensurabilis. Igitur & utraque A, G, & G, E,
ipsi AB, longitudine est commensurabilis; atque ex defini-
tione 8. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, paralle-
lis, quæ ipsi BH, & ED, ductæ occurrant in H, I; erit utrumque
rectangulum AH, GI, contentum sub duobus Rationalibus
longitudinibus commensurabilibus, & Rationale. Rursus quia
utraque DE, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE;
& DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB;
Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit
eius AE, longitudine incommensurabilis; essent AE, DE, longi-
tudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum, po-
tuitur in solū potentia commensurabiles. Erunt itaque utraque
ipsarum DE, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quo-
niā utraq; DE, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationali
est; Erunt propterea tam AB, DE, quæ AB, FE, Rationa-
les potentia tantum commensurabiles. Quare ducta AK, ipsi AB,
parallela, erit utrumq; rectangulum DK, FI, contentum sub Ra-
tionalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

TAM uero ipsi AH, fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI,
æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, an-
gulum LEM. Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem
diametrum, quæ sit P, Q. Perficiatur autem figura, ut uides.
Quonia igitur rectangulum sub A, G, & G, E, per constructionem,
æquale est quadrato ex DE, erunt tres rectæ A, G, FE, GE,
proportionales. Ac propterea cum AH, FI, GL, eandem cum ipsis
habeant rationem, perit FI, medium proportionale, inter A, H,
G, I, hoc est, inter quadrata LM, NO, illa æqualia. Est autem
inter eadem LM, NO, per lemma præpositi 4. huius lib. me-
dium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO,
æqualia sunt: Sed ipsi FI, æquales sunt DK, & ipsi LO,
æquale

18. decimi.

16. decimi.

12. decimi.

20. decimi.

12. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

14. secundi.

26. sexti.

17. sexti.

1. sexti.

36. primi

aequale est M . N . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
cum quadrato N . O . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
constructionem, Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
quem A . O . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
recta T . S . U . V . W . X . Y . Z .
men esse. Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .

Q. V. O. N. T. A. M. Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
spatia A . H . I . J . K . L . M . N . O . P . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
G. L . M . N . O . P . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
Rationa-

D. T. O. E.
 A . B . C . D . E . F . G . H . I . J . K . L . M . N . O . P . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
Rationa-

E. N. K. H. I. L.
 A . B . C . D . E . F . G . H . I . J . K . L . M . N . O . P . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
Mediam obocormentu

Q. R. M.
 A . B . C . D . E . F . G . H . I . J . K . L . M . N . O . P . Q . R . S . T . U . V . W . X . Y . Z .
Rationa-

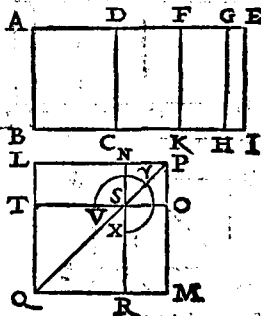
THEOR. 69. PROPOS. 93.

S. I spatium contineatur sub Rationali
& Apotoma secunda; Recta linea spatium
potens, Mediae est Apotome prima.

C. O. N. T. I. N. E. A. T. U. R. spatium AC , sub Rationali AB ,
& Apotoma secunda AD . Dico rectam, quae spatium AC ,
porcit, Mediae Apotomen esse primam. Si recta AD , con-
gruens rectae DE . Ergo AB & DE , ex definitione Apo-
tome secundae, Rationales potentes tantum, commensura-
biles, & congruens DE , longitudine commensurabilis Ra-
tionali

tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia contruantur, vt in propositione præcedenti. Eruntq; rursus, vt in antecedenti propositione, A G, G E, longitudine commensurabiles; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabilis. Est autem A E, Rationali A B, longitudine incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi A B, longitudine, cum D E, eidem A B, ponatur longitudine commensurabilis; essent A E, D E, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles.) Igitur & utraque ipsarum A G, G E, longitudine incommensurabilis est eidem A B. Est autem utraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam A B, A G, quam A B, G E, potentia solum commensurabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia utraq; D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis est; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoque, ut in scholio propof. 12. huius lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis utraq; D F, F E; atq; adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero ut in præcedenti propof. demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam.

Q V O N I A M A G, G E, longitudine sunt commensurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & L M, N Q, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera co-



18. decimi
16. decimi

12. decimi

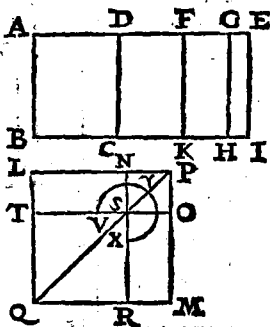
14. decimi

22. decimi

20. decimi

10. decimi

ra eorum, nempe rectæ TO , SO , saltem potentia erunt
commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata
 LM , NO , Medijs AH , GI , æqualia, (ostensa enim sunt



10. decimi.

75. decimi.

AH , GI . Mediæ esse.) Me
diæ sint. Et quoniam FI ,
arque adeo sibi æquale LO ,
Rationale est, proptereaque
Medio NO , incommensu
rabile; erunt rectæ TO ,
 SO , eandem cum illis ratio
nem habentes, longitudine
incommensurabiles. Cum
ergo & Mediæ sint ostensæ,
& commensurabiles; erunt
 TO , SO , Mediæ potentia
tantum commensurabiles.
Cum ergo contineant LO ,
quod Rationale est ostensum;

erit TS , Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium cō
tineatur sub Rationali; & Apotoma secunda, &c. Quod
demonstrandum erat.

93.
88.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma tertia; Recta linea spatium po
tens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium AC , sub Rationali
 AB , & Apotoma tertia AD . Dico rectam, quæ spatium
 AC , potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi AD ,
congruens DE . Erunt ergo, ex definitione Apotomæ ter
tiæ, AE , DE , Rationales potentia tantum commensura
biles, & neutra ipsarum AE , DE , longitudine commensu
rabilis Rationali AB ; Et denique AE , plus poterit, quam
 DE , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Se
cetur DE , bisariam in F , & cætera fiant, ut in propos. 92.
eruntq; rursus, ut ibi, AG , GE , longitudine inter se com
mensu

menfurabiles; Ac propterea & utraq; tori A E, longitudi-
ne commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommen-
surabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G,
G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cum
ergo utraque A G, G E, Ra-
tionali A E, commensurabi-
lis, Rationalis sit; erunt tã
A B, A G, quam A B, G E,
Rationales potentia solum
commensurabiles; Ac pro-
pterea utrunque rectangu-
lum A H, G I, Medium erit.
Rursus quia D E, longitu-
dine ponitur incommentu-
rabilis Rationali A B; erit
quoque utraque D F, F E,
ipsi D E, longitudine com-
mensurabilis existens, eidẽ
A B, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraque
D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationa-
lis; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales poten-
tia tantum commensurabiles; atq; propterea utrunq; rectũ
gulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabi-
mus, ut in propof. 92. rectam T S, posse spatium A C. Di-
co T S, esse Mediæ Apotomen secundam.

16. decimi.

14. decimi.

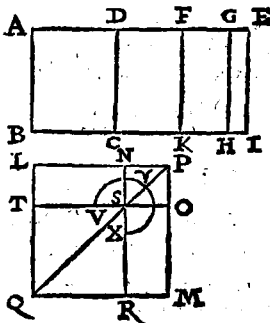
22. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

10. decimi.

10. decimi.



Q V O N I A M A H, G I, Media sunt ostensa; erunt &
quadrata L M, N O, illis æqualia; Media; Ac propterea &
rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem haben-
tia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commen-
surabiles esse, commensurabilia sunt; Erunt & quadrata
L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cõ-
mensurabiles, saltem potentia. At uero quia A E, D E, po-
tentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine in-
commensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa com-
mẽsurabilis G E, ipsi uerõ D E, cõmensurabilis est longitudi-
ne F E, sicut ex scholio propof. 14. huius lib. & G E, F E, lõgitu-
dine incommensurabiles; ac propterea G I, F I, eandem rationẽ
habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, inco-
mmensurabilia. Quare T O, S O, eandẽ rationem habentes
N 2 quam

quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo ſunt T O, S O, potentia ſolum commensurabiles. Et quoniam continent L O Medium; (cum enim L O, æquale ſit ipſi F I, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtendimus; erit & L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

6. decimi.

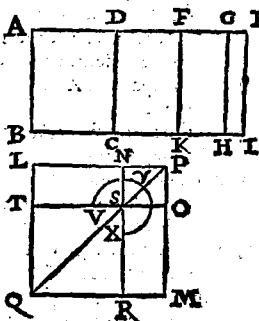
94.

89.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATUR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Minorem eſſe Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia ſolum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine cõmensurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia ſiant, ut prius. Erunt ergo A G, G E, incommensurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine in-



commensurabilis; & ad A E, applicatum eſt rectangulum ſub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficientis; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine cõmensurabilis; erit rectangulum A I, Rationale. Rurſus quia D E, Rationalis eſt, & Ratio

19. decimi.

20. decimi.

nalī A B, longitudine incommensurabilis; erit D I, atque adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, G E, sint longitudine incommensurabiles; incommensurabilia erant A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia. Iam uero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Minorem.

Q V O N I A M ex constructione, rectangulo A I, æquale est compositū ex quadratis L M, N O, rectarū T O, S O. Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item quia F I, Medium est ostensum; erit & L O, contentum sub T O, S O, illi æquale, Medium. Denique quoniam A H, G I, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ T O, S O potentia incommensurabiles. Quapropter cum T O, S O, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale; rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit reliqua T S, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

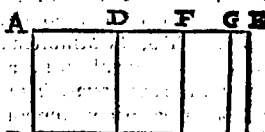
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

C O N T I N E A T U R spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam quæ spatium A C, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi A D, congruens D E, Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, & D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construan-

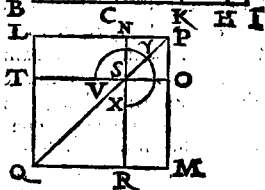


struantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti
propos. A G, G B, longitudine incommensurabiles. Et
quia A E, Rationalis longitudine incommensurabilis est
Rationali A B, ut in propos. 93. diximus; erit rectangu-

12. decimi.



10. decimi.



lum A I, Medium. Item
quia D E, Rationalis est, &
Rationali A B, longitudine
commensurabilis; erit D I,
atque idcirco & eius dimidiū
F I, Rationale. Rursus e-
runt, ut in precedenti pro-
pos. A H, G I, incommen-
surabiles; poteritque ut ostē-
sum est in propos. 92. recta
T S, spatium A C. Dico
T S, esse eam, quæ cum Ra-
tionali Medium totum effi-
cit.

Q U O N I A M ostensum est A I, Medium esse; erit &
compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O,
illi æquale, Medium. Item quia demonstrauius F I, Ra-
tionale esse; erit & L O, rectangulum sub T O, S O, conten-
tum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O,
potentia incommensurabiles, ut in propos. antecedenti est
demonstratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommen-
surabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis,
Medium; rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit reli-
qua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

78. decimi.

Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apo-
toma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

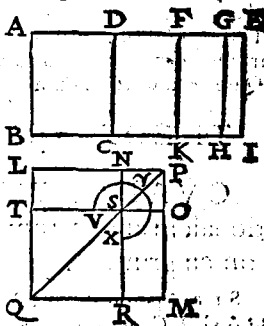
96.

91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali,
& Apotoma sexta; Recta linea spatium po-
tens est, quæ cum Medio Medium totum
efficit.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum cōmensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, ut supra. Erunt ergo rursus ut in propof. 95. AG, GE, longitudine incōmensurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incōmensurabilis; erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium, Eruntq; ut in propof. 95. AH, GI, incōmensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt cōmensurabiles; Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis, proportionem, incōmensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, cōmensurabilia sint, erit FI, ipsi AI, incōmensurabile. Iam uero demonstrabimus, ut in propof. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



Quo nō iam AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumq; sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incōmensurabile, ut ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incōmensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, sit æquale. Denique TO, SO, potentia incō-

N 4 mensu-

22. decimi.

10. decimi.

14. decimi.

incommensurabiles sunt, ut in propof. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO , SO , sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositores quadratis ipsarum incommensurabile; erit reliqua TS , ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quid erat ostendendum.

97.

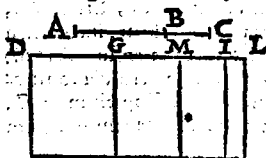
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinē facit Apotomen primam.

Si r . Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Rationales potentia solum commensurabiles; & ad Rationalem DE , applicetur rectangulum DF , æquale quadrato ex AB , latitudinē faciens DG . Dico DG , esse Apotomen primam. Ad eandem DE , applicetur rectangulum DH , æquale quadrato ex AC ; & ad IH ,

45. primi.



7. secundi.

aliud IK , æquale quadrato ex BC , ita ut totum DK , æquale sit composito ex quadratis rectarum AC , BC . Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC , BC , æquale est rectangulo bis sub AC , BC , una cum quadrato ex AB ; si auferatur quadratum ex AB , & rectangulum DF ; relinquetur GK , rectangulo bis sub AC , BC , æquale; atque adeo diuisa GL , bifariam in M , utraq; MN , ipsi DE , parallela, erit MK , æquale rectangulo sub AC , BC . Et quoniam AC , BC , Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC , BC , Rationalia; ideoq; commensurabilia. Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC , BC , utrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK , Ratio-

6. decimi.

Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L eandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

21. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

Quoniam per lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem; longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficientq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

17. sexti.

10. decimi.

18. decimi.

THEOR.

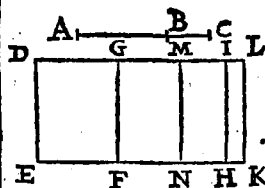
98.

93.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB , & ipsi congruens BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem DE , quadrato ex AB , æquale applicetur rectangulum DF , latitudinem faciens DG . Dico DG , Apotomen secundam esse. Construuntur eadem, quæ in antecedenti propos. ita



ut rursus DH , IK , æqualia sint quadratis ex AC , BC ; & GK , æquale ei, quod sub AC , BC , bis continetur; ac proinde MK , ei, quod sub AC , BC , continetur semel. Quoniam igitur AC , BC , Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum

quadrata, hoc est, illis æqualia, DH , IK , Media, & commensurabilia; ac proinde & totum DK , utrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lit. Cum ergo DK , applicetur ad Rationalem DE , erit DL , Rationalis ipsi DE , longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC , BC , Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK , Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE , erit GL , Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE . Quia uero DK , Medium, id est, Irrationale, & GK , Rationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ DL , GL , eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL , GL , Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, ut in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL , plus posse, quam congruentem GL , quadrato rectæ sibi longitudine

45. primi.

16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

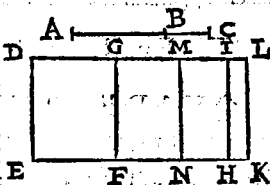
74. decimi.

tudine commensurabilis . Quare cum congruens GL ,
ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE ;
erit ex defin. DG , Apotome secunda . Quadratum ergo
Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum , la-
titudinem facit Apotomen secundam . Quod osten-
dendum erat .

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ
secundæ ad Rationalem applicatum, latitu-
dinem facit Apotomen tertiam .

SIT Mediæ Apotome secunda AB , & ipsi congruens
 BC , ita ut AC, BC , sint Mediæ potentia tantum commen-
surabiles, contineantq; Medium : Et ad Rationalem DE ,
applicetur DF , æquale quadrato ex AB , latitudinem fa-
ciens DG . Dico DG , esse
tertiam Apotomen. Eadem
enim fiant, quæ supra. Ostemus
iam, ut in propos. præcedenti,
 DK , Medium esse, atque adeo
rectam DL , Rationalem ipsi
 DE , longitudine incommensurabilem . Et
quia rectangulum sub AC ,
 BC , Medium est, atque ob id, & eius duplum GK ; erit
quoque GL , Rationalis ipsi DE , longitudine incommen-
surabilis . Quia vero AC, BC , longitudine sunt incommen-
surabiles, estq; ut AC , ad BC , ita per lemma 3. propo-
s. 19. huius lib. quadratum ex AC , ad rectangulum sub
 AC, BC ; erit quadratum ex AC , incommensurabile re-
ctangulo sub AC, BC . Est autem quadrato ex AC , com-
mensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC ;
quod quadrata ex AC, BC , ex rectis AC, BC , potentia com-
mensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo
vero sub AC, BC , commensurabile est rectangulum bis
sub



99.
94.

45. primi.

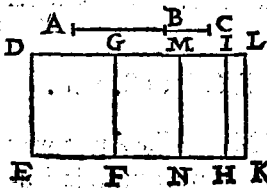
25. decimi.

23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

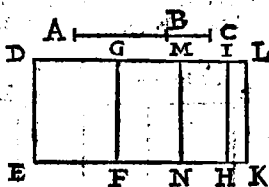
sub $A C, B C$. Igitur ex scholio, ptopos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum $A C, B C$, hoc est, $D K$, incommensurable est rectangulo bis sub $A C, B C$, hoc est, ipsi $G K$; Atq; adeo rectæ $D L, G L$, eandem habentes rationem, quam $D K, G K$, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostense & Rationales. Rationales ergo sunt $D L, G L$, potentia solum commensurabiles; At proinde reliqua $D G$, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, ut in ptopos. 98. demonstrabimus $D L$, totam plus posse, quam $G L$, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum $D L, G L$, Rationali $D E$, longitudine sit commensurabilis, ut demonstratum est; erit ex defin. $D G$, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.



THEOR. 77. PROPOS. 101.
QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

S I T Minor $A B$, & ipsi congruens $B C$, ita ut $A C, B C$, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum $A C, B C$, Rationale; rectangulum vero sub $A C, B C$, Medium: Et ad Rationalem $D E$, applicetur spatium $D F$, quadrato ex $A B$, æquale, latitudinem faciens $D G$. Dico $D G$, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, ut in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum $A C, B C$, hoc est, illi æquale $D K$, Rationale est; erit $D L$, Rationalis ipsi $D E$, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub $A C, B C$, atque adeo & eius duplum $G K$, Medium est; erit $G L$, Rationalis ipsi $D E$, longitudine incommensurabilis.

bilis. Rurfus quoniam DK , Rationale, & GK , Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; erunt DL , GL , eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. ostensa sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL , GL , potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua DG , Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam AC , BC , potentia sunt incommensurabiles;



10. decimi

74. decimi

10. decim

19. decimi

101.

96.

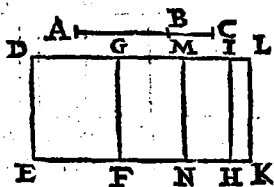
Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH , IK , incommensurabilia; Ac propterea rectæ DI , IL , longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI , IL , æquale sit quadrato ex ML , id est, quartæ parti quadrati ex GL , ut in propof. 98. est demonstratum; poterit DL , plus quam GL , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL , maiorem applicatum est rectangulum sub DI , IL , æquale quartæ parti quadrati ex GL , minore; deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL , in partes DI , IL , longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL , plus possit, quam congruens GL , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota DL , Rationali DE , longitudine ostensa commensurabilis; Erit ex defin. DG , Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

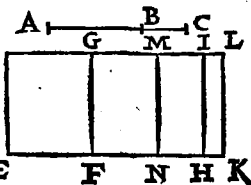
S i r recta cum Rationali Medium totum efficiens AB , & ipsi

& ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum uero sub ipso AC, BC, Rationale: Et ad Rationalem DE, applicetur DE, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atq; adeo & illi æquale DK, Medium est; erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atq; adeo & eius duplum GK, Rationale est; erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostense. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, ut in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex definit. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.



THEOR. 79. PROPOS. 103.
 QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens BC, ita ut A C, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarum A C, BC, Medium, & rectangulum sub ipsidem A C, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem D enim fiant, quæ supra. Quoniam tam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quæ rectangulum sub A C, B C, atq; adeo & eius duplū GK, Medium est; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplū G K, commensurabilia; Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; proptereaq; rectæ DL, GL eandē habentes rationē, quā D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostense sunt autē & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solū commensurabiles; Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextā. Ostendemus, n. similiter ut in propos. 101. totam D L, plus posse, quā congruentē GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cū igitur neutra ipsarum DL, GL, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.



45. primi.

23. decimi.

14. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

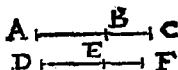
103.
98.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C. sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D E. Dico &



D E, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi A B. Fiat ut A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erit ergo tota A C, ad

12. sexi.

12. quinti.

10. decimi.

totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles; Erunt quoq; A C, D F, necnon & B C, E F, commensurabiles longitudine. Et quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F: & sunt A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex ijs, quæ ad propof. 10. huius lib. demonstrauius, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint

74. decimi.

15. decimi.

12. decimi.

ostensa, reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, ut A B, sit Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoq; D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si uero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atq; adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

14. decimi.

15. decimi.

POSSIT IAM A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, esse Apotomen

tomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N.

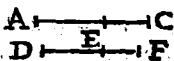
IDE M hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE , commensurabilis sit ipsi AB , potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: utamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE , Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB . Non enim sequitur, si tota AC , longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF , eidem esse commensurabilem longitudine; propterea quod non utraque, nempe Rationalis exposita, & DF ; eidem AC , longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DF , potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB , sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla modo potest, ut DE , illi potentia tantum commensurabilis sit Apotome eadem ordine.

S I T enim AB , prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens BC ; & sit DE , ipsi AB , potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem EF ; & partes AB , BC , ad partes DE , EF , eandem proportionem habere cum totis AC , DF . Dico nulla ratione DE , Apotomen esse ordine eandem ipsi AB . Nam si fieri posset, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC , tota, q̃ tota DF , ex definitione Apotome primæ, Rationali exposita commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC , et DF . Quare cum sit ut AC , ad DF , ita AB , ad DE ; erunt quoque AB , DE , longitudine commensurabiles. Quod est absurdū. ponitur enim DE , ipsi AB , potentia solum commensurabilis, Non ergo utraque AB , DE , Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utraque congruens BC , EF , ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsæ inter se. Quocirca & AB , DE , inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur,

12. decimi.

10. decimi.

SEMPER tamen verum est, si AB , est *A*potome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE , quæ ipsi AB , potentia solus est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc pos-



to, poteris AC , plus quam BC , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit

ut AC , ad BC , ita DF , ad EF ; poteris quoque DF , plus quàm EF , quadrato rectæ longitudine sibi cõmensurabilis. Quare ex defin. erit DE , *A*potome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB , est *A*potome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC , plus possit, quàm BC , quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis; Erit quoque DE , *A*potome quarta, uel quinta, vel sexta, quamvis ordine non eadem ipsi AB : quia rursus, cum sit ut AC , ad BC , ita DF , ad EF , poterit quoque DF , plus quam EF , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB , *A*potome quarta, uel quinta, vel sexta.

In sequentibus autem quinque propositionibus necessariis erit DE , eadem ordine ipsi AB , licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104.
99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

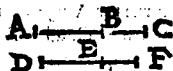
RECTA linea Mediæ *A*potomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ *A*potome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ *A*potome quæcunque AB , eique congruæ BC , ita ut AC , BC , sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB , commensurabilis DE , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE , *A*potomen esse, & ipsi AB , ordine eandem. Fiat ut AB , ad DE , ita BC , ad EF . Erit ergo tota AC , ad totam DF , ut AB , ad DE , & ut BC , ad EF . Quoniam igitur AB , DE , cõmensurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque BC , EF , & AC , DF , eodem modo commensurabiles. Et quia AC , BC , Mediæ sunt, erunt quoque

12. sexti.
12. quinti
10. decimi.

quoque DE, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus quia est ut AC, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F:

Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio, propos. 10.



huius lib. DE, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DE, EF, Mediæ sint ostensæ; erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico, & eandem esse ordine ipsi AB. Quonia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; & ut A C, ad B C, ita est quadratū ex AC, ad rectangulū sub AC, B C, ex lemmate 3. propos. 19 huius lib. & ut D F, ad E F, ita quadratū ex DF, ad rectangulū sub DF, EF; Erunt quoque ut quadratū ex AC, ad rectangulū sub AC, B C, ita quadratū ex DF, ad rectangulū sub DF, EF; Et permutando ut quadratum ex A C, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, B C, ad rectangulum sub D F, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commensurabile sit quadrato ex D F, quod rectæ A C, DF, ostensæ sint commensurabiles; erit & rectangulum sub AC, B C, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulū sub A C, B C, sit Rationale, ita ut A B, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub D F, E F, Rationale, cum illi sit commensurabile; atque adeo & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si uero rectangulum sub A C, B C, sit Medium, ita ut A B, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulū sub D F, E F, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Ac propterea & D E, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

75. vel 76
decimi.

10. decimi

75. decimi

76. decimi

THEOR. 82. PROPOS. 106.

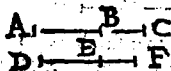
105. 116
100.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsiq; congruens BC, ita ut AC, BC, potentia sint incōmensurabiles, facientesq; cōpositum quiddē ex quadratis rectarū A C, B C, Rationale; rectangulū uero sub ipsidem AC, B C, Medium. Sit autem D E, ipsi A B, com-

O 2 mensu-

mensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Minorem esse. Fiant eadem, quæ supra, ita ut rursus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem quam A C, ad D F. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propos. D F, E F, ipsi



A C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex E F, quod rectas B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, composito ex quadratis rectarum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ex hypothesi, Rationale. Igitur & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam ut in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile: Ponitur autem rectangulum sub A C, B C, Medium; Erit, quoque rectangulum sub D F, E F, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; suntque A C, B C, potentia incommensurabiles, erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F, Rationale, rectangulum uero sub iisdem D F, E F, Medium; erit D E, Minor.

24. sexti.

10. decimi.

10. decimi.

77. decimi.

Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

T H E O R.

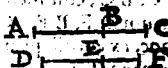
THEOR. 83. PROPOS. 107. 106. 117.

101.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, ac rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DB, ipsi

AB, commensurabilis quocunque modo: Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Me-



dium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendimus ut in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Rationale, erit DE, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107.

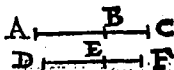
102.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; &

ipsa

ipsa cum Medio Medium totū efficiens est.

SIT recta A'B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ut A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque,



& adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis: Sit autem D E, ipsi A B, quomodolibet commensurabilis. Dico, & D E, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, ut in propof. 106. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurable esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propof. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propof. 105: ostendemus rectangulum sub A C, B C, commensurable esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propof. 106: erunt quoque D F, E F, potentia incommensurabiles: Postremo quia composito ex quadratis rectarum A C, B C, commensurable est compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum est, & rectangulo sub A C, B C, commensurable est rectangulum sub D F, E F: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum sub A C, B C, per hypothesin, incommensurabilia; Erunt quoque ex scholio propof. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum sub D F, E F, incommensurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis Medium; nec pon. & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurableq; composito ex ipsarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

79. decimi.

THEOR.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

108.

103.

MEDIO a Rationali detracto, Recta
linea, quæ reliquum spatium potest, una
ex duabus Irrationalibus sit, uel Apotome,
uel Minor.

DETRAHATVR a Rationali AD, Medium CD.
Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse uel
Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis EF, ad
quæ applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH,
aliud HI, æquale ipsi CD, ita ut totum EI, toti AD, sit
æquale. Quoniam igitur

45. primi.

EI, æquale Rationali AD,
Rationale est; erit EK, Ra
tionalis, Rationali EF, longi
tudine commensurabilis.



21. decimi.

Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est; erit HK,
Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque
cum EK, quidem sit longitudine cõmensurabilis ipsi EF, at
HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; erunt EK,
HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales.
Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles:
proptereaquæ reliqua EH, Apotome est, & ei congruens
HK. Aur igitur EK, plus potest quam HK, quadrato
rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensu
rabilis. Si plus, põt EK, q̃ HK, quadrato rectæ lineæ cõmen
surabilis sibi longitudine, cum tota BK, ostensa quoque sit
longitudine cõmensurabilis Rationali EF, erit ex defin. EH,
Apotome prima. Quare recta potēs spatiū EG, cõtentū sub
Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatiū AB,
sibi æquale, Apotome est. Si uero EK, plus potest, quā HK,
quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cū tota EK,
sit ostensa cõmensurabilis longitudine Rationali EF, erit ex
defin. EH, Apotome quarta. Quapropter recta potēs spa
tiū EG, cõtentū sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH,
hoc est, spatiū AB, illi æquale, Minor est. Medio ergo a Ra
tionali detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

23. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

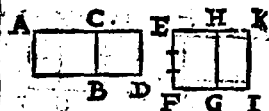
92. decimi.

95. quinti.

THEOR. 86. PROPOS. 110.

RATIONALI a Medio detracto;
alix duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apo-
tome prima, uel cum Rationale Medium to-
tum efficiens.

DETRAHATUR a Medio A D, Rationale C D. Di-
co rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse uel Mediæ
Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium
totum efficit. Eadem construantur, quæ supra. Et quia



E I, Medio A D, æquale,
Medium est; erit E K, Ra-
tionalis ipsi E F, longitudi-
ne incommensurabilis. Itē
quia H I, æquale Rationa-

li C D, Rationale est; erit H K, Rationalis ipsi E F, longi-
tudine commensurabilis. Itaque cum H K, quidem ipsi
E F, sit commensurabilis longitudine; at E K, eidem E F,
longitudine incommensurabilis; Erunt H K, E K, longitudi-
ne incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
sunt potentia solum commensurabiles; Ac proinde reliqua
E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K,
plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine co-
mensurabilis, aut incommensurabilis. Si E K, plus potest,
quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensura-
bilis, cum congruens H K, ostensa sit longitudine commen-
surabilis Rationali E F; erit ex defn. E H, Apotome secun-
da. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Ra-
tionali E F, & Apotoma secunda E H, hoc est, spatiū A B,
illi æquale, Mediæ est Apotome prima. Si uero E K, plus
potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incom-
mensurabilis, cum congruens H K, sit ostensa commensura-
bilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta,
ex defn. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub
Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc est, spatium
illi æquale AB, est ea, quæ cum Rationali Medium totum
efficit.

109.

104.

23. decimi.

21. decimi.

13. decimi.

74. decimi.

93. decimi.

96. decimi.

efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c.
Quod ostendendum erat.

110.

105.

THEOR. 87. PROPOS. III.

MEDIO a Medio detracto, quod sit
incommensurabile toti; Reliquæ duæ Irra-
tionales fiunt, uel Mediæ Apotome se-
cunda; uel cum Medio Medium totum
efficiens.

DETRAHA TUR a Medio A D, Medium C D, quod
incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reli-
quum spatium A B, potest, esse uel Mediæ Apotomen secun-
dam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Con-
structis enim iisdem, quæ
supra; quoniam E I, H I, A C E H K
Medijs A D, C D, æqualia, B D F G I
Media sunt, erunt E K,
H K, Rationales ipsi E F,
longitudine incommensurabiles. Et quia A D, C D, hoc est,
E I, H I, ponuntur incommensurabilia; erunt E K, H K,
eandem cum illis habentes, rationem, longitudine incommen-
surabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt
potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua
E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K,
plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine
commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest
E K, quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine commen-
surabilis, cum neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F,
longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defn. E H,
Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, con-
tentum sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est,
spatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome est secunda. Si
uero E K, plus potest, quam H K, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum E K, H K,
Rationa

23. decim

10. decim

74. decim

94. decim

Rationali E F, sic longitudine commensurabilis, ut demon-
strauimus; erit ex defin. E H, Apotome sexta. Quam ob-
rem recta potens spatium E G, contentum sub Rationali
E F, & Apotoma sexta B H, hoc est, spatium A B illi equa-
le, est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo
a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

III.

106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

A P O T O M E non est eadem, quæ ex
binis nominibus.

S I T Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse ead-
dem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A,
aliqua ex binis nominibus. Exposita Rationali B C, appli-
cetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A.



Quoniam igitur A, Apotome est, erit la-
titudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei
congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apo-
tomæ primæ, B E, D E, Rationales poten-
tiæ tantum commensurabiles, potentiæque
B E, plus quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine com-
mensurabilis; & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis
erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex
binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nomi-
nibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur
ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F,
F D, Rationales potentia solum commensurabiles, pote-
ntiæque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensura-
bilis sibi longitudine; & ipsa B F, Rationali B C, longitudine
commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, lon-
gitudine sit commensurabilis eidem B C; erunt quoque
B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur to-
ta B E, existente longitudine commensurabili parti B F,
erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commen-
surabilis, ex coroll. propos. 16 huius libri; Atque adeo cum
B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam ut-
ro duarum linearum B E, F E, longitudine commensura-
bilium;

bilium, ipsa B.E. longitudine incommensurabilis est, ipsa D.E. (quod B.E. & D.E. Rationales sint potentia solum commensurabiles, tunc quoque altera F.E., eidem D.E. incommensurabilis longitudine. Sed & utraque F.E. & D.E. Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F.E., D.E. potentia solum commensurabiles. Quare reliqua A.D., Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

14. decimi.

74. decimi.

Ex binis nominibus, cuius ex his
COROLLARIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Medias, neque inter se esse eadem.

QUADRATUM enim Mediz ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam, & eandem longitudinem incommensurabilem.

23. decimi

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

98. decimi

ET quadratum Mediz Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

99. decimi

QUADRATUM vero Mediz Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

100. decimi

QUADRATUM deinde Mediz ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

101. decimi

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

102. decimi

QUADRATUM deniq; eius, quæ cū Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

103. decimi

ITAQVE cum hæc latitudines differant & a latitudine Mediz, & inter se; a latitudine quidē Mediz, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QUONIAM vero in hoc theoremate demonstratis Apotomen eandem nō esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextā: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundā, tertiam, quartā, quintam, ac sextā; siquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ

que post ipsam, eadem non esse. Idem in binis eius, que ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam, & rationalium, quandoque dem nulla Apotome eadem est, que ex binis nominibus aliqua, le- tur & Apotome, & que ipsam sequuntur, differunt ab ea, que ex binis nominibus, & que post ipsam. Quam ob rem cum & tam il- le, quam ha Media differant, efficiat. Rationali, quoniam co- ponia, trescenti numero, esse, hunc & Irrationales inter se se differen- tes, de quibus hactenus disputavimus. Ha. Gilicer.

Media.

2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt spe- cies inventa.

3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex binis Medijs secunda.

5. Maior.

6. Rationale ac Medium potens.

7. Bina Media potens.

8. Apotome, cuius etiam species sex sunt reperta.

9. Media Apotome prima.

10. Media Apotome secunda.

11. Minor.

12. Cum Rationali Medium totum ef- ficiens.

13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR.

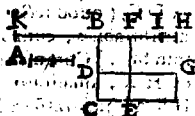
THEOR. 89. PROPOS. 113.

112.

0.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius; quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, eo commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportionem; & adhuc Apotome B F, esse ordinem eandem ipsi B C, ex binis nominibus. Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt B E, C G; erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B. Est autem B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior est, quam F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. ostensum est autem esse ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque ut B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt: potentia tantum commensurabiles. Igitur & F K, B K, potentia solum commensurabiles sunt.



45. primi

45. primi

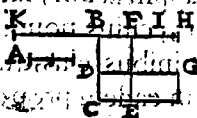
14. vel 16. sexti.

12. sexti

10. decimi

R V R S V S

R y r s v e quia est ut $H F$, ad $B F$, ita $F K$, ad $B K$, erit quoque $H F$, $F K$, antecedentes simul, nempe tota $H K$, ad $B F$, & $B K$, consequentes simul, hoc est, ad totam $F K$, ut $F K$, ad $B K$. Ac propterea $F K$, media proportionalis est inter $H K$, & $B K$. Quare ut $H K$, prima ad $B K$, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex $H K$, prima ad quadratum ex $F K$, secunda. Quia uero $C G$, cum



Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A , æquale) ad Rationale $D C$, applicatum facit $D G$, latitudinem Rationale, ipsi $D C$, longitudine commensurabilem; Erit quibque $H B$, ipsi $D G$, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi $D C$. Et quoniam ostensum est, esse ut $B D$, ad $D C$, ita $F K$, ad $B K$: Ut autem $F K$, ad $B K$, ita $H K$, ad $E K$, erit quoque ut $B D$, ad $D C$, ita $H K$, ad $F K$. Igitur ut quadratum ex $B D$, ad quadratum ex $D C$, ita quadratum ex $H K$, ad quadratum ex $F K$. At quadratum ex $B D$, commensurabile est quadrato ex $D C$, (quod rectæ $B D$, $D C$, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius $B C$, ex b. nis nominibus.) Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex $H K$, quadrato ex $F K$. Sed fuit ut quadratum ex $H K$, ad quadratum ex $F K$, ita recta $H K$, ad $B K$. Igitur longitudine commensurabilis est $H K$, ipsi $B K$; atque adeo & reliquæ $B H$, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem $B H$, Rationalis; Igitur & $H K$, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & $B K$, ipsi $H K$, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit $F K$, ipsi $B K$, potentia solum commensurabilis; erit quoque $F K$, Rationalis. Quare cum $F K$, $B K$, Rationales sint, & potentia tantum ostensa commensurabiles; erit reliqua $B F$, Apotome, & ei congruens $B K$. Quod est primum.

Q V O N I A M, uero ostensum est esse rectam $H K$, totam parti $B K$, longitudine commensurabilem; erunt propterea & $B K$, $B H$, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo $B H$, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi $D C$; erit quoque $B K$, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem $D C$, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum

stratum est esse ut $B D$, ad $D C$, ita $F K$, ad $B K$; & permu-
tando ut $B D$, ad $F K$, ita $D C$, ad $B K$: Sunt autem modo
 $D C$, $B K$, ostensæ longitudine commensurabiles; Erunt
quoque $B D$, $F K$, commensurabiles longitudine. Itaque
cum $F K$, ipsi $B D$, & $B K$, ipsi $D C$, longitudine sit commen-
surabilis; erunt ipsius Apotomæ $B F$, nomina $F K$, $B K$,
nominibus $B D$, $D C$, ipsius BC , ex binis nominibus, longitu-
dine commensurabilia. Quod est secundum.

o. decimi.

ITEM quia demonstrauimus esse ut $B D$, ad $D C$, ita
 $F K$, ad $B K$; erunt idcirco Apotomæ nomina $F K$, $B K$, in
eadem ratione cum $B D$, $D C$, nominibus ipsius BC , quæ est
ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO uel $B D$, plus potest, quam $D C$, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensu-
rabilis. Si plus potest $B D$, quam $D C$, quadrato rectæ sibi
longitudine commensurabilis; cum sit ut $B D$, ad $D C$, ita
 $F K$, ad $B K$; poterit quoque $F K$, plus quam $B K$, quadra-
to rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si $B D$, plus
potest quam $D C$, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & $F K$, plus quam $B K$, quadrato re-
ctæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem $B D$,
expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis;
erit & $F K$, quæ longitudine ostensa est commensurabi-
lis ipsi $B D$, commensurabilis longitudine eidem Ratio-
nali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demon-
strauimus. Si uero $D C$, sit Rationali commensurabi-
lis longitudine; erit & eadem ratione $B K$, eidem Ratio-
nali, longitudine commensurabilis. Si denique neutra ip-
sarum $B D$, $D C$, sit Rationali longitudine commen-
surabilis; erit quoque neutra ipsarum $F K$, $B K$, com-
mensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem

15. decimi.

ordine est Apotome $B F$, ipsi $B C$, ex binis no-
minibus, ut constat ex definitionibus se-
cundis, atque tertijs. Quod est quar-
tum. Quadratum ergo Ratio-
nalis ad eam, quæ ex binis
nominibus, &c. Quod
demonstran-
dū erat.

14. decimi.

THEOR.

113.

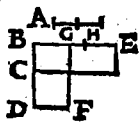
THEOR. 99. PROPOS. 114.

o.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionē; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

45. primi.

S I T Rationalis A, & Apotomæ BC, cui congruat CD; & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D,



45. primi.

14. vel 16. sexti.

CD, Apotomæ BC, & in eadem proportionē; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuersionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablata; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erat igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiā, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantū com-

commensurabiles; Eunt quoque B H, H E, potentia (10. decimi.
 lum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E,
 commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes
 rationem cum quadratis ex B H, H E, ut demonstraui-
 mus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea to- 10. decimi
 ta B H, longitudine commensurabilis existens parti G H,
 comensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G,
 ex coroll. propof. 16. huius lib. At uero cum B D, Ratio-
 nalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangu-
 lum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationa-
 le; erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitu- 21. decimi.
 dine ipsi B D. Igitur ex scholio propof. 12. huius lib. & B H,
 eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atq;
 adeo Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitu-
 dine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero B H, H E,
 ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & B H,
 Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis, Ratio-
 nalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solum cõ-
 mensurabiles; Ac propterea B E, ex binis nominibus est. 37. decimi.
 Quod est primum.

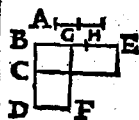
Q VONIAM vero ostendimus esse B H, ad H E, ut B D,
 ad C D; atque adeo permutando B H, ad B D, ut H E, ad
 C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine com- 10. decimi.
 mensurabilis; erit quoque H E, ipsi C D, commensurabi-
 lis longitudine. Quare B H, H E, nomina ipsius B E, ex
 binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nomi-
 nibus B D, C D, Apotomæ B C. Quod est secundum.

I M M O & in eadem proportionem, cum demonstratum
 sit esse B H, ad H E, ut B D, ad C D. Quod est tertium,
 P O S T R E M O, uel B D, plus potest quam C D, qua-
 drato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incom-
 mensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitu-
 dine commensurabilis; poterit quoq; B H, plus quam H E,
 quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si B D, 15. decimi
 plus potest, quam C D, quadrato rectæ sibi longitudine in-
 commensurabilis; poterit etiam B H, plus quam H E, qua-
 drato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidẽ
 B D, Rationali expositæ longitudine sit, commensurabilis;
 erit quoque B H, commensurabilis existens longitudine ip-
 si B D,

THEOR. 99. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionē; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD; & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D,



CD, Apotomæ BC, & in eadem proportionē; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem

faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuersionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propof. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE. Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiā, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propof. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantū com-

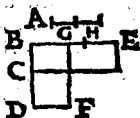
commensurabiles; E, ut quoque B H, H E, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes rationem cum quadratis ex B H, H E, ut demonstrauimus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, comensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propof. 16. huius lib. At uero cum B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propof. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia uero B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & B H, Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solum commensurabiles; Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

Q U O N I A M uero ostendimus esse B H, ad H E, ut B D, ad C D; atque adeo permutando B H, ad B D, ut H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; erit quoque H E, ipsi C D, commensurabilis longitudine. Quare B H, H E, nomina ipsius B E, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus B D, C D, Apotomæ B C. Quod est secundum.

I M M O & in eadem proportionem, cum demonstratum sit esse B H, ad H E, ut B D, ad C D. Quod est tertium.

P O S T R E M O uel B D, plus potest quam C D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoque B H, plus quam H E, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Et si B D, plus potest, quam C D, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam B H, plus quam H E, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem B D, Rationali expofita longitudine sit commensurabilis; erit quoque B H, commensurabilis existens longitudine ipsi B D,

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propof. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine fit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis.



Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atq; tertijs definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordine eadē est ipsi Apotomæ B C. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportionē, &c. Quod erat demonstrandum.

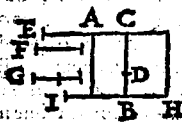
14. decimi.

114.
o.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionē; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATUR spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commensurabilia sunt nominibus C E, AE, Apotomæ AC;



& in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum

45. primi.
113. decimi.

CH, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut G E, ad A E; & per-

& permutando, ut tota HI , ad totam CE , ita ablata BI , ad ablatam AE . Erit ergo & reliqua BH , ad reliquam AC , ut tota HI , ad totam CE : Commensurabilis autem est longitudo HI , ipsi CE , quod utraque HI , CE , commensurabilis fuit longitudine ipsi CD . Igitur & BH , ipsi AC , longitudine est commensurabilis; Atque idcirco HC , ipsi BA , commensurabile erit, cum sic ut HB , ad AC , ita HC , ad BA : Sed HC , quadrato Rationalis G , æquale, Rationale est. Igitur & BA , illi commensurabile; Rationale erit, proptereaq; & recta F , ipsum BA , potens, Rationalis erit: Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportionem; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

19. quinti.

12. decimi.

10. decimi.

1. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB , contentum sub AC , CB , Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIUM.

IN proxima autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori uero, nempe in hac 115. nihil colligitur, si nomina CD , DB nominibus CE , AE , potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

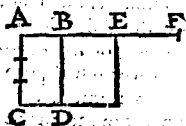
115.

107.

THEOR. 92. PROPOS. 115.

A MEDIA infinitæ Irrationales sunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

S I T Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media; & Rationali A C, spatium A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E,



quæ ex defin. xi. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui eedecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat

Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem. Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Q u o d si compleatur rectangulum D E, erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. xi. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inueniuntur & inter se, & a dictis differentes. Quæ circa a Media infinitæ Irrationales sunt, &c.

Quod demonstrandum erat.

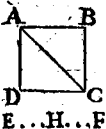
THEOR. 93. PROPOS. 117.

118.

7.

PROPOSITVM fit nobis ostende
re, in quadratis figuris diametrum lateri in-
commensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico
diametrum A C, longitudine incommensurabilem esse late-
ri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensura-
bilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionē
habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad
A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G;
sintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem pro-
portionem habentium. Quoniam ergo est ut A C, ad A B,
ita numerus E F, ad numerum G; Erit quoque
ut quadratum ex A C, ad quadratum ex A B,
ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum
numerus ex G, (Cum enim quadrata ha-
beant suorum laterum proportionem duplicatā;
latera autē æquales habeant, proportionem; erunt
proportiones quadratorum æquales etiā, cū sint
æqualium duplicatæ.) Sed quadratū ex A C, duplū est qua-
drati ex A B, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. osten-
dimus. Igitur & quadratus numerus ex E F, duplus erit
quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus
ex E F, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit di-
uidi, par erit, ex definit. Igitur & ipse B F, illum produ-
cens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans
producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar;
eo quod impar imparem multiplicans imparem procreet.
Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia uero
E F, & G, in sua proportionē minimi, inter se primi sunt;
& B F, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam
esset, metiretur utrumque E F, & G, binarius; atque adeo nō
essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam
par numerus E F, bifariam in H. Quia igitur numerus E F,
duplus est numeri E H; & quadrati habent proportionem
laterum duplicatam; erit, quadratus ex E F, quadruplus
quadrati



5. decimi.

20. sexti. &
11. octavi.

29. noni.

24. septimi.

1. octavi.

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qual um partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F, diximus; erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

A L I T E R. Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sint in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex A B, ita quadrat' numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atq; adeo & quadrat' ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem; numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdū. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

S E D & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo: Quoniam ex 45, 46 in scholis propos. 47. lib. 1. demonstra-

monstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. uel 4. ad 2. uel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportionem dupla quoscunque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & ceteri omnes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non fit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus fit, & 2. non quadratus; non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

10. noni.

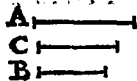
24. octavi.

9. decimi

Hoc etiam theorema aliter demonstrauius in scholio proposit. 8. lib. 8. & in scholio proposit. 9. huius libri.

CARTERV in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pender, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinet; uisum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriae, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inueniuntur & alia quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. proposit. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quævis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque posita super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilinea illa figura super A, & C, incommensurabiles.



10. decimi.

2. duodecimi.

RURSUS quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta:

P 4 Qua

Quadrata autem hæc, cum sint figura rectilinea similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam rectæ A , & B , ex coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum A , C , eandem proportionem, quam rectæ A , B : Sed rectæ A , B , incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum A , C , incommensurabiles sunt.

I A M uero si constituentur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figure rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A , C ; habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figure. Quare cum rectilineæ illæ figure incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum, Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

Q U O D si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A , C ; habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Invenitæ sunt igitur non solum lineæ, & superficies incommensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia; Quod est propositum.

E A D E M autem ratione, si rectæ A , & B , longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismata; ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



EVLIDIS

ELEMENTVM XI.

Et Solidorum primum.



DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinē, latitudinem, & crassitudinem habet.



DESTQVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometria parte discernit, qua circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriae, tanquam proprium, usurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quae necessaria videbantur ad intelligendam doctrinā

linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quae idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, ut constructio, atque natura, quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime differitur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriae, quae corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe rerum quae quantitatē habent. Docet igitur, eam quantitatē, quae

qua præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem; ita ut tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua uero longitudini latitudinem adijcit, superficies uocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim describit uestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet uestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum uero propter motum illum, qui in transuersum est factus; Carens autem profunditate, quod & lineæ illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditum, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hæc enim ratione describetur uestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum uero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus uocatur. Neque uero alia quantitas quarta distincta a lineæ, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentarijs, quos in spheram Ioannis de sacro bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemaeo in libello de Analemmate.

II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

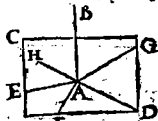
QUEMADMODUM lineæ finita in extremitatibus puncta,

puncta, superficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

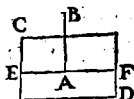
V. T. linea recta AB , plano CD , insists, ita ut B , punctum sit in sublimi extra planum CD , at punctum A , in ipso plano, tum denuum dicitur recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG , & cum omnibus alijs, qua in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A . Hac enim ratione fiet, ut AB , equaliter insistas plano CD , & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet.



Nam producta recta DA , ad H , cum angulus BAD , ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH , rectus. ideoque illi equalis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD , faciet AB , cum illa duos angulos equalis, Ac propterea equaliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB , cum una linea ex A , in plano CD , educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB , recta ad planum CD . Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, qua ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum dati recta, demonstrandum erit prius, ea cum omnibus in eodem plano ductis, qua ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

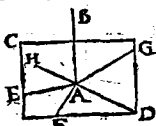
V. T. autem recta quampiam plano cuiusque insists rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque

ipsamq; tangensibus, satis est; ut cum duabus non efficien-
tibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur,
rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum
omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perspicuum
fiet ex propof. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficien-
tibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam
lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis re-
ctos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere an-
gulos. Recta enim AB , insitât plano CD , efficiatq; rectos



angulos cum duabus in eodem plano ductis
 AE , AF , quæ rectam unam lineam compo-
nant. Dico AB , non propterea cum omnibus
alijs rectos angulos constituisse; ac idcirco
non esse rectam ad planum CD . Hoc autem

perspicuum est, cum AB , circa EF , uelut axem, circum-
uerti queat, ita ut punctum B , modo sit plano propinquius, mo-
do ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF , sem-
per eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si ea-



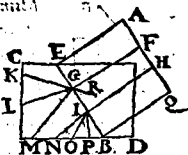
dem AB , cum duabus angulum componen-
tibus, quales sunt AG , AD , in priori
figura, rectos constituat angulos; tunc
demum cum omnibus alijs rectos angulos
efficiet, ut diximus. Id quod dilucide de-
monstrabitur propof. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum est,
cum rectæ lineæ, quæ communi planorum
sectioni ad rectos angulos in vno planorum
ducuntur, alteri plano ad rectos sunt an-
gulos.

INSISTAT planum AB , plano CD , ita ut linea
 AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum CD ; at EB , in
plano: Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ,
ut demonstrabitur propof. 3. huius lib. recta erit linea. In hac
autem

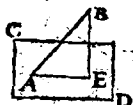
autem sumptis quocunque punctis G, I , ex ipsis in plano AB ,
ducantur GF, IH , perpendicularares ad communem sectionem
 EB . Si igitur lineæ FG, HI , ad pla
num alterum CD , rectæ fuerint, hoc
est, rectos angulos effecerint cum li
neis GK, GL, GM, IN, IO, IP ,
& cum alijs omnibus in plano CD , a
punctis G, I , ductis, dicetur pla
num AB , ad planum CD , rectum;
quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in
alteram, sed æqualiter illi infister. Si enim KG , produca
tur ad R , cum angulus FGK , ponatur rectus; erit & angu
lus ei deinceps FGR , rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq;
ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD , sient vtro
bique a lineis FG, HI , anguli æquales. Quare planum AB ,
æqualiter plano CD , infister. Quotiescunque igitur planum
aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendū
quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad commu
nem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum pla
num. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud ef
se rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in
uno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reli
quum planum.



V.

RECTAE lineæ ad planum inclina
tio est, cum a sublimi termino rectæ illius
lineæ ad planum deducta fuerit perpendicu
laris, atq; a puncto, quod perpendicularis
in ipso plano fecerit, ad propositæ illius li
neæ extremum, quod in eodem est plano,
altera recta linea fuerit adiuncta; est, in
quam, angulus acutus ipsa insistente linea,
& adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB , plano CD , non ad angulos re-
ctos, sed inclinata, ita ut punctum B , sit extra planum in su-
blimi, punctum vero A , in plano. Deinde ex

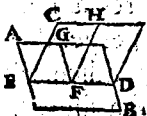


B , termino sublimi rectæ AB , intelligatur
ad idem planū deducta perpendicularis BE ,
faciens in plano punctū E ; atq; ab B , ad A ,
adiungatur recta EA ; eritq; necessario an-
gulus BAE , acutus, cum in triangulo ABE , duo anguli
 BAE , BEA , duobus sint rectis minores, & angulus BEA ,
rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea in-
sistente AB , & adiuncta AE , dicitur inclinatio rectæ AB ,
ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio li-
nea AB , ad planū CD , quātus est dictus angulus acutus BAE .

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est an-
gulus acutus rectis lineis contentus, quæ in
utroque planorum ad idem communis se-
ctionis punctum ductæ, rectos cum sectio-
ne angulos efficiunt.

PLANO AB , insiat planum CD , ita ut pars ad C , sit
in sublimi extra planum AB , & pars ad D , in ipso plano AB ,
siquē CD , inclinatum ad AB ; & communis eorum sectio sit
 DE . Si igitur ad B , communem sectionem ex eius puncto F ,
duæ perpendiculares ducantur; FG , qui-



dem in plano AB , at FH , in plano CD ; de-
cetur angulus acutus GFH , dictis rectis
comprehensus, inclinatio plani CD , ad pla-
num AB : Ita ut tanta esse dicatur incli-
natio plani ad planum, quantus est dictus
angulus acutus.

INTERDYM. Geometra angulum GFH , dicitur angu-
lum inclinationis plani CD , ad planum AB , siue is acutus sit
siue rectus, obliqusque, quanquam proprie solum angulus acu-
tus inclinationem unius plani ad alterum ostendit, ut Eucli-
des do-

des docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem elevationē vnius plani supra aliud, quā inclinationē vnius ad alterū; obtrusus vero recessum quodāmodo vnius ab altero. Verū tamen quia quilibet horū angulorū cōmōstrat sitū, seu elevationē vnius plani supra alterū, generaliter dici cōsuevit a plerisque, angulus inclinationis omnis ille, qui cōprehēditur duabus rectis lineis, quæ in utroq; plano ad aliquod vniū punctū cōis. illorū sectionis ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus GPH , siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

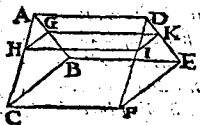
NON obscura est hæc definitio, præcedēti bene intellecta. Vnde planū ad planū magis inclinatiū esse dicet, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunq; partē, etiā infinite, producantur; hoc est, siue ad dexterā, siue ad sinistrā, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt. n. quedā plana, quæ nec ad dexterā, nec ad sinistrā producta conueniunt; nec tamē ob id parallela sunt dicenda; quia nimirū vel sursum, vel deorsum protracta, tandē coeunt. Nam si sumatur rectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conueniunt, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio; idcirco non dicuntur parallela.

SIT enim tectum quodpiam $A.B.C.D.E.F.$, contentum duobus planis $A.B.E.D.$, $A.C.F.D.$, cuius basis $B.C.F.E.$; aufera-



turq; fastigium $A.G.H.D.K.I.$ Quo facto, perspicuum est, reliqua plana $G.B.E.K.$, $H.C.F.I.$, non convenire inter se, si ad partes $G.R.$, $H.C.$, uel ad partes $K.E.$, $I.F.$, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes $G.H.$, $K.I.$, conveniant in fastigio $A.D.$ Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut autem lineae in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt esse protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quaecunq;, uel sunt parallela, uel ad aliquam partem producta coeunt; lineae uero rectae, uel sunt parallelae, uel ad alteram partem protractae conveniunt, si nimirum in eodem existunt plano, uel tandem nec sunt parallelae, nec unquam conveniunt, si uidelicet in diuersis sunt planis, & in transuersum possint. Unde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quae cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quae nunquam conveniunt.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTUISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos aequales, & proportionalitatem laterum circa aequales angulos, ut fecit in figuris planis similibus definendis: Sed tamen effudit, ut breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine aequalibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidarum æqualitatem, ut ex defin. 11. patet, cum illos constituent anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales;

aquales, & proportionalitas laterum circum angulos aequales, propter planorum similitudinem.

X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continetur.

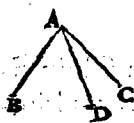
QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex precedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiatur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum inferitur angulorum solidorum æqualitas, ut in precedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemma se propos. 22. lib. 6. demonstrauius. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existant æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurius, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad unum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum

larum planum, efficietur ad punctum A , angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quavis linea, uel quinta, uel deniq; plures adiungeretur, licet anguli quãtitas uariaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulũ solidũ constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniã videlicet, si tres lineæ AB , AC , AD , in eadẽ confisterent superficie, nõ efficeretur angulus solidus ad punctum A , sed planus dũtaxat ex duobus planis BAD , DAC , compositus. Quod si AD , sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB , AC , iam non componetur angulus planus totius ex BAD , DAC ; immo circa punctum A , tres plani consistent anguli BAD , DAC , CAB , qui ut mox dicitur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, preceden-
si recte intellecta. Cũ enim saltem tres lineæ in eodẽ non existen-
tes plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspi-
cuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus
solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus
enim BAD , in plano est, in quo rectæ AB , AD ; & angulus
 DAC , in plano, in quo rectæ AD , AC ; angulus deniq; CAB ,
in plano, in quo rectæ AC , AB ; atque ita ex ipsis angulus so-
lidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, uel plures
anguli plani ad unum punctum consistant, in eodem tamen pla-
no, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus
planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie exi-
stentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad consti-
tuendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis.
Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, ut ter-
tia saltem superficies accedat, in qua certius angulus planus
confi-

consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo cœmunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuius erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus solidis eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, uel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitio angulus conus, qui unica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficierum, una quidem plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

VIDELICET figura solida a planis ABC , $ABCD$, $ABCDE$, ad puncta D , E , F , constituta appellatur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominatione sumit; ut uidelicet dicatur pyramis triangulara, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Totæ triangulis quolibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latorum

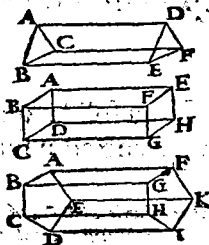


planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari solet planum huiusmodi. Vi pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD : Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE : Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF .

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia uero parallelogramma.

FIGURAE scilicet solida, quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF :



vel quadrangula $ABCD, EFGH$: vel pentagona $ABCDE, FGHIK$, &c. Parallelogramma vero $ACFD, ABED, CBEF$: vel $ABFE, ADHE, CDHG, CBEG$: vel $ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG$; dicuntur prismata. Itaq; prisma nil aliud erit, quam columna quædã latera æqualia & asseruatis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallele,

sive hæ sint triangula, sive quadrangula, sive pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quorū latera, sive anguli in vnoquoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figura indicant.

Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligant esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua uero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio

finis autem tradita infinita alia genera prismatis complectatur, ut constat; præsertim quod plurima demonstratione in hoc libro & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus communis; perspicuum est eos hallucinari, qui unum tantum prismatis genus ex hac desin. colligunt. Sumpserunt autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propof. ultimæ huius lib. & lit. 3. 4. & 5. propof. lib. 12. solum de eo prisma loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduertunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prisma, mentionem facit duorum triangularum oppositorum, eo quod tali prismatis solæ demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, ut ipsi voluit, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ inserit Theon. Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem esse illa basin habentis, & altitudinem equalem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quævis retilinea, equalia tamen & similia, ut vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communis omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ sint Euclidis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia, solida, quæ habent duo plana aduersa & equalia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Sic et lineæ recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa alterum

terum eius extremum, nempe circa diametram, circumductus figuram describit, quam Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes aequales existant illi linea circumducta: Ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes recta cadentes in peripheriam sunt aequales; eo quod omnes sint semidiametro dicti semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphaera definiri poterit etiam hoc modo.

S P H A E R A est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae inter se sunt aequales.

C I C E R O in lib. de universitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαῖρος ἔσθ' ὅστις ὁ ἄνθρωπος, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

A X I S autem sphaerae, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

C E N T R U M sphaerae est idem, quod & semicirculi.

XVII.

D I A M E T E R autem sphaerae, est re-

Est quædam linea per centrū ducta, & vtrin-
que a sphæræ superficie terminata.

Hæ tres definitiones non egent expositione; dummodo
hoc solum noceatur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem,
si nimirum circum eam sphæræ reuoluatur. Vnde quia in de-
scriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus
ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ
nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli
trianguli manente uno latere eorum, quæ
circa rectum angulum, circumductum trian-
gulum in se ipsum rursus reuoluitur, un-
de moueri cæperat, circumassumpta fi-
gura.

ATQVE si quiescens recta linea æqua-
lis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum
conuertitur, Orthogonius erit conus: Si
uero minor, Amblygonius: Si uero ma-
ior, Oxygonius.

Ut si triangulum rectangulum ABC , circa latus quie-
scens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur,
donec integram reuolutionē expleat, describetur solida quadā
figura, quæ cōtine-
tur duabus superfi-
ciebus, circulari
una, ac plana, quæ
 BC , latus alterum
circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaq;
conuena, quam latus AC , recto angulo oppositum delineat.
Hec igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem
pyramidem rotundam appellat.



Q. V. Q. D. si latus quiescens AB , aequale fuerit circumducto BC , ut in prima figura, dicitur conus descriptus orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope uerticem A , re-



ctus est. Cum enim latera AB, BC , ponantur aequalia; erit et angulus BAC , BCA , aequalis; qui cum aequiuelem uni

recto, eo quod ABC , sit rectus, erit BAC , semirectus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD , rectus erit. Si uero quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad uerticem A , obtusus existit. Cum enim BC , latus latere AB , sit maius; erit angulus BAC , maior angulo BCA . Quare cum hi duo aequipolent uni recto, propterea quod angulus ABC , ponatur rectus, erit BAC , semirecto maior. Similiter BAD , maior erit semirecto; atque adeo totus CAD , recto maior erit. Si denique quiescens latus AB , maius fuerit circumducto BC , ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxigonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem A , acutus est. Cum enim latus AB , maius sit latere BC , erit et angulus BCA , angulo BAC , maior. Quapropter cum hi duo uni recto aequiuelem, eo quod angulus ABC , rectus ponatur, erit BCA , semirecto maior, ideoque reliquus BAC , semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD , minor esse semirecto. Igitur totus CAD , recto erit minor.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum uertitur.

V. T. in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB .

XX.

BASIS uero conī est circulus, qui a circumducta lineā recta describitur.

NIMIRUM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est *BC*. in superioribus conis. Ita que huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QUONIAM uero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius uidelicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem conī descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribis Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partem producat; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo capit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticē,

& cir-

& circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ uertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ a uertice ad circuli centrum perducitur.

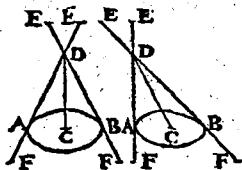
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB , cuius centrum C , & punctum aliquod sublime D ; iunctaque DB , in infinitum ex utraque parte producaturs ad puncta E, F . Si igitur recta linea DB , feratur eousque in circuli AB , circumferentia, quousque punctum B , rursus in eum locum restitatur, a quo cepit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus su-



perficiebus ad D , punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB , ipsam describens in infinitum producaturs. Verticem superficiei dicit punctum D . Axem, rectam DC . Conum vero ap-

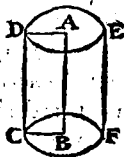
pellat figuram contentam circulo AB , & ea superficie, quam DB , sola describit. Coni verticem, punctum D . Axem DC . Basim AB , circulum. Quod si DC , ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

XXI.

CYLINDRVS est, quando rectan
guli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumassumpta figura.

VELVTI si rectangulum parallelogrammum $ABCD$, circa latus quiescens AB , circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficieribus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD , BC , describunt; et altera curua, eaque conuexa, quam latus CD , describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, ut Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

ITEM recta AB , in superiori figura, dicitur axis cylindri.

XXIII.

BASES uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QUI sunt circuli a lateribus AD , BC , oppositis descripti.

EUCLIDES uero solum cylindrum rectū hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus est ad utramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris sumus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, uisum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum uniuersæ, ut complectitur tam rectum, quam inclinatū. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumsferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eū locum restituitur, a quo moueri cepit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

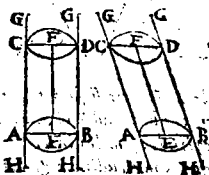
AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, quia axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

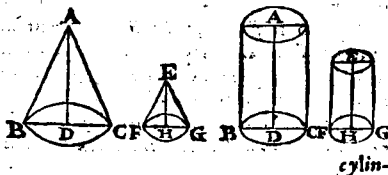
SINT duo circuli aequales, & aequidistantes AB, CD , quorum centra E, F , & diametri aequidistantes quoque AB, CD : Iunctaque recta AC , in infinitum ex utraque parte producat ad puncta G, H . Si igitur diametri AB, CD , circa centra E, F , in planis circularium semper aequidistantes, una cum recta AC , circumscribantur, donec ad eum locum restituantur, unde moveri ceperunt; describatur a linea AC , superficies quadam rotunda, quam **Severus** cylindricam vocat; quae & augetur in infinitum, cum recta AC , ipsam describens in infinitum produciatur. Cylindrum vero appellat figuram $ABDC$, circulis AB, CD , & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC , describit, comprehensam. Bases cylindri dicuntur esse circulos AB, CD . Axem, rectam EF , quae circumlozorum centra coniungit. Latit cylindri, rectam AC . Quod si axis EF , perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, **Scalenum**.



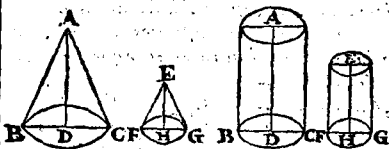
XXIII.

SIMILES conici & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos &



cylindros secundū duas dimensiones esse similes, longitudinē scilicet ac latitudinē; Axes uero eosdē secundū profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo conī



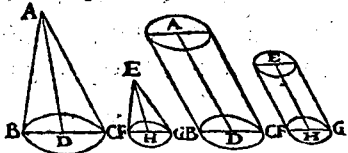
ABC , EFG ; Itē duo cylindri; in conis distem axes AD , EH , & basium diametri BC , FG ; simili-
ter & in cylin-

dri: Itaque si fuerit, ut axis AD , ad axem EH , ita BC , diameter basis ad FG , diametrum basis, dicentur tam conī, quam cylindri similes inter se; quia uidelicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt; quā secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quia triangula ADB , EHF , ex quorum revolutione descripti sunt conī, nec non rectangula AB , EF , quorum conversiones cylindros effecerunt; hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut AD , ad EH , ita BC , ad FG ; Sit autem ut BC , ad FG , ita dimidia BD , ad dimidiam FH ; erit quoque ut AD , ad EH , ita DB , ad HF ; & permutando ut AD , ad DB , ita EH , ad HF . Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unū angulum uniangulo habentia equalem, & circum aequales angulos latera proportionalia; equiangula sint, ideoque latera omnia circa angulos aequales habeant proportionalia, atque adeo inter se similia existant: Rectangula uero, eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD , DB , sint aequalia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.

¶ Quid si conī, vel cylindri fuerint inclinati, (de re-
ctis enim duntaxat Euclides uerba fecit) dicentur & tum de-
mum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt
proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt,
aequales: qui quidem anguli accipiendi sunt, ut in definitio-
ne quinta dictum est. Sint enim conī inclinati, similiter &
cylindri

cylindri ABC , EFG : In conis autem axes sint AD , EH , & basium diametri BC , FG ; similiter & in cylindris. Itaque si fueris tam in conis, quam in cylindris, ut AD , ad

EH , ita BC , ad FG , extiterintque anguli inclinationis ADB , EHF , tam in conis, quam in cylindris, aequales inter se; dicē



tur & conī iter se, & cylindri quoq; inter se se similes; quoniā nimirū hac ratione & tres eorū dimensiones sunt proportionales, ut supra diximus, & rursus tam triangula ADB , EHF , quam rectangula AB , EF , quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB , EHF , ponantur aequales, licet non sint recti.

XXV.

$CVBVS$ est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

$TETRAEDRVM$ est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

$OCTAEDRVM$ est figura solida sub octo triāgulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

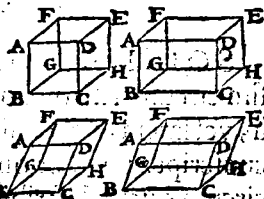
HÆC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in *Tymæo* quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram, quinque dictis corporibus assimilet, ut in sphaera Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propof. 15. Tetraedri vero propof. 13. Octaedri deinde propof. 14. Dodecaedri autem propof. 17. Icosaedri denique propof. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, eam ita depingere, ut ueram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque uero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM uero in hoc lib. 11. frequens fit mentio Parallelepipedi, & in lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse diximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

VELVTI solida comprehensa sex quadrilateris figuris $ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG$, quarum oppositæ AC, FH ; Item DF, CG ; Item AG, DH , sunt parallelæ, nominantur parallelepipedum, quasi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallelæ oppositæ, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. huius lib.



SUNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicitur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamvis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamvis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamvis duo sint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia, parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Ceterum quodcumq; parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, ut ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi; quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

Non est necesse, ut anguli interioris figura constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior. Sed satis est, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquos angulos, vel aliquos latera, vel denique aliquot plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquantur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

Verum dua hæc postrema definitiones planius percipiuntur ex lib. 13. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiose agitur.

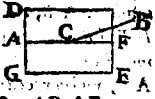
THEOR. I. PROPOS. I.

RECTAE lineæ pars quædam non est

in su-

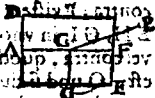
in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB , pars quidem AC , in subiecto plano DE , pars vero CB , in sublimi, ita ut omnia puncta partis AC , in plano DE , iaceant, puncta uero omnia partis CB , supra planum DE , existant, uel infra. Erit igitur in plano DE , ipsi AC , rectæ lineæ continuæ quædam rectæ linea in directum posita, nempe GF . Quamobrem duæ rectæ AB , AF , commune habent segmentum AC , quod est absurdum, ut in pronunciato 13. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam uero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIUM

HABET est communis demonstratio interpretum. Sed forte dicit aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe ostendatur, rectæ AC , esse aliquam rectam in plano DE , in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB , partem quidem AC , esse in plano DE , partem uero CB , in sublimi, utique negabit, rectæ AC , in plano DE , dari posse aliam rectam in directum, & continuum, quandoquidem rectam CB , in rectum & continuum positam esse facietur ipsi AC . Veruntamen ei, qui sciendū est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem ulterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suâ inseruat lineam, hoc est, quæ recte, & æqualiter semper extenditur, ut & linea recta. Quamobrem si ipsa AC , in plano DE , producatur usque ad F , erit AF , rectæ rectæ AC , in continuo & directum posita. Verum demonstramus, aut id ipsam Geometriæ in plano, uidelicet DE , ipsa AC dari posse aliam rectam, partem ipsam rectam directam constituas, quamuis quis dicat, AB , esse quoque rectam, cuiusque partem AC , in plano DE , partem uero CB , in sublimi esse positam. Ducatur in plano DE , ipsi AC , perpendicularis CG ,



Et in eodem plano ipsi. CG , perpendicularis. CF . Dico CF , esse ipsi AC , positam in continuum & rectum. Cum enim AC , & FC , in eodem plano DE , cum recta C & G duas rectos angulos constituent ACG , FCG , ex constructione; erunt AC , & FC , in directum & continuum posite. Quamobrem etiam si quis contendat, AB , esse rectam, cuius quidem pars AC , in plano DE , subiecto, pars autem CB , in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE , erit alia recta, nempe CF , quæ cum AC , unam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB , AF , segmentum commune habebunt AC . Quod est absurdum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

Rectæ lineæ AB , CD , se mutuo secant in E ; & in EB , ED , sumptis punctis F , & G , vicinque, ducatur rectæ FG , ut fiat triangulum EFG . Dico triangulum EFG , in vno esse plano; item rectas AB , CD , in vnoquoque plano existeri. Si enim trianguli EFG , pars quædam, nimirum EHI , in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHL , in sublimi, vel



contra; Existent quoque rectarum EF , GF , partes quidem EH , GI , in vno plano, partes vero HF , IL , in sublimi, vel contra, quod fieri non posset, iam supra demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EHI , in vno plano credatur esse, pars autem GHL , in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG , FG , partes quidem EK , KL , in vno plano, partes vero KI , LG , in sublimi, vel contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHL , in vno concedatur esse plano, pars vero EHL , in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE , GE , partes quidem FH , GL , in vno plano, partes autem HE , KE ,

R. E. in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, vt. i. undec.
est demonstratum. Quare triangulum E F G, in uno pla-
no existit; eademq; est ratio in omni alio triangulo.

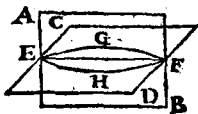
Q V I A vero, in quo plano est triangulum E F G, in
eodem existunt eius latera E F, E G: In quo autem sunt re-
ctæ E F, E G, in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne par-
tes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur
esse; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in
quo nimirum triangulum E F G, consistere demonstraui-
mus. Quo circa si duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in vno
sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.
Quod erat demonstrandum:

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana se mutuo secant, commu-
nis eorum sectio est linea recta.

S E C E N T se mutuo plana A B, C D, sitq; communis
eorum sectio E F. Dico E F, esse lineam rectam. Si enim
non credatur esse recta, ducatur in
plano A B, recta E G F, & in plano
C D, recta E H F. Rectæ igitur
E G F, E H F, cum eisdem habeant
terminos E, & F, superficiem inclu-
dent. Quod fieri non potest, vt in
12. pronuntiato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio
E F, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo se-
cant, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat
ostendendum.



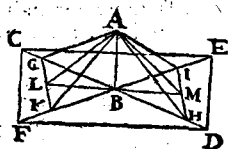
A L I T E R. Secent se rursus plana A B, C D, sintque
termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ conne-
ctantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano exi-
sit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio.
Si vero E F, recta, in neutro eorum dicatur esse, tunc si in al-
terutro eorum, recta ducatur E G F, concludent rursus duæ
rectæ E F, E G F, superficiem, cum eisdem habeant termi-
nos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano
esse

esse credatur, tunc si in altero ducatur recta $E G F$; includent iterum duæ rectæ $E F$, $E G F$, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta $E F$, in utroque plano $A B$, $C D$; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea $A B$, insistat duabus rectis $C D$, $E F$, ad rectos angulos in communi earum sectione B . Dico rectam $A B$, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secant in B ; erunt ipsæ in uno plano, quod sit $C E D F$. Sumantur inter se æquales rectæ



$B G$, $B H$; Item rectæ $B I$, $B K$; ducanturq; rectæ $G K$, $I H$; & in eodem plano per B , ducatur recta $L M$, secus rectas $G K$, $I H$, in punctis L , & M . Demittantur quoque ex A , puncto in sublimi ad idem planum rectæ $A G$, $A L$, $A K$, $A H$, $A I$.

Quoniam igitur latera $B G$, $B K$, trianguli $B G K$, lateribus $B H$, $B I$, trianguli $B H I$, ex constructione sunt æqualia; & anguli quoque ipsis contenti $G B K$, $H B I$, cum sint ad uerticem B , oppositi, æquales: Erunt bases $G K$, $H I$, inter se, & anguli $B K G$, $B I H$, inter se quoque æquales.

Rursus cum anguli $K B L$, $I B M$, ad uerticem B , oppositi sint æquales; erunt duo anguli $K B L$, $B K L$, trianguli $B K L$, duobus angulis $I B M$, $B I M$, trianguli $B I M$, æquales; Sunt autem & latera $B K$, $B I$, quibus adiacent; æqualia; ex constructione. Igitur & reliqua latera $K L$, $L B$, reliquis lateribus $I M$, $M B$, æqualia erunt.

Præterea cum latera $A B$, $B G$, trianguli $A B G$, æqualia

æqualia sint lateribus AB, BH , trianguli ABH , ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH , æquales, nempe recti, ex hypothesi; erunt & bases AG, AH , æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK .

4. primi.

$AMPLIVS$ quia latera AI, IH , trianguli AIH , lateribus AK, KG , trianguli AKG , æqualia sunt; & basis AH , basi AG , ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli AIH, AKG , dictis lateribus comprehensi, æquales.

8. primi.

$ITAQUE$ cum latera AK, KL , trianguli AKL , æqualia sint lateribus AI, IM , trianguli AIM ; & anguli ipsis contenti AKL, AIM , æquales etiam, ut hactenus demonstrauimus; erunt quoque bases AL, AM , æquales.

4. primi.

$QUONIAM$ denique latera AB, BL , trianguli ABL , æqualia sunt lateribus AB, BM , trianguli ABM ; & basis AL , basi AM , ex demonstratis; erunt quoque anguli ABL, ABM , dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta AB , rectos angulos efficit cum recta LM , quæ in plano subiecto ipsam tangit in B : Eademq; ratione ostendetur, rectam AB , cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B , angulos rectos constituere: Ac prout recta AB , plano $CEDF$, quod per rectas CD, EF , ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistant: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat.

8. primi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

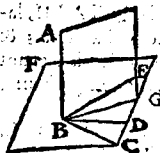
5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistant: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

R 4

INST.

IN ISTA recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communearum sectione, seu ractu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in vno sint



plano, propterea quod productæ ad partes E, se mutuo secant in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secant in B; Sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E sibi mu-

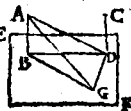
tuo occurrunt in B; necessario productæ se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D, erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus, non erit B E, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodẽ plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli A B D, æqua-

lia sunt lateribus GD, DB , trianguli GDB , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB , æquales; nempe recti; Erunt bases æquales AD, GB . Rursum quia latera AB, BG , trianguli ABG , æqualia sunt lateribus GD, DA , trianguli GDA ; Est autem & basis communis AG ; Erunt anguli ABG, GDA , æquales: Est autem ABG , rectus, ex def. 3. huius lib. Igitur & GDA , rectus erit. Quoniam uero, ex eadem def. angulus quoque GDC , rectus est, erit recta GD , tribus rectis DB, DA, DC , ad angulos rectos. Quare rectæ DB, DA, DC , in uno erunt plano: Est autem AB , in eodem plano, in quo DB, DA . Recta igitur CD , in eodem erit cum AB , plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB , sint recti, erunt rectæ AB, CD , parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



4. primi.

8. primi.

9. undec.

2. undec.

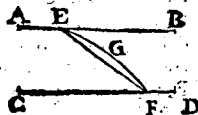
28. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa lineæ, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD , sumantur utrunque duo puncta E, F , quæ recta connectantur EF . Dico rectam EF , in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD . Si enim recta EF , non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: selectam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, F , sitq; communis sectio horum planorum EGF , quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF , cum habeant eosdem terminos E, F , superficiem claudunt. Quod est absurdum. Non ergo extra planum



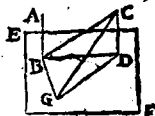
3. undec.

planum parallelarum AB, CD , erit recta EF . Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in codẽ est cum parallelis plano. Quod erat demonstradũ.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD ; sitque CD , plano EF , ad angulos rectos. Dico & AB , eidem plano EF , esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD , in plano EF ; erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB , rectus: Sunt autem duo CDB, ABD , duobus rectis æquales. Igitur & ABD , rectus erit. Iam in plano EF , ducatur BG , perpendicularis ad BD ; ponanturque æquales BG, CD . Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB .



Quoniam igitur latera CD, DB , trianguli CDB , æqualia sunt lateribus GB, BD , trianguli GBD , ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD , æquales, nimirum recti; Erunt bases CB, GD , æquales. Rursus quia latera CD, DG , trianguli CDG , æqualia sunt lateribus GB, BC , trianguli GBC ; & basis est communis CG ; Erunt anguli CDG, GBC , dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG , rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC , rectus erit. Quare recta GB , duabus rectis BD, BC , se mutuo tangentibus in B , ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC , ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB ; propterea quod rectæ BD, BC , in eodem sint plano, in quo parallelæ AB, CD ; cum puncta B, C, D , existant in parallelis AB, CD . Igitur & GB , recta rectæ BA , ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum

recum $A B$; recta sit ad rectas $B G$, $B D$ erit, quoque, $A B$,
recta ad planum per $B G$, $B D$, ductum, hoc est, ad planum
 $E F$. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum alte-
ra ad rectos quidam plani sit angulos: Et reliqua eidem pla-
no ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

4. undec.

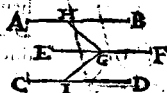
OI

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

Q. V. A. E. eidem rectæ lineæ sunt paralle-
læ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ
quoque sunt inter se parallelæ.

S. I. N. T. rectæ lineæ $A B$, $C D$, ipsi $E F$, parallelæ; non
sint autem in eodem cum $E F$, plano. Dico $A B$, $C D$, pa-
rallelas quoque esse. Nam a quolibet
puncto G , rectæ $E F$, ad ipsam $E F$,
ducantur duæ perpendiculares; $G H$,
quidem in plano parallelarum $A B$,
E. F. fiat $G I$, in plano parallelarum $C D$,
 $E F$. Quoniam igitur $E G$, recta est ad duas rectas $G H$,
 $G I$, se tangentibus mutuo in G ; erit recta quoque ad pla-
num per ipsas $G H$, $G I$, ductum. Quamobrem cum sint
parallelæ $A B$, $E F$; & $E F$, sit recta ad planum per $G H$, $G I$,
ductum; erit quoque $A B$, ad idem planum recta. Similiter
cum sint parallelæ $C D$, $E F$; Sit autem $E F$, recta ad pla-
num per $G H$, $G I$, ductum; erit etiam $C D$, recta ad idem
planum; Atque proinde rectæ $A B$, $C D$, cum rectæ sint ad
idem planum per $G H$, $G I$, ductum, parallelæ erunt. Quæ
igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem
cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod
erat demonstrandum.



4. undec.

8. undec.

8. undec.

6. undec.

SCHOLIION.

D. A. T. A. opera Euclides voluit, duas rectas $A B$, $C D$,
non esse in eod. plano cū recta $E F$, cui sunt parallelæ. Nā si fo-
rēt in eod. plano cū ipsa $E F$ essent $A B$, $C D$, inter se parallelæ.

ex 36. *propositi lib. Supernacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.*

THEOR. 16. PROPOS. 10.

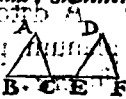
SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duâs rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB , AC , se tangentes in A , parallelæ rectis DE , DF , se tangentibus in D ; non sint autem AB , AC , in eodem plano; in quo DE , DF . Dico angulos BAC , EDF , ab ipsis comprehensos esse æquales: Ponantur enim AB , DE , inter se æquales, & AC , DF , intersæ ducanturq; rectæ BC , EF , BE , AD , CF . Quoniam igitur AB , DE , parallelæ sunt & æquales; erunt quoque BE , AD , parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF , AD . Quare et BE , CF , parallelæ & æquales sint eidem AD ; erunt etiā BE , CF , inter se parallelæ, & æquales: Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC , EF . Quia ergo latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sunt laterib; DE , DF , trianguli DEF , ex constructione; & basis BC , basi EF , æqualis, ut modo demonstrauimus; Erunt & anguli BAC , EDF , dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

CONCLUSIO huius theorematis vera etiam est, quā do priores duæ lineæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB , AC , DE , DF , in eodem plano; itaq; AB , ipsi DE , & AC , ipsi DF , parallelæ. Dico angulos BAC , EDF , esse æquales. Nam ponantur æquales AB , DE , & AC , DF ; ducanturq; rectæ BC , EF , quæ aut

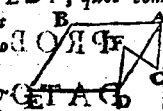
in una recta linea erunt constitutae, aut non. Si in prima in una recta B F. Quoniam igitur parallelae sunt A B, D E; aequales erunt anguli A B C, D E F; internus & externus. Similiter aequales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallelae. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, aequales sunt duobus angulis D E F, D F E, trianguli D E F. Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, aequales erunt. Quod est propositum.



Non sunt item B C, E F, in una recta linea constitutae. Ductis rectis A D, B E, C F, cum A B, D E, sint parallelae & aequales; erunt & A D, B E, parallelae & aequales. Eadem ratione A D, C F, parallelae erunt & aequales, eo quod A C, D F, parallelae ponantur & aequales. Quare & B E, C F, inde A D, parallelae existentes & aequales, inter se parallelae erunt & aequales. Ac proinde inde parallelae & aequales quoque erunt B C, E F. Itaque cum duo latera A B, A C, trianguli A B C, B, D E, trianguli D E F, aequales sint lateribus D E, D F, trianguli D E F, & haec B C, B E, E F, erunt anguli B A C, E D F, contenti duobus lateribus, aequales. Quod est propositum.

C A E T E R V M in conclusio huius theorematibus rectis ex data hypothese colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sic quoniam sunt in eodem plano, & sic non,) ut rectae A D, B E, C F, nulla ratione se mutuo secant; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam aliter contrarium rationem erit.

S I N T enim rectae A B, A C, rectae D E, D F, parallelae in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non sunt aequales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem idem evenit, quod A D, C F, se mutuo secant.



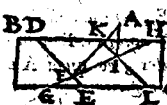
Vnde quoniam A C, D F, sint parallelae & aequales; ponantur tamen propterea A D, C F, quae eas coniungunt, parallelae sunt & aequales; propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, ut nullo prop. 16. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematibus locum non habet, deficiente hac conditione, & quae tamen, in superioribus figuris servatur.

11.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

S i r. a puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta ut-
cunque D E, ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:



Quæ si fuerit perpendicularis ad pla-
num B C, factum erit, quod pro-
ponitur: Si uero non fuerit A F, ad
planum B C, perpendicularis, ducatur
in plano B C, per F, ad D E, per

perpendicularis G H, ad quam ex A, perpendicularis demitta-
tur A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subie-
ctum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, paral-
lela K L, cum D F, ad rectos angulos sit duabus F A, F H,
ex constructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem est cum rec-
tis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per de-
finitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo
A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad
planum per K I, I F, ductum, hoc est, ad planum B C, re-
cta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum pla-
num perpendicularem rectam lineam duximus. Quod fa-
ciendum erat.

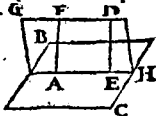
12.

PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo
datum est, ad rectos angulos rectam lineam
excitare.

S i r. a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendi-
cularis ad datum planum B C: Ex quouis puncto D, in su-
blimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ
si ceci-

si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cū enim DE, AF, parallele sint; & DE, recta ad planū BC, ex constructione; erit quoque AF, ad idem planū BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat



31. primi.

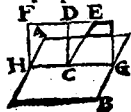
8. undec.

THEOR. II. PROPOS. 13.

13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, quæ in uno eodēque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.



2. undec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planū AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planū AB; erunt ipsæ inter se parallele, cū tamē conueniant in puncto C. Quod est absurdū.

6. undec.

SCHOLION.

EODEM modo, a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC,

BC,

2. undec. B C, si fieri potest, dua perpendicularares A D, A E. Ducatur per A D, A E, quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti, interni in triangulo A D E. Quod est absurdum;



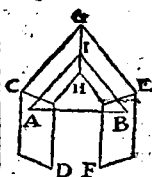
17. primi cum sint duobus rectis minores quilibet. duo anguli in triangulo quouis assumpti.

6. undec. A L I T E R. Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C; ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

14. THEOR. 12. PROPOS. 14.

A D quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

3. undec. S I T recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto utcunq; I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I.



17. primi. Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadẽ recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

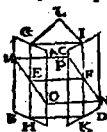
S C H O L I O N.

FACILE etiã demonstrari poterit cõuersum huius, videlicet.

S I fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

S I N T

SINT duo plana parallela AB, CD , ad quorum alterum AB , recta sit linea recta EF . Dico EF , rectam quoque esse ad planum reliquum CD . Secet enim planum aliquod, nempe GK , plana AB, CD , per lineam rectam EF , incedens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK : eruntque anguli GEF, HEF , recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE . (Si enim aliter eorum, nempe IFE , dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE , duobus rectis minores. Quare rectae EG, FI , ad partes G, I , convenient, nimirum in puncto L ; atque adeo & plana AB, CD , in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum L ; cum tota recta HGL , sit in uno plano, nempe in AB , producta; Item tota recta KIL , in uno quoque plano, nimirum in CD , protracta. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE .) Eodem modo si aliud planum videlicet MN , eadem plana secet per EF , faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis, MO, PN ; erunt anguli PFE, NFE , recti. Itaque cum EF , sit recta ad duas rectas IK, PN , recta quoque erit EF , ad planum CD , per ipsas ductum. Quod est propositum.



1. undec.

4. undec.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

15.

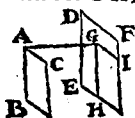
SI duae rectae lineae se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelae, non in eodem consistentes plano: Parallelae sunt, quae per illas ducuntur, plana.

SINT duae rectae lineae AB, AC , se tangentes in A , duabus rectis lineis DE, DF , se tangentibus in D , existentibusque in alio cum illis plano parallelae. Dico & plana BC, EF , per ipsas ducta, esse parallela. Ex A , enim deducatur ad planum EF , perpendicularis AG , occurrens plano EF , in puncto G . Deinde in plano EF , per G , ducantur GH, GI , ipsi

1. undec.

3. 1. primi.

lec. *ni.* ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH,
 parallelæ sunt ipsi DE; erunt & AB, GH, inter se parallelæ;
 Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est
 autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit
 & angulus BAG. Simili argumento
lec. concludes, angulum CAG, rectum esse.
 Itaque cum recta GA, sit recta duabus
 AB, AC; recta quoque erit GA, ad planū
 BC, per ipsas ductum. Est autem & recta
 ad planum EF, ex constructione. Igitur
ndec. parallelæ sunt planæ BC, DE. Si ergo duæ rectæ lineæ se
 mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

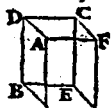


S C H O L I O N.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens.
 Videlicet.

D A T O plano, per datum punctum, quod
 in eo non est, parallelum planum ducere.

primi D A T U M, planum sit AB, punctumque extra ipsum sit
 C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In
 plano AB, ducantur vtrunque duæ rectæ DB, DA, se tangen-
 tes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in pla-
 no BC, per rectas DB, DC, ducto, agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas
 DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, pa-
 rallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF,
 ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum
 enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis
 CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis
 plano parallela sint; parallela erunt plana AB, EF, per ipsas
 ducta. Quod est propositum.

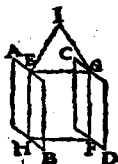


16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam
 secentur

secuntur : communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECUNTUR plana AB, CD , plano EF , per rectas EH, GF . Dico communes sectiones eorum EH, GF , esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient. Cõueniant igitur in puncto I . Quia ergo tota recta HEI , in uno est plano, nimirum in AB , producto; Item tota recta FGI , in uno quoque est plano, uidelicet in CD , producto; conuenient etiã plana AB, CD , producta ad I . Quod est absurdum, cū ponantur parallelæ. Sunt igitur rectæ EH, GF , parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secuntur, &c. Quod erat demonstrandũ.



1. undec.

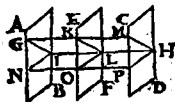
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum cõmunes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallelæ sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallelæ, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1. nimirum.

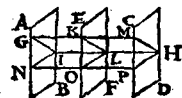
Quæ eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT duo plana AB, CD , plano EF , parallelæ. Dico & AB, CD , parallelæ esse. Secetur enim tria plana plano GH , sintq; cõmunes eorũ sectiones rectæ GI, KL, MH . Secetur rursus alio plano NH , sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH , hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH ,



S 2 fe

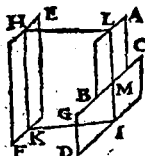
se quoque mutuo secant, quarum sectio communis sit linea recta HI . Quia igitur parallela plana AB , EF , secantur plano GH , erunt communes sectiones GI , KL , parallelae. Eodem modo parallela erunt MH , KL ; atque adeo parallela erunt inter se GI , MH . Nō aliter ostendemus, parallelas esse NI , PH . Itaque cum IG , IN , se mutuo tangentes in I , parallela sint rectis HM , HP , se tangentibus in H , existentibusque in alio plano; erunt plana AB , CD , per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.



ALITER. Sumatur in tertio plano EF , punctū quodlibet G , a quo in utramque partem educatur ad planum EF , linea recta perpendicularis, occurrens plano AB , in puncto H , & plano CD , in puncto I . Quoniam igitur linea HG , recta est ad planum EF , recta quoque erit ad planum AB , si bi parallelum, per ea, quae in scholio propositi huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI , recta erit ad planum CD . Quamobrem cum recta HI , sit recta ad plana AB , CD ; parallela inter se erunt plana AB , CD . Quod est propositum.



QUOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duae rectae, quae alteri recta sunt parallelae, si conueniant, unam rectam constituunt lineam, veluti ad propositi 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB , CD , plano EF , parallela, conueniantque producta secundum rectam CG . Dico plana AB , CD , unum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI , omnia tria plana per lineas rectas HK , LM , MI . Quoniam igitur parallela sunt plana AB , EF ; erunt & communes sectiones LM , HK , parallelae. Eadem ratione parallela erunt IM , HK . Quamobrem cum recta LM , IM , parallela sint ipsi HK , existantque in eodem plano secante HI , & conueniant in M ; ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quae ad 30. propositi 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana AB , CD , unum



16. undec. 30. primi 15. undec. 14. undec. 16. undec.

unum planum efficiunt; propterea quod recta LI , in uno iaceat plano. Quod est propositum.

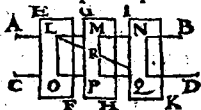
ITAQUE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conveniant, unum planum efficiunt.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAS lineæ AB , CD , (siue eæ parallelæ sint, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transversum positæ, in diuersis existentes planis) secantur planis parallelis EF , GH , IK , in punctis L , M , N , O , P , Q . Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM , ad MN , ita esse OP , ad PQ .



Ducantur enim rectæ LO , NQ , in planis EF , IK , & coniungatur recta LQ , occurrens plano GH , in R , puncto, a quo ad puncta M , P , rectæ ducantur RM , RP , in eodem plano GH . Eritque triangulum LNQ , in uno plano: similiter triangulum LOQ , in uno plano. Quoniam uero plana parallela GH , IK , secantur plano trianguli LNQ , erunt communes sectiones eorum MR , NQ , parallelæ. Par ratione parallelæ erunt RP , LO . Quam ob rem erit ut LR , ad RQ , ita LM , ad MN ; Item ut LR , ad RQ , ita OP , ad PQ ; Ac proinde ut LM , ad MN , ita OP , ad PQ . Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

2. undec.

16. undec.

2. sexti.

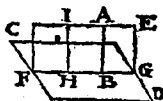
THEOR. 16. PROPOS. 18.

18.

SI recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta, ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcumque in recta FG, ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur anguli ABH, IHB, duobus rectis sunt æqua-

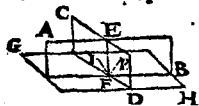


les: Est autem ABH, rectus, per 3. defin. huius lib. erit & angulus IHB, rectus. Rursus quia AB, ponitur recta ad planum CD; erit quoque IH, ad idem planum CD, recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, ad planum CD, rectæ: Quæ cum ducantur in plano EF, ad communem sectionem FG, perpendiculares; rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostenduntur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuspiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BE, DE, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BE, DE, recta quoque erit ad planum GH.



G H, quod per ipsas ducitur. Si uero E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantum; Sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum C D, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano C D, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Si denique E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, ad D F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare E F, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

11. primi

13. undec.

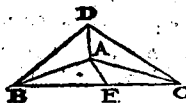
THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATUR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB.

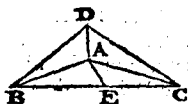
Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si ue-



ro duo tantum sint æquales, & tertius utrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum

S 4 cum

cum maximo illo BAC , reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC , maiores quoque esse angulos duos BAD , DAC . In plano enim per AB, AC , ducto

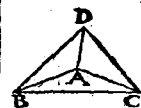


fiat angulus BAE , angulo BAD , æqualis; & recta AE , æqualis rectæ AD . Deinde in eodem plano per E , extendatur recta BC , secans rectas AB, AC , in B , & C , coniunganturque rectæ BD, DC . Quoniam igitur latera AD, AB , trianguli BAD , æqualia sunt lateribus AE, AB , trianguli BAE ; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; erunt bases BD, BE , æquales. Quia uero latera DB, DC , maiora sunt latere BC ; si demantur æquales rectæ BD, BE , relinqueretur recta CE , maior quam CE . Cum igitur latera AD, AC , trianguli DAC , æqualia sint lateribus AE, AC , trianguli EAC ; & basis CD , maior basi CE ; erit angulus CAD , angulo CAE , maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE , erunt duo anguli CAD, BAD , maiores duobus angulis CAE, BAE , hoc est, toto angulo BAC , qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendū.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus solidus A , contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB . Dico hos tres angulos minores



esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB , erunt constituti tres anguli solidi B, C, D , quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B , sub CBA, ABD, DBC . At C , sub BCA, ACD, DCB ; D , uero sub CDA, ADB, BDC .

B D C. Quoniam uero duo anguli C B A, A B D, maiores sunt angulo C B D; similiterque duo anguli B C A, A C D, maiores angulo B C D; & duo anguli C D A, A D B, maiores angulo C D B: erunt sex anguli C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, tribus angulis C B D, B C D, C D B, maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis, propter triangula tria B A C, C A D, D A B, (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus &c. Quod erat demonstrandum.

20. undec.

32. primi.

32. primi.

SCHOLIUM.

Q U O N I A M hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituent: circa nos eā ad oēs angulos solidos extendemus hoc modo.

S I T angulus solidus quicumque contentus quocunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtrahantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumue, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambiens. Vnde omnes anguli horum triangulorum (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propof. i. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituentur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, & horum

dine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus soli-

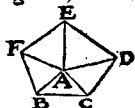


32. primi

horum

horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cumergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

VERVM ut res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A , contentus quinque angulis planis BAC , CAD , DAE , EAF , FAB , quibus subtrahantur ordine rectæ BC , CD , DE , EF , FB , ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambobus quinque triangula, tot videlicet,



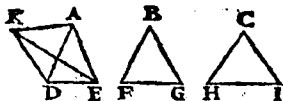
quot anguli plani componunt angulum solidum A . Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC , CAD , DAE , EAF , FAB , aequales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis $BCDEF$, aequales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B , tribus planis angulis ABC , ABF , CBF , contineatur; erunt duo CBA , ABF , qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF , qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A , constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aequales sunt decem rectis, ut dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas

rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur.

S I N T tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales cōnectunt, triangulū posse constitui; hoc est, trium rectarū D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ D E, F G, maiores sint, quam H I, ita ostēdetur. Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidā angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compositus; quod quidē cōtinget, quādo duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur autē A K, ipsi A D, æqualis, cōnectanturq; rectæ K D, K E. Quoniā igitur latera A K, A D, triāguli A K D, æqualia sunt lateribus B F, B G, triāguli B F G, & anguli ipsi cōtinenti D A K, & B, æquales; erūt & bases K D, F G, æquales. Rursus quia latera A K, A E, triāguli A K E, æqualia sunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & basis E K, maior base H I: Sunt autē rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multo maiores erūt E D, D K, quā H I. Cū ergo D K, ostēsa sit æqualis rectæ F G; erūt quoq; D E, F G, maiores quā H I. quod est, ppositū.



22. primi.

23. primi.

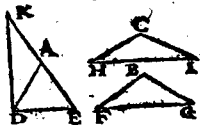
4. primi.

24. primi.

20. primi.

CADAT secundo A K, in rectum & cōmūnum ipsi A E, quod quidē accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturq; A K, ipsi A D, æqualis rursū, & cōnectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipsi F G, æqualis.

Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores sunt recta K E; & K E, æqualis est rectis C H, C I, ex hypothesi, & cōstructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores sunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D K, quam H I. Cum ergo D K, ostēsa sit æqualis ipsi



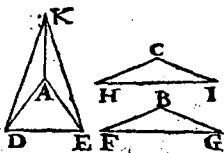
4. primi.

20. primi.

20. primi.

ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI .
Quod est propositum.

CADAT postremo AK , ad partes AE , ita ut necan-
gulus totus componatur ex angulis EAD , DAK , nec



recta sit EAK ; quod demum
eueniet, quando duo anguli
 DAE , & B , duobus rectis sunt
maiores. Ponaturque rursum
 AK , ipsi AD , æqualis, & ducā-
tur rectæ KD , KE . Epitigi-
tur, ut prius KD , ipsi FG , æ-

qualis. Quoniam uero duæ DE , DK , maiores sunt dua-
bus AE , AK ; & AE , AK , æquales duabus CH , CI , ex
hypothese, & constructione; erunt quoque DE , DK , ma-
iores quam CH , CI : Hæ autem maiores sunt, quam HI .
Igitur multo erunt maiores DE , DK , quam HI . Cum
ergo DK , ostensa sit æqualis ipsi FG ; erunt quoque DE ,
 FG , maiores quam HI . quod est propositum. Eodem
modo concludemus DE , HI , maiores esse, quam FG ,
si angulus DAK , angulo C , fiat æqualis; Item FG , HI ,
maiores, quam DE , si angulo C , ad FG , constituatur an-
gulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis DE , FG , HI ,
triangulum cõstitui potest. Si igitur fuerint tres anguli pla-
ni, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Si tres anguli A , B , C , sunt æquales; erũt
quoque bases DE , FG , HI , æquales; Ac proinde quæli-
bet duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli sunt



æquales, & tertius minor;
erunt quoque duæ illorum ba-
ses æquales, & basis tertij utra-
que minor: Quare rursus
quælibet duæ maiores erunt

reliqua. Quod si unus eorum, nempe A , sit maximus,
siue reliqui B , & C , sint inter se æquales, siue inæquales;
erit quoque basis DE , omnium maxima. Quare DE ,
 FG , maiores erunt quam HI : Item DE , HI , maiores,
quam FG . Dico iam & rectas FG , HI , maiores esse recta
 DE . Fiat enim angulus DAK , æqualis angulo B , ponat-
urque AK , ipsi AD , æqualis. Cadet ergo punctum K ,
infra

infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transeat
circumferentia circuli ex A, ad intervallum A D, descripta,
ob æqualitatem rectarum A D, A K, A E. Connectantur
deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, &
C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis est an-
gulo D A K, per constructionem; erit angulus C, maior re-
liquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, trianguli
A D K, æqualia sunt lateribus B F, B G; trianguli B F G;
& anguli ipsis contenti D A K, & B, æquales; erit basis
D K, basi F G, æqualis. Rursus quia latera C H, C I,
trianguli C H I, æqualia sunt lateribus A K, A E, trianguli
A K E; & angulus C, ostensus maior angulo K A E; erit
& basis H I, maior base K E. Quare cum D K, ostensa sit
æqualis ipsi F G; erunt F G, H I, maiores quam D K, K E:
Sed D K, K E, maiores sunt, quam D E. Igitur multo
maiores erunt F G, H I, quam D E. Quod est propositū.

4. primi.

24. primi.

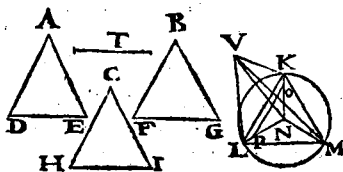
20. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis, quorum duo
quomodocunque assumpti reliquo sunt
maiores; solidum angulum constituere.
Oportet autem illos tres angulos quatuor
rectis minores esse.

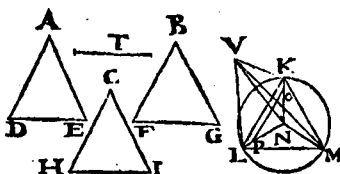
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores,
hac cōditione, ut quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet
iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere,
qui nimirum con-
tineatur tribus an-
gulis planis, qui di-
ctis tribus angulis
sint æquales. Pon-
antur sex lineæ
angulos dictos cō-
prehendentes, nē-
pe A D, A E, B F,
B G, C H, C I, æquales; subtendanturque bases D E, F G,
H I. Fieri ergo potest, ut ex D E, F G, H I, triangulum con-



2. undec

struatur.

sttuatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulū KLM, sitq;
latus K L, rectæ D F; latus LM, rectæ F G; & latus K M,
rectæ H I, æquale. Describatur circa triangulum K L M, cir-
culus, cuius centrū



N, a quo ducan-
tur rectæ NK, NL,
NM. Eritq; quæli-
bet rectarum angu-
los planos compre-
hendentiū, nempe
A D, A E, &c.
maior qualibet du-

starum ex centro N Quod ita ostendetur. Cadat primo
centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando
triangulū est oxygonium. Si igitur A D, A E, maiores non
credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint
ergo æquales. Quoniā igitur latera A D, A E, triāguli ADE,
æqualia sunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & basis
D E, basi K L, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqua-
lis. Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angu-
lus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa
N, æquales sint quatuor rectis, ex coroll. propof. 15. lib. 1 erūt
quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est
absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur
æquales sunt A D, A E, ipsis NK, NL. Dico quod neq; mi-
nores. Si. n. minores sint A D, A E, quā NK, NL; abscindan-
tur NO, NP, ipsis A D, A E, æquales, ducaturq; recta O P.
Quoniā igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & an-
tecedētia inter se, & cōsequentia sint inter se æqualia; erunt
latera NK, NL, triāguli NKL, secta proportionaliter; ac
proinde O P, ipsi K L, parallela erit. Quare anguli NOP,
NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum
NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad
KL, ita NO, ad OP. Est autē NK, maior quā NO. Igitur
& KL, hoc est, D E, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quā
OP. Quocirca cū latera A D, A E, triāguli ADE, sint æqua-
lia lateribus NO, NP; triāguli NOP; & basis DE, maior base
OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione
angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, ma-
ior

primi.

sexti.
primi.

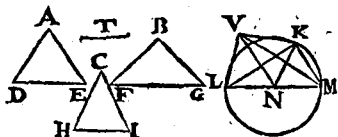
sexti.
quinti.

primi

ior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur, n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quā NK, NL; sed neq; æquales: Igitur maiores.

CADAT secundo centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erūt quo

que BF, B G, æquales eisdē NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, B G, rectæ LM: Po



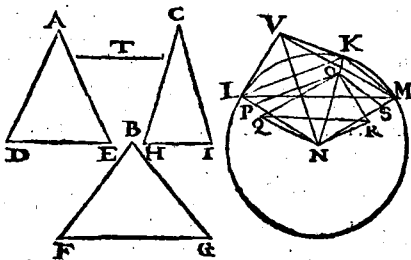
sita autē fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, B G, æquales quoq; sunt rectæ FG. Sunt autē & maiores BF, B G, quā FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoq; BF, B G, minores quā NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, B G, quā recta LM: Posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, B G, minores quoq; sunt recta FG. Quod est absurdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

20. primi.

20. primi.

CADAT postremo centrū N, extra triagulum KLM,

infra latus LM; quod demum accider, quādo angulus LKM, fuerit obtusus. Si igitur dicatur AD, AE, esse æquales ipsis



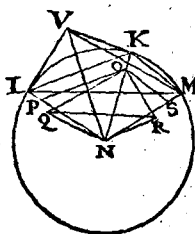
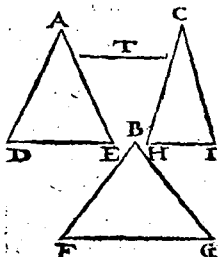
NK, NL; cū & basis DE, basi KL, ponatur equalis, erit angulus A, angulo KNL, equalis. Eadē ratione angulus C, angulo

8. primi.

lo

lo K N M, æqualis erit. Quare totus angulus L N M, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus L N M, angulo B, erit maior. Rursus quia latera N L, N M, trianguli N L M, æqualia sunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & basis L M, basi F G, æqualis; erit angulus L N M, angulo B, æqualis: Sed &

rimi.



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt A D, A E, ipsis N K, N L, quod si A D, A E,

credantur esse minores, quam N K, N L; Si abscindantur N O, N P, ipsis A D, A E, æquales, & ducatur recta O P; demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo O N P; & eadē ratione angulus C, maior angulo K N M.

primi

Fiat angulus O N Q, angulo A; & angulus O N R, angulo C, æqualis: ponanturque N Q, N R, æquales ipsis A D, A E, & connectantur O Q, O R; cadetq; O Q, infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, transcat circūferentia circuli ex N, ad intervallum N O, descripta, cum æquales sint rectæ N O, N P, N Q. Quare cum

primi

angulus P O N, æqualis sit angulo L K N, externus interno; erit angulus Q O N, minor angulo L K N. Eadem ratione ostendetur angulus N O R, minor angulo N K M, si ducatur O S, parallela ipsi K M. Cader enim similiter O R, infra O S. Igitur totus angulus L K M, toto angulo Q O R, maior erit. Quoniam uero latera N O, N Q, trianguli N O Q, æqualia sunt lateribus A D, A E, trianguli A D E; Est autem & angulus O N Q, angulo A, æqualis, per constructionem; erit O Q, ipsi D E, hoc est, ipsi K L, æqualis. Eodem modo erit O R, ipsi K M, æqualis. Connexa iam recta Q R, cum latera K L, K M, trianguli L K M, æqualia sint lateribus O Q, O R, trianguli O Q R; & angulus

primi

& angulus LKM , maior angulo QOR , ut ostendimus:
erit basis LM , hoc est FG , maior base QR . Quoniam igitur
latera BF , BG , trianguli BFG , æqualia sunt lateribus
 NQ , NR , trianguli NQR ; & basis FG , maior base
 QR ; erit angulus B , maior angulo QNR . Rursus quia
angulus ONQ , angulo A ; & angulus ONR , angulo C ,
factus est æqualis, erit angulus totus QNR , duobus A ,
& C , æqualis: Sed A , & C , maiores ponuntur angulo B .
Igitur & angulus QNR , maior erit angulo B . Quod est
absurdum, cum B , ostensus sit maior angulo QNR .
Non ergo minores sunt AD , AE , quam NK , NL ; sed
neque æquales: Igitur maiores.

Iam uero, cum rectæ AD , AE , maiores sint rectis
 NK , NL , ubicunque centrum N , existat; possit recta AD ,
plus quam recta NK , quadrato lineæ T , per lemma pro-
pos. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ AD , æquale sit qua-
dratis rectarum NK , & T . Ex centro N , excutetur ad pla-
num circuli KLM , perpendicularis NV , rectæ T , æqua-
lis; connectanturq; rectæ KV , LV , MV . Quoniam igitur
 NV , recta est ad planum circuli KLM , recta quoque
eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK , NL , NM ,
ac proinde quadratum rectæ VK , quadratis rectarum KN ,
 NV , æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD , æ-
quale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN ,
 NV , æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK , & AD .
Ac propterea æquales erunt rectæ VK , AD . Rursus quia
latera VN , NK , trianguli VNK , æqualia sunt lateribus
 VN , NL , trianguli VNL ; & anguli ipsis contenti VNR ,
 VNL , recti; erit basis VK , æqualis basi VL . Atq; eadem
ratione rectæ VM . Quare tres rectæ VK , VL , VM , æqua-
les sunt inter se: Ostensa est autem recta VK , æqualis rectæ
 AD . Tres ergo rectæ VK , VL , VM , æquales sunt rectæ
 AD , & ob id, rectis AE , BF , BG , CH , CI . Quamob-
rem, cum latera VK , VL , trianguli VKL , æqualia sint
lateribus AD , AE , trianguli ADE ; & basis KL , basi
 DE ; erit angulus KVL , angulo A , æqualis. Non secus
demonstrabimus, angulum LVM , angulo B ; & angulum
 KVM , angulo C , esse æqualem. Quare angulus solidus
 V , continetur tribus angulis planis KVL , LVM , MVK ,
qui

24. primi.

25. primi.

12. undec.

47. primi.

4. primi.

8. undec.

qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum; iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secantur plano AC; erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Similiter cum plana

16. undec.



parallela AF, BE, secantur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; AC proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico tam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF.

10. undec.

Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa. Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diametris AH, DE; cū latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erunt triagula ABH, DCE, æqualia in area. Quare cū triagula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF, erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus, similia & æqualia esse parallelogram-

34. primi.

34. primi.

10. undec.

4. primi.

34. primi.

lelograma opposita AC, GE , & AF, BE . Si solidū ergo paral-
lelis planis continetur aduersa illius plana, parallelogram-
ma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cerit aduersis planis parallelo: Erit quem-
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

SECEPIT parallelepipedū $ABCD$, plano EF , paral-
lelo oppositis planis AD, BC . Dico ut est basis AG , ad basim
 BG , ita esse solidū $AEPD$, ad solidū $BEFC$. Intelliga tamen
parallelepipedū $ABCD$, productū in utraque parte quan-
tumlibet, sumaturq; in AB , protracta quocumq; recta AK ,
 KL , ipsi AB , & quocumq; recta BM, MN, NO , ipsi EB , &
quā. Dein



de per- pūcta
 R, I, M, N ,
 O , ducantur
plana EP, P ,
 LQ, MR ,
 L, K, A, E, B, M, N, O
 NS, OT , parallela planis AD, EF, BC , p. scholion. oppos.
hūius lib. Quoniam igitur solidū $AEPD$, cōtinetur planis pa-
rallelis ex hypothesi, ipsam esse parallelepipedū, ex defini-
tione, habebitq; plana opposita, parallelogramma, similia, & æqua-
lia. Eodē mō erūt parallelepipeda $AKPD, KLQ, BECF,$
 $BMRE, MNSR, NOPS, ELQF, EOTF$, habebutq; plana
opposita, parallelogramma, similia, & æqualia. Quoniam uero
parallelogramma AG, KVL , quā sunt superiorem basim $AE,$
 AK, KL , æqualia sunt; & similia quoniam, cū anguli unius sint

24. undec.

36. primi.

29. primi.

æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-
qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-
nalia. Eademque ratione æqualia, & similia sunt parallelo-
gramma AK, KL, LQ . Cū igitur æqualia quodā sint, & similia pa-
rallelogramma AD, KB, LQ , erūt etia plana $AG, AY, AD,$
solidi A, B, E, D , æqualia, & similia tribus planis $K, V,$
 KZ, KP , solidi $AKPD$, & tribus planis $L, X, LQ,$
 LQ, LQ , solidi KLQ, F ; Sicut autem tria, ita unumquo-

1. undec. que solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe A G, ipsi Z F; & A Y, ipsi V F; & A D, ipsi E F, &c. igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia ostendentur solida E B C F, B M R C, M N S R,



NOTS.

Quare quam multiplex est basis L G, basis A' G, tam multiplex erit

solidum L E F Q, solidi A E F D; Et quam multiplex est basis O G, basis B' G, tam multiplex erit solidum O E F T, solidi B E F C. Quoniam uero si basis L G, (multiplex basis A G, primæ magnitudinis,) æqualis est basi O G, (multiplici basis B G, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum L E F Q, (multiplex solidi A E F D, tertie magnitudinis) solido O E F T, (multiplici solidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod basis L G, O G, æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi L E F Q, sex parallelogramma solidi O E F T: Si autem basis maior est basis, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per definit. 6. lib. 5. ut basis A G, prima magnitudo, ad basin B G, secundam magnitudinem, ita solidum A E F D, tertia magnitudo, ad solidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis D X, ad basin G Y; & ut basis A Y, ad basin B Y; & ut basis D G, ad basin C G. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c.

Quod erat ostendendum. *Coroll. 1. Si unum parallelepipedum secetur plano, & alterum secetur plano, & si bases eorum sint æquales, & altitudo eorum sit eadem, erit unum æquale alteri. Si bases eorum sint æquales, & altitudo unius sit maior, erit unum maius altero. Si bases eorum sint æquales, & altitudo unius sit minor, erit unum minus altero. Si bases eorum sint in eadem ratione, & altitudo eorum sit eadem, erit unum in eadem ratione alteri. Si bases eorum sint in eadem ratione, & altitudo unius sit maior, erit unum maius altero. Si bases eorum sint in eadem ratione, & altitudo unius sit minor, erit unum minus altero.*

neis planis parallelo. Dico ut est basis AI , ad basin FI , ita esse solidum $ABCIHG$, ad solidum $FEDIHG$. Intelligatur prisma $ABCDE F$, in utramque partem quantumlibet productum,

et ex $A F$, producta utrinque capiuntur quae cum recta AK , KL , ipsi AG ,



et quocumque recta FM , MN , NO , ipsi FG , aequales. Deinde per puncta K , L , M , N , O , ducantur plana KPQ , LRS , MTV , NXY , $OZ\alpha$, parallela planis ABC , GHI , FED , per scholiam propos. 13. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC , GHI , secantur plano AI ; erunt communes sectiones AC , GI , parallelae: Sunt autem et AG , CI , parallelae ex hypothesi, ob parallelogrammum AD . Igitur parallelogrammum est AI . Rursus quia plana parallela ABC , GHI , secantur plano AH ; erunt communes sectiones AB , GH , parallelae: Sunt autem et AG , BH , parallelae, ob parallelogrammum AE . Igitur parallelogrammum est AH . Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH . Quoniam vero latera AC , AB , trianguli ABC , equalia sunt lateribus GI , GH , trianguli GHI ; cum AC , ipsi GI , et AB , ipsi GH , sit equalia; et anguli CAB , IGH , sunt quodaequales, eo quod rectae CA , AB , parallelae sint rectis IG , GH , et non in eodem plano: Erunt triangula ABC , GHI , equalia inter se, et aequiangula. Quare latera circum equalis angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum $ABCIHG$, contentum duobus planis oppositis ABC , GHI , equalibus et similibus, atque parallelogrammis AI , IB , BG , prisma est. Eadem arte prismata erunt $ABCQPK$, $KPQ SRL$; $FEDIHG$, $FEDVTM$, $MTVYN$, $NXY\alpha Z O$, $LRSIHG$, $OZ\alpha IHG$. Quoniam vero parallelogramma AI , KC , LQ , equalia sunt et similia; necnon AH , KB , LP ; et CH , QB , SP . Erunt omnia plana prismatis $ABCIHG$, equalia et similia omnibus planis prismatum $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Quare, per defin. 10. huius lib. equalia erunt prismata $ABCIHG$, $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Eadem ratione equalia erunt prismata

16. undec.

16. undec.

34. primi.

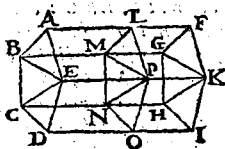
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NYaZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Es quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma OZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magnitudinis) equalis est basi OT, (multiplici basis FI, secunda magnitudinis;) equalis quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertia magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

S i t. secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius oppo-



sita plana sint polygona, nēpe pentagona, seceturq; plano LMNOP. Dico rursus, ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluan-

tur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, que demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPML, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNQ, ad prisma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPML, CDEPNQ, ad prismata

LM-

LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se. Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.

12. quinsi.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producat prisma in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostendentur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

COROLLARIUM.

Ex his inferitur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, cõtrito tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existentibus. Ducat ex F, ad planũ p CD, CE, ductũ perpendicularis FG;

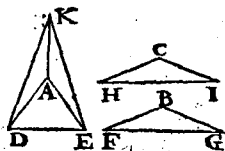
12. undec.

T

4 conne-

ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI .
Quod est propositum.

CADAT postremo AK , ad partes AE , ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD , DAK , nec



recta sit EAK ; quod demum eueniet , quando duo anguli DAE , & B , duobus rectis sunt maiores . Ponaturque rursus AK , ipsi AD , æqualis , & ducatur rectæ KD , KE . Erit igitur , ut prius KD , ipsi FG , æ-

qualis . Quoniam uero duæ DE , DK , maiores sunt duabus AE , AK ; & AE , AK , æquales duabus CH , CI , ex hypothesi , & constructione ; erunt quoque DE , DK , maiores quam CH , CI : Hæ autem maiores sunt , quam HI . Igitur multo erunt maiores DE , DK , quam HI . Cum ergo DK , ostensa sit æqualis ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , maiores quam HI . quod est propositum . Eodem modo concludemus DE , HI , maiores esse , quam FG , si angulus DAK , angulo C , fiat æqualis ; Item FG , HI , maiores , quam DE , si angulo C , ad FG , constituatur angulus æqualis , &c . Quare ex tribus rectis DE , FG , HI , triangulum cõstitui potest . Si igitur fuerint tres anguli plani , &c . Quod erat demonstrandum .

ALITER . Si tres anguli A , B , C , sunt æquales ; erunt quoque bases DE , FG , HI , æquales ; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores . Si uero duo tantum anguli sunt



æquales , & tertius minor ; erunt quoque duæ illorum bases æquales , & basis tertij utraque minor : Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua . Quod si unus eorum , nempe A , sit maximus , siue reliqui B , & C , sint inter se æquales , siue inæquales ; erit quoque basis DE , omnium maxima . Quare DE , FG , maiores erunt quam HI : Item DE , HI , maiores , quam FG . Dico iam & rectas FG , HI , maiores esse recta DE . Fiat enim angulus DAK , æqualis angulo B , ponaturque AK , ipsi AD , æqualis . Cadet ergo punctum K ,
infra

infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transeat circumscribitur circuli ex A, ad intervallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG; trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; erit & basis HI, maior base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

4. primi.

24. primi.

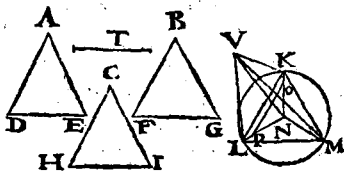
20. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 23.

23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cōditione, ut quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum con-

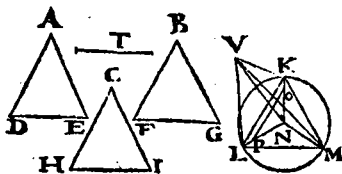


tineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos cōprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. Fieri ergo potest, ut ex DE, FG, HI, triangulum con-

2. undec

stituat.

fituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulū KLM, sitq; latus KL, rectæ DF; latus LM, rectæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. Describatur circa triangulum KLM, cir-



culus, cuius centrū N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eruntq; quælibet rectarum angulos planos comprehendentiū, nempe AD, AE, &c. maior qualibet du-

starum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrū N, intra triangulū KLM; quod quidem fiet, quando triangulū est oxygonium. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quā NK, NL, erūt uel æquales, uel minores. Sint ergo æquales. Quoniā igitur latera AD, AE, triāguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, triāguli NKL; & basis DE, basi KL, æqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodē argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis, ex coroll. propof. 15, lib. 1 erūt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si. n. minores sint AD, AE, quā NK, NL; abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniā igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cū & antecedētia inter se, & cōsequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, triāguli NKL, secta proportionaliter; ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triāgulo NKL, æquiangulum. Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autē NK, maior quā NO. Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quā OP. Quocirca cū latera AD, AE, triāguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP; triāguli NOP; & basis DE, maior base OP; erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior

imi.

exti.

imi.

xti.

inti.

rimi

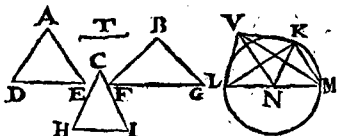
ior

ior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N , quatuor
sint rectis æquales, ex coroll. propol. 13. lib. 1. erunt tres angu-
li A, B, C , maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. po-
nuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt
 AD, AE , quā NK, NL ; sed neq; æquales: Igitur maiores.

CADAT secundo centrum N , in latus LM ; quod tum
continget, quando triangulum KLM , angulum LKM , ha-
buerit rectum. Si igitur AD, AE , dicantur esse æquales ipsis
 NK, NL ; erūt quo

que BF, BG , æqua-
les eisdē NK, NL .

Cum ergo NK , æ-
qualis sit ipsi NM ;
æquales erunt BF ,
 BG , rectæ LM : Po-



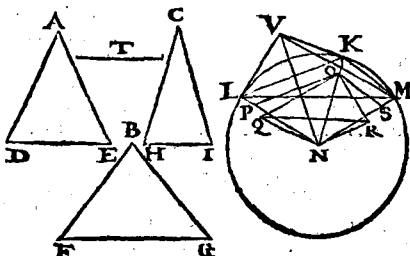
sita autē fuit LM , æqualis ipsi FG . Igitur BF, BG , æquales
quoq; sunt rectæ FG . Sunt autē & maiores BF, BG , quā
 FG . Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD ,
 AE , ipsis NK, NL . Quod si AD, AE , minores credantur,
quam NK, NL ; erunt quoq; BF, BG , minores quā NK ,
 NL . Cū ergo NK , æqualis sit ipsi NM ; minores erunt BF ,
 BG , quā recta LM : Posita autem fuit LM , ipsi FG , æqualis.
Igitur BF, BG , minores quoq; sunt recta FG . Quod est ab-
surdum, cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD ,
 AE , quam NK, NL ; sed neque æquales: Igitur maiores.

20. primi.

20. primi.

CADAT postremo centrū N , extra triāgulum KLM ,

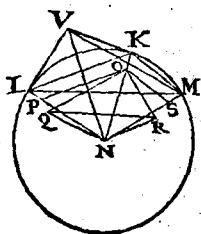
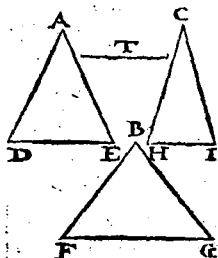
infra latus
 LM ; quod
demum ac-
cidet, quā-
do angulus
 LKM , fue-
rit obtusus.
Si igitur di-
catur AD ,
 AE , esse æ-
quales ipsis



NK, NL ; cū & basis DE , basi KL , ponatur equalis; erit angu-
lus A , angulo KNL , æqualis. Eadē ratione angulus C , angu-

8. primi.

lo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & basis LM, basi FG, æqualis; erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed &



maiorē ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL, quod si AD, AE,

credantur esse minores, quam NK, NL; Si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM.

Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis: ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ.

Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cader enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam uero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; erit OQ, ipsi DF, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus

& angulus $\angle K M$, maior angulo $\angle Q O R$, ut ostendimus: 24. *primi.*
 erit basis $L M$, hoc est $F G$, maior base $Q R$. Quoniam igitur latera $B F$, $B G$, trianguli $B F G$, æqualia sunt lateribus $N Q$, $N R$, trianguli $N Q R$; & basis $F G$, maior base $Q R$; erit angulus B , maior angulo $Q N R$. Rursus quia angulus $O N Q$, angulo A ; & angulus $O N R$, angulo C , factus est æqualis, erit angulus totus $Q N R$, duobus A , & C , æqualis: Sed A , & C , maiores ponuntur angulo B . Igitur & angulus $Q N R$, maior erit angulo B . Quod est absurdum, cum B , ostensus sit maior angulo $Q N R$. Non ergo minores sunt $A D$, $A E$, quam $N K$, $N L$; sed neque æquales: Igitur maiores.

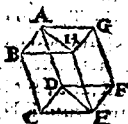
$I A M$ uero, cum rectæ $A D$, $A E$, maiores sint rectis $N K$, $N L$, ubicunque centrum N , existat; possit recta $A D$, plus quam recta $N K$, quadrato lineæ T , per lemma proposit. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectæ $A D$, æquale sit quadratis rectarum $N K$, & T . Ex centro N , excutetur ad planum circuli $K L M$, perpendicularis $N V$, rectæ T , æqualis; connectanturq; rectæ $K V$, $L V$, $M V$. Quoniam igitur $N Y$, recta est ad planum circuli $K L M$, recta quoque eadem erit, ex definit. 3. huius lib. ad rectas $N K$, $N L$, $N M$; ac proinde quadratum rectæ $V K$, quadratis rectarum $K N$, $N V$, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ $A D$, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum $K N$, $N V$; æqualia erunt inter se quadrata rectarum $V K$, & $A D$. Ac propterea æquales erunt rectæ $V K$, $A D$. Rursus quia latera $V N$, $N K$, trianguli $V N K$, æqualia sunt lateribus $V N$, $N L$, trianguli $V N L$; & anguli ipsis contenti $V N R$, $V N L$, recti; erit basis $V K$, æqualis basi $V L$. Atq; eadem ratione rectæ $V M$. Quare tres rectæ $V K$, $V L$, $V M$, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta $V K$, æqualis rectæ $A D$. Tres ergo rectæ $V K$, $V L$, $V M$, æquales sunt rectæ $A D$, & ob id, rectis $A E$, $B F$, $B G$, $C H$, $C I$. Quatiobrem, cum latera $V K$, $V L$, trianguli $V K L$, æqualia sint lateribus $A D$, $A E$, trianguli $A D E$; & basis $K L$, basi $D E$; erit angulus $K V L$, angulo A , æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum $L V M$, angulo B ; & angulum $K V M$, angulo C , esse æqualem. Quare angulus solidus V , continetur tribus angulis planis $K V L$, $L V M$, $M V K$, qui

qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defn. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cum enim parallelæ plana BG, CF, secantur plano AC, erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Similiter cum plana



parallelæ AF, BE, secantur plano AC, erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico tam

opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis, erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC, & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea ut BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadē de causa. Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis ita diagonibus AH, DE; cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est; erunt triagula ABH, DCE, æqualia inter se. Quare cum triagula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CE, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus, similia & æqualia esse parallelogram

lelogramma opposita AQ, GE ; & AE, BE . Si solidū ergo paral-
lelis planis continetur, producta illius plana, parallelogram-
ma sunt, similia, & equalia. Quod erat demonst.andum.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano se-
cetur aduersis planis parallelo: Erit quem-
admodū basis ad basim, ita solidū ad solidū.

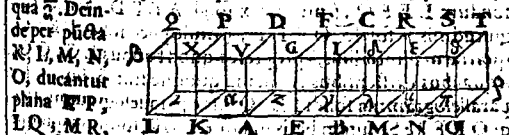
SECEPIT parallelepipedū $ABCD$, plano EF , paral-
lelo oppositis planis AD, BC . Dico ut est basis AG , ad basim
 BG , ita esse solidū $AEPD$, ad solidū $BEFC$. Intelligat enim
parallelepipedū $ABCD$, productū in utraque parte quan-
tumlibet, sumaturque in AB , protracta quocunque recta AK ,
 KL , ipsi AB , & quocunque protracte BM, MN, NG , ipsi EB , &
quā. Dein

deper pūcta
 R, L, M, N ,
 O , ducantur
plana EP ,
 LQ, MR ,

NS, OT , parallela planis AD, EF, BC , p. solution. oppos.
hūius lib. Quoniam igitur solidū $AEPD$, continetur planis pa-
rallelis ex hypothēsi, ipsū erit parallelepipedū, ex definitio-
ne, habebitque plana opposita, parallelogramma, similia, & equa-
lia. Eodē mō erūt parallelepipeda $AKPD, KLQ, BECF$,
 $BMRE, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF$, habebutque plana
opposita, parallelogramma, similia, & equalia. Quoniam uero
parallelogramma AG, KV, LK , quā sunt super equeles bases AE ,
 AK, KL , equalia sunt; & similia quoniam, cū anguli unius sint

equales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æ-
qualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportio-
nalia. Eademque ratione equalia, & similia sunt parallelo-
gramma AY, KB, LK . Cū igitur equalia quodā sint, & similia pa-
rallelogramma AD, KP, LQ , erūt tria plana AG, AY, AD ,
solidi $AEPD$, equalia, & similia tribus planis KV, KL, LK ,
solidi $AKPD$, & tribus planis LX, LY, LK ,
solidi $KLQF$. Sūt autem tria plana, utroque

T 2 que

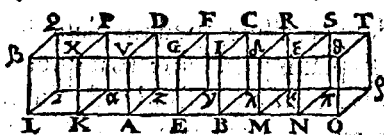


24. undec.

36. primi.

29. primi.

que solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe A G, ipsi Z F; & A Y, ipsi V F; & A D, ipsi E F, &c. igitur per defin. 10. huius libri, æqualia sunt solida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia ostendentur solida E B C F, B M R C, M N S R,



NOTA. Quare quam multiplex est basis L G, basis A G, tam multiplex erit

solidum L E F Q, solidi A E F D; Et quam multiplex est basis O G, basis B G, tam multiplex erit solidum O E F T, solidi B E F C. Quoniam uero si basis L G, (multiplex basis A G, primæ magnitudinis,) æqualis est basi O G, (multiplici basis B G, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum L E F Q, (multiplex solidi A E F D, tertie magnitudinis) solidum O E F T, (multiplici solidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus L G, O G, æqualibus existentibus, æqualia quoque sint & similia sex parallelogramma solidi L E F Q, sex parallelogramma solidi O E F T: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus, in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per hanc fin. 6. lib. 5. ut basis A G, prima magnitudo, ad basin B G, secundam magnitudinem, ita solidum A E F D, tertia magnitudo, ad solidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis D X, ad basin G Y; & ut basis A Y, ad basin B Y; & ut basis D G, ad basin C G. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c.

Quod erat ostendendum

S. C. H. O. L. E. O. N. H. A. C. propositio accommunari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcumque plano secetur aduersis planis parallelis, erit quemadmodum basis ad basin, ita solidum ad solidum. Sit enim primum prisma A B C D E F, cuius plani aduersi sunt triangularia ut B C, D E; seceturq; planis G H aduersis

neis planis parallelo. Dico ut est basis AI , ad basin FI , ita esse solidum $ABCIHG$, ad solidum $FEDIHG$. Intelligatur prisma $ABCDE F$, in utramque partem quantumlibet productum,

et ex AF , producta utringue capiuntur quotcunque recte AK , KL , ipsi AG ,



et quocunque recte RM , MN , NO , ipsi FG , equales. Deinde per puncta K , L , M , N , O , ducantur plana KPQ , $LR S$, MTV , NXY , $OZα$, parallela planis ABC , GHI , FED , per scholiam propof. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC , GHI , secantur plano AI ; erunt communes sectiones AC , GI , parallelae: Sunt autem et AG , CI , parallelae ex hypothefi, ob parallelogrammum AD . Igitur parallelogrammum est AI . Rursus quia plana parallela ABC , GHI , secantur plano AH ; erunt communes sectiones AB , GH , parallelae: Sunt autem et AG , BH , parallelae, ob parallelogrammum AE . Igitur parallelogrammum est AH . Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH . Quoniam vero latera AC , AB , trianguli ABC , equalia sunt lateribus GI , GH , trianguli GHI ; cum AC , ipsi GI , et AB , ipsi GH , sitae quales; et anguli CAB , IGH , sunt quoque aequales, eo quod rectae CA , AB , parallelae sint rectis IG , GH , et non in eodem plano: Erunt triangula ABC , GHI , aequalia inter se, et equiangula. Quare latera circum aequales angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco similia erunt. Igitur solidum $ABCIHG$, contentum duobus planis oppositis ABC , GHI , equalibus et similibus, atque parallelogrammis AI , IB , BG , prisma est. Eadem arte prismata erunt $ABCQPK$, $KPQ SRL$; $FEDIHG$, $FEDVTM$, $MTVYXN$, $NXYαZO$, $LR SIHG$, $OZαIHG$. Quoniam vero parallelogramma AI , KC , LQ , equalia sunt et similia; necnon AH , KB , LP ; et CH , QB , SP ; Erunt omnia plana prismatis $ABCIHG$, equalia et similia omnibus planis prismatum $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Quare, per defin. 10. huius lib. equalia erunt prismata $ABCIHG$, $ABCQPK$, $KPQ SRL$. Eadem ratione equalia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

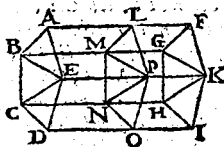
10. undec.

4. primi.

4. sexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO.
Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex
erit prisma LRSTIHG, prismatis ABCIHG; Et quam
multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma
OZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI,
(multiplex basis AI, prima magnitudinis) equalis est basi
OI, (multiplici basis FI, secunda magnitudinis;) equalis quoque
est prisma LRSTIHG, (multiplex prismatis ABCIHG,
tertia magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici pris-
mati FEDIHG, quarta magnitudinis;) propterea quod
basibus LI, OI, existentibus equalibus, equalia quoque sint
& similia omnia plana prismatis LRSTIHG, omnibus pla-
nis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est base
OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus,
in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib.
5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam ma-
gnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad
prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo
ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin
FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propo-
situm.

S I T. secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius oppo-



sita plana sint polygona, nēpe pen-
tagona, seceturq; plano LMNOP.
Dico rursus, ut est basis CM, ad
basin NG, ita esse solidum ABC-
DELMNOP, ad solidum
LMNOPFGHIK. Si enim
plana opposita parallela resolu-
tur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quo-
rum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut
basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad pris-
ma LMPKGF, per ea, quae demonstrata sunt. Eodem modo
erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEP MN,
ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPN O, ad pris-
ma NOPKHI. Ut autem BP, ad MK, & CP, ad NK,
ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH;
Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata
ABEPML, BCEP MN, CDEPN O, ad prismata
L M.

LM PKGF, MN PKGH, NOP KHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se. Ut autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma B.C.E.P.M.N., ad prismam MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prismam LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.

12. quinti.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, quae sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos aequales comprehendant, &c. Unde, ut prius, ostenduntur prismata ex una parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

16. undec.

10. undec.

COROLLARIUM.

Ex his inferitur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26.

26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, cōtēto tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodē plano existētib. Ducat ex F, ad planū p CD, CE, ductū perpendiculis EG;

11. undec.

connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde
abscindatur A H, æqualis ipsi C D, fiatq; angulus H A I,
angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis.
Rursus in plano per A H, A I, ductum constituatur angu-
lus H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, du-
cto existit; & recta A L, re-
ctæ C G, æqualis. Ex L, ve-
ro ad planum, in quo sunt
tres A H, A L, A I, eriga-
tur perpendicularis L K,
quæ ipsi F G, æqualis pona-
tur, & coniungatur recta K A. Dico angulum solidum A,
contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqua-
lem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis H K,
H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqua-
lia sint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli
H A L, D C G, æquales, per constructionem; Erunt ba-
ses H L, D G, æquales. Rursus quia ablatiis angulis æqua-
libus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui
æquales sunt L A I, G C E. Cum igitur & latera A L, A I,
trianguli A L I, æqualia sint lateribus C G, C E, trianguli
C G E, per constructionem; æquales quoque erunt bases
L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia sunt lateri-
bus G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3.
huius lib. erunt & bases H K, D F, æquales. Quare cum &
latera A H, A K, trianguli A H K, sint æqualia lateribus
C D, C F, ex constructione; Erunt quoque anguli H A K,
D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, sunt æqua-
lia lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex
defin. 3. huius lib. Erunt bases I K, E F, æquales: Cum igitur
& latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F,
trianguli C E F, sint æqualia, ex constructione; Erunt quo-
que anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli
plani H A I, H A K, K A I, solidum angulum A, compo-
nentes, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E,
angulum solidum C, componentibus; Atque proinde soli-
dus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaq;
rectam lineam, eiusq; punctum, angulum solidum consti-
tuimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendū.



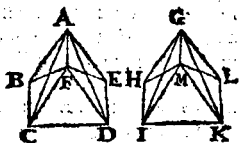
SCHOLION.

Quod si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtiendenda erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemque existentes plano, (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figurae planae polygonae constituantur, pyramidesque quaedam insularae efficiantur. Si enim figura polygonae in triangula resoluitur, habebuntur tot pyramides trilaterae, quot triangula in figura polygonae continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidarum triangularium aequales solidi anguli constituentur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido aequalis.

Ut si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB,

constituendus sit solidus angulus aequalis, subtiendenda sunt angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in triangula resoluitur BCF,

FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus aequalis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAE, EAD, DAC, aequalis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, aequalis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, aequalis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido aequalis angulus solidus constituetur.



PROBL. 5. PROPOS. 27.

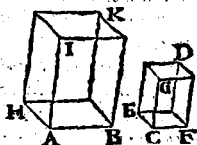
27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT

6. undec.

2. sexvi.



Si τ a data recta AB , describendum parallelepipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo CD . Fiat ad rectam AB , eiusq; punctum A , angulus solidus æqualis angulo solido C , ita ut tres anguli plani HAI, IAB, BAH , æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE . Deinde ut est CF , ad CG , sic fiat AB , ad AI ; & ut CG , ad CE , ita AI , ad AH ; eritq; ex æquo, ut CF , ad CE , ita AB , ad AH . Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK , completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB , & per I, B, H , ductis planis IK, BK, HK , quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB . Dico parallelepipedum AK , parallelepipedo CD , simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli BAH, FCE , sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut BA , ad AH , ita FC , ad CE ; ex constructione; erunt parallelogramma HB, EF , similia; similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma HI, EG ; & IB, GF . Tria igitur plana BH, HI, IB , solidi AK , similia sunt, similiterq; posita tribus planis FE, EG, GF , solidi CD . Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK , similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi CD ; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida AK, CD . A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.

28.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

Si τ parallelepipedum AB , in quo plana opposita sint AH ,

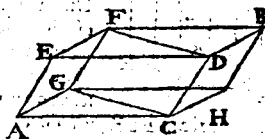
A H, E B, quorum diagoni, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, & æqualis ipsi A B, cum sint parallelogramma C E, G E, erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt, & æquales, idconq; in uno

34. primi.

9. undec.

33. primi.

plano. Dico planū quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & si



24. undec.

milia, erunt & eorum dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: Sunt autem & la tera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia, Igitur similia quoque erunt dicta triangula. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, communt: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, prismatis A C G F E D, æqualia & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 19. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B; bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

6. sexti.

24. undec.

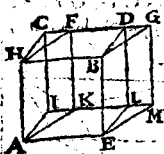
THEOR. 24. PROPOS. 29.

29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SYPAR basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem

eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis; nempe



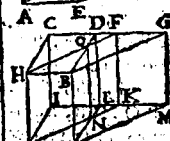
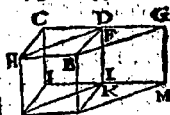
$A I$, $A K$, $E L$, $E M$, in recta $I M$; & $H C$, $H F$, $B D$, $B G$, in recta $C G$. Dico parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$, esse inter se equalia. Cum enim equalia sint parallelogramma $A L$, $A M$, super eadem basi $A E$, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato commu-

ni trapezio $A E L K$, equalia quoque triangula $A I K$, $E L M$. Quoniam uero omnia latera trianguli $A I K$, equalia sunt omnibus lateribus trianguli $H C F$; erit triangulum $A I K$, triangulo $H C F$, æquiangulum, & æquale; per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum $E L M$, triangulo $B D G$, æquale erit & simile. Rursus quia parallelogrammum $A C$, æquale est, & simile parallelogrammo $E D$; & eadem ratione parallelogrammum $A F$, parallelogrammo $E G$; Sed & $I F$, ipsi $L G$, cum bases $I K$, $L M$, sint æquales, (Nam cum rectæ $I L$, $K M$, æquales sint ipsi $A E$, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta $K L$, æquales erunt $I K$, $L M$.) Erunt omnia plana prismatis $A I K F C H$, æqualia & similia omnibus planis prismatis $E L M G D B$. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido $A H F K L D B E$, æqualia fient parallelepipeda $A C D E$, $A F G E$. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat de monstrandum.

SCHOLIUM

Hæc propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis; hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Unde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K , in punctum L , cadit, vel ultra L , eodem modo demonstrabuntur, ut in his si-

his figuris appareo. Nam in secunda casu si ex parallelogram-



mis equalibus AE, AM , auferatur
triangulum commune ALE , erunt re-
liqua triangula AIK, ELM , equa-
lia. Unde, ut prius, equalia erunt
prismata $AIKFCH, ELMGDB$.
Addio ergo prismate cōi $AKBHD$,
equalia fiet parallelepipedum $ACDE$,
 $AFGE$.

IN tertio uero casu, si ex parallelo-
grammis equalibus AL, AM , dema-
tur triangulum commune ANE ,
erunt reliqua trapezia $AILN,$

$NKME$, equalia; quibus si addatur triangulum commune
 KLN , tota triangula AIK, ELM , equalia fient. Unde,
ut prius, equalia erunt prismata $AIKFCH, ELMGDB$;
a quibus si auferatur prisma commune $KLNOBF$; (Nam
communis sectio planorum AF, DE , est recta NO .) remane-
bit solidum comprehensum planis $AILN, NOHA, AICH,$
 $HCD O, CDLI, DLNO$, aequale solido contento planis
 $ENKM, MKFG, GFOB, FKN O, BGME, EBO N$.
Si igitur addatur utrique prisma cōmune $AENOBH$, fient
parallelepipedum $ACDE, AFGE$, inter se equalia.

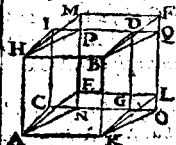
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda super ean-
dem basin constituta, & in eadem altitudi-
ne, quorum insistentes lineæ nō in iisdem col-
locantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SUPER basin AB , in eadem altitudine, hoc est, inter
eadē plana parallela, sint constituta parallelepipeda $AIDK,$
 $AMFK$, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis ba-
sis exeuntes $AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF$, non
sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD , protraxæ
transciant per puncta M, E, F, L , neque CG, LD , produ-
cæ,

que, &c. Dico parallelepipedum $AIDK$, $AMFK$, esse æqualia. Communi enim plana CD , EF , opposita basi AB , sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG , ID , quarum CG , secet EM , LF , productas in punctis N , O . Et ID ,



14. primi.

eandem in punctis P , Q adiunganturque rectæ AN , KO , HP , BQ . Quia igitur rectæ PQ , MF , sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP , & MF , ipsi HB , est æqualis; erunt & PQ , HB , æquales. Sunt autem & parallelæ, propter

13. primi.

parallelogrammum $HIDB$. Igitur & HP , BQ , parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est $HPQB$. Eadem ratione parallelogramma erunt $HPNA$, $ANOK$, $KOQB$. Est autem & parallelogrammum $NOQP$. Igitur parallelepipedum est $APQK$. Quamobrem parallelepipedum $AIDK$, æquale est parallelepipedo $APQK$, cum utriusque eadem sit basis AB , & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO , IQ . Eodem modo eodem parallelepipedo $APQK$, æquale erit parallelepipedum $AMFK$, cum utriusque eadem sit basis AB , & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM , OF . Quare parallelepipeda $AIDK$, $AMFK$, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

19. undec.

SCHOLIUM.

CONVERTERE hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si unum dicatur aliquis, & ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine, erunt æqualia abscissum,

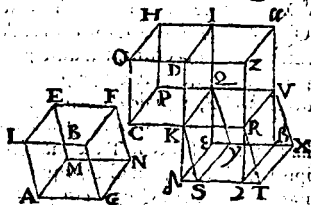
abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo po-
natur aequale; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum. 29. vel 30. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æ-
quales bases constituta, & in eadem altitu-
dine: æqualia sunt inter se.

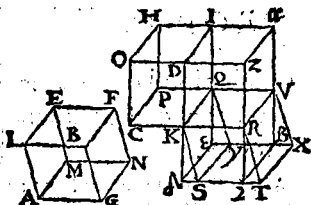
SUPR æquales bases AB, CD, in eadē altitudine sunt
constituta parallelepipeda A EFG, CHIK. Dico hæc paralle-
lepipeda esse æqualia inter se. Smr. n. primū insisteres lineæ
AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insisteres CP, KQ, OH,
DI, ad basin CD, per-
pendiculares. Quo po-
sito, erunt omnes di-
ctæ perpendiculares in-
ter se æquales, propter
eandem parallelepipe-
dorum altitudinem.
Prodūcat C K, in
rectum, sitq; KR, æ-



qualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso
æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipsi LA; & per-
ficiatur parallelogrammum K T, super quod, ad altitudinē
perpendicularis K Q, construatur parallelepipedū Q S T V.
Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB,
LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma
KT, LG, æqualia & similia. Rursus quia latera K Q, KS, æ-
qualia sunt lateribus LE, LA; & anguli QKS, ELA, recti,
per defin. 3. huiuslibet, quod & QLE, rectæ ponantur ad
planā KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia
& similia. Eodem modo cum latera KR, & QK æqualia sint
lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem de-
fin. 3. huiuslibet, erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æ-
qualia & similia. Quare cū tria planā KT, QS, KV, paralle-
lepipedi Q S T V, æqualia sint & similia tribus planis LG, EA,
LF, parallelepipedi A EFG; Tāq; illi, quā hæc æqualia sint
& simi-

24 undec.

24. undec. & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defn. rebus
 ius lib. parallelepipedum $QSTV$, $EAGF$, inter se æqualia.
 CONVENIANT rectæ DK , TS , productæ in δ ;



& IQ , XY , in α , cõ-
 pleaturq; parallelepi-
 pedum $Q\delta\gamma V$. Itẽ
 $H1$, βV , productæ
 conveniant in α ; &
 OD , γR , in Z , perfici-
 aturq; parallelepipedum
 $IKRa$. Quom-
 niam igitur parallele-

pipeda $QSTV$, $Q\delta\gamma V$, eandẽ habent basin KV , suntq;
 in eadem altitudine, nempe inter eadẽ plana parallela KV ,
 δX , & insistentes, ipsorum lineæ KS , $K\delta$, RT , $R\gamma$, QY ,
 $Q\epsilon$, VX , $V\beta$, collocantur in eisdem rectis δT , & X , ipsa
 inter se æqualia erunt. Est autẽ parallelepipedum $QSTV$,
 parallelepipedo $EAGF$, æquale: Igitur eidem parallelepипе-
 do $EAGF$, æquale erit parallelepipedum $Q\delta\gamma V$.

29. undec.

35. primi.

7. quinti.

25. undec.

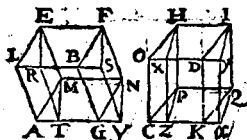
9. quinti.

QVONIAM vero parallelogramma KT , $K\gamma$, æqua
 lia sunt inter se; & KT , æquale est ipsi LG , erit & $K\gamma$,
 ipsi LG , hoc est, ipsi CD , æquale; cum bases LG , CD , po-
 nantur æquales. Quare erit, ut CD , ad DR , ita $K\gamma$, ad
 DR : Ut autẽ CD , basis ad basin DR , ita est solidũ $CHIK$,
 ad solidum $KIaR$; cum parallelepipedum $CHaR$, secetur
 plano IK , planis oppositis CH , & R , parallelo: Et ea-
 dem ratione ut $K\gamma$, ad DR , ita est solidum $Q\delta\gamma V$, ad
 solidum $IKRa$; tum & parallelepipedũ $I\delta\gamma a$, secetur pla-
 no KV , oppositis planis $D\alpha$, $\delta\beta$, parallelo. Igitur æqua-
 lia erunt parallelepipedum $CHIK$, $Q\delta\gamma V$; cum eandem
 habeant proportionem ad idem solidum $IKRa$: Quare
 cum parallelepipedum $Q\delta\gamma V$, sit ostensum æquale paral-
 lelepipedo $EAGF$, æqualia quoque erunt parallelepipedum
 $EAGF$, $CHIK$. Quod est propositum.

21. undec.

SINT iam neque insistentes lineæ AM , GN , LE , BF ,
 ad basin AB ; neque CP , KQ , OH , DI , ad basin CD ,
 perpendicularæ: Et a punctis E , F , M , N demittantur ER ,
 FS , ME , NV , ad planum, in quo basis AB , perpendicu-
 lars; Item a punctis H , I , P , Q , ad planum, in quo basis
 CD ,

CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiat parallelepipedum ET-VF, HZaI. quæ cū sint eiusdē altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum ET-VF, æquale est parallelepipedo A EFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z a I, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo basin H Q, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A EFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat,



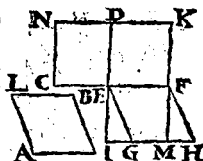
29. vel 30.
undecimi.

SCHOLIUM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem sit demonstratio illius, qua nostra. Sini enim dua bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus BEG, æqualis angulo L; & recta EF, recta LB; & recta EG, recta LA, ponantur æqualia; perficiaturque



sciaturque parallelogrammum $E H$, quod æquale erit, & simile parallelogrammo $A B$. Cõueniat autem $H G$, producta cum $D E$, producta in I , & compleatur parallelogrammum $I K$. Iam uero intelligantur super bases $E H$, $I F$, $E K$, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super $A B$, $C D$, constructis, & sintque insistentes linea perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super $E H$, æquale esse ac simile solido super $A B$, ex defin. 10.



huius lib. cum plana illius æqualia sint et similia planis huius, per constructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda super $E H$, $I F$, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus $E F$, erectam super planum $I K$; Item plana basi opposita, quorum latera infima $G H$, $I M$, in eodem plano, cuius infimum latus $I H$; atque insistentes lineas $E G$, $F H$, $E I$, $F M$, &c. in eisdem rectis lineis $I H$, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super $I F$, parallelepipedo super $A B$. Quoniam uero parallelogramma $E H$, $I F$, æqualia sunt; & $E H$, æquale est ipsi $C D$: æqualia erunt $I F$, $C D$. Erit igitur, ut $I F$, ad $E K$, ita $C D$, ad $E K$: Est autem ut $I F$, ad $E K$, ita solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, quod solidum super $I K$, secetur plano super $E F$, erecto parallelo planis super $D K$, $I M$, erectis. Et eadem ratione, ut $C D$, ad $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$. cum solidum super $C K$, secetur plano super $D E$, erecto parallelo planis super $C N$, $F K$, erectis. Quare erit ut solidum super $I F$, ad solidum super $E K$, ita solidum super $C D$, ad solidum super $E K$; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super $I F$, & $C D$: Offensum est autem parallelepipedum super $I F$, æquale parallelepipedo super $A B$. Æqualia ergo erunt et parallelepipeda super $A B$, $C D$. Quod est ppositum.

CONVERTETUR quoque hac propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia, super æquales bases, in eadẽ sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadẽ altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; fient aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

31. undec.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32.

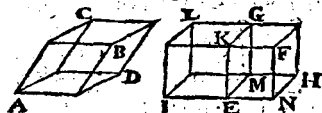
33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin. Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qd sit equalis angulo ENF.

45. primi.

Constituent autem parallelograma EF, IF, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est.



Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypothesi. Quare erit ut solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad solidum EFGH: Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

31. undec.

7. quinti.

25. undec.

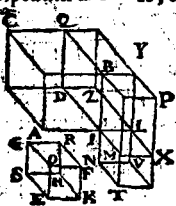
SCHOLION.

CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori equalis, & ducatur plenum basi parallelum; eritque ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abcissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda $ABCD, EFGH$, super bases similes AB, EF , in quibus latera homologa sint AI, EK . Dico proportionem parallelepipedi $ABCD$, ad parallelepipedum $EFGH$, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK . Producat enim AI , ad L , & sit IL , æqualis ipsi EK , uel GR ; Item DI , ad M , & sit IM , æqualis ipsi HK , uel GO ; Item BI , ad N , & sit IN , æqualis ipsi KF , uel GS . Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT , perficiatur parallelepipedum $TXIV$. Quo-



niam uero latera IL, IM , æqualia sunt lateribus GR, GO ; & anguli contenti æquales, cum angulus ILM , sit æqualis angulo AID , qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH , seu RGO : Erunt parallelogramma IX, GF , similia & æqualia. Eadem ratione similia erunt & æqualia LN, RS ; Item IT, GE . Quare tria plana IX, LN, IT , parallelepipedum $TXIV$, similia sunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE , parallelepipedum $EFGH$: Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppo-

oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipedum
 $T X I V, E F G H$, ex defin. 10. huius lib. Rursus comple-
 tis parallelogrammis $M B, B L, L M$, perficiatur parallelepi-
 pedum $M P B L$; Item completis parallelogrammis $I Y,$
 $D L, I Q$, perficiatur parallelepipedum $I Y Q Z$. Quo-
 niam igitur, ob similitudinem parallelepipedorum $A B C D,$
 $E F G H$, est ut $A I$, ad $E K$, hoc est, ad $I L$, ita $D I$, ad
 $H K$, hoc est, ad $I M$; & $B I$, ad $F K$, hoc est, ad $I N$. Vt au-
 tem $A I$, ad $I L$, ita est parallelogrammum $A D$, ad $D L$;
 Et ut $D I$, ad $I M$, ita parallelogrammum $D L$, ad $L M$; &
 ut $B I$, ad $I N$, ita parallelogrammum $B L$, ad $L N$. Igitur
 erit ut $A D$, ad $D L$, ita $D L$, ad $L M$; & $B L$, ad $L N$. Sed
 ut $A D$, basis ad $D L$, basin, ita est parallelepipedum $A D-$
 $C B$, ad parallelepipedum $D L Y Q$; & ut basis $D L$, ad ba-
 sin $L M$, ita parallelepipedum $D L Y Q$, ad parallelepi-
 pedum $L M B P$; Et ut basis $B L$, ad basin $L N$, ita parallelepi-
 pedum $L M B P$, ad parallelepipedum $L N T X$. Quare erit,
 ut parallelepipedum $A D C B$, ad parallelepipedum $D L Y Q$,
 ita parallelepipedum $D L Y Q$, ad parallelepipedum $L M-$
 $B P$, & parallelepipedum $L M B P$, ad parallelepipedum $L N-$
 $T X$. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue pro-
 portiones $A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X$, ideoque
 proportio primæ $A D C B$, ad quartam $L N T X$, hoc est, ad
 $E F G H$, erit triplicata proportionis primæ $A D C B$, ad secun-
 dam $D L Y Q$, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem $A D-$
 $C B$, ad $D L Y Q$, ita est basis $A D$, ad basin $D L$; Et ut
 $A D$, ad $D L$, ita est recta $A I$, ad $I L$, hoc est, ad $E K$. Igitur
 proportio parallelepipedi $A D C B$, ad parallelepipedum $E F-$
 $G H$, est triplicata proportionis homologorum laterum, ni-
 mirum $A I$, ad $E K$. Quapropter similia solida parallelepi-
 peda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum late-
 rum. Quod erat demonstrandum.

1. sexti.

31. undec.

32. undec.

1. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor linee rectæ continue
 proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum
 super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque
 descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad par-
 allelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quar-
 tam

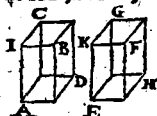
V 3 tam

tam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ linæ ad secundam, nimirū laterum homologorū.

35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

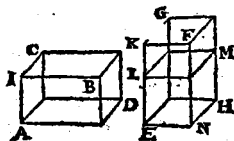
ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda $A D C B, E H G F$, super bases $A D, E H$. Dico bases $A D, E H$, & altitudines parallelepipedorum $A D C B, E H G F$, esse reciprocas, hoc est, esse ut $A D$, ad $E H$, ita altitudinem solidi $E H G F$, ad altitudinem



solidi $A D C B$. Sint enim primo insistentes linæ $A I, E K$, perpendiculares ad bases $A D, E H$, ita ut $A I, E K$, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines $A I, E K$, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases $A D, E H$, æquales, per ea, quæ ad finem propof. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis $A D$, ad basin $E H$, ita altitudo $E K$, ad altitudinem $A I$. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

Q V O D si altitudines $A I, E K$, inæquales fuerint; sit $E K$, maior, ex qua abscindatur $E L$, ipsi $A I$, æqualis; & per L , ducatur planum $L M$, parallelum basi $E H$, per scholion



propof. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida $A D C B, E H G F$; erit ut $A D C B$, ad solidum $E H M L$, ita $E H G F$, ad idem solidum $E H M L$: Vt. autem solidum $A D C B$, ad solidum

$E H M L$, ita est basis $A D$, ad basin $E H$, cum æquales ponantur altitudines $A I, E L$; Et ut solidum $E H G F$, ad solidum

$E H M L$.

EHML, ita est, eadem ratione, basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; Erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN; Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproce sunt bases, & altitudines.

1. sexti.

S E N T iam bases & altitudines reciproce. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cū æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

31. undec.

Q U O D si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; Vt autē basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; Et ut EK, ad EL, ita est KN, ad LN; Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; Erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

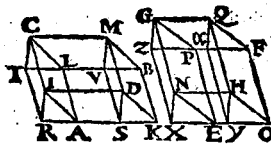
32. undec.

1. sexti.

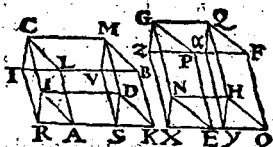
32. undec.

9. quinti.

S I D proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorū insistentes lineæ AI, KD, BM, LC, EN, OH, FQ, PG, nō sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autē a punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares



diculares NX , HY , $Q\alpha$, GZ ; connectanturque rectæ RS , TV , RT , SV ; XY , $Z\alpha$, XZ . $Y\alpha$: Eruntque perpendiculares RI , XN , parallelepipedorum altitudines, ex



defn. 4. lib 6. Dico rur-
sus, ut basis AB , ad ba-
sin EF , ita esse altitudinē
 XN , ad altitudinem RI .
Cum enim æqualia sint
solida $ABCD$, $EFGH$,
ex hypothese, sic autem

$ABCD$, æquale solido $RVCD$, eo quod habeant eandem
basin CD , eandemque altitudinem RI ; & $EFGH$, eadē
ratione, æquale solido $X\alpha GH$: Erunt & parallelepipeda
 $RVCD$, $X\alpha GH$, æqualia. Quare cum habeant insisten-
tes lineas perpendiculares ad bases CD , GH ; erit, ut iam
demonstratum est, ut basis CD , ad basin GH , hoc est, ut
basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad altitudinem RI .
Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocz.

S I N T iam bases atque altitudines reciprocz. Dico pa-
rallelepipeda esse æqualia. Cōstructa enim figura, ut prius;
Cum sit ut basis AB , ad basin EF , ita altitudo XN , ad alti-
tudinem RI ; Sit autē AB , ipsi CD , & EF , ipsi GH , equalis;
Erit quoque ut basis CD , solidi $RVCD$, ad basin GH ,
solidi $X\alpha GH$, ita altitudo XN , ad altitudinem RI . Qua-
re, cum XN , RI , sint insistentes lineæ, perpendiculares ad
bases CD , GH ; erunt, ut iam ostensum est, æqualia paral-
lelepipeda $RVCD$, $X\alpha GH$: Sunt autem hæc parallele-
pipeda parallelepipedis $ABCD$, $EFGH$, æqualia. Igitur
æqualia quoque erunt parallelepipeda $ABCD$, $EFGH$:
Idemque ostendetur, si insistentes lineæ unius parallelepi-
pedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius uero non.
Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorum
bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat osten-
dendum.

SCHOLION

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis pro-
positionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conveniunt
quoque

quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, uel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conscientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, uel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum uidelicet dimidia.

29. 30. uel
31. undec.

R V R V S, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conscientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedū ad parallelepipedū, ut basis ad basin. Atq; adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismaticum bases fuerint parallelogramma, uel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.

32. undec.
35. quinti

P R A E T E R E A, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituetur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

33. undec.
35. quinti

D E N I Q U E si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componetur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, uel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

34. undec.
35. quinti

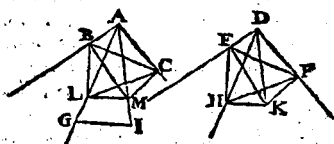
THEOR. 30. PROPOS. 35.

37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorū uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant,

sistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC , EDF , quorum uerticibus A , & D , insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG , DH , ita ut angulus BAG , angulo EDH , & angulus CAG , angulo FDH , sit equalis. A sumptis autem punctis G , H , in rectis AG , DH , demittan



tur ad plana, in quibus anguli BAC , EDF , existunt, perpendiculares GI , HK , incidentes in puncta I , K , & adiungantur rectæ IA , KD . Dico

angulos GAI , HDK , esse æquales inter se. Nā si AG , DH , sunt inæquales, auferatur a maiori AG , ipsi DH , æqualis linea AL ; & ex L , ad planum anguli BAC , perpendicularis demittatur LM . Quoniam igitur GI , LM , rectæ sunt ad planum anguli BAC , ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI . Quare LM , cadet in rectam AI . Ducantur iam ex punctis M , K , ad rectas AB , AC , DE , DF , perpendiculares MB , MC , KE , KF ; & connectantur rectæ BC , BL , LC , EF , EH , HF . Et quia LM , recta est ad planum anguli BAC , ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM , in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum rectæ

undec.

rectæ AL , æquale erat quadratis rectarum AM , ML :
 Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis rectarum
 AC , CM , cum & angulus ACM , rectus sit, ex constructione.
 Quadratum ergo rectæ AL , æquale est quadratis rectarum
 AC , CM , ML : At quadratis rectarum CM , ML , æquale est
 quadratum rectæ CL , cum angulus CML , rectus sit per defn. 3.
 huius lib. Igitur quadratum rectæ AL , æquale est quadratis
 rectarum AC , CL ; Ac proinde angulus ACL , rectus erit.
 Rursus quia quadratum rectæ AL , æquale est quadratis rectarum
 AM , ML : Est autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis
 rectarum AB , BM , cum angulus ABM , per constructionem,
 sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL , æquale est quadratis
 rectarum AB , BM , ML : At quadratis rectarum BM , ML , æquale
 est quadratum rectæ BL , quod & angulus MBL , sit rectus
 ex defn. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL , æquale
 est quadratis rectarum AB , BL ; proptereaque angulus ABL ,
 erit rectus. Non aliter ostendentur recti, anguli DFH ,
 DEH . Quoniam igitur anguli ABL , $L'AB$, trianguli ABL , æquales
 sunt angulis DEH , HDE , trianguli DEH ; suntque latera
 AL , DH , æqualia; Erunt & reliqua latera AB , BL ,
 reliquis lateribus DE , EH , æqualia. Eodem argumento
 æquales erunt rectæ AC , CL , rectis DF , FH . Quare cum
 latera AB , AC , trianguli ABC , æqualia sint lateribus
 DE , DF , trianguli DEF ; & anguli cōtenti BAC ,
 EDF , æquales, ex hypothesi; erunt & bases BC , EF , inter
 se, & anguli ABC , ACB , angulis DEF , DCE , æquales:
 Sunt autem & toti anguli ABM , ACM , totis angulis
 DEK , DFK , æquales, cum omnes sint recti. Igitur & reliqui
 anguli MBC , MCB , reliquis angulis KEF , KFE , æquales
 erunt; Ac propterea cum & latera BC , EF , sint ostensa
 æqualia; erunt latera BM , CM , lateribus EK , FK , æqualia.
 Quia igitur latera AC , CM , trianguli ACM , æqualia sunt
 ostensa lateribus DF , FK , trianguli DFK ; & anguli ACM ,
 DFK , sunt recti; erunt & bases AM , DK , inter se æquales.
 Cum autem æquales sint ostensa rectæ BL , EH ,
 erunt etiam earum quadrata æqualia: Quia uero quadratum
 rectæ BL , æquale est quadratis

47. primi.

47. primi.

47. primi.

48. primi.

47. primi.

47. primi.

47. primi.

48. primi.

26. primi.

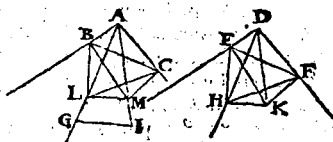
4. primi.

26. primi.

4. primi.

47. primi.

dratis rectarum BM, ML ; & quadratum rectæ EH , quadratis rectarum EK, KH , quod anguli BM, EK, H , recti sint, ex def. 3. huiuslib. Erunt & quadrata rectarum



BM, ML , æqualia quadratis rectarum EK, KH . Abiatis ergo quadratis rectarum BM, EK , quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK ostē

se sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK , æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK , æquales. Quam obrem, cum latera AL, AM , trianguli ALM , æqualia sint lateribus DH, DK , trianguli DHK , & basis LM , basi HK , æqualis; erunt & anguli L, A, M, HDK , æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

primi.

COROLLARIUM.

ITAEQUE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrumque. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF , ponuntur æquales, & sublimes æquales AL, DH , constituunt angulos æquales L, A, B, HD, E ; Item LAC, HDE ; demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK , esse æquales.

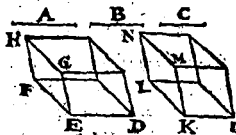
38.

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum uero prædicto.

SINT

S I N T continue proportionales tres rectæ A, B, C. Con-
stituanturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis qui-
buscunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A, &
EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem
parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedū
DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut
ex ipsis fieri. Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K,
fiat solidus angulus K, æqua-
lis solido angulo E, ex tribus
angulis planis IKL, IKM,
LKM, qui æquales sint tri-
bus DEF, DEG, FEG;
ita ut rectæ IK, KL, KM,
æquales sint mediæ lineæ B.



25. undec.

Completis uero parallelogrammis IL, LM, MI, perficia-
tur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur sub linea
B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse soli-
do IN. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG,
(quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C,
sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales:
Eunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod
latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam
uero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum uer-
tices insistant sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ qua-
les angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex cō-
structione, utrumque utrique; Eunt perpendiculares ex
F, L, ad plana basium DG, IM, demisse, nimirum altitudi-
nes parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM,
inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. Quare
parallelepipeda DH, IN, cū habeant bases DG, IM, æqua-
les, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si
tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod
erat demonstrandum.

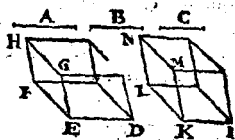
14. sexti.

31 undec.

SCHOLIUM.

V I C I S S I M quoque, si parallelepipedum ex tribus li-
neis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi equi-
angulo a media linea descripto: Eunt tres rectæ continue pro-
portionales.

portionales. Sit enim parallelepipedum DH , descriptum ex rectis A, B, C , ut dictum est, æquale sibi æquiungulo parallelepipedo IK , descripto a media B . Dico tres A, B, C , esse continue proportionales. Nam,



velut prius, ostendentur eorum altitudines ex E, I , demisse esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DG, IM , æquales, per ea, quæ

ad finem propof. 31. huius lib. demonstravimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM , ex constructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit ut DE , ad IK , ita KM , ad EG . Quapropter cum DE , ipsi A ; & IK , ipsi B ; & EG , ipsi C , sumpta sit æqualitas; Erit quoque ut A , ad B , ita B , ad C . Quod est propositum.

sexi.

39.

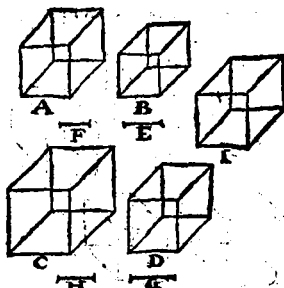
THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D ; Vt quidem A , ad B , ita C , ad D ; constituenturque super A , & B , duo parallelepipeda A , & B , similia similiterque descripta; Item super C , & D , alia duo C , & D , similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D , proportionalia; Vt quidem solidum A , ad solidum B , ita solidum C , ad solidum D . Inveniantur enim per scholion propof. 11. lib. 6. duabus rectis A, B , aliarum duarum continue proportionales E, F ; Item duabu

duabus C, D, alię duę G, H Quoniam igitur sunt quatuor li-

neę A, B, E, F, & qua-
tuor lineę alię C, D, G,
H, quę binę in eadem
ratione sumuntur, erit
ex æquo, ut A, ad F,
ita C, ad H. Vt au-
tem A, ad F, ita est so-
lidum A, ad solidum
B; Et ut C, ad H, ita
solidum C, ad solidum
D, ex coroll. propos.
33. huius lib. Igitur erit
ut solidum A, ad soli-
dum B, ita solidum C,
ad solidum D. Quod est propositum.



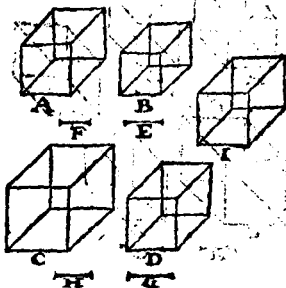
SYNTIAM e contrario solida A, B, C, D, proportiona-
lia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tri-
bus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I,
super quam describatur parallelepipedum ipsi D, uel C, simi-
le sitiliturque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad
rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est
ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad
solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponit-
tur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut soli-
dum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D.
Ac idcirco equalia erunt solida I, & D. Quę cū sint similia,
similiterq; descripta, continebuntur planis equalibus & simi-
libus, per defn. 10. huius lib. Sed plana equalia & similia
habent latera homologa equalia, per lemma propos. 22. lib.
6. Igitur rectę I, & D, equalēs sunt, Ac propterea erit,
ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Po-
sita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut
recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si
quatuor rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat
demonstrandum.

BREVIVS tota hęc propositio demonstrabitur cum
Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam B,
ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A,
ad

12. sexti.
7. undec.

9. quinti.

ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit
undec. proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis re-
cte A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum



D, triplicata proportio-
nis recte C, ad rectam
D: Erunt proportio-
nes solidi A, ad solidū
B, & solidi C, ad soli-
dum D, equales; quā-
doquidē triplicatae sunt
proportionum equa-
lium, nempe recte A,
ad rectam B; & recte
C, ad rectam D. Quod
est primum. Rursum
ponatur secundo esse,

ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D.
Dico esse quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad
rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B,
undec. triplicata proportionis recte A, ad rectam B; Item propor-
tio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis recte C,
ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C,
ad D, equales; quandoquidem earum proportionēs tripli-
cate, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidū
D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIUM.

EODem modo, si fuerint tres recte proportionales, erūt
& parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, propor-
tionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur
bis, habebuntur quatuor recte proportionales. Igitur & qua-
tuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur
solidum secunda linea aequale sit solido tertiae lineae; & linea
secunda aequalis tertiae lineae; perspicuum est, quod pro-
ponitur.

TOTA vero haec propositio conuenit etiam prismatis, quo-
rum duo plana aduersa aequalia, sunt vel triangula, vel paral-
lelogramma, ut Campanus ait. Nam additis prismatis, quae
singula

singula singulis sunt equalia, exurgens parallelepipedum, quod hic est demonstratum, proportionalia erunt. Cum igitur prisma, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem, perspicuum est, quod proponitur.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fueris & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit, in communem sectionem caderet planorum ducta perpendicularis.

PLANUM AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD. Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur, quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG, connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defn. 4. huius lib. atque ad rectam GE, per 3. defn. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defn. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLION.

Hæc est demonstratio Theoræ. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, ducta in planum AB,

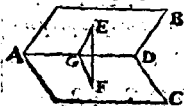
us. quinti.

13.

2. primi.

17. primi.

AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in



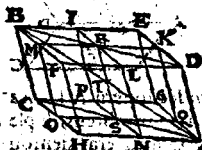
communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem; ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defn. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra

planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, dua perpendiculares EF, EG. Quod fieri nequit, ut in scholio propos. 13. huius lib. demonstravimus.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo fecabunt.

SINT parallelepipedum AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS; Ducatur item diameter AB.



Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo sectare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC, considerentur duo trianguli AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS,

trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli ASQ, CSO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO duobus

duobus sunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS, vnā rectā
lineam constituent. Eodem modo ostenduntur esse æquales
BR, DR, & vnā ex eis componi lineam rectā. Rursus quia
vtrāq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob paral-
logramma AF, FC; ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, &
æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniun-
gentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimi-
diæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ
sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, idēq;
se mutuo secabunt, in puncto uidelicet T. Cum autem duo
anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus an-
gulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR:
Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR,
æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bisariam in
T. Si igitur solidi parallelepipedī eorū, quæ ex aduerso, &c.
Quod erat ostendendum.

14. primi.

9. undec.

33. primi.

7. undec.

29. & 15.

primi.

26. primi.

COROLLARIUM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se
mutuo bisariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in
quo bisariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

SCHOLIUM.

Hic theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod
ad propof. 34. primi lib. demonstrauimus, uidelicet.

Si solidum parallelepipedum plano secetur
per centrum: bisariam secabitur solidum ab ip-
so plano. Et si solidum parallelepipedum plano
secetur bisariam: per centrum transibit ipsum
planum.

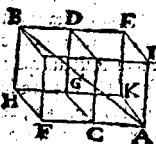
SECRETUM parallelepipedum AB, plano CD, per cen-
trum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G:
Dico parallelepipedum bisariam secari. Sit enim primo planū
ED, oppositū planis AE, BF, parallelū. Et quia plana parallela
BF, DC, EA, secant rectas quaslibet proportionaliter, secantur atq;

17. undec.

X 2

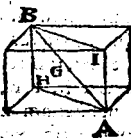
BA.

5. undec.



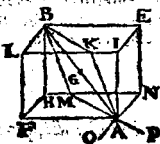
TRANSAT secundo planum secans $A I B H$, per diametros $B I$, $A H$, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G ; immo per totam diametrum $A B$, cum $A B$, in plano sit parallelarum $A H$, $B I$. Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.

undec.
8. undec.



TERTIO planum secans $A K B M$, neque sit aduersus planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A , & B , planorum $A H$, $B I$. Quoniam igitur plana parallela $A H$, $B I$, secantur plano $A K B M$; erunt communes sectiones $A M$, $B K$, parallela. Similiter parallela erunt $A K$, $B M$, cum sint communes sectiones planorum parallelorum $A L$, $B N$, factae a plano $A K B M$. Quare parallelogrammum est $A K B M$; ideoq; tam recta $A K$, $B M$, quam re-

6. undec.



14. primi.

10. undec.

15. primi

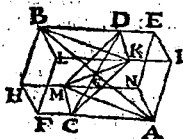
4. primi.

4. sexti.

cta $A M$, $B K$, inter se erunt aequales. Quia ergo latera $B K$, $B L$, trianguli $B K L$, aequalia sunt lateribus $A M$, $A N$, trianguli $A M N$; & angulus $K B L$, angulo $M A N$, equalis. (Productis enim $N A$, $M A$, ad O , P , erunt $A O$, $A P$, rectis $B L$, $B K$, parallela; ac proinde aequales anguli erunt $O A P$, $L B K$. Cum igitur $O A P$, aequalis sit angulo $M A N$; aequales quoque erunt anguli $K B L$, $M A N$.) Erunt bases $K L$, $M N$, inter se, & anguli $B K L$, $B L K$, angulis $A M N$, $A N M$, aequales; & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula $B K L$, $A M N$, cum latera habeant circa equos angulos proportionalia. Quoniam uero recta $K L$, recta $M N$; & angulus $B K L$, angulo $A M N$; & angulus $K B L$, angulo $M A N$, est equalis, ut ostendi-

ostendimus; erit & reliqua IK , reliqua HM ; & reliquus angulus BKI , reliquo AMH ; & reliquus KE , reliquo MAF , equalis. (Est. n. tota LI , toti NH , equalis, & ita anguli BKL , BKI , quam anguli AMN , AMH , duobus rectis aequales; & totus angulus LEB , toti angulo NAF , equalis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN .) Sunt autem & latera BE, EI , lateribus AF, FH , equalia; & anguli BEI , EIK , angulis AFH, FHM , ob parallelogramma LE, FN . Igitur quadrilaterum $BKIE$, & aequilaterum, & equiangulum est quadrilatero $AMHF$; Ac propterea aequale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo equalia erunt & similia triangula BHM, AIK ; & quadrilatera $AKLF, BMNE$; cum inter se sint & aequilatera & equiangula. Quapropter solidum contentum planis $AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF$, aequale erit solido contento planis $BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAI$, per 10. defn. huius libri, cum his planis illa sint similia & equalia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB , sectum est plano $AKBM$, per centrum G , bifariam.

POSTREMO planum secans CD , neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per ullos angulos eorum ductum, sed ut cunque secet plana opposita $AHBI$. Ostendemus autem, ut prius, planum secans CD , esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM , quam rectas CM, DK , esse aequales. Ducantur in parallelogrammo CD , diametri CD, KM ; connectanturque rectae AM, BK , quae parallelae erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AH, BI , factae a plano per rectas AB, KM , ducto. Quoniam igitur AF, BE , parallelae ipsi LI , ob parallelogramma AL, LE , inter se sunt parallelae; Et sunt AB, CD , in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G ; In solo enim centro G , recta AB , per hypothesein, secat planum CD , in quo existit recta CD . Simili argumento, cum AM, BK , sint ostensa parallelae; erunt AB, MK , in eodem cum illis

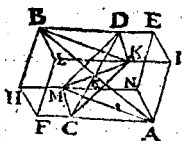


16. undec.

9. undec.

7. undec.

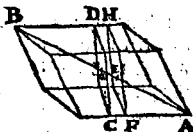
illis plano, seq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri
 CD, KM, per centrum G, transibunt, ibiq; se mutuo secabunt;
 atq; adeo bisariā, ter ea, quæ ad propof. 34. lib. 1. ostendimus.
 Quia ergo latera BG, GD, triāguli BGD, equalia sūt laterib;
 AG, GC, triāguli AGC; & angulus BGD, equalis angulo
 AGC; Erit & basis BD, equalis basi AC. Eodem argumen
 to æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera
 BD, DK, KB, triāguli BDK, equalia sint tribus lateribus



AC, CM, MA, triāguli ACM;
 Erunt, per ea, quæ ad propof. 8. lib. 1
 docuimus, anguli illius angulis huius
 æquales: Est autem totus DBL, toti
 CAN, equalis, ob similitudinem pa
 rallelogrammorum BI, AH. Igitur
 & reliquus KBL, reliquo MAN,
 erit equalis. Quoniam igitur latera BK, BL, triāguli BKL,
 equalia sunt lateribus AM, AN, triāguli AMN, & angu
 lus KBL, angulo MAN, equalis; Erit & basis KL, basi
 MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur
 æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli
 BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare
 quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterū
 est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum sin
 gula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli
 angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est equalis, erit &
 reliqua IK, reliquæ HM, equalis; Eademque ratione reli
 qua DF, reliquæ CF, equalis erit; Ac propterea quadrilate
 rum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed
 & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint an
 gulis CFH, FHM; propter similitudinem parallelogram
 morum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM,
 HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alter
 ni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrila
 tera DEIK, CFHM, equalia sunt & similia. Non aliter
 ostendemus, equalia esse & similia quadrilatera ACKI,
 BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateri
 bus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quam
 obrem solidum contentum planis CKLF, FHCM, CKDM,
 MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defn. huius lib. æquale est so
 lido

lido cōtēto planis $DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMN, A, AIEN$; cum hisce illa sint demonstrata & equalia & similia. Parallelepipedum igitur AB , sectum est per centrum G , plano CD , bisariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB , plano CD , bisariam. Dico planum CD , per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G , in quo planum CD , secat diametrum AB , diuidere diametrum AB , bisariam. Si enim diameter AB , in G , non diuiditur bisariam, diuidatur bisariam in E , ut sit E , centrum paral-



lelepipedi. Si igitur per E , ducatur planum FH , plano CD , parallelum, secabitur parallelepipedum AB , bisariam plano FH , ut demonstratum est. Ponitur autē & bisariam secati plano GD ; igitur solida CB, FB , cum sint dimidia parallelepipedi AB , inter se equalia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Nō ergo aliud pūctū, prāter G , diuidet diametrum AB , bisariā; Ac pinde G , cētū erit parallelepipedi. Qd demonstrandū erat.

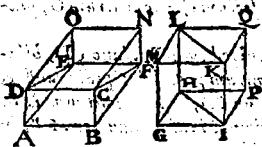
THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: AEqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis $AB C D E F, GH I K L M$, quorū illud basim habeat parallelogrammū $AB C D$, hoc uero, triāgulū $G H I$; sitq; parallelogrammū $A C$, triāguli $G H I$, duplū. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur. n. parallelepipeda $A N, G Q$; Quod quidē fiet, si plana triangulorū extendantur, perficianturq; parallelograma $B N, A O; G P, M Q$. Si enim connectantur rectæ $N O, P Q$, constituta erūt duo parallelepipeda $A N, G Q$, eiūsdē altitudinis cū prismatis. Nam plana horum solidorū opposita esse paral-

parallelis, facile colligetur ex propof. 14. huius lib. Quoniam igitur parallelogrammum GP , duplicum est trianguli GHI ; Ponitur autem & parallelogrammum AC , eiusdem trianguli GHI , duplicum: æqualia erunt parallelogramma AC , GP . Quare parallelepipedum AN , GQ , eiusdem al-



titudinis super æquales bases AC , GP , inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata $ABCDEF$, $GHIKLM$, (Nam parallelepipedum AN , GQ , per diametros CF , DE , HI , LK , planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICUUM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis dumtaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipedum compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum $ABCD$, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE , BCF . Eset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM XII.

Et Solidorum secundum.



THEOR. I. PROPOS. I.

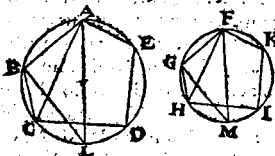
I.

QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, ut a diametris quadrata.



IN T. duo polygona similia $ABCE$, $F G H I K$, descripta in circulis, quorum diametri AL , FM . Dico ita esse polygonum $ABCE$, ad polygonum $F G H I K$, ut quadratum diametri AL , ad quadratum diametri FM . Subtendantur enim angulis æqualibus ABC , $F G H$, rectæ AC , $F H$, & connectantur rectæ BL , GM . Quoniam igitur

ob similitudinem polygonorum est ut AB , ad BC , ita FG , ad GH ; erunt triangula ABC , $F G H$, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC , $F G H$, habeant latera proportionalia: Est autem angulus ALB , angulo ACB ; & angulus FMG , angulo $F H G$, æqualis. Igitur & anguli ALB , FMG , æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL , FGM , æquales sint, nempe recti in semicirculis existentes, erunt & reliqui BAL , FGM , æquales. Quare erit ut AL , ad AB , ita FM , ad FG ; & permutando, ut AL , ad



6. sexti.

21. tertij.

31. versij.

32. primi.

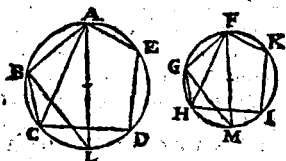
4. sexti.

A L, ad F M, ita A B ad F G. Igitur est ut quadratum ex A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, super A B, ad polygonum F G H I K, super F G; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia inter se sunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCULI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

S I N T duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circum A B C D, ad circum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circum A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si .n. esset æqualis, haberet circulus A B C D, ad circum E F G H, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circum E F G H, ut quadratum diametri



A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine scilicet K, ita ut circulus E F G H, equalis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circumlū descripti, ut ad ppos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quàm dimidium circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circumlū in L, quæ parallela erit ipsi E F, ut ad ppos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis H E, G F, productis in T, & V. Quia ergo triangulū E L F, dimidium est parallelogrammi T E F V, maius erit triangulū E L F, quàm dimidium segmenti circuli E L F. Eadē ratione erunt reliqua triangu-

la maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quàm dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL , LF , & c. secentur bis f a, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quàm dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam uero, si a circulo $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum $EFGH$; & a reliquis segmentis plus quàm dimidiū, nempe triagula ELF , FMG , & c. atque in hūc modum semper fiat detractio; relinquitur tantum minor magnitudo, quàm K , excessus inter circulum $EFGH$, & magnitudinem I . Sine iam circuli segmenta reliqua EL , LF , FM , & c. simul supra minora, quam magnitudo K . Cum igitur circulus $EFGH$, æqualis ponatur magnitudinibus I , & K , simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I , & K , ipsa magnitudo K , quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonū $ELFMGNHO$, maius reliqua magnitudine I . Inscribatur in circulo $ABCD$, polygonum $APBQCRDS$, simile polygono $ELFMGNHO$. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC , ADC , bisaria secentur in B , & D ; & rursus circumferentiæ AB , BC , CD , DA , bisaria in P , Q , R , S ; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentiā $ABCD$, in quot distributa ē circumferentiā $EFGH$. Nā iunctis rectis AP , PB , BQ , & c. erit figura inscripta similis figuræ $ELFMGNHO$, ut patet. Quoniam igitur est polygonū $APBQCRDS$, ad polygonū $ELFMGNHO$, ut quadratū diametri AC , ad quadratum diametri EG , hoc est, per hypothesin, ut circulus $ABCD$, ad I : Est aut polygonum $APBQCRDS$, minus circulo $ABCD$: Igitur & polygonum $ELFMGNHO$, minus erit quam I . Ostensum aut est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I , circulo $EFGH$.

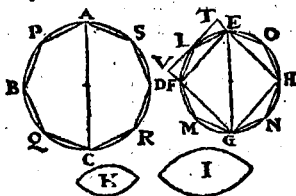
1. decimi.

1. duodec.

14. quinti.

S: r secundo magnitudo I , maior circulo $EFGH$. Cum ergo ponatur circulus $ABCD$, ad I , esse ut quadratū diametri AC , ad quadratum diametri EG ; erit & conuertēdo I , ad circulum $ABCD$, ut quadratum diametri EG , ad quadratum diametri AC . Ponatur ut I , ad circulum $ABCD$, ita circulus $EFGH$, ad magnitudinē aliquā, nempe ad K . Et quia I , maior ponitur circulo $EFGH$, maior quoque erit circulus

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: Sed neq; minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G,



ita circulus A B C D, ad I, sic autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad qua-

dratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

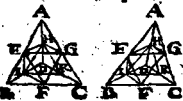
COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. Quoniam ita circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, uertex D, Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & uertices H, D, nec non in duo solida EBF GH I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius uero basis est triangulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communem, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis uertex D, in sublimi, nec non eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis.



Cum enim latera A D, B D, trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter ærunt H I, A B, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, B D; & E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. Sunt autem & rectæ F G, H I, cum parallelæ sint ipsi A B, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt G H, F I, cum sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H B B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam uero rectæ H E, H G, rectis D B, D C, sunt parallelæ erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. Proportionalia igitur sunt latera trianguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia per coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo A R G H, pyramidi A B C D, similis est, per defin. 9. huius lib. Rursus quia rectæ H I, H K, rectis A B, A C, sunt parallelæ, erunt anguli I H K, B A C, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli H I K, A B C; & H K I, A C B. Quare latera trian-

2. sexti.

9. undec.

10. undec.

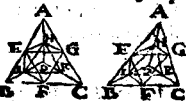
4. sexti.

10. undec.

guli

11. *sexti.*

guli $H I K$, lateribus trianguli $A B C$, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum $H I K$, triangulo $A B C$, simile est: Sunt autem & triangula $D H I$, $D I K$, $D K H$, triangulis $D A B$, $D B C$, $D C A$, similia, per idem coroll. propof. 4. lib. 5. Pyramis ergo $H I K D$,



similis est quoque eadem pyramidi $A B C D$, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triangula $A H E$, $H D I$, similia sunt trian-

12. *sexti.*

gulo $A D B$, ut ostensum est ex coroll. propof. 4. lib. 6. ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales $A H$, $H D$, constituta, ipsa erunt æqualia, per lemma propof. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula $A H G$, $H D K$, cum similia sint ostensa triangulo $A D C$, & constituta super æquales rectas $A H$, $H D$. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula $A E G$, $H I K$, cum similia sint ostensa triangulo $A B C$, & super rectas posita $A E$, $H I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $A E I H$. Non secus æqualia erunt & similia triangula $E H G$, $I D K$, cum sint ostensa similia triangulo $B D C$, & habeant rectas $H E$, $D I$, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $H E I D$. Pyramides igitur $A E G H$, $H I K D$, æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia trian- gula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

34. *primi.*

34. *primi.*

34. *primi.*

15. *undec.*

34. *primi.*

$R V R S V S$, quia rectæ $E H$, $H G$, $G E$, æquales sunt, & parallelæ rectis $B I$, $I F$, $F B$, ob parallelogramma $E H I B$, $F G H I$, $B F G E$; erunt triangula $E H G$, $B I F$, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propof. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: Sunt autem & parallelæ, cum $E H$, $H G$, per quas ducitur planum $E H G$, parallelæ sint rectis $B I$, $I F$, per quas planum $B I F$, ducitur. Igitur solidum $B I F G H E$, contentum duobus triangulis $E H G$, $B I F$, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis $E G F B$, $B E H I$, $I F G H$, prima est, ex definitione. Eodem modo prima ostendetur solidum $C F G H I K$. Cum enim rectæ $F C$, $C G$, $G F$, æquales sint, & parallelæ rectis $I H$, $H K$, $K I$, ob parallelogram-

logramma $CFIK$, $CGHK$, $EGHI$; erunt triangula CFG , HIK , æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallela, quod rectæ CF , CG , per quas ducitur planum CFG , parallelæ sint rectis KI , KH , per quas planum KIH , ducitur. Igitur solidum $CFGHIK$, contentum duobus triangulis CFG , KIH , ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis $CFIK$, $KHGC$, $IFGH$, prisma est. Quoniam uero prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCE , HIK ; & parallelogrammum $EBFG$, basis illius, duplum est trianguli CFG , basis huius, per scholion propos. 41. lib. 1. ipsa inter se æqualia erunt.

15. undec.

DENIQUE quia prisma $EBFGHI$, maius est pyramide $EBFI$, totum parte; Est autem pyramis $EBFI$, æqualis & similis pyramidi $AEFH$, necnon pyramidi $HIKD$, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorū: Maiora erunt prismata $EBFGHI$, $CFGHIK$, pyramidib⁹ $AEFH$, $HIKD$. Ac proinde illa quidē dimidiū pyramidis $ABCD$, excedent, hæc uero a dimidio eiusdē deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

40. undec.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habētes bases; sit autē illarū utraq; diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodē modo diuisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis

basim,

basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

S I N T duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MH, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramides vtræque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM,



MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQ RSTV; vt vult propositio præcedens. Eodemque modo intelligatur, et se diuise pyramides factæ AILM,

MNOD, EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ; eo quod utraque linea sit diuisa bifariam; sint autem triangu-
la ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangu-
la EFG, RQG, ex coroll. propo-
s. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG: Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQ RSTV, ut mox ostendemus, atque adeo ita prismata IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, uidelicet IBKLMN, ad unum prisma PFQRST, ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQ RSTV. Igur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidū ad bases

22. sexti.

12. quinti.

ad bases EPR , STV , harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC , basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS , quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EHG . Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EHG , ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EHG : Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis EHG , ita prismata tam pyramidis $AILM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis $MNOD$, ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis EHG , ita omnia prismata in pyramidibus $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. simul, ad omnia prismata in pyramidibus EHG , $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudine sint equalia; Erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EHG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide EHG . Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinsi

L E M M A.

Quod autem sit LKC , ad RQS , ita prismata $CKLMNO$, ad prismata $GQRSTV$, ita ostendemus. Intelligentur ex uerticibus D, H , ad bases ABC , EHG , demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, EHG . Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , secant duas rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter; setatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur a plano STV . Quare cum totæ perpendicu-

17. undec.

Y lares

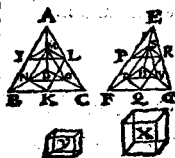
lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata $CKLMNO, GQRSTV$, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG , per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis $ABCD, EFGH$, quarum bases triangula ABC, EFG : Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC , ad basin EFG , ita pyramis



$ABCD$, ad solidum X ; quod vel minus erit, vel maius pyramide $EFGH$. Sit primo minus, magnitudinē Y . Diuidatur pyramis $EFGH$, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide

$EFGH$, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide $EFGH$, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata $PFQ RST, GQRSTV$, quæ maiora sunt dimidio pyramidis $EFGH$: Item a reliquis pyramidibus $EPRS, STVH$, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y , excessus pyramidis $EFGH$, supra solidum X . Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis $EFGH$, æqualis ponatur solidis X, Y ; erunt reliqua prismata in pyramide $EFGH$, maiora solido X . Diuidatur pyramis $ABCD$, in duas pyramides æquales, & duo pri-

mati

3. duodec.

1. decimi

mata æqualia ; & eodem modo factæ pyramides A I L M, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia ; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, a 1 omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidū X : Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quā tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quam solidum X. Ostensa uero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est, solidum X, pyramide EFGH.

4. duodec.

14. quinti

14. quinti

7. quinti.

14. quinti.

14. quinti.

Sic secundo solidū X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, ut est basis, ab basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur, ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidū X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solido X, æqualē: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim vnus altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ, lineæ; Eritq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo cōstituta. Sed sic quoq; erat ad totā pyramidem. Pyramis ergo cōstituta æqualis

Y 2 æqualis

aqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.

C O R O L L A R I U M.

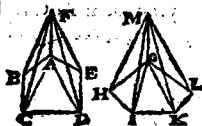
Hinc fit, pyramides eiusdem altitudinis (super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item sequitur, e conuerso pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendimus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando usi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

T H E O R. 6. P R O P O S. 6.

S V B eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

S I N T pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia, erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. Quia uero est, ut basis ABC, ad basin ACD,



ita pyramis ABCF, ad pyramidem A C D F; Erit componendo ut basis ABCD, ad basin A C D, ita pyramis A B C D F, ad pyramidem A C D F: Sed rursus est ut basis

A C D, ad basin A D E, ita pyramis A C D F, ad pyramidem A D E F. Igitur ex æquo ut basis ABCD, ad basin A D E, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem A D E F. Componendo ergo erit ut basis A B C D E, ad basin A D E, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem A D E F. Simili argumento erit ut basis G H I K L, ad basin G K L, ita pyramis G H I K L M,

K L M, ad pyramidem G K L M; Et conuertendo ut basis G K L. ad basin G H I K L, ita pyramis G K L M, ad pyramidem G H I K L M. Rursus quoniā est, ut basis A D E, ad basin G K L, ita pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erit quatuor bases A B C D E, A D E, G K L, G H I K L, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M, ut in hac formula uides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex aequo, erit ut basis A B C D E, ad basin G H I K L, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M; Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D E	A B C D E F
A D E	A D E F
G K L	G K L M
G H I K L	G H I K L M

5. duodec.
boni.

SCHOLIUM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygonae latera habent multitudine aequalia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primum due pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K, quarum illius basis sit polygonae, nempe pentagonae, huius uero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin.



Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero aequales diuisa. Quoniam uero est, ut basis A B C, prima quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Et eodem modo, ut basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem: Erit ut basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, septima quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quanti

5. duodec.

24. quinti

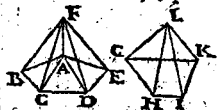
tas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $AB-
CDE$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quanti-
tatem, ut modo est ostensum: & ut basis ADE , quinta quan-
titas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis ADE ,



EF , sexta quantitas, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem.
Erit etiam ut basis $ABCDE$, pri-
ma quantitas cum quinta, ad basin
 GHI , secundam quantitatem, ita

pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem
 $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eo-
dem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula
in basi polygonae. Cum autem, ut demonstratum est, sit ut ba-
sis polygonae $ABCDE$, ad basin triangularem GHI , ita pyra-
mis $ABCDEF$, ad pyramidem $GHIK$; Erit quoque con-
uertendo, ut basis GHI , ad basin $ABDE$, ita pyramis $GH-
IK$, ad pyramidem $ABCDEF$. Quam ob rem duae pyramides
qualibet, quarum unus basis est polygonae, alterius triangula-
ris, suis basibus sunt proportionales, undecunque incipiat.
Quamvis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyra-
mide, ut ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit
initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut di-
ctum est.

SBD iam sint duae pyramides eiusdem altitudinis $ABC-
DEF$, $GHIKL$, quarum bases sint polygonae, sintque plura
latera in una base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem

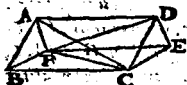


ad pyramidem, ut est basis ad ba-
sin. Resoluto enim polygono $AB-
CDE$, in triangula ABC , ACD ,
 ADF , erit pyramis eius in totidem
diuisa pyramides. Quia vero, ut

iam est demonstratum, est ut basis ABC , triangularis prima
quantitas, ad basin $GHIK$, polygonam, secundam quantitatem;
ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIKL$,
quartam quantitatem; & ut basis ACD , quinta quantitas, ad
basin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ACDF$, sex-
ta quantitas, ad pyramidem $GHIKL$, quartam quantitatem.
Erit etiam ut basis $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad ba-
sin $GHIK$, secundam quantitatem, ita pyramis $ABCF$, ter-
tia

æquales inter se, triangulares bases habentes.

S i t prisma $ABCDEF$, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF , DCE . Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ductantur in tribus parallelogramis tres diametri, nempe AC , in $ABCD$; CE , in $BCEF$; FD , in $ADEF$. Quoniam igitur



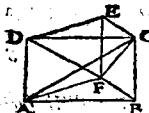
triangula ABC , ADO , æqualia sunt; estque ut basis ABC , ad basin ADC , ita pyramis $ABCF$, ad pyramidem $ADCF$, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F , uertice ad planum $ABCD$, demissam; Erunt & pyramides $ABCF$, $ADCF$, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides $ADFC$, $EFDG$, super æquales bases ADF , EFD , constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C , ad planum $ADEF$, demissa. Est autem pyramis $ADCF$, eadem pyramidi $ADFC$, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC , & triangulis ADF , ACE , DCF ; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF , & triangulis ADC , ACE , DCF . Igitur tres pyramides $ABCF$, $ADCF$, $EFDC$, seu $CDEF$, (quæ eadem est pyramidi $EFDG$, cum eam $EFDG$, quam CD , EF , contineatur planis CDE , EFD , DCF , FCE , totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma $ABCDEF$, in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. I.

H i n c colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basin, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

S i t enim primum pyramis $ABFC$, triangularem habens basin ABF , & prisma $ABCDEF$, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF . Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis.

prismatis. Nam si ducatur recta D F, erit p-isma, diuisum in tres pyramides, equales ABCF, ADCF, CDBF; ut demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis A B F C, (cum hac illi sit aequalis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, F C A, A B C, C B F), tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, aequalis sit cuiunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABF, constituta, ex coroll. propof. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse tertiam partem prismatis.



7. duodec.

Si r. secundo pyramis ABCDE, cuius, basim rectilineum quodlibet A B C D, quolibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero aequalia ADB, BCD, BHF, FGH; erit prisma, totidem prismata bases habentia triangularia diuisum. Ducis ergo rectas A H, B H, D E, C F; erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD; Item pyramis BCDH, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit, ut pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDH, ad prisma CDHGFB; Ac propterea ut, una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDH, simul tertia pars constituent prismatis ABCDEFGH. sunt autem pyramides ADBH, BCDH, equales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basim, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallelâ, sunt aequales, ex coroll. propof. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDH, BCDE, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, aequalis sit cuiunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propof. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habeat basim multilateram, eandemque altitudinem.

Quod si basim pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangularia. Vnde singulae pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiae partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hae pyramides aequales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

B o d u m modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basim

12. quinti

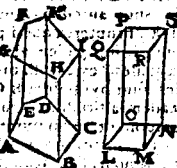
sem basi, & altitudinem, altitudini pyramidis equalem. Nam eius modi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propof. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem;

SCHOLIUM. I.

Ex dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

S V B eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases; inter se sunt, ut bases.

Q V A M V I S enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec nō de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus aniverse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygonæ, quamvis plura latera seu anguli in vnus base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis $ABCDEF GHIJ$ & $KLMNOPQRS$, quarum bases sint figura multilateræ. Dico, ut est basis $ABCDE$, ad basim $L M N O$, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi apponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgunt duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis, habentes easdem bases: Ac prinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propof. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propofitum.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIUM. II.

VND $\square$ prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quae aequales ponuntur, vel certe una & eadem.

CONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, ibi eadem sunt altitudine. Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conversum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLION. II.

CETERUM tam ea, quae in priori corollario, quam illa, quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia, & similia. Quod dixerim, ut hallucinaveris in prismate constante duobus triangulis parallelis, aequalibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, ut in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basim, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed duae tertiae partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario

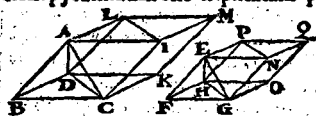
lario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesqui alteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duæ tertia partes prismatum, ut modo demonstravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

S I N T pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita ut bases A B C, E F G, sint similes, & reliquæ triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB,



perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde ducantur

canrur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ & æquales, conuenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur cōpletum parallelepipedum B M, eiuldem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi B M, sint parallela, ut facile colligitur ex propof. 15. lib. 11. Rurfus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob fimilitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque ut A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, fimilia. Eodem modo cū anguli A B D, E F H, sint æquales, fitque ut A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & ut D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, fimilia. Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedum B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M; quam tria F N, F O, F P, parallelepipedum F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q, sunt æqualia & fimilia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, fimilia sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. fimilia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniā uero ductis rectis L I, P N, prismata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q; eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; habebūt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedum B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterū B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc quoque est manifestum, fimiles pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides fimiles, quarum bases rectilinea fimilia plurimum laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, G H,

24. undec.

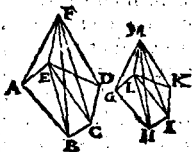
15. quinti

11. quinti

33. undec.

10. sexti.

G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, disjunctæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLC, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Ut autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum ABE, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursum quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula



ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit, etiam ex æquo, ut FE, ad BF, ita ML, ad HM. Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH: Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLC, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Itē CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratū est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatā proportionē habebunt laterū homologorū AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorū ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unā & eandē proportionē, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque, proportionē, triplicatā scilicet illius; Atque idcirco erit, ut una pyramis ABDEF, ad unā pyramidem GHLM, ita oēs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oēs pyramides, nimirū ad pyramidē GHIKLM. Quam ob rē, tū pyramis ABDEF, ad pyramidē GHLM, habeat triplicatā, proportionē homologorū laterū AB, GH; habebit quoque, pyramis ABCDEF, ad pyramidē GHIKLM, triplicatā proportionē eorundē laterū homologorū AB, GH. Quod est propositū.

5. sexti.

8. duodec.

12. quinti.

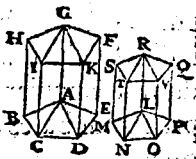
8. duodec.

S C H O L I O N.

EAD E M ratione, prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, ut de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ.

20. sexti.

recte $G I, G K; R T, R V$, erunt triangula $G H I, I G K, K F G$, & triangulis $R S T, T R V, V Q R$, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero, ob similitudinem prismatum, parallelogramma $C H, N S$, similia sunt; erit ut $I C$, ad $C B$, ita $T N$, ad $N M$. Ut autem $C B$, ad $C A$, ita quoque est $N M$, ad $N L$, ob similitudinem triangulorum $B C A, M N L$. Igitur ex aequo erit ut $I C$, ad $C A$, ita $T N$, ad $N L$.



Rursus quoniam angulus solidus N , aequalis est solido angulo C , ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se convenient, nimirum angulus $M N O$, angulo $B C D$; & angulus $T N M$, angulo $I C B$; & angulus $T N O$, angulo $I C D$: Conueniunt autem & recta $N L$, recta $C A$, eo quod anguli $M N L, B C A$, sint aequales. Igitur anguli $I C A, T N L$, aequales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma $C G, N R$, similia. Atque & parallelogramma $O H, H A$, parallelogrammis $N S, S L$; & triangula $A B C, G H I$, triangulis $L M N, R S T$, similia sunt. Igitur prismata $A B C I G H, L M N T R S$, similia sunt, ex defn. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata $C D A G I K, N O L R T V$; nec non prismata $A E D K G F, L P O V R Q$. Quapropter prismata $A B C I G H, C D A G I K, A E D K G F$, ad prismata $L M N T R S, N O L R T V, L P O V R Q$, per ea, quae demonstrauimus ad propof. 3 4. lib. 11. triplicata habere proportionem, singula ad singula, laterum homologorum $B C, C D, D E$, ad $M N, N O, O P$, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata $A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V$, proportionem habere homologorum laterum $B C, M N$, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex quibus colligitur, pyramides multangulas similes, diuisas in pyramides triangulares similes, et numero aequales, ac homologas totis. Hoc. n. manifestum est ex demonstratione praecedentis corollarii. Eodem modo inferri, prismata multangula similia diuisa in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aequalia, et homologa totis. & apparet ex huius scholij demonstratione.

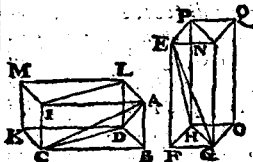
THEOR.

7.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQUALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, recipiuntur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramidæ triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN, erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ



sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se

æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: Ut autem basis BI, ad basin FN, ita est triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocae. Dico pyramidæ esse æquales. Constituta enim figura, ut prius, cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum, erunt quoque bases parallelepipedorum

4. undec.

5. quinsi

5. quinsi

pipedorū & altitudines eorundem reciproce; Ac propterea inter se equalia erunt parallelepipeda BM, FQ . Quare & prismata $DBCILA, HFGNPE$, eorum dimidia, equalia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiz partes, equalis erunt. A Equalium igitur pyramidū, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

34. duodec.

SCHOLIUM.

E ADEM ratione A Equalium pyramidum, quarum bases nō sunt triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentiū reciprocantur bases & altitudines, illa sunt equalis. Sini enim primum dua pyramides equalis, quarum quidem $ABCD$, basin habeat triangularem; at uero $EFGHI$, non triangularem. Fiat basi non triangulari $EFGH$, equalis triangulū KLM . Quod quidem fiet, si basi multilatera renocetur ad parallelogrammum, per propof. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reduce



tur, per ea, quæ demonstrauimus ad propof. 42. lib. 1. Deinde super KLM , fiat pyramis $KLMN$, eiusdem altitudinis cum pyramide $EFGHI$. Quoniam ergo pyramides $EFGHI, KLMN$, equalis habent bases, & eandem altitudinem, ipse erunt equalis, per ea, quæ in scholio propof. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis $EFGHI$, equalis pyramidi $ABCD$. Igitur & pyramis $KLMN$, pyramidi $ABCD$, equalis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides $ABCD, KLMN$, bases triangulares, erit ut basis ABC , ad basin KLM , hoc est, ad huc equalis basin $EFGH$, ita altitudo pyramidis $KLMN$, hoc est, altitudo pyramidis $EFGH$, (ponuntur enim hæ altitudines equalis) ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Ac proinde pyramidum $ABCD, EFGHI$, equaliū bases & altitudines reciprocantur.

9. duodec.

S E D reciprocantur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse equalis. Constructa enim figura eodem modo, cum basis KLM , equalis sit basi $EFGH$, & alti

Z

tudo

tudo pyramidis $KLMN$, eadem que pyramidis $EFGHI$; ponatur autem esse ut ABC , ad $EFGH$, ita altitudo pyramidis $EFGHI$, ad pyramidis $ABCD$, altitudinem; erit quoque ut basis



ABC , ad basin KLM , ita altitudo pyramidis $KLMN$, ad altitudinem pyramidis $ABCD$. Quamobrem aequales sunt pyramides $ABCD$, $KLMN$. Cum er

duodec.

go pyramis $KLMN$, aequalis sit pyramidi $EFGHI$, per ea, quae ostensa sunt in scholio propof. 6. huius lib. Erit & pyramis $ABCD$, pyramidi $EFGHI$, aequalis. Quod est propositum.

S I N T secundo pyramides aequales $ABCDE$, $FGHIKL$, quarum bases sint in ultangula. Fiat rursus triangulū MNO , aequale basi $ABCD$, & pyramis $MNOP$, eiusdem altitudinis



cū pyramide $ABCDE$: Eritq; ex scholio propof. 6. huius lib. pyramis $MNOP$, aequalis pyramidi $ABCDE$: Sed hec a-

qualis ponit pyramidi $FGHIKL$. Igitur & pyramis $MNOP$, aequalis est pyramidi $FGHIKL$. Quare, ut nūc demonstrauimus, erit ut basis MNO , hoc est, basis $ABCD$, sibi aequalis, ad basin $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinē pyramidis $MNOP$, hoc est, ad altitudinē pyramidis $ABCDE$; (ponuntur in haec altitudines aequales.) Ac propterea pyramidum aequalium $ABCDE$, $FGHIKL$, bases & altitudines reciprocantur.

S I D reciprocetur iam bases harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipsas esse aequales. Constituta. n. eodē modo figura, cum basis MNO , aequalis sit basi $ABCD$, & altitudo pyramidis $MNOP$, eadem que pyramidis $ABCDE$; ponatur autē ut $ABCD$, ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinē pyramidis $ABCDE$; Erit quoq; ut MNO , ad $FGHIK$, ita altitudo pyramidis $FGHIKL$, ad altitudinē pyramidis $MNOP$. Quare ut ante ostēdimus, aequales erunt pyramides $MNOP$, $FGHIKL$: Est autē pyramis $MNOP$, pyramidi $ABCDE$, aequalis, ex scholio propof. 6. huius lib. Igitur & pyramis $ABCDE$, pyramidi $FGHIKL$, aequalis erit. Quod est propositum.

OM N I A haec facile quoq; demonstrabuntur cōuenire prismatibus quibuscunq;. Nam si prismata fuerint equalia, erunt & eorum pyramides earundē altitudinē cū ipsis, & super easdē bases, aequales;

æquales, cū sint eorū tertia partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe due tertia, si nimirū prismatū bases fuerint parallelograma, & eorū vertices, linea recta, ut in scholio eiusdē propos. ostensum est. Quare, ut modo demonstrauimus, bases harū pyramidū atq; altitudines reciprocantur. Cū ergo he bases & altitudines eadem sint quæ prismatū, reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

R V R S V S, si prismatū bases, & altitudines reciprocetur, reciprocabūtur quoq; bases, & altitudines pyramidū easdē bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratū est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, uel certe sesquialtera, æqualia quoq; sunt. Quod est proposuim.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandē circulū ABCD, & altitudinē eandē. Dico conū cylindri esse tertiā partē. Si. a. conus nō credatur esse tertia pars cylindri, nō erit cylindrus conī triplus, sed uel maior, uel minor triplo conī. Sit primū maior quā tripl⁹ conī, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo conī & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratū ABCD, & circa eundē, quadratū FGHI; intelligaturq; super hęc quadrata sub altitudine conī, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratū ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, ut ad propos. 9. lib. 4. ostēdimus; estq; ut basis ad basin, ita parallelepipedū ad parallelepipedū eiusdē altitudinis; Erit & parallelepipedū basis ABCD, dimidiū parallelepipedi basis FGHI; Ac prōinde parallelepipedū basis ABCD, mai⁹ erit, q̄ dimidiū cylindri,



Amplius 2

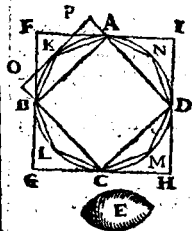
32. undec

Z 2

cuius

cuius basis circulus ABCD. Secetur bifaria peripheria AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propof. 27 lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, A BOP, intel-

1. primi.



ligantur prismata sub altitudine con-
ni & cylindri. Quia ergo triangulū
AKB, dimidium est parallelogram-
mi ABOP; erit quoque prisma bas-
is AKB, dimidium prismatis, seu pa-
rallelepipedī basis A B O P: cum sit
prisma ad prisma, ut basis ad basin,
quemadmodum ad propof. 7. huius
lib. demonstrauius; Ac propterea
prisma basis AKB, maius erit, quam
dimidium segmenti cylindri, cuius

basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua trian-
gula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ conī & cy-
lindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quo-
rum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata si-
mul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cy-
lindri simul. Quod si rursus peripheria AK, KB, &c. se-
centur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur
eodem modo prismata eiuldem altitudinis, cum cono, &
cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium
segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmen-
ta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius ba-
sis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nem-
pe parallelepipedum basis ABCD; & a reliquis segmentis
plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB,
BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; re-
linquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cy-
lindri supra triplum conī: Sint iam segmenta cylindri reli-
cta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt cir-
culi segmenta), simul sumpta, minora quam E. Cum igitur
cylindrus æqualis ponatur triplo conī & magnitudini E,
simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex tri-
ple

1. decimi.

plō conī una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prismæ basis multangulæ $AKBLCMDN$, eandem habens altitudinē cum cono, & cylindro, maior quam reliquum triplum conī; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo conī.

SIT secundo cylindrus minor triplo conī, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudinē E, simul. Inſcribatur rursus in cōno quadratum $ABCD$, & circa eundem, quadratum $EFGH$; intelligenturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudinē conī & cylindri. Quoniam igitur quadratum $ABCD$, dimidium est quadrati $EFGH$, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstravimus; estq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erit quoque pyramis super $ABCD$, dimidium pyramidis super basin $EFGH$; ac proinde pyramis super basin $ABCD$, maior erit dimidio conī, cuius basis circulus $ABCD$. Secunda peripheriæ AB, BC, CD, DA , bisariam in K, L, M, N , adiungantq; rectæ $AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA$. Ducatur quoque per K , recta OP tangens circumferentiam in K , quæ parallela erit ipsi AB , ut ad propof. 27. lib. 4. demonstravimus, occurratq; rectis DA, CB , productis in P , & O , & super $AKB, ABOP$, intelligentur pyramides sub altitudinē conī & cylindri. Quia ergo triangulum AKB , dimidium est parallelogrammi $ABOP$, erit quoque pyramis super basin AKB , dimidium pyramidis super basin $ABOP$; cum pyramides habeant proportionem eandem quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB , maior est dimidio segmenti conī, cuius basis figura contenta linea recta AB , & peripheria AKB . Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triângula BLC, CMD, DNA , & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum conī, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

media omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriam $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus $A B C D$, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin $A B C D$, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus $A B C D$; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium $A K B, B L C, C M D, D N A$; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint iam segmenta coni æliasta basium $A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A$, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E . Cum igitur conus æqualis ponatur tertie parti cylindri, & magnitudini E , simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri ita eam magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ maior est præfatis cono segmentis, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum $A K B L C M D N$, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior, quam tertia pars cylindri reliqua, nec proinde triplum dictæ pyramidis, maius erit cylindro. Quot circa, cum prisma eandem habens basin cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni. Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, proptereaq; conus, tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis convenit, ut perspicuum est eius demonstratione diligenter intuenti. Itaque propositio uniuersae ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis conici & cylindri.

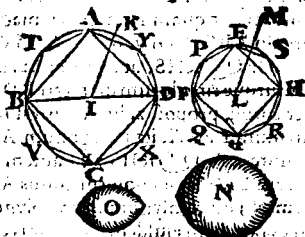
THEOR. II. PROPOS. II.

II.

SUB eadem altitudine existentes conici & cylindri, inter se sunt, ut bases.

SIT sub eadem altitudine conici & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero aequales I K, L M.

Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quae uel maior

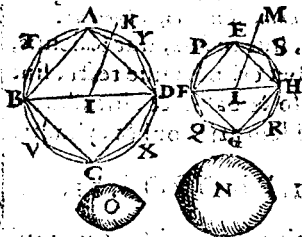


erit, uel minor cono EFGHM. Si n. esset aequalis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basim, quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, aequalis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscibat in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidaturque peripheriae EF, FG, GH, HE, bisariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectae EP, PF, FQ, &c. Quia igitur ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH,

7. quinti.

eiusdem altitudinis; & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG , &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; relinquetur tandem minor magnitudo,

decimi.



quam O . excessus conici $EFGHM$, super N . Sint ergo iam segmenta conici relicta basium EP, PF, FQ , &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O . Cum igitur conus $EFGHM$,

ponatur, æqualis magnitudinibus N , & O , simul; si ex cono detrahantur dicta conici segmenta, & ex N , & O , ipsa magnitudo O , quæ prædicti conici segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum $EPFQGRHS$, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N , reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo $ABCD$, polygonum $ATBV CXDY$, simile polygono $EPFQGRHS$, ut in propo. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH . Quoniam igitur, per coroll. propo. 2. huius lib. est ut circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, ita polygonum $ATBV CXDY$, ad polygonum $EPFQGRHS$. Vt autem circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, ita ponitur conus $ABCDK$, ad magnitudinem N ; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis. Erigaturque ut pyramis $ATBV CXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$, ut conus $ABCDK$, ad N . Cum igitur pyramis $ATBV CXDYK$, minor sit cono $ABCDK$, pars toto, erit & pyramis $EPFQGRHSM$, minor quam N . Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N , cono $EFGHM$.

Sic ita secundo N , maior cono $EFGHM$. Cum igitur ponatur ut circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad N ; Erit & conuertendo, ut circulus $EFGH$,

ad c

6. duodec.

Antiqu.

ad circulum $ABCD$, ita N , ad conum $ABCDK$. Ponatur
ut N , ad conum $ABCDK$, ita conus $EFGHM$, ad magnitu-
dinem O . Et quia N , maior ponitur cono $EFGHM$; maior
quoque erit conus $ABCDK$, quam O . Quare erit ut circu-
lus $EFGH$, ad circulum $ABCD$, ita conus $EFGHM$, ad
magnitudinem O , quæ minor est cono $ABCDK$. Quod
est absurdum. Quæsum enim est iam, non posse esse co-
num ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis il-
lius conus ad basin huius conus. Non ergo maior est N , ma-
gnitudo cono $EFGHM$; Sed neque minor est ostensa;
Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis
 $ABCD$, ad basin $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad N ; Sit au-
tem; ut conus $ABCDK$, ad N , ita idem conus $ABCDK$,
ad conum $EFGHM$; erit quoque ut basis $ABCD$, ad basin
 $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$.

14. quinti.

7. quinti.

QUONIAM autem, ut conus $ABCDK$, ad conum
 $EFGHM$, ita est cylindrus $ABCDK$, (qui triplus est coni
 $ABCDK$), ad cylindrum $EFGHM$; (qui triplus est coni
 $EFGHM$) Erit quoque ut basis $ABCD$, ad basin $EFGH$,
ita cylindrus $ABCDK$, ad cylindrum $EFGHM$. Quod ta-
men eodem modo confirmari potest, quo nunc sumus in co-
nis, si loco conorum, & pyramidum, concepiantur cylin-
dri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes co-
ni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demon-
strandum.

15. quinti.

OX

Et **C. H. O. L. I. O. N.**
P. A. R. A. M. C. V. N. quoque est, hanc propositionem, quam
Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob ratio-
nem superius examinatam, extendi etiam posse ad conos, & cy-
lindros scalenos; ut nunc demonstratio manifeste indicat, ita
ut propositio universè proponatur in hunc modum.

S. V. B. eadem altitudine existentes coni & cy-
lindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue
vnus rectus, & alter scalenus; inter se propor-
tionem habent, quam bases.

CON-

CONVERTETUR. hæc propositio quoq; hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conversum propos. 32. lib. 12. ostendimus.

COROLLARIUM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, uel sceleni, siue unus rectus, & aliter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, uel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos, & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendimus non aliter ac conversum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Si & 7. similes coni, & cylindri, quorum bases circuli $ABCD$, $EFGH$, axes uero IK , LM , & diametri basium BD , FH . Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hæc non credatur, habeat conus $ABCDK$, ad aliquam magnitudinem N , proportionem triplicatam diametri BD ad diametrum FH . Eritque N , uel minor, uel maior cono $EFGHM$. Si enim esset æqualis, haberet conus $ABCDK$ ad conum $EFGHM$, & ad N , proportionem eandem; Ac proinde proportio coni $ABCDK$, ad conum $EFGHM$, esset quoque triplicata proportionis diametri BD , ad diametrum FH ; quod non conceditur. Sit ergo primum N , minor, quam conus $EFGHM$, magnitudine O ; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis $EPFGQRHS$, maior ostendatur, quam N . Ducantur deinde rectæ KB , KT , MF , MP , ut habeantur duo man-

7. quini.

gula

gula B K T, F M P; pyramidum A T B V C X D Y K,

E P F Q G R H S M,

& cōnectantur re-

ctæ T I, P L. Quo-

niam igitur coni-

A B C D K, E F-

G H M, similes

ponuntur, erit,

ex 24. defin. lib. 1 r.

ut diameter B D,

ad diametru F H,

ac propterea ut se-

midiameter B I, ad semidiametrum F L, ita axis I K, ad axem

L M; Ac permurādo ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cū igitur

anguli B I K, F L M, recti sint, ex defin. 3. lib. 1. i. quod

coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases;

Erun triangula B I K, F L M, æquiangula; Ac propterea

ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita

F L, ad F P) ob similitudinem triangulorum B I T, F L P.

(Cum enim anguli B I T, F L P, insistentes similibus ar-

cibus B T, F P, sint æquales, ut in scholio propo. 3. lib. 6.

ostensum est; utq; ut B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æ-

qualitatē rā linearū B I, I T, quam F L, L P; erunt triangula

B I T, E L P, similia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F,

ad F P. Rursus quæ latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sūt

lateribus K I, I T, trianguli K I T; & anguli dictis lateribus cō-

prehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 1. i. cū axis I K, rectus ponatur ad

circulū A B C D; erunt bases K B, K T, æquales. Eodem modo

æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T,

rectis M F, M P, proportionales erūt, cū utrobique sit propor-

tio æqualitatis. Quoniā uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad can-

dē B T, itē ut M F, ad F P, ita M P, ad candē F P; Erat autē ut

K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita

M P, ad F P; Et cōuertēdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Qua

re cū sit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita

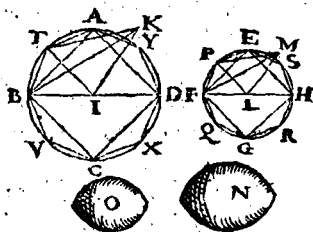
M F, ad E P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, ueluti ostēsu

est; habebūt triagula B K T, F M P, latera pportionalia, ideo-

que æquiāgula erūt; Ac pinde similia, ex definitione. Non

aliter ostendentur reliqua triagula ambiētia pyramides

A T-



15. quinti.

6. sexti.

4. sexti.

6. sexti.

6. sexti.

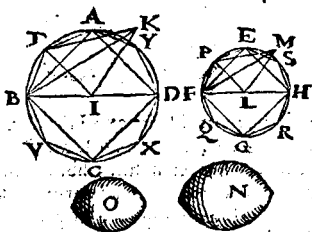
4. primi.

7. quinti.

5. sexti.

ATBV CXDYK, EPFQ GRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudines æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionem erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FB, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FL P; Et ut BI, ad

15. quinti, FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habe-



bit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH. Ponebatur autem & proportio conici ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBV CXDYK, ad pyra-

midem EPFQ GRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBV CXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto erit & pyramis EPFQ GRHSM, minor quam N. ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

14. quinti.

Sic secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBV CXDYK, ad pyramidem EPFQ GRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBV CXDYK, ad pyramidem EPFQ GRHSM; & convertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQ GRHSM, ad pyramidem ATBV CXDYK. Quare cum pyramis EPFQ GRHSM, ad pyramidem ATBV CXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM; erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportionem diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportionem triplicata.

14. quinti.

7. quinti.

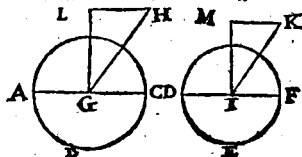
Q V O N I A M uerq; quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

15. quinti.

SCHOLIUM.

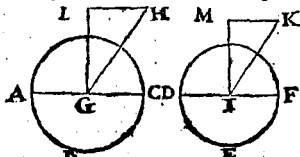
H A B E C propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cū in demonstratione assumantur axes recti ad bases.

Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli



ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere

habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur super easdem bases duo conus, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF; erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta; AC propterea perpendicularares lineæ ex H, K, ad bases demissa cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum conus & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe re-



cti, ex defn. 3. lib. 11. reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero conus ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis, erit recta HL, per axium uerices ducta ipsa AC, parallela, ideoq; angulus L, rectus: Eodemq; argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; atq; idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM. Ut autem axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod conus & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde conus & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erant, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero sã conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinẽ,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constat ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoq; proportio conus & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

II.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo : Erit ut cylindrus ad cylindrū, ita axis ad axem .

SECE TUR cylindrus ABCD, plano GH parallelo ad uersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionē descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumaturq; in axe producto quocūq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itē quocūq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallele, & æquales rectis EB, FC; quæ quidē ad reuolutionē rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, T, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur.



Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, TA, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propof. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-

gnitudinis) æqualis quoque est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propo. 11. huius lib. liquet. Si uero

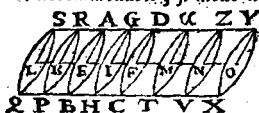


axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, se-

cundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ET SI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri



scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis reſtangulũ circa quie-

ſcen latus circunſeritur, ſic quoque in conis ſcalenis circunſerantur ſemidiametri E S, K R, E A, &c. ſemper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum reſta S Y, ſemidiametros coniungente; hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, ut conſtat ex ijs, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſeſſione cylindri.

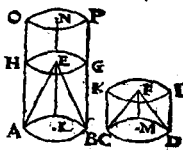
II.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

SINT

SINT super bases æquales AB, CD , duo conī ABE , CDF , & duo cylindri $ABGH, CDIK$, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF . Dico esse conum ABE , ad conū CDF , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut est altitudo LE , ad altitudinem MF . Extendarum enim cylindrus $ABGH$, ad partes GH , una cum eius axe LE , & rectangulo AE ; abscindaturque axis EN , æqualis axi MF , & circa centrum N , intelligatur circulus OP , æqualis & parallelus circulo GH , ut fiat cylindrus $GHOP$, eiusdem altitudinis cum cylindro $CDIK$. Quoniam igitur cylindri HP, CI , cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propof. 11. huius lib. proptereaque cylindrus AG , ad ipsos eandem habet proportionem: Est autem cylindrus AG , ad cylindrum HP , ut axis, seu altitudo LE , ad axem seu altitudinem EN , hoc est, ad altitudinem MF , sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG , ad cylindrum CI , erit quoque, ut altitudo LE , ad altitudinem MF .



7. quinti.
13. duodec.

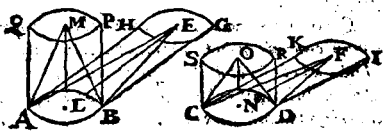
QUIA uero conī ABE, CDF , sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI ; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE , ad conum CDF , ut altitudo LE , ad altitudinem MF . Super æqualibus igitur basibus existentes conī & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

10. duodec.
15. quinti

SCHOLIUM.

Hoc idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint

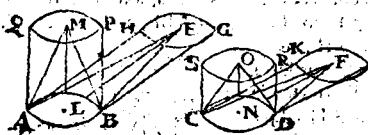
super bases æquales AB, CD , conī ABE, CDF , & cylindri $ABGH, CDIK$,



scaleni, quorum altitudines LM, NO . Dico conum ABE , ad conum CDF , ut altitudo LM , ad altitudinem NO .

A a conum

conum CDE , & cylindrum $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, esse, ut est altitudo LM , ad altitudinem NO . Super basin AB ,



cōstruatur cy-
lindrus rectus
 $ABPQ$, sub
altitudine L
 M ; Item su-
per basin CD ,
cylindrus re-

4. duodec.

ctus $CDRS$, sub altitudine NO . Quoniam igitur est cylin-
drus rectus $ABPQ$, ad cylindrum rectum $CDRS$, ut alti-
tudo LM , ad altitudinem NO . Est autem cylindro $ABPQ$,
cylindrus $ABGH$; Item cylindro $CDRS$, cylindrus $CDIK$,
equalis, ex coroll. propof. 11. huius lib. Eris quoque cylindrus
 $ABGH$, ad cylindrum $CDIK$, ut altitudo LM , ad altitudi-
nem NO . Quod est propositum.

10. duodec.
15. quinti

Q U O N I A M autem coni, cum sint tertie partes cylin-
drorum, eandem habent proportionem, quam cylindris. Eris
quoque conus ABE , ad conum CDO , ut altitudo LM , ad alti-
tudinem NO . Quod tamen eodem argumento, quo est summus in
cylindris, confirmari patet, ut perspicuum est, si super bases
 AB, CD , fiant coni recti ABM, CDO , earundem altitudinum
cum cylindris $ABPQ, CDRS$.

I D E M. concludetur, quamvis unus conorum, & cylindro-
rum, nempe conus ABE , & cylindrus $ABGH$, fuerit scalenus,
alter vero, nimirum conus CDO , et cylindrus $CDRS$, rectus. Nā
cū cylindrus scalenus $ABGH$, equalis sit cylindro recto $ABPQ$,
sit autē cylindrus rectus $ABPQ$, ad cylindrū rectum
 $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinē NO , ut Euclides demō-
stravit: Eris quoq; cylindrus scalenus $ABGH$, ad cylindrū re-
ctum $CDRS$, ut altitudo LM , ad altitudinem NO . Quod est
propositum.

15. quinti
10. duodec.

Q U O N I A M vero coni eandē habent proportionē, quam cy-
lindris, cum illi horū sint tertia partes; Erit etiā, conus scalenus
 ABE , ad conū rectū CDO , ut altitudo LM , ad altitudinē NO .
Quod nihilominus ostēdetur eadē ratione, qua est summus in cy-
lindris, ut manifestum est.

E A D E M quoq; hæc propositio convenit prismatis, parallele-
pipedis, & pyramidibus super æquales bases cōstitutis. Sint n .
super

Super bases equales $ABC, DEFG$, prismata $ABCHIK, DEFG-
LMNO$, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse pris-
ma ad prismata, & pyramidem ad

pyramidem, ut est altitudo ad
altitudinem. Sint namque in-

sistentes lineae AI, CH, BK ,

prismatis $ABCHIK$, ad basin

ABC , perpendicularares, ita ut

BK sit altitudo prismatis $AB-$

$CHIK$; Productis autem rectis

AI, CH, BK , sumantur $I Q,$

HR, KP , aequales altitudini prismatis EL ; & ductis rectis

PQ, QR, RP , compleatur prisma $HIKPQR$, eiusdem al-

titudinis cum prismate EL . Eruntque prismata $HIKPQR, EL$,

cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se equalia,

ex coroll. 2. propof. 7. huius lib. Ac propterea prisma $ABC-$

HIK , ad utrumque eandem habebit proportionem. Quia vero, ex

scholio propof. 25. lib. 11. prisma $ABCHIK$, ad prisma $HIK-$

PQR , est ut planum BI , ad planum KQ ; Et ut planum BI , ad

planum KQ , ita est recta BK , aut KP ; Erit prisma $ABC-$

HIK , ad prisma $HIKPQR$, hoc est, ad prisma EL , ut BK ,

altitudo prismatis $ABCHIK$, ad KP , altitudinem prismatis

$HIKPQR$, hoc est, prismatis EL . Quod est propositum.

Quod si insistentes lineae AI, CH, BK , non sint perpendiculara

res ad basin ABC , constituedum erit super basin ABC , aliud prisma,

cuius insistentes sint perpendicularares ad basin, et aequales alti-

tudini prismatis $ABCHIK$. Nam cum ex 2. coroll. propof. 7. huius

lib. haec duo prismata eandem habentiam altitudinem, & basin,

sint equalia, sitque prisma constitutum ad prisma EL , ut illius al-

titudo ad huius altitudinem, erit & prisma $ABCHIK$, ad pris-

ma EL , ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

Quoniam ita vero pyramides eandem habent proportio-

nem cum prismatis, quod illa sint horum tertie partes. Perspi-

cuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est al-

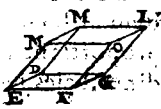
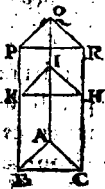
titudo ad altitudinem.

Eadem prorsus est ratio habenda de parallelepipedis,

cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prisma-

tum, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit

accommodari.



7. quinti

1. sexti.

15. quinti

H A E C omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatibus eandem habentibus bases.

O M N I A quoque hac facile conuerſi poſſunt hoc modo.

C O N I & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

N A M alia pari æqualis foret toti, ut in conuerſo propoſ. 3. lib. 11. oſenſum eſt.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æ Q V A L I V M conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi ſunt æquales.

S I N T æquales coni $A B C$, $D E F$, & æquales cylindri $A B G H$, $D E I K$; quorum bases $A B$, $D E$. axes, altitudinesve $L C$, $M F$. Dico bases & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut $A B$, ad $D E$, ita $M F$, ad $L C$. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines $L C$, $M F$, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit ut baſis $A B$, ad baſin æqualem $D E$, ita altitudo $M F$, ad altitudinem æqualem $L C$. At proinde bases atque altitudines ſunt reciprocae.

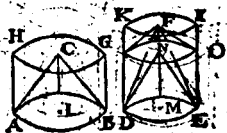
Q U O D ſi altitudines $L C$, $M F$, inæquales fuerint, ſit $M F$, maior, ex qua abſcindatur $M N$, ipſi $L C$, æqualis; & per N , ducatur planum $O N$, baſi $D E$, parallelum, ut in ſcho-
lio propoſ. 13. lib. 11. docuimus, ut fiat duo cylindri $D O$,
 $O K$. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri $A B G H$,
 $D E$.

DEIK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O; ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum D O. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O; ita basis A B, ad basin D E, cum æquales sint altitudines; Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cum bases sint æquales; immo una & eadem D E; igitur erit quoque ut basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc est, ad huc æqualem L C; Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.

In conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni sint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut ostensum est, æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam consequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quò usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus M N, N F, constituentur duo coni, ut in figura.

Si nō iam bases, atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cum sit ut basis A B, ad basin D F, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales; Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. huius lib.

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem L C, hoc est, ad huc æqualem M N; Est autem, ut basis A B, ad basin D E, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum D O, cum altitudines sint æquales; Item ut altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum D O, cum bases sint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum D O, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum D O; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.



7. quinti.

11. duodec.

14. duodec.

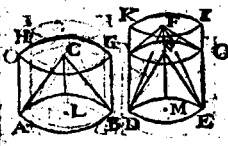
10. duodec.

11. duodec.

14. duodec.

9. quinti.

Act uerit conistat, est demonstratio. Si conorum
A B C, D E F, bases & altitudi-



nes reciprocantur reciprocabuntur quibuscumque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, adeoque con-

ni, eorum tertie partes, aequales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse aequales, quo ostendimus cylindros aequales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Non difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim aequales sint conus & cylindri scaleni, erunt quoque recti eadem cum illis bases, & altitudines habentes, aequales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare, ut ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocantur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, conus & cylindri recti aequales erunt; Ac propterea conus & cylindri scaleni, cum sint recti aequales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt aequales.

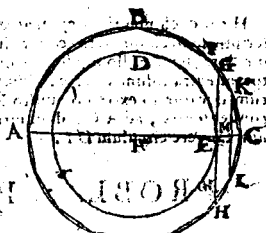
Id est facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, ut perspicuum est ex iis, quae in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscri-

inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrū F, oportetq; in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero paricōtineantur, non tangens minorem DE. Exrendatur per centrū F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad A, C, perpendicularis, quæ tæget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 6. lib. 1. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu CG, si ex AGC, auferatur dimidiū AB, & ex residuo BC, dimidiū BI, & ex residuo IC, dimidiū IK, & sic deinceps; relinquetur tandem minor arcus, quā CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectā CK, esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, dividatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrās AB, in eodē partes æquales dividatur, in quā divisus est quadrans BC, nec nō semicirculus AHC, in eodē partes, quot cōtinet semicirculus ABC, deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant.



Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad A, C, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt, erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cū recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint latē CK, ideoque æqualiter cum CK, a cen-

1. decimi.

29. tertij.

28. primi.

14. tertij.

tro, F , distent, circulum DE , contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL , quæ cum ducatur ab extremo puncto K , lateris CK , cum diametro AC , convenientis, ad AC , diametrum perpendicularis, ostendit non tangere circulum DE .

14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaerae superficiem.

Sint duæ sphaeræ $ABCD$, $EFGH$, circa idem centrum I , oporteatque in maiori $ABCD$, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaeram $EFGH$. Secentur ambæ sphaeræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphaeris planæ $ABCD$, $EFGH$, quæ circuli erunt, ex descriptione sphaeræ, habentes idem centrum sphaerarum I . Nam semicirculi ad quorum circumvolutionem sphaeræ describuntur, circumdusti congruent sectionibus $ABCD$, $EFGH$. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes linee rectæ cadentes ex I , ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphaerarum ad earum superficiem, erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ductur in his circulis diametri AC , BD , se se in centro I , secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB , BC , CD , DA , &c. Deinde in maiori circulo $ABCD$, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum $EFGH$. Quod quidem, ut

facilius

16. dno dec.

facilius omnia demonstrarentur, in hunc modum efficiatur.
 Ex G, ad E, G, ducatur perpendicularis G γ , ad circumferen-
 tiam usque circuli ABCD, quæ circumferentiam EFGH, tanget in
 G, ex coroll. propof. 16. lib. 3. Et recta E γ , applicetur in
 circulo A B C D, recta æqualis A ϵ . Quia uero, si arcui
 C γ , intelligatur subtendi recta, ut fiat triangulum G C γ ,
 latus C γ , oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est
 latere G γ , quod minori angulo opponitur, nimirum acuto;
 erit quoque recta C γ , maior recta A ϵ ; ac proinde arcus
 C γ , arcu A ϵ , maior erit, ut constat ex scholio propof. 28.
 lib. 3. Abieciatur ergo arcus C δ , arcui A ϵ , æqualis. Quod
 si ex quadrante C D dimidium auferatur D L, & ex reliquo
 C L dimidium L K, & sic deinceps; relinquetur tandem ar-
 cus minor arcu C δ , seu arcu A ϵ . Sit ergo iam arcus C K,
 minor; Eritque recta C K, subtensa minor quam recta A ϵ ,
 hoc est, quam G γ , ex scholio propof. 29. lib. 3. Dico igitur,
 rectam E K, esse unum latus polygoni æquilateri inscri-
 bendi. Nam cum recta subtendens arcum C δ , minorem ar-
 cu C γ , non tangat circumferentiam EFGH, ut ex demonstratione
 præcedentis propof. patet, multo minus recta C K, subten-
 dens arcum minorem arcu G δ , eundem circumferentiam tanget.
 Rursus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad planum
 circumferentiarum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occu-
 rrens super superficiem sphaeræ maioris in O; Et per rectas O I, A O,
 & O I, K N, plana ducantur, quæ ad circumferentiam A B C D,
 recta erunt, efficientique communes sectiones, circulos; ut
 iam dictum est, quorum semicirculi sunt A O C, N O K. Quia
 uero anguli O I C, O I K, recti sunt, ex def. 9. lib. 1. qua-
 drantes erunt O C, O K; atque ad eod., cum circuli A B C D,
 A O C, N O K, æquales sint, quod eorum diametri sint &
 sphaeræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D,
 O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes equa-
 les distribuatur, in quos diuisus fuit arcus C L; Et quadran-
 tes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales ar-
 cibus quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcibus
 æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P,
 P Q, Q R, R O, K S, S T, T V, V O, æquales. Coniun-
 dis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad
 planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, quæ in
 commu-

1. quarti

19. primi 8

1. decimi.

1. quinq. 3

12. undec.

18. undec.

19. tercij.

3.8. & 6
undec.
37. versij.

communes sectiones AC, NK, cadet; eruntq; inter se parallele.

Quoniam igitur triangulorū PCX, SKY, anguli PXC, SYK, rectifunt; ex defin. 3. lib. I. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint periphæria AOP, NOS, quibus insitūt;

(Nam si ex semicirculis AOC, NO-

K, æqualibus demantur an-

cus æquales GP, KS; reli-

qui arcus AP, NO S;

quæ quales quo-

que erunt. & Erunt duo an-

guli PCX, SKY, triangu-

li PCX, æquales; quibus angulis SKY, SYK, trianguli SKY;

Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqua-

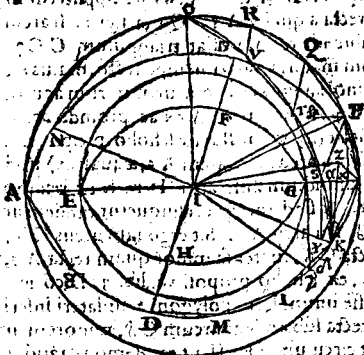
lia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & pa-

rallele; si connectatur recta XY, æquales quoque erunt & pa-

rallele PS, XY. At quia & rectæ CK, XY, parallele sunt; quod latera IC, IK, proportionales & ita sint. (Sic enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquantur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut I X, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallele quoq; PS, CK, inter se, cum utraq; parallela sit ipsi XY, idæque eas comun-

gentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano, existent. Totū igitur quadrilaterū CKSE, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demantur ad platum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cū eidē CK, sint parallele; totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterū QTVR: Est autē & trian-

gulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur



26. primi.
33. primi
2. sexti.

undec.
1. undec.

undec.

beatut super reliqua latera KE, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio; ut tota sphaera maior repleatur quadrilateralis, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphaera maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateralis, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem EFGH.

DVCATVR ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniam igitur, ex defn. 3. lib. 1. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint; erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, equalia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, equalia erunt, ideòq, & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P, S, ducuntur, æquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK; Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus, per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam uero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, maior sit, quā AI, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, ut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. Est autem rectangulum sub AC, aC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum sub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod rectæ CK, inter AC, aC, sit media proportionalis; & rectæ Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propof. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum

47. primi.

12. secundi

1. sexti.

7. sexti.

I γ , æquale est quadratis rectarum I G, G γ ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ , I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ , quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempstro ergo illinc quadrato rectæ G γ , & hinc quadrato rectæ Z C; relinquerur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum I G, sit sphaeræ minoris E F G H, semidiameter; exister punctum Z, extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, sphaeram E F G H, nequaquam continger.

47. primi

D V C A T V R rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β , eritque β , centrum circuli circa P S T Q, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 1. erit quadratum rectæ I P, æquale quadratis rectarum I β , β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatem rectarum I C, I P) æquale est quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: est uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, maior sit, quàm linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ I β , reliquo quadrato rectæ I Z; maiuserit; ideoque & linea I β , maior quam linea I Z: Ac proinde multo magis punctum β , extra sphaeram E F G H, exister, quam punctum Z; proptereaque multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphaeram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

C O R O L L A R I U M.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt; manifestum est, si in quantis alia sphaera describatur, solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam eius, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra

in

in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur hæc sphaerarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ acentris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatâ laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum. Habebit quoque polyedrum unius sphaeræ ad polyedrum alterius sphaeræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidia-

12. quinti

15. quinti

S C H O L I O N.

Q V O N I A M vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera, quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonstranda.

P R I M O itaque ostendendum est, angulum CZK , in quadrilatero $CKSP$, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z , circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est ut IK , ad KC , ita IY , ad YX , (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK , IXY , similia sint.) Est autem IK , maior quam IY ; erit & KC , maior, quam YX . Cum igitur YX , æqualis sit ostensa ipsi SP , erit quoque KC , maior quam SP ; Ac propterea arcus CK , maior erit, arcu SP , ex scholio propos. 28. lib.



14. quinti

28. tertij.

3. Quare cum arcus CP , KS , arcui CK , sint æquales, quod & lineæ CP , KS , ipsi KC , lineæ sint æquales demonstrata; (subtenduntur enim arcibus circularum æqualibus, ut ex constructione figurae superioris constat) erunt quoque arcus CP , KS , arcui PS , maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK , CP , KS , quadrantem circuli $CKSP$, excedet; atque adeo angulus CZK , obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex coroll. 2. ultima propos. lib. 6.

S E C U N D O demonstrandum est, omnia alia puncta quadri-

quadrilateri $CKSP$, longius a centro I , abesse, quam pun-

ctum Z . Sumatur enim quod-

cunque aliud punctum θ , in

quadrilatero $CKSP$, & ad-

iungantur rectæ $I\theta$, $Z\theta$.

Quoniam ergo angulus $I\theta Z$,

rectus est ex desin. 3. lib. 11.

Eris lamis illis oppositum $I\theta$,

maius latere $I\theta$, quod minori angulo $I\theta Z$, nimirum acuto,

opponitur; Ac propterea punctum θ , longius a centro I , di-

stat, quam punctum Z . Simili argumento concludemus, om-

nia alia puncta longius distare.

TERTIO, et ultimo probandum est, rectam ZC , maio-

rem esse recta βP . Quod ut aptius fiat, demon- strandum

præerit, rectam PS , maiorem esse, recta QT . Describa-

tur igitur pars superioris figura, ea videlicet, quæ continetur

semidiametris IC , IO , & quadran-

tibus OC , OK , &c. Demittan-

tur deinde ex Q , & T , ad pla-

num circuli $ABC D$, in quo

est triangulum ICK , perpen-

diculares $Q\mu$, $T\xi$, quæ in com-

munes sectiones IC , IK , cadent,

erantque inter se se parallelæ, ut

de rectis PX , ST , dictum est.

Quod si adiungantur recta $\mu\xi$,

erunt QT , $\mu\xi$, parallelæ &

æquales; quemadmodum ostensum

fuit parallelas esse & æquales PS , XT . Quia vero $\mu\xi$, ipsæ CK ,

parallelæ est, quod latera IC , IK , proportionaliter sint secta in

μ , & ξ , veluti diximus de recta XY ; erunt quoque $\mu\xi$, XT , pa-

rallela. Quare eris, ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut IY , ad YX , ita

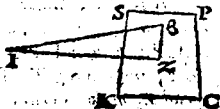
$I\xi$, ad $\xi\mu$: est autem IY , maior quam $I\xi$. Igitur & YX , maior

erit quam $\xi\mu$; Ac proinde & PS , quæ æqualis est ipsi XT ,

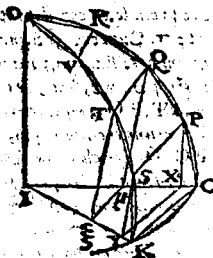
maior erit quam QT , quæ æqualis est ipsi $\xi\mu$.

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z , & β , circa

quadrilatera $CKSP$, $PSTQ$, circuli, egredianturq; ex cen-



19. primi.



38. undec.
6. undec.

2. sexti.
20. primi.

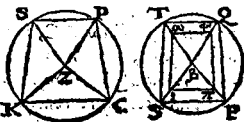
primum

25. primi.

8. primi.

primum equalis. Quia ergo latera ZK, ZC , equalia continentur
lateribus $\beta S, \beta P$; & basis $K C$, maior est base $P S$; erit
angulus $K Z C$, maior angulo $S \beta P$: Eadem ratione ma-
ior erit angulus $S Z P$, angulo $T \beta Q$. At quoniam bases
 $K S, C P$, basibus ST, PQ , sunt aequales; erunt anguli $K Z S$,
 $C Z P$, angulis $S \beta T, P \beta Q$, aequales. Igitur quatuor an-
guli ad Z , maiores erunt quatuor angulis ad β : Sunt autem
& aequales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint aequales;
ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur aequa-
lis est recta $Z C$, recta βP .

$S I T$ secundo $Z C$, minor, quam βP . Es abscondantur $\beta \pi$,
 $\beta \rho, \beta \omega, \beta \phi$, ipsis $Z C, Z K$,
 $Z S, Z P$, aequales, connectan-
turq; recta $\pi \rho, \rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$, quae
parallela erunt rectis PS, ST ,
 TQ, QP , eo quod recta ex ce-
tris secta sint proportionaliter;



2.

14. quinti.

Ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut βS , ad $S P$, ita $\beta \rho$,
ad $\rho \pi$. Cum ergo βS , maior sit, quam $\beta \rho$, erit & $S P$, maior
quam $\rho \pi$. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP ,
rectis $\rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$; Ac propterea cum $P S$, minor sit quā CK ,
& $ST, P Q$, aequales rectis $K S, C P$; & $T Q$, minor quā
 PS , erunt rectae $\pi \rho, \rho \omega, \omega \phi, \phi \pi$, minores rectis $C K, K S, S P$,
 $P C$. Quare cum recta $\beta \pi, \beta \rho, \beta \omega, \beta \phi$, rectis $Z C, Z K, Z S$,
 $Z P$, sint aequales; erunt anguli ad Z , maiores angulis ad β :
Sunt autem & aequales, quod tam illi, quam hi sint quatuor re-
ctis aequales ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum,
Non igitur minor est recta $Z C$, quam βP : Sed neque aequa-
lis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

15.

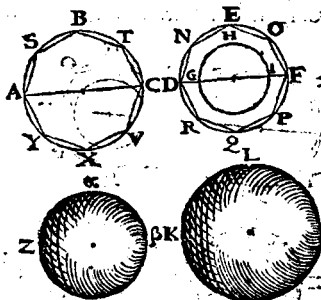
THEOR. 16. PROPOS. 18.

$S P H A E R A E$ inter se sunt in triplica-
ta ratione suarum diametrorum.

$S I N T$ duae sphaerae $A B C, D E F$, quarum diametri
 $A C, D F$. Dico sphaeram $A B C$, ad sphaeram $D E F$, habe-
re proportionem triplicatam diametri $A C$, ad diametrum
 $D F$. Si enim hoc non concedatur, habebit sphaera $A B C$, ad
aliam

aliā sphaeram GHI , minorem, vel KLM , maiorem quam DEF , triplicatam proportionem diametri AC , ad diametrum DF . Habeat primum sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF ,

proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF ; intelligaturq; sphaera GHI , concentrica sphaerae DEF . Inscribeatur in sphaera maiori DEF , polyedrum $DNEOFFQR$, non tangens minorem sphaeram GHI ; Atq; huic



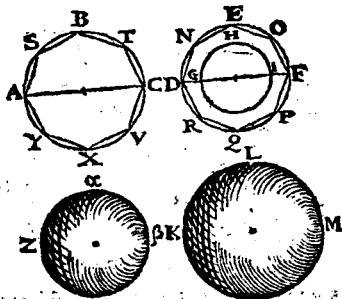
simile polyedrum $ASBTCVXY$, inscribatur in sphaera ABC . Quoniam igitur ponitur proportio sphaerae ABC , ad sphaeram GHI , triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF : Est autem, per coroll. precedentis propof. & proportio polyedri $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$, triplicata proportionis diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram GHI , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$. Quare cum sphaera ABC , maior sit polyedro $ASBTCVXY$, erit & sphaera GHI , maior polyedro $DNEOFFQR$, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphaera ABC , ad sphaeram GHI , minorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF .

HABEAT secundo sphaera ABC , ad sphaeram KLM , maiorem sphaera DEF , proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF . Cum igitur, ex coroll. precedentis propof. & polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$, habeat proportionem triplicatam diametri AC , ad diametrum DF ; Erit ut sphaera ABC , ad sphaeram KLM , ita polyedrum $ASBTCVXY$, ad polyedrum $DNEOFFQR$: Et convertendo, ut sphaera KLM , ad sphaeram ABC , ita polyedrum $DNEOFFQR$, ad polyedrum $ASBTCVXY$:

17. duodec.

14. quinti.

BT CVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFQ R, ad polyedrum A S B T C VXY, in triplicata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in tripli-



cata proportionẽ diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Z α β. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Z α β, proportionem triplicatã diametri DF, ad diametrum AC.

Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoq; ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt nõ poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorũ. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatã diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendũ.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, ut polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tã ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.
EVCLIDIS

E V C L I D I S

E L E M E N T V M XIII.

Et Solidorum tertium.



THEOR. I. PROPOS. T.

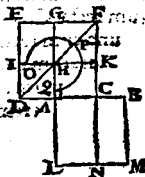
I.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.



ECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectae CD, quintuplum esse quadrati rectae AD. Describatũ h. super CD, quadratũ CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, p qd ducatur IK, parallela ipsi CD.

Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propof. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarũ AD, AC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectae AC. Deinde cũ ponatur AB, dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est autem

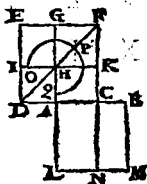


3. defin. sex.
17. sexti.

Bh 2 sem ut

1. *sexti.*

43. *primi.*



tem ut AL , ad AH , ita rectangulum AN , ad AK , rectangulum. Duplum igitur est AN , ipsius AK . Quoniam autem AK , ipsi IG , est æquale; erit AN , æquale duobus AK , IG . Additis igitur æqualibus CM , KG ; erit quadratū AM , gnomoni OPQ , æquale. Quare cum quadratum AM , quadruplum sit quadrati AI , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod linea AB , dupla ponatur lineæ AD ; erit & gnomon OPQ , eiusdem quadrati AI , quadruplus; Ac propterea, signomoni OPQ , addatur ipsum quadratum AI , quintuplum efficietur quadratum CE , quadrati AI .

. 1

2. *secundi.*

ALITER. Ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB , quadruplum est quadrati rectæ AD , quod linea AB , dupla lineæ AD , ponatur; Est autem quadratū rectæ AB , æquale rectangulis sub AB , AC , & sub AB , BC , comprehensus; Et rursus, quod sub AB , AC , æquale est ei, quod sub AD , AC , bis; (sicut enim AB , ipsius AD , est

1. *sexti.*



dupla, ita quoque erit rectangulum sub AB , AC , rectanguli sub AD , AC , duplum, cum

17. *sexti.*

utriusque rectanguli eadem sit altitudo AC . Ac propterea rectangulum sub AD , AC , bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB , AC . Quod uero sub AB , BC , æquale est quadrato rectæ AC , cum sit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Igitur quadratum rectæ AC , una cum rectangulo sub AD , AC , bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD ; Ac proinde quadrata rectarū AC , AD , una cum rectangulo sub AD , AC , bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD . Quo circa cum quadratum rectæ CD , æquale sit quadratis rectarū AC , AD ,

4. *secundi.*

una cum rectangulo sub AD , AC , bis; Erit & quadratum rectæ CD , quadrati rectæ AD , quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem sectetur, &c. Quod erat demonstrandum.

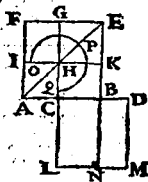
THEOR

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Dupla prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntq; ex coroll.



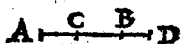
propof. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratū CM, quadruplū quadrati CI, ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estq; LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. Cum igitur sit ut LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CH; erit quoque illud huius duplum: Est autem CK, ipsi HF, æquale. AEquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD; estq; rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB; Erit ut CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quamobrem, ex definitione, recta CD, secta est in

1. sexti.
43. primi.

17. sexti.

B, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum CB.

4. *secundi.* **A L I T E R.** Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; estq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB,



AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur

quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC: Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. A Equale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum sub AC, CB, bis æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, ita quoque

1. *sexsi.*

duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectan-

2. *secundi.*

gulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; ideoque erit ut CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

17. *sexsi.*

LEMM A.

Q V O D autem recta CD, maior sit necessario, quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ

rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

4. secundi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECTUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 1. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit ut AB, ad AC,



17. sexti.

ita A C, ad C B, erit rectangulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G,) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æ-

F H G E



A D C B

34. primi.

36. primi.

43. primi.

qualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: Est autem I O, ipsi I D, æqua-

le. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q, erit etiam gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

6. secundi.

A L I T E R. Cum A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulū



17. sexti.

sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cum sit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex scholio propof. 4 lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratū rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

CONVERSVM huius theorematidis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

S I recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmen-
ti quin-

ti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB , diuisa inaequaliter in C , cuius maius segmentum AC , bisariam sectum sit in D , sitque quadratum rectae BD , quintuplum quadrati rectae CD . Dico rectam AB , diuisam esse in C , extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG , recta AC , quadruplum quadrati PQ , recta CD , ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus. (cum enim quadratum DO , recta BD , quintuplum ponatur quadrati PQ , ex recta CD ; dempto quadrato PQ , relinquetur gnomon RST , eiusdem quadrati PQ , quadruplus.) Igitur gnomon RST , aequalis erit quadrato LG : At gnomoni RST , aequale est rectangulum CE , ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG , recta AC , aequale erit idem rectangulum CE , sub AB , BC , comprehensum: Ac proinde erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB . Quocirca, ex definitione, secta erit AB , in C , extrema ac media ratione. Quod est propositum.

17. sexti.

ALITER. Cum AC , diuisa sit bisariam in D , & ei addita CB ; erit rectangulum sub AB , BC , una cum quadrato rectae CD , aequale quadrato rectae BD ; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD , descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD , descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB , BC , descriptum, una cum quadrato rectae CD , quintuplum eiusdem quadrati rectae CD . Quare ablato quadrato rectae CD ; rectangulum sub AB , BC , quadruplum erit quadrati rectae CD : Est autem eiusdem quadrati rectae CD , quadruplum quadratum rectae AC , ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectae AC , aequale est rectangulum sub AB , BC . Quamobrem erit, ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac proinde secta AB , in C , extrema ac media ratione, ex definitione.

6. sexti.

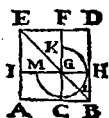
17. sexti.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo



ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IE, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad

17. sexti.

AC, ita AC, ad CB, erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

17. sexti.

7. secundi

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur ; Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

SCHO.

SCHOLIUM.

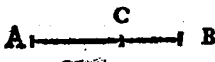
CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB , inæqualiter in C , ita ut quadratum totius AB , & quadratum minoris segmenti BC , utraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC . Dico rectam AB , sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius; cum quadrata AD , CH , tripla sint quadrati IF ; Demptò quadrato IF , erit gnomon KLM , una cum quadrato CH , duplus eiusdem quadrati IF . Est autem gnomon KLM , una cum quadrato CH , equalis duobus rectangulis AH , CD . Igitur & rectangula AH , CD , dupla sunt quadrati IF ; Ac propterea cum equalia sint AH , & CD ; erit AH , ipsi IF , equalis. Quapropter cum rectangulum AH , sub AB , BC , equalis sit quadrato IF , recta AC ; erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; Ac proinde AB , diuisa erit in C , extrema & media ratione.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB , BC , tripla sint quadrati recte AC ; Sini uero quadrata rectarum AB , BC , equalia quadrato recte AC , & rectangulo sub AB , BC , bis; erit & quadratum recte AC , una cum rectangulo sub AB , BC , bis, triplum quadrati recte AC .

Demptio ergo quadrato recte AC , relinquetur rectangulum sub AB , BC , bis duplum quadrati recte AC ; Et proinde rectangulum sub AB , BC , semel, equalis quadrato recte AC . Quare ut prius, erit ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; & deoque AB , in C , secta erit extrema ac media ratione.



17. sexti.

7. secundi.

17. sexti.

THEOR.

4.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

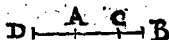
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adjiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in



quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntq;

ex coroll. propof. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC: Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; Ac proinde erit ut BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum AB.

ALITER. Quoniam est ut AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo ut DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo ut DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta lineæ



secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturq;

17. sexti.
36. primi.

17. sexti.

naturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea, &c.
Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

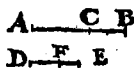
RECTA enim linea BD , extrema ac media ratione secetur in A , cuius maius segmentum AB , minus autem segmentum AD ; & ex maiori segmento AB , detrahatur recta AC , æqualis minori segmento AD . Dico maius segmentum AB , diuisum esse in C , extrema ac media ratione; & maius segmentum esse rectam AC , quæ æqualis est minori segmento AD . Facta enim prioris figura constructione, cum sit ut $B:D$, ad $A:B$, ita $A:B$, ad $A:D$; erit rectangulum BL , contentum sub BD , AD , æquale quadrato BF , rectæ AB ; & ablato communi BK , erit AL , æquale ipsi IF : Est autem AL , ipsi CK , æquale. $\therefore$ Equale igitur est IF , contentum sub AB , CB , quadrato CK , rectæ AC ; Ac proinde erit ut $A:B$, ad $A:C$, ita $A:C$, ad CB . Quare AB , secta est in C , extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC , minus uero segmentum recta CB . Quod est propositum.

ALITER. Quoniam est ut tota BD , ad totam AB , ita AB , detracta ex BD , ad AD , hoc est, ad AC , detractam ex AB ; erit quoque ita AD , reliqua ipsius BD , hoc est, AC , ad CB , reliquam ipsius AB , ut tota BD , ad totam AB , hoc est, ut AB , ad AC ; Ac propterea diuisa erit AB , in C , extrema & media ratione.

VERSUS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATUR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris



segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse DF. Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio du-

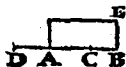
19. quinti. plas erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. Quoniam uero est ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius ad DF, dimidiam huius: Item ut AC, ad CB, ita DF, dimidia illius ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. lineæ secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC, ad CB: Erit quoque DE, ad DF, ut DF, ad FE; Ac proinde ex eadē defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta lineæ Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrunque segmentorum Irrationalis lineæ est, quæ uocatur Apotome.

1 scitj dec. SECTUR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico utrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur n. maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. Quoniam igitur quadratū rectæ CD, quintuplū est quadrati

drati rectę AD; habebit quadratum rectę CD, ad quadratũ rectę AD, proportionem, quã numerus ad numerũ. Quare commensurabilia erunt quadrata rectarũ CD, AD; propterea; ipsę rectę CD, AD, cõmensurabiles quoq; existēt, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineę Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia uero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propof. 24. lib. 8. Habent. n. proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectę CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome.



6. decimi.

9. decimi.

74. decimi.

17. sexti.

98. decimi.

RVRSYS applicato ad A B, rectangulo A E, contento sub A B, C B; cum sit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum A E, æquale quadrato rectę AC. Quamobrem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum A E, applicatum secundum lineam Rationalem A B, facit alterum latus B E, hoc est, rectam C B, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

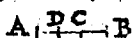
SCHOLIUM.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitq; maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentũ CB, esse Apotomen. Diuisa. n. AC, bisariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cũ sit ipsi AC, com-

3. tertijdec. commensurabilis . Quoniam autem quadratum rectæ B D, quintuplum e si quadrati rectæ C D; habebunt quadrata re-



6. decimi.

ctarum B D, C D, proportionem, quam numerus ad numerum; ac propterea commensurabilia exi-

sistent. Quare & ipse rectæ B D, C D, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur C D, sit Rationalis, erit quoque B D, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum B D, C D, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ B D, C D, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex B D, Rationali detrahatur C D, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua C B, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

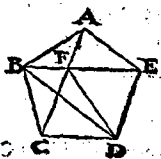
74. decimi.

7.

THEOR. 7. PROPOS.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

S I N T in pentagono æquilatero A B C D E, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis



angulis æqualibus rectæ B E, A C, B D; & ex puncto F, ubi se intersecant rectæ B E, A C, recta ducatur F D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsi contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales: Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum æqualia sint ostensa latera B E, B D;

4. primi.

5. primi.

B D, Toti igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rur-
sus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateri-
bus B A, B C, trianguli B A C, & anguli quoque ipsi con-
tinenti æquales, ex hypothesi: Erit & basis B E, basi A C, æqua-
lis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum
ergo æquales sint anguli A B E, B A C, trianguli A B F, erunt
quoque latera B F, A F, æqualia; Ac propterea si ipsa de-
mstratur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E,
F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D,
æqualia sint lateribus F C, C D, trianguli F C D, & basis com-
munis F D, erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D,
F C D, æquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, ostensi
æquales. Æquales igitur sunt toti anguli A E D, B C D;
Ac proinde cum angulo A E D, ostensus sit æqualis angulus
C D E, & angulo B C D, æquales ponantur anguli A B C,
B A E, erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æqui-
angulum erit ipsum pentagonum.

4. primi.

5. primi.

8. primi.

S E C U N D O tres anguli non deinceps æquales A, C,
D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqua-
lia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D, & anguli quo-
que ipsi contenti, æquales, ex hypothesi: Erunt & bases B E,
B D, & anguli A E B, C D B, æquales; Sunt autem & anguli
B E D, B D E, æquales, quod æqualia ostensa sunt latera B E,
B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, æquales erunt. Quare
cum æquales ponantur anguli B A E, C D B, erunt tres anguli
si deinceps æquales A, E, D: Ac proinde, ut iam demonstra-
tum est, pentagonum equiangulum erit. Si pentagoni rige-
tur equilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.

5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

II.

SI pentagoni æquilateri, & æquiangu-
li duos angulos, qui deinceps sint, subten-
dant rectæ lineæ: hæc extrema & media ra-
tione se mutuo secant, & maiora ipsarum
segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

C c

S v B-

SUBTENDANTVR in pentagono æquilatelo & equi angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, & D, rectæ DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari



extrema & media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuiuslibet pentagoni. Descripto enim circulo circa pentagonum, erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia uero latera CD, CB, trianguli DCB, æqualia sunt lateribus

DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesis; Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DEC, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqualis externus angulus BFC; erit angulus BFC, duplus anguli DCE. Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DEF, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcibus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales dupbus angulis DCE, EDC, trianguli CED; Ac proinde æquiangula erunt triangu- la BGD, GFD. Quare erit ut BD ad DC, hoc est, ad BF, æquale ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD. Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, ut ostensum est. Simili ratione ostendetur, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateli & æquilatuli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

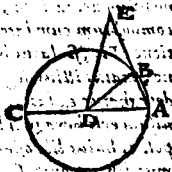
9.

THEOR. 9. PROPOS. 12

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur. Tota recta linea extrema ac media ratione secatur,

secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

In circulo ABC , sit latus decagoni AB , cuius rectum addatur BE , æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA , rectam sectam esse in B , extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB , latus hexagoni. Ducatur enim ex A , per centrum D , diameter AG , coniunganturque rectæ DB , DE . Quoniam igitur AB , arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli, continebit arcus semicirculi arcum AB , quinquies, Ac proinde arcus BC , quadruplus erit arcus AB . Quare & angulus BDC , angulus ADB quadruplus erit. Rursus quia latera BD , BE , sunt æqualia, nempe latera hexagoni, (est enim BE , latus hexagoni, semidiametro BD , æquale, ex coroll. propo. 15. lib. 4.) erunt & anguli BDE , BED , æquales: quibus cum æqualis sit externus ABD , erit angulus AED , duplus anguli BED . Est autem angulus ABD , æqualis angulus BAD , ob æqualitatem laterum DA , DB . Igitur & angulus BAD , duplus erit anguli BED : Ac proinde duo anguli DAB , DBA , simul quadrupli erunt anguli BED . Cum ergo angulus DAB , DBA , æqualis sit externus BDC , erit angulus BDC , quadruplus eiusdem anguli BED . Atqui idem angulus BDC , ostensus fuit quadruplus anguli ADB . Igitur æquales sunt anguli AED , ADB . Quocirca cum duo anguli AED , DAE , trianguli ADE , æquales sint duobus angulis ADB , EAD , trianguli ABD ; erunt triangula ADE , ABD , æquiangula. Igitur erit ut EA , ad AD , hoc est, ad EB , ipsi AD , æqualem, ita AD , hoc est, EB , sibi æqualis, ad BA ; Ac idcirco recta EA , secta est in B , extrema & media ratione, estque maius segmentum EB , latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quoderat demonstrandum.



33. sexti.

5. primi

32. primi.

5. primi

32. undec.

32. primi.

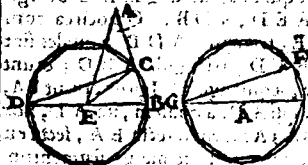
4. sexti.

Q U I A vero demonstrauius ad propof. 5. huius lib. si minus segmentum illud diuifa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum reliquum, quoque extrema & media ratibatur, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum; Hic autem affertur exemplum hexagoni compositum cum latere decagoni, fecerit extranea per media ratione; Est scilicet latus hexagoni fecerit extranea per media ratione; maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuifum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propof. 5. huius lib. offendimus. Hoc tamen iter demonstrabimus lib. 14. propof. 4.

Q U O D M Y E R S I M quoque huius theorematibus facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet;

S I linea diuifa extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

S I T enim AB , diuifa in C , extrema ac media ratione, sequitur primo AC , latus hexagoni circuli BCD . Dico minus segmentum CB esse eiusdem circuli latus decagoni.



Comprobare enim BC , in circulo, ita ut CA , extra circuli cadat. Et ducta ex B , per centrum F , diametro BED , connectam

enim EA , EC . Quia ergo est ut AB , ad AC , ita AC , ad CB ; et est AC , latus hexagoni, equale semidiametro EB , ex coroll. propof. 1. lib. 4. Erit quoque ut AB , ad BE , ita EB , ad BC , ideoque trianguula ABE , EBC , equiangula erunt, cum habeant latera

latera circa communem angulum B , proportionalia; eritque angulus A , angulo BEC , æqualis. Rursus quia latera CA , CE , æqualia sunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE , CEA , æquales; quibus cum æqualis sit externus BCE , erit BCE , duplus anguli A : Est autem angulo BCE , angulus CBE , ob æqualitatem laterum EB , EC , æqualis. Igitur & CBE , duplus erit anguli A ; Ac proinde duo anguli BCE , CBE , simul quadrupli erunt eiusdem anguli. Cum ergo angulis BCE , CBE , æqualis sit externus CED ; erit quoque angulus CED , eiusdem anguli A , & propterea anguli BEC , qui æqualis ostensus est angulo A , quadruplus erit. Quare & arcus CD , quadruplus erit arcus BC ; Ac proinde arcus semicirculi BCD , eiusdem arcus BC , quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC . Quapropter recta BC , latus est decagoni.

5. primi.

32. primi

5. primi.

32. primi

33. sexti.

SIT secundo CB , minus segmentum, latus decagoni circuli BCD . Dico maius segmentum AC , esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptecitur enim rursus BC , in circulo BCD , ducaturque diameter BED . Deinde intervallo AC , describatur circulus CFG ; cuius diameter CAG ; erisque ex coroll. propof. 15. lib. 4. AC , latus hexagoni circuli CF . Quoniam igitur AB , secta est in C , extrema ac media ratione, essetque maius segmentum AC , latus hexagoni circuli CFG ; erit, ut iam ostensum est, minus segmentum CB , latus decagoni eiusdem circuli CFG . Describatur ergo in circulo CFG , decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG ; Item in circulo BCD , decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD ; eruntque latera BC , CF , inter se æqualia. Quoniam vero, si connectantur rectæ CD , FG , anguli CDB , FGC , sunt æquales, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, quod insistant arcibus similibus BC , CF , nempe decimis partibus peripheriarum; & sicut quoque anguli BCD , CFG , in semicirculis æquales, nimirum recti; Erunt quoque latera BD , CG , inter se æqualia. Quam ob rem cum diametri BD , CG , sint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD , CFG . Ac proinde, cum recta AC , sit latus hexagoni circuli CFG , erit quoque eadem recta AC , latus hexagoni circuli BCD .

31. tertii.

26. primi

Quod est propositum.

Cc 3

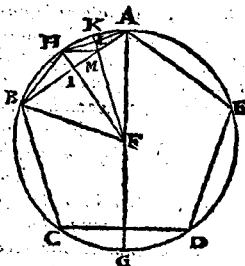
THEOR.

10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum: Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una tum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu AB, bisariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bisariam in K, adiungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trian-



27. tertij.

4. primi

guli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D: Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint;

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG , AH , æquales. Ac proinde cum arcus AH , duplus sit arcus HK , erit & arcus CG , duplus eiusdem arcus HK . Eodem modo, quia arcus AB , BC , æquales sunt, & est arcus AB , duplus arcus BH , erit etiam arcus BC , eiusdem arcus BH , duplus. Quare arcus CG , BC , æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK , BH ; Ac propterea totus arcus BG , duplus quoque erit totius arcus BK ; & idcirco angulus quoque CFG , duplus anguli BFK : Sed quia (cum anguli FAB , FBA , ob æqualitatem laterum FA , FB , æquales sint, ipsisque æqualis externus BFG ;) idem angulus BFG , duplus est quoque anguli FAB , erunt idcirco anguli BFM , FAB , æquales; Ac propterea triangula ABF , FBM , cum habeant angulos FAB , MBF , æquales, & angulum ABF , communem, æquia angula erunt. Quocirca erit ut AB , ad BF , ita BF , ad BM ; ideoque rectangulum sub AB , BM , æquale erit quadrato rectæ BF . Rursus quia latera AL , LM , trianguli ALM , æqualia sunt lateribus HL , LM , trianguli HLM , & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases AM , HM , & anguli LAM , LHM , æquales: Est autem angulus LAM , angulo HBA , æqualis, quod & latera HA , HB , æqualia sint. Igitur & angulus LHM , eidem angulo HBA , æqualis erit; Ac propterea triangula ABH , AHM , cum habeant angulos ABH , AHM , æquales, & angulum HAM , communem, æquia angula erunt. Quam ob rem erit ut AB , ad AH , ita AH , ad AM ; ideoque rectangulum sub AB , AM , æquale erit quadrato rectæ AH : ostensum est autem & rectangulum sub AB , BM , æquale quadrato rectæ BF . Igitur rectangula sub AB , BM , & sub AB , AM , simul æqualia sunt quadratis rectarum BF , AH : At uero rectangula sub AB , BM , & sub AB , AM , æqualia sunt quadrato rectæ AB . Quadratum ergo rectæ AB , nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF , AH , lateris uidelicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demonstrandum.

1. quinti.
33. sexti.
5. primi
32. primi.

32. primi.
4. sexti.
17. sexti.

4. primi
5. primi.

32. primi.
4. sexti.
17. sexti.

2. secundi

COROLLARIUM. I.

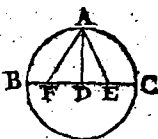
Hi ne sequitur, lineam rectam, quæ ex centro duâa dividit arcum quempiam bifariam, dividero quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum A B, dividit bifariam, divideri quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUUM quoque est, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductam dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam dividere arcum C D, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æqualitero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

SCHOLIUM.

QUONIAM ad finem lib. 4. præxim quandam ex Prolemao tradidimus, quæ una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde divisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui equalis abscindatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, eique addita



D F, erit rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsæ E F, est equalis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E, Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,

6. secundi

47. primi.

D. F. relinquetur rectangulum sub C F, D F, aequale quadrato recta A D, hoc est, quadrato recta C D. Quam ob rem erit ut C F, ad C D, ita C D, ad D F; proptereaque recta C F, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propos. 15, lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli, ut demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum quadrato lateris decagoni D F, aequale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; Est autem eisdem quadratis rectarum A D, D F, aequale quadratum recta A F; erit quadratum lateris pentagoni aequale quadrato recta A F; ac propterea recta A F, lateri pentagoni equalis. Quod est propositum.

17. sexsi.

10. tertij d. c.
47. primi.

THEOR. II. PROPOS. II.

12.

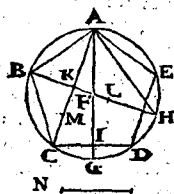
SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

In circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Di- co eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Duceantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, la- tus C D, in I, connectanturque rectæ A C, A H, quarum A C, secet diame- trum B H, in K. Abseindatur quoque ex semidiametro F H, quarta ei⁹ pars F L; Itē ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, po- nitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L, composita, cum sit commensurabilis utrique F L, B F, Ra- tionalis erit. Rursus quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bisariam in B, secabit quoque recta A C, bisariam



16. decimi.

bisariam in K , & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG , rectam CD , in I , bisariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI , AFK , cum habeant angulos AIC ,



AKF , rectos, & angulum CAI , communem, æquiangula inter se erunt. Quam ob rem erit, ut CI , ad CA , ita FK , ad FA ; & permutando ut CI , ad FK , ita CA , ad FA : Ut autem CA , ad AF , ita est CM , quarta pars ipsius CA , ad FL , quartam partem ipsius FA . Erit igitur ut CI , ad FK , ita CM , ad FL ; & permutando, ut CI , ad CM , hoc est, ut CD , dupla ipsius CI , ad CK , duplam ipsius CM , ita FK , ad FL ; Atque componendo, ut CD , CK , simul ad CK , ita FK , FL , simul, nimirum recta KL , ad FL ; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex CD , CK , ad quadratum rectæ CK , ita quadratum rectæ KL , ad quadratum rectæ FL . Quia uero si AC , secetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta BD ,) maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD ; Erit quadratum rectæ compositæ ex CD , maiori segmento, & CK , dimidia totius, quintuplū quadrati rectæ CK , dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL , quintuplū erit quadrati rectæ FL , ideoque quadratum rectæ KL , commensurabile erit quadrato rectæ FL ; Ac proinde rectæ KL , FL , commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autē FL , ostensa Rationalis. Igitur & KL , Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. est BF , talium 1. est FL ; ac propterea qualium 5. est BL , talium 1. est FL ; erit quadratum rectæ BL , talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL , (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratum rectæ FL , talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL . Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL , talium 5. est quadratum rectæ KL ; ac proinde quadratum rectæ BL , quintuplū erit quadrati rectæ KL . Quia ergo quadrata rectarum BL ,

AL ,

32. primi

4. sexti.

15. quinti

22. sexti.

8. tertijdec.

1. tertijdec.

6. decimi.

20. sexti.

KL , proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ BL , KL , longitudine incommensurabiles; ideoque, cum ostense sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali BL , dematur Rationalis KL , potentia tantum commensurabilis; erit reliqua BK , Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruens erit KL .

9. decimi.

74. decimi

Ita uero recta BL , possit plus, quam recta KL , quadrato rectæ N . Quoniam igitur quadratum rectæ BL , æquale est quadratis rectarum KL , & N ; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL , talium, 4. fuit quadratum rectæ KL ; Erit reliquum quadratum rectæ N , talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL . Ac propterea quadrata rectarum BL , & N , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt; proptereaq; rectæ ipsæ BL , & N commensurabiles, solum potentia; Est autem BL , ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N . Quia uero quadrata rectarum BL , & N , proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) Erunt rectæ BL , & N , longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL , Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali BH ; (Qualium enim partium 8. est BH , talium 5. est BL .) possitque plus, quam congruens KL , quadrato rectæ N , sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est; Erit BK , Apotome quarta, ex definitione.

6. decimi.

9. decimi.

POSTREMO quia recta AB , est media proportionalis inter BH , BK , ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH , habeat angulum BAH , rectum, & quo ducta est AK , ad basin perpendicularis) erit quadratum rectæ AB , æquale rectangulo sub BH , BK . Quocirca cum superficiem contentam sub Rationali BH , & Apotoma quarta BK , possit recta linea AB ; Erit AB , linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

31. tertii.

17. sexti.

95. decimi.

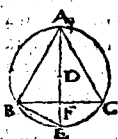
THEOR.

8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo $A B C$, cuius centrum D , triangulum æquilaterum inscribatur $A B C$. Dico quadratum lateris $A B$, triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro



$A E$, quæ secet, ex coroll. propos. 10. huius lib. arcum $B C$, bisariam in E , & rectâ $B C$, bisariam quoque & ad angulos rectos in puncto F ; cum arcus $B C$, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus $B E$, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta $B E$, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4.

Quoniam igitur quadratum rectæ $A E$, æquale est quadratis rectarum $A B$, $B E$, quod angulus $A B E$, in semicirculo rectus sit: est autem quadratum rectæ $A E$, quadruplum quadrati rectæ $B E$, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea $A E$, dupla sit lineæ $B E$, erunt quadrata rectarum $A B$, $B E$, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ $B E$; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum $A B$, $B E$, talium partium 1. erit quadratum rectæ $B E$; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ $A B$. Quare quadratum rectæ $A B$, triplum est quadrati rectæ $B E$, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hæc facile colligi potest, semidiametrum $D E$, bisariam secari in F , a latere trianguli $B C$. Cum enim quadratum rectæ $A B$, triplum sit quadrati rectæ $B E$; si ponatur quadratum rectæ $A B$, partium 12. erit quadratum rectæ $B E$, talium partium 4. Est autem quadratum rectæ $B E$, æquale quadratis rectarum $B F$, $F E$. Igitur & talium

47. primi.
31. tertij.

47. primi.

& talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF , FE . Est autem talium partium 3. quadratum recte BF , (quod quadratum recte AB , quadruplum sit quadrati recte BF , ex scholio propof. 4. lib. 2. Est enim AB , dupla ipsius BF .) Igitur, tallum 3. erit quadratum recte FE ; Ac proinde quadratum recte BE , hoc est, quadratum recte DB , sibi æquale, quadruplum erit quadrati recte FE . Cum igitur, ex scholio propof. 4. lib. 2. idem quadratum recte DB , quadruplum sit quadrati dimidie lineæ ipsius DE ; erit FE , dimidia ipsius DB . Quocirca DB , bisariam secatur in F .

PROPOSITIONE NONA

Hoc tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate propofito.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bisariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uicissim bisariam, & angulos rectos secabitur a latere opposito.

In circulo ABC , circuli centro D per angulum æquilaterum inscribatur ABC . Dico rectam AE , per centrum D , ductam, hoc est, Diametrum, secare bisariam & angulum BAC , & latus BC , nec non ad angulos rectos; Semidiameter quoque DE , secari a latere BC , bisariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD , CD , BE , cum latera AB , BC , CA , trianguli ABC aequalia sint lateribus AC , AD , trianguli ACD ; & bases BD , CD , æquales quoque; Erunt anguli BAD , CAD , æquales. Quod est primum.



8. primi

DE INDE, cum latera AB , AE , trianguli BAE , aequalia sint lateribus AC , AF , trianguli CAE , & anguli ipsi contenti æquales ostensi; Erunt & bases BE , CE , & anguli ad F , æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

4. primi.

POSTREMO, cum anguli BAE , CAE , demonstrati sint esse æquales; erunt & arcus BE , CE , æquales. Quare

26. terrij.

cum

cum $B E C$, arcus sit tertia pars circumferentia, cuius $B E$ sita pars eiusdem; Ac propterea recta $B E$ latus hexagoni, siue semidiametro, proinde $B D$, equalis, ex coroll. propof. 15, lib. 4. Igitur anguli $B D E$, $B E D$, aequales erunt. Quoniam, ergo anguli $B D F$, $B F D$, & anguli $D B F$, aequales sunt angulis $B E F$, $B F F$, trianguli $E B F$, & latus $B F$, commune; Erunt & latera $D F$, $E F$, equalia.

5. primà

26. primi

13.

PROBL. 9. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM continere; & data sphaera complecti; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit resquialtera lateris ipsius pyramidis.

Si r. dare spherę diameter $A B$, circa quam semicirculus describitur $A C B$; & ex A, B , auferatur terna pars $B D$, ut sit $A D$, ipsius $D B$, dupla; at uero $A B$, ejusdem $D B$, tripla; & ipsius $A D$, sesquialtera. Deinde ducta $D C$, perpendiculari ad $A B$; considerantur rectę $A C, B C$. Ad interval



lum rectę H E, quę equalis sit ipsę D C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum equilaterum inscribatur E F G, adiunganturque rectę H F, H G, quę singule equales erunt ipsi D C, cum equales sint ipsi H E, ad cuius intervallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quę equalis ponatur rectę A D, & ex I, demittantur rectę I E, I F, I G. Dico solidum contentum quatuor triangulis F E C, I E F, I E G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraëdram. Quoniam latera D A, D C, trianguli A D C, equalia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E; & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 1. erit basis A C, basi I E, equalis. Non aliter ostendemus eandem rectam A C, equalē esse rectis I F, I G. Rursus quia tres linee A D, D C, D B, proportionales sunt

2. निर्देश

4. primi.

Figure 2

sunt, ex coroll. propof. 6. lib. 6. erit, ex coroll. propof. 10. lib. 6. ut AD , ad DB , ita quadratū rectę AD , ad quadratū rectę DC ; & componēdo, ut AB , ad DB , ita quadrata rectarū AD , DC , ſimiliter ad quadratū rectę DC : Sunt autē quadrata rectarū AD , DC , æqualia quadrato rectę AC . Igitur erit quoq; ut AB , ad DB , ita quadratū rectę AC , ad quadratum rectę DC ; Ac proinde cū AB , ſit ipſius DB , tripla, erit quoq; quadratū rectę AC , triplum quadrati rectę HE , cū HE , æqualis ſit ipſi DC : Aequi & quadratum rectę EF , triplum quoque eſt eiſdem quadrati rectę HE . Quadratū ergo rectę AC , quadrato rectę EF , æquale erit; & propterea rectę AC , rectę EF . Quare cū recta $A C$, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE , IF , IG ; erunt quatuor triangula EFG , EPI , IGI , GEI , æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG , uertex uero I . Dico pyramidem hanc comprehendere ſphæram datam, cuius diameter $A B$; & diametrum ſphære $A B$, potentia ſeſquialtera eſſe lateris EF , uel AG .

47. primi.

12. terſijdec.

EXTENDATUR perpendicularis $I H$, uſque ad K , ut ſit $H K$, ipſi $D B$, & tota $I K$; cō $A B$, æqualis. Quia ergo tres rectę AD , DC , DB , proportionales ſunt, quibus æquales erunt tres $I H$, $H E$, $H K$; erunt quoq; $I H$, $H E$, $H K$, proportionales. Quod cum $H E$, ſit ad $H K$ perpendicularis, & media proportionalis inter $I H$, $H K$, ſemicirculus circa $I K$, deſcriptus in plano rectarū $I K$, $H E$, tranſibit per E , ut mox oſtentur; Eodemq; argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam $I K$, deſcriptus in plano rectarū $I K$, $H F$, tranſibit per F , quam ſemicirculus circa eandem $I K$ deſcriptus in plano rectarū $I K$, $H G$, per G . Igitur quilibet horū ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos B , D , C , I , p̄cedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphære datę, quę diameter $I K$, æqualis ponatur diametro $A B$, comprehenderit idem Tetraedrum ſphæra data.

1123. 77

QUONIAM vero tres rectę AB , AC , AD , proportionales ſunt, ex coroll. propof. 8. lib. 6. erit ut AB , ad AD , ita quadratū rectę AB , ad quadratū rectę AC , ex coroll. propof. 10. lib. 6. Eſt autē recta AB , ſeſquialtera rectę AD , qđ qualiū partiū 3.

eſt

est AB, talis a, sit A. D. Igitur & quadratū recte AB, scilicet
alterū erit quadrati recte AC, Ac, propterea tum AB, &
diameter sphaerae, & A C, recta lateri pyramidis EF, & equalis,
perspicuum est, diametrum sphaerae, potentia scilicet
tam esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo
constituimus, & data sphaera cōplexi sumus, hoc. Quod
erat faciendum.

Q V O D autem semicirculus circa IK, in plano
rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile
demonstrabitur hoc proposito theoremate.

S I ad lineam rectam perpendicularis duca-
tur, quae sit media proportionalis inter segmen-
ta lineae; semicirculus circa illam lineam rectam
descriptus transibit per extremum punctum li-
neae perpendicularis.

S I T enim ad AB, perpendicularis CD, & me-
dia proportionalis inter AC, & CB. Dico semicir-
culum circa AB, descriptum transire
per D. Nam si transeat extra D,
vel intra, nimirum per punctum E;
erit quoque CE, media propor-
tionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 1, lib. 6.

Quare tam quadratum recte CD, quam quadratum
recte CE, aequale erit rectangulo sub AC, & CB; Ac
proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se aequalia,
& ipsae rectae CD, CE, aequales erunt, pars & to-
tum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicir-
culus per D.

H I N C manifestum est, semicirculam in superiori
figura

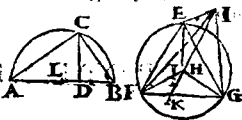


17. sexii.

figura descriptum circa IK , in plano rectarum IK ,
 HE , transire per E , cum HE , sit ad IK , perpendi-
 cularis, & media proportionalis inter IH , HK .

COROLLARIUM I.

H : Non facile colligemus, diametrum sphaerae esse quadryplam
 sesquialteram semidiametri, circuli circa basim pyramidis descri-
 pu. Cum enim diameter sphaerae AB , ostensa sit sesquialtera la-
 teris pyramidis BF ; erit quadratum rectae EF , talium partium 6,
 quatum 9. est quadratum rectae
 AB : At quatum partium 6. est
 quadratum rectae BF , talium
 partium 2. est quadratum rectae
 HE , quod quadratum rectae EF ,
 triplum sit quadrati rectae HE .
 Quatum igitur partium 9. est
 quadratum rectae AB , talium
 partium 3. erit quadratum rectae HE ; Ac propterea diameter sphae-
 ra AB , potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE , cum
 proportio quadratorum sit, quae 9. ad 2.



12. dertijde

COROLLARIUM II.

R : Versus perpendicularis ex centro sphaerae ad planum basis
 pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphaerae, & tertia pars
 semidiametri. Sit enim L , centrum semicirculi ACB , eritque L ,
 centrum quoque sphaerae. Dico rectam LD , (quae nimirum ex cen-
 tro sphaerae ad basim BFG , ducitur perpendicularis; cum AD ,
 equalis sit ipsi IH , & ideo punctum D , idem quod H , quemad-
 modum & L , idem est quod centrum sphaerae.) esse sextam partem
 diametri sphaerae, nempe rectae AB , & tertiam partem semidiamet-
 ri AL . Quoniam AD , dupla est ipsius DB ; Quatum partium 4.
 est AD , talium 2. erit DB ; ac proinde talium 6. tota AB , & semi-
 diameter AL , talium 3. Quare si AD , est 4. & AL , 3. erit LD , 1.
 & idcirco LD , sexta pars erit rectae AB , quae hinc partium earun-
 dem 6. & tertia pars rectae AL , quae hinc earundem partium 3.
 Si ML , tertia pars, altitudo pyramidis HL , duas tertias partes
 continebit ipsius diametri. Est enim HL , eadem, quae AD , conti-
 nens duas tertias diametri, ex constructione.

R : Versus, quatum partium 9. ponitur quadratum dia-
 metri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyra-
 midis. Nam proportio 9. ad 4. est du-
 plicata proportionis 3. ad 2.

ut hic apparet 9. ad 4. est duplicata

proportio 3. ad 2.

Dd

SCHO.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor trian-
gula equilatera & equalia, disponanturque, ut hac figura indi-
cat, facile ex ipsis rite inter se compli-
catis componetur Tetraëdron, secun-
dum totam soliditatem. Hanc vero pra-
xim, & sequentes quatuor, quibus re-



liqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili con-
ficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durerio non ignobili scri-
ptore.

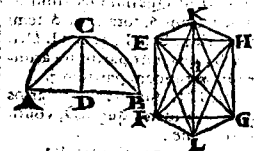
15.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere; &
sphæra complecti, qua & pyramidem; &
demonstrare, quod sphæræ diameter poten-
tia sit dupla lateris ipsius octaëdri.

4. primi.

Si r sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehen-
dit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur
ACB, & ex centro D, ad AB perpendicularis ducatur DC,
connectanturque rectæ AC, BC, quæ equalēs inter se erunt.
Sumpta jam recta EF, quæ equalis sit ipsi AC, uel BC, de-



scribatur super eam quadra-
tum EFGH, in quo ducan-
tur diametri EG, FH, se mu-
tuo secantes in I: eruntque re-
ctæ IE, IF, IG, IH, equalēs,
cum sint semidiametri circuli
circa quadratum descripti, ut
in 4. lib. demonstratum est.

Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati
erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL,
equalēs ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur
ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH;
LE,

EF, LE, LF, LG, DRS solidum contentum octo
 triangulis KEF, KFG, KGH, KEH, LFE, LEH,
 LFG, LFG, &c. octaedrum, quod queritur. Quoniam
 latera EI, IK, trianguli EIK, equalia sunt lateribus EA,
 IH, trianguli EIH, & anguli ipsi contenti recti, (ipse
 quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIH, eo quod
 sit equalis angulo G IH, sibi deinceps, ob equalitatem late-
 rum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH, &c. & basium
 EK, basi EH, equalis. Eodemque modo eadem EH, equa-
 lis erit KH; ideoque triangulum equilaterum erit KEH.
 Simili argumento concludemus, reliqua triagula esse equi-
 latera; atque adeo equalia triangulo KEH, cum illorum
 latera equalia sint lateribus quadrati EFGH, singula sin-
 gulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo trian-
 gulis equilateralibus & equalibus. Quod octaedrum dico com-
 prehendendi sphaera diametri AB, qua nimirum & pyramis
 constructa comprehenditur, & diametrum sphaerae AB, po-
 tentia duplam esse lateris EF, vel AC.

Quoniam IE, perpendicularis est ad KL, ex 3.
 defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI,
 IL; (quod tres recte KI, IE, IL, equalis sint, ideoque
 eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL,
 in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per pun-
 ctum E, ex lemmate precedentis propos. Eadem ratione se-
 micirculus descriptus circa eandem KL, in plano recta-
 rum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicen-
 dum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicircu-
 lorum circumductus, manente fixa diametro KL, descri-
 bet sphaeram, quae complectitur octaedrum constitutum,
 cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo haec sphae-
 ra equalis sit datae sphaerae, cuius diameter AB, &c. Nam
 cum recte AC, EF, equalis sint, ideoque ipsarum
 quadrata equalia; Sit autem tam quadratum recte
 AC, duplum quadrati recte AD, quam quadratum
 recte EF, quadrati recte EI; Erunt &c. recte AD,
 EI, hoc est, KI, semidiametri equalis. Quare & to-
 te diametri AB, KL, equalis erunt, &c. proinde
 sphaerae ipsarum equalis existent, comprehendetur igitur
 octaedrum data sphaera.

8. primi.

4. primi.

25. lib. 11.

25. lib. 11.

25. lib. 11.

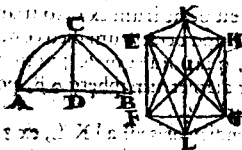


47. primi.

Quia vero quadratum rectæ AB, æquale est quadra-
tis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum
rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum
AB sit diameter sphaeræ, & AC, recta æqualis lateri octae-
dri EF; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia du-
plum esse lateris octaedri. Itaque octaedrum construimus,
& sphaera complexi sumus, quæ & pyramidem, &c. Quod
erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo
ad angulos rectos secare in centro sphaeræ; quales sunt KL, EG,
FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostendi sunt recti.



4. undec.

18. undec.

Atque proinde, cum KI, recta
sit ad lineas EG, HF; recta quæ
erit ad planum EFGH, per
ipsas ductum; Ideoque & plana
KFLH, ELGK, per KI, ducta, re-
ctæ erunt ad planum EFGH. In-
mo eadem ratione, ut patet re-
complectar, tria plana EFGH,
KFLH, ELGK, se mutuo ad angu-
los rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum om-
nia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æquales eri-
stant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod & cum
quadratum diametri sphaeræ duplum sit quadrati lateris octaedri,
ut ostendimus; quadratum diametri sit, æquale existat quadra-
tis laterum octaedri FK, KH, ita enim efficitur, ut angulus FKH,
rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

48. primi.

COROLLARIUM. II.

Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æqua-
les, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero
K, & L; altitudines denique, semidiametri KI, & LI; cuiusmodi
sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana uniusque si-
milis & æqualia planis alterius, ut constat, cum sint triangula æ-
quilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadra-
tum subduplum quadrati diametri sphaeræ, ut est demonstratum.

COROLLARIUM. III.

Si tetraëdron, & octaedron in eadem sphaera describantur,
erit tetraëdri lateris potentia sesquialterum lateris octaedri. Pon-
tur enim quadratum diametri sphaeræ divinum in sex partes. Quo-
eniam igitur diameter sphaeræ est potentia sesquialtera lateris tetra-
edri

13. secunde

ALVO

S BC

edri

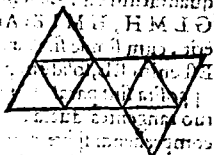
edri, est quadratum lateris tetraedri, talium partium, & quantum
6. est quadratum diametri sphaerae. Rursus quia diameter sphaerae
est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri
talium partium 3. qualium 6. est quadratum diametri sphaerae. Igi-
tur cum talium partium 6. sit quadratum lateris tetraedri, qualium
3. est quadratum lateris octaedri, perspicuum est, latus tetraedri
potentia sesquitermum esse lateris octaedri.

COROLLARIUM. IIII.

DEINQUE, quoniam quadrato EFGH, recta EH, parallela
est recte FG; & in quadrato EFGK, recta EK, recta GL: erit
planum EHK, per EH, EK, ductum plano EGL, per FG, GL,
ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de ceteris basibus
octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

SCHOLION.

QUOD si ex materia aliqua
conficiantur octo triangula
quilatera inter se aequalia, dis-
ponanturque, ut hac figura in-
dicat, facile ex ipsis rite inter
se complicata componetur octae-
dru secundum totam solidita-
tem, ut ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM constituere; & sphaera com-
plecti, quia & priores figuras; & demonstra-
re, quod sphaerae diameter potentia sit tri-
pla lateris ipsius cubi.

Si sphaerae, quae praedictas figuras comprehendit, dia-
meter AB, circa quam semicirculus describatur ACB; & ex
AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AB, ipsius BD, tripla.
Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur
rectae AC, BC. Super rectam EF, quae rectae BC, sit aequalis,
quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur

Dd 3 perpen-

4. tercidec

5. undec.

14.

perpendiculares EI, FK, HL, HM , æquales quoque ipsi
 BC quadratum extrema coniungantur rectis EK, KL, LM ,
 MI . Quoniam ergo anguli EF, KF, E , recti sunt, ex

def. 3. lib. 1. erunt rectæ
 EI, FK , parallelæ. Sunt au-

tem & æquales, quod utraq;
 æqualis posita sit ipsi BC , hoc
 est, ipsi EF . Igitur & EF ,
 & KL parallelæ sunt & æquales.

Seiudeo parallelogrammum est
 $EFKL$ in quo, cum linea
 MI transeat, & EF, KL æquales sint ip-

si EF , omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt au-

tem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI ,
 æquales sint oppositis rectis KFE, IEF . Igitur $EFKL$,
 quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt $FKLG$,
 $GLMH$, HMI ; Atque idcirco & $IKLM$, quadratum

erit, cum simile sit & æquale quadrato opposito $EFGH$.
 Est enim EL , solidum parallelepipedum, quod eius plana

opposita sint parallelæ, nimirum per lineas parallelas se mu-

tuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL . Quem dico
 comprehendi sphaera diametri AB . Sint enim planorum

oppositorum $EFKI, GHML$, diametri EK, FI, GM ,
 HL , per quæ ducantur plana $EKLH, FIMG$. Quia igitur

tam planum $EKLH$, quam $FIMG$, cubum bisariam secat;
 utrumque per centrum cubi transit; ex scholio propo-

39. lib. 11. per punctum uidelicet P , in quo, ex coroll. eius-

dem propo. 3. in utroque quoque bisariam diuisent omnes
 diametri cubi; Appropereat communis planorum sectio,

recta scilicet NO , per idem punctum P , incedet. Quia ue-

ro plana $EKLH, FIMG$, rectangula sunt, (Cum enim HE ,
 perpendicularis sit duabus rectis EI, EF , ob quadrata EM ,
 EK ; perpendicularis quoque erit ad planum EK , ideoq; ad

rectam EK , ex def. 3. lib. 1. Rectus ergo angulus est HEK .
 Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano $EKLH$,
 nec nō & anguli in plano $FIMG$. Rectangula ergo sunt pla-

na $EKLH, FIMG$, & æqualia, quod latera unius æqualia
 sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL ,
 HK, FM, GI æquales, ut constat ex scholio propo. 34. lib. 1.

Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem: quam quidem æqualem esse sphaerae diametri AB, ita demonstrabitur.

Cum quadratum rectæ EK, æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF; hoc est, quadrati rectæ BC. Et una quadrata rectarum EK, KL; tripla quadrati rectæ KL. Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL; hoc est, quadrati rectæ BC. Ac uero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam res rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6.) Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt. Ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphaerarum, ideoque & ipsarum sphaeræ, æquales existunt.

Quia uero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi K L; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bisariam in centro sphaeræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bisariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bisariam secare in centro P. Quod uero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bisariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFH, OFE, anguli OFP, æquales sunt duobus angulis

sphæra complecti, quæ & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

Sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diametret A B, circa quam semicirculus describatur A C B: Et ex A B, abscondatur quinta pars B D, ut A B, ipse B D, sit quintupla; & ipse A D, sesquiquarta; At uero A D, ipse B D, quadrupla. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ E F, quæ ipsi B C, æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur F G H I K. Post hæc diuisis arcibus F G, G H, H I, I K, K F, bisariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ F L, L G, G M, M H, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli F G H I K, perpendiculares erigantur E Q, L R, M S, N T, O V, P X, quæ æquales ponantur semidiametro E F, seu rectæ B C. Et utq; omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe E L, Q R, E M, Q S, E N, Q T, E O, Q V, E P, Q X, (quas tamen omnes, ut uitaremus confusionem, non duximus.) binæ inter se æquales erunt: Ac proinde, cum æquales sint E L, E M, &c. semidiametro E F; æquales quoq; erunt Q R, Q S, Q T, Q V, Q X, & inter se; & semidiametro E F, seu rectæ B C. Quia uero planum per rectas Q R, Q S, ductum parallelum est plano F G H I K; per rectas E L, E M, ducto; Eademq; ratione planum per rectas Q S, Q T, ductum parallelum est plano eidem F G H I K, per rectas E M, E N, ducto; conueniens autem planum per rectas Q R, Q S, cum plano per Q S, Q T, in recta Q S. Igitur reflectione hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. & lib. i. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per Q T, Q V, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per Q V, Q X, & planum per Q X, Q R. Sunt ergo quinque linee Q R, Q S, Q T, Q V, Q X, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum Q R, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritq; æqualis circulo F G H I K. Coniungantur puncta

11. quarti.

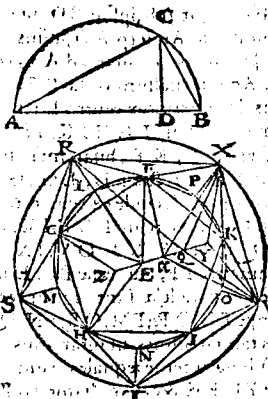
6. undec.

13. primi.

15. undec.

6. undec.
37. primi.
28. tertijde.

puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt & parallelæ; si concipiatur duci recta LP, erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes, FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili pro-



fus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferere. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR, quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defm. lib. 1. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque rectæ ER, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c., reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales. Ac propterea decem tria ngula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cum eorum omnia latera equalia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur,

10. tertijde.
47. primi.

redatur, suntque rectæ QY , EZ , æquales singulæ, lateri decagoni circuli $FGHIK$, uel $RSTVX$, & connectantur rectæ VQ , VY , XQ , XY , GE , GZ , HE , HZ . Quoniâ ergo QX , semidiameter est circuli $RSTVX$, hoc est, latus hexagoni, & QY , latus est decagoni eiusdem circuli, erit quadratum lateris pentagoni, XV , æquale quadratis rectarum QX , QY . Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY , quod angulus XQY , rectus sit, ex defn. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum $FGHIK$, $RSTVX$, parallela sint ostensa, sitque BQ , ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ , ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX , in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XV , æquale est quadrato rectæ XV , proptereaquæ recta XY , rectæ XV , æqualis. Eodemque modo eidem XV , æqualis ostendetur VY . Ac proinde triangulum VYX , æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY , SY , TY , (quas tamen, ut uitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX , $RY S$, SYT , TYV , æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX , hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH , (cum EG , sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ , latus decagoni, angulusque GEZ , rectus, ex 3. defn. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI , IZK , KZF , FZG , (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera, constitutum erit ex ipsis Icosædnum. Quod dico comprehendere spheræ diametri AB .

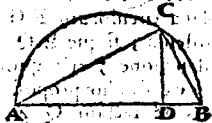
$DIVISA$ recta EQ bifariam in a , ducantur rectæ aF , aX , aV . Quoniam igitur latera aQ , QV , trianguli aQV , æqualia sunt lateribus aQ , QX , trianguli aQX , cum QV , QX , sint semidiametri circuli $RSTVX$,

10. versijde.
47. primi.

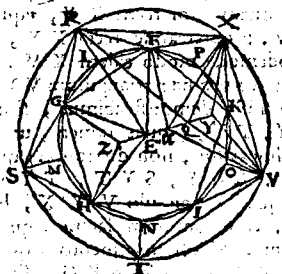
VX

4. primi.

VX : Sunt autem & anguli $\angle QV$, & $\angle QX$, æquales, nempe recti, ex defn. 3. lib. 1. Erunt & bases αV , & αX , æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α , Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR , & αS , & αT , æquales & inter se, & ipsæ αV , & αX . Rursus quia latera αQ , & αX , trianguli αQX , æqualia sunt lateribus αE , & αF , trianguli αEF , cum $\angle QX$, & $\angle EF$, sint semidiametri circulorum æqualium, & EO, di-



4. primi.



ta sic bisariam in α . Sunt autem & anguli $\angle QX$, & $\angle EF$, æquales, nimirum recti, ex defn. 3. lib. 1. Erunt quoque bases αX , & αF , æquales : Eodemque modo si ex α , E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG , & αH , & αI , & αK , æquales ipsi αX ; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam uero QE, semidiameter est, hoc

9. versij dec.

3. versij dec.

est, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli, erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens E α , dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ , quintuplum potest eius, quod ex Ea, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF , quintuplum eiusdem quadrati rectæ E α . (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE , ex scholio propof. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius E α ; erunt quadrata rectarum EF, & E α , simul quintupla quadrati rectæ Ea. Cū ergo quadratis rectarum EF, & Ea, æquale sit quadratū rectæ α F, erit quoque quadratū rectæ αF , quintuplū quadrati rectæ Ea.) Igitur æqualia sūt quadrati rectarum αZ , & αF , ac proinde rectæ ipsæ αZ , & αF , æquales erūt. Cū igitur ZY, bisaria secet in α , (propterea quod

47. primi.

quo si æqualibus α E, & Q, æquales rectæ addantur E Z, Q Y, totæ Z α , Y α , æquales fiant.) Erunt omnes rectæ duæ ex α , ad omnes angulos Icosædri æquales. Quo circa sphaera descripta circa diametrum ZY, ex centro α , per omnes angulos Icosædri constituti transibit. Hanc ergo sphaeram dico æqualem esse sphaeræ diametri AB.

Cum sit ut α Z, ad α E, ita Y Z, dupla ipsius α Z, ad Q E, duplam ipsius α E; Ac propterea ut quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ Q E; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ α E: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc est, quadrati rectæ BC; quod rectæ Q E, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC: Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB. (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6 sit ut AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit ut AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 10 lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, equalia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphaeræ circa ipsas, æquales erunt.

Quoniam denique diameter sphaeræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosædri esse lineam Irrationalem, quæ Minor uocatur.) potestque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi equalis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5 ad 1. uel 10. ad 2. erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosædri, Irrationalis erit linea, quæ uocatur Minor. Icosædrum igitur constituimus, & sphaera sumus complexi, qua & ante dictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosædri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor. quod erat faciendum.

COROL.

COROLLARIUM I.

Ex dictis inferitur, sphaerae diametrum, esse potentia quintuplā semidiametri, circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est. & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est, quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectae BC, hoc est, semidiametri EF.

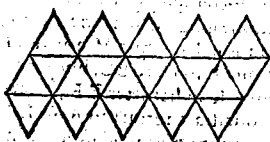
COROLLARIUM II.

Item manifestum est, sphaerae diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ, diameter sphaerae componitur ex BQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHK.

COROLLARIUM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectae, quae ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectae LP, sit quoque parallela recta HI, ut in scholio propos. 27. lib. 3. demonstravimus; (eo quod aequales sint arcus HL, LP; continetur enim uterque recta decimas partes totius circuli inferentiae,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de ceteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.



Quod si ex aliqua materia consociantur viginti triangula aequilatera inter se aequalia, disponanturque, ut haec figura indicat, componetur Icosaedrum se-

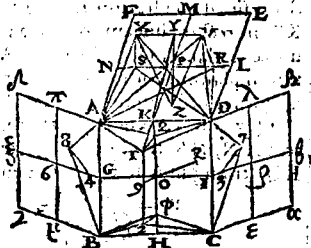
cundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

17. PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRUM constituere; & sphaera complecti, qua & praedictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus irrationalis est linea, quae vocatur Apotome.

SIT una basis cubi data sphaera comprehensu, quadratum $ABCD$, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos $ADEF$, ut sit communis horum sectio recta AD . (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos: Nam in precedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis $EFGH$, quatuor lineæ EL, EK, GL, HM , ipsi basi $EFGH$ perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basim $EFGH$.)

Diuisis itaque cunctis lateribus bisariâ in punctis G, H, I, K, L, M, N , quæ rectis connectantur secantibus sese in O , p. cætris quadratorum, ut constet ex demonstratione octau. problematis lib. 4. Secantur OK, PL, PN , extrema ac media ratione



in punctis Q, R, S , ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX , æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS . Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX , ita ut $ATDVX$, esse unum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum $ATDVX$, sit in uno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX , sint ad quadratum $ADEF$, rectæ, ipsæ erunt parallelæ; Ac, præterea, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS , quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN , æquales sint.) erunt quoque coniungentes rectæ RS, VX , æquales & parallelæ: Est autem & AD , eidem RS , siue LN , parallela, eo quod AN, DL , parallelæ sint & æquales. Igitur & AD, VX , parallelæ sunt; Ac, propterea rectæ coniungentes AX, DV , in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium $ADVX$, in uno existet plano: Est autem & triangulum ATD , in uno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio $ADVX$. Ex P , ducat PY , parallela ipsi RV , quæ erit recta ad quadratum $ADEF$, quod ad idem recta sit RV : Et connectantur rectæ KT, KY . Quamvis igitur est ut OK , ad OQ , ita OQ , ad QK , ob sectionem rectæ

8. undec.

6. undec.

33. primi.

33. primi.

9. undec.

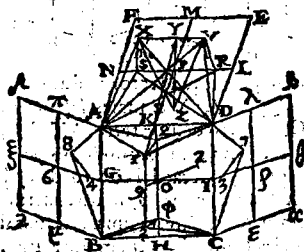
7. undec.

8. undec.

rectæ OK : Est autem KP , ipsi OK , æqualis, (sunt enim dimidia latera cubi,) & PY , ipsi OQ , (cum æqualis sit ipsi RV , quæ posita sunt æqualis ipsi OQ , maiori segmento; Est quoque ut KP , ad PY , ita OQ , hoc est, QT , ad æqualis, ad QK . Quare cum triangula PKY , QTK , duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sinque ad unum angulum K , composita, ita ut homologa latera sint parallela, nempe PK , & QT , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ABGD$, & PY , QK , inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum $ADEF$: Erunt reliqua latera KY , KT , in rectam lineam collocata ; Ac propterea recta TY , in uno erit plano, ideoque planum ATD , & planum $ADVX$, unum planum constituent, per rectas TY , AD , ductum. Quocirca pentagonum $ATDVX$, in uno existit plano.

Quo d vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN , NS , trianguli ANS , æqualia sint lateribus AK , KQ , trianguli AKQ ; (Sunt enim AN , AK , dimidia la-

tera cubi, & NS , KQ , segmenta minora rectorum æqualium sectorum) & anguli ANS , AKQ , recti ; si ducatur recta AQ , erunt bases AS , AQ , æquales. Rursum cum latera AS , SX , trianguli ASX , sint æqualia lateribus AQ , QT ; tri-



anguli AQT ; (Nam rectæ AS , AQ , ostensæ sunt æquales, & SX , QT , sunt segmenta maiora rectorum æqualium sectorum) & anguli ASX , AQT , recti, ex defin. 3 lib. 1. Erunt quoque bases AX , AT , æquales. Quod si ducatur recta DQ , ostendemus eodem argumento, rectam DT , rectæ AT ; si uero ducatur recta DR , rectam DV , rectæ DT esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA , AT , TD , DV , æqualia ; quibus etiam æquale ostendimus reliquum VX , hac ratione. Quadrata rectorum PN , NS , simul tripla sunt quadrati rectæ PS , hoc est, quadrati rectæ SK : Est autem quadrato rectæ PN , æquale quadratum rectæ AN . Igitur & quadra-

6. undec.

3. sexti.

1. undec.

4. primi.

4. primi.

4. tertijdec.

quadrata rectarum AN , NS , simul tripla sunt quadrati rectæ SX . Cum igitur quadratis rectarum AN , NS , æquale sit quadratum rectæ AS ; erit quoque quadratum rectæ AS , triplum quadrati rectæ SX . Ac proinde quadrata rectarum AS , SX , sunt; quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX . Est autem quadratis rectarum AS , SK , æquale quadratum rectæ AX . Quadratum ergo rectæ AX , quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX , hoc est, quadratum rectæ P , hoc est, quadratum rectæ XY . Sunt enim rectæ P , S , X , Y , æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX , quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY , ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX , dupla sit ipsius XY ; Erunt quadrata rectarum AX , VX , æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cum & XA , AT , TD , DV , ostense sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum $ATDVX$.

47. primi.

47. primi.

4. primi.

Quod QD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR , AN ; cum PN , secta sit in S , extrema ac media ratione, eique addita PR , æqualis maiori segmento PS erit quoque NR , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP . Quadrata igitur rectarum NR , R , P , simul tripla sunt quadrati rectæ NP , hoc est, quadrati rectæ AN . Est autem quadratum rectæ R , V , æquale quadrato rectæ R , P . Ergo & quadrata rectarum NR , R , V , tripla sunt quadrati rectæ AN ; Ac proinde quadrata rectarum NR , R , V , AN , quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ AN . Sunt autem quadrata rectarum NR , AN , æqualia quadrato rectæ AR . Igitur & quadrata rectarum R , V , AR , quadrupla sunt quadrati rectæ AN . Cum ergo quadratis rectarum AR , R , V , æquale sit quadratum rectæ AV ; Erit quoque quadratum rectæ AV , eiusdem quadrati rectæ AN , quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN , quadruplum est quadratum rectæ AD , ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD , dupla sit ipsius AN . Acqualia igitur sunt quadrata rectarum AV , AD , ideoque & rectæ AV , AD , æquales. Simili argumento, ductis rectis DS , DX , ostendemus DX , DA , æquales esse; ac propterea tres rectæ AD , AV , DX , inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA , TD , anguli TAD , æqualia sunt lateribus DV , VX , trianguli DXV ; & bases AD , DX , æquales quoque: Erunt & anguli ATD ,

5. tersijdec.

4. tersijdec.

47. primi.

47. primi.

8. primi.

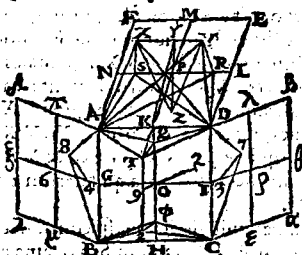
Ec

DVX.

DVX, æquales Non secus ostendetur angulus DVX, equalis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatere ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV; ipsum erit æquiangulum.

7. vers. dec.

Q u o d si sumantur alia duo cubi quadrata C & β D, B γ δ A, recta ad quadratum ABCD, in cōmunibus sectio



nibus CD, AB, quorū singula latera bisariam secantur in ε, θ, λ, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secantur deinde OH, OK, p l. σ G, extrema ac media ratione in pū Ais φ, Q, 3, 4, ex qui-

bis ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendicularēs φ 2, Q T, 3 7, 4 8, æquales segmentis maioribus φ O; Q O, 3 ρ, 4 σ, coniunganturq; rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 B, B 2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T 2 C 7 D; T Z B 8 A, æquilatera esse & equiangulara, & æqualia priori A T D V X, ob communia latera T D, T A. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangencia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo coherentia lateribus cōmunibus T D, T A. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangētia reliqua nouē cubi latera; constitutum erit Dodecaëdron. Quod quidem sphaera comprehendit, qua & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTUR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorū latera bisariam secantes ducuntur, nempe planū ADEF, & eius oppositū, planis ductis per rectas KM, LN; Itē planū ABCD, & eius oppositū, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniā igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basib⁹ cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorū sectiones ad eadē cubi plana rectæ. Quare cū YP, recta sit ad planū ADEF, ipsa producta uerius Z, erit communis sectio plano-

19. undec.

planorum per rectas KM , LN , ductorum. Eodē pacto, si ex O , ad planum $ABCD$, erigatur perpendicularis $9 OZ$; erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas GI , HK , ducuntur. Quia uero dicte cōmunes sectiones, & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secant se mutuo bifariam in Z ; secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphaerę cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctū igitur Z , centrum erit sphaerę circa cubum descriptę; Ac proinde omnes rectę ex Z , ad omnes angulos cubi ductę intese; quales erunt. Quibus omnibus equalēs quoque esse omnes rectas ex Z , ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX . Quoniam parallele sunt KP , OZ , quod utraq; recta sit ad planum $ABCD$; Item parallele sunt OK , ZP , quod utraq; recta sit ad planum $ADEF$; erit $P KOZ$, (debent enim duo puncta Z , intelligi esse coniuncta) parallelogrammum; ac propterea PZ , equalis erit ipsi KO , hoc est, ipsi NP , dimidio lateri cubi: Est autem & PY , ipsi PR , æqualis. Tota ergo ZY , toti NR , equalis erit. Quare cum quadrata rectarum NR , PR , simul tripla sint quadrati rectę NP , quod NR , in P , secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY , PY , hoc est, quadrata rectarum ZY , YX , simul tripla quadrati rectę PZ : (Est enim YX , equalis ipsi PS , hoc est, ipsi PY .) Est autem quadratis rectarum ZY , YX , equalē quadratum rectę ZX . Igitur & quadratū rectę ZX , triplum erit quadrati rectę ZP , hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphaerę cubum cōprehēditis. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratū semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX , quadrato semidiametri sphaerę, seu cubi; Ac propterea ZX , equalis semidiametro. Eadē ratione erit ducta recta ZV , semidiametro equalis. Vel certe, quia cum latera ZY , YX , triaguli ZYX , equalia sint lateribus ZY , YV , triaguli ZYV , & anguli cōtenti recti. (cum. n. PY , sit perpen-

39. undec.

6. undec.

34. primi

4. tertijdec.

47. primi.

15. primi

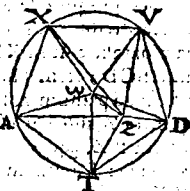
22. sexti.

15. tertijdec.

Ec z dicularis

4. primi.

dicularis ad L N, erit quoque eadem ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) Erunt bases Z X, Z V, æquales : Eademque ratione semidiametro sphaeræ æquales erunt rectæ ductæ Z A, Z D. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphaeræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphaeræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, rum sit æquilatrum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphaeræ perpendicularis demittatur Z o, cõ-



rectanturque recte $\omega A, \omega T, \omega D,$
 $\omega V, \omega X$. Quoniam igitur qua-
 dratū recte $Z A$, equale est qua-
 dratis rectarum $Z \omega, \omega A$; & qua-
 dratum recte $Z X$, quadratis recti-
 rum $Z \omega, \omega X$: Sunt autem qua-
 drata rectarum $Z A, Z X$, equa-
 lia, quod recte $Z A, Z X$, obfense

fint æquales ; Igitur & quadrata reſtarum $Z\omega$, ωA , quadratis reſtarum $Z\omega$, ωX , æqualia ; Ac proinde dempto communi quadrato reſtæ $Z\omega$, æqualia reliquantur quadrata reſtarum ωA , ωX , ideoque reſtæ ipſæ ωA , ωX , æquales erunt. Non aliter oſtendentur reſtæ ωV , ωD , & inter ſe, & ipſæ ωA , ωX , æquales, quod & reſtæ ZV , ZD , æquales ſint oſenſæ reſtis ZA , ZX . Quare cum ex ω , cadat in circumſcriptionem plures reſtæ lineæ æquales, quam duæ punctum ω , centrum erit circuli ; Ac proinde ωT , reliquis ex centro ductis æquali ; ſedoque quadrata reſtarum $Z\omega$, ωA , æqualia erunt quadratis reſtarum $Z\omega$, ωT . Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum reſtæ $Z A$; his uero quadratum reſtæ $Z T$; Erunt æqualia quadrata reſtarum ZA , $Z T$; proptereaq; & reſtæ $Z A$, $Z T$, æquales . Quare ſphæra comprehendens cubum ex centro Z , deſcripta comprehendet pentagonum quoque $ATDVX$; Eodemq; modo & reliqua pentagōna Dodecaedri ; Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur, Dodecaedrum, qua cubus.

P O S T R E M O cum sit ut NP, ad PS, ita PS, ad SN;
erit quoque ut NL, dupla ipsius NP, ad RS duplam ipsius
PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN,
RL.

RL,

RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, feceretur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurable est quadrato diametri sphaerae, quae Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi aequale, Irrationalis est linea, quae uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constitutus, & sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

6. tertijdec.

COROLLARIUM I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: sit autem LN, aequalis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi feceretur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

COROLLARIUM II.

Si c quoque latus cubi aequale est lineae rectae subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum aequalis rectis A V, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

Quoniam uero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea feceretur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphaerae.

8. tertijdec.

5. tertijdec.

COROLLARIUM III.

Constat etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis aequalibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt V X, T a, quae uidelicet parallela sunt lateribus cubi E F, A B, aliaque quatuor reperiuntur super reliquis quatuor bases cubi; quorum, quae super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis

Ec 3 rectis,

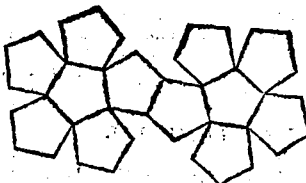
rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ , $9Z$, &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo interfecant in centro Z . Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ , OZ , æquales sint dimidio lateri cubi; & YP , $9O$, æquales maioribus segmentis. equalibus PS , OQ ; Erunt totæ YZ , $9Z$, æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z , ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z , mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo $KOZP$, angulus OZP , rectus est, cum opponatur recto OKP . Non aliter ostenduntur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficiere angulos rectos. Omnes enim parallele sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, ut perspicuum est.

C O R O L L A R I U M . I I I I .

D E M O N S T R A T U R constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY , YP , tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ ; erit ZY , secta in P , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ , ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit ut ZY , ad ZP , ita ZP , ad PY ; ideoque ut dupla ipsius ZY , nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplâ ipsius ZP , minimum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP , ad duplâ ipsius PY , hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphaera.

15. quinti.

S C H O L I O N .



Q U O D si ex aliqua materia cõficiantur duodecim pentagona æquilatæ, & æquiangula, inter se equalia, disponanturq; ut hac figura indicat, cõponetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem.

sem, si rite inter se complicantur.

18.

P R O B L . 6 . P R O P O S . 18 .

L A T E R A quinque figurarum exponere,

nerf,

nere, & inter se comparare.

Si T sphaerę diameter AB , quę in C , secetur bifariam; In D , uero ita, ut BD , sit ipsius pars tertia; In E , denique ita, ut BE sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB , semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E , ipsi AB , perpendiculares CF, DG, EH ; connectanturque rectę AF, BF, AG, BG, AH, BH . Post hæc ex HA , abscindatur HI , equalis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH ; connectaturque recta BI . Postremo BG , secetur extrema ac media ratione in K , sitque maius segmentum BK .

Quod igitur attinet ad expositionem laterũ prædictarũ figurarum, dico AG , esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF , latus Octaedri; BG , latus cubi; BI , latus Icosaedri; BK , denique latus Dodecaedri. Quoniam AG , media proportionalis est inter BA, AD , ex coroll. propof. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propof. 20. eiusdę lib. ut BA , ad AD , ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AG : Est autem BA , ipsius AD , sesquialtera; cum talium partium 2 sit AD , qualium 3, est BA . Igitur & quadratum rectę BA , sesquialterum est quadrati rectę AG ; Ac proinde cum diameter sphaerę sit potentia sesqui-

13. tertijdec.

altera lateris Tetraedri; Erit AG , latus Tetraedri. Rursus quoniã AF , est media proportionalis inter BA, AC , ex eodę coroll. propof. 8. lib. 6. Ac proinde ut BA , ad AC , ita quadratũ rectę BA , ad quadratũ rectę AF ; ex adducto coroll. propof. 20. lib. 6. Est autę BA , ipsius AC , dupla: Erit quadratũ rectę BA , duplũ quadrati rectę AF . Quare cum diameter sphaerę potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit AF , latus Octaedri. Eodem modo erit BF , latus Octaedri.

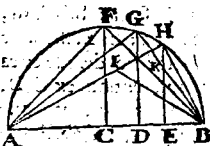
14. tertijdec.

Deinde cũ BG , sit media proportionalis inter AB, BD , ideoque ut AB , ad BD , ita quadratũ rectę AB , ad quadratum rectę BG , ex præfatis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem AB , ipsius BD , tripla, ex constructione: Erit quadratum rectę AB , triplum quadrati rectę BG . Quocirca cum sphaerę diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG , latus cubi.

15. tertijdec.

Praeterea quia, ex eisdę corollarijs, BH , est media proportionalis inter AB, BE , atque idcirco ut AB , ad BE ,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphaeræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propof. 16. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, simul; Ac proinde cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam obrem B I, latus est Icosaedri.



10. tertijdec.

47. primi.

16. tertijdec.

D E N I Q V E, cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti, ex coroll. 1. propof. 17. huius lib. **Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphaera descriptarum**

Q V O D uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphaeræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6.

Diamet.	6.	fuerit quadratum diametri, talium 4 esse
Tetraed.	4.	quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3.
Octaed.	3.	quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2.
Cub.	2.	

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphaeræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter sphaeræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphaeræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

6. decimi.

tionalia: Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter spherę, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. 9. decimi.

A T uero latera Icosaedri & Dodecaedri, quoniam sunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonstratum est; nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro spherę commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

S E D neque inter se ullo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si uamque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, erit quoque latus Icosaedri, Apotome. 104. decimi
Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia 106. decimi
esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, quod latus Icosaedri Minor sit. 106. decimi
Quod est absurdum. Nā ex scholio propos. 112. lib. 10 Apotome, & Minor sunt lineę Irrationales prorsus inter se differentes, ita ut neutra sit ead. m. alteri.

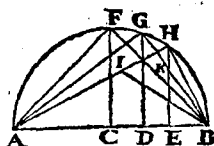
I T A Q U E quamvis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro spherę, ideoque Rationalia existant; duo uero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quę forte causa fuit, cur Euclides non eodem

eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

N A M latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propof. 28. lib. 3.

E O D E M modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

L A T V S autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus.



Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectę BD, cum nōcupla propor-

tio sit duplicata proportionis triplę ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectę AB, talium 1. erit quadratum rectę BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectę AB, taliū 3. est quadratum rectę BG, quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cū equalia sint quadrato rectę BG. Igitur si auferatur quadratum rectę BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectę GD. Quoniam uero quadratum rectę AB, quintuplum est quadrati rectę BH, erit quadratum rectę BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectę GD, maius est quadrato rectę BH, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rursus quia diameter si hęræ AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propof. 16 huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectę AB, hoc est minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertię parti rectę AB; erit dupla illius, æqualis duabus

20. sexti.

15. tertijdec.

8. quinti.

10. quinti

duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD ; Ac propterea BH , reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD ; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB , noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD , erit idem quadratum rectæ AB , noncuplum quadrati rectæ BH . Quod est absurdum. quintuplū enim est demonstratū. Non ergo HI , tertia pars est ipsius AB : Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI , dicatur maior tertia parte rectæ AB ; & proinde dupla ipsius HI , maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD , erit BH , minor quam tertia pars BD . Quare quadratum rectæ AB , maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BD . Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI , tertia parte ipsius AB : Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD . Itaque cum rectæ GD , DB , maiores sint rectis BH , HI , ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Est autem quadratum rectæ BG , æquale quadratis rectorum GD , DB ; & quadratum rectæ BI , quadratis rectorum BH , HI . Quadratum ergo rectæ BG , maius quoque erit quadrato rectæ BI ; Ac proinde recta BG , nempe latus cubi, maior erit quam recta BI , latus scilicet Icosædri.

47. primi

M A T H V S denique esse latus Icosædri BI , latere Dodecaedri BK , hac ratione patefiet. Cum rectæ BG , diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK , & minus GK ; erit rectangulum sub BG , BK , maius rectangulo sub BG , GK ; atque adeo rectangula sub BG , BK , & sub BG , GK , simul maiora duplo rectanguli sub BG , GK : Est autem rectangulis sub BG , BK , & sub BG , GK , æquale quadratum rectæ BG ; Et duobus rectangulis sub BG , GK , æqualia sunt duo quadrata rectæ BK . (Nā cū sit, ut BG , ad BK , ita BK , ad GK ; erit quadratū rectæ BK , æquale rectangulo sub BG , GK ; ideoque duo quadrata rectæ BK , æqualia duobus rectangulis sub BG , GK .) Maius igitur quoque est quadratū rectæ BG , duobus quadratis rectæ BK ; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG , sex quadratis rectæ BK : Atqui tribus quadratis rectæ BG , æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH . (Cum enim quadratum rectæ AB , triplum sit quadrati rectæ BG ,

2. secundi

17. sexti.

& quin-

& quintuplum quadrati rectæ B H ; erunt tam tria quadrata rectæ B G , quam quinque quadrata rectæ B H , æqualia eidem quadrato rectæ A B , ideoque tria illa his quinque equalia .) Igitur & quinque quadrata rectæ B H , maiora erunt sex quadratis rectæ B K ; Ac proinde unum quadratum rectæ B H , maius erit uno quadrato rectæ B K . (si namque æquale esset quadratum rectæ B H , quadrato rectæ B K , uel minus ; forent quinque quadrata rectæ B H , minora sex quadratis rectæ B K . quod est absurdum , cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata .) Quam ob rem & recta B H , maior erit quam recta B K ; Ac propterea cum B I , maior sit quā B H , multo maior erit B I , latus uidelicet Icosædri , quā B K ; latus Dodecaedri . Latera igitur quinque figurarum exposuimus , & inter se comparauimus . Quod erat faciendum .

SCHOLION.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & equiangularis contineatur, inter se equalibus, hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidæ angulus;

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque angulus Icosædri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idẽ punctum conu-
ribus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertia partes unius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus, minoribus quā quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quā sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex
quatuor

quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & equiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unū rectum, ac propterea quintam partem unius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, maior sit recto, eo quod contineat unum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & equiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea duas partes sextas unius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectus. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quā tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & equiangulis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituatur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si vero quatuor eiusmodi triangula conveniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosædri viginti triangulis eiusmodi contentum.

Q V O D

Q V O D si tria quadrata equalia coeant in vnum punctū, ut constituent angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

P O S T R E M O, si tria pentagona aequilatera, & equiangula, inter se equalia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

H O C etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

S I enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

E X E M P L V M. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, ut in 3 fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modū & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum cōponentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

Q V O D si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel. quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt angulum solidum constituendum, ut

numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLUM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 12. anguli, qui si dividantur in 3. (Tot enim anguli constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum unius quadrati, sunt 24. anguli, qui divisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt unum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triagula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius triaguli, sunt 24. anguli, qui divisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 26. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, sunt 60. anguli, qui divisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producant 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, sunt 60. anguli, qui divisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.



EVCLIDIS

EVCLIDIS

ELEMENTVM XIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur : vt alij uero,
Hypsiclis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER PRIMVS.



PROOEMIUM HYPsiclis ALE- xandrini ad Protarchum.



BASILIDES Tyrus, Protar-
che, Alexandriam profectus, pa-
trique nostro ob disciplinae societa-
tem commendatus, longissimo pere-
grinationis tempore cum eo uersa-
tus est. Cumq; differerent aliquan-
do de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri
& Icosaedri eidem sphaerae inscriptorum, quam hac in-
ter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tra-
didisse Apollonium; quae a se emendata, ut pater meus
dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea inci-
di in alterum librum ab Apollonio editum, qui demon-
strationem accurate complectebatur de re proposita,
ex cuiusque problematis indagatione magnam equidem

cupi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspicui potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conyicere licet, studio nos postea scripsisse uideamur, id monumentis consignatum tibi dedicandum duximus, ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, cum uel maxime in Geometria uersatus, scite ac prudenter iudices ea, qua dicturi sumus. Quae cum uero, quae tibi cum patre fuit, aut consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

T R E D E C I M. libri hactenus expositi ab omnibus Euclidis ascribuntur: Duo uero subsequentes a plerisque Hypsicles Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium uel intra aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurimum mutantur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quae spectant ad comparationes ditorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unus in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quatuordecimus, quinque uero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuersum disserere. proposita uaria theoremata, atque problemata, quibus & praedicta corpora regularia inter se comparantur; & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulum in hoc negotio collocarunt, non negamus. Nec enim non solum insequentibus duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletant; uerum etiam integrum librum, qui decimus sextus est ordine adiectus, in quo proprietates illius

stres de diffis corporibus proponit. Ceterum precipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex eo eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QUONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus, tam in numero propositionum, quam in eandem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, idèque a vobis discerpant, annotauimus in margine ordinem utriusque quibus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine auctoris tantum numerus reperitur, nullam esse tam differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota $\odot$, intelligendum est, in Hypsiclæ dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loca numerari inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

I. THEOR. I. PROPOS. I.

QUAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

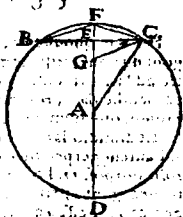
Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli, Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DE, sumptaque EG, equali ipsi BF, connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. Quoniam igitur perpendicularis AE, secatur rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti, erunt bases CF, BF, æquales, idèque & arcus

3. tertij.

4. primi.

CE,

C F, B F, æquales. Ac proinde existente arcu B. C., quinta
 parte totius circumferentiæ, erit C F, eiusdem pars decima;
 atq; adeo recta C F, latus tridecagoni. Rursus quia latera C E, E F,
 trianguli C E F, æqualia sunt lateri-
 bus C B, E G, trianguli C E G,
 suntque anguli contenti, recti; e-
 runt & bases C F, C G, & anguli
 C F G, C G F, æquales. Quia ve-
 ro arcus C F, quinta pars est semi-
 circumferentiæ D G F, cum sit to-
 tius circumferentiæ decima pars;
 Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. est arcus D C,
 hoc est, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. Quare & an-
 gulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: Est autem an-
 gulus C F D, dimidium anguli D A C, cum illius ad circumse-
 rentiam, & huius ad centrum, eadem sit basis D C. Igitur
 angulus C F D, atque adeo illi equalis ostensus C G F, duplus
 erit anguli C A F: Atqui angulus C G F, externus, æqualis est
 internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cum igitur G A C,
 sit dimidium anguli C G F, ut ostensum est, erit G C A, reli-
 quum dimidium eiusdem anguli C G F, ideoque æquales e-
 runt anguli G A C, G C A; ac proinde & latera A G, C G, æ-
 qualia: Est autem C G, recta ostensa equalis rectæ C F. Igitur
 & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æ-
 qualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F C, simul:
 Ac proinde tres simul A E, E F, F C, hoc est, duæ simul A F,
 F C, duplæ erunt ipsius A E, atque idcirco contrario erit
 A E, ducta uidelicet perpendicularis in pentagoni latus, dimi-
 dia duarum simul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & deca-
 goni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in penta-
 goni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat de-
 monstrandum.



28. tertij.

4. primi.

33. sexti.
20. tertij.

32. primi.

6. primi.

COROLLARIUM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro cir-
 culi ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum,
 quem dicta hæc linea recta subtendit, bisariam. Demon-
 stratum enim est rectam A E, quæ ex centro perpendi-
 cularis

F f z

cularis est ad B C, dividere arcum B C, bisariam in F.

C O R O L L A R I U M . II

Hic quoque sit, perpendicularem ex centro, ad latus pentagoni ductam, æqualem esse utrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli equilateri eidem circulo inscripti additur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli equilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

T H E O R . 2 . P R O P O S . 2 .

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportionēs.

S E C E N T U R binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportionēs secari, hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulum sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique Aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F. Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ C F.



17. sexti.

CF; Sed quod quater continetur sub A B, EB, una cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB, EB; Et quod quater continetur sub C D, F D, una cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ CF; Ac proinde, ut recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam CF: Et componendo, ut composita recta ex AB, EB, & recta AF, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AE, ita recta composita ex C D, F D, & recta CF, id est, dupla ipsius C D, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipsius AB, ad duplam ipsius C D, ita AE, ad CF: Ut autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius C D, ita est AB, ad C D. Erit ergo ut AB, ad C D, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum sit ut tota A B, ad totam C D, ita AE, ablata ad CF ablatam, erit quoque reliqua EB, ad reliquam F D, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad C F, ita erit EB, ad F D, cum utraque proportio eadem sit proportioni AB, ad C D: Et permutando, erit ut AE, ad EB, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secantur, &c. Quod erat ostendendum.

8. secundi.

12. sexti.

15. quinti.

19. quinti.

COROLLARIUM

Ex hac propositione & præcedenti inferemus hoc theorema.

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli

ducta; minus vero segmentum ED , æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Intersecta namque recta AD , ad F , & connexa recta FC ; erit FC , latus decagoni, cum ex coroll. 1. propo. 1. huius lib. arcus BC , nempe quinta pars totius circumferentiæ, bisi-
 9. *tertydec.* am secetur in F ; & proinde recta composita ex AF , latere hexagoni, & FC , latere decago-
 ni, secta erit extrema ac media ratione, cuius
 maius segmentum AF , latus hexagoni, minus
 vero segmentum FC , latus decagoni. Quare
 ut in hac propo. ostensum est, erit ut tota AD ,



diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam com-
 positam ex AF , FC , similiter diuisam, ita AE , maius segmentum
 ad AF , maius segmentum; & ED , minus segmentum ad FC ,
 1. *quartide.* minus segmentum: Est autem tota AD , dimidium totius compo-
 sitæ ex AF , FC . Igitur & AE , ipsius AF , semidiametri, & ED ,
 ipsius FC , lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll.
 propo. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æ-
 quilateri ducta, equalis sit dimidii semidiametri, perspicuum est,
 maius segmentum AE , æquale esse dictæ perpendiculari, minus
 uero ED , dimidio lateris decagoni.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

2. *4.* SI in circulo pentagonum æquilaterum
 describatur; quod ex latere pentagoni, &
 quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni
 subtenditur, recta linea, utraque simul qua-
 drata, quintupla sunt eius, quod ex semidia-
 metro describitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo $ABCDE$, cuius cen-
 trum F , pentagonum $ABCDE$, subtendatque recta AC ,
 bina latera AB , BC . Dico quadrata
 rectarum CD , AC , simul quintupla
 esse quadrati ex semidiametro circuli
 descripti. Ducta enim ex A , per cen-
 trum recta AFG , quæ per coroll. 1. pro-
 pos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD ,
 & latus CD , bisi-
 arcus CG , decima pars totius circunfe-
 rentiæ,



rentiæ, ideoque recta subrepta CG, latus decagoni. Quoniam
igitur recta AG, dupla est rectæ FG, erit ex scholio propof. 4.
lib. 2. quadratū rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG.
Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarū
AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG; quadrupla
sunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum
AC, CG, FG, quintupla quadrati eiusdem rectæ FG. Cum
ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni,
& lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris
videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum
AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semia-
diametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum de-
scribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c.
Quod erat demonstrandum.

47. primi

10. verside.

COROLLARIUM.

INFERATUR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphaera eadem cubus, & dodecaedrum inscriban-
tur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dode-
caedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiamet-
ri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCUMSCRIBAT enim circulus ABCE, pentagonum
unum Dodecaedri in quapiam sphaera descripti; eritq; ex coroll.
1. propof. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, la-
tus cubi in eadem sphaera descripti. Perspicuum est autem, quadra-
ta rectarū AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quin-
tupla esse quadrati semidiametri FG, &c.

3. quanside.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli sece-
tur extrema ac media ratione; maius illius
segmentū erit latus decagoni eiusdē circuli.

SECEATUR AB, latus hexagoni alicuius circuli extre-
ma ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC.
Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD,
FF 4 latus

o.

3.

9. tertij dec.

2. quartide.

latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturq; in rectum ip-
si A B, utque tota composita B D, ex latere hexagoni, & late-
re decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius
maius segmentum BA: Ponitur autem & A B, secta in C,
similiter. Igitur erit ut B D, tota ad
maius sui segmentum A B, ita A B,
tota ad maius sui segmentum A C.
Sed est quoque ut B D, tota ad ma-
ius sui segmentum A B, ita A B, ma-
ius segmentum ad A D, segmentum minus, per definitio-
nem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut
A B ad A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea A C, A D,
æquales erunt. Cum ergo A D, ponatur latus decagoni il-
lius circuli, cuius latus hexagoni est A B; erit & A C, eiusdem
circuli latus decagoni.

5. tertij dec.

A L I T E R. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D,
æqualis maiori segmento A C; eritq; tota recta B D, diuisa
in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius
segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli;
erit, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. A D,
minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac pro-
pterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem
circulo descripti, cuius A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo
latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostenden-
dum.

2.

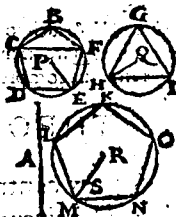
5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Do-
decaedri pentagonum, & Icosaedri triangu-
lum, eidem sphaeræ inscriptorum.

In sphaera, cuius diameter A, intelligatur descriptum
& Dodecaedrum, cuius unum pentagonum B C D E F, &
Icosaedrum, cuius unum triangulum G H I. Dico eundem
circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & trian-
gulum G H I, hoc est, circulos B C D E F, G H I, ipsi circum-
scribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus K L M,
N O,

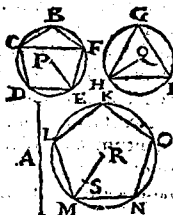
N O, pentagonum KLMNO, ex quo Icosaedrum sphaerae 16. *tertyde.*
 inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint late-
 ra Icosaedri, ideoque quod ibet ipsorum æquale cuius late-
 ri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ
 PE, QH, RM, Seceturq; RM, extrema ac media ratione in
 S; eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo 4. *quartide.*
 KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quo-
 que recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit,
 per coroll. 2. propos. 17. lib. 13, latus cubi in eadem sphaera
 descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos.
 BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi
 CF, secti extrema ac media ratione, erit ut tota CF, ad tota 2. *quartide.*
 RM, ita BF, maius segmentu ad RS, maius segmentum, Ac
 propterea ut quadratum rectæ CF, 22. *sesti.*
 ad quadratum rectæ RM, ita qua-
 dratum rectæ BF, ad quadratum re-
 ctæ RS. Atque adde, per ea, quæ
 demonstrata sunt in scholio pro-
 pos. 4. lib. 5. ut triplum quadrati re-
 ctæ CF, ad quintuplum quadrati re-
 ctæ RM, ita triplum quadrati rectæ
 BF, ad quintuplum quadrati rectæ
 RS: Est autem triplum quadrati re-
 ctæ CF, æquale quintuplo quadrati
 rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex
 propos. 14. lib. 13, quam quintuplum quadrati semidiamet-
 ri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13, æquale est quadra-
 to ex A, diametro sphaerae.) Igitur & triplum quadrati re-
 ctæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: Quia ue-
 ro quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est qua-
 drato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris de-
 cagoni: erunt quoque quinque quadrata rectarum MN, æqua-
 lia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis re-
 ctæ RS. Igitur & quinque quadrata rectarum MN, æqualia
 sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æ-
 qualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis
 rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS.
 Sed quoniam, (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque
 quadratis semidiametri PE, sint equalia,) tria quadrata re-
 ctæ



16. *tertyde.*

1. *quartide.*

Ita CF , & tria quadrata rectæ BF , æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE ; & quinque quadrata rectæ MN , æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH ; (Nam cū



12. tertij de.

MN , æqualis sit ostensa ipsi GH , lateri Icosædri, seu trianguli æquilateri; sit autem quadratū ipsius GH , æquale tribus quadratis semidiametri QH ; Erunt quinque quadrata rectæ GH , hoc est, rectæ MN , æqualia quindecim quadratis rectæ QH . Erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE , æqualia quindecim quadratis rectæ QH ; ac propterea unū quadratum rectæ PE , uni quadrato

rectæ QH , & idcirco semidiameter PE , semidiametro QH , æqualis. Quare circuli $BCDEF$, GHI , æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandū.

3.
6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F , circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri $ABCDE$, ducatur ad latus CD , perpendicularis FG . Dico rectangulum contentum sub FG , & CD , trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F , ad omnes angulos pentagoni, resolvetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cū bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque unius basis aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrentibus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. Quoniam uero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, equalium erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula equalia sint uni pentagono. Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigessesies, æquale quoque erit sexuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



41. primi.

ALITER. Facta eadem figure constructione, cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigessesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigessesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Ac idcirco triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei Dodecaedri.

41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

31.
7.

SI ex centro circuli triangulum Ico-
saedri circumscribentis, perpendicularis
ducatur ad unum latus trianguli; Erit,
quod sub dicto latere, & perpendicu-

lari

lari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resolvetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basis aliorum equalis. Ducatur



41. primi.

quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad EC; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam vero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint uni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

41. primi.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumptis; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt uiginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIUM.

ITA QUÆ superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuslibet

cuiuscunque Icosaedri, etiam si non describantur ambz figurz in eadem sphaera, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. Cum enim superficies Dodecaedri aequalis sit illi rectangulo trigies sumpto; Item superficies Icosaedri aequalis huius rectangulo trigies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. Quare erit superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud; trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

6. quartide.

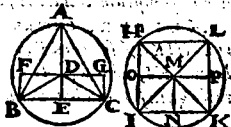
7. quartide.

15. quinti.

SCHOLIUM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium; Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro vero, & cubo duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi aequale. Sit enim primo triangulum Tetraedri.

ABC, circumscriptum a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, ut de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, aequale esse superficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, aequale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aequale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituent totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aequilatera ipsi ABC, aequalia, eo quod tria conficiunt unum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis aequale.



7. quartide

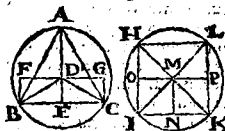
41. primi.

SIT secundo idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, aequale esse superficiei Octaedri. Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli

41. primi.

D B C.

DBC , hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem



rectangulam duodecies sumptum æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superfi-

ciem Octaedri, propterea quod tria consiciant unum. Igitur rectangulum BG , duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri.

S I T tertio quadratum cubi $HIKL$, circa quod circulus ex cetro M , describatur, & deducta MN perpendiculari ad IK , ducantur ex M , ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, ut quadratum resolvatur in quatuor triangula equalia; Atque per M , agatur OP , ipsi IK , parallela. Dico rectangulum IP , contentum sub OI , hoc est sub MN , & IK , sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. Quoniam rectangulum IP , duplum est trianguli MIK , hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula unum quadratum consiciant; Erit rectangulum IP , duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.

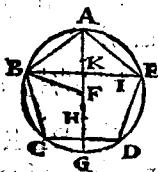
A L I T E R. Cum duo rectangula IP , consiciant quadratum $HIKL$; (sunt. n. IP , PH , equalia, cū recta OI , sit dimidiū lateris HI , nempe æqualis ipsi MN) constituet duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentū sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendētis angulū pentagoni æquilateri in eodē circulo descripti; æquale est dicto pētagono.

I N circulo, cuius centrū F , describatur pentagonū æquilaterum $ABODE$, & ducta diameter AG , diuidatur in quatuor

tuor æquales partes, quarum tres sint AH : Angulum uero A , subtendens recta BE , secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI , & una IE , ita ut BI , sit quintupla ipsius IE . Dico rectangulum comprehensum sub AH, BI , æquale esse pentagono $ABCDE$. Ducta enim recta BF , quoniam AH , continet tres quartas partes diametri, & AF , duas, cum sit semidiameter, erit AH , ipsius AF , sesquialtera. Quia uero recta FA , diuidens arcum BAE , bifariam, diuidit quoque rectam BE , bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13, in puncto K , contine-



bit tam KB , quam KE , tres sextas, rectæ BE , atque adeo cum BI , contineat quinque, continebit KI , duas; Ac proinde & KB , ipsius KI , erit sesquialtera. Quamobrem erit ut AH , ad AF , ita KB , ad KI ; atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI , æquale erit rectangulo sub medijs AF, KB . Est autem rectangulum sub AF, KB , duplum trianguli ABF , cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF , & eandem altitudinem BK , hoc est, inter easdem sint parallelas constructa. Igitur & rectangulum sub AH, KI , duplum erit eiusdem trianguli ABE . Est autem & rectangulum sub AH, KI , duplum rectanguli sub AH, IE ; propterea quod & basis KI , dupla sit basis IE , (continet, n. KI , duas sextas partes ipsius BE , & IE , unam.) eademque semper altitudo AH . Igitur æqualia sunt triangulum ABF , & rectangulum sub AH, IE ; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At uero pentagonum $ABCDE$, quintuplum est trianguli ABF , quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluitur, ductis rectis ex centro F , ut propos. 6. huius lib. docuimus; Rectangulum uero sub AH, BI , quintuplum est rectanguli sub AH, IE , quod & basis BI , quintupla sit basis IE , eademque semper altitudo AH . Igitur pentagonum $ABCDE$, & rectangulum sub AH, BI , æqualia sunt. Rectangulum ergo constructum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quoniam uero, si pentagonum $ABCDE$, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphaera descripti; BE , est latus cubi in eadem sphaera descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & unum latus trianguli Icosaedri in eadem sphaera constituti, (comprehensi uidelicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG , in H , (cum

16. sexti.

41. primi.

1. sexti.

1. sexti.

5. quartide.

(cum ex coroll. propos. 14. lib. 13. sect. semidiametrum FG , bisariam, quemadmodum & punctum H , eandem semidiametrum FG , bisariam dividit.) Manifestum est, rectangulum, comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vertex eius latus duota, nempe sub AH , & sub quinque sectis partibus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icosaedrum, inscriptum, sumitur sub BI , æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphaera constituti.

4.
8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SUPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icosaedri.

quartide.

1. sexti.

IN circulo $ABCD$, circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD , & trianguli $A D$ & ex centro E , ducantur ad AD , BD , perpendiculares EF , EG , secabunturque AD , BD , bisariam & EG , protracta secabit quoque arcum BD , bisariam in C , ex



coroll. 1. propos. 1. huius lib. atque adeo connexa recta CD , latus erit decagoni eiusdem circuli. Sit denique H , latus cubi in eadem sphaera cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse ut H , latus cubi, ad AD , latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam lateris cubi H , secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD , latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. Recta autem EG , secta quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF , ex coroll. propos. 2. huius lib. Erit, ut H , tota ad BD , maius sui segmentum, ita EG , tota ad EF , maius sui segmentum; Ac proinde rectangulum sub extremis H , EF , æquale erit rectangulo sub medijs BD , EG . Quia vero est, ut H , ad AD , ita rectangulum sub H , EF , ad rectangulum sub AD , EF , cum bases sint H , AD , altitudo vero semper eadem EF ; Erit quoque ut H , ad AD , ita rectangulum

2. quartide.

16. sexti.

1. sexti.

sub

sub B D, E G, (quod ostensum est æquale rectangulo sub H, E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare cum, ex coroll. propof. 7. huius lib. fit, ut rectangulum sub B D, E G, ad rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: Erit quoque, ut H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

A L I U M. Circumscribat pentagonum Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icosaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propof. 10. lib. 3. dividet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propof. 11. lib. 3. cuius quinque sextæ partes sint B K. Dico rursus esse, ut B E, latus cubi, ad F G, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam rectangulum sub A I, B K, æquale est pentagono A B C D E, ex coroll. propof. 8. huius lib. Item rectangulum sub A I, I F, æquale est triangulo A F G, ex scholio propof. 11. lib. 1. cum F G, basis trianguli duplo sit ipsius I F, basis rectanguli: Erit ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G: Est autem ut rectangulum sub A I, B K, ad rectangulum sub A I, I F, ita B K, ad I F, cum bases sint B K, I F, & altitudo eadem semper A I. Erit igitur, quoque ut pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B K, ad I F.

Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirum pentagonum A B C D E, & recta B K, æquemultiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum A F G, & recta I F, æquemultiplicentur per numerum 10.) erit quoque ut pentagonum A B C D E, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta B K, duodecies sumpta ad rectam I F, vigesies sumptam: Atqui recta B K, duodecies sumpta æquivaleret lateri cubi B E, decies sumpto; (Nam cum B K, contineat quinque sextas par-



5. quartide.
unap. 1

7
8

1. sexti.

4. quinti.

tes ipsius BE; continebit eadem BK, duodecies sumpta, sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta uero IF, ui-



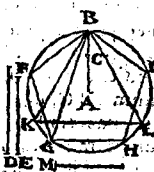
15. quinti

THEOR. 16. PROPOS. 10.

4.
9.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentē id, quod a tota, & id quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosædri eidem sphaeræ cum cubo inscripti.

SECTVX recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphaera eadem cum cubo descripti. Ex

[illegible]

me
di:

dia ratione, est latus Decagoni in circulo B F G H F, in quo
 nimirum A B, latus est Hexagoni; poterit B F, latus penta-
 goni & totam A B, latus nidelicet hexagoni, & maius seg-
 mentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Pos-
 sitam & recta M, totam A B, & minus segmentum B C,
 per ea, quæ ad propof. 47. lib. 1. demonstrauiamus. Dico
 sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Ico-
 saedri, ut est B F, potens totam A B, & maius segmentum
 A C, ad M, potentem totam A B, & minus segmentum
 B C. Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri
 B K, triplum est quadrati semidiametri A B. Item quadrata
 rectorum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C; Erit
 ut quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ A H, ita
 quadrata rectorum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M,
 ipsi æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim
 proportio est tripla. Permutando ergo erit, ut quadratum
 rectæ B K; ad quadratum rectæ M; ita quadratum rectæ
 A B, ad quadratum rectæ A C: Est autem ut quadratum rectæ
 A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad
 quadratum rectæ B F. (Nam cum rectæ B G, sectæ extre-
 mæ ac mediæ ratione, maius segmentum sit B F, ex coroll.
 1. propof. 17. lib. 13. eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Do-
 decaedri eiusdem sphaeræ; Erit ut tota A B, ad maius seg-
 mentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F; Ac
 proinde ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C,
 ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F.) Igitur
 erit quoque, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ
 B F, ita quadratum rectæ B K; ad quadratum rectæ M: Et
 permutando, ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B K,
 ita quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ M; Ac propte-
 rea erit ut recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens to-
 tam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem
 totam A B, & minus segmentum B C. Cum igitur propo-
 sita latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeant propor-
 tionem, quam rectæ B G, B K, ut mox ostendemus; perspi-
 cuum est, ut se habet recta B F, potens totam A B, & maius
 segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & mi-
 nus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D,
 ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur
 G g 2 extrema

4. quartide.

10. tertijdec.

12. tertijdec.

4. tertijdec.

2. quartide.

22. sexti.

22. sexti.

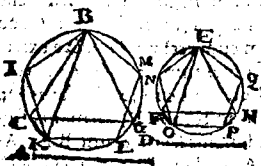
extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Q V O D vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphaerae eandem habeant proportionem, quam rectae BG, B K; demonstrabimus hoc proposita theoremate.

Q V A M proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quavis alia sphaera descriptorum.

S I T enim A, latus cubi, & B C, latus Icosaedri eiusdem sphaerae: Item D, latus cubi, & E F, latus Icosaedri in quavis alia sphaera. Dico esse uti A ad B C, ita D ad E F. Peragamus



namque triangulis Icosaedrorum B C G, & F H, & circa ipsa descriptis circulis, describamus in his circulis pentagona aequilatera H I K L M, E N O P Q, connectamusque rectas B K, C K & F O, F Q.

Quoniam ergo item circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphaerae, & ponatur B C G, triangulum Icosaedri in eadem sphaera descriptum, in quorumbus lateribus A. Erunt B I K L M, pentagonum. Dodecaedri in eadem cum ipsis sphaera descripti, & C propterea, ex coroll. 2. proposit. 17 lib. 1. rectae B K, lateris erit cubi eiusdem sphaerae, ideoque ipsi A, aequalis simili argumento aequalis erit rectae E O; lateri cubi D. Rursus quia arcus B I K, E N O, similes sunt, Nam utique continet duas quintas partes suae circumferentiae. Inque arcus B M G K, E Q P O; (uterque enim tres quintas partes totius circumferentiae comprehendit.) Erunt itaque anguli B C K, E F O, ex definitione segmentorum similes, aequales inter se, quam anguli B K C, E O F, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circumferentiarum similibus occidant: At proinde, ex coroll. 1. proposit.

22. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli BCK, reliquo angulo F E O, trianguli EFO, equalis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, equiangulum. Quare erit, ut BK, hoc est, recta A, illi equalis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi equalis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & F, latera cubi & Icosaedri in una sphaera, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphaera.

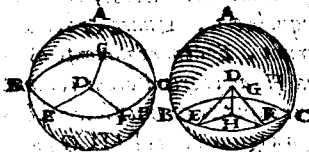
Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum ipso, ut vult proposit. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphaera.

LEMMA I.

Si sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECTVR sphaera ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum se-

cans per centrum sphaerae, ita ut centrum D, sit in plano, seu communis sectione BEFCG;



datanturque ex D, centro sphaerae ad extremitatem communis sectionis, lineae rectae quotcumque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes haec lineae, ductae, quotcumque fuerint, aequales sunt, ex definitione sphaerae, cum ex eius centro ad superficiem cadant, erit figura plana.

BEFCG, unica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphaerae.

TRANSEAT secundo planum secans non per

centrum sphaerae:

Ducatur autem ex

D, centro sphaerae

ad planum secans

perpendicularis

DH, emittaturq;

ex H, rectae utcunque HE, HF, ad extremitatem usq;

communis sectionis; & connectantur rectae DE, DF.

Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defn. 3.

lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectae DE, qua-

dratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectae

DF, quadratis rectarum DH, HF, aequale: Sunt

autem quadrata rectarum DE, DF, aequalium, ex

centro sphaerae ad eius superficiem cadentium, aequa-

lia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, qua-

dratis rectarum DH, HF, aequalia erunt; & pro-

inde, dempto communi quadrato rectae DH, reliquum

quadratum rectae AE, reliquo quadrato rectae HF,

aequale erit. Quare & rectae HE, HF, aequales

erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas

ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes

esse aequales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Fi-

gura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, cir-

culus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod per-

pendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

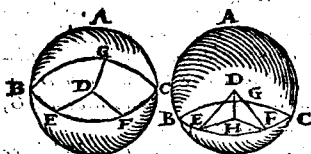
COROLLARIUM.

ITAQUE si planum secans transierit per centrum sphaerae, effi-

cietur circulus idem centrum habens, quod sphaera. Si vero planum

secans

47. primi.

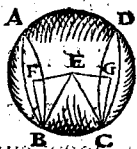


secans per sphaeræ centrum non transferit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphaera; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphaeræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ eadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, ut perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCULI in sphaera æquales, æqualiter distant a centro sphaeræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphaeræ, æquales sunt.

IN sphaera $ABCD$, cuius centrum E , sint circuli æquales AB, DC . Dico ipsos æqualiter a centro E , distare. Ducantur enim ex E , ad eorum plana perpendiculares EF, EG , quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC , ad circumferentias circulorum utcunque, connectanturque rectæ EB, EC . Quoniam igitur anguli EFB, EGC , recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB , quadratis rectarum EF, FB , quam quadratum rectæ EC , quadratis rectarum EG, GC , æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC , æqualium, cum cadant ex centro sphaeræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB , quadratis rectarum EG, GC , æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC , cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF , reliquo quadrato



47. primi

rectæ EG , æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ
perpendiculares EF , EG . Quam ob rem circuli AB ,
 DC , æqualiter distant a centro E .

SED iam æqualiter distant circuli AB , DC , a
centro sphaeræ E . Dico ipsos esse



æquales. Constructa enim figura,
ut prius, ostendemus eodem modo,
quadrata rectarum EF , FB , æqua-
lia esse quadratis rectarum EG , GC ;
Ac proinde, demptis quadratis æ-

qualibus rectarum æqualium EF , EG , cum circuli
æqualiter ponantur distare a centro, reliquum qua-
dratum rectæ FB , reliquo quadrato rectæ GC , atque
adeo æquales erunt rectæ FB , GC , semidiametri scilicet
circularum AB , DC . Circuli igitur AB , DC , æqua-
les sunt. Quod est propositum.

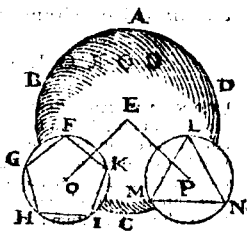
4.
IO.

THEOR. II. PROPOS. II.

DODECAEDRVM ad Icosædru
in eadem cum ipso sphaera descriptum, est
ut cubi latus ad latus Icosædri, in una ea-
demque sphaera.

IN sphaera $ABCD$, cuius centrum E , inscriptum sit Do-
decaedrum, cuius unum pentagonum $FGHIK$; Item
Icosædru, cuius unum triangulum LMN . Dico esse
Dodecaedrum ad Icosædru, ut latus cubi ad latus Icosæ-
dri, in una eademque sphaera, siue hæc eadem sit, quæ sphae-
ra $ABCD$, siue non. Quoniam omnes anguli tam pen-
tagoni, quam trianguli, superficiem sphaeræ tangunt; si per
pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficiuntur,
per lemma præcedens, duo circuli in sphaera $FGHIK$,
 LMN ,

LMN; comprehendentes pentagonum, & triangulum.
Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pen-
tagonum, & Icosaedri trian-
gulum; æquales erunt id-
circo circuli FGHK,
LMN; Ac propterea per
lemma 1. præcedens, æqua-
liter ab E, centro sphaeræ
distabunt; ideoque perpẽ-
diculares ex E, in plana cir-
culorum deductæ, & in eo-
rum centro, per coroll. lem-
matis 1. cadentes, quales
sunt EO, EP, æquales erũt.



Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pẽ-
tagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri dedu-
ctæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad
E, ducantur rectæ lineæ, resolvetur Dodecaedrum in 12 py-
ramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases
ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æqua-
les inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 1. Eodemque modo, si
ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, re-
solvetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, qua-
rum altitudines æquales erunt altitudinib. pyramidum Do-
decaedri. Quoniam autem est, ut basis FGHK, ad basin
LMN, ita pyramis FGHKE, ad pyramidem LMNE, cum
utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in
scholio propos. 1. lib. 3. demonstraui, ut duodecim bases
Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri; ad basin
LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum
solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia
est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN,
ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem
scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosae-
dri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrũ
ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Ico-
sædri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosædri su-
perficiẽ, ut cubi latus ad Icosædri latus eiusdẽ cũ ipsa sphae-
ræ; atque adeo, ex scholio propos. 1. 6. huius lib. ut latus cu-
bi ad

6. duodec.

9. quaterdec.

bi ad latus Icofaedri cuiuscunque alterius sphaerae unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icofaedrum, ut latus cubi ad latus Icofaedri cuiuscunque sphaerae. Quapropter Dodecaedrum ad Icofaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

9. quartide. QVONIAM uero ostensum est quoque, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icofaedri eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in eadem cum ipsis sphaera: Item ita esse cubi ad latus Icofaedri unius eiusdemque sphaerae, ut est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potens totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: Item ita esse Dodecaedrum ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, ut latus cubi ad latus Icofaedri in una eademque sphaera; Perspicuum est, has quatuor proportionem, nimirum lateris cubi ad latus Icofaedri; & superficiem Dodecaedri, ad superficiem Icofaedri; & lineae potens totam quamcunque secta extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potens totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icofaedrum eiusdem sphaerae, esse inter se aequales.

0.
11.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

L A T V S trianguli aequilateri potentia sesquitertium est lineae perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum ductae.

IN triangulo aequilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis

3. primi.



26. primi.

A D. Quoniam ob aequalitatem laterum A B, A C, anguli B, & C, aequales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, aequales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autem & latus A D, commune, uel A B, A C, aequalia. Igitur & reliqua latera B D, C D, aequalia sunt; ac propterea latus B C, hoc est, latus A B, duplum rectae B D; & idcirco

circò quadratum lateris AB , quadruplum quadrati recte BD , ex scholio propof. 4. lib. 2. Cum igitur quadrato recte AB , æqualia sint quadrata rectarum AD , BD ; erunt quoque quadrata rectarum AD , BD , quadrupla quadrati recte BD ; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum recte AB , uel quadrata rectarum AD , BD , talium 1. erit quadratum recte BD , ideoque talium 3. quadratum reliquum recte AD . Quare quadratum recte AB , partium 4. fefquitertium est quadrati recte AD , partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia fefquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.

47. primi.

COROLLARIUM.

HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD , & CD , rectas æquales esse, hoc est, latus BC , secari bifariam a perpendiculari AD . Quare cum latera AB , AD , trianguli ABD , æqualia sint lateribus AC , AD , trianguli ACD ; & basis BD , basi CD , æqualis; Erunt & anguli BAD , CAD , æquales, id est, angulus BAC , bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD .

8. primi.

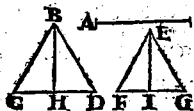
THEOR. 13. PROPOS. 13.

o.

13.

SI sphaerae diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphaera, Media.

SIT sphaerae diameter Rationalis A . Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphaera, esse Media. Sit enim BCD , unum triangulum Tetraedri, & EFG , Octaedri illius sphaerae, ducanturque ex angulis B , & E , ad latera opposita CD , FG , perpendiculares BH , EI . Quonia igitur quadratum diametri A , fefquitertium est quadrati lateris Tetraedri BC , & duplum quadrati lateris Octaedri EF , habebunt quadrata rectarum A , BC , EF , proportionem, quam numeri 6. 4. 3. adeoque communem.



14. tertij dec.

14. tertij dec.

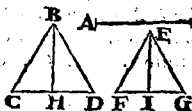
communem.

6. decimi.

commensurabilia erunt. Quare & lineę ipsę A, BC, EF, cõ
mensurabiles existont, saltẽm potentia; Atque adeo, cum
A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF; &
idcirco & earum dimidię Rationales erunt CH, FI.

12. quatti-
decimi.

R v r s v s, quia tam quadratum rectę BC, quadrati re
ctę BH, quam quadratum rectę EF, quadrati rectę EI,



seisquialterum est; habebunt tam
quadrata rectarum BC, BH, quã
quadrata rectarum EF, EI, pro-
portionem inter se, quam numeri
4, 3. ideoque tam illa, quam hæc
inter se commensurabilia erunt.

6. decimi.

Quare & tam lineę ipsę BC, BH,

quam lineę EF, EI, commensurabiles existent. Est autẽm
& tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet to-
ti, commensurabiles. Igitur & tam BH, CH, quam EI,
FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH,
& FI, ostensę sint Rationales, erunt quoque BH, EI;
Rationales. Quoniam uero tam CH, BH, quam FI, EI,

12. decimi

9. decimi.

longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadra-
ta non habeant proportionem, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos.

12. quatti-
decide

24. lib. 8. Habent enim proportionem, quã 1, ad 3, cum osten-
sum sit talium partium 1. esse tam CH, quam FI, qualium
3. est tam BH, quam EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI,
EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac pro-

12. decimi.

inde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus poten-
tia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI,
EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus con-
tentum, Medium erit: Sunt autẽm triangula BCD, EFG,
æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio
propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplẽ
sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula
BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies
Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim
triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item to-
ta superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis;
(Est enim triangulũ EFG, totius superficiei quarta pars.)
Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Te-
traedri,

triedri, & Octaedri, Medie. Si igitur sphaerae diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

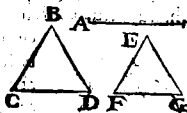
SEQUITUR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum aequilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse Superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, BE, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostenta, demonstratum est, tang rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, BEG, ipsi aequalia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo aequilatero, cuius unus latus sit Rationalis; perspicuum est, quod inferitur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eisdem sphaerae inscribantur, erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficier Tetraedri.

SI sphaerae diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri uero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse triangulum EFG; Ac uero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficier Tetraedri. Quonia

quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; duplum uero quadrati lateris Octaedri FG; sit, ut quadratum patium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 2. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectae CD, sesquitertium est quadrati rectae FG: Ut autem quadratum rectae CD, ad quadratum rectae FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum BEG. (quia tam

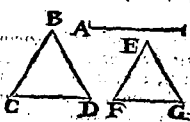


13. tertij dec.

14. tertij dec.

20. & 19.
sexii,

nam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum OD, FG, dupheatam, cum sint similia. Igitur & triangulum BCD, sesquiterium est trianguli EFG,



RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquiterium trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG; Efficitur, ut triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota

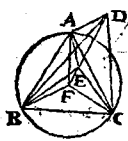
superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphaerae. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphaerae inscribantur, &c, Quod erat ostendendum.

o.
+ I
o.
I 5.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphaera descripti per centrum sphaerae ducta, cadit in centrum basis oppositae, estque perpendicularis ad dictam basim.

Si r Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis aequaliteris, & aequalibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphaera, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E,



centrum sphaerae recta DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam, ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basim. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictae basis rectis EA, EB, EC, FA, FB, FC; quoniam rectae EA, EB, EC, ductae

ex centro sphaerae ad eius superficiem, aequales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, aequalia duobus lateribus

bus EC, ED , trianguli CED ; Sunt autem & bases AD, CD , æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED , æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF , æquales erunt, eo quod tã AED, AEF , quam CED, CEF , duobus rectis æquiualeant. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF , si considerentur triangula BED, CED . Quoniam igitur latera EA, EF , trianguli EAF , equalia sunt latribus EC, EF ; trianguli ECF ; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC , æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC , si considerentur triangula EBF, ECF . Quare cum tres rectæ FA, FB, FC , ex F , in circumferentiã circuli cadentes sint æquales; erit F , centrum basis ABC , seu circuli eam circumscribentis.

2. primi.

3. primi.

4. primi.

9. tertij.

Quia uero, ex coroll. lemmatis r. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E , centro spheræ ad planum circuli ABC , demissa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta DE , per centrum ducta, & in centrum circuli F , cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC . Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet eã in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F , quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

0.

16.

OCTAEDRVM in spherâ descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri spheræ.

SIT Octaedrum $ABCDEFG$, contentũ octo triangulis æquilateris & equalib⁹ $EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC$, & in spherâ descriptũ, cuius centrum G . Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes equa-

lium

14. terrijdec.



48. primi.

14. primi.

2. undec.

7. undec.

•

48. primi.

4. undec.

lium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphaere. Ductis enim ex G, centro sphaere ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quae equales sunt, cum sint semidiametri sphaere ductae uidelicet e centro ad superficiem sphaerae: quoniam quadratum diametri sphaerae duplum est quadrati lateris Octaedri AB, & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio. propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphaerae, talium partium 2. erit quadratum rectae AB, & talium partium 1. quadratum rectae AG; Ac proinde quadratum rectae AB, duplum erit quadrati rectae AG. Cum ergo quadratum rectae AG, equale sit quadrato rectae BG; erit quadratum rectae AB, equale duobus quadratis rectarum AG, BG; Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, DGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctae; atque adeo rectae AC, BD, sese secantes in G, in uno existent plano; Ac propterea rectae earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in uno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCE, ABCE, quarum basis communis ABCD, uertices uero E, & F; quae pyramides equales sunt & similes, ex defin. 10. lib. 11. cum quaevis constet ex quatuor triangulis equilateralibus Octaedri, quae equalia sunt & similia, & basi communem ABCD. Dico nam earum altitudines esse equales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphaerae. Quoniam ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, equale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; erit quoque quadratum lateris AE, equale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCE. Cum ergo

ergo EG, FG, sint semidiametri sphaerae aequales, perspicuum est, duas pyramides esse aequalium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphaerae; erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD; Ac propterea aequale duobus quadratis laterum AD, DC. Quare angulus ADC, rectus est: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BED. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est; Sed & equilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est, quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB, constat, ipsa esse subduplum quadrati diametri sphaerae. Octaedri ergo in sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

14. tertijde

48. primi.

14. tertijde

SCHOLION.

Advertendum brevis hanc propositionem demonstratione in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

14. tertijde

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o.

17.

TETRAEDRVM sphaerae impositum ad Octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintisepte sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

14. tertijde

14. tertijde

V. L. ut Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphaerae impositum

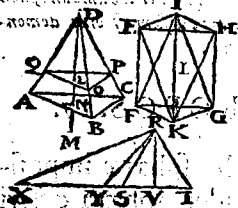
Hh

tum

tum ad octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quae potentia est subsesquitercia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphaerae.

S I T Tetraedrum $ABCD$, & octaedrum $EFGHIK$, in una eademque sphaera, cuius centrum L . Ducatur ex angulo D , per centrum L , diameter sphaerae DM , incidens in basin ABC , ad punctum N . Erit igitur N , centrū basis ABC ,

15. quar-
todecimi.



& DN , perpendicularis ad eadem basin. Quia uero pars diametri LN , inter centrum sphaerae & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia pars semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL , semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN . Ac propterea DN , talium 4.

16. undec.

10. undec.

17. undec.

Ducatur deinde, ex scholio propos. 14. lib. 11. per centrum L , planum OPQ , parallelum plano ABC ; eruntque rectae QO, OP, PQ , parallelae rectis AB, BC, CA ; Ac propterea triangulum QOP , æquiangulum erit triangulo æquilatere ABC , cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC , est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP , æquiangulum erit; Ac propterea & equilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC . Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP , triangulis DAB, DBC, DAC , æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides $ABCD, QOPD$, similes sunt, ex def. 9. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP , secant rectas DN, DC , proportionaliter; erit ut DN , ad DL , ita DC ,

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4. ad 3. (cum ostē-
sum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igi-
tur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyrami-
des similes habeant proportionem laterum triplicatam; erit
pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hæc
enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat
in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi
in proportione 4. ad 3. ut constat ex 2. propof. lib. 8. Rursus
quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam;
erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, ut
64. ad 36. ut in iisdem numeris constat.

8. duodec.

20. sexti.

S. I. T. iam triangulum æquilaterum RST, æquale trian-
gulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV.
Eritq; latus RT; hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquiter-
nium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36.
fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ
RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ
DC. Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas
quartas partes quadrati lateris tetraedri.

12. quarti
decimi.

R. V. R. S. V. S. extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex
eoroll. propof. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, ut sit
TY, talium partium 32. qualiū 27. est TS, seu illi æqualis DP.
Quoniam uero proportio DC, ad DP, erat, ut 4. ad 3. nempe
sesquitertia; erit DC, talium partium 36. qualiū DP, est 27. (pro-
portio enim 36. ad 27. est sesquitertia.) Ac propterea qualiū
partium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas par-
tes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrū A B.
CD, ad octaedrū EFGHIK, ut rectangulū contentū sub re-
cta RV, (quæ potest uigintiseptē sexagesimas quartas partes
quadrati lateris DC) & sub recta TY, (quæ continet octo no-
nas partes eiusdē lateris) ad quadratū diametri sphære DM.

1. sexti.

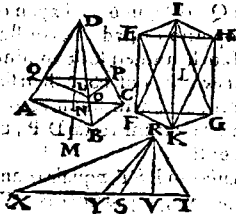
C. V. M. enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, du-
plum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis
TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum
eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æqua-
le rectangulo sub RV, TY: Ac propterea erit ut trian-
gulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulū sub RV,
TY, ad idem triangulū RST: Est autem triangulū RTX,
ad triangulum RST, ut basis TX, ad basim ST, nimirum

41. primi.

7. quinti.

1. sexti.

ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad trian-
gulum RST; hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, li-
bi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD,
ad pyramidem Q O P D, ut 64. ad 27. Erit ergo ut rectangu-



lum sub R V, T Y, ad triangu-
lum Q O P, ita pyramis AB-
CD, ad pyramidem Q O P D:
At uero ut triangulu Q O P,
ad quadratum diametri sphæ-
re DM, ita est pyramis Q O-
P D, ad octaedrum EFGH-
I K. (Nam cum D N, recta
sit ad planum A B C, recta
quodque erit ad planu Q O P,

ex scholio propof. 14. lb. 11. ideoque sphære, semidiameter
DL, altitudo erit pyramidis, seu tetraedri Q O P D: Octae-
dru autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æqua-
les EFGHI, EFGHK, quarum basis communis quadratum
EFGH, dimidium quadrati diametri sphære; & altitudines
æquales semidiametri sphære LI, LK. Pyramides ergo Q O-
P D, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex scholio
propof. 6. lb. 12. erit ut basis Q O P, ad basin EFGH, ita py-
ramis Q O P D, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea, per
ea, quæ in scholio propof. 4. lb. 5. ostendimus, ut basis
Q O P, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratum dia-
metri sphære DM, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyra-
midis EFGHI, hoc est, ad Octaedru EFGHIK.) Ex quo
igitur erit, ut rectangulum sub R V, potente uiginti septem
sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, &
sub T Y, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum, ad qua-
dratum diametri sphære DM, ita pyramis, seu tetraedrum
ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum, ergo sphæ-
re impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demon-
strandum.

SCHOLIUM.

Q V O N I A M uero DC, talium partium 4- fuit, qua-
lium 3, D P, & continebit D P, sem illi æqualis R T, tres quar-
tas par-

16. quarti-
decimi.

tas partes lateris tetraedri DC: AE proinde, cum recta RT , sit potentia sesquitercia recta RV , erit RV , potentia subse-
 quitercia ipsius RT , nempe trium quartarum partium late-
 ris Tetraedri. Rursus quia TY , fuit tallum partium 32. qua-
 lium 27. ST , seu DP , (tres videlicet quatuor partes lateris te-
 traedri.) erit TY , superquintupartiens vigesimas septimas par-
 tes ipsius ST , nimirum trium quartarum partium lateris te-
 traedri. Quare constat, esse quodque tetraedrum $ABCD$, ad
 octaedrum $EFGHIK$, ut rectangulum sub RV , qua potentia
 subsequitercia est trium quartarum partium lateris tetraedri,
 & sub TY , que superquintupartiens est vigesimas septimas
 partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri,
 ut volebat Campanus.

12. quarti-
decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

o.

17.

LINEA perpendicularis ex quolibet
 angulo trianguli æquilateri ad basin oppo-
 sitam demissa; tripla est eius perpendicula-
 ris, quæ ex centro trianguli ad eandem ba-
 sin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC , cuius centrum D .
 Ducatur ex A , per D , recta AE , quæ perpendicularis erit ad
 BC , eamque bisariam dividet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13.
 Dico AE , triplam esse rectæ DE , quæ scilicet
 perpendicularis est e centro ad basin du-
 ctæ. Quævis enim rectis BD , CD , cum late-
 ra DA , DB , trianguli ADB , æqualia sint la-
 teribus DB , DC , trianguli BDC , e centro e-
 nim ducuntur, sit autem & basis AB , basi
 BC , æqualis: Erunt triangula ADB , BDC , æqualia ex co-
 roll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt
 triangula ADB , ADC . Quare, ob æqualitatem trium trian-
 gulorum ADB , BDC , CDA , triangulum ABC , triplum est
 trianguli BDC . Quoram uero rectangulum sub AE , EB ,



H h 3

triangulo

1. *sexi.*

triangulo ABC ; & rectangulū sub DE , EB , triangulo BDC , æquale est, ex scholio propof. 41. lib. 1. cū basis triāguli BC , dupla sit basis BE , utriusq; rectanguli: Erit quoq; rectangulum sub AE , EB , triplum rectanguli sub DE , EB : Est autē ut rectangulum sub AE , EB , ad rectangulum sub DE , EB , eiusdem altitudinis EB , ita basis AE , ad basin DE . Igitur & AE , tripla est ipsius DE . Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE eadem perpendicularis AE , sesquialtera est reliquæ rectæ AD , inter angulum, & ceterum comprehensæ. Cum enim AE , tripla sit ipsius DE ; qualium partium 3. ponetur AE , talium 1. erit DE ; Reliqua igitur AD , earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE , sesquialtera erit ipsius AD .

Ex quibus rursus sit, rectam AD , rectæ DE , duplam esse.

o.

17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphaeræ inscribatur; erit semidiameter sphaeræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphaeræ in basin quamcunq; octaedri deducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphaera, cuius centrum D , descripti, triangulum æquilaterum ABC , in quod e centro sphaeræ D , perpendicularis demittatur DE ; ducaturq; semidiameter sphaeræ DB . Dico semidiametrum DB , potentia tri-



14. *sevijs de.*

plam esse perpendicularis DE . Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. perpendicularis DE , in centrum circuli sphaeræ, qui triangulum ABC , circū scribit, cadat, erit E , centrum trianguli. Ducta igitur recta BE ; quoniam quadratum diametri sphaeræ duplum est quadrati lateris octaedri AB ; & quadruplum quadrati semidiametri sphaeræ DB , ex scholio propof. 41. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB , 6, & quadratum semidiametri

mediametri sphaerae DB, 3. Quia uero quadratū lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambien-
tis, rectae scilicet BB, 4. Erit quadratum rectae BE, calium par-
tium 2. huiusmodi 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum
quadratum rectae DB, æquale sit quadrati rectarū BE, DE, 47. primi.
sit autem quadratum rectae DB, ostensum partium 3. Erit
reliquum quadratum perpendicularis DE, calium partium
1. Ac proinde quadratum rectae DB, triplum est quadrati
rectae DE. Ergo octaedrum sphaerae inscribitur, &c.
Quod demonstrandum erat.

12. tertijde.

47. primi.

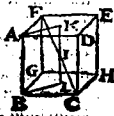
THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cu-
iuslibet sphaerae descripti, æquale est super-
ficie cubi in illa sphaera collocati: Perpen-
dicularis autem a centro sphaerae in aliquam
basin cubi demissa, æqualis est dimidio late-
ris cubi.

o.

18.

Si T cubus ABCDEFGH, in sphaera descriptus, cuius
centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad unam
basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati dia-
metri sphaerae æquale esse superficiei cubi,
& perpendicularem IK, æqualem esse dimi-
dio lateris cubi. Cum enim quadratum dia-
metri sphaerae triplum sit quadrati lateris cu-
bi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi.
Erit duplum eiusdem quadrati ex diame-
tro sphaerae descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti su-
perficie cubi.



15. tertijde.

PRODUCTA autem HL, ad basin oppositam BC-
HG, usque in punctum L; cum KL, recta sit ad pla-
num AE, recta quoque erit ad planum BH, illi pa-
rallelum, per scholion propos. 14. lib. 11. Rursus, quia
AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE,

6. undec.

Hh 4

ducatur

6. undec.

ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis $A E, B H$, communes sectiones, lincas rectas $A K, B L$, quae parallele quoque erunt inter se: At propterea parallelogrammum erit $A B L K$; atque adeo recta $K L$, aequalis lateri cubi $A B$. Quoniam vero perpendicularis $K L$, e centro sphaerae I , cadit in bases $A E, B H$, ad puncta $K, & L$, erunt $K, & L$, centra circulo-rum in dictas bases ambientium lineis sphaerae, per coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. Quare $K L$, in centro I , bifariam secabitur a dicta diametro $C F$, ut in coroll. 1. propof. 15. lib. 13. ostendimus; At propterea, cum $K L$, ostensa sit aequalis lateri cubi, erit $I K$, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphaerae descripti, &c. Quod ostendendum erat.



COROLLARIUM

15. versijde.

31. undec.

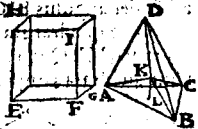
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaerae dictum cubum comprehendens, aequale esse cubo. Cum enim quadratum diametri sphaerae triplum sit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata $A E, B H$, duae tertiae partes quadrati diametri sphaerae: Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex $I K$, dimidio lateris cubi in $A B$, tertiam partem quadrati diametri sphaerae, aequale esse cubo, quod fit ex $I L$, dimidio lateris cubi in $B H$, tertiam partem quadrati diametri sphaerae, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines aequales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphaerae, aequale esse toti cubo. Quod est propositum.

ALITER proponi potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphaerae, aequale esse cubo. Nam cubus $B E$, producit ex $B A$, latere cubi in quadratum $A E$, quod est tertia pars quadrati diametri sphaerae: Ut perspicuum est.

SCHOLIUM

ENIMVERO autem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro antiscilicet corporis regularis ad aliquam eius basim ductam in tertiam partem superficiei ipsius corporis, aequale est propositi corpori regulari. Sit enim corpus regulare quod-

quodcumque $ABCD$, contentum planis ABC , ABD , ACD , BCD , solidum autem $EFGH$, consensus sub EJ , tertia parte superficiem corporis $ABCD$, & sub altitudine FG , qua aequalis sit perpendiculari KD , ducta ex centro K , ad basin ABC . Dico solidum $EFGH$, aequale esse dato corpori regulari $ABCD$. Nam ductis ex centro K , rectis KA , KB , KC , KD , ad omnes angulos corporis, resolvetur corpus regulare in pyramides aequales, cum aequales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, aequales sint; ipsi aequaliter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculariter ex K , tunc ad ipsorum plana ducta, nimirum altitudines pyramidum, aequales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi ABC , & altitudine KL , triplum est pyramidis ABC , per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL , tripla sunt singulis pyramidum; Erit prisma consensus sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL , (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis $ABCD$. Quamobrem, cum idem prisma triplum sit prismatis $EFGH$, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quae ad propos. 7. lib. 12. demonstravimus, erunt solida $EFGH$, $ABCD$, aequalia. Quod est propositum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

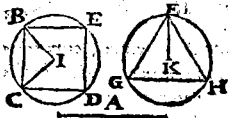
IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphaerae.

IN sphaera, cuius diameter A , intelligatur descriptus cubus, cuius unum quadratum $BCDE$, & octaedrum, cuius unum triangulum $F GH$. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum $BCDE$, & triangulum $F GH$, hoc est, circulos $BCDE$, $F GH$, ipsa circumscribentes, esse aequales.

15. tertijde.

47. primi.

les. Si enim recta e centris IB, KF. Quia igitur quadrati diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati recte BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BEC, rectus, cum subtendat quadrantem; Ac proinde quadratum recte BC, æquale erit quadratis rectorum BI, IC. Quare cum rectorum equalium BI, IC, equalia sint quadrata; duplum erit quadratum recte BC, quadrati recte BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum recte BI. Rursus quia quadratum diame-



14. tertijde.

12. tertijde.

tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratum lateris FG, triplum quadrati recte FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum recte FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum recte BI, æqualia erunt quadrata rectorum BI, FK; Ac propterea & recte ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGHI, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM

23. quarti
decimi.

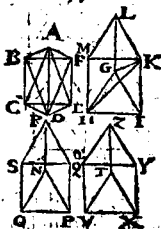
Hinc fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphaeræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. huius lib. qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphaeræ, ex lemmate 2. eiusdem propof. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectorum, quæ centra oppositarum basium connectunt (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propof. 14. lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaeræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum

plum tetraedri; ut latus octaedri ad latus tetraedri.

In eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum ABCD-
EF, & tetraedrum GHK. Dico ita esse octaedri ad triplū
tetraedri; ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro
diametro AD, diuidetur octaedrū in quatuor pyramides,
quarum latus commune est ipsa diame-
ter AD, & uertex communis A, nempe
in BCDA, cuius basis BCD, in BDE-
FA, cuius basis BDF, in CDEA, cuius
basis CDA, & in DEFA, cuius basis
DEF; quae quidem omnes bases infra
quadraturū BCEF, existunt continentes
cum ipso dimidiatam partem octaedri.
Quoniam uero quolibet harum pyra-
midū constat duobus triangulis æqui-

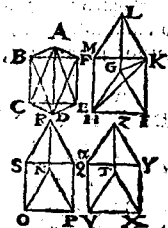


lateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ qm latus ipsorū
commune est AD, diameter, & reliqua latera ipsius octae-
dri latera existunt, inter se aequalia sunt; efficitur has qua-
tuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur pla-
nis & multitudine; & magnitudine æqualibus. Constitua-
tur super GHI, basis tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem
cū tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit,
per coroll. 1. propos. 7. lib. 1. Rursum, super basin octaedri
NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituentur duo
prismata NOPQRS, TVXYZ, eiusdem cum octaedro,
seu pyramide ACDE, altitudinis. Quia igitur GHI, hoc est,
TVX, basis tetraedri sesquitercia est ipsius NOP, basis octae-
dri: Erit quoq; prisma TVXYZ, prismatis NOPQRS, ses-
quiterciū, cū prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ijs,
quæ ad propos. 7. lib. 1. demonstrauimus. Est aut & octaedri
ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitercium;
(Nā prisma æquale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. pro-
pos. 7. lib. 1. qualiū quatuor continere dixim⁹ octaedrū) Igit⁹
æquale est octaedrum prismati TVXYZ. Quia uero
prisma TVXYZ, ad prisma GHIKLM, proportio-
nē habet, quā altitudo illius ad altitudinē hui⁹, ex f. holiio p-
pos. 14. lib. 1. Est aut altitudo prismatis TVXYZ, quod
octaedro

8. primi.

14. quarti.
decimi.

octaedro æquale est, eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prismam $GHIKLM$, hoc est, ad triplum tetraedri $GHIK$, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, equalis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propof. 21. huius lib.



Arque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphaeræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propof. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propof. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphaeræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaeræ inscribantur, &c. Quod demonstrandum erat.

18. tersijde.

COROLLARIUM.

Ex dictis inferitur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Offensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphaeræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

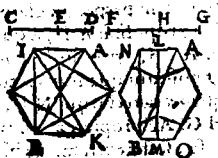
18. tersijde.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita, potuerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosædri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecædri eius spheræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

Posset recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE, Item rectam FG, & eius segmentum minus HG. Dico CE, esse latus Icosædri, & HG latus Dodecædri eius spheræ, cuius AB, diameter existit. Latelligatur enim in spherâ, cuius diameter AB, descriptum Icosædron ALBK, & Dodecædron ANBO. Lateralia deinde Icosædri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtrahendo unum angulum pentagoni ex Icosædri lateribus compositi, ut constat ex propof. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icosædro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propof. 16. lib. 13. erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK, cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI, & bases quoque AB, IK, æquales, Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt, ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erit autem idem quadratū rectæ AB, æquale, ex hypothefi, quadratis rectarū CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuise extrema ac media rationes; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuise; (Nam IB, subtrahit angulum pentagoni, cuius latus est; IA, latus Icosædri. Constat autem, rectæ subtrahentis angulum pentagoni



29. primi.

8. primi.
47. primi.

ragon.

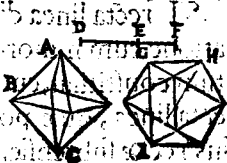
saedri: minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectae lineae extrema ac media ratione sectae: Poterit latus Icosaedri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti

Ponatur latus AB , octaedri ABC , & maius segmentum DE , & minus EF , rectae DF , sectae extremae ac media ratione. Sit quoque eidem sphaerae inscriptum Icosaedrum GHI , cuius latus GH , & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI , & diameter HI . Dico quadratum lateris GH , duplum esse quadrati minoris segmenti $E F$.

Cum enim GH sit latus pentagoni, cuius unum angulum subtendit recta GI , erit GH , maius segmentum ipsius GI , diuise extrema ac media ratione: Ac proinde composita recta ex GI , GH , secabitur similiter in G , puncto, extrema ac media ratione. Quia uero quadratum diametri HI , æquale est quadratis rectarum GI , GH , quod angulus IGH , rectus sit, ut in precedenti propos. ostensum est, & quadratum lateris AB , æquale quadratis rectarum DE , EF , ponitur æquale quadratum diametri HI , ad quadratum lateris AB , ita quadrata rectarum GI , GH , ad quadrata rectarum DE , EF : Est autem quadratum diametri HI , duplum quadrati lateris octaedri AB . Igitur & quadrata rectarum GI , GH , dupla sunt quadratorum rectarum DE , EF . Atqui ut quadrata rectarum GI , GH , ad quadrata rectarum DE , EF , ita est quadratum rectae GH , ad quadratum rectae EF . (Nam cum sit ut GI , ad GH , ita DE , ad EF : Erit quoque



8. tersydec.

5. tersydec.

47. primi.

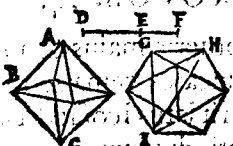
14. tersydec.

2. quarte.

ut qua

12. *sexti.*

ut quadratum recte GI, ad quadratum recte GH, ita quadratum recte DE, ad quadratum recte EF, & componendo, ut quadrata rectorum GI, GH, ad quadratum recte GH, ita quadrata rectorum DE, EF, ad quadratum recte EF.



Et permutando, ut quadrata rectorum GI, GH, ad quadratum rectorum DE, EF, ita quadratum recte GH, ad quadratum recte EF. Quadratum igitur recte GH, du-

plum quoque est quadrati recte EF. Quare similis Octaedri poterit maior, & minor segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius recte subtenſæ, latus octaedri eius sphaeræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD; sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphaeræ, in qua AD, uel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propof. 17. lib. 1. 3. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphaeræ; cuius minus segmentum AC, uel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphaeræ potentia tripla maioris seg-



ris segmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AC, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphaeræ æquale erit quadratis rectarum AB, AC, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphaeræ. Quare cum diameter sphaeræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphaeræ, cuius AD latus Dodecaedri ponitur. Siquitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

4. tertijdec.

14. tertijdec.

COROLLARIUM.

QUONIAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, et constat ex istis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratio ne diuisæ: Peripicuum est, si linea quæuis recta, secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphaeræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

18. tertijdec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

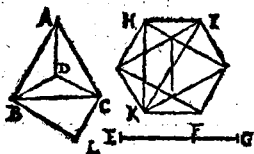
SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphaeræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HI K, eiusdem sphaeræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi; connectaturque recta IK, diameter. Quia igitur HI, est maius segmentum re-

8. tertijdec.

5. tertijdec.
22. primi.
48. primi.

Et $H K$, diuisa extrema ac media ratione; Erit quoque composita $K H I$, diuisa eodem modo in H , maiusque segmentum $H K$, & minus $H I$. Fiat ex rectis $B C$, $E F$, $F G$, triangulum $B C L$, ita ut $B L$, recta ipsi $E F$, & $C L$, ipsi $F G$,



sit æqualis: Eritque angulus L , rectus, quod recta $B C$, ponatur posse rectas $B L$, $C L$, hoc est, rectas $E F$, $F G$: Est autem & angulus $I H K$, rectus, ut propos. 23. huius hb. ostendimus; Estq; ut $B L$, ad $L C$, ita $K H$, ad $H I$. Igitur triangu-

2. quattide.

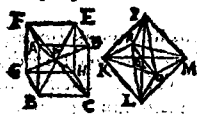
6. sexti.
4. sexti.
13. tertijdec.

la $B L C$, $K H I$, equiangula sunt; Ac propterea ut $K I$, ad $H I$, ita $B C$, ad $C L$; & permurando, ut $K I$, ad $B C$, ita $H I$, ad $C L$: Atqui $I K$, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri $B C$. Ergo & $H I$, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius $C L$, hoc est, minoris segmenti $F G$. Si latus itaq; Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

C V B V S ad Octaedrum in eadẽ cum ipso sphæra descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphærae.

S I N T in eadem sphæra cubus $A B C D E F G H$, & Octaedrum $I K L M N O$, quorum centra P , & Q . Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiẽ Octaedri; nec



non; quam habet cubi latus ad semidiametrum sphærae. Ductis enim ex centris P , & Q ; ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines: (cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales,

ac

ac propterea æqualiter a centro sphaeræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium distarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus cõplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distant bases pyramidum cubi, & Octaedri a centro sphaeræ, per lemma præstatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in scholio propos. 4. lib. 5. demonstrauiamus, ut sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies uidelicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodẽ scholio, ut cubus ad octuplũ pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrũ, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

S I N T rursus in eadem sphaera cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphaeræ, seu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam uero quadratũ IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarũ pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; recipiabũtur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: Ac propterea parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedũ super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplũ parallelepipedũ super eandem basim, & sub altitudine EN, ut in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo

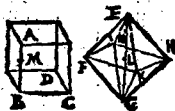
21. quattordecimi.

18. tertijdec.

34. undec.

I 1 2 super

16. quartide



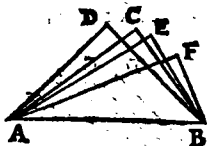
super basim I F K H, & sub altitudine E N : Atqui huius parallelepipedum duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propof. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla fit altitudinis E N ; Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E . Aequale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Ceterum quia parallelepipedum super basim I F K H, & altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propof. 14. lib. 12. Ut autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L . (Cum enim fit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L, & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N ; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N .) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D ; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale Octaedro E F G H I K . Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphaerae . Quod secundo loco demonstrandum proponebatur . Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, &c. Quod erat ostendendum .

S C H O L I O N .

13. tertijdec.

Q. V. I A. demonstratum est, diametrum sphaerae, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. fit quadratum lateris Tetraedri ; perspicuum est, si ex quadrato diametri dase auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio propof. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus . Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata aequalia, qua proportionem habeant duplam, ex eodem scholio maioris quadrati latus esse latus Tetraedri . Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partium, da

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. *Vi* si diameter sphaera ponatur AB , ex cuius quadrato detraxatur quadratum rectae AC , continens duas tertias partes quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AC , BC , quadrato diametri AB , equalia, ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC ; Erit recta AC , latus Tetraedri.



R V R S V S cum ostensum sit, diametrum sphaera potentia duplam esse lateris Octaedri; *Fic*, si ex quadrato diametri AB , dematur quadratum rectae AD , quod dimidium sit quadrati diametri AB ; Vel si constituentur duo quadrata rectarum AD , BD , quadrato diametri AB , equalia, & inter se proportionem habentia equalitati, secundum doctrinam scholij propof. 33. lib. 6. rectam AD , latus esse Octaedri.

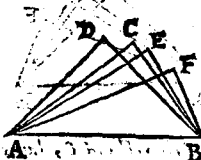
D E I N D E, quoniam docuimus diametrum sphaera potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum rectae BC , quod tertia pars sit quadrati diametri AB ; Vel si quadrato diametri AB , constituentur duo quadrata equalia rectarum AC , BC , ita ut quadratum rectae AC , duplum sit quadrati rectae BC , iuxta doctrinam eiusdem scholij propof. 33. lib. 6. Lineam rectam BC , cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB , possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB , auferatur quadratum lateris Tetraedri AC , relinqui quadratum lateris cubi BC ; Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri AB , tollatur quadratum lateris cubi BC , remanet quadratum lateris Tetraedri AC .

P R A E T E R E A, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphaerae, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri AB , exhibeantur, iuxta ea, quae in scholio propof. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata equalia rectarum AE , BE , proportionem habentium, quam recta quavis extre-

23. quarti-
decimi.

ma ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam mi-
norem BE, esse Icofaedri latus.

POSTERIO, quoniam si recta quapiam potuerit totā
aliquam rectam diuisam extrema



ac media ratione, & minus illius
segmentum; Minus segmentum
latus est Dodecaedri eius spha-
rae, cuius diameter prior linea:
Liquet, si quadrato diametri AB,

compositantur duo quadrata aqua-
lia rectarum AF, BF, propor-
tionem habentium, quam quacunque recta linea extrema ac
media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam
BF, latus esse Dodecaedri.

HACTENUS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus
Candalla de comparatione solidorum regularium eidem spha-
rae impostarum scripserunt: Sequentes autem quinque propo-
s. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5.
de proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue
proportionales, nec non & aliæ quatuor,
ita ut sit eadem antecedens omnium, Erit
proportio tertiæ ad tertiam proportionis se-
cundæ ad secundam duplicata; & propor-
tio quartæ ad quartam eiusdem proportio-
nis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportio-
nales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antec-
dens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad
tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad
secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam,
esse

esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin.

10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis

rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad qua-

dratum rectę A, duplicatam pro-

portionem eiusdem proportionis re-

ctę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita qua-

dratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit,

ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectę E, ad quadra-

tum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita

quadratum rectę A, ad quadratum rectę E: Quoniam igitur

est quadratum rectę B, ad

quadratum rectę A, ut recta

C, ad rectam A; & quadratum

rectę A, ad quadratum rectę E,

ut recta A, ad rectam F; Erit ex

equo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C,

ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad qua-

dratū rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E.

Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est pro-

portionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum.

R v r s v s cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib.

5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad

rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę

A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę

B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus re-

ctę B, ad cubum rectę A.

Eadem ratione erit ut re-

cta G, ad rectam A; ita cu-

bis rectę E, ad cubum re-

ctę A; Et conuertendo ut:

recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E.

Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D,

ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A,

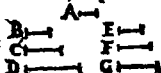
ad rectam G; Erit ex equo, cubus rectę B, ad cubum rectę

E, ut recta D, ad rectam G: Est autem proportio cubi re-

ctę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad

rectam E. Igitur & proportio rectę D, ad rectam G,

triplica-



20. sexii.

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

20. sexii.

33. undec.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

33. undec.

triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si fiat quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

Hoc idem demonstravimus ad propos. lib. 2. de quocunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Q V A D R A T V M lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

I N triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum B C, recta perpendicularis A D, quæ bisectam secabit latus B C, ut in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; At propterea B D, dimidium



est lateris A B. Invenitur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, ut perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. Sit autem eodem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam vero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam late-

13. sexti.

17. tertij.

10. sexti.

ris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

ITAQUE, si in triangulo æquilatere perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ottensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, & DB, æquale esse triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadē sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

§. 1. quadratum cubi cuiusvis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus b. faciam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC ad triangulum EFG, ut latus trianguli EF, ad perpendicularem EH.



Postea enim inter E, H, F, H, media proportionali IK, cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum sit quadrati lateris cubi AB; sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimissio eius FH, eo quod dictum quadratum, & rectangulum tandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc est, tres rectæ FH, AB, EF, continue erunt proportionales: Sūt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales,

18. tertij dec.
1. sexti.

17. sexti.

ex

28. quarti.
decimi.

ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH, erit proportio rectę EF, ad rectam EH, tertię ad tertiam, proportionis rectę AB, ad rectam IK, secundę ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectę AB, ad quadratum rectę IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectę IK, æquale triangulo EFG,) proportionem habeat duplicatam proportionis rectę AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, ut latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphaera describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterũ est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potẽtia sesquiter tia est lateris cubi in eadẽ sphaera descripti.

5. quarti.

Si T Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusque cubi eiusdem sphaerę F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: Arem uero DE, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum descripto circulo AEC, ad centrũ D, in quod uidelicet cadit axis DE, ut constat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc est, lateris AB, æquale est quadratis rectarum AD, DE, & tripli quadrati semidiametri AD; Fit, ut posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectę AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.



47. primi.

12. tercię dec.

Q U O N I A M, uero latus Tetraedri A B, potentia duplum est lateris cubi F; Erit. quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, sesquitercium est, quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

18. tertijdec.

COROLLARIUM I.

Q U I A uero, posito quadrato lateris A B, patrum 6. quadratum diametri sphaerae talium partium est 9. quod diameter potentia sit, sesquialtera lateris Tetraedri. Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis D E; perspicuum est, diametrum sphaerae potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialtera axis Tetraedri. Sesquialtera enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris. 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

19. tertijdec.

20. sexti.

COROLLARIUM II.

C O N S T A T quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphaerae inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia uidelicet, tam latus trianguli aequilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitercium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductae; quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

22. quarti-decimi.

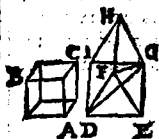
THEOR. 32. PROPOS. 32.

C V B V S triplus est Tetraedri eidem sphaerae inscripti.

D E S C R I B A N T U R in eadem sphaera cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super D E F, basim Tetraedri prisma D E F G H I, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. Q uia igitur est basis prismatis, seu cubi A B C, ad basim prismatis, seu Tetraedri D E F, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis D E F, ad lat^{us} oppositum. Ut aut lat^{us} Tetraedri ad

30. quarti-decimi.

ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis D E F.



G H I, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis A B C, erit basis prismatis A B C, ad basim prismatis D E F G H I, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauiamus, æqualia erunt prismata A B C, D E F G H I,

cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma D E F G H I, triplum est pyramidis, seu Tetraedri D E F G; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo A B C, triplus quoque erit eiusdem Tetraedri D E F G. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphaeræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Vnde prisma, eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphaera, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati D E F G H I, &c.

ELEMENTI DECIMIQUARTI FINIS.



EVLIDIS

ELEMENTVM XV.

ET SOLIDORVM QVINTVM,
ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hyp-
ficlis Alexandrini de quin-
que corporibus.

LIBER SECVNDVS.



PROBL. I. PROPOS. I.

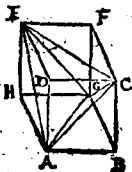
I.

IN dato cubo pyramidem describere.



IN cubo dato $ABCDEFGH$, oportet describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E , ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA , EG , EC , a quarum extremitatibus A , G , C , similiter diametri ducantur AG , GC , CA , in reliquis tribus ba-

sibus. Quoniam igitur diametri quadratorum equalium equales sunt, quod potentia duplæ sint laterum equalium quadratorum, ut in scholio propos. 47. lib. 1. demonstramus; perspicuum est, quatuor triangula ACE , GAC , GAE , GCE , ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se equalia; Ac propterea pyramidem,



dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 3. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro $ABCD$, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K , & ductis duodecim rectis $EF, FG, GE, HI, IK, KH, HL, LF, FK, KG, GH, HE$, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor BHI, IHK, KHG, GHE , supra planum EIK ,



KG , quatuor autem IFE, BFG, GFK, KFI , infra idem planum consistunt.

Quoniam vero latera AE, AH , trianguli AEH , æqualia sunt lateribus AG, AH , trianguli AGH , quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC ; Item & anguli contenti EAH, GAH , æqua-

les, quod sint anguli triangulorum æquilaterum ABD, ACD : æquales erunt bases EH, GH . Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI , & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum compohunt $EIKGHF$; quod quidem ex definitione 3. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi.

COROLLARIUM.

QUONIAM vero tria plana $EIKG, GHIF, FKHB$, quadrata sunt æqualia, sese mutuoad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauiamus; quorum quodlibet pyramidem $ABCD$, secat bifariam. (Nam quadratum $EIKG$, ipsam diuidit in pyramidem $HIKD$, & prismam $HIKGA B$; nec non

non in pyramidem $BBFI$, & prismam $BFCGKI$; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prismam prismati: Eodemque modo reliqua quadrata $GHIF$, $FKHE$, diuidunt bifariam eandem pyramidem $ABCD$. Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rektos interfecant.

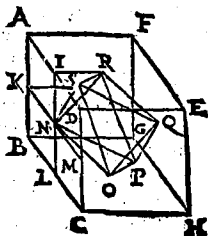
3. duodec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

3.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH . Diuidantur latera basis $ABCD$, bifariam in punctis I, K, L, M , quæ connectantur rectis IL, KM , secantibus sese in N , puncto, quod quidem centrũ est quadrati $ABCD$, ut constat ex demonstratione propof. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basisum centra O, P, Q, R, S . Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basisum, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK , &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex prædicta demonstratione propof. 8. lib. 4. Postremo si præfara centra coniungantur duodecim rectis $NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS$; constituta erunt octo triângula, quorũ quidẽ quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN , supra planum $NOQR$; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO , infra idem planum consistunt. Quoniã uero latera IN, IR , triânguli INR , æqualia sunt lateribus KN, KS , triânguli KNS , quod omnia sunt dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR , parallelæ sint rectis BA, AF ; angulus $NI R$, æqualis sit recto angulo KAF , in quadrato AG ; eademque ratione angulus NKS , an-

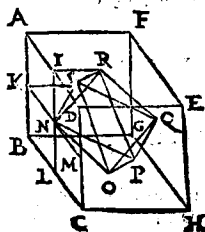


10. undec.

gulo

4. primi

gulo recto IAF , in quadrato AE ; Erunt bases NR , NS , æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centrīs ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet ducatur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus



cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus uidelicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim uides duas rectas NI , RI , ductas esse ad I , dimidium lateris AD , quod commune est quadratis AC , AE , quorum centra sunt puncta N , & R : Ita quoque duæ rectæ NK , SK , ductæ sunt ad K , dimidium lateris AB , quod commune est quadratis AC , AG , quorum centra existunt puncta N , & S , &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & equalia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQ , SP ; Quod quidem ex defin. 3. lib. 1. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centrīs. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

A L I T E R. In cubo dato inscribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 1. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

1. quintide
2. quintide

COROLLARIUM.

Q U I A uero diametri Octaedri in cubo descripti NQ , RO , si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. propos. 14. lib. 13. quæ quidē coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bisecant, ut docuimus coroll. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, diuidere.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inscribere.

SOLUTIO. Dato octaedrum sit $ABCDEF$, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangula continentur, quarum uidelicet uertices sunt sex anguli octandri, & quolibet duæ octaedrum constituunt, una earum pyramis $ABCDE$, cuius basis $ABCD$, quadratum, triangula rectæ æquilatera ABE , EBC , CED , DEA , sine quo horum triangulorum centra G , H , I , K , per quæ ducantur rectæ LM , MN , NO , OL , parallele lateribus AB , BC , CD , DA . Erunt igitur & triangula LME , EMN , NEO , OEL , æquilatera, cum similia sint, triangulis æquilateris ABE , EBC , CED , DEA , & coroll. propof. 4. lib. 6. æque octaedro inter se æqualia, propterea quod latera habere inuicem habeant communia. Est enim EM , latus commune triangulis LME , EMN ; EN commune triangulis EMN , NEO ; Et denique EO , commune triangulis NEO , OEL . Hinc enim fit, triangulum LME , triangulo EMN , hoc utro ipsi NEO ; & hoc ipsi OEL , æquale esse. Quoniam & quatuor rectæ LM , MN , NO , OL , in se æquales sunt. Quia uero ducta recta EK , tripla est rectæ KP ; EA autem ut EP , ad KR , ita EA , ad LA . Erunt quoque EA tripla rectæ LA . Eademque ratione EB , EC , ED , triplæ erunt rectorum MB , NC , OD . Quoniam itaque LM , MN , NO , OL , concurrunt in punctis L , M , N , O in quibus latera ea proportionem fecerunt, quadrilaterumque constituunt $L M N O$. Eiusus quia LO , LM , parallele sunt rectis AD , AB , non in eodem cum ipsis existentibus plano; æqualis erit angulus MLO , angulo BAD , qui rectus est, cum $ABCD$, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propof. 14. lib. 13. & in propof. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO , rectus erit. Nonsecus demonstrabimus & reliquos angulos $L M N$, $M N O$, $N O L$, rectos esse. Quoniam uero tam planum per LO , LM , quam per $N M$, NO , ductum, parallelum est plano



K K ABCD;

18. quartidi.
2. sexti.

10. undec.
.d

15. undec.

A B C D, ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiet, ex scholio propof. 16. lib. 1. Quocirca LMNO, quadratum



4. primi.

erit, cum habeat & latera aequalia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, aequalia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoque ipsis contenti, aequales, quod recta E K, ex angulo E, per centrū K, trianguli aequilateri E A D, ducta bifariam fecerit angulū A E D, per coroll. propof. 1. lib. 3. Erunt & bases K L, K O, aequales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K.

Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac proinde rectae G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cum sint laterum quadrati L N, dimidia, aequales inter se erunt. Ideoque, cum & angulos contineant aequales, nimirum rectos, & aequales erunt & rectae G H, H I, I K, & G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia porro haec rectae in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos;

4. primi.

13. primi

(cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis aequales; Sicut autem L K G, I K O, per coroll. 2. propof. 1. lib. 6. semirectis rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli I G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera aequalia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quae cum latera habeant communia, aequalia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex definit. 1. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit: cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in eorum centrīs. Quae secundo Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendū erat.

6.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrū inscribere.

Si r ex duodecim pyramidibus pentagonis, quae in Icosaedro continentur, quarum uidelicet bases sunt pentagona

ex quinque Icosædri lateribus composita, uertices uero, duodecim anguli Icosædri, una pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula uero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur, lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex uertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex Ichohio propof. 12. lib. 3 bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFO, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilatorum, æqualium ad bases oppositas demisse. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia sint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilatorum, erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam uero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quæ anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis, Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & equiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secantur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centeris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplæ sunt ipsarum



4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi

13. primi.

4. primi

Kk 2 GM,

2. sexti. GM, HN, IO, KP, LQ. ex coroll. propos. 1. lib. 1. paralle-
lae erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ.
10. undec. QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG,
angulis aequalibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM,
15. undec. ideoque & inter se aequales erunt. Quia uero plana per rec-
tas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano penta-
goni MNOPO, & rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntq;
in recta H, ipsa unum planum efficiunt, ex schol. o. propos.
16. lib. 1. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL,
& per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum
constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quoties
GH, KL pentagonum est aequilaterum & equiangulum,
cum & latera habeat aequalia & angulos. Quod si eadem ar-
te in reliquis undecim pyramidibus Icosaedri, centra trian-
gulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter
pentagona aequilatera & equiangula: quae cum latera ha-
beant communia, aequalia inter se erunt. Quamobrem
duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent;
quod quidem ex defin. 3. lib. 1. in Icosaedro erit descri-
ptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti ba-
sium Icosaedri consistant. Quapropter in dato Icosaedro
Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

ITAEQUE cum omnes rectae e centro Icosaedri ad centra ba-
sium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint aequales;
(Cum enim ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. perpendicularis
sint ad plana circulorum aequalium bases Icosaedri circumscriben-
tium, atque adeo eorundem distantiae existant a centro sphaerae,
seu Icosaedri; aequales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propos.
10. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Do-
decaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidē describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro ABCDEF.
In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, &
H, cen-

H, centra triangulorū ex aduerso sibi respondentū A E D, BE C; Item in pyramide inferiori ABCDE, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG.

Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectę AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE BF, bisariam in L, & M per scholiiu propos. 12. lib.

13. coniungaturq; recta LM, quę ip si BE, uel FD, equalis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectę æquales sint, & parallelae, nimirū

dimidia laterum DE, BF, oppositorum in quadrato EF.

Quoniam uero rectę AL, AM, sectę sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplę sint ipsarum

GL, KM, ex coroll. propos. 18. lib. 14. Erunt GL, LM, parallelae; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula

ALM, AGK, similia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est

autem AL, ipsius AG, sesquialtera, quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duę tertię. Igitur &

LM, hoc est ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera octaedri: Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes in

ter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum

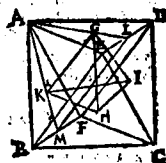
habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 3. lib. 11. in octaedro. Quocirca

in dato octaedro pyramidem descripsimus, Quod erat faciendum.

ALITER. In octaedro dato inscribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum

enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in

earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.



33. primi.

2. sexti.

4. sexti.

18. quarti
decimi.

4. quintide.

1. quintide.

COROLLARIUM I.

9. undec.

15. undec.

Quia uero ostensum est, utramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: Atque eadem ratione KH, ipsi FC, EA, parallelam esse; Atque ideoque planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas uidelicet binis oppositis.

COROLLARIUM II.

PRAETerea, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centrīs basium octaedri constituentur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphaera circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaerae sesquialtera axis tetraedri in ea sphaera descripti, per coroll. 1. propos. 41. lib. 14. uel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quae centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deducit.

o.

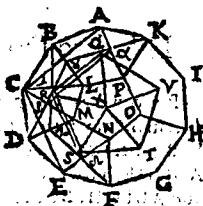
7.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quae ibet duo proxima, rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectae AP, CM, per centra Q, R, rectae ducantur KY, DY, quae per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bisariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectae eadem YK, YD, rectas AP, CM, bisariam & ad angulos rectos in α, β , ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus

& arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descri-
 prorum bifariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK;
 Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur $A\alpha$, $C\beta$,
 parallelæ sunt rectæ BY; atque adeo & inter se parallelæ :
 Sunt autem & æquales nempe di-
 midia rectarum AP, CM, quæ æ-
 quales sunt, cum latera KA, KP,
 lateribus DC, DM, æqualia sint,
 angulosque contineant æquales.
 Rectæ ergo ipsas connectentes
 AC, $\alpha\beta$, æquales erunt, & paral-
 lelæ. Non aliter ostendemus, si
 ex angulis B, F, quos subtendant
 rectæ CL, EN, per centra R, S, re-
 ctæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æqua-
 les esse ipsas CE, $\gamma\delta$: Sunt autem AC, CE, inter se æquales,
 cum contineant angulos æquales æqualibus lineis compre-
 hensos. Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter, cū
 & rectæ $Y\alpha$, $Y\beta$, $Z\gamma$, $Z\delta$, æquales sint. (Nam YQ, YR,
 ZR, ZS, perpendiculares, distantia sunt æqualium rectarum
 BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualium,
 qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atq; adeo
 æquales. Item Q α , R β , R γ , S δ , distantia sunt rectarum
 æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulo-
 rum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ $Y\alpha$,
 $Y\beta$, $Z\gamma$, $Z\delta$, æquales erunt,) Erunt quoque anguli $\alpha Y\beta$,
 $\gamma Z\delta$, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR,
 ZS, æquales sint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS,
 centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales
 demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum co-
 pulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV,
 VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N,
 O, P, constituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quod
 si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dode-
 caedri, similia triangula construantur; (Habet enim
 Dodecaedrum uiginti angulos solidos.) quæ quidem latera
 habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra
 Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri
 consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato



28. tertij.
 28. primi.

4. primi.

33. primi.

4. primi.

14. tertij.

14. tertij.
 8. primi.

4. primi.

KK 4 ergo

ergo Dodecaedro Icosaedrum descriptum. Quod faciendum erat.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubū describere.

PROPOSANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus; $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIK B$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $ABKIH$, fm latēsidem commune AB ; alia autē duo $AEFGH$, $BCMLK$, fm angulos EAH , CBK . In his uero pētagonis subtendantur angulis A, B, D, I , rectæ EH , CK , CE , HK , quadrilaterum efficientes $EHKC$. Quoniam igitur rectæ AE, BC , æquales, auferunt ex circulo pentagonum $ABCDE$, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propof. 17. lib. 3. rectæ AB, CE , parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK . Quare, & EC, HK , inter



se parallelæ erunt; Ac propterea rectæ EH, CK , quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemque cum ipsis plano; Ideoque parallelogrammum erit $EHKC$; quod dico esse æquilatrum. Cum enim omnia latera $AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK$, æqualia sint, angulosque contineant æ-

quales, ex hypothesi; æquales erunt bases EH, HK, KC, CE . Quia uero planum $ECHK$, productum communem sectionem in sphaera facit circulum, per lemma 1. propof. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK , descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K , quam C, H , duobus rectis æquales; Ac propterea cum oppositi E, K , sint æquales, nec non & oppositi C, H , erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H , recti. Quare EK , quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo alia rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pen-

28. tertij.

9. undec.

33. primi.

7. undec.

4. primi.

22. tertij.

34. primi.

los pentagonorum equalibus rectis comprehensos subtend-
 entia equalia sunt; cubum constituent intra Dodecaedru 4. primi.
 descriptum, propterea quod duodecim eius latera laceant
 in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque
 octo anguli in octo Dodecaedri angulis residueant. In dato
 ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat fa-
 ciendum.

COROLLARIUM.

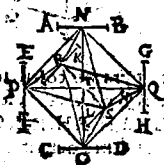
Hinc fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni
 æquilatæ, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Oten-
 sum enim est, CE , EB , ipsi AB , esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum de-
 scribere.

SUMANTUR in Dodecaedro, cui inscribendum sit
 octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in co-
 rollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB , CD ; EF ,
 GH , IK , LM ; quæ bifariam secantur in N , O , P , Q , R ,
 S . Recte igitur NO , PQ , RS , se-
 ctiones oppositorum laterum comun-
 genes æquales erunt; sequè mutuo
 in T , centro sphaeræ bifariam, & ad
 angulos rectos diuident, per coroll. 3.
 propos. 17. lib. 13. atque adeo æqua-
 les quoque erunt earum dimidiatae par-
 tes NT , OT , PT , QT , RT , ST . Quo

circa duodecim recte subtendentes duodecim angulos rectos
 NTP , PTO , OTQ , QTN , NTR , RTP , PTS , STQ ,
 QTR , RTO , OTS , STQ , quales sunt NP , PO , OQ ,
 QN , NR , RP , PS , SQ , QR , RO , OS , SN , æquales erunt,
 cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur. Ac proin-
 de octo triangula NRP , PRO , ORQ , QRN , OSP , PSN ,
 NSQ , QSO , æquilatera, & æqualia erunt, constituentque
 octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex an-
 gulis



4. primi.

guli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsi-
mus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem de-
scribere.

S i t Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis
ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQ-
SV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV,
LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetradrum.
Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, an-
gulum solidum L, componantur, in quibus tres anguli C,



K, R, (quorum quidem C, oppo-
nitur lateri AL, communi penta-
gonis CAL, ALI; At uero K, la-
teri L T, communi pentagonis
K L T, L T P; Denique R, lateri
LN, communi pentagonis RLN,
LNB,) rectis connectantur CK,
CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad
angulum Q, ipsi L, oppositum re-
cta ducantur CQ, KQ, RQ, ut

fit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diame-
tris Dodecaedri, seu sphaerae CH, KE, RM, & connexis re-
ctis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedru
in sphaera describitur; si planum trianguli CHK, extenda-
tur, fiet communis eius sectio cum sphaera circulus, per lem-
ma 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CHK, in se-
micirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus re-
ctos esse angulos CRH, ARE, KQE, RQM, CQH. Quo-
circa cu in omni triangulo rectangulo quadratu lateris recto
angulo oppositi aequale sit quadratis laterum circa rectum
angulum; sint autem quadrata diametrorum aequalium
CH, KE, RM, aequalia: Aequalia erunt quadrata rectorum
CK, KH, quadratis rectorum CR, RH, & quadratis rectorum
K R,

17. tertijde.

32. tertij.

47. primi.

KR, RE, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis re-
ctarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q,
Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualiū
KH, RH, RE, Q E, Q M, & Q H, (Hæ enim rectæ cum sub
tendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis
comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt qua-
drata rectarum CK, CR, RK, K Q, R Q, & C Q; Ac proin-
de & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula
CKR, CKQ, KRQ, RCQ, equilatera sunt, & æqualia,
ideoque tetraedrum componunt C K R Q: quod cum ha-
beat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Do-
decaedri, inscriptū erit intra Dodecaedrum. Itaque in dato
Dodecaedro Pyramidē descripsimus. Quod faciendū erat.

A I T E R. In proposito Dodecaedro cubus describa-
tur; & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod propo-
nitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec
non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspi-
cuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Do-
decaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit.

PROBL. II. PROPOS. II.

IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATUR in dato Icosaedro Dodecaedrus;
& in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod propo-
nitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecae-
dri; anguli uero Dodecaedri in centrīs bāsiū Icosaedri col-
locentur; tangent anguli cubi eadē centra bāsiū Icosae-
dri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam
obrem in dato Icosaedro cubum descripsimus: Quod fa-
ciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidē describere.

IN dato Icosaedro cubus describat, & huic cubo pyramis, fa-
ctumque

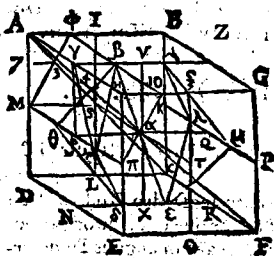
1. *quintide.*
1. *quintide.*

Etumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tangent centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bisariam in I, K, L, M, N, O, P, R; π , ξ , Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξ O, M π , K P, NR, nusquam



inter se coeuntibus, quae rursus bisariam secantur in S, V, T, ρ , Q, X, connexis rectis S T, V X, ρ Q, quae se mutuo in centro α , bisariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, aequales. Iam dimidia re-

ctarum YZ, M π , secantur extrema ac media ratione in β , γ , θ , κ , ut sint maiora segmenta, Y β , Z γ , M θ , π κ , ductis rectis Y ρ , Y κ , β θ , β κ . Quonia ergo Y ρ , YV, dimidio lateris cubi sunt aequales; & ρ κ β V, segmenta minora rectorum equalium YV, ρ π , aequalia quoque: Sunt autem quadrata rectorum YV, β V, tripla quadrati rectae Y β ; Erunt & quadrata rectorum Y ρ , ρ κ , tripla eiusdem quadrati rectae Y β . Quare, cum quadratis rectorum Y ρ , ρ κ , aequale sit quadratum rectae Y κ , quod angulus Y ρ κ , rectus sit; Est & quadratum rectae Y κ , triplum quadrati rectae Y β . Rursus, quia YV, perpendicularis ad AY, Y ρ , recta est ad planum ABE, per rectas AY, Y β , ductum, rectus erit angulus

4. *tertydec.*
47. *primi*
29. *primi*
4. *dunec.*

gulus $\beta\gamma$, ex defn. 2. lib. 11. Ac propterea quadratum re-
ctæ $\beta\gamma$, æquale quadratis rectarum $Y\beta$, $Y\beta$, existens, qua-
druplum erit quadratis rectæ $Y\beta$. (quia nimirum quadra-
ta rectarum $Y\beta$, $Y\beta$, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ
 $Y\beta$, cum quadratum rectæ $Y\beta$, triplum sit ostensum qua-
drati rectæ $Y\beta$.) Ideoque cum quadrata proportionem ha-
beant laterum duplicata, dupla erit recta $\beta\gamma$, rectæ $Y\beta$. Qua-
drupla en. in proportio duplicata est dupla proportionis, ut
in his numeris 1, 2, 4 apparet: Est autem $\beta\gamma$, dupla ipsius
 $Y\beta$, quod minora segmenta $\theta\beta$, $\beta\kappa$, rectarum æqualiū. $M\theta$,
 $\pi\kappa$, æqualia sunt. Erit igitur ut $Y\beta$, ad $\beta\gamma$, ita $\beta\kappa$, dupla ip-
sius $Y\beta$, ad $\beta\gamma$, duplam ipsius $\beta\kappa$: Est autem $Y\beta$, maius seg-
mentum ad $\beta\kappa$, rectam minori segmento $\beta\gamma$, æqualem, ut
tota ad maius segmentum. Ergo $\beta\gamma$, ad $\beta\kappa$, erit ut $\pi\kappa$,
ad maius segmentum. Ac proinde $\beta\gamma$, erit maius segmen-
tum rectæ $\beta\gamma$, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ra-
tione ostendemus $\beta\gamma$, maius esse segmentum rectæ $\beta\gamma$, ex-
trema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $Y\theta$.
Quare æquales erunt $\beta\theta$, $\beta\kappa$, constituentes triangulum
Ilosides $\beta\theta\kappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est
propof. 10. lib. 11. ut postea demonstrabimus. Ac proinde
 $\beta\theta$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\kappa$, circum-
scribente descripti, ut perspicuum est ex 1. propof. lib. 4.
In $U\theta\beta\kappa\gamma$ autem $A\theta\gamma$ iam planum trianguli $\beta\theta\kappa$, ex-
tendi, (ducta per β , recta $\beta\theta$, ipsi $M\pi$, parallela,) per pa-
rallelas $M\pi$, $\theta\gamma$, ut sit planum extensum $\theta\pi\gamma$, occurrens
diametro $A\gamma$, quadrati $ABCD$, in puncto 3. cubi uero dia-
metri $A\gamma$, in puncto 4. & per 3. ducatur 37, recta ipsi $A\theta$,
parallela, connectaturque $M\gamma$, quæ parallela est utrique
 $A\theta$, 73. Quoniam igitur, per coroll. propof. 4. lib. 6. triangu-
lum $A\theta\gamma$ simile est triangulo AMS , ac proinde ut $A\theta$,
ad MS , ita est $A\gamma$ ad 73. Sunt autem $A\theta$, MS , æquales, ne-
pe dimidia cubi latera; Erunt quoque $A\gamma$, 73, æquales. Ea-
dem ratione erit ut MA , ad $A\theta$, ita $M\gamma$ ad 73. Est autem
 $A\theta$, maius segmentum rectæ MA , diuise extrema ac media
ratione. (quod æquales sint $A\theta$, $Y\beta$, nec non $\beta\gamma$, $Y\gamma$,
dimidia cubi latera. Igitur $\beta\gamma$, hoc est, $7A$, maius segmētū
erit rectæ $M\gamma$, extrema ac media ratione sectæ; Ac propte-
rea tota MA , diuisa erit extrema ac media ratione in 7. ma-
squ e

47. primi.

20. sexti.

15. quinti.

33. primi.

4. sexti.

34. primi.

5. tertijdec.

2. sexti.

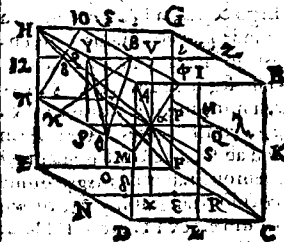
siue segmentum erit $M\gamma$. Atque ut $M\gamma$ ad γA , ita est $S\beta$ ad βA . Secta est ergo & $S A$, extrema ac media ratione in

33. primi.

3. maiusque segmentum est $S\beta$. Quia uero $S\alpha T$, parallela est ipsi $M\pi$, quod & recta ducta πT , equalis & parallela sit ipsi MS ; si per $S\alpha T$, planum ducatur parallelum plano

17. undec.

$\phi\pi$, ducto per $M\pi$, secabuntur rectae AB , AC , in eisdem rationes, in punctis 3. & 4. Atque ideirco, cum AS , secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo $A\pi$, semidiameter cubi in 4. maiusque segmentum erit & 4. Idem argumentis ostendimus, ducta diametro HF , quadrati $EFGH$, & diametro cubi HC , semidiametrum cubi secari in puncto extrema ac media ratione a plano $\phi\pi$, ut perspicuum est;



si cubus inuertatur; ut in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta brachio similia lineamentis prioris figurae, licet bases cubi sedes mutauerint, ita ut quadratum AC , locum quadrati HF , & quadratum HF , locum quadrati AC obtineat in hac secunda figura. Ostendamus nunc,

si rectae iungantur $\theta 4$, $\beta 4$, $\beta 9$, $\kappa 9$, rectilineum $\beta 4 \kappa 9$, in plano $\phi\pi$, existens, pentagonum esse equilaterum, & aequiangulum.

INVERTATUR rursus cubus, ut quadrata $ADEH$, $ABGH$, quae nimirum continent triangulum $\beta\theta\kappa$, siue planum $\phi\pi$, hunc situm habeant, quod monstrat tertia hae figura. Deinde in plano $\phi\pi$, secta coniuncta $\theta 4$ extendatur usque ad rectam $\phi\pi$ in punctum 13. Quonia igitur ducta recta KP , & iunctis

15. undec.

32. undec.

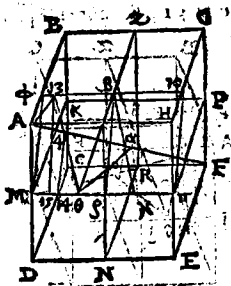
rectis MK , πP , planum MP , parallelum est plano AG , (quod & rectae PK , KM , parallelae sunt rectis GB , BA ,) secatque cubum bifariam; ideoque per centrum α , transit, per ea, quae in scholio propo-

16. undec.

39 lib. 11. ostensa sunt; si per rectas $\alpha 4$, $A 13$, planum extendatur, sicut ab , $A 13$, communes sectiones planorum MP , AG , parallelae; Ac proinde triangu- la $\alpha 4 A 13 4$ aequiangula erunt. Eruntque ut $\alpha 4$ ad $4 A$, ita 4 ad $4 13$. Quare cum αA , in 4. secta sit extrema ac media ratione, ut ostendimus, eodem modo erit

4. sexti.

huiusmodi triangula uides $\beta\theta\kappa$ & ipsorum officio duodecim pentagona ipsi $\beta 4$ & $\kappa 9$ similia & equalia fabricentur. constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis, $M\kappa$, YZ , NR , IL , ϵO , $K P$, binum nimirum in singulis, octo uero reliqui in octo semidiamentis cubi constituentur, nempe in punctis, quae ipsae extremae ac mediae ratione diuidunt, quales sunt puncta θ & δ in semidiamentis $A\epsilon$, $H\epsilon$, secunda figura;



Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicitur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis cubi constituentur, sed quodcumque quidem in sex planis cubi, octo uero in punctis, quae octo semidiamentos cubi extrema ac media ratione secant, residant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

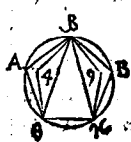
Quod autem triangulum $\beta\theta\kappa$, cuius basis $\beta\theta$, maius segmentum existit, utriusque lateris $\beta\theta$, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describamus circa triangulum isosceles ABC , quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuisusque



construere docet propos. 10. lib. 4. circulus $ADBCE$, diuisusque

diuisisque angulis ABC, ACB , bifariam rectis BE, CD , perficiatur pentagonum equilaterum, & equi-
 angulum $ADBC E$, ut propof. 11. lib. 4. tradidimus,
 fecentque se mutuo recta AB, CD , in F . Quoniam
 ergo AB , in F , secatur extrema ac media ratione, ma- 8. tertijdec.
 iusque eius segmentum est AF , aequale lateri BC ;
 Erit ut AB , tota ad maius suum segmentum BC , ita 2. quarte.
 $\beta \delta$, tota ad maius suum segmentum $\alpha \kappa$; Eodemque
 modo, ut tota AC ad maius segmentum CB , ita $\beta \delta$,
 tota ad maius segmentum $\alpha \theta$: Est autem quoque ut
 AB , ad AC , ita $\beta \theta$, ad $\beta \kappa$, utrobique enim est propor-
 tio equalitatis. Triangula igitur $\beta \delta \kappa, A B C$, pro-
 portionalia habentia latera, equiangula sunt, equa- 5. sexti.
 lesque erunt anguli β, B ; Item κ, C , & β, A ; pro-
 ptereaque uterque angulorum θ, κ , duplus erit anguli
 β ; & triangula $\beta \theta \kappa, A B C$, similia.

PENTAGONVM vero $\beta \delta \alpha \kappa \theta$, equilaterum, esse quoque equiangulum, hac ratione ostende-
 mus. Describatur circa triangulum $\beta \delta \kappa$, circulus



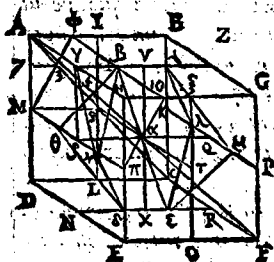
$\beta A \delta \kappa B$, qui si transeat per puncta α ,
 et θ , perspicuum est ex ijs, quae ad propof.
 16. lib. 4. docuimus, pentagonum equian-
 gulum esse. Si uero non incedat per puncta
 α , et θ . Describatur in circulo dicto, iux-
 ta doctrinam propof. 11. lib. 4. pentagonum equila-
 terum & equiangulum $\beta A \delta \kappa B$. Quoniam igitur
 tam recta $A \delta, A \beta$, quam rectae $\alpha \delta, \alpha \beta$, aequales
 sunt rectae $\delta \kappa$, cum & $\beta \delta \alpha \kappa \theta$, & $\beta A \delta \kappa B$, pen-
 tagonum sit equilaterum; Erunt tam duae rectae δA ,
 $\delta \alpha$, quam duae $\beta A, \beta \alpha$, aequales, quod fieri non pos-
 se demonstratum est propof. 7. lib. 1. Transiit ergo cir-

culus triangulo $\beta \theta \kappa$, circumscriptus per puncta 4,
& 9. Ac proinde pentagonum $\beta \alpha \theta \kappa \gamma$, equiangulum est.

SCHOLION.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.

I. DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri $\beta \epsilon$, intelligaturque coniuncta recta $\gamma \epsilon$, equaliter existens & parallela lateri cubi VX , quod & $V\gamma$, $X \epsilon$, equaliter sint, & parallela. Quoniam igitur angulus $\beta V X$, rectus est, rectus quoque erit angulus $\beta \gamma \epsilon$, ad γ , constitutus; Ac proinde quadratum diametri $\beta \epsilon$, equaliter quadratis

laterum $\beta \gamma$, $\gamma \epsilon$, nempe Dodecaedri, & cubi.

II. Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius uero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, cum sit ut γV , ad βV , ita γZ , dupla ipsius γV , ad $\beta \gamma$, duplam ipsius βV ; Sit autem βV , minus segmentum ipsius γV , secta extrema ac media ratione: Erit & $\beta \gamma$, minus segmentum lateris cubi γZ , secta extrema ac media ratione, composita vero ex $\gamma \beta$, γZ , hoc est, recta $\beta \kappa$, (qua dupla fuit ostensa ipsius $\gamma \beta$, ideoque composita ex $\gamma \beta$, γZ , equalis) maius segmentum. Constat autem ex confirmatione $\beta \gamma$, esse latus Dodecaedri, & $\beta \kappa$, seu $\beta \delta$, esse

esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendas angulum pentagoni $\beta \gamma \kappa$, vel $\beta \delta \kappa$. 8. quintide.

L A T V S cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri uidelicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti. III.

N A M in prima rursus figura, latus cubi $\gamma \zeta$, comparatur ex latere Dodecaedri $\beta \gamma$, in ipso descripti, & ex recta composita ex $\gamma \beta$, $\gamma \zeta$ quam constas esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim $\gamma \zeta$, cubi latus subtendas angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris $\gamma \delta$, facti extrema ac media ratione: Erit $\beta \theta$, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris $\gamma \zeta$, ut iam de monstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris $\gamma \zeta$, circumscripti. 8. tertijdec.

R E G T A duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur. IIIL.

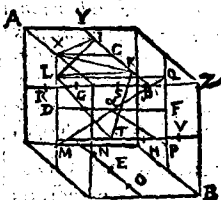
I N prima enim figura, recta connectens puncta β , δ , in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri $\beta \kappa$, oppositi, æqualis est rectæ $\gamma \chi$, (quod & $\beta \gamma$, $\delta \chi$, æquales sint, & parallela) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur. 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

I N dato cubo Icosaedrum describere.

C V B V S datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit A, B , per cuius basium centra C, D, E, F, G, H , lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita ut maiora segmenta prope centra sint, in punctis $I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V$; quorum quodlibet cum quatuor

uicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R; R, cum L, M, I, & N, &c. ut constituentur uiginti triangula I K L, I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q S, R S I, & S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q V, O P V, O T M, N S P, N M R; quorum priora duodecim subtrahuntur duodecim cubi lateribus, posteriora uero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ X C, X I, X K. Quoniam igitur latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; & anguli contenti, recti, quod X C, parallela sit ipsi



A Y, E; unt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 1. recta quoque erit ad lineas X I, X K; Ac propterea erunt latera LX, X I, trianguli L X I, æqualia similiter lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli conten-

ti, recti; æquales erunt bases L I, L K. Rursus quoniam quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ I Y; quadratum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoque quadrati rectæ C I. Ac propterea, cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadrati rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipse æquales. Æqualiterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, sub-

29. primi.
4. primi.

4. primi.
47. primi.

4. terzidec.

Non aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æqualiteras. Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV , æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis, ut in triangulo RTL , latus RL commune est triangulo IKL ; & latus KT , triangulo TVK ; & latus TL , triangulo LMT ; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosædri component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Ita ut in dato cubo Icosædri describamus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

COLLIGEMUS ex hoc propositiones sequentes.

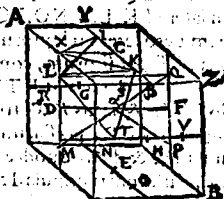
DIAMETER Icosædri potest & latus Icosædri, & cubi Icosædri ambientis.

DVCTA enim recta LQ , quæ lateri cubi DF , parallela est, & æqualis, quod & DL, FQ , parallela sint, & æquales; manifestum est, quadratum diametri QM , æquale esse quadratis rectarum LM , lateris Icosædri, & LQ , lateris cubi, in quo Icosædri descriptum est, cum angulus MLQ , sit rectus, quod & LD, FQ , rectus sit, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosædri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosædri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum DF, CE, GH , cum coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 1. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α , diuidunt. Quod qui-

dem. & centrum esse Icosaedri, ita ostenditur, ducta recta aP .



4. primi

Quoniam latera aF , FQ , trianguli aFQ , equalia sunt lateribus aR , RP , trianguli aRP , angulosque comprehendunt rectos, equales erunt recta aQ , aP . Eademque ratione equales erunt omnes rectae ex a , ad angulos Icosaedri producentes. Igitur a , centrum est Icosaedri.

III.

Si latus cubi extrema ac media ratione sectur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

15. quinti

2. quartide.

Cum enim CI , sit maius segmentum rectae CT ; sitque in CI , ad CT , ita KI , dupla ipsius CI , ad βT , duplam ipsius CT ; erit quoque KI , latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βT .

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

15. undec.

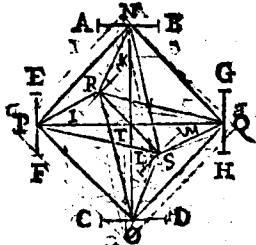
Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, sicut duo triangula inter se equalia, angulosque alternos habentia aequales, ex 4. propos. lib. 1. quae quidem in centro conveniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTUR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB , CD ; EF , GH ; IK , LM , quorum bifarias sectiones N , O , P , Q , R , S , iugant tres rectae NO , PQ , RS , aequales se se in centro T , bifariam, & ad angulos

angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propo-
 densis ostensa sunt, ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ;
 OP, OR, OS, OQ; PR,
 PS; QR, QS, con-
 ruen-
 tes octo triangu-
 SNP, SPO,
 SOQ, SQN; RNP, RPO,
 ROQ, RON. Quia igitur la-
 tera TN, TS, triangu-
 TNS,
 æqualia sunt lateribus TN,
 TP, triangu-
 TNP, (cum sint
 rectarum æqualium dimidia)
 angulosq; continent rectos,
 ut dictum est; Aequales erunt
 bases NS, NP. Eodemq; mo-
 do reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hinc duabus, æm-
 ter se. Octo ergo dicta triangu-
 la æquilatera sunt, & inter se
 æquaræ; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosæ-
 dro descriptum est, cum eius anguli resident in bifarijs se-
 ctoribus sex laterum Icosædri oppositorum. In dato itaq;
 Icosædro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



4. primi

COROLLARIUM.

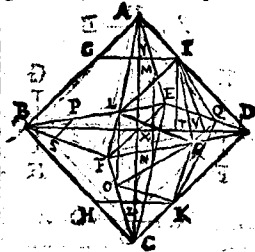
SEQUIITUR hinc, idem esse centrum Icosædri, & Octaedri in
 ea descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrū Ico-
 sædri incidentes, diametri sunt Octaedri NPOQR, sibi inscripti.
 Quare T, centrū Icosædri, ubi se intersectæ, centrū quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosædru describere.

DATUM Octaedrum, in quo describendum est Icosæ-
 drum, sit ABCDEF. Cum a quolibet angulo quatuor
 latera exeant, sumantur a singulis bina, non proxima, sed
 sibi regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos qua-
 dratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bi-
 na iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt
 BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D,
 quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta an-
 gulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam la-

tera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eodẽm angulos A, C, iam sumpta fuerẽ,) E B, E D; F D, F B, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati E B F D; (Nam latera E A, E C; F C, F A, quadrati A E C F, iuxta eodẽm angulos E, F, iam accepta sunt,)



quæ omnia secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut maiora segmenta sint prope angulos a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proxi-

mas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectæ I Q, I R, I M, I L, I G, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad evitandam linearum confusionem: Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, se se in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propof. 14 lib. 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R; minora segmenta rectarum æqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, parallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac provide ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est ut A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, per coroll. propof. lib. 6.) Est autem A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmentum est rectæ X A. Non aliter ostendimus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cum uero latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minori-

- 4. primi.
- 2. quartide.
- 2. sexti.
- 4. sexti.

bus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehen-
dunt rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF. Aequa-
les erunt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostenduntur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis uidelicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac mediæ ratione, ut demonstrauimus ad propof. 5. lib. 13. Est autem XY, rectæ XV, æqualis, (cum amba sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD.) & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentum ipsius XV, & idcirco TV, segmentum minus eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, (cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti; Atque adeo quadratum rectæ IV, æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, quod anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit, per scholium propof. 4. lib. 1. quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non sicus demonstrabimus, æquilatera esse triangu-
la similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM; GPS, HPS, NHK, O'K; RLO, SLO; PMN, QMN; atq; adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. Cum enim in quolibet horum triangulorum unum latus subtendat angulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus

4. primi.

34. primi.

34. primi.

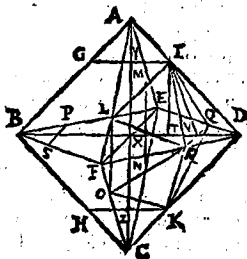
4. terijdec.

47. primi.

47. primi.

8. primi.

minoribus laterū Octaedri; Duo uero reliqua subtendunt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorū æqua-



lia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per coroll. prop. os. 8. lib. 1. Vm triangulis IQR, GIL, latera KQ, GI, subtendunt angulos rectos QDR, GAI, quadratorū DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sūt. Eodem modo latera IQ,

IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum illic continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic uero segmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Nonsecus latera IR, GL, æqualia erunt. Acqualia igitur sunt triangula IQR, GIL, per coroll. prop. os. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Argue hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina uidelicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, uidelicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorū lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (ut uides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, R KQ, solidum angulum R; componenibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROL.

COROLLARIUM. I.

COROLLARIUM I. ex demonstratis, si duo latera trianguli equilateri secentur extrema ac media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius uero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo equilatero ADE , maius segmentum lateris AD , sit DI , & DQ , minus lateris DE ; Sit autem recta IQ , ostensa aequalis rectae GI , quae duplum potest minoris segmenti AI , cum quadratum rectae GI , aequale sit duobus quadratis aequalibus rectarum aequalium AG , & AI : Perspicuum est, & rectam IQ , duplum posse eiusdem segmenti minoris AI .

47. primi.

COROLLARIUM. II.

Corollarium II. Cum octo Icosaedri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiamus namque Octaedri superioris triangulum ABD , in quo collocatum est triangulum Icosaedri $IMEQ$, sitque C , centrum trianguli ABD , ex quo rectae educantur CA , CE , CD , CI , CM , CQ . Quoniam igitur latera CA , AM , trianguli CAM , aequalia sunt lateribus CB , BQ , trianguli CBQ , (quod haec latera sunt ex centro, & maiora segmenta aequalium rectarum) angulosque comprehendunt aequales, nempe dimidios angulorum trianguli equilateri, ut in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases CM , CQ , aequales. Non secus demonstrabimus CI , aequalem esse lineis CM , CQ . Quare C , centrum erit trianguli $IMEQ$.



COROLLARIUM. III.

Corollarium III. Non difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ducis enim ex X , centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG , XO , ad angulos G , & O ; cum latera XA , AG trianguli XAG , aequalia sint lateribus XF , FO , trianguli XFO . (Nam XA , XF , semidiametri sunt Octaedri, & AG , FO , segmenta minora laterum aequalium Octaedri secorum extrema ac media ratione.) angulosque complectantur aequales, semirectos uidelicet; (cum AG , FO , diametri sint quadratorum $ABCD$, $EAPC$, ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 14. lib. 1. angulos quadratorum, bisariam secant.) Aequales erunt & bases XG , XO . Eodemque argumento ostenduntur omnes aliae rectae ex X , ductae ad angulos Icosaedri aequales esse. Igitur X , centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

4. primi.

PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quinside
5 quinside.

INSCRIBATUR dato Octaedro Icosaedrum; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centrâ basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulo in eisdem centrâ octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centrâ duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicitur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

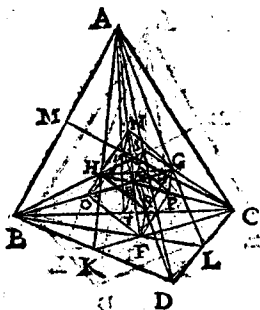
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

15. quarti
decimi.

DETERMINATA Pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis recte educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, recte ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bisariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 3. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque recte ex solidis angulis per centrum E, demissæ AF, BG, CH, DI, bisariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centrâ basium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico

Dico solidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum esse. Cum enim latera A F, F K, trianguli A F K, equalia sint lateribus A E, E L, trianguli A F L, (quod F K, F L, cum perpendicularares sint ad B D, C D, ex centro F, ducte, ostendat



equales distantias rectarum equalium B D, C D, a centro F) angulosque cōiuncat rectos, ex 3. defin. lib. 11.

Aequales erāt & bases A K, A L & anguli K A F, L A F. Rursus qā latera A N, A H, triāguli A N H, equalia sunt lateribus A N, A G, triāguli A N G, sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum

equilaterorum equalium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt equales, ut demonstravimus; Aequales erunt bases N H, N G. Haud secus ostendentur equales recte Q G, Q H, si recte ducantur D G, D H, nec non & relique, cum omnes subendant; quales angulos equalibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta

ducatur F T, cum latera A F, F T, equalia sint lateribus A F, F K, (Sunt namque F T, F K, distantie rectarum equalium B C, B D, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cū latera A N, A I, equalia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum equilaterorum equalium A B C, A B D) angulosque contineant equales: Aequales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, equaliter. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangularia, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum N F.

A S, V M, A T, V R, quadrilaterū N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non cōiunguntur in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter Qctaedi in pyramide descripti, ut constat ex figura propof. 2.

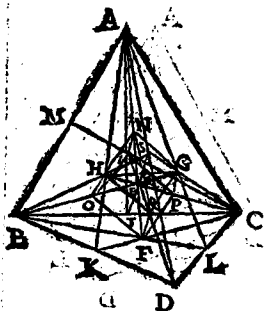
huius

4. primi

4. primi.

4. primi.

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ responder puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis, & Octaedri in ipsa descripti, ut



mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, p[er] scholiū p[ro]pos. 12. lib. 13. erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, atque idcirco HG, parallela est lateri BC,

secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC, erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex eor[um] 1. p[ro]pos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1, atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secantur, recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidē pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur utraque HG, NQ, ex S & Q duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R, secabitur SE, a rectis HG, NQ. Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem se se puncto interfecabunt. Quare in eodem sunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem

17. quarti-
decimi.

2. sexti.

19. quarti-
decimi.

2. sexti.

2. undec.

cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ . Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum, nunc demonstramus.

Cum ostensa sit HG , ipsi BC , parallela, atque adeo triangulum SHG , simile triangulo SBG , ex coroll. propof. 4. lib. 6. Erit ut SH , ad HG , ita SB , ad BC ; & permutando, ut SH , ad SB , ita HG , ad BC : Est autem SH , tertia pars ipsius SB : Igitur & HG , tertia pars erit lateris BC . Haud secus ostendemus NQ , tertiam esse partem lateris AD . Cum ergo latera BC , AD , sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG , NQ , æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN , GN ; GQ , HQ ; NG , QG ; NH , QH ; Æquales erunt quatuor anguli HNG , NGQ , GQH , QHN . Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, ut ostendimus ad propof. 32. lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum erit NQ . Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F , G , H , I , in centris quatuor basium pyramidis, quatuor uero reliqui N , O , P , Q , in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum residant, ut constat. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

4. sexti.

8. primi.

COROLLARIUM. I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF , OG , PH , QI , cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per B , centrum pyramidis transeunt.

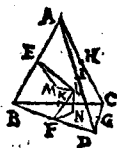
COROLLARIUM. II.

INFERTUR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim BR , ex E , centro cubi, in R , centrum basis $GNHQ$, ducta dimidium sit lateris cubi, ut constat; Recta RS , dupla. totius ER ,

B R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, ostensa fuerit pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi R S.

L E M M A.

I D E M autem esse centrum Pyramidis, & Octædri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit Pyramis



ABC D, cuius omnia sex latera bifariam secantur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulo-

rum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propof. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F. (cum enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propof. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantia L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantia rectarum æqualium A B, B D, a centris M, & N, circulo- æqualium) angulosque comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. Æquales erunt

4. primi

rectæ L E, L F. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cum anguli Octædri in pyramide descripti constituentur in punctis E, F, G, H, I, K, ut ex 2. propof. huius lib. constat: Erit L, centrum Octædri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit cen-

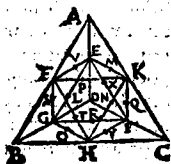
trum

trum pyramidis, & octaedri in ea descripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secantur extrema ac media ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, ut in propol. 16. huius lib. diximus; qualia sunt BG, EK, HK, HG; KE, KI, GL, GE; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, ut M. cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto octaedro, ut constat



ex propol. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim praefatis sectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo haec ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KE; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare

dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases

MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor

basibus Pyramidis existunt, ut con-

stat. In data igitur Pyramide

Icosaedrum descripsi

mus. Quod e-

rat facien-

dum.

M m

POR

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodæcaedrum describere.

19. quintide
5. quintide.

3. quintide.

13. quintide

Pyramidi datæ inscribatur Icosædrium, & in hoc Dodæcaedrum habens uiginti suos angulos in centris uiginti basium Icosædri; Factumque erit, Quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosædri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodæcaedri dicto Icosædro inscripti in quatuor basibus pyramidis; nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosædri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodæcaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodæcaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodæcaedri; cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifarijs sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodæcaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodæcaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodæcaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

Ex centro sphære datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulo-
rum

rum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemma 2. eiusdem propos. Quapropter sphaera, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies convexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLION.

IT A Q U E, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in univrsum viginti inscriptiones & unum dumtaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos. 13. 17. & 10. huius lib. Similiter minus tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti consistui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut defin. 31. lib. 11. exposuimus: Quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non convenit.

C A E T E R V M inter omnia quinque solida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suorum angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri convenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicitur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi convenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem privilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

N E Q U E uero prætereundum est, Dodecaedrum, sibiq;

16. quinsida

5. quinside.

8. quinside.

1. quinside.

1. quintide.
8. quintide.

inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphaera comprehendendi. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, conveniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphaeram Dodecaedro circumscriptionem completti quoque cubum atque Pyramidem, cum sphaera illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

P A R I ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centro consistuntur, ut demonstratum est: In centris quidem basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium Pyramidis, propos. 20. & 18. huius lib.

V I G I N T I porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesque quinque solidorum regularium, unius in alio, quotquot excogitari possunt, absolvimus, cum in quolibet reliqua quatuor designaverimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde, Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori unica propositione, qua arte in quovis solido regulari sphaera depingatur, docuimus.

ELEMENTI DECIMIQUINTI FINIS.



ELEMEN

ELEMENTVM

DECIMVMSEXTVM,

*Quo uariae solidorum regularium sibi mutuo inscri-
ptorum, & laterum eorundem comparationes
explicantur, a Francisco Flussate Candalla
adiectum, & de quinq; corporibus.*

LIBER TERTIUS.



*VE MADMODVM in lib. 14. tra-
dita sunt comparationes quam plurima
figurarum regularium, & laterum ea-
rundem in eadem sphaera descriptarum,
quarum quidem descriptione in lib. 13.
exposuit Euclides; ita etiam Franciscus
Flussas Candalla in hoc lib. 16. inter se
comparat easdem figuras regulares sibi
mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem
inscriptionem in praecedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam
connexionem habet hic liber 16. cum praecedenti 15. quam quar-
tusdecimus cum tertio decimo habuit; ut imperfecta quodam-
modo uideri possit tractatio hac quinq; corporum regularium,
si liber hic decimus sextus non adiungatur.*

THEOR. I. PROPOS. I.

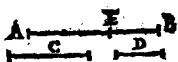
*SI in Dodecaedro cubus describatur,
& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit
proportio Dodecaedri exterioris ad Do-*

M m 3

decaedrum

decaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

Lex. 7. v. s. cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cum enim, ut in scholio ultimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq;



in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac mediâ ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, ut AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo

gulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in
latus oppositum demissa, secatur a recta illū
angulum subtendente, extrema ac media ra
tione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo $ABCDE$, ex
angulo A , ad latus oppositum CD , perpendicularis demit
tatur AF . Dico AF , a recta BE , subtendente angulum A , se
cari in G , extrema ac media ratione. Du
cta enim recta AD , que secet BE , in H ;
quoniam BE , recta lateri CD , per coroll.
propof. 8. lib. 15. est parallela; secabun
tur rectæ AF , AD , proportionaliter:
Atqui AD , in H , secta est extrema ac me
dia ratione, estque maius segmentū DH .
Igitur & AF , in G , similiter erit secta. Quocirca linea per
pendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demon
strandum.



2. sexti.
3. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducan
tur rectæ opposita latera secantes extrema
ac media ratione, ita ut prope quemuis an
gulum sit maius segmentum unius lateris,
& minus alterius: Hæ sectionibus suis in me
dio producent basin Icosaedri in dicta pyra
mide descripti, inscriptam quidem alij triā
gulo æquilatero, cuius anguli latera trian
guli pyramidis secant extrema ac media ra
tione, & latera ipsa bifariam secantur ab an
gulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit $A B C$, cuius latera secantur bifariam in D, E, F , iunctis rectis DE, EF, FD , quibus rursus sectis extrema ac media ratione in G, H, I , iungantur rectæ GH, HI, IG , constituentes $GH I$, triangulum Icosædri in dicta pyramide descripti, ut constat ex propof. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli $A B C$, extrema ac media ratione in K, L, M , iunctis rectis BK, CL, AM . Di-
eō hās rectas suis sectionibus producere triangulum Icosædri $GH I$, hoc est, rectam BK , transire per puncta G, I ; & rectam CL , per puncta H, I ; & rectam AM , per puncta G, H .



Ducta enim per H , recta NO , ipsi BC , parallela; erit triangulum FHO , triangulo FEC , simile, ex coroll. propof. 4. lib 6. ideoque & æquilaterum; cum & FEC , æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC , per idem coroll. Quare HO , recta æqualis est rectæ FH , maiori

segmento rectæ FE , seu DF , ipsi æqualis: (Est enim & DEF , triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendāt angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos; ideoque æqualia sint.) Est autem & NH , æqualis toti DF , in parallelogrammo DH , propterea quod FH, DF , parallelæ sint rectis AB, BC , seu NO . Igitur recta NO , composita ex NH , tota, & HO , maiori segmento, secta erit in H , extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ BC, NO, DF , similiter sint sectæ in M, H, G , nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM , ex ijs, quæ demonstrauimus ad propof. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM , transire per puncta G, H . Haud secus ostendemus BK , per puncta G, I ; & CL , per puncta H, I , transire, si per $G, & I$, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB ; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM , suis sectionibus producent triangulum Icosædri $GH I$.

A G A T V R iam per G , recta PQ , rectæ CL , parallela. Quoniam igitur AF , æqualis est rectæ DF , seu rectæ FE , cuius maius segmentum fuit FH , hoc est, FO , illi æqualis; Erit quoque FO , maius segmentum rectæ AF ; ac proinde tota AO , secta in F , extre-

4. primi.

34. primi.

2. sexti.

5. terciydec.

5. terciydec.

F, extrema ac media ratione : Est autem ut AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO ; & ut AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectę AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectę ergo AQ, AL, segmenta maiora restarum æqualiū AC, AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum ; Et est AQ, recta rectę AL, æqualis : Erit & QC, recta æqualis rectę AP. Quare & recta AP, minus segmentū erit lateris AB, maiusque reliqua AP ; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadē ratione recta PR, quę per I, ducitur parallela rectę AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectę BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero singula latera trianguli PQR, cum subpendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia inter se sunt ; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bisariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI : (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL, secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quę ad propos. 4. lib. 6. demonstraui-
mus : Diuiditur autem CL, bisariam in H, ob triangulum ACL, in quo EH, parallela est lateri AL, secans proportiona-
liter latera CA, CL. Igitur & PQ, bisariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bisariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

C O R O L L A R I U M

Ex his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectę diuisę extrema ac media ratione, quę ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque

2. sexti.

2. quarside.

4. primi.

2. sexti.

quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propof. 16. lib. 15. GHI , triangulum fit Icofaedri in octaedro, cuius bafis DEF ,



descripti; ducatur ex angulo F , trianguli FEC , quod triangulo DAE , est æquale, recta FS ; parallela rectæ AM , secans EC in S , & T . Cum igitur MC , bifariam secetur in S , ob triangulum AMC ; sitque MS , ipsi GE , æqualis, ob parallelogrammum GS ; Erit & SC , æqualis eidem GF , minori segmento rectæ DF ; Ac propterea cum totæ DF , EC , æquales sint; erit quoque reliqua ES , reliquæ DG , maiori segmen-

to æqualis: Ideoq; EC , in S , secata erit extrema ac media ratione. Deinde quia FE , FS , similiter secantur; secatur autem FE , extrema ac media ratione; secabitur & FS , in T , extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit FT , recta æqualis existens lateri Icofaedri GH , ob parallelogrammum GF . Igitur FT , latus Icofaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS , quæ diuidit EC , latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F , demissa. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secati, duplum est potentia lateris Icofaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC , cuius latera extrema ac media ratione secantur in K , L , M , & ductis rectis BK , CL , AM ,



producentibus GHI , basim Icofaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatelo PQR , cuius anguli latera trianguli ABC , secant extrema ac media ratione in P , Q , R , & ipsa latera PQ , QR ,

RP , bifariam diuidantur in G , H , I , ut in propof. præcedenti demonstratū est: Dico AP , minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potētia lateris Icofaedri HI . Cū n. PQ dupla sit potentia minoris segmenti AP , ex coroll. 1. propof. 16. lib. 1. quadrupla uero potentia rectæ HI , ex scholio propof. 4. lib. 2. qd̄ PQ recta dupla sit rectæ PG ; hoc est, sibi æqualis HI ; ob parallelogrammū PH ; Erit PQ potentia 4. & AP .

AP, 2 & HI, 1. Quobrem AP, dupla erit potētia rectæ HI. Minus ergo segmentū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his latus Icosædri in pyramide descripti, esse Apotomen. Cum enim diameter sphaeræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rōnale; cū diametro potētia sit cōmēsurabile. Quare minus segmētū lateris Pyramidis extrema ac media ratione scēti Apotome erit; Atq; adeo cū minori segmētō lateris Pyramidis latus Icosædri potentia sit cōmēsurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosædri.) Erit & latus Icosædri; ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

13. tertijde.

6. decimi.

6. tertijdec.

6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATUS cubi potētia dimidiū est lateris Pyramidis ī eo descriptæ: Latus uero Pyramidis duplū est longitudine lateris octædri sibi inscripti: latus deniq; cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octædri.

CUM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, ut cōstat ex propos. 1. lib. 15. Sit autē quadratū huius diametri duplū basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potētia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, ut constat ex 4. propos. lib. 4. Perspicuum est, latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octædri sibi inscripti.

DENIQUE quia diameter sphaeræ, seu octædri potentia est dupla lateris octædri; Est autem latus cubi æquale diametro octædri sibi inscripti, cū diameter octædri cōiungat cētra basī cubi oppositarū, ut in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, lat^{us} cubi potētia esse duplū lateris octædri in

14. tertijde.

code.

co descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

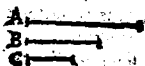
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

3. sextidec. C V M enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: A parte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

S I T latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico



B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs, quæ in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit

fit eiusdem lateris cubi: Planum sit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, ut B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosædru, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

Cum enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC,) Et quadrata proportionē habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti; cum noncupla proportio sit triplæ duplicata, ut in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1, quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

10. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

Cum enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15. Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi & Dodecaedro inscripti:

8. sexidec.

inſcripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratio-
ne ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13.
latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cu-
bus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octode-
cuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius ma-
ius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur:
Erit latus Icoſaedri potentia duplum mino-
ris ſegmenti lateris octaedri extrema ac me-
dia ratione diuifi.

47. primi.

UT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniun-
gens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angu-
lum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi
recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſeg-
mentis AG, AI, comprehenſum,) latus eſt Icoſaedri in octae-
dro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit
duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit unius
minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcriba-
tur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadru-
plum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo
deſcripti.

SIT una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis
quadratum ABCD, triângula uero ad E, uerticem, AB E,
EBC, CED, DEA, ſintque horum triângulorum centra F,
G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis
AB, BC, CD, DA, parallelae. Quod ſi coniungantur rectæ
FG,

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro
descripti, ut demonstraui mus propof. 4. lib. 15. Quoniam au
tem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ
EH, per coroll. propof. 18. lib. 14. qualium
partium 3. ponitur EO, talium 2. erit EH:
Atqui ut EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igi
tur qualium partium 3. continet EB, talium
2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propte
rea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & qua
dratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque
& quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGHI, talium par
tium 2. cum quadratum LN, duplum fit quadrati GI, si
bi inscripti, per ea, quæ in scholio propof. 47. lib. 1. de
monstraui mus. Est enim LN, quadratum ex diametro
quadrati GI, descriptum; cum GI, diameter (si ducatur)
æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, po
tentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum
eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus
igitur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat de
monstrandum.

2. *sexti.*

33. *primis*

COROLLARIUM.

Quia uero latus eubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum, latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. Inscribunturque Dodecaedrum, & eubi sibi inscriptus, eidem octaedro, ut docuimus in scholio propos. ultimae lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectae extrema ac media ratione diuisae, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est. n. eiusmodi recta latus eubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

L A T V S Icofaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icofaedro descripti.

Q v o.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres recte lateri cubi aequales, ut constat ex propof. 14. lib. 15. eiusque scholio. Et in bifarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propof. 15. eiusdem lib. 15. Fit, diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti aequalem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quae ad propof. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi praedicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti: Atqui diameter sphaerae, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectae extrema ac media ratione sectae, quae potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

14. tertijde.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATUS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectae lineae diuisae extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectae lineae.

OSTENSIVUM est in scholio propof. 13. lib. 13. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineae ad maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod tota

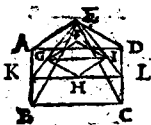
tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

P R A E T E R E A, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Oâtaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

S I T una sex pyramidum Oâtaedri ABODE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad uerticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Oâtaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Oâtaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Oâtaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus oâtaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque BK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18.



N n lib.

sexi.

lib. 14. Ac propterea $G I$, parallela erit rectæ $K L$, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum $E G I$, simile triangulo $E K L$. Quare erit, ut $E K$, ad $K L$, ita $E G$, ad $G I$; & permutando, ut $E K$, ad $E G$, ita $K L$, ad $G I$; ideoque cum $E K$, sesquialtera sit ipsius $E G$, erit & $K L$, sesquialtera ipsius $G I$. Cum ergo $B C$, æqualis sit ipsi $K L$, quod & $B K$, $C L$, æquales sint, & parallelæ; Erit $B C$, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis $G I$, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

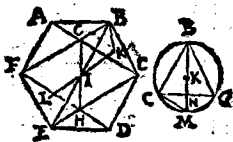


primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitergium quadrati lateris Icosaedri.

SI Γ Icosaedrum $A B C D E F G H$, cuius diameter $B E$, & centrum I ; triacula uero opposita & parallelæ, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. $B C G$, $E F H$, quorum centra



$K L$. Ducatur ex centro I , ad planum $B C G$, perpendicularis $I K$, cadens. ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K . Producta igitur $K I$, perpendicularis quoque erit ad planum $E F H$, parallelum plano $B C G$, per scholium propos. 14. lib. 13. cadetque idcirco in centrum L , per coroll. præfati lemmatis. Quæ ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuât suos angulos in centris basium Icosaedri, ut constat ex propos. 11. lib. 13. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit $K L$, diameter cubi in Icosaedro descripti, tranfiens per I , centrum Icosaedri. Cum ergo eadē ratione reli-

quæ

quæ diametri cubi per idem centrū I, tranſeant, ſcilicet I L, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque I K, I L, ſemidiametri equales: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum B C G, circumscribentis, erit angulus B K I, reſtus, ex defn. 3. lib. 1. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri B I, ut in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis, & K L. Sunt enim hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi K L, (quod triplum eſt quadrati lateris cubi,) ex quadrato diametri Icoſaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. erit recta B C, potentia ſeſquitertia rectæ B N; Vt autem B C, ad B N, ita eſt B M, ad B C, quod B C, ſit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. cum angulus B C M, reſtus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur B M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, ſeſquitertium eſt quadrati lateris B C. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

47. primi.

15. tertij dec.

12. quarti decimi.

1. tertij.

COROLLARIUM.

Hæc ſit diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis, oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadrato diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmen-
tum est rectæ lineæ extrema ac media ratio-
ne diuisæ, quæ duplum potest lateris Octae-
dri in eo descripti.

1. tertijdec. **QVONIAM** diameter Octaedri in Dodecaedro descri-
pti duplum potest lateris octaedri, coniungit bifarias sectio-
nes laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est
ex propof. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones con-
iungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmen-
tum latūs Dodecaedri, ex coroll. 4. propof. 17. lib. 13. Liqueet,
latūs Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema
ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri
in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias se-
ctiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem mi-
nus segmentum est latūs Dodecaedri, ex prædicto coroll.
Itaque latūs Dodecaedri minus segmentum est, &c. Quod
erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui
ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyra-
midis in eo descriptæ sesquialterum.

13. tertijdec. **CVM** cubus & Pyramis, in eo descriptæ, in eodem Ico-
saedro describantur, ut docuimus in scholio propof. ultime
lib. 13. eademque sphaera comprehendantur, eadem erit dia-
meter cubi, & diameter sphaeræ pyramidem circundantis:
potest autem diameter sphaeræ sesquialterum lateris pyrami-
dis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo &
Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris Pyrami-
dis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter cir-
culi basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest
lateris

lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. huiuslibet demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſim Icoſaedri circundantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis. In eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiufdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiufdem poſitæ.

Sic dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis A B M L K, L K I H P, P H G F O, O F E D N, N D C B M, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X. Conſtituta ſunt igitur quinque trian- gula Icoſaedri in Dodecaedro de- ſcripti componentia angulum ſoli- dum X, in centro pentagoni L M- N O P, ut oſtenſum eſt in demon- ſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duo- bus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim B M, per centra R, Q, rectæ demittan- tur D Y, K Y, quæ quoniam biſariam, & ad rectos angulos ſecant larus B M, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta A L, angulo K, ſe-



2. sextidec.

abitur perpendicularis KY , in Z extrema ac media ratio-
nis. Dico ita esse latus Dodecaedri LM , ad latus Icosaedri
sibi inscripti QR , ut KZ minus segmentum perpendicu-
laris KY , ad rectam QY , inter centrum Q , & latus BM ,
interceptam. Subtensa enim recta



DK , quæ per demonstrata in
scholio propo⁸ 13. lib. 1. sublatus est
cubi, in quo Dodecaedri propo-
situm describitur; erit LM , latus
Dodecaedri, minus segmentum ip-
sius DK , si extrema ac media ra-
tione secetur, ex eodẽ scholio pro-
po⁸ 13. lib. 1. 4.

Quonia uero late-
ra YD , YK , trianguli YDK , pro-
portionaliter secantur in R , & Q ; (sunt enim RD , QK , se-
midiametri circulorum æqualium equales; necnon & YR ,
 YQ , distantes nimirũ rectæ BM , a centris R , & Q , eorun-
dem circulorũ equalium) parallela erit QR , ipsi DK ; deoq;

2. sexti.

4. sexti.

2. quartide.

triangulu YRQ , triangulo YDK , simile, per coroll. pro-
po⁸ 4. lib. 8. Quã ob rẽ erit, ac DK , ad KY , ita QR , ad QY ;
Vt autẽ DK , tota ad totã KY , ita est LM , minus segmentũ
ad minus KZ . Vt igitur LM , ad KZ , ita erit QR , ad QY ;
Et perturbando, ut LM , latus Dodecaedri, ad QR , latus Ico-
saedri sibi inscripti, ita KZ , minus segmentum perpendicu-
laris KY , ad QY , inter centrum Q , & latus BM , interceptam.
Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri la-
tus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema
ac media ratione sectum fuerit, minusque
eius segmentum a toto latere Icosaedri sub-
latum; A reliqua quoque recta pars rursum
tertia detracta: Relinquetur latus Dode-
caedri in Icosaedro descripti.

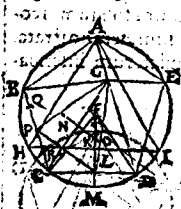
CIRCA

Circa pentagonum $ABCDE$, ex quinque lateribus Icosædri compositum circulus describatur, cuius centrum F ; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excidentur constituenta angulum solidum Icosædri G , & ijs, quæ in propof. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI . Quoniam igitur arcus ABC , AED , æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH , AEI , cum sint tertiæ partes eiusdem circumferentiæ, sunt reliqui arcus HC , ID , æquales, proptereaque rectæ HI , CD , parallæ, per scholium propof. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F , perpendicularis deducatur FKL , secans rectas HI , CD , bifariam in K , & L ; coniuganturque rectæ FC , FD . Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC , GCD , centra N , & O , per quæ rectæ ducantur GNP , GOL , diuidentes, per scholium propof. 12. lib. 13. latera opposita BC , CD , bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO , in punctum L , in quo diuisa est CD , bifariam, cadet. Iungantur autem centra N , O , recta NO , quæ, ut constat ex demonstratis in propof. 5. lib. 15. satus est Dodecaedri in Icosædro descripti. Denique BP , dimidium lateris Icosædri secetur in Q , extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ , ex toto latere BC , reliquæ CQ , tertia pars detrahatur CR . Dico reliquam QR , æqualem esse lateri Dodecaedri NO . Cum enim FL , perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI , secetur in K , extrema ac media ratione; (quod FL , hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK , per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK , æqualis recta KM , per corollarium propof. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauius ad propof. 5. lib. 13. maius segmentum KM , sectum quoque in L , a minori segmento KL , extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM , excedit rectam FL , minore dimidiæ fupius



3. terij.

segmento L.M. Quoniam uero iuncta P.L. est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A.B.C.D.E. descripti, idemque centrum F. habentis, ex scholio ultimo lib. 4.



ideoque similis illi; erunt triangula F.C.D., F.P.L., (si recta ducatur F.P.) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare ut F.C., ad C.D., ita erit F.L., ad L.P.; & permutando, ut F.C., ad F.L., ita C.D., ad L.P.: Atqui F.C., hoc est, sibi æqualis F.M., excedit rectam F.L., minore segmento dimidii ipsius F.M., nempe minore segmento rectæ K.M., ut ostendimus. Recta igitur C.D.,

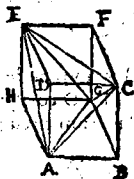
ut sibi æqualis B.C., excedet quoque rectam L.P., minore segmento dimidii ipsius B.C., nimirum minore segmento rectæ B.P., quod fuit B.Q.; ideoque reliqua C.Q., rectæ P.L., æqualis erit. Rursus quia G.P., G.L., proportionahter secantur in centris N.O.; (quod G.N., G.O., dupla sint ipsarum N.P., O.L., per coroll. propos. 18. lib. (4.) parallelæ erunt P.L., N.O.; ac proinde triangulum G.N.O., triangulo G.P.L., simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur erit ut G.P., ad P.L., ita G.N., ad N.O.; & permutando, ut G.P., ad G.N., ita P.L., ad N.O.: Est autem G.P., ipsius G.N., sesquialtera, per coroll. propos. 8. lib. 14. Quare & P.L., hoc est, sibi æqualis C.Q., sesquialtera erit ipsius N.O.; Ac proinde, cum C.Q., sesquialtera quoque sit rectæ Q.R., (Nam qualium partium 3. est C.Q., talium 1. est C.R., per constructionem; Ac propterea earundem 2. Q.R.,) æqualis erit Q.R., ipsi N.O., lateri Dodecaedri in Icoaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icoaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CUBVS sibi inscriptæ Pyramidis triplus est.

IN cubo A.F. descripta sit pyramis A.C.E.G. Dico cubum pyrami-

pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACD; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11,



cum contingantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus, cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis, manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, proptereaque cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi. Atque proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptæ eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphaera comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15. Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphaera descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphaera, in qua cubus, continetur.

THEOR.

32. undec.

32. quarti-decimi.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri du-
pla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIK-
G H F. Dico Pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim
octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi A B-



CD, similes, ut propof. 5. lib. 12. demon-
stratum est fundatæ super quatuor ba-
ses octaedri EGH, EFI, FGK, HIK;
quales sunt pyramides EGH A; EFIB,
FGK C, HIK D: (quæ quidem equa-
les inter fe sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum
contineantur triangulis similibus, equali-

busque numero & magnitudine, quippe quæ similia sunt ba-
sibus pyramidis æquilatæ ABCD, per coroll. propof. 4. lib.
6. lateraque habeant equalia, nempe dimidia laterum æqua-
lium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione pro-
pos. 2. lib. 15.) Habeant autem pyramides similes proportio-
nem homologorum laterum triplicatâ; Erit pyramis A B-
CD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octae-
dro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit propor-
tionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad
latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his
numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illa-
rum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B-
CD; Ac idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor
partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, con-
ficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reli-
qua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Py-
ramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat
demonstrandum.

8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextu-
plus est.

QVO-

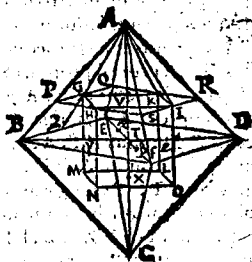
QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; itaque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti Octaedri sextuplus est. Quod erat ostendendum.

20. sextide.
21. sextide.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centrīs basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratum cōstituentes PQRS, ut in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholion propos. 14. lib. 1. Est autem V, centrū quadrati PQRS: (tam enim plana BEDF, PQRS, parallela secant rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter, erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales.



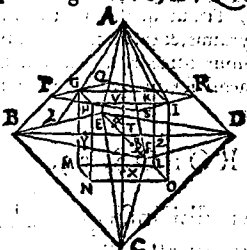
15. undec.

17. undec.

Inscelli.

47. primi.

Intelligentur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS . Quoniam
gitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ ,
æqualia sunt quadratis rectarum $AV, VP; AV, VQ$,
quod anguli AVP, AVQ recti sint, per defin. 3. lib. 1. idem



pro communi quadrato
rectæ AV ; æqualia erunt
reliqua quadrata rectarum
 VP, VQ proptereaque
& rectæ ipsæ VP, VQ
æquales. Non aliter osten
demus & hæc, & inter se
æquales esse rectas VR, VS . Quare V centrum
est quadrati $PQRS$.

Igitur & centrum erit qua

drati $GHIK$, in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4.
Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP bisariam in G, H, I, H , ut constat ex demonstratis in propof. 4. lib. 15. Eodem
argumento concludemus X centrum esse basis $LMNO$.
Nec non & alias diametros ductas BD, EF , per Y, Z, α, β ,
centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta AY ,
per G , centrum trianguli æquilateri ABE , erit AG , dupla
ipsius Gy , per coroll. propof. 18. lib. 14. Cum ergo plana PR ,
 BD , parallela secent rectas AY, AT , proportionaliter; du
pla quoque erit AV , ipsius VT . Eodem modo dupla pro
babitur CX , ipsius XT ; Ac proinde cum æquales AT, CT ,
similiter secentur in V , & X ; æquales erunt AV, CX ; nec
non VT, XT . Recta igitur VX , coniungens centra basium
cubi oppositarum bisariam secatur in T . Quare cum ad
eundem modum $YZ, \alpha\beta$, bisariam secentur in T erit T ,
centrum cubi rectum, per coroll. 1. propof. 13. lib. 12. recte cen
tra basium cubi oppositarum connectentes se se bisariam se
cent in centro, iam uero, quoniam VX , ipsius VT , dupla
est; dupla autem fuit & AV , eiusdem VT ; æqualis erit
 AV , ipsi VX , nempe altitudini cubi. Quare pyramis $GHIK$
 A , ductis rectis AI, AK , tertia pars est cubi, seu prismatis
 GO , per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. cum utriusque eadem
sit basis GI , & altitudines æquales AV, VX . Est autem
pyramis $PQRS A$, pyramidis $GHIK A$, dupla, quod &
basis

87. undec.

6. duodec.

basis $PQRS$, dupla sit basis $GHIK$, illi inscriptæ. Igitur pyramis $PQRSA$, duas tertias partes cubi GO , continet. Quia uero pyramides $BEDFA$, $PQRSA$, similes existentes, per defin. 2. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4, lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB , lateris AP , sesquialterum, quod & recta AG , proportionaliter secta ipsi AB , sesquialtera sit ipsius AG ; Erit pyramis $BEDFA$, ad pyramidem $PQRSA$, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum $ABCDEFG$, duplum existens pyramidis $BEDFA$, proportionem habebit ad eandem pyramidem $PQRSA$, quam 54. ad 8. At qualem parrium 8. ponitur pyramis $PQRSA$, talium 12. esse cubum GO , iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum $ABCDEFG$, ad cubum GO , proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

8. duodec.
2. sexti.

COROLLARIUM I.

Idem ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T , utriusque esse centrum.

COROLLARIUM II.

Parspicietur etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstraui-
mus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

11. sextide.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRUM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

Qv o-

Q V O N T A M ut ostendimus ad finem lib. 15. cubus sibi; inscripta Pyramis in eodē octaedro describuntur; Est 13. *sexide.* autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesqui 10. *sexide.* alterum; Et cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis triplus: Qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus; & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

I N Pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H, centra duarum basium A C D, A B D, commune



latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bisariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio pun-

cto S. Connexa uero recta G H; cum B H, C G, duplæ sint rectarum H S, G S, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secantur B S, C S, parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, simile. Erit ergo ut B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad G S: Est autem C S, ipsius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipsius H G. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta uero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in pro-

2. *tertij.*

4. *sexti.*

18. *quartidecimi.*

pos.

pos. 18. lib. 15. (ibi enim recta GH , iungens centra G, H ,
 basium ACD, ABD , commune latus $A'D$, habentium dia-
 meter fuit basis $GNHQ$, cubi descripti in pyramide.) Erit
 latus pyramidis BC , diameter basis cubi pyramidem AB
 DC , circumscribentis, GH , uero diameter basis cubi in ea-
 dem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant propor-
 tionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim ut
 diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius
 quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit poten-
 tia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita
 latus ad latus) habeat autem BC , diameter basis cubi cir-
 cumscripti ad GH , diametrum basis cubi inscripti proportio-
 nem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi cir-
 cumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At
 uero cubi, cum sint parallelepipeda similia, proportionem
 habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur
 circumscriptus ad eubum inscriptum pyramidi $ABDC$,
 proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim propor-
 tio triplicata est triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uide-
 re licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inscri-
 ptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet tri-
 plam; Habebit pyramis $ABDC$, ad eubum sibi inscri-
 ptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam;
 Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod
 erat demonstrandum.

33. undec.

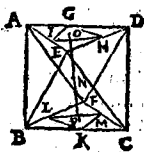
20. sextide.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum
 Icosaedrum proportionem habet, quā duæ
 bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

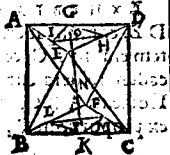
IN octaedro $ABCDEFGF$, concipiatur descriptum Icosae-
 drum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duæ
 bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim ut ex
 demonstratis in propof. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosae-
 dri in octo basibus octaedri reponantur; Sint duæ bases Icosae-
 dri GHI, KLM , in duabus basibus oppositis octaedri ADE ,
 BCF

B C F; Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icofaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. i. propof. 6. lib. 15.) ad basim A D E, perpendicularis ducatur. N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, seu circuli ipsi in ambientis,



ex coroll. lemm. 1. propof. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli G H I, per coroll. 2. propof. 16. lib. 15. Cū ergo plana oppofita A D E, B C F, parallela fint, ex coroll. 4. propof. 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per scholion propof. 14. lib. 11. ad planum B C F, in cuiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta altitudo est & octaedri, & Icofaedri sibi infcripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icofaedrū in 20. pyramides æquales eundem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propof. 7. lib. 12. Erat prisma, cuius basis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri. At uero prisma, cuius eadem basis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis, cuius basis eadem A D E, altitudo uero O N, per ea, quæ in scholio propof. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis A D E, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus; quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim A D E, & sub altitudine O P, constitutum; prisma uidelicet, cuius basis tertia pars est trianguli A D E, altitudo uero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basim A D E, & sub altitudine O P; cum per ea, quæ docuimus ad propof. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quorum unus basis A D E, & altitudo O P, alterius autem basis tertia pars basis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non secus demonstrabimus prisma, cuius basis G H I, altitudo uero O P, æquale esse

esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea quæ triplum huius
 ius prismatis, nempe prismæ, cuius basis tripla sit basis GHI ,
 altitudo autem eadem OP , æquale esse 18. pyramidibus Ico-
 saedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ
 tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri consti-
 tuunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem GHI ,
 & sub altitudine OP , constituti; prismæ scilicet, cuius ba-
 sis tertia pars est trianguli GHI , altitudo uero eadem OP .
 Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit
 trianguli GHI , altitudo autem OP , alterius uero basis ter-
 tia pars basis GHI , & altitudo eadem OP , æqualia erunt
 Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam uero, cum duo
 illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Ico-
 saedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propoſ. 7.
 lib. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium, quatuor
 tertias partes trianguli ADE , continentes, (cum unius ba-
 sis sit ADE , nempe tres tertie partes ipsius ADE , comple-
 ctens, alterius uero basis tertia pars ipsius ADE , ad bases
 prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trian-
 guli GHI , comprehendentes; (cum
 unius basis tripla sit trianguli GHI , ni-
 mirum nouem tertias partes ipsius GHI ,
 continens, alterius uero basis tertia pars
 ipsius GHI ,) Sint autem, ut quatuor
 tertias partes trianguli ADE , ad decem
 partes tertias trianguli GHI , ita duæ ter-
 tie partes ipsius ADE , nempe dimidium quatuor tertiarum,
 ad quinque tertias partes ipsius GHI , hoc est, ad dimidium
 decem tertiarum: Et ut duæ tertie partes ipsius ADE , ad
 quinque tertias partes ipsius GHI , ita quoque sint, per ea,
 quæ demonstraui in scholio propoſ. 4. lib. 5. sex tertie
 partes ipsius ADE , (hoc est, duæ bases octaedri triplum
 duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex ter-
 tias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius GHI ,
 (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertia-
 rum unius basis complectentes, cum quindecim tertias co-
 plectantur; Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æ-
 qualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prisma-
 ta Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, ut



15. quinti.

duz bases octaedri ad quinque bases Icofaedri . Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icofaedrum , &c. Quod erat demonstrandum .

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptū Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportionem lateris Icofaedri ad latus cubi in eadem cum Icofaedro sphæra descripti, & ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Icofaedri ad rectam centra basium Icofaedri oppositarum coniungentem .

EXHIBEATUR Icofaedrum ABC , in quo recta DE , coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC , & F , sit latus Icofaedri, & G , latus cubi in eadem sphæra cum Icofaedro descripti. Dico proportionem Icofaedri ABC , ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportionem F , lateris Icofaedri ad G , latus cubi, & ex



proportionem triplicata diametri AC , ad rectam DE . Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icofaedro descriptum statuat angulos sitos in centris basium Icofaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppo-

sitarum; Erit DE , diameter dodecaedri in Icofaedro ABC , descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D , & E , centris basium Icofaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icofaedro scilicet ABC ; Dodecaedro diametri AC , hoc est, in eadem sphæra, in qua Icofaedrum ABC , descripto, cum utriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE , intra Icofaedrum uide-

licet,

habet ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosædri ABC ad tertiam, uidelicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defn. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosædri ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadem sphaera cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosædro ABC, descriptum. Cum ergo Icosædru ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphaera comprehensum sit ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosædru ABC, eiusdem diametri est, ut G, latus cubi ad F, latus Icosædri. Conuertendo igitur erit Icosædru ABC, ad Dodecaedru diametri AC, ut F, latus Icosædri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedru diametri DE, in Icosædro uidelicet ABC, descriptum proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id est, ad rectam centra basium Icosædri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosædri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedru diametri DE, componi quoque ex proportionibus lateris Icosædri, ad G, latus cubi, & ex proportionibus triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosædru ad sibi inscriptum Dodecaedru proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

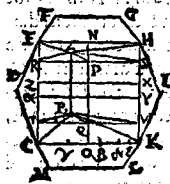
11. quarti
decimi.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ,

quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

Q U O N I A M ex demonstratis propof. 8. lib. 1. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro. defcripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus convenientium; sint huiusmodi pentagona $ABCDE$, $EFGHA$, $AHIKB$, $BKLMC$, convenientia ad latus AB ; duo quidem $ABCDE$, $AHIKB$, secundum latus



idem commune A, B , alia autem duo $A E F G H$, $B C M L K$, secundum angulos $E A H$, $C B K$. His uero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi $E C K H$, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet $C B K H A E$, constans quinque planis $C B K$, $E A H$, $A B C E$, $A B K H$, $E C K H$; quorum duo $C B K$,

4. primi.

$E A H$, triacula sunt æqualia, cum latera pentagoni B, C , $B K$, æqualia sint lateribus pentagoni $A E$, $A H$, angulosque comprehendant æquales pentagonorum $E A H$, $C B K$. Duo uero $A B C E$, $A B K H$, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona $A B C D E$, $A B K I H$, per hypotesin, & triacula ex ipsis ablata $C D E$, $H I K$, æqualia existant; & triacula erunt & reliqua trapezia $A B C E$, $A B K H$.) Quantum denique est basis cubi inscripti $E C K H$. Simili modo reperientur alia quinque solida huius similia & æqualia, per 10. defin. lib. 1. super reliquas quinque cubi bases; ita ut Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus constatum, æquale esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit a $C E H K$, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi $C K$, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at uero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus $B H$, $C K$, bifariam in N , O , iunctaque recta $N O$, quæ parallela est lateri pentagoni $A B$, & in quâ cadunt

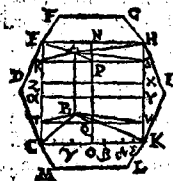
4. primi.

cadunt perpendiculares AP , BQ , demissæ in planum EK , ut constât ex demonstratis propof. 17. lib. 13. (Exprimunt etiam lineæ NO , AB , AP , BQ , huius figure lineas LN , VX , VR , XS , figure propof. 17. lib. 13.) Erunt utraque rectæ AB , PQ , maius segmentum lateris cubi NO , uel HQ , & utraque AP , BQ , equalis dimidio lateris pentagoni AB , seu maioris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propof. 17. lib. 13. Ac propterea si per P , Q , ducantur rectæ RS , TV , rectis EH , CK , parallelæ; erunt quoque RT , SV , maiora segmenta laterum EC , HK , atque adeo ER , CT , simul, & HS , KV , simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR , AS , BT , BV , constituentur duæ pyramides $ERSHA$, $CTVKB$, quæ per coroll. propof. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases $ERSH$, $TCKV$, & altitudines PA , QB , æquales sint; consistentque extra solidum $ABTVSR$. Quoniam autem AS , ipsi BV , & AR , ipsi BT , equalis est, & parallelæ, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB , SV , RT ; parallelæ erunt plana triangulorum ARS , BTV , atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propof. 8. lib. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum $ABTVSR$, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS , BTV , & tribus parallelogrammis RV , AT , AV , prisma est, ex definitione.

Iam uero, cum ostensum sit, rectas HS , KV , minus segmentum efficere lateris HK , fiat illis equalis VX , dupla nimirum utriusque HS , & KV , & ipsius VX , minoris segmenti lateris HK , duas tertias partes contineat VY , tertia uero pars sit XY , ducanturque XZ , YZ , rectæ TV , parallelæ. Quoniam igitur pyramides $ERSHA$, $CTVKB$, equalis sunt ostensa; utriusque uero earum dupla est pyramis super basem TX , & sub eadem altitudine PA , uel QB , constituta, quod & basis TX , dupla sit basis CV , uel RH ; æqualis erit pyramis $TVXZB$, utrique pyramidi $ERSHA$, $CTVKB$, simul: At pyramis $TVXZB$, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX , & altitudo eadem QB , uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ AB , quæ equalis sit ipsi VX , ut demonstrauimus in scholio.

1. *sexii.*

propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, uertex uero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, uertex uero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. quod & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, uertex uero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERS HA, CTV KB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTV. S. R, efficiet prisma æquale solido CBK HAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta cōposita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, cōprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoque a base cubi deficientem rectangulo α X, contento sub latere cubi α Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Nō dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata equalia & proxime dicto prismati. & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia



erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construuntur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excelsum eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo uero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudinij QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi per sumptæ. Hanc igitur altitudinē dico ab altitudine, seu latere cubi deficere

ficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiari lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β : Itemq; C β , maius segmentum, & β K, minus bifariam in γ , δ ; atq; ex β K, abscindatur β ϵ , æqualis ipsi β γ , seu C γ , ita ut C γ , uel γ β , uel β ϵ , dimidia pars maioris segmenti C β , æqualis sit ipsi Q B, & C ϵ , toti altitudini præfati parallelepipedo. Quoniam igitur est, ut tota CK, ad maius segmentum C β , ita maius segmentum C β , ad minus β K; erit quoque ut CO, dimidia ipsius CK, ad C γ , uel β ϵ , dimidiam ipsius C β , ita C γ , uel β ϵ , ad β δ , dimidiam ipsius β K; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ , uel β ϵ , & minus β δ . Quare & β δ , minus segmentum secabit β ϵ , maius segmentum extrema ac media ratione, ut demonstrauimus ad propof. 5. lib. 3. eritq; maius segmentum β δ , minus autem δ ϵ ; Ac propterea rursus δ ϵ , minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ , æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ϵ K. Deficit igitur C ϵ , altitudo præfati parallelepipedo ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento ϵ K, rectæ δ K, uel sibi æqualis rectæ β δ , quæ dimidiari lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedo, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficiente rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiari lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

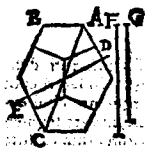
VND ϵ elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unus longitudo lateri cubi est æqualis, laticudo autem tertiam partem minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiari lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo, & laticudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiari lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum, a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basis nim. cum eandem habens, quæ cubus, altitudo uero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiat latens cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confectum iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedri descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, defunct prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituitur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti.

In Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportionem triplicatam proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportionem F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum, erit recta DE,



centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphaera cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum uidelicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primae magnitudinis, ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quae ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primae magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundae magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundae magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportionem F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphaera cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

11. quarti
decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRUM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ parti minoris segmēti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

25. *sexide.*

Q V O N I A M si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius, non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

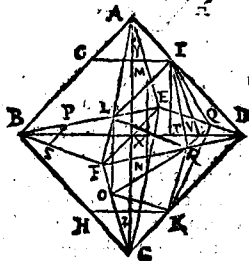
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri & altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectae.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. lib. 13. ubi demonstratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQ-

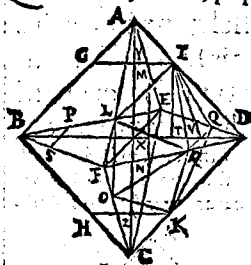
R, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR,

ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia uidelicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT,



perpendicularem ad BD, æquale esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus octaedri DBA, DEA, DEB, DFC, angulum solidum octaedri D, constituentibus posite sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR, remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duae pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, K DQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius uidelicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam quæma-

4. primi.



quemadmodum $A X$, secta est a recta $G I$, in Y , extrema ac media ratione, ita quoque secta est $C X$, a recta $H K$, in Z . Quare si ex K , ad $B D$, perpendicularis ducatur, altitudo

nimirum pyramidis $K D Q R$; erit ea æqualis rectæ $Z X$; maiori segmento semidiametri $C X$, hoc est ipsi $I T$. Quæ quidem pyramides extra Icosædrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octædri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus

æquales, extra Icosædrum prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosædrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia uero triangulum $D Q R$, dimidium est quadrati lateris $D Q$; (cum $D Q$, $D R$, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octædri, angulumque contineant rectum.) erit recta $Q R$, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius $Q R$, duplum erit quadrati lateris $D Q$, ideoque quadruplum trianguli $D Q R$. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum $D Q R$; & altitudo eadem $I T$, per ea; quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis $D Q R$, & altitudo $I T$, tripulum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis $I D Q R$, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosædrum consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, & altitudo $I T$, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosædrum ambiens; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ $Q R$, lateris nimirum Icosædri, & altitudo $I T$, maius segmentum semidiametri $A X$, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessus octædri supra

pra

pra Icofaedrum sibi inſcriptum; Ac proinde octaedrum ſu-
perabit Icofaedrum dicto priſmate, uel parallelepipedo.
Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icofaedrum paral-
lelepipedo; cuius baſis eſt quadratum lateris Icofaedri, &c.
Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Hinc inferitur, Pyramidem excedere duplum Icofaedri ſibi
inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icofae-
dri, altitudo uero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum late-
rum Icofaedri coniungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ. 19.
lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi octaedrum, & hunc octaedro Icofae-
dram imponatur, Icofaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum;
octaedrum autem ſuperet Icofaedrum ſibi inſcriptum parallelepi-
pedo, cuius baſis quadratum lateris Icofaedri, nempe recta Q R,
altitudo uero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta uide-
licet I T, ſeu Y X: Fit, ut octaedrum diſ-ſumptum, nempe py-
ramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti
octaedri) ſuperet idem Icofaedrum in octaedro, ideoque & in Py-
ramide deſcriptam, duplo illius parallelepipedo, nimirum paral-
lelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icofaedri, altitu-
do uero recta Y Z, coniungens biſarias ſectiones laterum Icofae-
dri oppoſitorum G F, H K. Hoc enim parallelepipedum illius du-
plum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12.
cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eo-
dem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icofaedri, al-
titudo uero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum
Icofaedri copulans, Pyramis duplum Icofaedri ſibi inſcripti ex-
cedit.

31. ſextide.

21. ſextide.

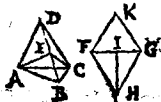
INVENTIO ANGVLI INCLINA-

tionis duarum baſium cuiuſcunq; ſolidi regularis,
unius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis
præceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum
Pyramidis baſium, unius ad alteram, in-
uenire.

I.

SIT Pyramis $ABCD$, cuius latere BD , bisariam
secto in E , ex angulis A , & C , lateri BD , oppositis re-
ctæ ducantur AE , CE quæ cum perpendicularares sint



ad BD , communem sectionem pla-
norum ABD , CBD , in quibus ex-
sunt, ut ostensum est in scholio pro-
pos. 12. huius lib. angulum incli-
nationis AEC , basium ABD , CBD ,

continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem
exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assuma-
tur FGH , triangulum æquilaterum super rectam FG ,
lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco
triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimi-
rum ABD , æquale, in quo ducta HI , perpendicu-
lari ad FG , constitutur super FG , triangulum FGK , habes
utrumq; latus FK , GK , æquale perpendiculari HI , hoc est,
utriq; perpendiculari AE , CE , cū perpendicularares HI ,
 AE , CE , sint æquales in triangulis æqualibus. Dico an-
gulum FKG , æqualem esse angulo inclinationis AEC , ba-
sium ABD , CBD . Cū n. latera KF , KG , æqualia sint la-
teribus EA , EC ; & basis FG , basi AC : Æquales erunt
anguli FKG , AEC . Dico insuper angulum inclinatio-
nis AEC , acutus esse. Eū n. latus AD , uel illi aqua-
le AC , sesquitergium sit potentia utriusq; perpendicu-
laris AE , CE ; qualium partium 4. ponetur quadratum
rectæ AC , talium 3. erit quadratum utriusq; rectæ AE ,
 CE ; ideoq; earundem partium 6. erunt ambo simul qua-
drata rectarum AE , CE . Quare cū in triangulo ABC ,
quadratum lateris AC , minus sit quadratis simul la-
terum AE , CE , acutus erit angulus AEC , ut in
scholio propos. 13. lib. 2. demonstraui.

COROL

8. primi.

12. quarti
decimi;

1

COROLLARIUM.

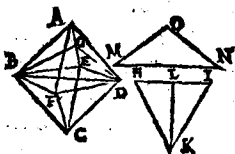
FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis *equales* esse. Cum enim singuli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt *A E, C E*, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit *A C*; omnes erunt inter se *æquales*, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, *æquales* sint, nec non & latera pyramidis eisdem subtendentia.

8. primi

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

II.

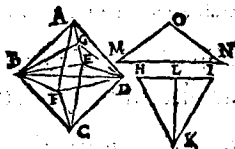
EXHIBEATUR Octaedrum *ABCDEF*, cuius diameter *BD*. Ex angulis *B, D*, ad latus *A E*, triangulis *ABE, ADE*, commune, bisariamque sectionem in *G*, rectæ ducantur *BG, DG*; quæ cū perpendiculares sint ad *A E*, communem sectionem planorum *ABE, ADE*, in quibus existunt (quod in triangulis *BGA, BGE*, anguli ad *G*, *æquales* sint, &c.)



8. primi

continebunt angulum *BGD*, inclinationis basium *ABE, ADE*, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur *æqualem* exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur *HIK*, triangulum *æquilaterum* super rectam *HI*, lateri octaedri *æqualem* fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet *ABE*, *æquale*, in quo ducta *KL*, perpendiculari ad *HI*, constituatur super recta *MN*, quæ *æqualis* sit diametro octaedri *BD*, hoc est, diametro quadrati *ABCD*, ex *AB*, latere octaedri descripti trianguli *OMN*, habes utrunq; latus *MO, NO*, perpendiculari *KL*, *æquale*,

æquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cum perpendicularibus KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia sunt lateribus GB, GD; & basis MN, basi BD; Æquales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cum enim diameter



8. primi.

14. tertijde.

12. quarti
decimi.

octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB; latus uero AB, potentia sesquitercium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD; talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac. propterea angulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

COROLLARIUM.

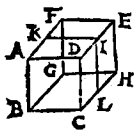
Hinc fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtrahanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eisdem subtrahentes.

8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

SIT cubus $ABCDEFGH$, in quo secetur latus DE , bifariam in I , nec non & latera illi opposita in quadratis AE, EC , commune latus illud DE , habentibus, in punctis K, L . Deinde rectæ ducantur IK, IL ; quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH , (quod & KF, IE , inter se, nec non & IE, LH , inter se æquales existant, et parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE , efficiant, continebunt KIL , angulum inclinationis basium AE, EC , ex defm. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK, IL , parallelæ existentes rectis EF, EH , & non in eodem cum illis plano, angulum KIL , æqualem continent angulo recto FEH ; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. undec.

COROLLARIUM.

Quocirca, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

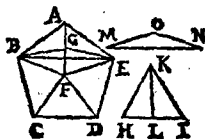
ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis $ABCDEF$, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum $ABCDE$, ex quinque Icosaedri lateribus compositum, uertex autem F . Diuiso itaque latere AF , bifariam in G , ducantur ex triangulorum ABF, AEF , latus AF , commune habentium

Tp bntium

IIII.

bentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in problemate 2. huius scholii perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium



ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quovis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, super re-

ctam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ recta BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens utrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare recta AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, posite sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON,

2. primi.

19. primi.

ita ut rectæ AB, AE , rectas OM, ON , prorsus includant. Angulus ergo O , maior erit angulo BAE : At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propof. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus MON , hoc est, sibi æqualis BGE .

21. primi.

COROLLARIUM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosædri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositis ductis, quales sunt BC, EG , subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BB ; omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales existant.

8. primi.

4. primi

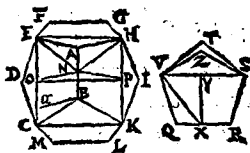
ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

V.

CUM per ea, quæ ostendimus in propof. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus cœmentium; sint huiusmodi pentagona $ABCDE, EFGH, AHIKB, BKL MC$, ad latus AB , convenientia; duo quidem $ABCDE, AHIKB$, secundum idem latus commune AB ; alia autem duo $A EFGH, BCMLK$, secundum angulos EAH, CBK . His porro pentagonis inscriptum sit

Pp 2 qua-

quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera sub-
tendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A.



Diviso autem latere AB,
bisariam in N, ducantur
ex N, in planis pentago-
norum ABCDE, AB-
CKIH, ad AB, perpen-
diculares NO, NP, se-

cantes latera EC, HK, in O, & P. ad angulos quoque
rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelae,
per coroll. propos. 8. lib. 15. Comprehendunt igitur
NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium
ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quovis pla-
no hac arte construemus. Super rectam QR, late-
ri Dodecaedri AB, æqualem constituitur pentagonum
equilaterum & equiangulum QRSTV, hoc est,
cuius pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE,
æquale, cuius angulo T, recta subtendatur VS, æqua-
lis existens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateri-
bus DC, DE, æqualia sint, angulosque contineant
æquales. Divisa deinde recta QR, bisariam in X,
ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XT:
proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, sit pa-
rallela ipsi QR, per coroll. propos. 8. lib. 15. Ac po-
stremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS,
habens utrunque latus ZV, ZS, perpendiculari XT,
æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo in-
clinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH,
VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus
HA, AN; Item lateribus VQ, QX, angulosque com-
prehendant æquales; Æquales erunt & bases NE,
NH,

4. primi.

NH, VX , & anguli ANE, ANH, QXV ; 4. primi
 ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet ENO, HNP, VXY , aequales erunt. Quoniam igitur an-
 guli ENO, EON , trianguli ENO , aequales sunt
 angulis $HN P, HP N$, trianguli $HN P$; nec non
 & angulis VXT, VTX , trianguli VXY ; (sunt
 enim $EON, HP N, VTX$, ostensi recti.) Et la-
 tus NE , lateribus NH, VX , aequale demonstratum;
 Aequalia erunt reliqua latera NO, OE , reliquis la- 26. primi.
 teribus NP, PH ; Item lateribus XY, YV . Quare
 rectae ZV, ZS , aequales existentes ipsi XT , rectis
 NO, NP , aequales erunt. Iam uero, quia OE, PH ,
 aequales sunt, ac parallelae; erit quoque recta coniu- 33. primi.
 ncta OP , aequalis & parallela ipsi EH , ideoque aequa-
 lis ipsi EC , hoc est, rectae VS . Quam ob rem, cum
 latera ZV, ZS , lateribus NO, NP , aequalia sint; ba- 8. primi.
 sis item VS , basi OP ; Aequalis erit angulus EZS , an-
 gulo inclinationis ONP . Dico etiam, angulum hunc
 ONP , inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta
 $B\alpha$, ipsi NO , parallela; cum sit quoque NB , ipsi
 $O\alpha$, parallela, per coroll. propof. 8. lib. 15. Paralle- 34. primi.
 logrammum erit $NO\alpha B$, ideoque recta $B\alpha$, ipsi NO ,
 aequalis. Quia uero BC , latus pentagoni oppositum 29. primi
 angulo $C\alpha B$, qui rectus est, (aequalis nimirum interno 19. primi
 CON ,) maius est latere $B\alpha$, hoc est, recta NO ,
 uel utraque ZV, ZS , quae ipsi NO , ostensae sunt
 aequales; Erunt duae rectae TV, TS , maiores duabus
 rectis ZV, ZS . Cadit igitur punctum Z , intra trian-
 gulum TVS , ita ut rectae TV, TS , rectas ZV, ZS ,
 includant omnino; Atque proinde angulus VZS ,
 ideoque illi aequalis ONP , maior est angulo pentago- 22. primi.

ni T : Hic uero , cum sit pentagoni angulus , paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto . Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIUM.

PATET igitur ex his , omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis, quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, uel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis; Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiã sint æquales.

8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.





R O M A E,

Apud Vincentium Accoltum.

M. D. LXXIIII.

Cum licentia Superiorum.