EVCLIDIS
ELEMENTA
GEOMETRICA.

EVCLIDIS
SEX PRIMI
ELEMENTORVM
GEOMETRICORVM

Libri cum parte Vndecimi

Ex maioribus CLAVII Commentarijs in commodiorem formam contracti.

RERVMQVE MATHEMATICARVM

CHRISTOPHORI

Grienbergeri Oenohallensis

è Societate IESV

OPVSCVLVM PRIMVM.

Acceßere

ISAACI MONACHI

In sex eosdem Libros Scholia.

ROMAE,

Typis Nicolai Angeli Tinaßij. 1655.

Superiorum permißu.

Sumptibus Dominici Grialdi.

Imprimatur

Si videbitur Reuerendiss. Sac. Palatij Apostol. Magistro.

M. A. Od. Vicesg.

Reimprimatur,

Fr. Saluator Pagliari Reuerendissimi Sacri Apostolici Palatij Magistri Socius.

AD

AD LECTOREM.

BENE & abundè satisfecit Clauius studio mathematicæ ætatis suæ; quando scientiæ omnium candidissimæ adeo iacebant incultæ, atque neglectæ, vix vt nomen Geometriæ purioris extaret. Audiebatur quidem in Scholis, & in Posterioribus ab Aristotele sæpius repetebatur geometricum illud, quo asseritur; Tres angulos cuiuscunque Trianguli æquales esse duobus rectis: *& fortassis nomen trianguli adhuc agnoscebatur; sed quid esset, tres angulos esse æquales duobus rectis, vix erat qui explicaret, & fortassis nemo qui demonstraret. Eadem voces feriere quoque non semel aures Clauij atque ad Geometriam iam olim* *à Natura factas etiam vulnerauere: non enim sonos, sed verborum sensum, atque sententiam percipere cupiebant. Quare iam diu multumque solicitum tandem P. Petrus Fonseca, quo tunc Conimbricæ vtebatur Magistro in Philosophia (& cuius mihi postea ad initium huius sæculi contigit interesse exequijs Olyssiponæ) eum in communem Collegij bibliothecam ad Euclidem illic iam diu latitantem, talemque hospitem auidè expectantem amandat. Neque opus fuit longo circuitu: vltro statim seipsum suaque ei obtulit obsequia Euclides; tredecim Elemennorum libros coram expandit, Propositionem Aristoteli ita, vt diximus, familiarem, ad trigesimam secundam primi libri legendam præbuit, lectam explicauit, eamque rationibus adeo euidentibus confirmauit, nihil vt amplius dubij superesse videretur. Obstupuit primum Clauius tantam agnoscens, in re tam difficili, facilitatem, & claritatem tantam in tanta oscuritate;*

eoque ſtatim amoris affectu Euclidem complexus eſt, vt eius amicitiam nunquam amplius depoſuerit, immo id omni conatu procurarit, eum vt locum obtineret apud omnes, quem apud ſe amplissimum inuenerat.

Nihil igitur cunctatus, illicò ad inſtaurationem Geometriæ iacentis ſeſe accinxit; prima eius fundamenta accuratiſſimè recognouit; infirmiora nouis ſubſtructionibus corroborauit; collapſa reſtituit; & quicquid ferè Elemẽtorum reperit ab alijs additum, id omne quamdiligentiſsimè duos in tomos diſtribuit: vtque Geometriæ quamprimum ſuccurreret, dedit in lucem vtrũq. deditque iterum iterumq. copioſiores. Quo autem bono, quoue Lectorum emolumento, non dico. illud certum eſt, ſtatim venuſtiorem ſolidioremq. comparuiſſe in publico Geometriam. De me fatebor libenter, eius me lectitatione acquiſiuiſſe, ſi quid hiſce in Diſciplinis aſſequutus ſum, & puto, niſi mea me fallat conſcientia, aliquid etiam animi

ſui

sui in me transfudisse; vt ipse quoque in hæc studia aliquid operis conferrem, rerumq. mathematicarum studiosis, si quo modo possem, prodessem.

Sed ante omnia visum est subuenire, non tam alienæ quam domesticæ necessitati, quam nemo est qui non agnoscat. Nam sine fundamẽtis, sublimiora præsertim ædificia quis diu stare posse credat? Commentarios Clauij omnes commendant: sed quotus quisque est, qui eo fruatur, quem commendat? Non quidem deerant viuente adhuc Clauio, Clauij: sed eo iam ante annum septimum supra decimum sublato è viuis, librorum etiam cœpit sentiri penuria; estque spes perexigua editionum posthumarum.

Recte igitur Germania Euclidem denuo Latinum fecit ex Græco. Duacum omissis ijs, quæ rarius attinguntur in Scholis, ea saltem alimenta quibus Geometria iunior nutriri solet, prouidit sibi. Idem fecit Ferraria. Quin & Neapolis, & cum Neapoli vniuer-

sa-

sa Schola mathematica similibus subsidijs suam vellent leuare egestatem. Ego Romam & Romanum Gymnasium appello; quod licet præter Clauium in his disciplinis Doctorem alium neque debeat admittere, neque admittat, Clauiolum tamen aliquem tractabiliorem optimo iure exoptat.

Quare vt desiderijs, ne dicam querelis tam iustis, tandem finis imponatur; en ipse quoq; vobis profero in lucem Elementorum Euclidis, & Commentariorum Clauij Compendiolum: nimirum sex libros priores, cum aliqua parte undecimi: hoc est, ea quæ quotannis audire consueuistis. Atque ita non erit quod è Germania, Belgio alijsq; partibus etiam Italiæ huiusmodi auxilia euocetis. Domi habebitis Clauiolum, quem desideraſtis; habebitis etiam foris, qui vos vbiq; comitetur; quiue audita in publico, repetat in priuato, & paucioribus referat, quæ pluribus verbis ingesserat Clauius maior.

Neque videri debet alicui factum

male,

male; quod hic propositiones demonstrationesq; recitentur stylo non prorsus Clauiano. Nam hæc sunt propria Compendiorum priuilegia. Certe breuior est, & multo clarior Propositio, quæ simul proponitur & simul per figuram explicatur. Ita Pappius Alexandrinus in suis Collectionibus, ita alii complures magni Geometræ. Immo Clauius ipse hoc ipsum facit immediatè post Propositiones absolutè positas, antequam demonstrationes aggrediatur.

Numerus vero Problematum atque Theorematum omnino fuit retinĕdus, ne citata à citatis discreparent: non tamen opus fuit obseruare ordinem in omnibus eundem. Saltem in quarto libro, vbi agitur de Inscriptione, & Circumscriptione figurarum, melius fuit aliquas coniungere, quam separare, vt praxes, demonstrationesque omnibus essent communes.

Denique boni, vt spero, consulet Clauius maior, & veniam dabunt studiosi

diosi Lectores, si vno alterove in loco Clauius minor demonstratiunculam aliquam suam substituit non sua; vt factum est ad primam, & secundam vndecimi: quæ quia alioquin videbantur vrgeri variis instantiis, indigebãt aliquo succursu; & quia per se sunt notissimæ, & in præcedentibus libris supposita, poterãt etiam penitus omitti. Sed de huiusmodi iudicent Doctiores. Ego id præstare Deo adiuuante conatus sum, quod Studiosis vtile, gratumque fore, & sinceritati Geometriæ consonum existimaui.

De Problematibus id solum postremo loco aduerto; non esse quidem hic tractata pro dignitate, sufficienter tamen quo ad vsum quem habent in Elementis, qui in eo potissimum cõsistit, vt omnia illa quæ ad domonstrationem Theorematum assumuntur, certa sint, & explorata. hoc est, vel ex Principiis, vel ex aliis propositionibus præmonstratis deducta.

Cum vero eadem Problemata tractan-

ctantur per se, & gratia sui, longe aliter se habet eorum tractatio. Tunc enim Geometra non debet esse contentus mõstrasse vnam viam, eamq; qualemcunque; sed debet circumspicere, & tentare plures aditus, & ex omnibus semitis illam seligere, quæ planius, & compendiosius, ad solutionem Problematis intellectum practicum deducat. Iure igitur suo videntur Problemata postulare Opusculum suum. Et sane per me obtineat licet, dumodo per gratiam eius liceat, sine quo nihil licet. qui si, vt cœpit fauere inchoatis, sic bene faueat progressibus, fieri poterit ut hoc Opusculum, quod iam solitarium est, & non tam primum quam vnicum primum esse possit proprio ex Titulo, & ex enumeratione sequentium, principium fiat aliorum.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

Quibus vocabula Artis, & Termini in Elementis vsurpati explicantur.

DEfinitio 1. Punctum, est cuius pars nulla est.

2 Linea, vnius tantum dimensionis secundum longitudinem capax.

3 Lineæ termini sunt puncta.

4 Linea recta est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

Secundū Archimedem est minima earū quæ terminos habent eosdem, hoc est, breuissima extensio inter duo puncta.

5 Superficies est duarum dimensionum secundum longitudinem & latitudinem capax.

6 Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7 Plana superficies est, quæ ex æquo

 suas

suas interiacet lineas.

Secundum Heronem, cui omni ex parte congruit linea recta.

8 Planus angulus est duarum linearum in plano concurrentium, & non in directum iacentium) ita vt vna versus concursum & secundum naturam suam protracta non continuetur cum altera) alterius ad alteram inclinatio.

9 Rectilineus angulus est, quem constituunt lineæ rectæ.

10 Angulus recticlineus rectus est quem facit linea alteri lineæ insistens, & ad vtramque partem æque inclinata. & tales lineæ dicuntur sibi mutuo perpendiculares.

11 Obtusus angulus est qui recto maior est.

12 Acutus qui minor recto.

13 Terminus est, id quod alicuius extremum est.

14 Figura est, quæ sub vno vel pluribus terminis continetur.

15 Circulus est figura plana, vnica linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam omnes rectæ ex quodam puncto eductæ sunt æquales.

16 Hoc punctum centrum circuli vocatur.

17 Diameter est, quæ producta per centrum diuidit circulum bifariam.

18 vn-

18 Vnde semicirculus, est figura contenta diametro, & semiphæria.

19 Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis lineis continentur.

20 Trilateræ, quæ sub tribus.

21 Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22 Reliquæ vocantur multilateræ.

23 Æquilaterum triangulum est, quod tria habet latera ęqualia.

24 Isosceles quod duo.

25 Scalenum quod omnia tria habet inæqualia.

26 Rectangulum triangulum est, quod habet angulum rectum.

27 Amblygonium quod habet obtusum.

28 Oxygonium quod omnes acutos.

29 Quadratum est quod æquilaterum, & rectangulum est.

30 Altera parte longior figura est rectangula non æquilatera.

Potest vno nomine vocari Oblonga, vel Oblongum.

31 Rhombus æquilatera est, non rectangula.

32 Rhomboides habet latera, & angulos oppositos æquales, & neque æquilatera est, neque rectangula.

33 Reliquæ figuræ quadrilateræ vocantur Trapezia.

34 Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sunt plano, quantumcunque

protractæ, non possunt concurrere.

35 Parallelogrammum est figura quadrilatera habens latera opposita parallela.

36 In parallelogrammo propositionis 43. duo parallelogramma AHGE, GFDI, dicuntur circa diametrum AD existere, & reliqua duo HCFG, GBEI, vocantur complementa.

PETITIONES seu POSTVLATA.

Sunt propositiones practicæ, & supponuntur vt per se notæ.

1 A Puncto ad punctum liceat lineam rectam ducere. id quod fit per cóceptionem breuissimæ extensionis.

2 Et lineam rectam, quantumlibet producere.

3 Item quouis centro, & interuallo eidem centro applicato, circulum describere.

AXIOMATA seu PRONVNCIATA.

Sunt Propositiones speculatiuæ, quæ non indigent demonstratione.

1 QVæ eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

2 Si

2 Si æqualibus adijciantur æqualia, fiunt æqualia.

2 Si ab æqualibus abijciantur æqualia, remanent ęqualia.

4 Inæqualia cum æqualibus, faciunt inæqualia.

5 Aequalia ablata ex inæqualibus, relinquunt inæqualia.

6. 7. Dupla vel dimidia eiusdem, sunt æqualia.

8 Quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia. debet autem alis congruentia constare intellectui.

9 Totum sua parte maius est.

10. 11. Duæ rectæ concurrentes, & se mutuo secantes, non habent aliquam partem communem.

12 Omnes recti anguli sunt æquales.

13 Et Elucidis 11. ponitur ad propositionem 28. sine qua non potest sufficienter concipi.

14 Duæ lineæ rectæ possunt quidem constituere angulum, sed non claudere spatium, aut constituere figuram.

15. 16. 17. 18. Non sunt vsui in Elementis.

19 Omne totum est æquale suis partibus simul sumptis.

20 Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, etiam reliquum est duplum reliqui. Sed hoc axioma non est necessa-

ſarium, poteſt enim eius loco citari 19. quinti, cuius demonſtrationes non dependent ab alijs libris præcedentibus.

DE PROPOSITIONIBVS in genere.

PRopoſitiones, vel ſunt Theoremata, vel Problemata. illa verſantur circa quantitatem abſtractam ſpeculatiue: iſta practicè, quia habent pro fine aliquod opus intellectualé, circa eandem quantitatem abſtractam. Et ita ſumptæ propoſitiones ſunt propriè *Mathematicæ*, & purè Geometricæ. Ad Theoremata reuocantur Pronunciata; ad Problemata Poſtulata. de quibus ſuperius.

Problemata quæ fiunt per inſtrumenta non ſunt pure Geometrica; poſſunt tamen aliquo modo dici Mathematica ſaltem, illa, quæ vtuntur ſola Regula & Circino. Hæc enim duo inſtrumenta fundantur immediatè in poſtulatis, hoc eſt in linea recta, & circulari.

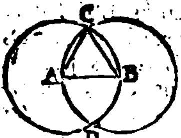
Eodem poſſunt reduci etiam illa inſtrumenta quæ fiunt per Regulam & Circinum. Reliqua vero referantur ad Mechanicā. ex quibus aliqua ſunt quidē vera, ſed nondum Geometricè demōſtrata; alia falſa, vel ſaltem dubia, quæ tamen ſubinde admittūtur, quia vidētur ſatisfacere ſenſui.

Deni-

Denique tam problemata, quàm theoremata proponuntur aliquando nomine Lemmatum, quæ præmittuntur vel subijciuntur propositionibus principalibus, quando sunt necessaria, neq; possunt commode citari.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

Super data linea A B, triangulum æquilaterum describere.



CEntro A, intervallo A B, describatur per 3. postul. circulus C B D; & centro B eodem intervallo B A. alter C A D, secans priorem v. g. in C; & ex C, ad A, B ducantur C A, C B, per postul. 1. Dico triangulum A B C esse æquilaterũ. Est enim A C, æqualis A B, & B C, æqualis eidem per definitioné circuli; ergo æquales inter se, per 1. pron. atque adeo triangulum A B C, est æquilaterum per def. 23.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

Ad datum punctum A datæ B C ponere lineam æqualem.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

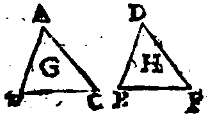
Ex maiori A H. minori B C æqualem abſcindere.

PEr præcedentem deſcribatur ſupra A C, triangulum æquilaterum ACD, & centro C, interuallo C B, per poſtul. 3. circulus B E ſecans protractam DC, in E. & rurſus centro D, interuallo D E alius E G ſecans protractam D A in G. & tertius G I, deſcriptus ex A, interuallo A G, abſçindat ex A H, rectam A I. Dico A I, æqualem eſſe datæ B C. Rectæ enim A I, eſt æqualis A G per definitionem circuli, A G æqualis C E quia D E, D G ſunt ęquales per eandem definitionem circuli; & ablatæ D A, D C ſunt ęqoales per def. trianguli æquilateri: ergo per 3. pron. A G, & 4. eſt æqualis C E. Eſt autem eidem C E, per def. 15. æqualis B C, ergo tam A I, quàm A G, ſunt æquales ipſi B C.

PRO-

PROPOS. 4. THEOREMA 1.

Angulus A, sit aequalis Angulo D, & latus A B, aequale lateri D E, & A C ipsi D F: Dico basim B C, aequalem esse basi E F, & triangulum G, aequale triangulo H, & angulum B, angulo E, quibus opponuntur aequalia latera A C, D F; & angulum C, angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera aequalia A B, D E.



FActa enim superpositione A B, congruit D E, & angulus A, angulo D; & consequenter latus A C, lateri D F, propterea quod omnia ista sint ęqualia ex hypothesi. Ergo & basis B C congruit basi E F; triangulum G triangulo H; angulus B, angulo E, & C ipsi F. & ideo omnia ista sunt inter se aequalia per 8. pron.

PROPOS. 5. THEOREMA 2.

Latus A B, sit ęquale lateri A C, sintque producta ad D, E vtcumque: Dico tam angulos A B C, A C B, quàm D B C, E C B, esse aequales.

PEr tertiam fiat A E æqualis A D; nectantur-que per postul. 1. C D, B E. Eruntque per 3. pron. etiam B D, C E æquales; & in triangulis A B E, A C D erunt circa communem angulum A, latera lateribus æqualia A B, ipsi A C, & AE, ipsi A D. Ergo per 4. basis B E, est æqualis C D; angulus A B E, angulo A C D, & A E B, angulo ADC. Rursus in triangulis B C E, C B D circa ęquales angulos E & D. Latus B E est ęquale lateri C D, & C E ipsi B D. Ergo per eandem 4. angulus B C E, est æqualis C B E; & hi sunt duo anguli infra basim B C: & angulus C B D, & hi sublati ex æqualibus A CD, A B E relinquunt supra eandem basim æquales ACB: A B C.

Coroll. Hinc patet triangulum æquilaterum esse æquiangulum.

PROPOS. 6. THEOR. 3.

Angulus A B C, sit æqualis A C B: Dico latera A C, A B. esse æqualia.

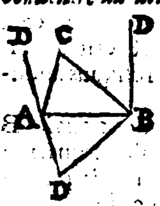
SI enim essent inæqualia, posset semper ex maiori v. g. AB, abscindi BD æqualis minori A C; atque ita fieret triangulum BCD, æquale

quale triangulo A B C, per 4. quia circa æquales angulos DBC, ACB, sunt latera lateribus æqualia.

Coroll. Ergo triangulum æquiangulum, erit quoque æquilaterum.

PROPOS. 7. THEOR. 4.

A D sit æqualis A C, & BD, æqualis sibi conterminæ B C, & AC, BC, conueniant ad C. Dico reliquas A D, B D ad partes C, non conuenire ad aliud punctum.



Aliter.

Triangulis A C B, A D B sit communis basis A B; & A D, æqualis A C, & B D, ipsi BC. Dico AB D, translatum in alteram partem coincidere prorsus cum triangulo A B C.

Euclides præmittit hanc propositionem octauæ, quam Proclus ita demonstrat, vt potius octaua præluceat septimæ.

PROPOS. 8. THEOR. 5.

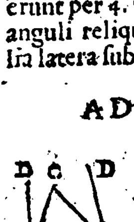
Latus AB, sit æquale DB, & AC, ipsi DC, necnon basis BC, basi B C. Dico angulum A, æqualem esse angulo D.

Intelligantur coniuncta ad communem basim B C ita vt latera æqualia sint etiam contermina, sed ad partes diuersas, nectaturque A D, quæ vel transit per C, vt in primo casu; vel cadit inter B C, vt in secundo; vel extra, vt in tertio. In primo propter æqualitatem laterum B D,

BA, anguli A, D sunt æquales per 5. In secundo, & tertio propter æqualitatem laterum AB, BD, sunt æquales anguli B A D, BDA; & propter æqualitatem laterum C D, C A sunt quoque æquales anguli C D A, C A D. Ergo in secundo casu totus angulus BAC erit æqualis toti B D C; & in tertio reliquus angulus B A C reliquo B D C.

Coroll. Et quia circa angulos æquales B DC, BAC sunt latera lateribus æqualia: erunt per 4. triangula æqualia; & reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

AD 7. PROPOSIT.



IN septima ponuntur eadem quæ in octaua. Ergo in triangulis ABD, ABC erunt anguli DAB, DBA, æquales angulis CAB, CBA. Et ideo in superpositione sibi mutuo congruet, & latus AD,

coin-

coincidet cum A C; & B D, cum B C, atque adeo punctum D, cum puncto C.

PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum B A C, bifariam secare.

ABscindantur per 3. æquales A D, A E, & supra D E fiat per 1. triangulum æquilaterum D E F. Dico A F satisfacere proposito. Angulus enim F A D, est æqualis angulo F A F, per 8. quia duo latera F A, A D, sunt æqualia duobus F A, A E, & basis F D, basi F E.

PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datam rectam A B bifariam secare.

DEscribatur per primam triangulum æquilaterum ABC, & recta CD secet per 9. angulum C, bifariam. Dico eandem CD, secare quoque bifariam A B. est enim AD æqualis D B, per 4. quia circa æquales angulos ad C, sunt latera lateribus æqualia.

PRO-

PROPOS. 11. PROBL. 6.

Ex puncto C, recta A B, erigere perpendicularem.

ACcipiantur per 3. æquales C D, CE, & D E F, sit per 1. æquilaterum. Dico F C, esse perpendicularem. hoc est angulos ad C, esse æquales, ideoque per defin. 10. rectos. Sunt enim duo latera C F, C D, æqualia duobus CF, C E, & basis E D, æqualis F E. ergo per 8. F C D, æqualis angulo F C E.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ex puncto C, in datam A B, perpendicularem demittere.

CEntro C, describatur per 3 post. circulus secans AB vtcunque in D, E, & D E secetur per 10. bifariam in F, Dico CF, esse perpendicularem, quia F C, FD, sunt iterum æqualia lateribus FC, FE, & basis CD æqualis C E per def. circuli, ergo.

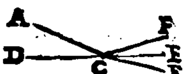
PROPOS. 13. THEOR. 6.

Recta rectæ insistens, vel facit duos rectos; vel duobus rectis æquales.

QVando EB insistẽs, est perpendicularis: certum est angulos EBC, EBD, esse rectos. At AB magis inclinata in vnam partem quàm in aliam, constituit saltem duos angulos ABC, ABD, æquales duobus EBC, EBD: quia tam isti, quàm illi sunt æquales tribus EBC, EBA, ABD.

PROPOS. 14. THEOR. 7.

CD, CE sunt vna linea continuata, cum alia AC, facit angulos ACD, ACE, æquales duobus rectis.

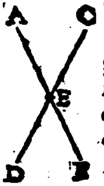


SI enim CF, pars protractæ DC, caderet supra, vel infra CE; essent nihilominus per 13. anguli ACD, ACF, æquales duobus rectis, & æquales duobus ACD, ACE, quod est absurdum.

PRO-

PROPOS. 15. THEOR. 8.

AB, CD, secent se mutuo ad verticem E. Dico angulum AEC, æqualem esse DEB, & AED, ipsi BEC.



NAm & AE, cum CD, & CE cum AB facit per 13. angulos duobus rectis ęquales. & ideo AED, AEC, æquales sunt duobus CEA, CEB; demptoque communi AEC, remanet AED, æqualis CEB. Similis est ratiocinatio de angulis AEC, BED.

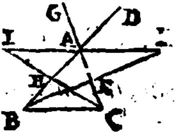
Coroll. 1. Hinc patet omnes quatuor angulos ad punctum E esse æquales quatuor rectis.

Coroll. 2. Immo quotcumque fuerint anguli ad E, omnes simul erunt quatuor rectis æquales.

PROPOS. 16. THEOR. 9.

Dico angulum externum CAD, trianguli ABC, maiore esse vtrolibet interno, & opposito, tam ACB, quàm ABC.

SEcto latere AC, bifariam in E, & ex protracta BE, sumpta EF, ęquali ipsi BE,



B E, & iunctâ F A: erunt per 15. æquales anguli B E C, FEA, & duo latera E B, E C, æqualia duobus E F, E A; & ideo per 4. angulus E A F, æqualis E C B. est autem externus C A D, maior quàm E A F. ergo idem externus est quoque *maior* B C E.

Protracto autẽ latere C A ad G, fit externus B A G, æqualis priori C A D per 15. & secto bifariam latere A B in H; factaque H I, æquali H C, demonstratur, vt prius, angulum B A G, maiorem esse A B C, ergo & C A D, erit maior eodem.

Ex Prolo.

Si A B, A C, sunt æquales, quæuis alia A D, non erit eisdem æqualis.

SI enim A D esset æqualis, esset per 5. angulus C, æqualis B, & eidem B, esset æqualis A D B. ideoque æqualis A C D, quod est absurdum, quia A D B est externus, ideoque maior interno & opposito C.

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Duo quilibet anguli trianguli, sunt minores duobus rectis.

PRoductis B C, B A, in D. E, efficitur per 16. externus A C D maior B, & ideo A C D, A C B maiores duobus A B C, A C B. Sunt autem illi æquales duobus rectis per 13. ergo isti sunt minores duobus rectis. Eadem est ratio de duobus angulis B A C, B C A. Pro duobus autem C A B, C B A assumendus est externus C A E.

Ex Proclo.

EX eodem puncto A, in C D, vna tantum cadit perpendicularis A C. Si enim præter A C, esset alia A B: essent duo anguli A C B, A B C, æquales duobus rectis, quod est absurdum.

Coroll. 1. Propter eandem causam, in triangulo non potest esse, nisi vnus, tam rectus, quam obtusus.

Coroll. 2. Existente angulo ABC, acuto, perpendicularis AC, cadit ex parte anguli acuti. si enim caderet ex parte obtusi, qualis

qualis est A D; ABD, A D B, essent duobus rectis maiores.

Coroll. 3. Duo anguli basim isoscelij; & omnes tres trianguli æquilateri, sunt acuti.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Maius latus A C, subtendit maiorem angulum A B C, & A B, minus minorem A C B.

SI enim A D, fiat æqualis A B, erunt per angu'i ad basim B D, æquales; est autem per 16. A D B, maior C: ergo & A B D, & multo magis A B C, erit maior C.

Coroll. Hinc patet in Scaleno tres angulos esse inæquales.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Maiori angulo A B C opponitur maius latus A C, & minori C, minus latus A B.

SI enim latus A B in superiori figura foret æquale A C, essent prædicti anguli æquales, & si A B, esset maius: esset per præcedentem, contra hypothesim, angulus C, maior angulo A B C.

Coroll.

Coroll. Omnium rectarum A C, AC, A C, perpendicularis AB, est omnium breuissima; quia A B opponitur acutis, & A C, opponuntur recto.

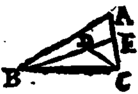
PROPOS. 20. THEOR. 13.

Duo quælibet latera trianguli, sunt reliquo maiora.

Lateribus C A, A B, sit æqualis C A D, hoc est A D, æqualis A B. Ergo ad basim B D, sunt per 5. anguli æquales. Estque A B D, minor D B C: ergo & A D B, seu C D B, est minor eodem, & per 19. B C, minor C D, hoc est minor duabus C A, A B, & ita de reliquis.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Duæ rectæ B D, C D, intra triangulum A B C, sunt minores lateribus conterminis A B, A C, & angulus B D C, maior A.



Producta enim B D, in E; erunt per 20. B A, A E, maiora reliquo latere B E, adiectaque E C, duæ rectæ

rectæ A B, A E C, maiores duabus B E, E C. Sunt autẽ & C E, E D, maiores C D, addita D B, duæ CE, EDB, sunt maiores duabus C D, DB. ergo A B, AC, sunt & multo maiores duabus B D, D C. Porro angulus B D C, maior est D E C, per 16. & hic maior angulo E A B: ergo B D C, est multo maior EAB, seu B A C.

PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis A, B, C, quarum vnaquaque sit minor aggregato reliquarum, triangulum construere.

IN recta DG, sumantur DE, EF, FG, æquales tribus datis A, B C, & centris E, F, interuallis E D, FG, describantur duo circuli se mutuo secantes in H. eruntque per defin. 15. E H, F H æquales ipsis E D, F G, hoc est ipsis A, C, estque E F, æqualis ipsi B. ergo.

PROPOS. 23. PROBL. 9.

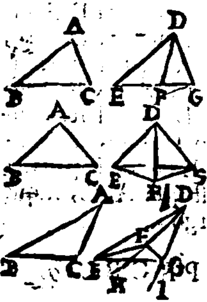
Ad punctum C, rectæ A B, constituendus sit angulus G C H, æqualis dato D E F.

DVcatur vtcunque D F, & fiat per 22. triangulũ G C H habens latus CG, æqua-

æquales lateri ED; C H æquale E F, & GH, æquale D F: sic enim necesse est angulum G C H per 8 æqualem esse angulo D E F.

PROPOS. 24. THEOR. 15.

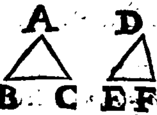
Latus A B, sit æquale lateri D E. & A C, ipsi D F; basis autem B C, maior sit basi E F: Dico angulum A, esse maiorem angulo E D F.



ANgulo A, fiat æqualis EDG, & D G, æqualis AC, nectaturque E G, quę in primo casu continuatur cum E F, in 2. cadit supra, & in 3. infra. In omnibus vero casibus recta E G, est per 4. æqualis basi B C. & in primo quidem casu manifestum est E G, ideoque & B C, maiorem esse E F. In secundo vero in triangulo isoscelio D F G, anguli ad basim F G. sunt per 5. æquales, estque D G F, maior sua parte E G F. ergo & D F G, multoque magis totus EFG, maior est eodem EGF. ideoque per 19. E G, hoc est B C, maior base E F. Denique in tertio in quo æquales D E, D G, sunt protractæ ad H, I, anguli infra basim F G sunt per 5. æquales; estque I G F, maior sua parte E G F. ergo & H F G, & multo magis E F G, maior est eodem E G F, & idcirco E G, seu B C, maior quam E F vt prius.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

Vice versa angulus A, maior est angulo D, quando basis B C, maior est base E F, & reliqua latera reliquis æqualia, vt in præcedenti.



Esset enim per 4. basis B C, æqualis E F, si angulus A, posset esse æqualis angulo D, & B C, per 24. minor esset quam E F, si A esset minor D.

PROPOS. 26. THEOR. 17.

Anguli B, C, sint æquales angulis E, F, & latus B C, ipsi E F, nimirum adiacens adiacenti; vel certe A B ipsi D E, quæ æqualibus angulis opponuntur: Dico & reliqua reliquis esse æqualia.

Sit

Sit primo B C æqualis EF, & DF si fieri potest sit maior AC. Sumpta igitur F G, æquali ipsi A C; erunt circa æquales angulos G F, latera AC, C B, æqualia lateribus G F, F E; ideoque per 4. angulus A B C, seu D E F, equalis angulo G E F, quod est absurdum.

Secundo sit A B æqualis D E, & si fieri potest E F, sit maior B C. Sumpta igitur E G, æquali ipsi B C; erit vt prius angulus B C A, hoc est E F D, æqualis E G D, internus externo contra 16.

Sunt igitur omnia latera omnibus equalia, ideoq; per 8. etiam reliqua equalia.

PROPOS. 27. THEOR. 18.

Recta E F secet duas A B, C D, faciatque angulum A G H, æqualem alterno D H G: Dico A B, C D, esse parallelas.

Si enim concurrant in I, Cum igitur trianguli G H I, latus I G, sit productum; erit per 16. angulus externus A G F, maior interno & opposito I H G, quod est absurdum. idem sequitur si concurrerent ad K.

PRO-

PROPOS 28. THEOR. 19.

Eadem AB, CD, erunt quoque parallelæ, si constet externum A G E, æqualem esse interno C H G: vel duos internos AGH, C H G, æquales duobus rectis.

EX vtroque enim sequitur alternum BGH, equalem esse alterno CHG. Externo enim A G E æqualis est per 15. B G H, ad verticem G. & duo A G H, C H G sunt per 13. equales duobus H G A, HGB, estque HGA, communis. ergo reliquus H G B, equalis est reliquo C H G, alternus alterno. ergo per 27. A B, C D, sunt parallelę.

Ex hac posteriore parte constat sufficienter veritas 13. pronunciati.

AXIOMA 13.

SI in duas rectas incidat recta O, I, faciatque duos angulos O, I, minores duobus rectis: duæ rectæ A B. C D, concurrent ad partes angulorum O, I.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

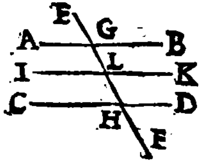
Duas parallelas A B, C D secet E F, in G H. Dico alternum alterno; externum interno; & duos angulos internos esse duobus rectis æquales, conuertendo duas præcedentes.

Nam primo si alternus AGH esset maior alterno DHG, addito communi B G H essent duo D H G, B G H, minores duobus AGH, BGH, hoc est minores duobus rectis. & ideo per 13. axioma A B, C D, concurrerent ad partes B, D, quod est contra hypothesim. Ergo alterni sunt æquales, hoc est, BGH, ipsi C H G. Est autem per 15. BGH, æqualis A G E, ergo etiam externus AGE, erit ęqualis interno CHG, & quia BGH, cum A G H, ęquipollet per 13. duobus rectis, eruntque duo interni AGH; C H G ęquales duobus rectis.

PROPOS. 30. THEOR. 21.

AB, C D, sint parallelæ eidem I K: Dico etiam ipsas esse parallelas inter se.

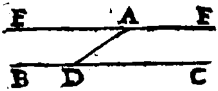
Du-



DVcta enim E F erit per 29. B G K, ęqualis alterno I L G & CHL, æqualis KLH: sed ILG, KLH, sunt per 15. ęquales. ergo & alterni BGL, CHL sunt æquales, & per 27. A B, CD parallelę.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

Per A, ducere parallelam datæ B C.

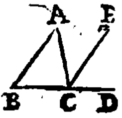


DVcta AD vtcunque, & facto per 23. angulo D A E, æquali alterno ADC, erit per 27. EAF, ipsi B C, parallela.

PROPOS. 32. THEOR. 21.

Externus angulus A C D, est æqualis duobus internis, & oppositis A, B: & omnes tres anguli cuiuscunque trianguli sunt æquales duobus rectis.

DVcatur per 30. CE, parallela A B; eritque per 29. E C A, ęqualis alterno A, & externus ECD, ęqualis in-



terno B, & totus externus A C D, ęqualis duobus internis A, B. Adiectoque communi A C B. erunt omnes tres interni A, B, C, ęquales duobus A C D, ACB. hi autem sunt per 13. ęquales duobus rectis. ergo & illi.

Coroll. 1. Ergo omnes tres anguli vnius trianguli sunt ęquales tribus cuiuscunque alterius trianguli simul sumptis: & quando duo sunt ęquales duobus, erit & reliquus reliquo ęqualis.

Coroll. 2. In triangulo isosceli rectangulo, anguli ad basim sunt semirecti.

Coroll. 3. Angulus trianguli ęquilateri est vna tertia duorum rectorum, vel duæ tertię vnius recti.

Ex Scholio.

Omnis figura rectilinea distribuitur in tot triangula, quot ipsa continet latera demptis duobus; ita vt anguli triangulorum constituant angulos figurę.

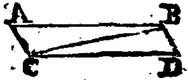
Cumque anguli cuiuscunque trianguli sint ęquales duobus rectis, erunt omnes anguli figuræ rectilineę ęquales bis tot rectis, quot ipsa habet latera, demptis duobus.

Quot

Quot autem habet latera, tot habet angulos internos & externos. Ergo interni simul cum externis sunt ęquales bis tot rectis quot sunt latera; quia quilibet externus cum suo interno æquiualet duobus rectis per 13. Interni autem soli, sunt æquales bis tot rectis, quot sũt latera demptis duobus, quibus respondent quatuor recti; demptis igitur omnibus internis, remanebunt externi quatuor rectis ęquales. & ideo omnium figurarum anguli externi simul sumpti, sunt ęquales simul sumptis.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

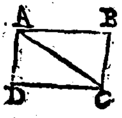
Sint A B, C D, æquales & parallelæ. Dico etiam A C, B D, esse æquales, & parallelas.



DVcta enim B C, erunt per 29. alterni A B C, D C B æquales, & duo latera A B, B C, duobus BC, CD ęqualia. ergo per 4. etiam basis BD, ęqualis basi A C; & angulus ACB, ęqualis alterno C B D; ideoque per 27. B D, parallela A C.

PROPOS. 34. THEOR. 24.

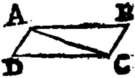
In parallelogrammo latera & anguli oppositi sunt aquales; & diameter secat ipsum bifariam.



CVm enim per defin. 35. latera A B, D C, necnon A D, B C sint parallela; erit per 29. angulus B A C æqualis D C A; & A C B, ipsi C A D. estque latus A C, ipsis adiacens commune. ergo per 26. AB, erit æquale CD, & AD, ipsi B C, & angulus B, angulo D, & triangulum ABC, triangulo A D C. Denique reliqui anguli A & C, sunt æquales, quia constant ex æqualibus.

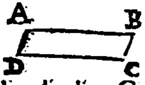
Ex Scholio.

Omne quadrilaterum habens latera opposita, vel angulos oppositos aquales, est parallelogrammum.



SInt primo A B, C D, & AD, B C, æquales. Ducta igitur A C, erunt duo latera AB, BC, æqualia duobus CD, DA, & AC, basis erit communis. Vnde per

per 8. non solum angulus B angulo D, sed & angulus B A C, angulo D C A, & A C B, æqualis erit C A D, nimirum alterni alternis, atque adeo per 27. A B, erit parallela C D, & A D, ipsi BC.



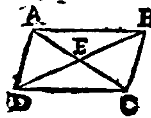
Secundo. Angulus A, sit æqualis C, & B, ipsi D; eruntque duo A, B, ęquales duobus C, D; & duo A, D, ęquales duobus C B. Sunt autem omnes quatuor æquales quatuor rectis per Scholium 32. ergo tam A, B, quàm A, D, erunt duobus rectis æquales, & ideo per 28. A B, C D, & AD, B C, erunt parallelę.

Ex priore parte huius demonstrationis constat Quadratum, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma.

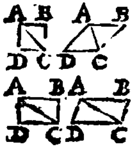
Ex posteriore constat idem de Quadrato; figura altera parte longiore, & Rhomboide.

Item.

In omni parallelogrammo diametri se mutuo secant bifariam: & in Quadrato & Rhōbo secant angulos bifariam; in figura altera parte longiore sive oblonga, & Rhomboide non bifariam. eademque in Quadrato, & oblongo sunt æquales, in Rhombo & Rhomboide inæquales.



DIco primo AC, BD, secari bifariam in E. Anguli enim EAD, EDA sunt æquales angulis E CB, EBC, per 29. & latera adiacentia A D, B C, sunt ęqualia, per 34. ergo per 26. EA, est ęqualis EC, & E B, ęqualis E D.

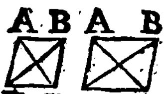


Dico secundo, in Quadrato, & Rhombo angulos A, C secari bifariam à diametro A C. latera enim C A, A D, ęqualia sunt lateribus A C, AB, & basis CD, basi C B. ergo per 8. angulus CAD, angulo C A B.

Dico tertio, in oblongo, & Rhomboide angulos A, C, secari à diametro A C non bifariam. Est enim angulus BAC, minor angulo BCA, per 18. & per 29. B C A, est ęqualis alterno CAD. ergo BAC, minor est C A D.

Dico quarto, in Quadrato, & oblongo diametros A C, I D, esse ęquales per 4. quia, circa æquales angulos nempe rectos latera D A, D C, sunt ęqualia lateribus B C, C D.

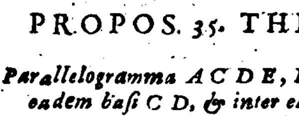
Dico quinto, in Rhombo & Rhomboide diametrum A C, quę subtendit minorem angulum D, minorem, esse diametro



tro B D, quę subtendit maiorem C. Sunt autem D & C, inęquales, quia simul sunt ęquales duobus rectis per 29. & per definitiones neuter est rectus. Cum enim latera D A, D C, sint ęqualia lateribus C B, C D, & angulus D minor angulo C, ex hypothesi; erit basis A C, minor base B D, per 24.

PROPOS. 35. THEOR. 25.

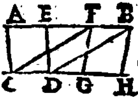
Parallelogramma A C D E, F C D B, super eadem basi C D, & inter easdem parallelas A B, C D, sunt aequalia.



IN primo casu coincidit pũctum F cũm pũcto E; in secundo existit inter puncta A, E: in tertio inter puncta E, B. In omnibus autem tribus casibus angulus C A F ęqualis est per 29. D E B, & per 34. AC æqualis D E, & A E, F B ęquales eidem C D, ideoque ęquales inter se. & in secundo casu auferendo intermediam F E relinquuntur ęquales A F, E B. & in-tertio fit idem addendo communem E F. Atque ita circa equales angulos C A F, D E B, erunt duo latera C A, A F, equalia duobus lateribus D E, E B, & idcirco per 4. triangulum C A F, erit equale triangulo D E B. & in primo casu addito triangulo C E D. in secundo Trapezio C F E D. & in tertio abiecto primo triangulo G E F, & postea adiecto triangulo C D G, fit parallelogrammum A C D E, equale parallelogrammo F C D B.

PROPOS. 34. THEOR. 26.

Similiter parallelogramma ACDE FGHB, super aequalibus basibus C D, G H. & inter easdem parallelas A B, C H, sunt aequalia.

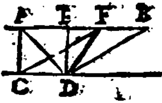


CVm enim CD, sit equalis G H, & eidem G H, equalis per 34. F B, erunt C D, F B, equales inter se, & parallele. ergo per 33. & C F, D B, sunt parallele, & C D B F, parallelogrammum, cui per precedentem sunt equalia A C D E, F G H B; quia illa sunt super eadem basi C D; hec super basi F B. ergo & A C D E equale est parallelogrammo F G H B.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 27.

Triangula ACD, FCD, super eadem basi CD, & inter easdem parallelas AB, CD, sunt æqualia.



Recta enim DE, DB, parallelę ipsis AC, FC constituunt per 35. duo parallelogramma ACDE, FCDB ęqualia, eademque per 34. dupla triangulorũ ACD, FCD. ergo etiam triangula ACD, FCD, sunt ęqualia.

PROPOS. 38. THEOR. 28.

Idem constat de triangulis ACD, FGH super æqualibus basibus CD, GH.

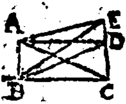
Quia sunt semisses ęqualium parallelogrammorum ACDE, FGHB.

Ex Scholio.

Recta igitur FH, secans basim GI, bifariam in H; secat etiam bifariam triangulum FGI.

PROPOS. 39. THEOR. 29.

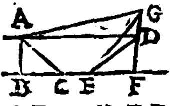
Triangula A B C, B C D, sint super communi basi B C, æqualia. Dico A D, esse parallelam B C.



SI minus, sit AE parallela, & secet CD, in E; eritque per 37. triangulum BCE ęquale eidem ABC: & ideo B C E, B C D, ęqualia; quod est absurdum.

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Idem dico quando triangula A B C, D E F sint æqualia, & super æqualibus basibus B C, E F.

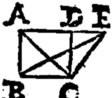


SI enim alia AG, esset parallela; triangula A B C, G E F, essent ęqualia per 38. necnon G E F, D E F.

PROPOS. 41. THEOR. 31.

Parallelogrammum A B C D, & triangulum E B C, sint inter parallelas AE, BC. Dico parallelogrammum duplum esse trianguli.

Quia



QVia parallelogrammum ABCD est per 24. duplum trianguli ABC; & hoc est ęquale triangulo EBC, per 37. Ergo.

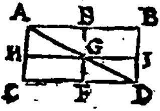
PROPOS. 42. PROBL. 11.

Triangulo ABC, constituere parallelogrammum æquale, cum angulo D.

BAsis B C, secetur bifariam in E: per 10. eritque per 38. triangulum ABC, duplum trianguli AEC; & facto angulo CEF, ęquali D, ductaque A F G, parallela B C, & C G, parallela E F; factum erit parallelogrammum E G, duplum eiusdem trianguli AEC, per 41. & idcirco ęquale triangulo A B C.

PROPOS. 43. THEOR. 32.

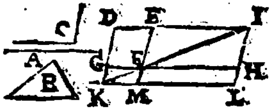
Complementa G B, G C, de quibus defin. 36. sunt æqualia.



TRiangulum enim ACD æquale est triangulo ADB, per 34. AGH, ipsi AGE; & GDF, ipsi GDI: Et ab tis AGH, GDF ex A C D, remanet complementum G C, & ablatis AGE, G D I ex ADB, remanet complementum G B. Ergo.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ad datam A, dato triangulo B; æquale parallelogrammum applicare, cum dato angulo C.

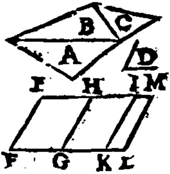


PEr 42. fiat parallelogrammũ G E, æquale triangulo B, cum angulo F, æquali C; & ex D E protracta sumatur E I, æqualis A; & I F, secet D G, in K, perficianturque reliqua parallelogramma: ex quibus complementum F L, est per 43. æquale complemento G E, hoc est triangulo B; & habet latus FH, æquale ipsi E I, hoc est, ipsi A; & angulum M F H æqualem angulo F, per 15, hoc est angulo C.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Dato rectilineo A, B, C: æquale parallelogrammum constituere, cum angulo D.

Di-

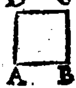


DIstribuatur rectilineum in sua triangula A,B,C, ipsique A, fiat per 42. æquale parallelogrammum F H cum angulo F, æquali D: & aliud G I æquale ipsi B applicetur ad G H, cum angulo G, æquali eidem D: denique ad K I applicetur K M æquale ipsi C, & I K L; sit rursus æqualis angulo D: erunt F H, G I, K M simul æqualia rectilineo A,B,C. Quod autem F M, sit parallelogrammum, probatur hoc modo. Angulus F est æqualis HGK, & duo HGK, HGF, sunt æquales duobus HGF, GFE, & hi duo sunt æquales duobus rectis per 29: ergo & illi, & ideo per 14. G F, G K, sunt vna lineæ: & eadem est ratio de KG, KL. immo eadem quoque de tribus EH, HI, IM; quia angulis F,G,K, sunt per 34. æquales, oppositi H, I, M. Cumque G H, sit æqualis & parallela E F, & K I, æqualis, & parallela GH, & L M, æqualis, & parallela ipsi KI: erunt etiam EF, L M, æquales & parallelæ, & per 33. FL, EM, erunt similiter çquales & parallelæ.

PRO-

PROPOS. 46. PROBL. 14.

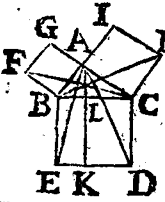
Super datam A B, quadratum describere.



ERigantur duæ perpendiculares A D, BC æquales ipsi A B: eritque per 33. etiam D C æqualis, & parallela ipsi A B, & angulis rectis A, B, erunt per 34. æquales oppositi C, D. Hoc est figura, A C, erit æquilatera, & rectangula.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In triangulo A B C, habente rectum ad A: Quadratum lateris B C, æquale est Quadratis duorum laterum A B, A C,



DEscribatur per 46. quadrata BD, BG, C I: eritque per 14. tam BAI, quam C A G vna linea recta, quia anguli ad A, sunt recti. Et quia A B F, CBE sunt æquales; addito communi A BC, fit totus FBC, æqualis toti ABE; & ductis rectis F C, AE, & A L k, parallela ipsi B E; erunt circa æquales angulos F BC, ABE duo latera FB, B C, æqualia, duobus A B, B E. Quare triangulum F B C, æquale erit triangulo A B E, per 4.

Trian-

Trianguli autem F B C duplum est Quadratum B G, per 41. quia sunt super eadem basi B F, & inter easdem parallelas B F, C G: & trianguli A B E duplum est parallelogrammum BLkE: quia sunt super eadem basi B E, & inter parallelas BF, CG, & triãguli ABE duplum est parallelogrammum B L k B; quia sunt super eadem basi B E, & inter parallelas B E, A K. Ergo parallelogrammum B L K E æquale est quadrato B G. Eodemque modo demonstratur alterum parallelogrammum L C D K, equale esse quadrato C I. Totum igitur quadratum B D, erit æquale duobus quadratis B G, C I.

Ex Scholio.

Inuentio huius Theorematis tribuitur Pythagoræ; qui cum aduertisset in quibusdam numeris, quales sunt 3. 4. 5. duorum 3. & 4. quadratos 9. & 16. facere 25. quadratum tertij; voluit idem experiri in lineis, &

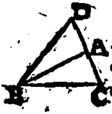
inuenit ex tribus lineis ab huiusmodi numeris numeratis constitui semper triangulum rectangulum.

Inuentio autem huiusmodi numerorum ita se habet. Pro minimo sumatur quicumque numerus impar, v. g. 5. & ex eius quadrato 25. abijciatur 1. Reliqui enim numeri 24. medietas 12. erit secundus, & tertius

tertius erit, 13. vnitate maior. Vel sic: pro minimo sumatur par v.g.6. & ex quadrato 9. hoc est ex quadrato numeri 3. qui est medietas numeri 6. abijciatur 1, eidemque addatur 1. eritque secundus numerus 8. & tertius 10.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Vice versa angulus A, est rectus, quando quadrata A B, A C sunt æqualia quadrato B C.



ERigatur ex puncto A super BA, perpendicularis AD, & æqualis AC; eritque per 47. quadratum B D, æquale quadratis A B, AD; hoc est, quadratis A B, A C: atque adeo quadrato B C; & ideo B D erit æqualis B C. Et quia præterea duo latera A B, A D, sunt æqualia duobus A B, A C; erit angulus B A D æqualis B A C; sed ille est rectus; ergo & iste.

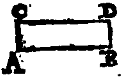
EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

1 Parallelogrammum rectangulum dicitur cõtineri ſub duabus lineis rectis, quæ comprehendunt angulum rectum.

Ex Scholio.

Ratio eſt, quia in duabus illis lineis, & angulo recto, aſſignantur omnia illa, quibus datis datur ipſum rectangulum; nimirum longitudo, & latitudo, & angulus rectus, qui eſt ſolus ex omnibus angulis inuariabilis.

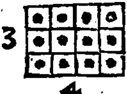


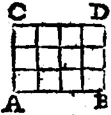
Alia ratio eſt, quia ex ductu huiuſmodi linearum vnius in alteram, formatur optimè conceptus ipſius rectanguli. Nam ſi duæ rectæ A B, A C contineant angulum rectum A, & A C intelligatur moueri per

rectam

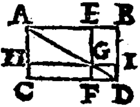
rectam A B ex A vsque ad B, ita vt semper ipsi A B, existat perpendicularis; describet punctum C tertium latus C D, & si eadem recta A C intelligatur aliquid post se relinquere, id erit superficies plana, inter A B, A C, C D, D B comprehensa.

Habet etiam hæc comprehensio rectanguli sub duabus rectis, necnon hic ductus vnius lineæ in alteram, magnam affinitatem cum multiplicatione, vel ductu vnius numeri in alium. Sicut enim ex multi-





plicatione v. g. 3. in 4. producitur numerus 12. cuius vnitates possunt disponi in forma rectanguli, diciturque idem numerus 12. contineri sub duobus numeris 3. & 4. eo quod fiat ex ductu 3. in 4. ita quoque si A C, trium partium, ducatur in A B. 4. partium, producentur 12. quadratula vnius partis, quæ constituunt totum rectangulum contentum sub ijsdem duabus rectis A C, A B.



Secunda definitio. In parallelogrammo C B diuiso in alia quatuor; duo complementa G C, G B, vna cum H E; constituunt gnomonem F H E I, & cum parallelo-

grammo-

grammo F I, constituunt Gnomonem HFIE.

PROPOS. I. THEOR. I.

Rectangulum contentum sub A, & BC; æquale est BCFG: æquale est iis, quæ continentur sub eadem A, seu BG, & singulis partibus rectæ BC.

Actis enim per D, E, ipsi BG parallelis DH, EI; distribuitur rectangulum BF in rectangula BH, DI, EF, quæ continentur sub BG, DH, EI, hoc est sub A; & sub partibus BD, DE, EC. Est autem per 19. pronunc. omne totum æquale suis partibus; ergo.

Applicatio ad numeros.

Sit BC, 10. segmenta BD, DE, EC. sint 5. 1. 4. & recta A vel BG, sit 6. Eritque rectangulum BF, seu numerus productus ex BG, 6. in BC, 10. numerus 60: & BG 6. in BD 5. erit 30: & DH 6. in DE 1. erit 6: & EI 6. in EC 4. erit 24. Et hæc omnia tria rectangula numerica collecta in vnam summam, faciunt eundem numerum 60. quem facit A 6.

in B C 10. Et hoc modo applicari poſſunt numeris ferè omnes propoſitiones ſequentes.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

B C, ſecta ſit vtcunque in D: Dico Quadratum B C æquale eſſe rectangulis contentis B C, B D, & ſub B C, D C.

HÆC non differt à præcedenti, ſi BG, intelligatur æqualis ipſi B C. Rectangulum enim BE, hoc eſt quadratum ipſius B C, erit æquale rectangulo BF, contento ſub B G, B D, hoc eſt BC, BD; & rectangulo DB, contento ſub D F, D C, hoc eſt ſub B C, D C.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

B C, ſit ſecta vtcumque in D: Dico rectangulum contentum ſub B C, & ſub vno ſegmẽtorũ v.g. ſub BD, æquale eſſe quadrato BD, & rectangulo ſub ſegmentis B D, D C.

HAec quoque continetur in prima, eſtque manifeſta ſi B G, ponatur æqualis B D. Sic enim B F, eſt quadratum ipſius B D; & D E, rectangulum ſub D F, ſeu B D, & D C.

PRO-

PROPOS. 4. THEOR. 4.

AB, secta sit vtcumque in C: Dico Quadratum totius A B, æquale esse duobus quadratis A C, C B, & duobus rectangulis sub segmentis AC, C B.

EF D
H G I
AC B

Quadratus totius A B, sit A D, diameter B E; C G F, parallela A E; & H G I, parallela ipsius A B. Dico primo H F, C I, esse quadrata segmentorum, A C C B. Nam latera AB, AE, circa rectum A, sunt æqualia; ergo per 2. Coroll. 32. anguli AEB, ABE sunt semirecti: sed istis sunt æquales CGB, HGB, HGE, per 29.: ergo omnes quatuor sunt æquales, & per 6. primi HG, HE; & CB, CG, æquales inter se, atque adeo H F, quadratum rectæ H G, quæ per 34. est æqualis A C, & C I, quadratum segmenti C B. Dico secundo rectangula A G, G D contineri sub iisdem segmentis AC, CB. illud enim continetur sub AC CG, & C G, est æqualis C B; & G D, continetur sub GF, GI, & GF, est æqualis GH, hoc est, AC, & GI, segmento C B. Quibus ita demonstratis manifesta est propositio.

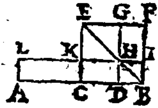
Coroll. Hinc patet, parallelogramma

H F

H F C I circa diametrum quadrati, esse quadrata.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

A B secta sit bifariam in C, & non bifariam in D: Dico quadratum CB, æquale esse rectangulo ADB, vna cum quadrato CD.

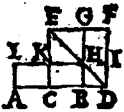


Facto quadrato CF, & ductis reliquis parallelis; erit per coroll quartæ K G quadratum sectionis intermediæ CD, & D I quadratum segmenti D B; & rectangulum A H, erit illud quod continetur sub inæqualibus segmentis A D, DB, eo quod D H, sit æqualis DB. Dico hoc rectangulum A H, vna cum quadrato K G æquale esse quadrato C F. Complementum enim H C, est per 43. primi æquale complemento H F; adiectoque D I; rectangulum G B, æquale rectangulo B K. Sed BK, est æquale kA per 35. primi: ergo KA, G B, sunt æqualia, & vna cum C H, erit AH æquale Gnomoni GBK; rursus addito quadrato k G; erit A H, vna cum quadrato Gk, æquale toti quadrato CF, quod componitur ex Gnomone, & quadrato k G.

PRO-

PROPOS. 6. THEOREMA 6.

Recta AB, secta bifariam in C, adiecta sit B D: Dico rectangulum A DB, vna cum quadrato C B, æquale esse quadrato ipsius C D.



Constructio similis est præcedenti. Dico rectangulum A I, quod continetur sub AD, DI, hoc est sub AD, DB, vna cum quadrato kG quod est quadratum rectæ C B, æquale esse quadrato C F. Nam C L, CH sunt æqualia per 35. primi, & CH, H F æqualia per 43. ergo C L, æquale est H F adiectoque communi C I, totum A I, æquale Gnomoni GIBk. Sed hic vna cum quadrato kG, æquiualet quadrato CF: ergo & A I, k G, æquiualent eidem.

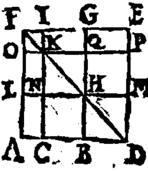
PROPOS. 7. THEOR. 7.

A B, secta sit vtcunque in C: Dico quadratum totius A B, nimirum A D, vna cum quadrato segmenti v. g. A C, hoc est vna cum quadrato H F, æquale esse rectangulo BAC, bis, hoc est duobus rectangulis A F, H D, vna cum quadrato C I, reliqui segmenti C B.

DVo enim rectangula A F, H D ſunt æqualia Gnomoni C H F I, & quadrato HF: addito ego quadrato CI, erunt duo rectãgula A F, HD, & quadratum C I æqualia Gnomoni, & duobus quadratis H F, C I. Gnomon autem & quadratum C I, faciunt quadratum A D. Ergo qnadrata A D, H F, ſunt æqualia duobus rectangulis A F, H D, & quadrato C I.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

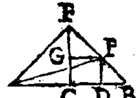
Recta AB, ſecta vtcunq; in C adiiciatur BD, æqualis v. g. ſegmento B C. Dico quadratum totius A D, æquale eſſe quatuor rectangulis A B C, ſeu ABD, & quadrato reliqui ſegmenti A C.



COnſtructio eſt ſimilis ſuperioribus, & AE eſt qnadratum totius A D: O I, quadratum ſegmenti AC: NQ, BM, ſunt quadrata æqualia B C, B D, qualia ſunt etiam quadrata CH, HP. Vnde conſtat vnum ex quatuor rectangulis eſſe A H, quia continetur ſub AB, BH quæ eſt æqualis B C. Secundum est LQ: quia continetur sub LH, HQ, quæ sunt iterum æquales ipsis AB, BC: Tertium est HE, contentum sub HG, HM, quæ etiam sunt æquales eisdem AB, BC. Quartum denique constituunt KG, BM, quia KG, est æquale QE per 36. primi & quadratum BM, est æquale quadrato HP. Cum igitur hæc quatuor rectangula constituant Gnomonem, qui cum quadrato OI, facit totum quadratum AE; manifestum est, totum quadratum AE, æquale esse quatuor rectangulis ABC, & quadrato segmenti AC.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Recta AB secta sit bifariam in C, & non bifariam in D: Dico quadrata inæqualium segmentorum AD, DB, dupla esse quadratorum ex AC, CD.

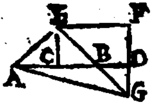


Perpendicularis CE sit æqualis CA, vel CB: eruntque ACE, ECB. Isoscelia rectangula, & quatuor anguli ad bases AE, EB erunt per secundum corol. 37. semirecti, & totus AEB, rectus. Rursus perpendicularis DF, secet EB. in F, & FG, sit parallela CD: eruntque etiam FDB, FGE, rectangula; & quia anguli DBF, GEF, sunt semirecti, erunt & reliqui D

F B, GFE semirecti, & per 6. primi D F, æqualis DB, & EG æqualis G F, vel CD. Vnde per 47. primi quadratum rectæ AE, æquale est quadratis CA, C E, & duplum quadrati A C. Et quadratum EF duplum quadrati GF, vel C D, & duo quadrata A E, E F, hoc est quadratum A F, vel loco istius, duo quadrata A D, D F. vel duo AD, DB, dupla quadratorum AC, CD.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

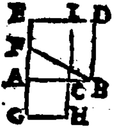
A B secta bifariam in C, adiiciatur quæcunque B D. Dico duo quadrata A D, D B dupla esse duorum A C, C D.



Constructio est eadem cum præcedēte, & angulus A E G, rectus, & A C E, EGF, BGD triangula Isoscelia, & ideo quadrata AE, E G, dupla quadratorum A C, E F, hoc est quadratorum A C, C D. duobus autem quadratis AE, E G, est per 47. primi æquale quadratum A G; & quadrato AG sunt æqualia AD, DG, hoc est A D, D B. Ergo etiam duo quadrata AD, DB sunt dupla quadratorum AC, CD.

PROPOS. II. PROBL. I.

Rectam A B ita secare in C, vt rectangulum A B C, sit æquale quadrato segmenti A C.



QVadratum ipsius A B, sit A D; & latus AE, bifariam sectum in F; & recta F G, æqualis ipsi F B; & AC æqualis AG; perficiaturque quadratum AH; & H I, sit protracta HC: eritque E H, rectangulum contentum sub EG, GH hoc est, sub EG, G A. Hoc autem rectangulum vna cum quadrato A F æqualia sunt per 6. quadrato FG, hoc est, quadrato FB; & per 47. primi quadratis A B, A F: ergo rectangulum E H, cum quadrato A F, æquale est quadratis A B, A F, hoc est, quadrato A D, & quadrato rectæ A F. Dempto igitur quadrato communi A F, remanebit quadratum A H, hoc est, quadratum segmenti A C, æquale rectangulo C D, hoc est, rectangulo contento sub tota A B, & reliquo segmento C B.

PROPOS. 12. THEOR. II.

In triangulo A B C, sit angulus B, obtusus; ita vt perpendicularis A D per Schol. 17. primi cadat extra triangulum: Dico quadra-

dratum lateris A C, excedere quadrata laterum A B, B C, gemino rectangulo C B D.

QVadratum enim C D est per 4. æquale quadratis B C, B D, & gemino rectangulo C B D addito ergo quadrato A D; erũt duo CD, DA, hoc est, per 47. primi quadratum A C, æquale geminato rectangulo C B D, & tribus quadratis C B, B D, D A. Quadratis autem BD, D A, æquale est quadratum A B. ergo quadratum A C, æquale est duobus quadratis A B, B C, vna cum geminato rectangulo C B D.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

In triangulo A B C, sit angulus C, acutus; eritque saltem alter reliquorum acutus, v. g. B: & ideo perpendicularis A D, cadet intra triangulum. Dico quadratum lateris A B, minus esse quadratis AC, BC, geminato rectangulo B C D.

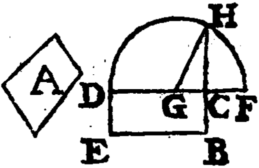
QVadrata enim B C, CD, sunt per 7. equalia gemino rectangulo B C D, & insuper quadrato B D. Ergo addito quadrato A D, erunt tria quadrata B C, C D, A D, vel duo BC, AC, æqualia rectangulo gemino B C D, &

duo-

duobus quadratis B D, D A, quibus est æquale quadratum A B. Ergo solum quadratum A B, minus est duobus quadratis B C, A C, prædicto gemino rectangulo B C D.

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo A, æquale quadratum exhibere.



PER 42. vel 45 primi fiat rectilineo A æquale rectangulum B D, ipsiq; C B sumatur æqualis C F; & centro G, circa totam D F, describatur semicirculus, eumque secet B C in H. Dico quadratum C H, æquale esse rectangulo D B, hoc est rectilineo A. Rectangulum enim D C F, hoc est D B, vna cum quadrato G C, æquale est, per 5. quadrato G H. Sed huic sunt per 47. primi, æqualia quadrata C H, C G. Ergo hæc duo quadrata, sunt æqualia dicto rectangulo D B, & quadrato G C; demptoque communi quadrato G C, remanebit quadratum C H æquale rectangulo D G, hoc est, rectilineo A.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

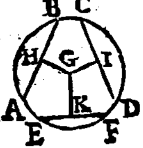
DEFINITIONES.

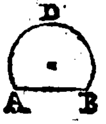
1 AEquales circuli sunt, quorum diametri, vel semidiametri sunt æquales.

2 Linea recta tangit circulum, quem tangendo non secat.

3 Circulus circulum tangit, quem tangendo non secat.

4 A B, C D dicuntur æqualiter distare à centro G, cum perpendiculares G H, G I, sunt æquales. Cum vero v. g. perpendicularis G K, maior est quàm GH, dicitur E F, magis distare à centro, quàm A B.

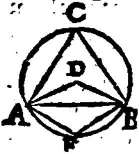




6 Segmentum circuli, est figura, quæ sub recta linea, & peripheria circuli comprehenditur.

6 Segmenti autem angulus est, qui fit à recta, & peripheria; qualis est angulus quem facit peripheria A D B, cum recta A B, ad punctum A, vel B.

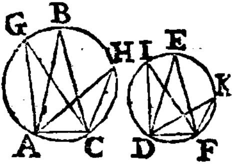
7 Angulus in segmento v.g. in segmento A C B A, est angulus rectilineus A C B, cum angulus C est ad peripheriam, & latera C A, C B. pertingunt ad terminos basis AB.



8 Tam angulus rectilineus ACB ad peripheriam quam A D B ad centrum, dicitur insistere peripheriæ AB, quam intercipiunt lineæ rectæ continentes angulos C, D.

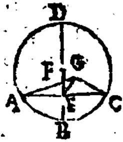
9 Figura autem mixta A B D, & contenta peripheria A B, & duabus rectis A D, B D coeuntibus in centro D, appellatur Sector.

10 Similia circuli segmenta sunt, in quibus anguli iuxta definit. 7. sunt æquales, & satis est si vel vnus ABC, sit æqualis vni D E F, quia per 21. huius etiam reliqui sunt æquales, quia omnes in eodem segmento sunt æquales.



PROPOS. 1. PROBL. 1.

Dati circuli centrum reperire.



RECta B D, secans aliam AC bifariam, & ad angulos rectos in E, secetur bifariam in F. Dico F, esse centrum. Si enim F non est centrum, sit aliud G, extra ipsam BD. recta enim BD, semel tantum secatur bifariam in puncto F. Nectantur GA, GC, GE, eruntque duo latera G E, EA, æqualia duobus G E, E C, & per 15. def. primi basis GA, basi GC. ergo per 8. primi GEC, GEA, sunt æquales, & recti, & rectus GEC, æqualis recto DEC; quod est absurdum.

Coroll. Ergo in quauis recta, quæ aliam secat bifariam, & ad angulos rectos, est centrum circuli; atque adeo in communi earundem concursu.

PROPOS. 2. THEOR. 1.

Recta A B, nectens duo puncta peripheriæ A B, cadit intra circulum.

EX centro C, ad A B ducantur semidiametri C A, CB; & ad quoduis aliud

aliud punctum D, recta C D. Erunt igitur per 5. primi, C AB, C B A æquales. Est autem per 16. primi CDA maior C B A, ergo etiam maior quàm C A D; ideoque per 19. primi C D minor semidiametro C A.

Coroll. Ergo linea tangens, tangit circulum in vnico puncto.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Diameter C A E secans aliam B D, non per centrum ductam bifariam, secat ad angulos rectos: & vice versa, secans ad angulos rectos; secat bifariam.

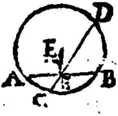
IN prima enim hypothesi duo latera A F, F B sunt æqualia duobus A F, F D, & basis AB, basi A D. ergo per 8. primi angulus AFB æqualis est angulo AFD.

In secunda, præter angulos rectos ad F, erunt per 5. primi æquales A B D, ADB, & latus AF istis oppositum commune, ergo per 26. primi, latus FB erit æquale lateri F D.

Coroll. Eodem modo in omni triangulo isosceli A B D; recta A F secans biriam basim B D, secat ipsam ad angulos rectos; & secans ad angulos rectos, secat bifariam.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

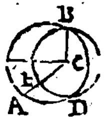
Extra centrum, nullæ lineæ se mutuo secant bifariam.



SI enim A B, C D sectæ essent bifariam in E; recta F E, ducta ex centro F, esset per 3. perpendicularis ad vtramque, & anguli F E A, F E C, essent æquales, quod est absurdum.

PROPOS. 5. THEOR. 4.

Circuli se mutuo secantes non habent idem centrum.

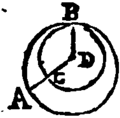


SI fieri potest, commune centrum sit C. Ergo CB, erit semidiameter communis, eique erunt æquales aliæ C A, C E; ideoque æquales inter se, quod est absurdum.

PRO-

PROPOS. 6. THOR. 5.

Etiam se mutuo tangentium, non est idem centrum.



PRopter eandem causam, quia D B, esset communis, & D A, D C, æquales essent eidem D B, & æquales inter se.

PROPOS. 7. THEOR. 6.

Si ex puncto excentrico I, educantur AFIB, per centrum F, & alia IC, ID, IE, vtcumque: erit IFA omnium maxima; IB, minima; IC maior ID, & eidem v. g. IE vna tantum poterit esse æqualis ex altera parte maxima, vel minima.

PRimo. FI, FC sunt per 20. primi, maiores I C sed FI, F C sunt æquales F I, F A. Ergo IA, maior est I C. &c.

Secundo I F, FC, sunt æquales IF, F D & angulus IFC, maior IFD. ergo per 24 primi IC maior quàm ID, &c.

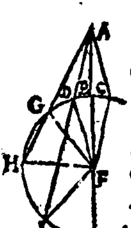
Tertio IF, IE, sunt maiores FE, hoc est FB. dempa igitur communi IF, remanet I E maior I B.

Quar-

Quarto si angulo B F E, fiat æqualis B FG: erunt circa ipsos latera IF, FE æqualia lateribus IF, FG. ergo per 4. primi & basis I E, basi I G, & nulla alia. reliquæ enim omnes sunt maiores vel minores, ex præmissis.

PROPOS. 8. THEOR. 7.

Ex puncto A extra circulum posito, ducantur quotcunque rectæ A B F E per centrum F, A D I, AGH vtcumque, tam ad concauam peripheriam, quam ad conuexam: Dico A E, esse maximam eductarum ad concauam; A B, minimam eductarum ad conuexam; A I, maiorem esse A H, & A G maiorem A D: ipsique v. g. A D, vnam tantum aliam posse esse æqualem.



PRimo. A F, FI, sunt per 20, primi, maiores A I. ergo & AFE, quæ est æqualis ipsis AF, FI, &c.

Secundo. A D, D F, sunt maiores AF. ergo demptis æqualibus FD, F B; remanebit A D, maior quàm AB &c.

Tertio A F, FI sunt æquales A F, F H; sed angulus A FI, maior est A F H. Ergo per 24. primi AI, maior quàm AH &c.

Quar-

Quarto. duæ A D, D F, sunt per 21. primi, minores duabus AG, GF, & GF, DF, sunt æquales. ergo AD, minor quàm A G, &c.

Quinto. angulus A F C, sit æqualis A F D. ergo per 4. primi A D, erit æqualis A C, quia circa æquales angulos latera, AF, FD, sunt æqualia lateribus AF, FC.

PROPOS. 9. THEOR. 8.

Tres rectæ A B, A C, A D, sint æquales: Dico A esse centrum.

Rectæ CB, C D, secentur bifariam in E, F; & ducantur AE, AF; eruntque duo latera AE, E B, æqualia duobus AE, EC, & basis A B, æqualis A C. Ergo per 8. primi anguli A EB, AEC, sunt æquales, & recti: & per coroll. primæ huius, in EA, erit centrum circuli; sed propter eandem causam debet esse in FA. ergo centrum est A.

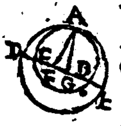
PROPOS. 10. THEOR. 9.

Circulus circulum secat dumtaxat in duobus punctis.

SI enim fieri poteſt ſint tria puncta B, A, C; & centrum vnius ſit D. Cum ergo tria puncta B, A, C, ſint communia; erunt etiam ad alterius circuli peripheriam tres rectæ D B, D A, D C, æquales; ideoque D centrum erit vtriuſque, quod eſt contra 5. huius.

PROPOS. 11. THEOR. 10.

Recta coniungens centra duorum circulorum ſe mutuo tangensium interius, tranſit per contactum.

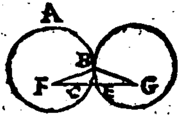


PVnctum contactus ſit A, centrum interioris circuli G, exterioris F; & recta F G, ſi fieri poteſt non tranſeat per A, ſed interiorem ſecet in B, exteriorem in E. Eruntque GA, GB, æquales, adiectaque FG, erunt AG, GF æquales FB; ſed A G, G F ſunt maiores A F, per 20. primi. ergo etiam F B, maior eſt quàm A F, hoc eſt, maior quàm FE. quod eſt abſurdum. idem ſequeretur ex altera parte, ſi F, poneretur eſſe centrum interioris, & G exterioris, etiamſi puncta C, D, vel B, E, ponerentur coincidere in vnum.

PRO-

PROPOS. 12. THEOR. 11.

Recta coniungens centra duorum circulorum se mutuo tangentium exterius; transit per contactum.

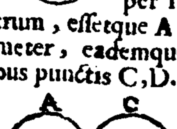


SI enim FG, coniungens centra F,G, nō transit per contactum B, sed secet circulos in C, E. erunt duo latera FB, G B, vel æqualia, vel minora tertio F C E B, quod est contra 20. primi.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

Contactus circulorum; est vnicum punctum.

SI duo essent puncta contactus v.g. A, B; recta C D, coniungens cētra C,D, per 11. huius transire per vtrum, essetque A C D B, communis diameter, eademque secta bifariam in duobus punctis C,D. quod est absurdum.



Si autem duo circuli se mutuo tangerent in duobus punctis B,F, exterius, vna, eademque D E, DE, transiret per vtrumque, per 12. vel certe FD, FE, essent æquales ipsi DFE, quæ omnia sunt absurda.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

Ad equales AB, CD, cadunt æquales perpendiculares EF, EG; & AB, CD, sunt æquales: quando perpendiculares EF, EG sunt æquales.

Perpendiculares enim EF, EG, secant AB, CD, bifariam per 3. huius; & ideo AF, DG, semisses æqualium, sunt æquales. & quia æqualibus quadratis semidiametrorum EA, ED æqualia sunt per 47. primi, quadrata AF, FE; & quadrata DG, GE: necesse est hæc duo, illis duobus esse æqualia, & demptis æqualibus AF, DG, remanere æqualia quadrata EF, EG, & rectas EF, EG æquales.

Vice versa, si ex duobus quadratis EF, FA, quæ sunt æqualia duobus EG, GD, quia sunt æqualia quadratis EA, ED; tollantur æqualia EF, EG; remanent æqualia quadrata FA, GD, ipsæque AF, DG æquales. Est autem per 3. huius AF medietas totius AB, & DG medietas totius DC. ergo AB, DC sunt æquales.

PRO-

PROPOS. 15. THEOR. 14.

Applicatarum in circulo maxima est diameter. v.g. A G F; & H I centro propinquior, maior est remotiore C D.

DVcantur perpendiculares GK. GL, quarum illa erit per defin. 4. huius minor illa, & ideo ex GL poterit abscindi GM, æqualis G K; & BE, æquidistans ipsi C D, erit per 14. huius æqualis I H. Nectantur præterea GB, GC, GD, GE; eruntque per 20. primi, duo latera GB, GE maiora reliquo BE, sed GB, GE sunt æquales diametro AF. Ergo.

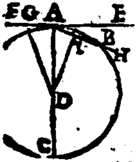
Quod autem H I, sit maior C D; patet per 24. primi, quia latera GB, GE, sunt æqualia GC, GD, & angulus BGE, maior CGD.

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Recta F A E diametro A D C perpendicularis in A, tota cadit extra circulum: & angulus contingentiæ E A B, non potest diuidi per lineam rectam: Angulus etiam semicirculi C A B maior est, & reliquus

A

liquus contingentiæ minor omni angulo rectilineo acuto.



PRimo. Ad quodlibet pũctum G, rectæ E F, ducatur ex centro D, recta DG. Quoniam igitur rectus A, maior est acuto D G A; erit per 19. primi DG, maior semidiametro D A; & G, extra circulum &c.

Secundo. Dico rectam A H, eductam ex A, vtcunque infra A E, secare circulum. Angulo enim E A H, fieri potest æqualis A D I, ad centrum D, per 23. primi, & D I, concurrit necessario cum AH, v.g. in I, quia duo IAD, IDA, sunt minores duobus rectis, quia sunt æquales recto D A E, & ideo necesse est D I A, esse rectum, & per 19. primi DI, minorem esse semidiametro D A, atque adeo punctum I, nec non totam A I, esse intra circulum; & rectam A H nequaquam cadere inter rectam AE, & peripheriam AB.

Tertio. Dico angulum semicirculi C AB, maiorem esse acuto CAH. quia præter acutum, continet angulum segmenti, quod abscindit eadem A H.

Quarto. Dico angulum contingentiæ contentum recta A E, & peripheria A B, minorem esse quolibet acuto E A H. Hic

enim

enim continet angulum contingentiæ, & simul angulum segmenti abscissi à recta AH.

Coroll. Hinc patet rectam E F, si cum diametro C A, ad punctum A, constituat rectos CAE, CAF; tangere circulum in puncto A.

PROPOS. 17. PROBL. 2.

Ex A, ducere rectam, quæ tangat circulum BC.

CEntro D interuallo DA, describatur alius circulus, vel arcus A E, eumque secet perpendicularis B E, in E; & D E, secet circulum C: dico A C, tangere circulum in C. Est enim per 4. primi angulus DCA, æqualis recto D B E, quia circa angulum D duo latera D C, D A, sunt æqualia duobus D B, D E.

PROPOS. 18. THEOR. 16.

A B tangat circulum in C: Dico semidiametrum E C, esse perpendicularem ad A B.

Nam

NAm si alia E D, esset perpendicularis; esset EDC, rectus, & ECD, acutus, & per 19. primi, ED minor semidiametro E C, punctumque D, intra circulum: quod est contra hypothesim.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Recta C E continuat cum tangente A B, angulum rectum A C E. Dico C E transire per centrum.

SI enim E, non est centrum, sit F. ergo per antecedentem rectus F C A, æqualis erit recto E C A. quod est absurdum.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

Angulus B D C, ad centrum D; duplus est B A C, anguli ad peripheriam; cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN primo casu anguli E DC, EDB, sunt dupli angulorum D A C, DAB: quia triangula D A C, DAB, sunt Isoscelia; & EDC, EDB, sunt per

per 32. primi æquales duobus internis, & oppositis.

In secundo, propter eandem causam BDC, duplus est anguli BAC.

In tertio, totus EDC, duplus est totius EAC; & ablatus EDB, ablati EAB; ergo reliquus BDC, duplus reliqui BAC.

?ROPOS. 21. THEOR. 19.

i in eodem segmento sunt anguli, quales unt ADB, ACB, AEB; sunt inter 'e æquales.

Ratio est, quia vnus & idẽ angulus AFB, ad centrum, est duplus angulorum, ADB, ACB, AEB.

Vnde sapiẽter Euclides de-it vltima definitione similitudinem ;mentorum, per æqualitatem huiusmo- angulorum.

Ex Scholio.

Recta AB, subtendit ad easdem partes duos angulos æquales ADB, AEB: Dico puncta A, B, E, D esse ad peripheriam eiusdem circuli.

culi. Si enim peripheria ABE, non transit per D, secet rectam BD, vltra vel citra punctum D. in F ducta igitur A F, erunt per demonstrata anguli A F B, A E B, in eodem segmento ABFA, æquales, & consequenter etiam A F B, A D B æquales. quod est absurdum, vnus enim est altero maior per 16. primi, quia vnus est externus, & alter internus & oppositus.

PROPOS 22. THEOR. 20.

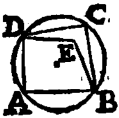
Quadrilateri A B C D inscripti circulo, anguli oppositi sunt æquales duobus rectis.

ANguli enim ACB, ADB, sunt æquales per 21. huius, & similiter ABD, ACD. & idcirco ABD, A D B simul æquales toti BCD: adiectoque B A D; duo BCD, BAD, sunt æquales tribus angulis trianguli ABD; quos constat esse duobus rectis æquales per 32. primi, &c. Simili enim modo ostenditur idem de duobus angulis A B C, A D C.

Ex Scholio.

In quadrilatero A B C D, duo anguli A, C, vel duo B, D, sint æquales duobus recti, Dico quatuor puncta A, B, C, D, esse ad peripheriam circuli.

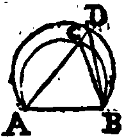
Si



SI enim circulus ABD, nō transit per C, transeat vltra vel citra, & in eo sumatur aliquod punctum E, quod non sit in rectis B C, D C. Erunt igitur per 22. iam demonstratam etiam duo anguli A, E æquales duobus rectis, & æquales duobus A, C; & dempto communi A, remanebunt æquales E & C, quod est contra 21. primi. ducta enim BD, erit angulus BED, vel intra vel extra triangulum B C D, ideoque vel maior, vel minor angulo C.

PROPOS. 23. THEOR. 21.

Segmenta similia, & super eadem basi constituta, sunt æqualia.



SI enim in superpositione non sibi penitus cōgruūt; aliqua recta A C D, secabit vnius peripheriam in C, alterius in D; fietque angulus externus A C B, maior interno C D B, quod est contra hypothesim, anguli enim similium segmentorum debent esse æquales.

PROPOS. 24. THEOR. 21.

Idem verum est quando bases sunt æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 3.

Dati segmenti A B C, centrum reperire.

Dvæ rectæ A B, A C, quæ non sunt parallelæ, secentur bifariam in D, E, & ex D, E erigantur perpendiculares D F, EF, in quibus necessario existit cẽtrum circuli per coroll. primæ huius, nimirum in communi concursu F.

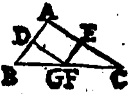
Eodem modo describitur circulus per quælibet alia tria puncta A, B, C, vel etiam circa triangulum: dummodo puncta non existant in vna linea recta.

Quod autem prædictę perpendiculares EF, DF, concurrant, probatur in sequenti lemmate.

Lemma.

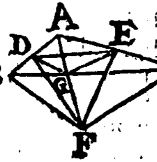
Perpendiculares secantes latera trianguli bifariam, concurrunt ad vnum punctum.

In



IN primo triãgulo ABC, angulus A est rectus; in secundo obtusus; & in tertio sunt omnes acuti. in omnibus autem, sectum est latus AD, bifariam in D, & D G pararella lateris A C, occurrit basi BC, in G; & GE est parallela A B; & ex his procreatur parallelogrammum A D G E, in q.to latera opposita D G, A E, & A D, GE, & D B, sunt æqualia per 34. primi; & per 29. angulus E G C, æqualis interno B, & G E C, G D B, æquales inter se; quia sunt æquales eidem A. Et quia angulis E G C, G E C adiacet latus G E, & BD ipsi G E æquale, adiacet duobus G BD, GDB; erit per 26. primi GC, æqualis GB, & G D, equalis E C; atque adeo E G, equalis ipsi A E. Atque hęc sunt communia.

2



3

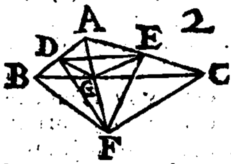
Iam vero in prima figura perpendiculares DF, EF, coincidunt cum parallelis D G, GE, eo quod etiã anguli GDB, GEC sint æquales recto A. Vnde constat etiam perpendiculares D F, E F concurrere, &

D 2 & con-

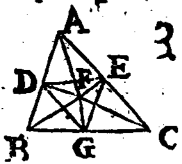
& concursum F esse punctum G, in quo basis BC, secta est bifariam: ita vt in hoc casu non sit opus ducere tertiam perpendicularem, quæ deberet erigi ex puncto G, super B C.

In secundo vero casu perpendiculares D F, E F, concurrunt infra B C. Cũ enim angulus GDB, æqualis sit obtuso A; & B D F sit rectus, recta D F, cadit necessario inter D G, & D B, & similiter E F cadit inter E C, E G: vnde concursus non potest non esse infra B C: concursum autem probat recta DE, quæ ex duobus rectis ad D, E demit duos ADE, A E D. & ideo reliqui F D E, F E D, sunt duobus rectis minores; ex quo sequitur concursus per 13. Axioma.

2



3



In tertio casu perpendiculares D F, E F, cadunt inter DA, DG, & inter A E, E G, quia anguli BDF, CEF sunt maiores angulis GDB, G E C, qui sunt æquales acuto A, & ideo concursus F est intra triangulum A B C.

Denique in vtroque casu tertia perpendicularis coincidit cum recta F G. Nam

pri-

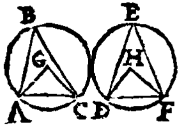
primo F B, est æqualis FA, per 4. primi; quia circa recto; FDA, FDB sunt duo latera FD, D A, æqualia duobus FD, D B. secundo F C, æqualis est eidem F A, eandem ob causam, assumendo triangula F E A, F E C. ergo etiam F C, est æqualis F B. sunt autem etiam duo latera F G, GB, æqualia duobus F G, G C. ergo per octauam primi, anguli FGB, FGC erunt æquales & recti. atque adeo omnes tres perpendiculares concurrent ad commune punctum F. quod erat demonstrandum.

Pro figuris regularibus plurium laterum ponitur aliud Lemma huic simile ad octauam propositionem quarti.

Ceterum in propositione 25. non est necesse vt rectæ A C, A B, habeant punctum A, commune, dummodo non sint parallelæ. Et licet hic concursus perpendicularium demonstratus sit duntaxat in triangulis; idem tamen sequitur si duæ lineæ ducantur vtcunque, dummodo non sint parallelæ quales sunt AH, CI. Nam productæ constituunt cum A C, triangulum A C B, & perpendiculares DG, FG concurrunt in G. ergo etiam perpendiculares KM, LM, quæ secant AH, C I, bifariam concurrunt alicubi in M, cum sint parallelæ ipsis D G, E G, &c.

PROPOS. 26. THEOR. 23.

In eadem, vel in æqualibus circulis anguli æquales insistunt æqualibus peripheriis, siue sint constituti ad centrum, siue ad peripheriam.



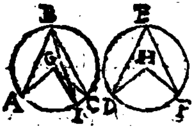
Sint primo æquales anguli ad centra G H. Cum igitur circa eosdem sint quatuor semidiametri æquales, erit per 4. primi basis A C, æqualis basi D F, & quia ijdem anguli G, H, sunt per 20. huius dupli ABC, D E F: ideoque super equalibus basibus segmenta ABC, DEF, similia, erunt per 24. huius eadem segmenta equalia, & peripheria ABC, DEF, necnon reliquæ AC, DF æquales.

Deinde si anguli B, E ponantur equales; necesse est etiam G, H esse æquales. ergo &c.

PROPOS. 27. THEOR. 24.

Quando arcus D F, A C sunt æquales, sunt quoque tam anguli ad centra G, H, quàm anguli B, E, ad peripheriam æquales.

Si

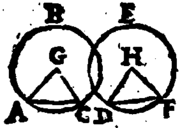


SI enim angulus A G C, esset maior DHF, ipsique D H F, fieret æqualis A G I, arcus A I, esset æqualis D F, per 26. huius, hoc est, ipsi A C, quod est absurdum.

Similis est ratio de angulis B, E.

PROPOS. 28. THEOR. 25.

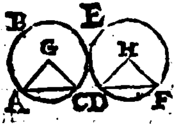
In eodem, vel æqualibus circulis, æquales rectæ subtendunt æquales peripherias.



ERunt enim per 8. primi anguli G, H, æquales, quia circa ipsos sunt quatuor semidiametri ęquales; & insuper basis A C, ponitur æqualis basi DF. ergo per 26. huius, arcus A C, est æqualis DF, & reliquus ABC, reliquo DEF.

PROPOS. 29. THEOR. 26.

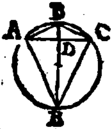
Peripherias æquales subtendunt rectæ æquales.



QVia per 27. huius erit etiam angulus G, æqualis H, ſi peripheria A C, ſit æqualis D F, & per 4. primi baſis AC, ęqualis baſi DF, propter quatuor ſemidiametros ęquales.

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Datam peripheriam A B C, biſariam ſecare.



HOc præſtat recta B D B, quæ ſubtenſam A C, ſecat biſariam, & ad angulos rectos in D. quia circa rectos ſunt latera BD, DA, æqualia lateribus BD, DC. Et idcirco per 4. primi baſis AB, æqualis BC; & per 28. huius, arcus B A, ęqualis B C.

PROPOS. 31. THEOR. 27.

Angulus in ſemicirculo rectus eſt; in maiore ſegmento minor; in minore maior recto. Angulus quoque ſegmenti maioris maior eſt recto, & minoris minor.

DIco primo angulum A B C in ſemicirculo ABC, eſſe rectum. Angu lus

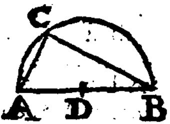
enim A D B, duplus est DBC; & CDB, duplus DBA, eo quod triangula ABD, DBC, sint Isoscelia. sed illi dupli sunt æquales duobus rectis, ergo D B A, DBC, constituent rectum A B C.

Dico 2. in maiori segmento CAB, angulos esse acutos. In eodem enim segmento est quoque angulus B A C, qui est acutus, quia A B C, est rectus. huic autem BAC, sunt omnes reliqui in eodem segmento æquales per 21. huius. Ergo.

Dico 3. angulum B E C, in minori segmento B E C, esse obtusum. In quadrilatero enim A B E C, oppositi E, A, sunt æquales duobus rectis per 22. huius, & A est acutus. ergo E obtusus.

Denique reliquæ duę partes sunt manifestæ; quia angulus segmenti maioris, nempe angulus mixtus CBA, componitur ex recto ABC, & angulo segmenti quod abscindit recta AB: Et protracta AB, in F, fit angulus rectus CBF, maior angulo segmenti minoris nempe mixto C B E.

Ex Scholio.

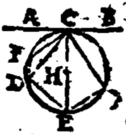


Vice versa, dico angulum rectum, v. g. ACB, esse ad semicirculum, hoc est, si recta AB, ducta vtcunque, secetur bifariam in D, & centro D, circa AB describatur semicirculus, ipsum transire per C.

SI enim punctum C esset in alio segmento, angulus A C B, non esset rectus; sed obtusus, vel acutus, vt demonstratum est.

PROPOS. 32. THEOR. 28.

Recta A B, tangat circulum in C, & C D, secet eundem in C, D: Dico angulo ACD, aequales esse angulos in alterno segmento D E C; & angulo D C B, angulos in alterno segmento C F D.



SI C D, non transit per centrum H, transeat C H E: eruntque per 18. huius E C A, E C B, recti, & ipsis erunt æquales C G E, C D E, in segmentis, hoc est, in semicirculis quos abscindit diameter C E.

Dein-

Deinde quoniam CDE, rectus est; erũt DEC, DCE, vni recto, nempe toti E C A æquales, per 32. primi, demptoque communi DCE, reliquus DEC, in alterno segmento, ęqualis erit reliquo A C D, ad punctum contactus C.

Denique in quadrilatero EDFC, anguli oppositi DFC, CED, sunt per 22. huius æquales duobus rectis, hoc est, duobus DCA, DCB. Sed DCA, æqualis est D E C, ergo reliquus D F C, in alterno segmento, est æqualis reliquo D C B, ad contactum C.

PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta A B, describere segmentum circuli, capiens angulum dato æqualem.

PRimo, quando angulus datus est rectus, certum est segmentum esse semicirculum.

Secundo, quando angulus datus est acutus v. g. C, tunc constituatur ipsi æqualis B A D, & ex A, super A D erigatur perpendicularis A E, & in puncto B fiat angulus ABF, ęqualis B A E: eruntque FA, FB, æquales, & F, centrum circuli AGBK; & angulus AGB, in segmento ABGA, erit ęqualis angulo BAD, ad punctum contactus A. Nam propter rectum DAE, recta DA, tangit circulum per 16. huius. Est autem B A D, æqualis C. ergo etiam AGB, est æqualis C.

Tertio, quando angulus datus v. g. H, est obtusus, accipiatur eius loco acutus C. Descripto enim segmento AGB; habebitur reliquum AKB, & angulus K, erit æqualis H, quia per 22. huius G, & H, æquivalent duobus rectis, hoc est, duobus C, H. C autem est æqualis G, ergo K, æqualis H.

PROPOS. 34. PROBL. 6.

A dato circulo abscindere segmentum, quod capiat angulum æqualem dato, v. g. D.

Ducatur tangens EAF, & angulus FAC, fiat æqualis D: angulus enim ABC, in alterno segmento CBA, erit per 32. huius æqualis angulo EAC, hoc est, angulo D.

PROPOS. 35. THEOR. 29.

Si in circulo duæ rectæ se mutuo secent: rectangula sub segmentis erunt æqualia.

PRimo, quando interſectio fit in centro, omnia ſegmenta ſunt ſemidiametri, & rectangula ſub ſegmentis ſunt quadrata æqualia.

Secundo quando C D, tranſit per centrum F, ſecat A B, biſariam, atque adeo ad angulos rectos E, per 3. huius. Tunc recta C D, erit ſecta biſariam in F, & non biſariam in E: & per 5. ſecundi, rectangulum CED, vna cum quadrato EF, erit æquale quadrato F D, hoc eſt quadrato F B, & per Pythagoricam, quadratis B E, E F: ablatoque communi E F, remanebit quadratum B E æquale rectangulo CED. Quadratum autem B E, eſt idem cum rectangulo AEB. ergo rectangulum ſub ſegmentis A E, E B, eſt ęquale rectangulo contento ſub ſegmentis C E, E D.

Tertio, Quando CD, tranſiens per centrum F, non ſecat biſariam AB, in E, ſecabitur biſariam in alio puncto G, FG, erit ad AB, perpendicularis; & per 5. ſecundi

rectangulum A E B, vna cum quadrato EG, erit æquale quadrato GB; adiectoque quadrato GF, erit idem rectangulum A E B, cum quadratis E G, G F, hoc eſt, cum quadrato E F, æquale quadratis GB, GF, hoc eſt, quadrato FB.

Huic

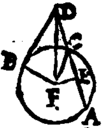
Huic autem quadrato FB, seu FD, ostendimus æquale esse rectangulum CED, vna cum eodem quadrato EF, ablato igitur quadrato E F; remanebunt rectangula C E D, A E B, æqualia.

Quarto, & vltimo, neutra transeat per centrum: dico nihilominus rectangula AEB, C E D, esse ęqualia, quia vtrumque debet esse æquale rectangulo GEH, per casus antecedentes, ducendo G E H, per centrum F.

PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si ex puncto D, recta D B, tangat circulum; & alia DCA, secet: Rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

TRanseat primo recta D C A, per centrum F. Quoniam igitur A C, secta est bifariam in F, ipsique addita C D: ergo per 6. secundi, rectangulum A D C, cum quadrato FC, æquale est quadrato FD, hoc est, per 47. primi, quadratis DB, BF. Sunt autem FC, F B, ęqualia. ergo & reliqua, nimirum rectangulum ADC, & quadratum D B, sunt æqualia.



Secundo, recta DCA, non transeat per centrum F, sed recta FE, sit ad ipsam perpendicularis, atque adeo per 3. huius, secet eius segmentum GD, bifariam in E. Quare iterum per 5. secundi, rectangulum ADC, cum quadrato EC, erat æquale quadrato ED: adiectoque quadrato EF; erit idem rectangulum ADC, cum duobus quadratis EC, EF, hoc est, cum quadrato FC, æquale quadratis ED, EF, hoc est, quadrato FD. Quadrato autem FD, sunt æqualia quadrata DB, BF, & BF, est æquale FC: ergo etiam reliqua erunt æqualia: nempe rectangulum ADC, & quadratum DB.

Coroll. 1. Hinc manifestum est; si à puncto D, ducantur plurimæ rectæ circulum secantes; rectangula sub totis, & sub segmentis inter punctum, & conuexam peripheriam interceptis, esse æqualia: quia omnia sunt eidem quadrato tangentis æqualia.

Coroll. 2. Constat etiam duas tangentes ex eodem puncto ductas, esse equales.

Coroll. 3. Ex eodem puncto solum duci duas tangentes.

Coroll. 4. Si duæ rectæ æquales circulo incidant, & vna tangat, etiam aliam tangere.

PRO-

PROPOS. 37. PROBL. 31.

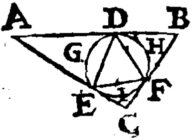
Quod si constet rectangulum A E C, æquale esse quadrato D B: recta D B, incidens circulo erit tangens.

DVcatur tangens DF, & nectatur E F; quæ ad D F, erit per 19. perpendicularis, & quia eidem rectangulo A D C, æqualia sunt quadrata DF, DB, erunt etiam ipsa æqualia, & rectæ D F; D B, æquales. Cumque duo latera E F, F D, sint æqualia duobus E B, B D, & E D, sit basis communis: erit per 8. primi angulus EBD, æqualis recto F. & ideo per 16. huius DB, tangens circulum, quod erat demonstrandum.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.



1 Figura rectilinea v. g. DEF dicitur inscribi figuræ ABC: cum anguli D, E, F attingunt latera figuræ ABC.

2 ABC, dicitur circumscribi figuræ DEF: cum latera figuræ ABC, attingunt angulos figuræ DEF.

3 Vt rectilineum DEF dicatur inscriptum circulo, debent anguli D, E, F, esse ad peripheriam GHI.

4 Vt autem rectilineum ABC, dicatur circulo circumscriptum; debent latera rectilinei, tangere circulum.

5 Item circulus erit figuræ ABC, inscriptus; cum figuræ latera contigerint circulum.

6 De-

6 Denique circulus erit figuræ D E F, circumſcriptus; cum peripheria tranſierit per angulos D,E,F.

7 Recta linea dicitur coaptari circulo; cum eius termini fuerint ad circuli peripheriam.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

In dato circulo, data recta D, (quando id fieri poterit iuxta 15. tertij) cooptare æqualem.

EX diametro B C abſcindatur BE, æqualis D, per 3. primi; & centro B, interuallo BE, deſcribatur arcus ſecans datum circulum in A. Recta enim BA, erit æqualis B E, per defin. circuli, & æqnalis ipſi D, per primam pronunc.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

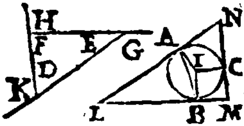
In dato circulo inſcribere triangulum, dato triangulo DEF æquiangulum.

AD punctum contactus A, cum tangente GH, fiat angulus G A B, æqualis F; & H A C, æqualis E. Dico triangulum ABC, ipſi DEF, eſſe æquianguangulum. Angulus enim C, est per 32. tertij, æqualis G A B, seu F; angulus B, æqualis H A C, hoc est E. ergo per 32. primi, etiam reliquus reliquo.

Nota: Si hoc modo inscribatur æquilaterum, circulum diuidi in tres partes æquales.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circulo circumscribere triangulum, cuicumque DEF æquiangulum.



EXternis G, H, fiant in centro I, æquales A I B, B I C: eritque reliquus AIC, æqualis reliquo K, quia per 15. primi, omnes anguli ad I, & per 32. eiusdem omnes externi G, H, K, sunt æquales quatuor rectis. Demum ducantur per A, B, C, tres tangentes, quæ concurrent ad tria puncta L, M, N. Cum enim IAL, IBL, sint recti; erunt B A L, ABL, minores duobus rectis; & ideo per 23. Axioma A L, B L, concurreent versus L: & ita de reliquis. Dico angulum L, æqualem esse E. Omnes enim anguli quadrilateri AIBL, sunt per 32. primi æquales quatuor rectis. cum igitur duo ad A, B, sint recti: reliqui I &

L,

L, erant æquales duobus rectis, hoc est duobus G, EL. sed AIB, & G sunt æquales, ergo etiam L & E, &c. eadem enim est ratio de reliquis.

Nota in triangulo æquilatero, & similiter in omnibus aliis figuris regularibus, omnes externos esse inter se æquales. Atque ita etiam anguli ad centrum I, erunt æquales, & per ipsos secabitur circulus in partes æquales.

PROPOS. 4. PROBL. 4.

Intra triangulum A E C, circulum describere.

DVo anguli B,C secentur bifariam, & BD, CD, concurrant ad D: Dico tres perpẽdiculares DE, DF, DG, esse æquales &c. Anguli enim D E B, D B E, sunt æquales D F B, D B F; & DB rectis E, F oppositum, est commune, ergo per 26. primi, perpendicularis D E, æqualis est D F. Est autem eidem etiam æqualis DG: eo quod C, sectus sit bifariam, & F, G, sint recti, & C D, communis. ergo omnes tres sunt æquales, & circulus descriptus per E, F, G, tanget latera per 16. tertii.

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Triangulo A B C, circulum circumscribere.

HOc problema re ipsa non differt à prop. 25. tertij, vbi docuimus per tria puncta data, qualia hic sunt A,B,C, describere circulum. perpendiculares enim D F, E F, quæ secant quælibet duo latera A B, A C, bifariam; necessario concurrunt in quæsito centro F.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

Dato circulo quadratum inscribere.

DVæ diametri AC, BD, sint inuicem perpendiculares in cẽtro E: eritque quadrilaterum ABCD, recte quadratum. Quatuor enim angulis rectis ad centrum respondent per 26. tertij, quatuor arcus æquales; & quatuor arcus æquales subtendunt quatuor lineæ æquales AB,BC,CD,DA per 29. eiusdem. Denique quatuor anguli ad A,B,C, D,per 31. tertij, sunt æquales; quia sunt in quatuor semicirculis.

PRO-

PROPOS. 10. PROBL. 10.

Estque Lemma ad sequentem.

Triangulum Isosceles constituere, cuius vterque æqualium angulorum sit duplus reliqui.

PEr 11. secundi secetur quæuis A B, ita, vt, rectangulum A B C, æquale sit quadrato A C; & centro A, interuallo AB describatur circulus, vel arcus, eique applicetur per 1. huius B D, æqualis A C, & per 5. huius describatur circulus circa triangulum A D C, quem recta BD, tanget in D, per 37. tertij; quia rectangulum A B C, equale est quadrato B D, eo quod B D æqualis sit AC, & per 32. eiusdem, angulo BDC, ad contactum D, æqualis erit in alterno segmento angulus C A D; adiectoque communi CDA, erunt duo CAD, CDA, æquales toti ADB; & quia duobus CAD, CDA, æqualis est per 32. primi externus DCB; huic erit æqualis ADB, seu ABD; & in triangulo DCB, erunt per 6. primi, D B, D C, æquales. estque D B, æqualis C A; ergo C A, æqualis C D, & per 5. primi anguli C A D, C D A, æquales; &

DCB,

DCB, necnon A D B, vel ABD, duplus ipsius B A D. ergo &c.

PROPOS. 11. PROBL. 11.

Circulo Pentagonum Regulare inscribere.

PEr secũdam huius inscribatur circulo triangulũ EFG, æquiangulum triangulo ABD, propositionis antecedentis, & G H, F I, secent angulos EFG, EGF, bifariam. Hac enim ratione erũt omnes quinque anguli FEG, IFE, IFG, HGE, H G F, æquales; quia EFG, EGF, sunt dupli FEG: & ideo per 26. tertij quinque arcus FG, EI, IG, EH, H F, sunt æquales; & quinque rectæ ipsos subtendentes æquales per 29. eiusdem; & omnes quinque anguli æquales per 27. quia sicut H E I, insistit tribus arcubus æqualibus H F G I, ita quoque reliqui insistunt totidem æqualibus.

PROPOS. 15. PROBL. 15.

Circulo Hexagonum regulare inscribere.

SEmidiametro A G, applicentur æquales AB, AC, eruntque AGC, ABG, trian-

triangula æquilatera; & tam angulus AGC, quam AGB, erit per 32. primi vna tertia duorum rectorum. Producta autem CG, in E, fiunt omnes tres AGC, AGB, B G E æquales duobus rectis. ergo BGE, erit reliqua pars tertia, & omnes tres erunt ęquales: & totidem alij erunt eisdem ęquales ad verticem G. & ideo insistent sex arcubus ęqualibus, & arcus subtendent sex rectę ęquales; & omnes sex anguli erunt ęquales; quia sicut E D F, insistit quatuor arcubus æqualibus E B A C F, ita reliqui.

PROPOS. 16. PROBL. 16.

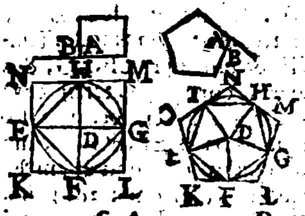
Circulo inscribere Quintodecagonum regulare,

INscribatur triangulum ęquilaterum ABC, per 2. huius, & per 11. pentagonum ADEFG. Qualium igitur partium 15. est tota circumferentia, talium 5. erit AB; & talium trium A G, & A G F, 6. atque adeo talium partium erit vna, arcus B F, *hoc est* vna decimaquinta,

PRO-

PROPOS. & PROBL: 7. & 12.

Circulo Quadratum, & Pentagonum regulare circumscribere.



VT praxis sit omnibus figuris, ipsique etiam triangulo cõmunis, angulus quadrati, vel pẽtagoni internus sit A, externus B; quibus in figuris regularibus constat reliquos esse æquales; & externo B, fiant ad centrum D, æquales quatuor pro quadrato, & quinque pro pentagono, id quod potest fieri, quia omnes anguli externi cuiuscunque figuræ æquivalent quatuor rectis per 32. primi; & hoc ipso diuisus erit circulus in quatuor, vel quinque partes æquales, & lineæ subtendentes arcus æquales cõstituẽt quadratum EFGH, vel pẽtagonum EFGHI, regulare, & circulo inscriptum, vt patet ex demonstrationibus 6. & vndecimæ. Inuentis autem punctis E F G &c. circumscribitur circulo quadratum, vel pentagonum per tangentes, sicut in tertia circumscriptum est triangulum, & sicut ibi ita etiam

etiam hic demonstratur omnes angulos K, L M &c. esse æquales internis A, quia v. g. in quadrilatero E D F K, propter duos rectos E, F, reliqui duo D & k sunt æquales duobus rectis, hoc est duobus A, B, & quia D, factus est æqualis B, sequitur K, æqualem esse A. Latera vero KL, L M, &c. esse æqualia, probatur hoc modo. Tangentes KE, KF, & similiter LF, LG, &c. sunt æquales per 2. coroll. 36. tertij. ergo omnia triangula EKF, FLG, &c. sunt isoscelia, & ad æquales bases EF, FG &c. sunt anguli angulis æquales; eo quod etiam K, L, &c. sint æquales. & ideo per 26. primi erunt etiam omnia latera E K, K F, F L, &c. æqualia, nec non duo K F, F L, duobus L G, G M, &c. æqualia.

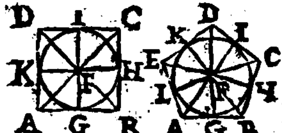
PROPOS. & PROBL. 8. & 13.

In Quadrato, & Pentagono, circulum inscribere.

TRiangulo inscriptus est circulus prop. 4. diuidendo duos angulos bifariam, id quod etiam habet locum in omnibus figuris regularibus. Rectæ enim BF, CF, diuidentes bifariam angulos v. g. B, C, concurrunt necessario intra figuram alicubi in F, per lemma quod sequitur; & perpendiculares F G, FH, FI, &c. ductæ ex puncto F, in singula latera sunt æquales;

les;

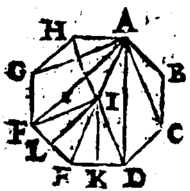
les; idque demonſtratur eodem modo, quo in quarta, quod attinet ad tres perpédiculares FG, F H, F I, pro reliquis vero præmonſtrandum eſt, etiam reliquas FD, FE, FA, ſecare reliquos angulos D, E, A bifariam.



Dico igitur angulū FDC equalem eſſe FBC. Nam circa æquales FCB, FCD, duo CF, CB, ſunt æqualia duobus lateribus C F, C D. ergo per 4. primi angulus CDF, æqualis eſt CBF. hic autem eſt medietas totius B, ipſique B æqualis eſt totus D: ergo etiam F D. ſecat bifariam angulum D. & ita de reliquis. eodem enim modo, & ordine proceditur ad reliquos, & tandem per 26. primi demonſtratur reliquas perpendiculares F K, F L, &c. æquales eſſe tribus FG, FH, F I. quia v. g. in triangulis FDI, FDK, præter rectos ad I, K, anguli ad D, ſunt æquales, & latus FD, rectis oppoſitum eſt commune. quare circulus deſcriptus centro F internallo F G, tranſit per reliqua puncta H, I, k, L, & in ijſdem tangit latera figuræ datæ.

Lemma.

In figura regulari, & primo in figura laterum numero parium v.g. in octogono: Dico primo, rectam A E, ductam ad angulos oppositos A, F, vtrumque angulum secare bifariam.



EX eodem enim puncto A, ducantur reliquæ rectæ ad reliquos angulos, ita vt fiant ad vtramque partem rectæ AE, tria triangula. Erunt primo duo triangula A GH, ACB, penitus ęqualia per 4. primi, quia circa ęquales angulos H, B, latera lateribus sunt ęqualia, hoc est basis AG erit ęqualis A C, & angulus H A G, angulo BAC; & HGA, angulo BCA: & isti duo dempti ex totis G, B, qui etiam sunt æquales, relinquunt alios duos AGF, A C D, æquales: Et circa istos erunt iterum duo latera duobus ęqualia, ideoq; per 4. & basis AF, ęqualis basi AD, & angulus FAG, ęqualis DAC, & G F A ęqualis C D A. Denique eodem modo demonstratur angulum AEF, æqualem esse angulo AED, & EAF, ipsi EAD. Patet igitur rectam A E.

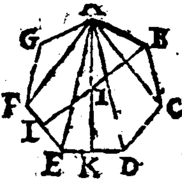
AE, secare angulum E bifariam; immo & angulum B A H; quia ad vtramque partem rectæ E A, sunt tres anguli tribus æquales.

Dico 2. rectam EI transire per A, si bifariam secet angulum E. Debet enim coincidere cum recta AE, quam ostendimus eundem angulum E secare bifariam.

Dico 3. si duæ rectę E I, D I, bifariam secent duos angulos E, D, ipsas concurrere intra figuram. Anguli enim figurarum regularium sunt minores duobus rectis. ergo & semisses IED, I D E; & ideo per 13. Axioma EI, DI, concurrent; & quia trāseunt per angulos oppositos, concurrunt intra figuram.

Dico 4. etiam duas perpendiculares LI, KI, quæ bifariam secant latera E F, E D, concurrere in I. Nectantur enim L I, k I. Cum igitur in triangulo IED, anguli sint æquales; erunt I E, I D, æquales: sunt autem etiam I k, k E ęqualia duobus lateribus I k, K D. ergo per 8. primi, anguli ad K, sunt recti. Rursus duo latera IE, EL, sunt æqualia duobus I E, E K, & anguli contenti ęquales. ergo per 4. primi angulus L, est ęqualis recto k. Quoniam igitur perpendiculares prędictæ necessario coincidunt cum istis L I, kI concurrunt etiam ipsæ in I.

In figura autem laterum imparium ♦



V.g. in Heptagono ♦ dico primo rectā A K, quæ secat angulum A, bifariam, secare etiam bifariam latus oppositum E D. Ducantur A F, A C, A E, A D: & secta E D, bifariam in K, nectatur A k. demonstrabitur, vt prius, A E, A D esse æquales. Sunt autem & A k, k E æqualia lateribus A k, k D, ergo per 8. primi anguli ad k, sunt recti, & k A E, k A D. ęquales. sunt autem iuxta demonstrationem pręcedentem, etiam reliqui duo E A F, F A G, ęquales duobus D A C, C A B. ergo & totus k A G, toti k A B, & ideo recta secans angulum A bifariam coincidit cum A k, secatque similiter latus E D bifariam, & ad angulos rectos in puncto k.

Dico 2. vice versā perpendicularem k I, secare bifariam angulum A. Coincidit enim necessario cum illa quam ostendimus secare bifariam angulum A.

Dico 3. Duas A I, B I, secantes bifariam angulos A, B, concurrere intra figuram v.g. in I. ratio est, quia debent secare latera opposita bifariam.

Dico

Dico 4. Ad idem punctum F coire perpendiculares LI, KI, si bifariam secent latera E F, E D. Vtraque enim coincidit necessario cum illis, quæ secant bifariam angulos A, B.

PROPOS. & PROBL. 9. & 14.

Quadrato, & Pentagono regulari circulum circumscribere.

SEcentur duo latera A B, B C bifariam in G, H, sintque GF, H F, perpendiculares, hoc est, idem fiat hic quod in propositione 5. factum est, in descriptione circuli circa triangulum: concurrent dictę perpendiculares intra figuram ad F, per lemma præmissum. & tres lineæ F A, F B, F C, ostendentur esse æquales sicut in 5. Nam circa ęquales angulos ad G, sunt latera lateribus æqualia, & similiter circa rectos ad H. Ergo per 4. primi F A, F C, sunt ęquales eidem F B, atque adeo omnes tres ęquales inter se; & triangula ABF, BCF, isoscelia habentia ęquales angulos ad bases AB, BC. Dico easdem FA, FB, FC, immo & reliquas F D, F E, secare bifariam angu-

 los

los A, B, C, D, E. Sunt enim B, FB C æqualia lateribus FB, B A, & basis FC, æqualis F A. ergo per 8. primi angulus F BC, æqualis est FBA. hoc est, vterque erit semissis totius B. Sunt autem iisdem æquales F A B, F C B. ergo etiam isti sunt semisses angulorum A, C. & quia rursus circa æquales F C B, F C D, latera F C, C B, æqualia sunt lateribus F C, C D: erit per 4. etiam F D, æqualis F B. & angulus FDC, æqualis F B C. hoc est, etiam FDC, erit semissis totius D, & FD erit æqualis F B. eodemque modo demonstrabitur F E, esse æqualem E C; & angulum FED. esse semissem totius E. &c. Cum igitur omnes rectæ FA, FB, FC, FD, FE, &c. sint æquales. si centro F, interuallo FA describatur circulus, transibit per reliqua puncta B, C, D, E, &c.

Scholium.

EX his patet inscriptionem quidem figurarum intra circulum esse plerisque figuris regularibus peculiarem, reliquas vero inscriptiones & circumscriptiones esse vniuersales.

Peculiares sunt omnes illæ, quas tradit Euclides, nimirum inscriptio triãguli, quadrati, pentagoni, hexagoni & quintidecogoni intra circulum, hoc est diuisio circuli

culi

culi in 3. 4. 5. 6. & 15. partes æquales: possunt tamen aliquæ esse vniuersales. Nam ex prædicta diuisione possunt fieri infinitæ aliæ, præter omnibus communi. nimirum per continuam bisectionem arcuū bifariam. Beneficio enim quadrati inscribitur octogonum: figura 16. laterum, 32. laterum, 64. 128. &c. & similiter beneficio Pentagoni figura 10. laterum, 20. 40. 80. &c. & ita de reliquis.

Inscriptio vero Heptagoni, Nonagoni, 11. laterum 13. &c. adhuc desideratur: quia nondum est repertum problema, & constructio trianguli isoscelis, cuius vterlibet angulorum æqualium sit triplus, quadruplus &c. reliqui anguli, quorum beneficio inscriberentur circulo heptagonum nonagonum &c, eo modo quo descriptum est pentagonum. Et beneficio heptagoni & nonagoni inscriberetur figura 63. laterum, sicut inscriptum fuit ab Euclide quintidecagonum.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

1 PARS, scilicet aliquota est, quæ metitur suum totum præcise.

2 Ipsum vero totum vocatur, multiplex suæ partis aliquotæ. v.g. 3. est pars aliquota numeri 12. & 12. multiplex numeri 3.

3 Ratio est duarum magnitudinum, eiusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

4 Rationum autē similitudo, est Proportio, vel potius proportionalitas. Exempli gratia relatio 2. ad 1. vel 4. ad 2. vocatur ratio; & quia eadem est relatio 2. ad 1. & 4. ad 2. idcirco inter 2. & 1, & inter 4. & 2. dicitur esse proportio.

5 Eiusdem generis magnitudines sunt illæ, quæ multiplicatæ se mutuo possunt superare. tales non sunt lineæ, & superficies; & corpus; angulus contingentiæ, & an-

& angulus rectilineus. Quid autem sentiendum sit de angulis segmentorum, consule Clauium. Neque verum est quod aliqui dicunt, recti ad curuum non esse proportionem. Sunt enim quadratæ nonnullæ lunulæ, & ab Archimede quadrata est à Parabola figura mixta ex curuo & recto.

6 Vt eadem sit ratio A ad B, & C ad D, debent æquemultiplices antecedentium A, C, v.g. E, F, quæcunque illæ sint, duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. respectu quarumcunque æquemultiplicium consequentium B, & D. hoc est respectu G, H; quæ etiam possunt esse duplæ, triplæ, &c. habere hanc conditionem, vt E, F vna sint æquales ipsis G, H, vel vna excedat, vel vna deficiant; hoc est, quando E est æqualis ipsi G, etiam F, sit æqualis H; quando E, est maior, quam G. etiam F sit maior quam H; & quando E, est minor quàm G, etiam F sit minor quàm H.

E	A	B	G
	3	6	
F	C	D	H
	4	8	

7 Eandem proportionem habentes magnitudines vocantur proportionales.

8 Quod si in exemplo defin. 6. deprehenderetur aliquam multiplicem E, maiorem quidem esse multiplici G, at æquemultiplicem F non esse maiorem H,

tunc A ad B, dicetur habere maiorem rationem quàm C ad D.

9 Termini proportionales vt minimum ſunt tres, poteſt enim conſequens terminus prioris rationis eſſe antecedens ſequentis, vt contingit in proportione continua. In diſcreta verò requiruntur vt minimum quatuor termini.

10 Non habet vſum in hoc libro, & reſpondet quintæ definitioni libri ſexti.

11 Homologæ magnitudines ſunt antecedentes antecedentibus; & conſequentes conſequentibus.

Sequuntur modi argumentandi in proportionibus, qui inferius ſuis locis demonſtrantur.

12 Primus modus eſt Ratio Alterna, ſeu permutata: Quando ex eo quod vt A ad B, ita eſt C ad D, infertur, ergo permutando, vt A ad C antecedens ad antecedentem, ita eſt B ad D conſequens ad conſequentem.

A B
C D

A C
B D

13 Secundus modus eſt ratio Interſa: Quando ex eo quod vt A ad B ita eſt C ad D, infertur, ergo conuertendo, vel inuertendo vt B, ad A, ita eſt ad D ad C.

A B
C D

B A
D C

14 Ter-

14 Tertius modus est Cōpositio rationis:

Quando ex eo quod vt A ad B ita est C ad D; infertur. Ergo componendo vt A B simul, ad eandem B, ita & C D simul ad eandem D.

A	B
C	D
AB	B
CD	D

15 Quartus modus est Diuisio rationis.

Quando ex eo, quod vt AB simul ad partem B, ita sunt CD simul, ad partem D; infertur. Ergo diuidendo vt pars A, ad eandem partem B, ita reliqua pars C, ad eandem D.

AB	B
CD	D
A	B
C	D

16 Quintus modus est Cōuersio rationis.

Quādo ex eo quod vt A B, simul ad partem B, ita sunt CD, ad partem D; infertur. Ergo per conuersionē rationis vt A B, simul ad reliquam partem A, ita C D, simul ad reliquam partem C.

AB	B
CD	D
AB	A
CD	C

17 Sextus modus est ratio ex Aequalitate. Quando sunt plures termini ex vna parte, & totidem ex alia parte; & infertur eadem ratio extremorum: estque duplex.

18 Ordinata est quando v. g. vt A ad B, ita fuerit D ad E; & vt B ad C, ita E ad F; & hinc infertur. Ergo ex æqualitate ordinata vt A ad C, ita D ad F.

ABC   DEF

A C   D F

19 Perturbata est quando fuerit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E; infertúrque iterum. Ergo ex æqualitate perturbata vt A ad C, ita D ad F.

PROPOS. I. THEOR. I.

Sint quotcunque magnitudines v. g. A, B, totidem magnitudinum C, D, æquemultiplices: Dico A, B, simul tam esse multiplices ipsarum C, D, simul, quàm est A ipsius C.

EFG HIK

A B

C D

Si enim in A sunt v. g. tres magnitudines E, F, G, æquales ipsi C; erunt etiam in B, totidem magnitudines H, I, K æquales ipsi D: & E, H, simul æquales erunt ipsi C, D, semel; & F, I, secundo; & G, H, tertio: atque adeo quoties A continet C, toties E, F, G, H, I, K, hoc est, A & B simul, continebunt C, D simul.

PRO-

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Sint A & C, æquemultiplices ipsarum B & D; aliæ E, F sint earundem B, D æquemultiplices: Dico A, E simul, & C, F simul, esse earundem B, & D, æquemultiplices.

AE CF
B D

SI enim æqualibus multitudinibus A, C, addantur æquales multitudines E, F; fiunt A, E simul, & C, F simul, æquales multitudines earundem B, D.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

A, B sint æquemultiplices magnitudinum C, D, & E F æquemultiplices æquemultiplicium A, B: Dico E, F earundem C, D esse æquemultiplices.

GHI KLM
E A B F
C D

SI enim in E, sunt v.g. tres partes G, H, I, æquales ipsi A, erunt totidem k, L, M in F, æquales ipsi B. Cumque G, k, sint æquales ipsi A, B, erunt G, k ipsarum C, D æquemultiplices. sunt autem & H, L, eandem ob causam, earundem æquemultiplices, ergo per præcedentem G, H simul,

simul, & k, L simul, sunt earundem C, D æquemultiplices; & quia etiam I, M sunt earundem æquemultiplices; erunt per eandem omnes G, H, I, & omnes k, L, M, hoc est, E & F, æquemultiplices ipsarum C, D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Vt A ad B, ita sit C, ad D; & E, F sint æquemultiplices antecedentium A, C; & G, H vtcunque æquemultiplices consequentium B, D. Dico esse vt E ad G, ita F ad H.

I E.A B.G L
k F.C D.H M

IPsarum enim E, F sumantur quæcunque æquimultiplices I, k, & aliæ quæcunque æquemultiplices L, M, ipsarum G, H. Ergo per præcedentem I, k, erunt æquemultiplices ipsarum A, C, & L, M æquemultiplices ipsarum B, D, atque adeo per defin. 6. I, k, erunt vel vna æquales ipsis L, M, vel vna excedent, vel vna deficient. Sunt autem I, k æquemultiplices ipsarum E, F, & L, M æquæmultiplices ipsarum G, H. Ergo per eandem sextam definitionem, erit quoque vt E ad G, ita F ad H.

De-

Demonstratio rationis Conuersæ.

Coroll. Ex eadem definitione probatur eadem facilitate ratio Conuersa. Nam si vt A ad B, ita fuerit C ad D, & ipsarum A, C, sumantur æquimultiplices E, F, & aliæ G, H æquemultiplices, quæcunque ipsarum B, D. erunt per defin. 6. E, F vel vna æquales ipsis G, H, vel vna excedent, vel vna deficient; immo & vice versa G & H, vel vna erunt æquales, vel vna excedent, vel vna deficient ab E, F. Vnde sequitur per eandem definitionem, vt B ad A, ita esse D ad C.

E A B G
F C D H

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Quàm est multiplex magnitudo A B, magnitudinis C D, tam sit ablata A, multiplex ablatæ C. Dico etiam reliquam B, tam esse multiplicem reliquæ D, quàm est tota totius, vel ablata ablatæ.

A B
E C D

QVam est multiplex tota totius, vel ablata A ablatæ C, tam sit B, multiplex alicuius magnitudinis E. Ergo per primam, A, B simul, tam erunt multiplices ipsarum C, E simul,

simul, quàm est A ipsius C, vel quàm est AB simul, ipsarum CD. Atque ita AB simul, sunt æquemultiplices tam ipsarum CE, quàm ipsarum C, D. & ideo C, E sunt æquales C, D; & ablata communi C, remanebit D, æqualis E: sed B, ita est multiplex ipsius E, vt ablata A, ablatæ C. ergo etiam B, ita erit multiplex ipsius D, vt A ipsius C, vel AB, ipsarum CD.

PROPOS. 6. THOR. 6.

AB, CD, sint æquemultiplices magnitudinum E & F; & A, C ablata, sint earundem E, F æquemultiplices: Dico reliquas B, D, vel esse æquales ipsis E, F; vel earundem æquemultiplices.

A B E
C D F

His enim positis erunt in AB, CD, partes ipsis E, F, magnitudine & numero æquales: & similiter tot erunt in A, quot in C. ablato ergo numero partium A, C remanebit æqualis numerus partium in B, D æqualium eisdem E, F.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Aequales A, B, ad eandem C habent eandem rationem; & C eandem ad æquales A, B.

Nam

D E
A. B
C
F

NAm æquemultiplices antecedentium A, B v.g. D, E, sunt æquales, & ideo vel vna sunt æquales ipsi F multiplici ipsius C, vel vna deficiũt, vel vna excedunt. Ergo per defin. 6. vt A ad C, ita est B ad C. Et vice versa multiplex F, vel vna erit æqualis equemultiplicibus D, E, vel vna excedet, vel vna deficiet; eritque per eandem defin. 6. vt C ad A, ita C ad B.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Sint duæ magnitudines A B maior & A minor (potest enim minor concipi vt pars maioris) & tertia sit quæcunque C. Dico maiorem A B, ad C, habere maiorem rationem, quàm minor A, ad eandem C.

E D
A B
C
F G

SVmantur ipsarum B, & A, equemultiplices D, E, hac lege, vt D, maior sit quam C, & E, non minor. Quoniam igitur D, E sunt æquemultiplices duarum B, A; erunt per primam huius D, E simul, ita multiplices totius A B, vt est E, multiplex minoris A. Capiatur quoque FG multiplex ipsius C, proxime maior E. dempta igitur G, quæ intelligitur æqualis C, reliqua F, non erit maior quã

E.

E, est autem & D maior quàm C, hoc est quàm G. ergo tota D E maior est tota F G. Quare cum D E, & E, sint æquemultiplices ipsarum A B maioris, & A minoris, & F G, ipsius C, quæ est instar duarum consequentium, sitque E D multiplex primæ A B, maior quidem multiplice secundæ C, hoc est maior quàm F G, sed multiplex tertiæ A, hoc est E, non maior F G, multiplice quartæ C. Erit per 8. definitionem maior ratio AB, ad C, quàm A ad eandem C.

E vice versa C ad A B, habebit minorem quàm ad A, quia vicissim, est quidem F G maior quàm E; sed non est maior quàm D E.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Siue A, & B, eandem habeant rationem ad C: siue C eandem ad A & B; semper A & B, erunt æquales.

A B C

SI enim A, maior foret quàm B, non haberent rationem eandem ad C, per præcedentem; quod est contra hypothesim. Neque C haberet eandem ad A, B.

PRO-

PROPOS. 10, THEOR. 10.

Si A ad C maiorem rationem habeat, quàm B, ad eandem C. Erit A, maior quàm B. Et vice versa si C ad A habet maiorem quàm ad B; erit B, maior quàm A.

A B
C

SI enim A esset æqualis B, non haberet proportionem maiorem ad C, & si esset minor haberet minorem per antecedentes. Et è contrario C, ad A, & B haberet eandem si A & B, essent æquales & si A esset maior quàm B; haberet C ad A, minorem, quod est absurdum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

Si A ad B, & C ad D, eadem sit ratio, quæ E ad F: erunt etiam ipsæ eadem inter se.

G	I	H
A	E	C
B	F	D
K	M	L

SInt G, I, H æquemultiplices A, E, C, & k, M, L æquemultiplices ipsarum B, F, D. Quoniam igitur vt E ad F, ita est tam A ad B, quàm C ad D. ergo per def. 6. quando I, est æqualis, maior, vel minor quàm M, erunt quoque G & H æquales ipsis k & L, vel vna deficient, vel vna excedent; & ideo per

per eandem sextam definitionem A, B; C, D, sunt proportionales, hoc est, vt A ad B, ita est C ad D.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Si fuerit vt A ad B, ita C ad D, & ita E ad F, &c. erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes, & vna ad vnam v. g. vt A ad B.

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

SVmantur G, H, I æquemultiplices antecedentium, & k, L, M vtcunque æquemultiplices consequentium: ita vt per primam huius tam sint multiplices G, H, I, ipsarum A, C, E simul, quam est G ipsius A; & k, L, M ipsarum B, D, F ita multiplices, vt k ipsius B. Deinde quoniam rationes A ad B, C ad D, E ad F, sunt eædem; ergo quando G, est æqualis, maior, vel minor, quàm k, erit etiam H, & I æqualis, maior, vel minor quam L & M. Atque adeo quando G maior est, minor, vel æqualis ipsi k, erunt omnes G, H, I maiores, minores, vel æquales omnibus k, L, M. Sunt autem G, & G, H, L æquemultiplices A, & A, C, E. & k, & K L, M æquemultiplices B, & B, D, F. ergo per def. 6. vt A, ad B, ita sunt omnes A, C, E, ad omnes B, D, F.

PRO-

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Si A ad B eandem rationem habuerit, quam C ad D; at C ad D, maiorem quam E ad F: etiam A ad B, habebit maiorem, quam E ad F.

G H I
A C E
B D F
K L M

SVmptis enim æquemultiplicibus, vt in præcedenti; erit per def. 6. G, semper maior quam K. quando H, maior est quam L: at per octauam definitionem, quando H, maior est quam L, non semper I est maior quam M. Ergo etiam I, potest esse non maior quam M, quando G maior est quam K, & ideo per eandem defin. 8. maior erit ratio A ad B, quam E ad F.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Vt A ad B, ita sit C ad D: Dico A & B, vel vna esse æquales ipsis C, D, vel vna excedere, vel vna deficere.

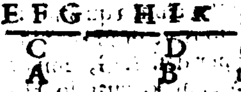
A B C D

EXistente enim A, v. g. maiore ipsa C. ratio A ad B maior est, quam C ad B, per 8. huius. Sed vt A ad B, ita est C ad D. Ergo maior est ratio C ad D, quam C ad B;

B; ideoque per 10. maior erit B, quam D. simillima est ratiocinatio in reliquis.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes A, B, cum æquemultiplicibus C, D: sunt in eadem ratione.



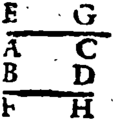
Sint enim exempli gratia in C, tres partes æquales ipsi A, nimirum E, F, G. Erunt ergo totidem in D, nempe H, I, k, æquales ipsi B; vtque A ad B, ita erit E ad H, F ad I, & G ad k, & per 12. vt E ad H, hoc est vt A ad B, ita erunt omnes E, F, G, ad omnes H, I, K, hoc est, ita erit C, ad D.

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Ratio alterna.

Vt A, ad B, ita sit C ad D: Dico permutando vt A ad C: ita esse B ad D: & hoc quando omnes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis.

Sint

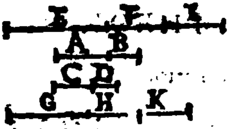


SInt E, F æquemultiplices ipsarum A, B; & G, H vtcunque æquemultiplices ipsarum C, D. Ergo vt A ad B, ita erit per antecedentem, E ad F; & vt C ad D, ita G ad H; per 11. vt E ad F, ita G ad H; & per 14. E & F, erunt vel vna æquales ipsis G, H, vel vna excedent, vel vna deficient, perque def. 6. vt A ad C, ita erit B ad D, sunt enim E, F æquemultiplices antecedentium, & G, H, æquemultiplices consequentium.

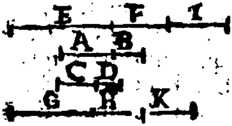
PROPOS. 17. THEOR. 17.

Diuisio rationis.

Vt A B, ad B, ita sit C D, ad D: Dico diuidendo esse vt A, ad B, ita C ad D.



SVmantur E, F; G, H, omnes æquemultiplices ipsarum A, B, C, D. eritque per primam huius aggregatum E F tam multiplex totius A B, quam est E ipsius A; & G H; tam multiplex totius C D, quam G, ipsius C. Sed E & G, sunt æquemultiplices ipsarum A, C. Ergo etiã E F, & G H, sunt æquemultiplices totarum



rum AB, CD. Sint quoque aliæ I, K, earundem B, D æquemultiplices. ergo per secundam etiam F, & H, K, erunt earundem B, D, æquemultiplices. Cum igitur E F, G H, sint æquemultiplices antecedentium A B, CD, & FI, HK, consequentium B D. ergo per def. 6. EF, & G H, vel vna erunt æquales, vel vna deficient, vel vna excedent multiplices FI, HK. Quando autem EF, & G H sunt maiores quam F I, H K, tunc demptis communibus F, H, remanent E, G, maiores quam I & K; quando sunt minores, vel æquales, remanent maiores, vel æquales. suntque E, G æquemultiplices ipsarum A, C, & I, K ipsarum B, D. ergo per eandem def. 6. erit vt A ad B, ita C ad D.

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Compositio rationis.

Vt A B, ad B C, ita sit D E, ad E F: Dico componendo, vt A C, ad B C, ita esse D F, ad E F.

[illegible]

SI minus sit vt A C, ad B C, ita D F, ad F G, minorem EF. Ergo diuidendo vt AB, ad BC, ita erit DG, ad GF. Sed ita ponebatur etiam DE, ad EF. ergo vt DE, ad EF, ita erit DG, ad GF. Sed prima DE, minor est quam DG. ergo tunc per 14. huius etiam EF, minor est quam GF, quod est absurdum. Quod si vt AC, ad BC, ita esset DF, ad FG, maiorem ipsa EF, sequeretur EF, esse maiorem GF, quæ ponebatur maior.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

Vt tota A B, ad totum C D, ita sit ablata A, ad ablatam C: Dico ita quoque esse reliquam B, ad reliquam D.

A B   C D

ERit enim per 16. permutãdo vt AB, ad A, ita CD, ad C; & diuidendo vt B ad D, ita A ad C, vel AB ad CD.

Conuersio Rationis.

Coroll. Vt AB ad B, ita sit CD ad D; ergo diuidendo vt A ad B, ita erit C ad D; & conuertendo, vt B ad A, ita D ad C; & componendo vt BA ad A, ita DC ad C; & hoc est argumentari per conuersionem rationis.

PROPOS. 20. THEOR. 20.

Vt A ad B, ita sit D ad E; & vt B ad C, ita E ad F: Dico primas A, D, vel esse vna æquales extremis C, F; vel maiores, vel minores.

A B C
D E F

QVando enim A, C, sunt æquales, tunc A & C habent eandem proportionē ad B. Sed vt A ad B, ita est D ad E, & vt C ad B, ita est conuertendo F ad E. ergo etiam vt D ad E, ita est F ad E: & idcirco per 9. D, & F, sunt æquales. similis est ratio in reliquis casibus.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

Vt A ad B, ita sit E ad F; & vt B ad C, ita D ad E: Dico iterum A & D, vel vna esse æquales extremis C, F, vel vna maiores, vel vna minores.

A B C
D E F

QVando A maior est quam C, tunc A ad B habet maiorem proportionem quam C ad B; sed vt A ad B, ita est E ad F; & vt C ad B, ita est conuertendo E ad D. ergo E ad F, habet maiorem rationem quam E ad D, & ideoque per

10. D, maior est quam L. & ita de reliquis casibus.

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Aequalitas ordinata.

Sit rursus vt in 20. vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F: ita vt proportio sit ordinata etiam in pluribus terminis. Dico ex aequalitate ordinata, vt A ad C, ita esse D ad F.

A B C N D E F O
G I L H K M

Ipsarum A, D, sint equemultiplices G H; ipsarum B. E aequemultiplices I, K; & L, M, aequemultiplices ipsarum C F. Ergo per 4. vt G ad I, ita est H ad K; & vt I ad L, ita K ad M; & per 20. primae G, H, erunt vnà aequales, vel maiores, vel minores extremis L, M. & ideo per 6. defin. vt A ad C, ita erit D ad F.

Quod si praeterea, vt C ad N, ita fuerit F ad O, sequeretur primo per demonstrationem praemissam, vt A ad C, ita esse D ad F. & quia vt A ad C, ita est D ad F, & vt C ad N, ita F ad O. ergo per eandem erit iterum, vt A ad N, ita D ad O &c.

PROPOS. 23. THEOR. 23.

Aequalitas perturbata.

Vt A ad B, ita sit E ad F; & vt B ad C, ita sit perturbate D ad E: Dico ex aequalitate perturbata, vt A ad C, ita esse D ad F.

A B C N O D E F
G H K I L M

Sint G, H, I, aeque multiplices trium A, B, D, & K, L, M, aequemultiplices reliquarum. Ergo per 15. vt A ad B, ita est G ad H; & vt E ad F, ita L ad M: sed vt A ad B, ita est E ad F. ergo vt G ad H, ita est L ad M. Item per quartam vt H ad K, ita est I ad L. Cum ergo vt G ad H, ita sit L ad M; & vt H ad K, ita I ad L; ergo per 20. & G & I, vel vna erunt aequales ipsis K, M, vel maiores, vel minores. & per def. 6. vt A ad C, ita erit D ad F. & si vt C ad N, ita foret alia O ad D, &c. sequeretur eodem modo, vt A ad N, ita esse O ad F.

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Vt A ad B, ita sit C ad D; & vt E ad B, ita F ad D: Dico, vt A E simul, ad B, ita esse C F simul ad D.

Nam

A E C F
B D

Nam conuertendo, erit quoque vt B ad E, ita D ad F, & sic A, B, E, & totidem C, D, F, erunt ordinatè proportionales. Quare vt A ad E, ita erit per 22. C ad F, & Componendo vt A E ad E, ita C F ad F. & sic erunt iterum tres AE, E, & B, & tres C F, F & D, ordinatè proportionales, iterumque per 22. vt A E ad B, ita erit CF ad D.

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines A B, C D, A, C, proportionales fuerint sit A B maxima, & ideoque C minima: maxima, & minima simul, erunt reliquis maiores.

A D
C B

Concipiantur tertia A & quarta C, vt partes primæ A B, & secundæ C D. Cum igitur sit vt A B ad C D, ita ablata A ad ablatam C; erit per 19. reliqua B ad reliquam D, vt tota AB ad totam C D. sed A B ponitur maior C D, ergo per 14. B erit maior D. Additis ergo A, & C, erunt A, B, C, maiores quam A, C, D ...

Propositiones ab alijs additæ.

PROPOS. 26. THEOR. 26.

Ratio A ad B, sit maior ratione C ad D: Dico, conuertendo B ad A, minorem esse D ad C.

A B C D
E

NAm vt C ad D, ita fit E ad B: eritque etiã ratio A ad B, maior ratione E ad B; ideoque per 10. A maior quàm E; & per 8. ratio B ad A, minor quam B ad E, hoc est, quam D ad C.

PROPOS. 27. THEOR. 27.

Ratio A ad B, sit maior ratione C ad D: Dico permutando A ad C, maiorem esse B ad D.

A B C D
E

SIt iterum vt C ad D, ita E ad B: eritque vt in præcedente A, maior quàm E. Quare maior erit ratio A ad C, quam E ad C. sed vt E ad C, ita est permutando B ad D. ergo maior est A ad C, quam B ad D.

PROPOS. 28. THEOR. 28.

Ratio A ad B, maior sit ratione C ad D: Dico, componendo A B, ad B, maiorem esse C D, ad D.

A B E C D

VT C ad D, ita sit E ad B; eritque iterũ A maior quam E; & A B maior quam E B; & per 8. ratio A B ad B. maior ratione EB ad B, hoc est, ratione CD ad D, quia componendo vt EB ad B, ita est C D ad D.

PROPOS. 29 THEOR. 29.

Ratio A B ad B, sit maior ratione C D ad D. Dico, diuidendo A ad B, maiorem esse C ad D.

A B E C D

VT C D ad D, ita sit E B ad B: eritque A B maior quam E B; & dempto communi B, erit A, maior quam E, & per 8. ratio A ad B, maior ratione E ad B, hoc est C ad D; quia diuidendo vt C ad D; ita est E ad B.

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Ratio AB ad B, sit maior ratione CD ad D. Dico, per conuersionem rationis, AB ad A, minorem esse CD ad C.

A B   C D

NAm diuidẽdo per 29. erit quoque A ad B maior, quam C ad D; & conuertendo per 26. B ad A, minor quam D ad C; & componendo per 28. AB ad A, minor CD ad C.

PROPOS. 31. THEOR. 31.

Ratio A ad B, sit maior D ad E; & B ad C, maior E ad F: Dico ex aequalitate ordinata, A ad C, maiorem esse, D ad F.

A D
B E
C F
G
H

VT E ad F, ita sit G ad C; & vt D ad E, ita H ad G. Quoniam igitur B ad C, maior est quam E ad F, seu G ad C; erit B maior G; & ratio A ad G, maior ratione A ad B. est autem A ad B, maior ratione D ad E, hoc est H ad G: ergo A ad G, maior est ratione H ad G; & A maior quam H. Quare ratio A ad C, maior est ratione H ad C. vt autem H ad C, ita vt ex ex æqualitate ordinata D ad E, ergo etiam A ad C, maior est ratione D ad E.

Idem verum est in pluribus terminis; possunt enim reduci ad 3. sicut factum est in 22.

PROPOS. 32. THEOR. 32.

Maior sit ratio A ad B, quàm E ad F: & B ad C, maior quàm D ad E: Dico ex æqualitate perturbata, A ad C, maiorem esse ratione D ad E.

A	D
B	E
C	F
G	
H	

VT D ad E, ita sit G ad C. & H ad G, vt E ad F. eritque ratio B ad C, maior ratione D ad E, hoc est, G ad C: ideoque B maior quam G. & ratio A ad G, maior quam A ad B, per 8. Sed hæc maior est quam E ad F, seu H ad G. ergo A ad G, multo est maior ratione H ad G & A maior quam H, & ideo ratio A ad C, maior ratione H ad C. Sed vt H ad C, ita est ex æqualitate D ad F, ergo A ad C, maior est ratione D ad F.

rationem reliqua B ad reliquam D, maiorem esse totius ad totum.

A B C D

NAm permutādo per 27. erit maior ratio A B ad A, quam C D ad C; & per conuersionem rationis, hoc est per 30. ratio A B ad B, minor ratione C D ad D; iterumque permutando A B ad C D, minor ratione B ad D.

PROPOS. 34. THEOR. 34.

Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, & alia D, E, F, ipsis numero aquales, sitque maior ratio A ad D, quam B ad E; item B ad E, maior quam C ad F: dico rationem A B C ad omnes D E F maiorem esse ratione B C ad E F; minorem quam A ad D; & minorem quam C ad F.

A D

B E

C F

CVm enim maior sit A ad D, quam B ad E, erit per 27. permutando maior A ad B, quam D ad E; & componendo per 28. A B ad B, maior quam D E ad E; & iterum permutando, maior A B ad D E, quam B ad E. Quare per 33. reliquæ A ad reliquam D, maior erit quam A B ad D E. Eademque ratione, erit B ad E, maior quam totius B C ad

totam

totam EF; multo igitur maior erit A ad D, quàm BC totius ad totam E F; & permutando A ad BC, maior quàm D ad EF; & componendo ABC ad BC, maior quàm D E F ad E F. & rursus permutando omnium ABC ad omnes D E F, maior quam B C ad EF, quod est primum.

Cumque ABC ad DEF, sit maior quàm BC ad EF, erit per 33. reliqua A ad reliquam D. maior quam totius ABC, ad totum DEF, quod est secundum.

Rursus ex eo quod ratio B ad E, maior est quam C ad F, sequitur permutando B ad C, esse maiorem E ad F; & componendo totius BC, ad C, maiorem totius EF ad F. & rursus permutando BC ad EF, maiorem C ad F. est autem ratio ABC ad D E F, maior quam B C ad EF, vt ostendimus. multo ergo maior erit A, B, C ad D, E, F, quam C ad F, quod est tertium.

A	D	Iam vero sit quoque C ad F, maior quàm G ad H. Eritque
B	E	per demonstrata maior ratio B
C	F	ad E, quam B C G ad E F H;
G	H	multo igitur maior A ad D,

quam B C G ad EFH; & permutando A ad B C G, maior quam D ad E F H, & componendo maior ABCG ad BCG, quam DEFH ad EFH: & permutando ABCG ad DEFH, maior quam B CG ad EFH, quod est primum.

Cum-

Cumque sit maior ratio totius ABCG ad totam DEFH, quam ablatæ BCG ad ablatam EFH; erit & reliquæ A ad reliquam D, maior totius ABCG ad totam DEFH, quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus demonstratum est, maior est BCG ad EFH, quam G ad H, & maior ABCG ad DEFH, quam BCG ad EFH: multo maior erit ABCG ad DEFH, quam vltima G ad vltimam H, & ita de pluribus.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

1 SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ angulos angulis habent æquales, & etiam circa ipsos latera lateribus proportionalia.

2 Reciprocæ sunt, cum in vtraque antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

3 Linea v. g. A B, secta erit media & extrema ratione cum tota A B cum partibus A C, C B fuerint continuè proportionales.

A. C B.

4 Altitudo figuræ, est linea perpendicularis, à vertice in basim ducta.

5 Ratio duarum magnitudinum dicitur composita ex tot rationibus, quot inter easdem continuantur.

A B C D

hoc est, si inter A, C intercedat B; propor-

tio

ratio A ad C dicitur composita, ex ratione A ad B, & B ad C; siue huiusmodi rationes interiectæ sint eædem, siue non. Item ratio A ad D componi dicitur ex rationibus A ad B, B ad C, & C ad D. propterea quod dictę rationes inter terminos A, D, continuentur per interiectos terminos B, C.

Defin. 10. Libri 5.

A. B. C. D

QVando omnes proportiones interiectæ sunt eædem, tunc ratio A ad C dicitur per compendium esse duplicata proportionis A ad B: eo quod eadem ratio sit bis continuata per communem terminum B, & A ad D, dicitur triplicata eiusdem, quia ter continuatur per terminos B, C. &c.

Scholium.

IN his duabus istis defin. explicandis multus quidem fuit Clauius, non tamen superfluus. Quippe enim, quæ definit compositionem rationum, suæ debuit restitui integritati, & quarundam expositiones falsæ fuere detegendæ, & reijciendæ. Nam quod in vulgari defin. habetur, denominatorem rationis compositæ, fieri ex multiplicatione denominatorum rationum cōponentium, non est Definitio, sed Theorema, neque eo in sensu vsurpatur ab Euclide, alijsque Geometris, vt videre est ad propositionem 23. in qua ostenditur, rationem parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum, quæ sunt circa angulos æquales, continuando dictas rationes componentes in tribus terminis, & demõstrando rationem primi ad tertium, quam Euclides per defin. 5, vel esse compositam ex intermedijs, eandem esse cum ratione, quam habet parallelogrammum ad parallelogrammum. Vnde manifestè colligitur defin. compositionis vulgarem non esse ex sententia Euclidis positam, sed ab alio aliquo immutatam. Ex sensu enim compositionis vero, non potest aliud inferri, nisi quod rationes componentes positæ inter duos terminos habentes dictam rationem compositam, possint continuari, saltem eo ordine quo pronunciantur. Quod autẽ interponi possint ad libitum, videtur potius petendum à Theoremate peculiari, quam a definitione generali. Atque hoc est quod hic peculiari lemmate demonstrandum suscepi.

Lemma.

SI ratio v.g. A ad B dicatur composita, v. g. ex rationibus a. e. i: Dico eandem componi, ex eisdem quocunque ordi-

ne

ne positis. Hoc est, inter duos terminos A B, licitum esse continuare dictas rationes toties, quoties possunt inter se mutare locum. Vide Regulam ad initium Sphere positam, vbi Clauius disputat de numero, & ordine Elementorum; estque sequens.

Regula mutationum.

SVmantur tot numeri in serie naturali, quot sunt res propositae: multiplicati enim inuicem producunt summam mutationum, quae pro duabus rebus est 2. pro tribus 6. pro quatuor 24. pro quinque 120. &c. vt videre est in calculo hic adiecto, & manifestius in quatuor exemplis ad singulas mutationes exercitatis, quorum consideratio, & comparatio plurimum facit ad abbreuiandam demonstrationem.

	Mutat.	Ser. nat.	Res
		1	A
pro duabus	2	2	B
pro tribus	6	3	C
pro quatuor	24	4	D
pro quinque	120	5	E
	&c.	&c.	&c.

Primum exemplum duarum rerum.

	a		e	
1	a e	2	e a	

Secundum exemplum trium rerum.

	a		e		i
1	a e i	3	e a i	5	i a e
2	a i e	4	e i a	6	i e a

Tertium exemplum quatuor rerum.

	a		e		i		o
1	a e i o	7	e a i o	13	i a e o	19	o a e i
1	a e o i	[illegible]	e a o i	14	i a o e	20	o a i e
	a i e o	2	e i a o	16	i e a o	21	o e a i
4	a i o e	10	e i o a	16	i e o a	22	o e i a
5	a o e i	[illegible]	e o a i	17	i o a e	23	o i a e
	a o i e	[illegible]	e o i a	[illegible]	i o e a	[illegible]	o i e a

Quar-

Quartum exemplum quinque rerum.

a		e		i		o		u	
1	a e i o u	25	e a i o u	49	i a e o u	73	o a e i u	97	u a e i o
2	a e i u o	26	e a i u o	50	i a e u o	74	o a e u i	98	u a e o i
3	a e o i u	27	e a o i u	51	i a o e u	75	o a i e u	99	u a i e o
4	a e o u i	28	e a o u i	52	i a o u e	76	o a i u e	100	u a i o e
5	a e u i o	29	e a u i o	53	i a u e o	77	o a u e i	101	u a o e i
6	a e u o i	30	e a u o i	54	i a u o e	78	o a u i e	102	u a o i e
7	a i e o u	31	e i a o u	55	i e a o u	79	o e a i u	103	u e a i o
8	a i e u o	32	e i a u o	56	i e a u o	80	o e a u i	104	u e a o i
9	a i o e u	33	e i o a u	57	i e o a u	81	o e i a u	105	u e i a o
10	a i o u e	34	e i o u a	58	i e o u a	82	o e i u a	106	u e i o a
11	a i u o e	35	e i u a o	59	i e u a o	83	o e u a i	107	u e o a i
12	a i u e o	36	e i u o a	60	i e u o a	84	o e u i a	108	u e o i a

13	a o e i u	37	e o a i u	61	i o a e u	85	o i a e u	109	u i a e o
14	a o e u i	38	e o a u i	62	i o a u e	86	o i a u e	110	u i a o e
15	a o i e u	39	e o i a u	63	i o e a u	87	o i e a u	111	u i e a o
16	a o i u e	40	e o i u a	64	i o e u a	88	o i e u a	112	u i e o a
17	a o u e i	41	e o u a i	65	i o u a e	89	o i u a e	113	u i o a e
18	a o u i e	42	e o u i a	66	i o u e a	90	o i u e a	114	u i o e a
19	a u e i o	43	e u a i o	67	i u a e o	91	o u a e i	115	u o a e i
20	a u e o i	44	e u a o i	68	i u a o e	92	o u a i e	116	u o a i e
21	a u i e o	45	e u i a o	69	i u e a o	93	o u e a i	117	u o e a i
22	a u i o e	46	e u i o a	70	i u e o a	94	o u e i a	118	u o e i a
23	a u o e i	47	e u o a i	71	i u o a e	95	o u i a e	119	u o i a e
24	a u o i e	48	e u o i a	72	i u o e a	96	o u i e a	120	u o i e a

In primo exemplo, videre est duas series in transuersum, notatas literis a, e, & sub singulis mutationes singulas, & duas in vniuersum, quia singulæ literæ non possunt occupare primum locum sæpius, quam semel.

In secundo exemplo, sunt tres series, in transuersum, denominatæ à tribus literis a, e, i, & sub singulis sunt duæ mutationes. quia singulæ literæ possunt occupare primum locum bis, hoc est toties quod in primo exemplo erat mutationes in vniuersum. vnde in secundo exemplo sunt mutationes 6.

In tertio exemplo, sunt quatuor series transuersæ denominatæ à quatuor literis a, e, i, o, & infra singulas sunt 6. mutationes, & in vniuersum 24.

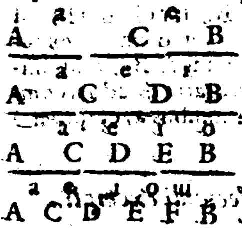
In quarto exemplo, sunt quinque transuersæ series denominatæ à quinque literis a, e, i, o, u, & sub singulis, mutationes 24. quæ multiplicatæ per quinque faciunt 120. &c.

Altera consideratio est, quod in secundo exemplo, primæ duæ literæ serierum a, e. in tertio, primæ tres serierum a, e, i, & in quarto, primæ quatuor serierum a, e, i, o. sunt eædem. licet non eodem ordine positæ. & idem verum est de posterioribus literis vltimarum serierum, quæ in secundo exemplo sunt iterum duæ a, e, in tertio, tres a, e, i; in quarto, quatuor a, e, i, o.

Postremo in omnibus seriebus præter literas quæ primum locum occupant, reliquæ sunt eædem cum iis quæ ponuntur in capite.

Ex his generalibus considerationibus formatur lemmatis demonstratio, eademque quo ad præcipuas partes communis, hoc modo.

Pro omnibus exemplis termini rationis compositæ erunt A, B, & componentes erunt vel duæ a, e, vel tres a, e, i, vel quatuor a, e, i, o, vel quinque a, e, i, o, u, &c. ita ut per definitionem inter A, B possint continuari, vel duæ rationes a, e, per unum terminum intermedium C, vel tres a, e, i, per duos C, D, vel quatuor a, e, i, o, per tres C, D, E, vel quinque a, e, i, o, u, per quatuor C, D, E, F.



Demonſtratio primi exempli.

1 | a e
A C B
e a
2 | G I H

DEinde pro primo exemplo præter terminos A C B, quibus continuantur duæ rationes a, e, continuentur in alijs tribus terminis G, I, H, eædem proportiones ordine mutato, ita vt ratio G ad I, ſit e, & ratio I ad H, ſit a. Dico rationes A ad B, & G ad H, eſſe eaſdem. Cum enim vt A ad C; ita ſit I ad H; & ſicut C ad B, ita G ad I. ergo per æqualitatem ordinatam, erit quoque vt A ad B, ita G ad H; ſed G ad H componitur per defin. 5. ex rationibus e, a. ergo etiam A B, componitur ex eiſdem. hoc eſt, ratio A ad B, componitur, tam ex rationibus a, e, quam ex rationibus e, a.

Demonſtratio ſecundi exempli.

	a	e	i	
1 A	C	D	B	
	e	a	i	
3 G	I	K	H	
	i	a	e	
5 G	I	K	H	

IN ſecundo exẽplo præter terminos ACDB, quibus cõtinuãtur rationes a, e, i. primi caſus

casus secundi exempli superius positi, continuentur in alijs quatuor terminis GIKH rationes e,a,i, vt habentur in tertio casu, & rationes i,a.e, vt habentur in quinto.

Quoniam igitur in primo & tertio casu inter AD, & GK continuantur duæ rationes a, e vtcunque; ergo per demonstrationem primi exempli, vt A ad D, ita erit G ad K; vt autem D ad B, ita est K ad H; ergo per æqualitatem vt A ad B, ita erit G ad H,

In quinto vero casu quoniam rationes a, e sunt continuatæ inter posteriores tres terminos IKH; ideo vt A ad D, ita erit I ad H. & quia præterea vt D ad B, ita est G ad I, erit rursus per æqualitatem vt A ad B, ita G ad H. Cum igitur G ad H in tertio casu componatur ex rationibus e, a, i; & in quinto ex rationibus i,a,e; manifestum est eandem rationem A ad B, non solum componi ex a,e,i; sed etiam ex e,a, i; & i,a,e.

Reliqui casus 2. 4. & 6. reducuntur ad tres priores 1. 3. & 5. mediante tertia consideratione, ex qua constat in singulis seriebus, primas literas esse easdem, & reliquas quotcunque sint non differre nisi positione. tales sunt in serie a, literæ e, i, in serie e literæ a, i, & in serie i literæ a, e. Quæ sicut in præcedenti demonstratione, ex eo quod in 1. & 3. casu componentes a e. e a sunt similes, & reliqua vtrobiqu est eadem litera i, ostensum est, vt A ad B ita esse G ad H. ita etiam hic, quoniam in 1. & 2. casu e i, i e sunt similes, & reliqua a, eadem, valet eadem consequentia hoc est, vt A ad B, ita esse G ad H; si inter A B, per C D, continuentur ratione a, e, i, primi casus; & inter G H, per I & K, rationes a, e, i, 2. casus.

	a	e	i	
1.	A	B	C	D
2.				
	e	a	i	
3.	G	I	K	H
	e	i	a	
4.	G	I	K	H

Similiter si per G I K H continuentur rationes e a i, e i a tertii & quarti casus; vt G ad H in 3. casu, ita erit G ad H, in 4. Vt autem G ad H, in 3 casu, ita ostendimus esse A ad B, in primo casu. Ergo etiam vt A ad B, ita erit G ad H, in 4. casu.

Denique in 5. & 6. casu omnia sunt similia, & consequenter manet etiam demonstratum totum secundum exemplum. hoc est, rationem A ad B, componi ex rationibus a e i quocunque ordine positis.

Demonstratio reliquorum exemplorum.

In reliquis exemplis non est alia differentia, quàm quod in ipsis rationes componentes sint plures tribus. Methodus autem demonstrandi est eadem. Rationes

enim

enim componentes, quæ habentur in capite singularum serierum, reducuntur ad rationes primo loco propositas, & ad has reliquæ quæ sub iisdem capitalibus, subijciuntur, non aliter quam factum est in præcedenti exemplo.

Corollarium.

HVic licentiæ permutandi rationes componentes, puto corollariorum titulo annecti posse non inutiliter nonnulla eodem spectantia.

Primum est. Compositionis campum patere latissime, vt vt appareant rari qui ipsum peruagentur. Omnis enim ratio proposita quamuis non componatur ex quibuslibet; immo vnam tantum si demas, componitur ex quotlibet & quibuslibet.

a	e	i	o	
A	C	D	E	B

Sint duæ magnitudines A, B, habentes quamcunque rationem, inter quas statuantur quotcunque, & aliæ quæcunque magnitudines eiusdem generis C, D, E. eritque ex vi defin. 5. ratio A ad B composita ex rationibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Neque dubium est, si priores tres fuissent v. g. rationes datæ a e i easdem continuari posse à magnitudine A, per aliquos terminos C D E, vsque ad E, atque ita solum manere postremam rationem o, inter E & B, quæ sola non potest assignari ad arbitrium, sed determinatur eo ipso quod reliquæ sint continuatæ per terminos C, D, E.

2. *Coroll.* Certum est easdem rationes componere easdem, & easdem componi ex eisdem. hoc enim sequitur ex definitione immediate. Quare si ratio A ad B, & F ad G, est eadem, & prior A ad B, sit cōposita ex a e i o, erit etiam F ad G ex ijsdem composita. & vice versa, nulla habita ratione ordinis, quod attinet ad rationes componentes.

a	e	i	o	
A	C	D	E	B
u	a			
A	L	C		
i	e	a	o	
F	H	I	K	G

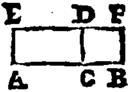
3. *Coroll.* Et hinc deducitur hæc alia consequentia. Si rationes a e i o per terminos CDE sint continuatæ inter A B; & & inter F G per terminos H I K, fuerint continuatæ eædem; & hoc modo permutatæ i e a o: ita & constet sicut A ad C, ita esse I ad k, vt C ad D, ita H ad I; vt D ad E, ita F ad G; sequitur etiam reliquas E ad B & k ad G esse easdem.

4. *Coroll.* Si a e i o componant rationes A ad B, & F ad G, vt in præcedenti exemplo, abijciaturque vtrinque ratio a, reliquæ non component quidem rationem A ad B, vel F ad G, component tamen aliquam aliam eandem.

5. *Co-*

5. *Coroll.* In eodem exemplo si ratio v. g. A ad C, hoc est ratio a, dicatur composita ex alijs v. g. ex rationibus u a, ita vt ratio A ad L sit ratio u, & L ad C sit a. sequitur non solum rationem A ad B componi ex rationibus u a e i o, sed etiam rationem F ad G. Item si demattur vtrinque ratio a, etiam compositas ex reliquis u e i o esse easdem. quamuis ita composita non sit eadem cum ratione A ad B, vel F ad G. Huiusmodi argumentationem licet videre apud Pappum lib. 7. propos. 142.

6 Parallelogrammum A D cum non occupat totam lineam A B, sicut occupat parallelogrammum A F; dicitur deficere, vel deficiens. Parallelogrammum vero A F, quod occupat AB maiorem A C, dicitur excedere, vel excedens, parallelogrammo C F.



PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula ABC, DEF; item parallelogramma CG, EH, inter easdem parallelas, eiusdemque altitudinis; sunt inter se vt basis E C, ad basim E F.

 Sint

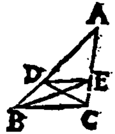
Sint BI, IK, kL æquales BC, & FM, MN æquales EF: hoc est BL, FN sint basium multiplices; nectanturque AI, AK, AL, DM, DN; Eruntque triangula ABI, AIk, AkL per 38. primi æqualia ipsi ABC, & simul tam multiplicia eiusdem, quam est BL multiplex basis BC. similiter, triangula DFM, DMN, tam erunt multiplicia trianguli DEF, quàm est basis FN, basis EF Quãdo autem BL, æqualis est FN, semper triangulum ABL est æquale triangulo DFN; & quando BL maior est quam FN, etiam triangulum est maius triangulo; & quando minus, minus. Quare per 6. defin. vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF.

Parallelogramma autem CG, EH sunt dupla triangulorum ABC, DEF per 41. primi. ergo per 15. quinti, vt triangulum ad triangulum, hoc est, vt basis BC, ad basim EF, ita est parallelogrammum ad parallelogrammum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

In triangulo ABC, DE, sit parallela BC: Dico latera AB, AC, secta esse proport onali-

maliter in D & E: & quando secta sunt proportionaliter; rectam D E esse parallelam B C.



DVctæ enim B E, C D faciũt per 37. primi, æqualia triangula DEB, E D C; & ideo per 7. quinti habent eandem rationem ad triangulum ADE. Sed ratio D E B, ad A D E, est vt basis BD, ad basim DA: quia triangula EBD, EDA, sunt eiusdem altitudinis: ratio EDC, ad ADE, est vt basis C E, ad AE, vt demonstratum est in præcedenti. Ergo per 11. quinti vt D B, ad D A, *ita* est C E ad E A.

Vice versa, si vt AD ad DB, ita sit AE ad E C; habebit triangulum A D E ad triangula DEB, E D C rationem eandem. & idcirco eadem triangula DEB, EDC, erunt æqualia. & D E, B C parallelæ per 39. primi.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

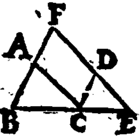
Recta A D secet angulum B A C, bifariam: Dico vt A B ad A C, ita esse segmentum BD ad DC. Et vice versa, si vt A B ad A C, ita sit B D ad D C: Dico A D secare angulum B AC bifariam.

SIt BE parallela AD, & occurrat C A in E. Ergo per 29. primi, anguli AEB, ABE sunt æquales æqualibus DAC, DAB: & ideo per 6. primi A B, A E sunt æquales. Vt autem A E ad AC, ita est per 2. BD ad DC. ergo etiam vt A B ad A C, ita est B D ad D C.

Deinde supposita eadem constructione, si sit vt BD ad DC, ita AB ad A C; cum per secundam, etiam A E ad A C sit vt B D ad DC: erit quoque vt AB ad AC, ita A E ad eandem A C; & idcirco A B, AE, sunt æquales, & anguli ad basim B E æquales. Est autem propter parallelas A D, E B, D A C, æqualis ipsi A E B, & D A B ipsi A B E. ergo etiam illi sunt æquales.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Trianguli A B C, D C E, sint æquiangula: Dico circa æquales angulos A, D latera A B, AC esse proportionalia lateribus D C, D E &c. & homologa subtendere angulos æquales.

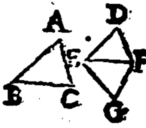


LAtera B C, C E adiacentia æqualibus angulis, continuentur in eadem recta BCE; ita vt ABC sit æqualis DCE & ACB, ipsi D E C, sic enim erunt AB, DC, & AC, DE parallelæ; & E D, B A protractæ constituent parallelogrammum C F; eritque A C æqualis FD, AF, ipsi C D, per 34. primi, & per 2. huius erit, vt AB ad AF, hoc est ad C D, ita BC ad CE. & permutãdo vt AB ad BC, ita CD ad CE. item vt BC ad CE, ita est FD, seu CA ad ED; & iterum permutando vt B C ad CA, ita C E ad ED. Denique ex eo quod vt AB ad BC, ita est CD ad CE, & vt BC ad CA, ita CE ad ED, sequitur ex æqualitate ordinata, vt AB ad A C, ita esse C D ad D E. Atque ex hac ipsa demonstratione est manifestum, tam antecedentes terminos, quàm consequentes, hoc est homologos, opponi angulis æqualibus.

Coroll. Constat etiam, parallelam C D, vel A C, abscindere ex toto triangulo F BE, triangulum simile.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

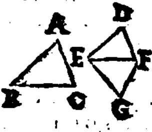
Triangula ABC, DEF habeant latera lateribus proportionalia: Dico latera homologa opponi angulis æqualibus.



ANgulis B, C, fiant æquales G E F, GFE: eritque per 32. primi reliquus G æqualis reliquo A, & per 4. huius erunt circa çquales angulos latera lateribus proportionalia, hoc est, vt AB ad B C, ita erit G E ad E F. Vt autem A, B ad BC, ita ponitur esse D E ad EF. ergo etiam vt G E ad E F, ita erit D E ad eandem E F. & ideo per 9. quinti G E, D E erunt æquales. neque aliter demonstrabitur G F æqualis D F, atque ita erunt duo latera GE, G F, æqualia duobus lateribus DE, DF. estque basis E F communis. ergo per octauam primi, non solum angulus D erit æqualis angulo G, sed etiam reliqui reliquis: & quidem illi erunt çquales, quibus homologa latera opponuntur: & quia GEF est æquiangulum ABC, erunt etiam ABC, DEF dicto modo æquiangula.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Circa æquales angulos B, & D E F, sint latera proportionalia: Dico triangula esse æquiangula, & angulis æqualibus subtendi latera homologa.



Fiat iterum triangulum G E F æquiangulum triangulo ABC, vt in precedenti; eritque iterum G E æqualis D E. & quia circa æquales angulos D E F, G E F latera D E, E F sunt æqualia lateribus G E, E F. erunt triangula DEF, GEF, penitus æqualia. Sed GEF est ipsi A B C æquiangulum; ergo & D E F. & ideo per 4. huius habebunt etiam reliqua latera circa reliquos angulos proportionalia &c.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

In triangulis ABC, DEF, sint æquales anguli A, D; & latera A C, CB proportionalia lateribus DF, FE, & reliqui anguli B, E sint minores, vel non minores recto: Dico triangula esse æquiangula.

SInt primo anguli E B minores recto, & si fieri potest angulus ACB sit maior angulo F. Facto igitur angulo A C G, æquali ipsi F; erunt duo triangula ACG, DFE æquiangula, & per 4. huius, erit vt D F ad F E, ita A C ad C G. sed vt D F ad F E, ita ponitur A C ad C B. ergo vt A C ad C G, ita est eadem AC ad CB; & propterea C G, CB, erunt per 9. quinti æquales, & anguli C BG, CGB, æquales per 5. primi. Est autem B acutus, sicut est E. ergo etiam C G B: reliquus vero C G A, quem ostendimus æqualem acuto E, erit obtusus, quod est absurdum.

Si autem anguli B, E ponerentur esse non minores recto; essent in triangulo isoscelio C B G ad basim duo anguli obtusi, vel recti; quod est similiter absurdum. Quare necesse est angulum ACB æqualem esse angulo F: & per præcedentem, triangula esse æquiangula, & similia.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

In triangulo ABC sit angulus A rectus, & AD, ad basim perpendicularis: Dico triangula ADB, ADC esse similia toti.

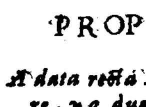
Est

Est enim rectus A D B, æqualis recto BAC; & B est communis. ergo reliquus æqualis est reliquo. similiter A D C, æqualis est B A C; & C communis. ergo.

Corell. Hinc sequitur, per quartam huius, B D, D A, D C, esse continue proportionales; & A B esse mediam proportionalem inter CB, BD; & A C mediam inter B C, C D.

PROPOS. 9. PROBL. 1.

A data recta A B, partem imperatam auferre. v.g. duas tertias.

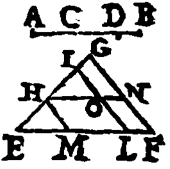


Sumantur in alia A C, tres partes æquales AD, DE, EF, & duæ partes tertiæ sint A D E. Ducta igitur FB, & E G, ipsi FB parallela; erit etiam AG duæ tertiæ totius AB, per 2. huius, quia vt A F ad A E, ita est A B ad A G.

PROPOS. 10. PROBL. 2.

Secta AB vtcunque in C, D: aliam EF similiter secare.

Recte



REctæ EH, HI, IG, sumantur æquales partibus AC, C D, DB; & per H, I ducantur parallelæ ipsi G F; eritque per secundam huius, vt E H ad H F, ita E M ad M L; & ducta alia H O N parallela ipsi E F, vt H I ad IG, ita erit HO ad ON, hoc est ML ad LF, quia per 34. primi H O, O N sunt æquales M L, LF.

PROPOS. 11. PROBL. 3.

Datam rationem A B ad AC, continuare.

IPsi AC sumatur æqualis BD, ipsique BC agatur parallela D E: eritque CE tertia proportionalis, quia vt A B ad B D, hoc est, ad AC, ita est per 2. huius A C ad ad C E.

PROPOS. 12. PROBL. 4.

Tribus datis AB, B C, AD, quartam proportionalem adiungere.

IPsi B D agatur parallela C E; eritque vt A B ad BC, ita A D ad D E.

PRO-

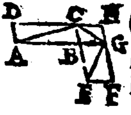
PROPOS. 13. PROBL. 5.

Inter datas AB, BC, mediam proportionalem inuenire.

CIrca AC compoſitam ex AB, BC deſcribatur cẽtro E, ſemicirculus: Perpendicularis enim BD erit per corollarium octauæ huius, media proportionalis in AB, BC.

PROPOS. 14. THEOR. 9.

Parallelogramma BD, BF ſint æqualia, & anguli ad B ſint æquales: Dico latera eſſe reciprocè proportionalia, vt AB ad BG, ita eſſe BE ad EC. & ſi latera circa æquales angulos dicto modo ſint proportionalia: parallelogramma æqualia eſſe.



COniungantur parallelogramma ad angulum B, ita vt AB, BG ſint continuę, hac enim ratione erunt etiam BE, BC continuæ per 14. primi. Ex concurſu autem DC, FG in H, fit tertium parallelogrammum BH, eiuſdem altitudinis cum parallelogrammis BD, BF: Et idcirco per primam huius, vt BD

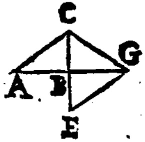
a.d.

ad B H, ita erit AB ad BG: vtque BF ad B H, ita BE ad BC. Sed BD & BF, ad B H, est vna eademq; proportio per 7. quinti: ergo etiam vt AB ad B G, ita erit B E B C.

Vice versa, si fuerit vt AB ad B G, ita BE ad BC; habebunt BD, B F, eandem proportionem ad B H; ideoque BF, B, D, erunt æqualia per 9. quinti.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Eadem est ratio de triangulis A B C, B G E, si sint æqualia, habeantque æquales angulos ad B.

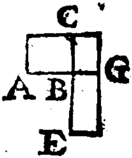


Possunt enim copulari ad angulum B, vt parallelogramma, & referri ad tertium triangulum B G C, vt videre est tam in superiori figura, quam in ista.

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint; æqualia erunt parallelogramma rectangula, quæ fiunt ab intermediis, & extremis. Et si hæc sint æqualia, quatuor lineæ erunt proportionales.

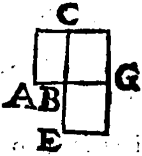
Hæc



HAec propositio nullo negotio reducitur ad decimamquartam. Si enim AB, BG, BE, BC sint proportionales; iam est demõstratum BD, BF, esse æqualia: &, si BD, BF, sint æqualia, quatuor rectas AB, BG, BE, BC, esse proportionales.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si fuerint tres proportionales; rectangulum sub extremis erit æquale quadrato intermedia. & si hoc illi fuerit æquale, latus quadrati erit medium proportionale inter latera rectanguli.

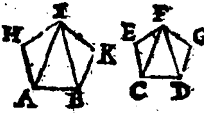


HAec non differt à præcedenti, si in præcedenti duæ intermediæ intelligantur esse æquales; ita vt quatuor proportionales sint AB, BG, BE, BC; & BG, BE, sint æquales.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

Super datam AB, rectilineo CDGFE simile rectilineum describere.

Di-



Distribuatur rectilineum datũ in sua triangula, & super AB fiat primo triangulum A B I æquiangulum triangulo C D F: tum super A I, & B I fiant alia A I H, B I k æquiangula triangulis CFE, D F G &c. ita vt sicut F C D, FCE constituunt totum angulum C, ita IAB, IAH constituant totum A, & ita de reliquis: Dico etiam circa eosdem angulos, latera esse proportionalia. Per quartam enim huius vt EC ad CF, ita est HA ad A I: & vt C F ad C D. ita I A ad A B, ergo ex æqualitate ordinata, vt H A ad A B, ita & E C ad C D &c.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sit ABC simile triangulo DEF, & latera homologa sint BC, EF; sitque tertia proportionalis B G; ita vt iuxta definitionem 10. quinti, proportio B C ad B G, sit duplicata proportionis BC ad EF: Dico rationem triãguli ABC ad DEF, esse rectæ BC, ad BG.

Quan-

Quando triangula sunt æqualia, hoc est, quando B C, E F, necnon tertia proportionalis B G sunt æquales, res est manifesta.

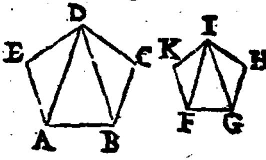
Quando vero latera B C, E F sunt inæqualia, demonstratur, hoc modo. Iungatur A G. Quoniam igitur angulus B est æqualis E; & propter similitudinem triangulorum, vt AB ad BC, ita est DE ad EF; & permutando vt AB ad DE, ita B C ad E F; hoc est EF ad B G; erunt circa angulos æquales B E, latera reciproce proportionalia. Quare per 15. triangula A BG, D E F erunt æqualia; & per 7. quinti, vt triangulum ABC, ad ABG, ita erit idem triangulum ABC ad D E F. vt autē ABC ad A B G, ita est per 1. huius, B C ad B G. ergo ABC ad D E F erit, vt B C ad B G.

Coroll. Hinc sequitur si tres lineæ A, B, C, fuerint proportionales; vt prima ad tertiam, ita esse triangulum A super primam, ad simile triangulum B supra secundam.

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia Poligona A B C D E, F G H I K, in similia triangula resoluuntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona

gona habent rationem duplicatam laterum homologorum.



Nam eo ipso quo Polygona ponuntur esse similia, necesse est & angulos esse æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia. Quare vt D E ad E A, sic erit IK ad K F; ideoque per 6. triangula A D E, F I K similia, & anguli E D A, EAD, æquales angulis K I F, KFI. est autem totus A, æqualis toti F; ergo & reliquus DAB, æqualis reliquo IFG. Iam sic, vt AD ad AE, ita est IF ad FK; & vt AE ad AB, ita FK ad FG. ergo ex æqualitate, erit quoque vt AD ad AB, ita I F ad ad F G, ideoque rursus per 6. triangula DAB, I FG, similia. Atque in hunc modum proceditur ad reliqua.

Demum, quoniam omnium istorum tirangulorum latera homologa sunt proportionalia, hoc est vt AE ad FK, ita AB ad FG; & B C ad GH, &c. ipsaque triãgula similia habeant per 19. rationem duplicatam laterum homologorum; manifestum est, etiam ipsa triangula esse proportionalia. hoc est, vt A D E ad FIK, ita A BD ad FGI, &c. Quare per 12. quinti, vt vnum triangulum v. g. ADE ad F I k, ita

erunt

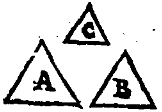
erunt omnia simul ad omnia. & ideo triãgulum v. g. ADE erit homologum polygono ACE, & triangulum FIk, homologum *polygono* FHK.

Tertia deniq; propositionis pars sequitur ex dictis. Polygonum enim ad polygonum est, vt triangulum, A B D, ad F G I: ratio autem trianguli ad triangulum, est duplicata laterum homologorum A B, FG per 19. ergo & polygonorum.

Coroll. Vt ergo prima trium proportionalium ad tertiam, ita est polygonum supra primam ad polygonum simile supra secundam.

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Eidem rectilineo similia; sunt inter se similia.



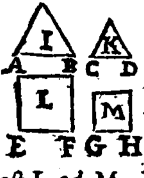
NAm similia eidem, sunt eidem æquiangula. Ergo A, B æquiangula ipsi C, sunt æquiangula inter se; ideoque per 4. similia.

PROPOS. 22. THEOR. 16.

Vt A B ad C D, ita sit E F ad G H; sintque I, K rectilinea similia: & L, M similia

vt

vt libet. Dico I K ; L M, esse proportionalia. & vice versa.



PRoportio enim I ad k, est duplicata proportionis A B ad C D, vel E F ad G H, per 19 vel 20. Est autem & ratio L ad M, duplicata eiusdem rationis E F ad G H. ergo vt I ad k, ita est L ad M. Vice versa. si vt I ad K, ita est L ad M; erit quoque vt AB ad CD, ita EF ad G H: quia rationes I ad k, & L ad M, quæ sunt eædem, sunt duplicatæ rationis AB ad CD, & E F ad G H, quæ proinde debent esse quoque eædem.

PROPOS. 23. THEOR. 17.

Parallelogramma æquiangula v.g. C A, CF: habent rationem compositam ex ratione lateris C B ad C G, & ratione lateris C D ad C E.

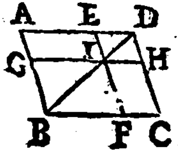
PArallelogrâma CA, CF, componãtur ad angulum C vt in 16. Vtque BC ad CG, ita sit quædam I ad K; & vt C D ad C E, ita K ad L, hoc est rationes laterum sint continuatæ in tribus terminis I, K, L. Ergo

per -

per defi. 5. ratio cōposita ex ratione laterū erit ratio I ad L. Dico vt I ad L, ita esse CA ad CF. Nam vt CB ad CG, hoc est vt I ad K ita est per primam CA ad CH; & vt CD ad CE, hoc est vt k ad L, ita CH ad CF. ergo ex æqualitate, vt I ad L, ita est CA ad CF.

PROPOS. 24. THEOR. 18.

Parallelogramma FG, HE, existentia circa diametrum DB; sunt similia toti AC.

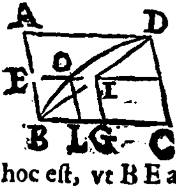


SVnt enim æquiãgula, quia habent cōmunes angulos ad B & D. vide Schol. 34. primi. Deinde per 4. huius vt BA ad AD, ita est BG ad GI. item vt BA ad BD, ita BG ad BI. vt autem BD ad BC. ita est BI ad BF. ergo ex æquo, vt BA ad BC, ita est BG ad BF. eodemque modo demonstrantur reliqua latera circa reliquos angulos esse proportionalia.

PRO-

PROPOS. 26. THEOR. 19.

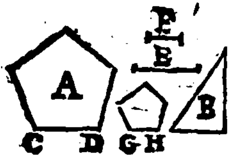
Parallelogramma ſimilia AC, EG; exiſtentia ad communem angulum B: Dico eadem exiſtere circa commune diametrum BID.



SI enim diameter ſecaret EI, in alio puncto O, eſſet etiam parallelogrammum LE, ſimile ipſi A C, per præcedentem, vtque B A ad A D, hoc eſt, vt B E ad EI, ita eſſet BE ad EO. & ideo per 9. quinti E I, E O, eſſent æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 7.

Dato rectilineo A; conſtruere aliud ſimile, & alteri B, æquale.

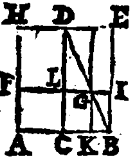


PEr vltimam ſecundi ipſis A, B, fiant æqualia quadrata, quorum latera ſint E, F; & vt E ad F, ſic fiat CD ad GH; & ſuper GH fiat per 18. figura ſimilis A, dico ipſam

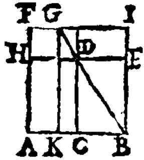
ipsam æqualem esse figuræ B. Nam per 22. vt quadratum E, ad quadratum F, hoc est, vt A ad B, ita est idem A, ad simile rectilineum ipsius G H. Ergo per 9. quinti G H, & B, sunt æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 20.

Super A C semissem totius A B, applicatum sit parallelogrammum A D ita vt à toto A B deficiat parallelogrammo C E, quod semper est æquale & simile ipsi A D. Deinde ad quoduis aliud segmentum A K, sit applicatum aliud parallelogrammum A G ita deficiens, vt defectus sit parallelogrammum K I, simile ipsi C E, hoc est circa communem diametrum B G D: Dico A G minus esse parallelogrammo A D.



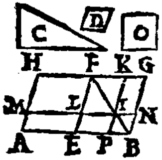
QVando punctum K est inter C, B, tunc parallelogrammum LH, quod per 36. primi est æquale L E, maius est quam GC: quia LE maius est quam G E, & GE, G C, sunt complemẽta æqualia per 43. primi. Addito ergo L A; erit A D, maius A G.



Quando vero punctum k, est inter A, C; tunc DF, DI sunt æqualia, quia sunt super æqualibus basibus, & D I, D K, æqualia, quia sunt cōplementa. ergo & D F, D K, sunt equalia, & GH minimus DK; adiectoque communi kH; totum AG, minus toto A D.

PROPOS. 28. PROBL. 8.

Ad datam AB applicare parallelogrammum A I deficiens, & æquale rectilineo C, ita vt defectus PN, sit similis parallelogrammo D. debet autem C non esse maius parallelogrammo A F applicato ad A E, semissem totius A B, & defectum E G, habente similem defectui P N, vel D iuxta præcedentem.



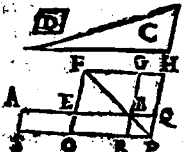
Differentia inter A F, vel E G, & C sit O, ipsique O sit æquale L K, & simile ipsi D, vel E G; sintque Lk, EG, circa cōmunem angulum E F G. ideoque per 26. circa communem diametrum B I F. Dico A I, cuius defectus est P N, similis D esse æquale ipsi C.

Quo-

Quoniam enim C & O, hoc est, C & Lk, æquantur ipsi EG, necesse est gnomonem K N P L, æquari ipsi C. Sed gnomoni æquale est A I; vt patet, si æqualibus AL, EN, adduntur æqualia complementa E I, I G. ergo A I, est æquale ipsi C.

PROPOS. 29. PROBL. 9.

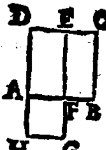
Ad datam rectam AB, dato rectilineo C, applicare parallelogrammum æquale, cum excessu simili ipsi D.



SEcta A B, bifariam in E, fiant circa communem angulum F, E G, O H, similia ipsi D & E G, sit applicatũ ad E B & O H, sit æquale ipsi E G, & C simul, hac enim ratione gnomon E R Q G, erit æqualis eidem C. Sed gnomoni æquale est S Q: vt patet si æqualibus A O, O B, seu æqualibus AO, BH, addatur commune O Q Ergo S Q, excedens parallelogrammo R Q, simili D, est æquale rectilineo C.

PROPOS. 30. PROBL. 10.

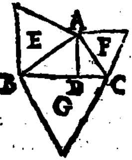
Rectam A B, secare ratione media & extrema.



Ad AD, latus quadrati ABCD, applicetur per 29. eidem quadrato æquale rectangulum DG, vt excessus sit quadratum A G. Ablato enim communi A E. remanebit FC, æquale quadrato A G, & per 14. erit vt BC, seu AB, ad AH, ita AH hoc est A F, ad F B.

PROPOS. 31. THEOR. 21.

In triangulo A B C sit rectus A; & E F, G, sint rectilinea similia: Dico E, F, simul, æqualia esse ipsi G.

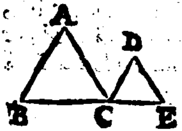


Demissà enim perpendiculari A D, fiunt B C, CA, C D; necnon B C, BA, B D continuè proportionales per coroll. 8. & per coroll. 19. & 20. vt C D ad BC, ita erit F ad G. item vt BD ad eandem B C, ita E ad idem rectilineum G. Ergo per 24. quinti, vt CD, BD

BD simul, ad BC, ita erunt F, E simul ad G. sed CD, BD, æquantur ipsi BC. ergo etiam F, E, adęquant G.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

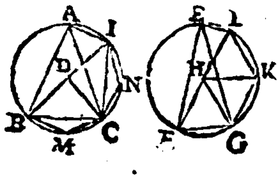
Si AB ad AC, ita sit DC ad DE; & AB, DC, sint parallela, & similiter AC, DE; & C punctum sit commune: Dico BC, CD esse in directum.



QVoniam enim circa angulos A, D, qui sunt æquales eidem ACD, per 29. primi, latera sunt proportionalia, sequitur per 6. angulum B, æqualem esse DCE. Additis ergo A & ACD. erit ACE, æqualis duobus A B. Sicut ergo A, B cum ACB, sunt æquales duobus rectis per 32. primi: ita erunt etiam duo ACE, ACB; & ideo BC, CD, erunt vna recta per 14. eiusdem.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

In æqualibus circulis, tam anguli BAC, FEG, ad peripheriam, quam BDC, FHG, ad centra: necnon sectores BDC, FHG eandem habent rationem, quam peripheriæ BC, FG.



Arcus BCI, sit vtcunque multiplex ipsius BC, & FGKL multiplex ipsius FG. Cum igitur anguli insistentes æqualibus peripherijs sint æquales; tam erunt multiplices anguli BDC, CDI ipsius BDC, quam est arcus BCI multiplex peripheriæ B C: & similiter anguli FHG, GHK, KHL, & arcus FGKL, erunt æquemultiplices, anguli FHG, & arcus FG. Et quando arcus BCI, est æqualis, maior, vel minor arcu FGKL; erunt etiam anguli BDC, CDI, æquales, maiores, vel minores angulis F HG, GHK, K H L. & ideo per 6. definit. quinti, erit vt arcus BC, ad FG, ita angulus B D C, ad FHG: immo & angulus B A C, ad angulum F E G; eo quod sunt semisses angulorum B D C, F H G, per 20. tertij.

Pro sectoribus fiant anguli B M C, C N I: qui sunt æquales, quia insistunt æqualibus peripherijs, quas abscindunt æquales, arcus B C. C I. Vnde per 24. tertij segmenta BMC, C N I, sunt æqualia. sunt autem & triangula BDC, C D I, æqualia, propter æqualitatem laterum. Ergo & sectores BDCM, CDIN. eruntque

præ-

prædicti sectores, & arcus BCI, æquemulplices sectoris, B D C M, & arcus B C. Et eodem modo erunt sectores F H G, G Hk, kHL, æquemultiplices sectoris FHG, & peripheriæ F G. Et ideirco rursus per 6. defin. quinti, vt B C, ad F G, ita erit sector BDC, ad sectorem F H G.

Coroll. 1. Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum.

Coroll. 2. Item vt est angulus ad centrum circuli ad quatuor rectos, ita peripheria anguli, ad totam circumferentiam.

De reliquis libris.

IN prioribus sex libris versata est Euclidis opera circa lineas, angulos, & figuras planas. Aggressurus autem figuras solidas, cum videret earum tractationem indigere lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus, & hę supponerent cognitionem numerorum: idcirco libro 7. 8. & 9. præmittit nonnullas affectiones numerorum, & in 10. agit de lineis commensurabilibus, & incommesurabilibus, & tandem in 11. aggreditur solida, & in 12. & 13. prosequitur quinque corpora regularia diligentius, & in particulari. De quibus etiam agunt 14. & 15. qui attribuuntur Hypsicli Alexandrino, & 16. quem addidit Franciscus Flussata.

Ego hic consulto omitto corpora regularia, & ea solum ex 11. attingo, quæ propriè sunt Elementa Solidorum.

EX LIBRO VNDECIMO.

DEFINITIONES.

1 SOLIDVM est quod trinam dimensionem habet, secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

2 Solidi extremum est superficies.

3 Linea recta A B, recta est, seu perpendicularis ad planum C D, cum ad omnes rectas B C, BD, B E concurrentes in eodem plano ad B, recta est, & perpendicularis.

4 Planum AB, rectum est ad planum C D; cum omnes O H, I K, quæ in plano AB, sunt perpendiculares ad communem sectionem BE, rectæ sunt ad planum C D.

H

lani B A D, D CA,

nis est figura solida, BCDE, quæ contlanis ABCD, DAE, EC, C E D, ab vno BCD, constituta ad

Prisma est figura solida planis contenta; quorum duo aduersa A B C, D EF, sunt æqualia, similia, ua vero B E F C; F rallelogramma.

lidum, quale intelmicirculo circa diagrè reuoluto.

neter fixa.

, est idem quod secti.

est, quæuis linea atque ad sphæræ sua.

nus est figura solialem format triãn rectangulum A B imcirculus A B, in im integrè reuoluonius, quando latera lia: amblygonius,

6 quan-

De reliquis libris.

IN prioribus sex libris versata est Euclidis opera circa lineas, angulos, & figuras planas. Aggressurus autem figuras solidas, cum videret earum tractationem indigere lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus, & hę supponerent cognitionem numerorum: idcirco libro 7. 8. & 9. præmittit nonnullas affectiones numerorum, & in 10. agit de lineis commensurabilibus, & incommesurabilibus, & tandem in 11. aggreditur solida & in 12. & 13. prosequitur quinque corpora regularia diligentius, & in particulari. De quibus etiam agunt 14. & 15. qui attribuuntur Hypsicli Alexandrino, & 16. quem addidit Franciscus Flussata.

Ego hic consulto omitto corpora regularia, & ea solum ex 11. attingo, quæ propriè sunt Elementa Solidorum.

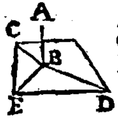
EX LIBRO VNDECIMO.

DEFINITIONES.

1 SOLIDVM est quod trinam dimensionem habet, secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

2 Solidi extremum est superficies.

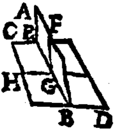
3 Linea recta A B, recta est, seu perpendicularis ad planum C D, cum ad omnes rectas B C, BD, B E concurrentes in eodem plano ad B, recta est, & perpendicularis.



4 Planum AB, rectum est ad planum C D; cum omnes O H, I K, quæ in plano AB, sunt perpendiculares ad communem sectionem BE, rectæ sunt ad planum C D.

5 

Angulus inclinationis, quo recta AB, inclinatur ad planum CD, eſt angulus BAE, quam B A, facit cum A E, ducta per punctum E, in quod cadit *perpendicularis* B E.

6 

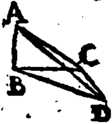
Plani A B, inclinati ad planum C D; *inclinationis* angulus eſt FGH, cum GF, G H, ſunt perpendiculares ad communem interſectionem E B.

7 Planum ad planum dicitur inclinatum ſimiliter, cum dicti inclinationum anguli fuerint æquales.

8 Parallela plana ſunt, quæ non poſſunt concurrere.

9 Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus, & multitudine æqualibus planis continentur.

10 Similes, & æquales ſunt, quæ planis ſimilibus, & multitudine, magnitudineque æqualibus continentur.

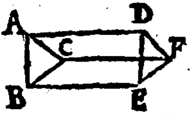
11 

Solidus angulus eſt inclinatio *plurium linearum non* in eodem plano concurrentium; & ideo cõtinetur pluribus *angulis planis*, quàm duobus. Qualem conſtituunt tres lineæ A B, A C, A D, ad concurſum A, & tres

& tres anguli plani B A D, D C A, C A B.

12 

Pyramis est figura solida, v. g. A B C D E, quæ continetur planis ABCD, DAE, AEB, BEC, C E D, ab vno plano ABCD, constituta ad vnum punctum E.

13 

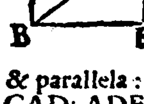
Prisma est figura solida planis contenta; quorum duo aduersa A B C, D EF, sunt æqualia, similia, & parallela: reliqua vero B E F C; F C A D; A D E B; parallelogramma.

14 Sphera est tale solidum, quale intelligitur formari à semicirculo circa diametrum fixam, integrè reuoluto.

15 Axis est *illa diameter fixa*.

16 Centrum Spheræ, est *idem* quod semicirculi circumducti.

17 Diameter speræ, est, quæuis linea per centtum acta, atque ad sphęræ superficiem terminata.

18 

Conus est figura solida, qualem format triãgulum rectangulum A B C, cum circulus A B, in seipsum integrè reuoluitur. estque orthogonius, quando latera A B, B C, sunt æqualia: amblygonius, quando B C, maius est, quàm A B. & oxygonius, quando minus.

Ab Apollonio in conicis traditur alia coni definitio vniuersalior.

20 Basis coni, est circulus, quem in reuolutione describit B C. Superficies coni, quam describit A C, & A, est vertex coni.

21  Cylindrus est figura solida formata à parallelogrammo rectangulo v.g. ABCD, circa A B, integrè reuoluto.

22 Axis, est ipsa AB, manens.

23 Bases sunt circuli descripti à lateribus AD, BC. reliquum autem CD, describit superficiem cylindricam.

24 Similes coni, & cylindri, sunt quorum axes & diametri basium sunt proportionales.

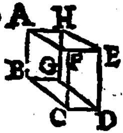
25 Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

26 Tetraedrum, quæ sub quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus continetur.

27 Octaedrum, quæ sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris.

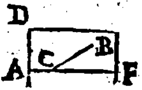
28 Dodecaedrum, quæ sub 12. pentagonis æqualibus, & æquilateris.

29 Icosaedrum, quæ sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris.

30. 
Parallelopipedũ, est figura solida sex figuris quadrilateris contenta, ita vt aduersæ sint parallelæ.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

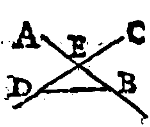
Si lineæ rectæ pars v. g. AC existat in plano DF; reliqua CB, non existit in sublimi.



SI enim CB esset in sublimi, tota recta A C B non attingeret superficiem D F; ergo non esset plana. iuxta definitionem 7. primi, secundum Heronem.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Rectæ AB, C D, se mutuo secantes in E, & similiter omne triangulum, existunt in vno plano.

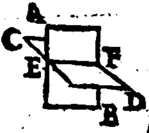


DVcatur B D, & circa DC, intelligatur circumduci planum; quo trãseunte per B, erunt D B, E C, in eodem plano cum C D. ergo &c.

PRO-

PROPOS. 3. THEOR. 3.

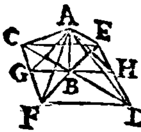
Duorum planorum A B, C D, communis sectio E F, est linea recta.



PVncta enim E, F, sunt communia, ergo & recta EF. debet enim EF, per defin 7. primi extendi tam per planum AB, quam CD.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta A B, duabus C D, E F, perpendiculariter insistat ad concursum B: erit A B ad planum C E D F, recta.



FIat B C, æqualis BD. & BF, æqualis BE; nectanturque FC, ED; & ducta GBH vtcunque per B, nectantur A F, A G, A C, AE, AH, A D. Eritque primo FC, æqualis ED, & angulus BFC, angulo BED per 4. primi; quia circa æquales angulos ad verticem B, latera B C, B F sunt æqualia lateribus B D, B E.

2. Latera B G, G F, sunt æqualia lateribus B H, H E, per 26. primi, quia B F, B E,

B E, sunt æquales, & adiacent angulis æqualibus.

3. AC, A D, sunt æquales, per 4. primi; quia circa rectos ad B, A B, B C, sunt æquales A B, B D. & simili argumento sunt æquales AF, AE.

4. Angulus A F C, est æqualis A E D; per 8. primi; quia A F, F C sunt æquales A E, E D, & basi A C, basi A D.

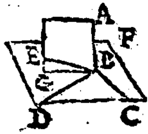
5. A G, A H, sunt æquales per 4. primi; quia circa æquales angulos AFG, A EH, sunt latera lateribus æqualia.

6. Per 8. primi anguli A B G, A B H sunt æquales & recti, quia A B, B G sunt æquales A B, B H, & basis A G, basi A H.

Eodemque modo demonstratur eandem AB perpendicularem esse ad quascunque alias G B H.

PROPOS. 13. THEOR. 5.

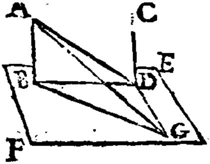
Recta AB, insistat tribus BC, B D, B E, ad angulos rectos: Dico omnes tres in uno plano esse.



SI enim B E non est in plano D F, in quo sunt BD, BC; erit saltem in eodem cum recta A B, nempe in AG, quod cum FD, FD, intelligatur facere communem sectionem B G. Quoniam igitur A B, recta est ad planum F D, per 4. huius; erit eadem A B, etiam perpendicularis ad B G, per defin. 3. atque ita anguli ABG, ABE, recti erunt & æquales quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Rectæ A B, C D, sint rectæ ad planum E F: Dico ipsas esse parallelas.



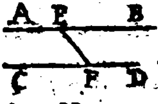
Iungantur A D, B D, & in plano EF, recta DG, sit perpendicularis ad BD, & æqualis A B; nectanturque BG, AG. Eritque primo B G, æqualis A D, per 4. primi; quia circa rectos B, D, sunt B D, B A, æquales B D, DG. secundo BG, BA sunt æquales AD, DG, & basis A G est communis; ergo angulus A D G est æqualis A B G. Sed hic est rectus per defin. 3. ergo & ille. & quia per eandem definitionem 3. eadem GD est quoque recta ad C D. erit igitur eadem D G, recta ad tres B D, A D, D C. & ideo per præcedentem eædem tres sunt in vno plano. Sed & A B, est in eodem, cum B D, D A, plano. ergo etiam A B, C D, sunt in vno plano, & propter

rectos

rectos A B D, C D B, sunt per 29. primi parallelæ.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

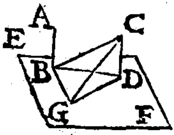
Parallelas A B, C D, nectat utcumque E F: Dico omnes tres esse in uno plano.



NAm A B, C D, sunt in eodem plano per defin. 34. primi; & E F, in eodem per 7. defin. secundum Heronem.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

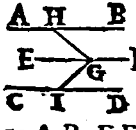
Rectæ A B, C D, sint parallelæ, & C D sit recta ad planum E F: Dico etiam A B rectam esse ad planum E F.



COnstructio est similis sextæ. hoc est BG fit perpendicularis ad B D, & æqualis CD,&c. Quoniam igitur circa rectos CDB, G B D. BD, DC, sunt æquales DB, B G; erit basis B C, æqualis G D, per 4. primi & quia rursus DC, DG, sunt æquales CB, BG, & CG, communis; erit per 8. primi CBG, æqualis recto C D G. Atque ita G B, erit perpenpendicularis ad duas BD, BC; ideoque per 4. recta ad planum CBD. & quia in eodem existit AB, erit recta AB, perpendicularis ad B G, per defin. 3. Est autem eadem A B, etiam recta ad BD; ergo per 4. recta est ad planum G B D. hoc est ad planum E F.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Quæ eidem sunt parallelæ, etiamsi sint in diversis planis; sunt nihilominus parallelæ inter se.

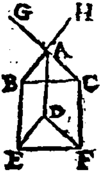


QVando AB, C D, sunt parallelæ eidem E F, & omnes in eodem plano, iam propositio est demonstrata ad 30. primi. Hic ergo A B, E F, sint in vno, & C D, E F, in alio plano: & G H, GI, sint perpendiculares ad E F. eritque per 4. E F recta ad planum HGI. & quia AB, C D, sunt eidem EF, parallelæ; erunt etiam AB, CD, ad idem planum rectæ, per 8. & per 6. parallelæ inter se.

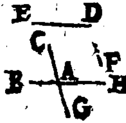
PROPOS. 10. THEOR. 10.

Rectæ A B, A C, concurrentes in A sint parallelæ rectis D E, D F, concurrentibus in D:

D: Dico angulos B AC, EDF, esse æquales, vel æquiualere duobus rectis.



IN priori figura AB, AC, & D E, E F, sunt parallelæ, & similiter positę: item AH, AG; sunt parallelæ eisdem D E, E F; sed non similiter positæ, quia AH, AG, sunt sursum, & D E, DF deorsum: Dico in vtroque casu angulos BAC, H A G æquales esse angulo E D F. Quando A H, A G non sunt similiter positæ, erunt saltem protractæ similiter positæ, quales sunt AB, AC, quarum illa fiat æqualis DE, & hæc ęqualis D F; nectanturque reliquæ lineæ. ex quibus B E, CF, erunt eidem A D parallelæ, & æquales per 33. primi; & ideo æquales & parallelæ inter se; & quia easdem coniungunt rectæ B B, E F, erunt etiam per eandem 33. B C, EF æquales, & parallelæ. Et quia in triangulis B A C, E D F, præter bases B C, EF æqualia sunt latera AB, AC, lateribus D E, D F, erit per 8. primi angulus B A C, necnon H A G, æqualis angulo E D F.



In posteriore figura rectæ AB, AH, sunt iterum parallelæ rectæ DE; & AC, AG, parallelæ rectæ D F, & quidem AB, D E positæ sunt similimiliter, at AC, D F dissimiliter ; est enim DF, deorsum, at AC sursum : item A G, D E, sunt positæ similiter , sed AH est ad dexteram puncti A, & D E, ad sinistram puncti D: Dico in hoc casu tam angulum BA C, quam H A G, constituere angulos duobus rectis æquales cum E D F. Producta enim C A, quæ non est similiter posita cum DF, fit etiam A G, similiter posita. & ideo per demonstrata in prioribus casibus angulus B A G, est æqualis angulo E D F; adiectoque communi B A C. fiunt duo BAC, BAG æquales duobus BAC, EDF. illi autem duo sunt æquales duobus rectis , per 13. primi : ergo etiam isti duo sunt æquales duobus rectis. idemque demonstratur eodem modo de duobus angulis E D F, H G.

PROPOS. II. PROBL. I.

A puncto A, in sublimi, ad planum B C, perpendicularem ducere.

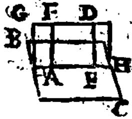
IN plano B C, ducatur quæuis D E, in quam ex A, demittatur perpendicularis A F, per 12. primi; & G F H sit perpendicularis ad eandem D E in plano B C, & in hanc cadat alia perpendicularis ex

A;

A, nempe A I; Dico ipsam esse rectam ad planum B C. Sit enim KIL parallela D E, sicut ergo D F, recta est ad planum A F L, per 4. ita erit quoque k I L, per 8. hoc est angulus AIL, erit rectus. Est autem & A I H, rectus. ergo per 4. A I, est recta ad planum BC; in quo existunt GH, K I.

PROPOS. 12. PROBL. 2.

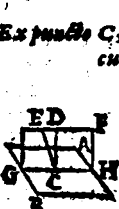
Ad datum planum B C, à puncto A, perpendicularem excitare.



EX alio puncto D, demittatur perpendicularis per præcedentem nempe D E; & per E,A, ducatur HA; & in plano DEA, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF: eritque A F, recta ad B C, per 8.

PROPOS. 13. THEOR. 11.

Ex puncto C, vna tantum linea est perpendicularis ad planum AB.

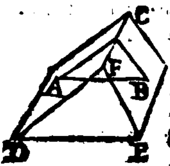


SI enim essent duæ C D, CE; essent parallelæ per 6. quod est absurdum, quia concurrunt in C.

PRO-

PROPOS. 14. THEOR. 12.

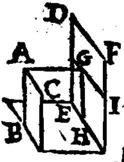
Eadem AB sit recta ad duo plana CD, CE: Dico eadem plana esse parallela.



NAm si concurrunt, & L in cõmuni sectione FC, sumatur quodvis punctum L, nectanturque AL, BL: Erunt in triangulo ABL, duo anguli LAB, LBA, per defin. 3. recti, contra 17. primi.

PROPOS. 15. THEOR. 13.

In plano BC, recta AB, AC, sint parallela rectis DE; DF, in alio plano FE: Dico ipsa plana esse parallela.



EX A, ducatur in planum EF, perpendicularis AG, per 11. & per G ducantur GH, GI, parallelæ DE, DF, quæ per 9. erunt quoque parallelę AB, AC: & ideo per 29. primi, anguli GAB, AGH erunt duobus rectis æquales. & quia AGH rectus est, erit & GAB, rectus. immo & GAC, AGI, erunt similiter recti; ideoque

que eadem A G erit ad vtrumque planum recta, & per præcedentem BAC, EDF, erunt plana parallela.

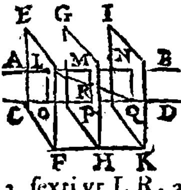
PROPOS. 16. THEOR. 14.

Si duo plana parallela A B, C D, secentur plano E E: communes sectiones E H, GF, erunt parallelæ.

SI enim concurrerent v.g. in I; concurrerent etiam ipsa plana, quod est contra hypothesim.

PROPOS. 17. THEOR. 15.

Si duæ lineæ A B, C D, secentur planis parallelis E F, G H, I K, in L, M, N, & O, P, Q; secabuntur similiter.



IVngatur LQ, occurrens plano GH in R, à quo ad M, & P, ducatur RM, RP; eritque per præcedentem R M, parallela N Q; & R P parallela L O; & ideo per 2. sexti vt L R, ad R Q ita erit tam L M ad M N, quam OP, ad P Q, &c.

PRO-

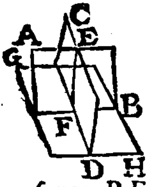
PROPOS. 18. THEOR. 16.

Sit AB, recta ad planum C D: Dico omnia plana per A B, ducta esse recta ad planum C D.

PEr A B, sit ductum planum EF, faciens cum CD, communem sectionem GBF, & H I, sit parallela AB, in plano ABF; quæ per 8. erit quoque recta ad planum CD; & ita de omnibus alijs rectis HI. ergo per defin. 4. planum EF, rectum est ad C D.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Si plana A B, C D, sint recta ad planum G H: erit quoque eorundem communis sectio E F, ad idem planum recta.

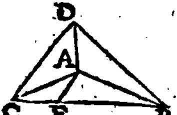


QVæ enim educitur in plano A B, perpendicularis ad DF, ea est recta ad planum G H per defin. 4. & similiter ea, quæ educitur ex eodem puncto F, perpendiculariter super B F, in plano C D, est recta ad idem

idem planum GH. Ergo per 11. F E, F E sunt vna linea, hoc est, communis sectio F E, erit ad G H, recta.

PROPOS. 26. THEOR. 18.

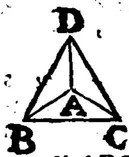
Angulus solidus A, contineatur tribus angulis planis B A C, C A D, D A B. Dico quolibet duos esse reliquo maiores.



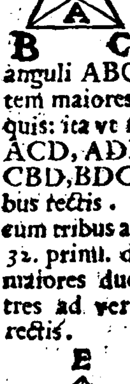
QVando omnes tres sunt æquales, manifesta est propositio. quando duo sunt æquales, & tertius minor; similiter. quando vero B A C est maximus probatur reliquos B A D, CAD esse ipso maiores hoc modo. Fiat BAE æqualis B AD, & AE æqualis AD; Et ducta vtcunque BEC iungantur B D, C D. Eruntque BE, ED, æquales per 4. primi. Duo autem latera DB, DC; sunt per 20. primi maiora reliquo B C; demptis ergo æqualibus BD, BE; remanebit CD, maior CE, & angulus D A C, erit maior C A E; per 24. primi, quia CA, AD, sunt æquales C A, AE, & basis C D, maior basi C E. Quare DAC, DAB, simul sunt maiores C A E, EAB; hoc est, toto BAC.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Omnes anguli plani continentes angulum solidum, simul sumpti: sunt minores quatuor rectis.



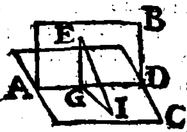
Solidus A, contineatur primo tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Ductis ergo BC, CD, DB; erunt tres anguli *solidi* ad puncta B, C, D; & duo plani anguli ABC, ABD, erunt per præcedentem maiores tertio CBD; & ita de reliquis: ita vt sex anguli ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC, sint maiores tribus CBD, BDC, DCB, hoc est maiores duobus rectis. *Dicti* autem sex anguli vna cum tribus ad A, sunt æquales *6*. rectis, per *32*. primi. demptis ergo 6. illis, qui sunt maiores duobus rectis, remanebunt isti tres ad verticem A, minores quatuor rectis.



Secundo contineatur solidus A quinque angulis planis: eruntque omnes quinque in pentagono BCDEF per *32*. primi *6*. rectis æquales, & 10. anguli ABC, ABF, ACB, ACD, ADC, ADE, A D E,&c. erunt sex rectis maiores, sicut in præcedenti demonstratione. Omnes autem 10. vna cum 5. angulis ad A, sunt 10. rectis æquales: sublatis ergo 10. illis qui sunt maiores sex rectis, remanebant 5. ad A, minores quatuor rectis. & ita de alijs.

PROPOS. 38. THEOR. 33.

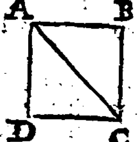
Planum A B, sit rectum ad planum A C, & ex puncto E plani A B, in planum AC, cadat perpendicularis E G: Dico E, esse ad communem sectionem A D.



Si minus, sit alia perpendicularis EI, & I G, sit perpendicularis ad A D, ideoque per 4. defin. recta ad planum AB, & perpendicularis ad EG. in triangulo igitur EGI erunt duo recti EGI, EIG, quod est contra 17. primi.

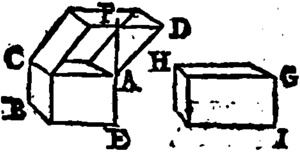
PROPOSITIONES aliæ ex iisdem Elementis depromptæ, quarum demonstrationes, hoc compendium Clauio relinquit.

EX X.



PRopos. 117. In quadratis diameter & latus sunt lineæ incommensurabiles. Hoc est, proportio diametri AC, ad latus AB, nulla ratione potest exhiberi numeris; Nulla enim datur earundem rectarum AC, AB, mensura communis.

EX XI.

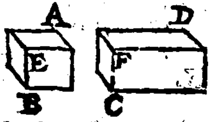


PRoposit. 29. 30. & 31. Solida parallelepipeda super eadē, vel super equalibus basibus constituta & in eadem altitudine; sunt æqualia.

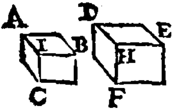
Talia

Talia sunt parallelepipeda AB, CD habentia communem basim A C, & æquales altitudines A E, A F.

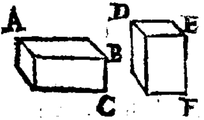
Item parallelepipeda AB, HI, habentia æquales bases AC, GH, & æquales altitudines A E, G I.



Propos. 32. Solida parallelepipeda A B, C D, sub eadem vel æquali altitudine BE, C F, inter se sunt vt basis AE, ad basim D F.

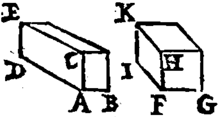


Propos. 33. Similia solida parallelepipeda, v.g ABC, DEF, in quibus tria plana A B, BC, C A, circa angulum solidum I, sunt similia tribus planis D E, EF, FD, circa angulum solidum H, æqualem ipsi I, sunt in triplicata ratione laterum homologorum, qualia sunt CI, F H. Hoc est, si ratio C I, ad F H, continuetur vsque ad quartum terminum, vt primus ad quartum, ita erit parallelepipedum AB C, ad parallelepipedum D E F.

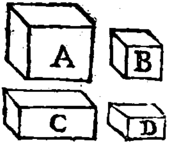


Propos. 34. Aequalium parallelepipedorum A B C, D EF, bases & altitudines reciprocantur. Hoc est, vt basis AB, ad basim DE, ita est alti-

altitudo E F, ad altitudinem B C. Et vice versa, si vt AB, ad DE, ita est EF, ad BC, parallelepipeda sunt æqualia.



Propos. 36. Si in parallelepipedo BE, circa angulum solidum A, tria latera AB, AC, AD, sint continuè proportionalia: & in parallelepipedo G K, circa angulum F æqualem ipsi A, omnia tria latera FG, FH, FI, sint æqualia mediæ proportionali A C, erunt parallelepipeda B E, G K, æqualia.



Propos. 37. Si fuerit vt recta A ad B, ita C ad D. fuerintque parallelepipeda A, B inter se similia; & parallelepipeda C, D inter se similia, erit quoque vt parallelepipedum A ad B, ita C ad D, & vice versa.

EX XII.

PRopos. 1. Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt vt à diametris quadrata.

Propos. 2. Circuli inter se sunt à diametris quadrata.

Propos. 5. & 6. Eiusdem altitudinis Pyramides tam Triangulares, quam Polygonæ: inter se sunt, vt bases.

Pro-

Propos. 8. Similes Pyramides sunt in triplicata ratione laterum homologorum, vt dictum est Propos. 33. vndecimi de parallelepipedis.

Propos. 9. Aequalium pyramidum reciprocantur bases & latera.

Propos. 10. Conus tertia pars est Cylindri eiusdem basis, & altitudinis.

Propos. 11. Tam Coni, quam Cylindri eiusdem altitudinis, inter se sunt bases.

Propos. 12. Tam Coni, quam Cylindri similes, sunt in triplicata ratione diametrorum.

Propos. 15. Tam Conorum quàm Cylindrorum æqualium, reciprocantur altitudines & bases.

Propos. 16. Sphæræ sunt in triplicata ratione diametrorum.

ELENCHVS PROPOSITIONVM SEX LIBRORVM EVCLIDIS

Sicut habentur apud Clauium.

PROPOSITIONES Libri Primi.

1 SVPER data recta linea terminata triãgulum æquilaterum constituere.

2 Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque

vtrique, *habeant vero & angulum angulo* æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: *Et basim basi æqualem* habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, *ac reliqui anguli reliquis* angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus *æqualia latera* subtenduntur.

5 Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli inter se æquales erunt.

6 Si tri anguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliȩ duæ rectȩ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrúque vtrique, æqualia; habuerint vero & basim basi ęqualem: Angulum quoque sub ęqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 Datum angulum rectilineum bifariam secare.

10 Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

11 Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineę non ad easdem partes ductę, eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsę rectę lineę.

15 Si duæ rectæ lineę se mutuo secuerint, angulos ad verticem ęquales inter se efficient.

16 Cuiuscunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

17 Cuiuscunque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

18 Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

19 Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

20 Om-

20 Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

21 Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectę lineę interius constitutę fuerint: hæ constitutę reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

22 Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis ęquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

23 Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo ęqualem angulum rectilineum constituere.

24 Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub ęqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi maiorem habebunt.

25 Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrumque vtrique, basim vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis cōtentum angulo maiorem habebunt.

26 Si duo triangula duos angulos duo-

bus angulis ęquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri ęquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 Si in duas rectas lineas incidens linea alternatim angulos æquales, inter se fecerit: Parallelæ erunt inter se illæ rectę lineæ.

28 Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem paries, ęqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis ęquales: Parallelę erunt inter se ipsæ rectę lineę.

29 In parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se ęquales efficit; & externũ interno, & opposito, & ad easdem partes ęqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis ęquales facit.

30 Quæ eidem rectæ lineę parallelę, & inter se sunt parallelę.

31 A dato puncto, datę rectę lineę parallelam rectam lineam ducere.

32 Cuiuscunque trianguli vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est ęqualis; Et trian-

guli

guli tres interni anguli duobus ſunt re-
ctis ęquales.

33 Rectæ lineæ quæ ęquales, & paralle-
las lineas ad partes eaſdem coniungunt;
& ipſæ ęquales, & parallelæ ſunt.

34 Parallelogrammorum ſpatiorum æ-
qualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo &
latera, & anguli: Atque illa bifariam
ſecat diameter.

35 Parallelogramma ſuper eadem baſi,
& in eiſdem parallelis conſtituta, inter
ſe ſunt æqualia.

36 Parallelogramma ſuper æqualibus
baſibus & in eiſdem parallelis conſtitu-
ta, inter ſe ſunt æqualia.

37 Triangula ſuper eadem baſi conſti-
tuta, & in eiſdem parallelis, inter ſe
ſunt ęqualia.

38 Triangula ſuper ęqualibus baſibu
conſtituta, & in eiſdem parallelis, inte
ſe ſunt æqualia.

39 Triangula æqualia ſuper eadem baſi
& ad eaſdem partes conſtituta, in eiſden
ſunt parallelis.

40 Triangula ęqualia ſuper æqualibu
baſibus, & ad eaſdem partes conſtitu-
in eiſdem ſunt parallelis.

41 Si parallelogrammum cum triangu
lo eandem baſim habuerit, in eiſdemqu
fuerit parallelis: Duplum erit paralle
logrammum ipſius trianguli.

42 Da-

42 Dato triangulo æquale parallelogrãmum constituere in dato angulo rectilineo.

43 In omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 In triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

48 Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quę à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

PROPOSITIONES Libri Secundi.

1 SI fuerint duæ rectæ lineę, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, ęqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3 Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, ęquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

4. Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, ęquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus

libus segmentis totius comprehensum; vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6 Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

7 Si recta linea secetur vtcunque; Quod à tota quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

8 Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

9 Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 Si

10 Si recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 Datam rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

12 In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum cõprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub

per-

perpendiculari prope acutum angulum.

14 Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

PROPOSITIONES

Libri Tertij.

1 Dati circuli centrum reperire.

2 Si in circuli peripheria duo quęlibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per cētrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 Si in circulo duæ rectæ lineę sese mutuo secent non per centrum extensæ: Sese mutuo bifariam non secabunt.

5 Si duo circuli sese mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

6 Si duo circuli sese mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.

7 Si in diametro circuli quodpiam suma-

ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum; minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

8 Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectę quędam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt: in conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum diametrum interponitur; aliarum autem ea, quę propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum

culum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ ęquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

10 Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

11 Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 *Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.*

13 Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

14 In circulo æquales rectæ lineæ ęqualiter distant à centro: & quę ęqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

15 In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

16 Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere,

cere, quę datum tangat circulum.

18 Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

19 Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli, ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21 In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se ęquales.

22 Quadrilaterorũ in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

23 Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad eadem partes.

24 Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

26 In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 In

26 In æqualibus circulis ęquales anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 In æqualibus circulis, anguli, qui ęqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

28 In æqualibus circulis, ęquales rectæ lineæ ęquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 In ęqualibus circulis, æquales peripherias, ęquales rectæ lineæ subtendunt.

30 Datam peripheriam bifariam secare.

31 In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

33 Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum

lum

lum ęqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 Si in circulo duæ rectę lineę sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æqualis erit ei, quod sub segmentis alterius comprehéditur, rectangulo.

36 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tágat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprehéditur rectangulum, ęquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

37 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duę rectæ lineę, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

PROPOSITIONES
Libri Quarti.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare ęqualem datæ rectę lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

2 In dato circulo triangulum describere dato triangulō ęquiangulum.

3 Circa datum circulum triangulum describere, dato triangulo ęquiangulum.

4 In dato triangulo circulum inscribere.

5 Circa datum triangulum circulum describere.

6 In dato circulo quadratum describere.

7 Circa datum circulum quadratum describere.

8 In dato quadrato circulum describere.

9 Circa datum quadratum circulum describere.

10 Isosceles triangulum cōstituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.

11 In dato circulo pentagonum æquilaterum

laterum & ęquiangulum inscribere.

12 Circa datum circulum pentagonum ęquilaterum, & aequiangulum describere.

13 In dato pentagono ęquilatero, & ęquiangulo circulum inscribere.

14 Circa datum pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum circulum describere.

15 In dato circulo *hexagonum*, & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

16 In dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum describere.

PROPOSITIONES

Libri Quinti.

1 SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, ęquemultiplices: quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.

2 Si prima secundæ ęque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundę æquemultiplex, atque sexta quartæ: Erit & composita prima

cum quinta, secundę ęquemultiplex, atque tertia cum sexta, quartę.

3 Si sit prima secundę ęquemultiplex, atque tertia quartę; sumantur autem ęquemultiplices primę, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarum vtraque vtriusq; ęquemultiplex, altera quidem secundę, altera autem quartæ.

4 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam ęquemultiplices primę & tertię ad ęquemultiplices secundę & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

5 Si magnitudo magnitudinis ęque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

6 Si duę magnitudines duarum magnitudinum sint ęque multiplices, & detractæ quędam sint earũdem ęquemultiplices. Et reliquę eisdem aut ęquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

7 Aequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad ęquales.

8 Inęqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 Quæ ad eandem, eandem habent ratio-

tio-rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eę quoque sunt inter se ęquales.

10 Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

11 Quæ eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem.

12 Si sint magnitudines quotcũque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13 Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

14 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam tertia, maior fuerit; Erit & secunda maior, quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartę: Si vero minor, & minor erit.

15 Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mu-

tuo respondent, ita sumantur.

16 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17 Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hę quoque diuisæ proportionales erunt.

18 Si diuisę magnitudines sint proportionales; hę quoque compositę proportionales erunt.

19 Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

20 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, maior fuerit: Erit & quarta quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta ęqualis sextæ: Si in illa minor, hæc quoque minor erit.

21 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis ęquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex ęquo autem prima, quam tertia maior fuerit; Erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit ęqualis, erit & quarta ęqualis sextę: sin illa minor, hęc quoque minor erit.

22 Si

22 Si sint quotcunque magnitudines, & alię ipsis ęquales numero, quę binę in eadem ratione sumantur: Et ex ęqualitate in eadem ratione erunt.

23 Si sint tres magnitudines, alięque ipsis ęquales, numero, quę binę in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex ęqualitate in eadem ratione erunt.

24 Si prima ad secundam, eandem *habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem* & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

25 Si quatuor magnitudines proportionales *fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores* erunt.

26 Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

27 Si prima ad secundam *habuerit* maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

28 Si prima ad secundam habuerit ma-

iorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam, maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

29 Si composita prima cum secunda ad secundam *maiorem habuerit* proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam, maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

30 Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

31 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundę posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex ęqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

32 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam

quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

33 Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

34 Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum, maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

PROPOSITIONES

Libri Sexti.

1 TRiangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

2 Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

3 Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; Recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli angulum.

4 Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum ęquales angulos, & homologa sunt latera, quæ ęqualibus angulis subtenduntur.

5 Si

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

6 *Si duo triangula vnum angulum vni angulo ęqualem,& circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: ęquiangula erunt triangula,æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.*

7 Si duo triangula vnum angulum vni angulo ęqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos,circum quos proportionalia sunt latera.

8 *Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit*: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 Aequalium, & vnum vni ęqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni angulo ęqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum ęquales angulos, illa sunt æqualia.

16 Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, ęquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum ęquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo: illæ quatuor rectę lineę proportionales erunt.

17 Si tres rectę lineæ sint proportionales; quod sub extremis comprehendi-

tur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur quadrato: illæ tres rectę lineę proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere.

19 *Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.*

20 *Similia polygona in similia triangula* diuiduntur, & numero ęqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 Quæ eidem rectilineo sunt similia; *& inter se sunt similia.*

22 Si quatuor rectę lineę proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam rectæ lineæ *proportionales erunt*.

23 Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quę ex lateribus componitur.

24 In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma

& toti, & inter se sunt similia.

25 Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 Si à parallelogrammo parallelogrãmum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 Ad datam lineam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri parallelogrãmo dato. Oportet autẽ datum rectilineũ, cui æquale applicandũ est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cũ similes fuerint, defectus & eius, quod ad dimidiã applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

29 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 Propoſitam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione ſecare.

31 In rectangulis triangulis, figura quęuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

32 Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper vero & ſectores, quipppe qui ad centra conſiſtunt.

ISAACI MONACHI
SCHOLIA
IN EVCLIDIS ELEMENTA
GEOMETRIAE.

Euclidis Elementorum Geometriæ Liber I.

DEFINITIONES.

P*VNCTVM est.* Vtitur Euclides doctrina synthetica, quia nõ à superficie facit initium: sed à puncto. Punctum vero si fuerit in linea: tum Peras terminus: sed in axe, polus: in circulo denique nominatur centrum. Ea etiam quæ sunt & existunt vel per nomina explicantur, vel per definitiones, aut etiam descriptiones: vel denique per longiores explicationes.

Figura. Vno quidem termino continetur circulus, quia vna linea circumferentiali clau-

clauditur. pluribus autē terminis, reliquæ figuræ, vtpote trilateræ, & multilateræ.

Circulus. In definitione circuli ponitur: intra figuram: propter polum. Polus enim in superficie eadem cum circulo non est: sed extra, & sublimiore: & ab eo ad circuli cirumferentiam ducuntur rectæ lineæ æquales.

Orthogonium. Fieri enim nequit, vt trigonum aliquod habeat duos angulos rectos propterea quod in omni trigono, tres anguli sine æquales duobus rectis. Eodem modo nō potest dari trigonum, in quo sint anguli obtusi, quia duo anguli obtusi, duobus rectis sunt maiores.

COMMVNES SENTENTIAE, *quæ etiam Axiomata à quibusdam appellantur.*

QVAE *eidem sunt æqualia.* Postulatis & axiomatibus commune hoc est: quod nulla indigeant demonstratione, aut geometrica probatione: sed simpliciter sumuntur pro veris, certis, & manifestis: denique principiorum loco ponuntur.

Diferunt etiam inter se, ratione qua theoremate problematibus: sicuti enim in theoremata volumus id scire & cognoscere, quod rem consequitur subiectam: & in pro-

problemate, efficere aliquid, quod ad faciendum proponitur. Ita etiam in axiomatibus ea sumuntur, quæ per se facile intelligi possunt: atque sua natura nota & manifesta sunt: atque facilem habent apprehensionem.

In postulatis vero eiusmodi qualita sumuntur, quæ facilem habent effectionem, ita vt mens nostra, nostræque cogitationes non multum laborent in talium quęstionum sumptione, neque magna est delineationis varietas aut difficultas. Quare cognitio aperta, & indemonstrabilis: & assumptio propositi absque demonstratione distinguunt postulata atque axiomata: sicuti cognitio per demonstrationem facta: & quæstionis sumptio per delineationem facta: discernunt theoremata à problematibus. Quapropter necesse est vt vtrumque horum, Axioma inquam, & Postulatum, habeant simplicem, & facilem atque comprehensibilem, & immediatam naturam. Ita tamen vt postulatum tanquam factu facile sumatur, & suppeditet nobis viam efficiendi & inueniendi quandam materiam facilem ad faciendam demonstrationem: axioma denique vt cognitu facile, & concessum atque affirmatum sumitur, neque de materia, vt in postulatis: sed de accidente propositiones hæ theorematice fiunt.

PRO-

PROPOSITIONES libri primi Elementorum Euclidis.

PROPOSITIO I.

Problema.

S*uper data linea recta*. Scire conuenit. Geometriæ theoremata & problemata in sex diuidi partes. *Protasin, Ekthesin, Diorismum*, quem & *Prodiorismum*, appellant, *Kataskevin, Apodeixin*, & *Symperasma*. *hoc est*. Propositionem, Explicationem dati, Explicationem quæsiti, Delineationem, Demonstrationem & Conclusionem.

Differt autem *Problema*, à *Theoremate*, quod *problema* iubet, & facit etiam id quod iubetur: eiusque rei iam factę demonstrationem in medium adfert: sed *theorema*, demonstrat accidentia & adfectiones rei subiectæ. Vnde etiam in conclusionibus problematum subiungitur: *Oper edei poiêsai*: quod faciendum erat. at in theorematum conclusionibus additur: *Oper edei deixai*. quod ad contemplandum & demonstrandum erat propositum.

Præterea & hoc sciendum est: quod in omni

omni problemate: etiam hæc inuestiganda sint: & obseruanda omni diligentia. *Lemma, Ptosis, Porisma, Enstasis, & Apagoge.* id est, *Assumptiua Propositio, Casus, Corollarium, Instantia, & Deductio.*

Assumptiua quidem *Propositio* est, quando quærimus an aliquid sit, quod confirmare problema possit: illud inquam quod ad delineationem à præceptore est sumptum.

Casus est, nihil aliud quam delineationis quædam occasio. interdum vero fit, vt problemata absque casu sint, quæ *Aptota* dicuntur. quæ nulla opus habent varietate delineationis.

Corallarium est, quando quærimus vtrũ in ijs, quæ in problemate demonstrata sunt, & iam manifestè patent: aliquid aliud sit, quod appareat.

Instantia est, quando quærimus, vtrum id quod propositum est: in se habeat, aut recipere possit, obiectionem aliquam necessariam.

Reductio denique est, quando quærimus an fieri possit, vt propositum problema reduci possit in delineationem alterius problematis.

PRO-

PROPOSITIO VII.

SVper vna eademqu. Etsi priora problemata & theoremata, affirmatiuas habuerint propositiones: tamen præsens hoc theorema propositione vtitur negante. Vnde etiam sequitur reductio ad impossibile, modus inquam ille syllogisticus. Docet enim Aristoteles, quod vniuersale affirmatiuum, maxime scientijs conueniat, illisque sit proprium. Nam si negatiua fuerit aliqua propositio: necesse est vt si demonstrationem admittere velit: affirmatione opus habeat. Siquidem sine affirmatione, neque fit demonstratio, neque syllogismus. eamque ob causam scientiarum demonstrationes, maxima ex parte conclusiones faciunt affirmantes.

1. Quod autem Euclides proponit sic. *Super vna eademque*, id fecit, ne super alia atque alia recta, duas duabus çquales quis demonstret. atque ita fallacia hac aliud statueret quam ij, qui vna eademq; vtuntur recta.

2. Addit etiam, *altera altera*, & hoc rectæ: potest enim fieri vt quis duas duabus rectis æquales simul cõstituat ad aliud atq; aliud punctum: super vna eademq; recta linea: non tamen alteram alteræ.

3. Hæc quoque adiunxit. *Ex iisdem*

par-

partibus, ne vnam rectam faciamus communem basim duorum trigonorum: quorum vertices essent oppositi. Ita vt alter vertex ex hac, alter ex alia esset parte.

4. *Easdem habentes extremitates, cum rectis ab initio propositis*: Quia sumi possunt duo puncta in vna eademque linea recta: a quibus duæ rectę constituerentur æquales altera alteræ, ad aliud punctum: & non ad id punctum, ad quod reliquæ constitutæ essent. Ita tamen vt non ex ijsdem extremitatibus essent cum prioribus.

His itaque omnibus circumscriptionibus vsus est Euclides: & firmam reddidit propositionis veritatem: & demonstratio ipsa absque dubitatione perfecta est.

Theorema etiam hoc ab Euclide demonstratur per reductionem ad *impossibile*: & id quod pugnans est, contra communem pugnant sententiam, quæ sic se habet: Totum maius est sua parte. deinde, Vnum & idem non potest esse maius, & æquale. Videtur vero hoc theorema esse lemma propositionis octauę, quia vtile est ad faciendam eius demonstrationem, neque simpliciter elementaris propositio est: neque speciem elementaris propositionis habet. propterea quod huius Theorematis vtilitas non longe lateque se diffundat.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI *fuerint duo trigona*. Scopus huius octauæ propositionis est: vt propositis duobus trigonis, habentibus latera lateribus æqualia & inter se applicatis: angulos inquam habeant æquales, eos qui ad verticem sunt. Cuius quidem æqualitatis causa esse videtur: laterum angulos ad verticem continentium ęqualitas: & basium ęqualitas. si enim baseis essent inęquales, fieret vt vna basi existente minore, etiam angulus minor fieret: & altera basi existente maiore, angulus quoque maior fieret. Neque lateribus inęqualibus existentibus, & basibus iisdem manentibus anguli ęquales inuenientur. aut denique lateribus ęqualibus manentibus & basibus existentibus inæqualibus. Securius ergo erat dicere, basi ęquali existente basi, & lateribus ęqualibus: sequi etiam angulorum ad verticem positorum ęqualitatem.

Hoc etiam theorema conuertitur cum quarto theoremate, quamuis hæc verba in ambobus sint hypothesis: duo latera inquam duobus lateribus esse æqualia. sed basim esse ęqualem basi: in propositione quarta ad quæsitum: in hac vero datum, & angulum angulo esse æqualem, datum fuit

fuit in quarta: hic vero quæsitum. Itaque sola datorum & quæsitorum permutatio, facit hanc conuersionem. Indiget hęc propositio ad faciendam demonstrationem propositione septima, quia & illa & hæc per reductionem ad impossibile demonstratur: & propositio septima indiget quinta: vnde etiam merito antepositæ sunt octauæ propositioni. neque statim hæc octaua subsequuta est quartæ, etiamsi cum ipsa conuertatur, vt iam dictum est.

Sciendum denique quod si anguli trigonorum ad verticē existentes fuerint æquales: latera etiam hos continentia æqualia sint; etiam reliqui anguli, reliquis æquales erunt. Ideoque etiam addidit, vt in quarta etiam reliquos angulos æquales esse.

PROPOSITIO IX.

D*atum angulum rectilineum.* Hæc propositio est problema: miscet enim Euclides theoremata problematibus, & problemata theorematibus. atque sic totam his propositionibus perficit elementarem doctrinam. Interdum res subiectas inueniendo & consequendo: interdum etiam accidentia rerum contemplando. Cum itaque demonstrasset per præcedentia in trigonis, laterum æqualitatem subsequi angulorum æqualitatem. & econuer-

so

so æqualitatem angulorum, sequi laterum æqualitatem. transit ad problemata: & proponit atque iubet in hoc problemate: datum angulum rectilineum in duas æquales partes secare.

Quia vero angulus varijs modis dari potest. vtpote datur positione, quando dicimus, ad datam rectam: & ad datum in ea punctum, angulum constituere. Datur deinde specie: vt si datur angulus rectus, aut acutus, aut obtusus. Vel denique vniuersaliter, angulus aut rectilineus, aut circumferentialis, aut mixtus. Datur etiam ratione, quando dicimus duplum huius, vel triplum, aut in genere maiorem vel minorem. Postremo angulus datur magnitudine, vt si angulus tertia recti pars aut dimidia detur.

Angulus in hoc problemate, sola specie datur. cum dicit angulum rectilineum secare *Dicha.* Vtitur autem in hoc problemate, ad delineationem faciendam postulato vno, & problemate primo atque tertio; ad demonstrationem perficiendam sola propositione octaua: quia & illa demonstratur per reductionem ad absurdum vt & hæc.

PRO-

PROPOSITIO X.

D*Atam lineam rectam*. Decima hæc propositio etiam est problema proponens lineam rectam finitam: quæ in duas partes æquales sit secanda. neque enim finiri & terminari potest recta, ex vtraque parte infinita: neque ea quæ ex altera parte tantum finita est. nam quodcunque ex parte sumeretur punctum aliquod: tum in partes inæquales fieret sectio propterea quod vna eius pars in infinitum esset protracta. reliquum itaque est, vt ex vtraque parte recta finita sumatur: quæ in duas est secanda partes æquales.

Vtitur Euclides ad delineationem huius problematis propositione prima, & nona: ad demonstrationem sola quarta: nam per angulos æquales, demonstrat basium æqualitatem.

PROPOSITIO XI.

D*Ata linea recta*. Et hæc propositio problematica est. Nam in hac facit angulos contiguos rectos: constituendo rectam super recta. Siue ergo ex vtraque in extremitatibus datæ lineę rectę, recta erigatur: protracta linea recta, atque longiore facta: eadem efficiemus.

Manifestum vero est, quod punctum in hoc problemate positione sit datum: nempe in ipsa linea recta. Recta autem linea vnico modo data est specie: cum nulla exprimatur positio, nec magnitudo, nec ratio. Vtitur in delineatione propositionibus prima & tertia: & vno postulato. Demonstratio constat ex propositione octaua: & vna definitione.

PROPOSITIO XII.

Ad rectam lineam datam infinitam.

Etiam in hoc problemate Euclides constituit rectam lineam super recta ad angulos rectos erigere: sed antiqua appellatione nominat cathetum perpendicularem, secundum gnomonem: vnde etiam gnomon ad angulos rectos est, plano subiecto. Differunt enim sola habitudine recta ad angulos rectos ducta: & recta perpendicularis: cum tamen ratione subiecti, non differant.

Est autem perpendicularis duplex: vna quidem plana, altera vero solida. quarum plana ducitur ad rectam: solida autem ducitur ad planum. Vnde necesse est: vt hæc non ad vnam tantum lineam rectam an-

angulos faciat rectos: sed ad omnes quotquot in plano subiecto describuntur, & ducuntur, atque sese secant in puncto, in quod perpendicularis cadit.

At tamen Euclides in hoc problemate tantum perpendicularem planam, ducere vult. atqui in vndecima propositione, postquam in ipsa recta sumptum fuit punctum, à quo recta fuit erigenda ad angulos rectos: nullo modo infinitum requirebat. In hac vero propositione, quia punctum extra lineam rectam datam sumitur: proponit eam infinitam. Nam si esset finita, forsitan contingeret: perpendicularem à puncto dato ductam: extra datam lineam rectam cadere. ita vt problema hoc sibi non constaret.

Sciendum autem, quod in sensilibus rebus, nulla sit magnitudo infinita: quæ & quantacunque etiam esse possit distantia, aut quodcunque intervallum. Sicut Aristoteles, & qui eius sectati sunt doctrinam, demonstrant. neque enim coelum quod mouetur, infinitum esse dicemus; nec etiam alia simplicia corpora. vnumquodque enim corpus locum suum finitum habet. Reliquum ergo est, vt infinitum statuatur in imaginatione, non autem in cogitatione. simul enim dum cogitamus de infinito: formam & terminum accipimus. ipsaque cogitatione, imaginationis constituitur excursus, eumque variat manente autem imaginatione; id quod animo conceptum est, indefinitum permanet. & tanquam nullas partes habens, & menti incomprehensibile. Illud inquam in infinitum esse relinquitur. Et enim visus cognoscit, tenebras non videndo: sic etiam imaginatio, non cogitando, infinitum determinat. Id enim, quod tanquam incomprehensibile relinquit, appellatur infinitũ.

Quapropter cum petimus datam lineã infinitam: *imaginatione sola hoc facimus*: vt & alias species geometriæ hoc modo infinitas ponimus: trigona inquam, circulos, angulos, *lineas*. vnde mirari desinamus, qua ratione fiat: vt actu recta linea sit infinita.

PROPOSITIO XIII.

S*I recta super recta constituta*. Hæc decimatertia propositio, est theorema: non enim docet quomodo faciendi sint anguli recti, vel obtusi, vel acuti. id quod proprium problematum. sed angulos iam constitutos super aliqua recta sumit: & demonstrat eos esse vel duos rectos, vel duobus rectis æquales. Consequens enim fuit, vt demonstratis iis quæ in problematibus fuerunt proposita: transiret ad theoremata.

Quia

Quia etiam in propositione duodecima, ducta fuit perpendicularis in rectam subiectam: quæ angulos contiguos facit rectos: proximum erat quærere, quod si non fuerit perpendiculariter ducta: quales nam faciet angulos: & quomodo se habeat recta super altera constituta ad subiectam rectam.

Vniuersaliter ergo demonstrat, quod omnis recta super alia recta constituta: ita vt angulos faciat: si in neutram partem declinauerit & erecta fuerit normaliter: duos inquiam angulos rectos faciet. sed si in alteram partem magis inclinauerit: ab altera parte plus distiterit: duobus rectis æquales angulos faciet. Quantum enim ab vna parte recedit ab angulo recto: tantum adijcit reliquo, suo excessu.

Non vero simpliciter dixit: recta super recta stans, angulos facit duos rectos, vel duobus rectis æquales: sed adiecit: si angulos fecerit. Nam recta si ad extremitatem rectæ subiectæ fuerit constituta: angulum quidem sed non angulos faciet. itaque fieri nequit vt vnus angulus duobus rectis æqualis sit. Omnis enim angulus rectilineus, etiam valde obliquus, minor est duobus rectis: sicuti omnis angulus solidus quatuor rectis minor est, etiam si simplicis angulum obliquissimum: tamen mensuram duorum rectorum angulorum

 nun-

nunquam adsequetur. Quapropter sic collocanda est recta super recta: vt angulos faciat.

PROPOSITIO XIV.

SI ad rectam lineam. Decima quarta propositio etiam theorema est: & conuertitur cum decima tertia: quia semper theoremata conuersa, sequuntur sua theoremata antecedentia, cum quibus conuertuntur, in quibus vnum est datum. nam si plura fuerint data: sæpenumero multis alijs interpositis post antecedentem propositionem conuersa tandem sequitur: vt supra in quarta & octaua, factum fuisse ostendimus.

Postquam ergo in præcedenti theoremate demonstrauit: quod recta super recta stans, si angulos fecerit: vel duos faciat rectos, vel duobus rectis æquales. nunc demonstrat quod si ad rectam quandam, duæ rectæ positæ fuerint: hæc & hæc fecerunt: vt ipsa habet propositio: quapropter id quod in altero fuit datum, in altero est quæsitum. Demonstratur etiam per reductionem ad impossibile. hac enim demonstrandi ratione, gaudent conuersæ propositiones.

Digna etiam est admiratione, certitudo hæc scientiarum. postquam enim dixisset:

Si ad rectum aliquam, adiecit & illud *& ad punctum, quod in ea est*. vt scilicet rectæ illæ ab vno sint ductæ puncto. quod si enim ex duobus punctis extremis datæ rectę, aliæ duæ fuerint ductæ; tum non è directo positæ erunt inter se.

Postea addidit & illud, *Extis continuè*, quasi dicat, inter quas nihil aliud simile interpositum est. sicuti columnas contiguas nominamus: inter quas nulla alia media posita est: etiamsi aer interponatur: attamen aer non est eiusdem cum columna generis; ideoque non dicitur columnæ contiguus.

Præterea adiecit & hoc, *non in easdem partes ducta*, negatione ostendens, quod in vtramque partem sint ducendæ lineę rectæ, & ponendæ. tales enim poterunt angulos contiguos duobus rectis æquales facere: & è directo positæ esse demonstrari. Nam si ex ijsdem partibus fuerint positæ: non è directo erunt sitæ: etiamsi duobus rectis æquales angulos faciant. Atque hæc de hac propositione.

In delineatione vero vtitur secundo postulato, & in demonstratione, præcedenti theoremate, & duobus axiomatibus: secundo & tertio. atque ad reductionem ad absurdum faciendam: sumit hoc axioma. Totum est maius sua parte: sed & ęqualis: quod fieri nequit.

Quare rectæ illæ lineæ sunt duoendæ in vtramque partem, quæ faciant duos angulos duobus rectis æquales: ab vno ducta puncto; & vna in hanc, altera in alteram protracta partem: è directo collocabuntur.

PROPOSITIO XV.

SI *due lineæ rectæ*. Sciendum, quod anguli ad verticem, differant ab angulis contiguis. quia *anguli contigui*, sunt inter se vicini: nec alium interpositum angulum habent. sed *anguli ad verticem* vnum intermedium relinquunt. præterea *anguli contigui* seu *vicini fiunt*, quando recta super recta fuerit constituta: *anguli* vero *ad verticem*, fiunt recta linea alteram secante, vel rectis sese mutuo secantibus.

Appellatur autem *Anguli ad verticem*, quia vertices habent in vnum idemque punctum tendentes.

Hoc theorema non habet omnes partes, & omnia capita, quæ supra enumeraui. deest enim delineatio.

Quod autem sub finem theoreomatis subiicitur: *Ex hoc manifestum fit, &c.* est porisma, seu corollarium.

Corollarium est, vocabulum geometricum: docet vero hoc vocabulum nos, quod in theoremate, quæstione quadam facta,

eaque

eaque demonstrata: simul aliud quid apparet, quod non erat propositum in quæstione, vt demonstraretur. Sicuti apparet in hoc præsenti. Quæstio enim erat, vtrum anguli ad verticē sint inter se æquales, si duæ rectæ sese mutuo secant: quod cum esset demonstrandum, peracta demonstratione, simul fuit demonstratum: quatuor angulos, æquales esse quatuor angulis rectis.

Est igitur *Porisma*, theorema, quod per alterius theorematis demonstrationem, & ipsum quoque simul demonstratur. videntur enim quodam casu quasi in ipsa incidere porismata. quia nec volentibus, nec inuestigantibus, nobis obuiam fiunt porismata. Fœcunda itaque huius scientiæ natura & vis, profert & generat huiusmodi porismata, ex antecedentibus demonstrationibus; & declarat abundantiam illam theorematum, quæ in his est scientijs.

Sunt autem quædam porismata geometrica, vt hæc & alia plura. quædam arithmetica, cuiusmodi lib. 7. propositione secunda habemus porisma arithmeticum.

PROPOSITIO XVI.

IN *omni trigono*. Hæc decima sexta est theorema: & nos docet, quod si in quouis trigono vnum latus protraxeris: angulum qui extra trigonum constituetur, inuenies maiorem, angulo interno opposito. Necesse fuit, vt hunc conferret cum angulis oppositis: non autem cum angulo contiguo, qui ei est interne iuxta positus. Is enim potest angulo externo esse æqualis, & eo minor. Nam si fuerit trigonum orthogonium, atque vnum latus eorum, quæ angulum rectum continent, protractum fuerit: tum internus & vicinus angulus, externo erit æqualis. si vero amblygonium sit: externus minor erit interno contiguo. quapropter inquit angulis internis oppositis maior erit. quia in propositionibus sequentibus demonstrabit hunc angulum duobus æqualem, & angulos duobus rectis minores; denique tres angulos duobus rectis æquales. Habemus itaque viam & methodum in his, qua ratione generationes rerum nobis in conspectum adferant veras quæstionum causas.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

IN *omni trigono*. Indefinite in hoc theoremate decimo septimo demonstrat: quod duo anguli quouis modo sumpti in trigono: sint duobus rectis minores. sed in sequentibus definitiue docebit: quanto sint minores: scilicet reliquo trigoni angulo. siquidē tres sunt duobus rectis æquales. vnde duo sunt reliquo minores duobus rectis.

PROPOSITIO XVIII.

IN *omni trigono*. Per quintum & sextum theorema didicimus, quod laterum æqualitas efficiat angulorum æqualitatem quos latera æqualia subtendunt; & vicissim angulorum æqualitas, efficiat laterum subtendentium æqualitatem.

Iu hoc vero theoremate docet: quod inæqualitatem laterum, consequatur angulorum, quos latera inæqualia subtendunt inæqualitas. & conuersum demonstrat, in theoremate sequenti; nempe quod inæqualitatibus angulorum, subsequantur: laterum subtendentium inæqualitas demonstrata fuit duabus propositionibus idque per cōuersionem est factum. Ita etiam inæqualitas horum duobus theorematibus per conuersionem demonstratur.

Aequalitas itaque angulorum & laterum conueniebat æquilateris & æquicruris trigonis ; inæqualitas vero scalenis & æquicruris. verum in scalenis trigonis , diuidemus maximum latus, & facimus trigonum æquicrurum, atque inæqualitatem angulorum demonstrabimus.

PROPOSITIO XIX.

IN *omni trigono*. Hæc conuertitur cum præcedenti propositione.

PROPOSITIO XX.

IN *omni trigono*. Hoc theorema Epicuræi solent irridere. aiunt enim, hoc etiam Asino esse omnino notum . nec vlla indigere delineatione. Dicimus ergo, quod theorema quoad sensum videatur, notum & manifestum esse : sed ea ratione manifestum, vt notum sit modo quodam scientijs conuenienti. Vt ignem calefacere , sensibus est manifestum : sed quomodo & quibus de causis calefaciat, incorporali potentia , aut sectionibus corporeis, partibus sphæricis, vel pyramidalibus: hoc inquam tantum scientiarum est officium: vt explicent & demonstrent.

PROPOSITIO XXI.

SI *in trigono*. Hoc theorema demonstratur per duo theoremata vigesimum, & decimumsextum. Nam vt demonstret, rectas duas intra trigonum constitutas esse minores, quam quæ latera trigoni sunt exteriora; indiget 20. propositione. in qua demõstratur, duo latera reliquo maiora esse. Verùm ad faciendam demonstrationem eius quod angulum comprehendant maiorem: assumit 16. propositionem, in qua demonstratum fuit, quod in omni trigono vno latere producto, angulus externus angulo interno opposito sit maior.

Necesse tamen fuit Euclidi addere hæc verba: ab extremitatibus ipsius basis interne constituendas esse duas rectas: non autem à partibus aliquibus ipsius basis: quia rectæ, quæ ab extremitatibus basis, non ducuntur: sed à partibus eius aliquibus: etiam continere possunt angulo externo æqualem vel minorem angulum.

PROPOSITIO XXII.

EX *tribus rectis lineis*. In 22. problemate, iubet Euclides constituere trigonũ ex trib. lineis rectis, quæ datis tribus rectis sint æquales, singulæ singulis, vna vni, & addit distinctionem, non simpliciter da-

das

das esse rectas lineas: sed necesse est, inquit, vt duæ sint maiores tertia; quouis modo sumptæ. propterea quod in omni trigono duo latera sint maiora tertio. ideoque & hoc in loco nisi duo latera sint tertio maiora: non constituetur trigonum.

Hoc autem problema est ex numero definitorum problematum, & non indefinitorum: vt enim sunt theoremata definita, & indefinita: Ita etiam sunt problemata duplicia. Nam si sic dicimus: Ex tribus rectis quæ datis rectis sunt æquales: trigonum constituere: indefinitum problema est, & hoc quod proponitur, nequit fieri: quod si vltro addamus, duas debere esse tertia maiores: etsi quouis modo sumantur: duæ ex his tribus; id quod ipsa sumptio ostendet: tum fit problema definitum: & poterit fieri talis trigoni constitutio.

PROPOSITIO XXIII.

AD *datam rectam*. Si vtemur delineatione propositionis precedentis, nulla diligenti habita cautione: tum inuenietur quidem angulus æqualis, verum non ad datum punctum: sed vel ad alterum extremum, vel ad communem sectionem circulorum. Quare ne hoc fiat, necesse est, vt propositam lineam rectam

siafaciamus vnam ex illis, quæ angulum continent: alteram vero efficiamus vnam ex continentibus angulum, ad quas partes datum punctum positum est. Eudemus in sua historia geometrarum ait, Oenopidem hoc problema inuenisse.

PROPOSITIO XXIV.

S*I duo trigona.* In 24. theoremate cum versetur Euclides, demonstrat inæqualitatem trigonorum: sicuti superius idem fecit in demonstratione æqualitatis. Duo enim trigona proponit, quæ duo latera duobus lateribus habent æqualia alterum alteri; angulum, inquam ad verticem, æqualem angulo ad verticem posito: præsupponit: & quoque inæqualem & demonstrauit, æqualitatem angulorum consequi basium æqualitatem: & econtra, æqualitatem basium cõsequi angulorum ad verticem positorum æqualitatem, atque hoc facit in vtrisque propositionibus.

Hoc vero theorema opponitur quarto theoremati. nam in quarto proponit angulos ad verticem esse æquales: in hoc vero theoremate inæquales. præterea in illa demonstrat per æqualitatem angulorum ad vertices positorum, etiam basium æqualitatem consequi; in hoc vero contrarium nisi quod eadem sit similitudo. quia per inæqualitatem angulorum ad verticem positorum: demonstrat inæqualitatem basium:

Quapropter duas copulationes, seu coniunctiones propositionum aut theorematum Euclides nobis proponit, in trigonorum demonstratione, quæ sibimet sunt oppositæ: inæqualitatis consideratione, atque inæqualitatis contemplatione: atque copula quidem æqualitatis continet in se quartum & octauum theorema. copula vero inæqualitatis hoc præsens theorema & id quod statim sequitur: & cum hoc præsenti conuertitur. Commune vero est in his quatnor theorematibus, quod duo latera, duobus lateribus sint æqualia, alterum alteri. si enim essent inæqualia: superflua & falsa esset omnis quæstio.

PROPOSITIO XXVII.

SI *in duas rectas*. Post doctrinam trigonorum, vt docebat in elementari institutione: transit ad parallelogrammorum præceptionem. & quia fieri non poterat, vt aliquid diceretur de parallelogrammis: nisi prius seorsim de rectis æquidistantibus aliquid præciperetur: idcirco prius ea, quæ parallelis rectis accidunt, exponit: & ex omnibus accidentibus, parallelis rectis eueniunt: tantum tria

pro-

proponit, quia ex his reliqua facile possunt cognosci. Id quod hoc modo accipiendum est. Anguli vel sunt ex ijsdem partibus: vel non ex ijsdem sunt partibus. quod si fuerint ex ijsdem partibus; vel extra sunt ambo: vel ambo intra: vel denique alter extra, alter intra. Rursus si ex ijsdem partibus non fuerint, eodem modo hæc sunt consideranda. Vnde sequitur quod cum sex modis accipiantur æquidistantium linearum rectarum accidentia: tria tantū Euclides absoluerit: vnū quidem accidens, quod non ex ijsdem fit partibus: duo vero, quæ ex ijsdem fiunt partibus.

Ex ijs qui ex ijsdem partibus non sunt: & tantum interne sumuntur, *Enallax* permutatos vocat: qui vero ex ijsdem sunt partibus: & ambo interne accipiuntur; duobus rectis æquales. denique externum interno æqualem esse debere.

Nos itaque dicimus, quod eadem consequatur tres reliquas hypotheseis. Sint enim duo anguli ex ijsdem partibus externi ambo anguli TH,E, B. & D, Z, K. Dico quod hi duo anguli sint ęquales duobus rectis. Nam si angulus D, Z, K æqualis est angulo Z,E,B: & anguli Z,E,B: TH,E,B duobus rectis æquales sunt: tum etiam, anguli D,Z,K: TH,E,B duobus rectis æquales erunt. Eodem modo demonstrabimus: si ex ijsdem partibus anguli isti non fue-

fuerint: & vnus angulus internus, alter externus sit: quod duobus rectis sint æquales. denique & tertium demonstrabimus, si ambo externi fuerint, & non ex iisdem partibus: quod æquales sint. quia illi sunt iidem cum angulis ad verticem, & æquales illis per 15 qui vero ad verticem ponuntur, sunt permutati. Ergo æquales.

PROPOSITIO XXX.

Q*Væ eidem lineæ rectæ*. Hoc non in omnibus fit modis: quia ea quę eiusdem sunt dupla: non etiam inter se sunt dupla. videtur autem in ijs tantum habere locum: quæ inter se conuertuntur, vt quæ æqualitatis, aut similitudinis sunt, & in rectis æquedistantibus.

PROPOSITIO XXXI.

P*Er datum punctum*. Non est idem si dicimus per punctum datum: & à dato puncto. Nam quādo punctum est principium lineæ rectæ ducendæ: tum linea recta à puncto ducta dicitur. & propterea à puncto fit descriptio. quando vero punctum in ipsa est linea recta: per datum punctum describitur. ideoque descriptio rectæ lineæ dicitur esse facta per punctum. Non enim dicitur per punctum, ac si linea

recta

recta punctū secaret: sed quod recta illa in punctum incidat: & distinguat summet interuallum, suamque distantiam, quam habet æquidistans recta, inter illam quæ posita est, & quæ ducenda proponitur.

Videtur etiam hoc theorema, proponere genesim parallelorum. verum obseruare conuenit propositionum differentiam. Nam perpendicularis à puncto, æquidistans vero per punctum ducitur. & sicuti non poteramus duas perpendiculares ducere ab vno eodemque puncto: Ita etiam non possumus duas æquidistanteis per vnum punctum ducere. demonstratur vero per præcedentem. Nam æquidistantes erunt, quæ inter se non concurrunt.

PROPOSITIO XXXII.

IN *omni trigono*. In hoc theoremate explicat duo superiora theoremata, decimum sextum & decimum septimum. non enim quod angulus externus angulis internis oppositis sit maior demonstrat; sed & quanto sit maior ostēdit: nempe altero oppositorum. deinde non tantum quod duo anguli in trigono sint duobus rectis minores: sed quod reliquo angulo interno minores sint. Quia tres anguli in trigono sunt duobus rectis æquales. Nam cognitio nostra ab imperfecto solicite ad perfefectum: ideoque scientia eodem modo ex indefinitis procedens obiectis, ad definitas & irrefutabiles progreditur doctrinas. Quapropter ea quæ deficiebant in 16. & 17. theoremate, ea nunc addita, vt supra quoque dictum est.

PROPOSITIO XXXIII.

R*ecta quæ æquales &c.* Hoc theorema simplicem parallelogrammorum generationem tradit: fiunt enim parallelogramma, ex parallelis rectis lineis: & ex ijs quæ has coniungunt.

Verum diligenter obseruanda est propositionis certitudo, & exacta eius ratio: quod quidem non simpliciter dixerit recta quæ æquales rectas coniunxerit: & ipsæ æquales sunt. sed adiecit & illud *Aequidistantes*. Ideoque non per omnia fit, vt rectæ, quæ æquales rectas coniungunt: etiam ipsæ æquales sint: vt in trigono æquilatero, & æquicruro: non enim quæ in medio coniungit latera duo, est æqualis basi. Quapropter oportet vt etiam sint æquidistantes, rectæ illæ quæ dantur: ita vt rectæ quæ dantur. Ita rectæ quæ has coniungunt, eodem modo sint æquales & æquidistantes.

Recte etiam Euclides addidit, coniunctionem illam debere fieri in rectis æqualibus

s, & æquidistantibus, ex partibus iis-
1. quod si enim non ex iisdem partibus
coniunxerint; sed diagonales fuerint:
at quidem hę inter se ęquales: non
em æquidistantes: sed in medio sese
intes.

PROPOSITIO XXXIV.

P Arallelogrammorum. Cum præsenti
theoremate conuertuntur. Quarum-
mque quadrilaterarum figurarum late-
opposita sunt ęqualia, vel quarumcun-
ıe quadrilaterarum figurarū anguli op-
ositi sunt ęquales: etiam illę quadrilate-
ę figuræ sunt parallelogramma. Denique
uarum figurarū quadrilaterarum diago-
ales coniunctæ in duas partes ęquales, se-
ant ipsas figuras quadrilateras: illæ etiam
unt parallelogramma.

PROPOSITIO XXXV.

P Arallelogramma. Hoc theorema nu-
meratur quoque inter illa, quæ in se
continent ea quæ contra hominum sunt
opinionem: & difficile conceduntur. Vi-
detur enim plurimis absurdum esse: si lon-
gitudo multiplicetur: non tollat ęquali-
tatem, eadem basi manente. quantum
enim ęquidistanteis protrahuntur: tantum

etiam

etiam alterum parallelogrammum, augetur.

Sciendum tamen, quod angulorum æqualitas & inæqualitas, plurimum possint, quo enim inæqualiores fecerimus angulos: eo etiam minorem reddimus aream: tum scilicet quando eadem manet latitudo.

Sicuti sunt *theoremata* quędam *simplicia*, quędam *composita*, & hęc vel *vniuersalia*, vel *particularia*: Ita quoque quædam sunt *localia*, quędam vero *localia* non sunt. Vocantur autem *localia*: in quibus vnum & idem accidens vniuerso loco accidit. Locus autem est positio quędam lineę aut superficiei: quæ vnum & idem accidens efficit.

Localia etiam *theoremata*, nonnulla sunt *ad lineas constituta*: alia vero *ad superficies*. atque ex his superficiebus aliæ sunt *plana*, aliæ *solida*. *Plana* quidem, in quibus simplex est notio in superficie plana: *solida* autem, quarum generatio fit ex quadam sectione alicuius figurę solidę. vt helicę circa cylindrum, & lineæ conicæ.

Localia etiam *circa lineas*, quædam habent locum *planum*, quędam *solidum*.

Theorema itaque hoc 35. est locale, & planum. nam quod inter omnia parallelogramma est: id dicetur locus parallelogrāmorum constitutorum super vna basi, quæ etiam Euclides demonstrat esse ęqualia.

Quare

quare hoc theorema est omnium primum locale theorema: sunt & sequentia alia, præterquam quod scire oporteat, a Euclides de rectilineis agat figuris in loco: esse localia plana ad lineas tas. in tertio vero libro, vbi agit de culis & circulorum accidentibus: tradit alia ad circumferentias. Sicut est in ro tertio propositio ista. Anguli in eom constituti segmento: sunt inter se æales. & altera. Anguli in segmento sunt Rti. Quoniam multi anguli, imò infinicum constituantur ad circumferentiam, per vna eademq; basi: omnes demonstrãır esse ęquales. Denique sunt quoq; figu. ; istæ proportionales trigonis parallelorammis super vna eademque basi constiutis.

Verum cum ante hac nullam trapeziorum fecerit mentionem: primo loco nominat *Trapezia*, de quibus inter principia iomina sunt relata. Sunt autem *Trapezia*, quę sunt quidem figuræ quadrilateræ, non autem parallelogramma Quia figuræ, quę latera opposita non habent æqualia: & angulos oppositos inęquales; egrediuntur ordinem parallelogrammorum.

Cum vero sint duæ species Trapeziorum: Ita vt alia trapezia habeant tantum duo latera parallela, seu ęquidistantia: verum inæqualia; alia vero ęqualia quidem:

dem: sed non ęquidistantia; in hac præsenti delineatione sumit duo latera ęquidistantia: sed inæqaulia, vt sunt latus AC, & latus C D.

PROPOSITIO XXXVI.

P*arallelogramma*. Siue distent inter se baseis, siue ex parte aliqua communionem babeant, siue vno latere fuerint coniuncta duo parallelogramma: tum vnum & idem demonstrabitur.

Obseruandum tamen est, quod in polygonis parallelogrammis hoc non fiat. quia non omnia sunt æquilatera. sed si ęquilatera fuerint; consequetur hoc, vt quæ super basibus ęqualibus constituuntur; inter se conferantur. & si dimidia alterius latera fuerint alterius homologis lateribus, ęqualia erunt; inęqualia vero; cum se ita non habebunt.

PROPOSITIO XXXVII.

T*rigona super eadem basi constituta*. Et hoc theorema locale est; & vides quod non solum parallelogramnis hoc insit: verum etiam trigonis, circulis, & cylindris, & conis applicetur. denique pariter solidis figuris: quæcunque existentes sub eadem altitudine, baseis habent

æqua-

æquales: liber vero hic primus magis est vniuersalis quam sextus: Cum hoc theoremate duo conuertuntur, quod statim subsequitur & quod habet in se hoc. Trigona æqualia, & trigona super eadem basi existentia: postea, alterum, quæ æqualia sunt, & inter easdem æquidistantis lineas rectas: vel esse super vna eademque basi: vel super basibus æqualibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

TRigona super basibus. Præcedens theorema easdem sumit baseis: hoc vero çquales, non autem easdem baseis. commune tamen ipsis est, quod parallelogrã-ma constituantur inter easdem lineas rectas æquidistantes.

Necesse igitur est vt parallelogramma & trigona, neque vlterius & extra lineas çquidistantes: neque intra easdem, nam parallelogramma dicuntur in iisdem esse lineis rectis çquidistantibus, quando baseis ipsarum & latera his opposita, iisdem rectis çquidistantibus applicatæ conueniat.

PROPOSITIO XXXIX.

TRigona æqualia ad Rectæ Euclides addidit: in iisdem partibus. Fieri enim vt accipiamus super vna basi trigona æqualia : non autem ex iisdem partibus ; sed ex altera parte : Ita vt non sint inter easdem æquidistantes rectas lineas, neque enim sunt sub eadem altitudine.

Sciendum etiam est, quod cum sit triplex theorematum couersio : aut totum cum toto conuertitur, vt decimum octauum & decimumnonum theorema : vel cum parte, vt sextum & quintum theorema : vel pars cum parte, vt quartū & octauum. neq; enim totum datum in altero est quæsitum; vel etiam quæsitum datum. Illa ipsa obscura dat esse in his de trigonis theorematibus quæsitum trigona esse æqualia. atqui hęc non solum datum est in his propositionibus pręsentibus; verum etiam pars aliqua adsumitur de iis, quę in illis proposita fuerunt : quia super basibus iisdem, & basibus ęqualibus constitui datum est in his & illis. adiecit tamen aliquid illorum hypothesibus: quod neque quęsitum, neque datum in ipsis fuit : nam ex iisdem partibus, aliunde & extra adsumitur.

PROPOSITIO XXXXI.

SI *parallelogrammorum*. Et hoc quadragesimum primum theorema localè est. Et cum Euclides antea seorsim de trigonis, & seorsim de parallelogrammis egisset : in hoc loco miscet constitutionis paralrallelogrammorum, & trigonorum, sub eadem altitudine existentium. Simul, iam vtraque sumens; demonstrat & complatur, quomodo illa erga sese mutuo habeant. quod si seorsim parallelogramma sint, & seorsim etiam ponantur trigona, aequalitatis constabit veritas, quia demonstrauit quod quę super basibus aequalibus vel ijsdem: & inter easdem ęquidistantes rectas collocantur; sint aequalia inter se parallelogramma parallelogrammis: & trigona trigonis. sed in hoc theoremate, in quo confert parallelogrammum cum trigono: inaequalitatis ratio apparet, & est primus modus inęqualium. hoc est ratio duplorum. nam demonstrat quod parallelogrammum, sit duplum trigoni: si eadem fuerit basis, & eadem altitudo.

Notandum etiam, quod cùm sint duo casus in hoc praestanti theoremate, vtpote eadem existente basi, & parallelogrammi & trigoni: necessarium est vt trigonum habeat verticem suum, vel intra parallelogrammum, vel extra: tamen Euclides alterum casum tantum accepit: & vtitur eo casu quo extra parallelogrammum cadit vertex trigoni. demonstrationem enim talem facit, quę cohaeret huic casui, quo extra parallelogrammum vertex trigoni cadit.

Cum etiam quae sint ęquidistantes necesse est vt altera sit maior, altera longior, altera minor & breuior: vt constituatur per copulationem trigonum ipsum: & habeat hic verticem extra parallelogrammum.

PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi.. Siue parallelogramma, quæ circa eandem sunt diametrum, sese mutuo tangant: vt Euclides demonstrat: siue interse distent: siue sese mutuo secent; vnum & idem demonstrabitur.

Nomen vero hoc *Paraplerumaton, hoc est* complementorum à re ipsa sumpsit Euclides. quasi diceret, præter duo parallelogramma, hæc compleant totum parallelogrammum, quod in se complectitur ambo parallelogramma. Nam quæ diameter secat: illa sunt parallelogramma: quæ vero extra diametrum sunt, appellantur complementa, & supplementa. Ita vt totum parallelogrammum quod ambo parallelogramma interna continetur duo complementa: ex his constare dicatur, vel hæc in se continere.

Itaque & parapleroma seu complementum per se quidem non inter definitiones numeratur: propterea quod varietatem habet, & minus est perspicuum & notum: nec tam facile scire possumus, quid sit parallelogrammum, & quæ sint parallelogramgrāmū, & quæ sint parallelogramma circa diametrum intra totum constituta parallelogrammum. Prius etenim hæc explicāda sunt: antequam notum fiat, quid sit complementum. Propterea hęc distribuit recto ordine & bono modo: & nunc primum cum his opus habet complementis, ad parallelogrammum constituendum, quod illa in se continet complementa, mentionem horum facit.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam lineam rectam. Sciendum hoc in loco est: quod cum iuniores geometræ vidissent explicatas ab Antiquis esse *Parabolen*, *Hyperbolen*, & *Elleipsim*. ab hoc nomina transtulerunt ad lineas, quas *Conicas* appellant: & aliam quidem parabolen, aliam hyperbolen, tertiam elleipsin appellarunt.

Nam quando data & proposita aliqua linea recta: figura quæ applicatur, vniuersę lineę rectę datę applicatur; tum dicunt figuram illam rectæ datæ applicatam esse, & parabolen dici. quod si vero longior fuerit figura, quam linea data: hyperbolen esse, & excedere; denique si minor & breuior fuerit; elleipsin esse, & deficere. Verum hyperbolæ & Elleipsis mentionem faciet libro sexto. Sunt autem hæc a Pythagoricis inuenta & tradita.

PROPOSITIO XLV.

Data figura rectilinea. Hoc problema magis vniuersale est, quam quod antecessit: idcirco etiam his tanquam lemmatibus vtitur. Quia omni polygono promittit se æquale facturum parallelogrammum: cum dicat figuræ rectilineę, absque nomine, & communi modo. Nam si hic proponatur rectilineum trapezium, & diuidatur in trigona duo: constituetur problema. quod si vero proponatur polygonum esse rectilinea figura data; tum rursus eodem modo diuidetur in trigona quotquot erunt necessaria; & vnicuique trigono, equalibus parallelogrammis ad primi latus applicatis constituetur.

PROPOSITIO XLVI.

A Data linea recta. Ad linoationem theorematis quadragesimi septimi faciendam opus habemus quadragesima sexta. Scire vero conuenit, quod Euclides generationem & productionem duarum præstantissimarum figurarum in hoc primo tradiderit libro. quia ad constitutionem figurarum mundanarum, maxime harum, requiritur vsus figurarum rectilinearum. Nam Eicosaedrum, & Octaedrum

drum, & Pyramis, siunt & consistunt ex inæqualibus æquilateris. Cubus vero ex quadratis.

Recte etiam dicit & præcipit construere, ut in figuris, in quibus est constitutor quodammodo colliguntur, ad varias compositionem & effectionem: & describere dicit in quadrato, quoniam ab vna linea recta quadratum describitur.

PROPOSITIO XLVIII.

Si in trigono.] Hoc quadragesimum octauum theorema conuertitur cum præcedente, totum cum toto. Nam cum datum esset trigonum orthogonium: in præcedenti demonstratum fuit quadratum à latere rectum angulum subtendente descriptum, æquale esse quadratis à lateribus rectum angulum continentibus descriptis. In hoc vero theoremate per conuersionem demonstrat: quod si in trigono aliquo, quadratum à latere rectum angulum subtendente descriptum, æquale fuerit quadratis, à lateribus rectum angulum continentibus descriptis: tum quoque trigonum propositum erit orthogonium trigonum, quod angulum habent rectum; quem duo reliqua latera continent.

Atque sic absoluit Euclides hunc primum librum: postquam multas conuerfionum species nobis tradidisset; conuertit enim tota totis, & totum cum partibus, & partes cum partibus. Simul etiam magnam problematum varietatem ostendit, quia linearum rectarum, & angulorum sectiones, & positiones, & constitutiones, & applicationes tradidit: & loci illius theorematum quem paradoxum præter opinionem hominum constitutum, mentionem fecit, & theoremata localia explicauit: Ita vt satis nobis in mentem reuocarit, quæ nam tam vniuersalia, quam particularia elementarem perficiant doctrinam, eamque sustinere possint. Ita etiam problemata definita, & indefinita in quibus differant demonstrauit. Et hac ratione hanc primi libri doctrinam ad vnum tantum scopum direxit: Elementarem inquam simplicissimarum figurarum rectilinearum contemplationem; in qua harum constitutiones & descriptiones inuenit, & quæ ipsis per se insunt, considerauit.

Finis libri primi Euclidis Elementorum Geometriæ.

ISAACI

ISAACI MONACHI

SCHOLIA

In Secundum Librum Elementorum Geometriæ Euclidis.

SECVNDVS hic liber Elementorũ Geometriæ ad multa vtilis & necessarius est: quia non solum ad stereometriam, sed & ad planorum doctrinam multum prodest. deinde per huius libri doctrinam multa problemata refutari possunt, quæ veritatis speciem habent. denique & in Astronomicis non parum prodest.

Scoopus autem huius libri, hic est, Vult linearũ rectarũ *Anagraphas*, hoc est descriptiones & *Dynameis*, potentias explicare; neque id tantum, sed & partiũ seu segmentorum: ex quibus tandem colliguntur sectiones irrationales linearum rectarum.

Præterea inuestigat, & inuenit etiam duas medietates: Arithmeticam & geometricam, neque lemmate opus habet: neque instantiam aliquam apparentem animaduertit, quæ (demonstrationi) obesse possit.

DEFINITIONES.

Omne parallelogrammum. Addidit Euclides *rectangulum*, vt distingueret ea quę rectangula parallelogramma sunt, ab ijs quę rectangula non sunt. nam in ijs, quę rectangula non sunt, neutiquam dicimus quod continetur rectis &c,

Quæ vero eiusmodi sint parallelogrammanon rectangula: in priore didicimus libro. talia enim fuerunt quę prioribus enumeratis tam parallelogrammis & trigonis super basi simul fuerunt commemorata. & in quibus si rectas lineas æquidistanteis lateribus trigonorum duxerimus; tum efficimus parallelogramma, quod quidem in multis alijs apparuit: maxime vero in theoremate tricesimo octauo; & quadragesimo primo.

Deinde recte & necessario etiam addidit (duobus lateribus, rectum angulum continentibus) non enim quibusuis lineis rectis; sed rectis quæ angulum rectum continent, vtendum nobis est. ne forsitan quis

quis accipiat latera opposita; quę angulum non continent: neque etiam parallelogrammum rectangulum contineri his potest: nisi et alia summantur latera.

Sed si quis quęrat, sicut cum sint quatuor lineę rectę, quę parallelogrammum conficiunt, dicat tamen rectangulum quod duabus continetur rectis. Respondetur, quod sub his duabus, subintelligat, etiam reliquas duas, cum sint his ęquales altera alteri. Quia parallelogramma habent latera opposita inter se ęqualia.

Siquidem in multiplicatione laterum, quando illa multiplicamus, tum inuenimus aream, seu ambitum orthogonii; non autem quatuor illa latera multiplicantes, sed vnum latus longitudinis; & alterum latitudinis; denique in quadrato vnum latus in seipsum multiplicantes, satis nos fecisse inuestigationi nouimus: siquidem longitudo, latitudini est ęqualis.

Propterea si quando inquit, quod his continetur lineis rectis, parallelogrammum altera parte longius est intelligendum. sed si dicat ab hac recta, intellige quadratum.

Quia itaque commune quod parallelogrammum sit, species sub illa generaliter parallelogrammorum, habet species quatuor; quadratum quadrangulum oblongum, Rhombum, & Rhomboeides.

Gnomon vero inuētus est breuitatis gratia à Geometris, & nomē eius per accidēs factum; quia ab hoc gnomone vel totum cognoscitur spatium, & totus ambitus, vel reliqua eius pars si vel addatur, vel auferatur. Habet etiam in horoscopijs hoc officium solummodo; vt horas instantes cognitas faciat.

Complementa vero dicuntur, non quod ipsa non sint parallelogramma, sed quod toto non sint similia, Verum compleant similitudinem totius ad ipsum.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO VI.

SI recta linea fuerit secta, In hoc theoremate demonstratur arithmetica proportio; qui enim est excessus, AD. ad ipsius G D: hoc est G B: idem est G D. recta ad BD. per numeros vero facilius & manifestius comparebit quod ille quidem æqualiter superat & excedit, & superatur atque exceditur ab extremis. Theorema vero sic habet; quod quadratum excessus cum rectangulo extremorum, sint æqualia, quadrato à media descripto.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI recta linea. Præsentis theorematis propositio, eadem est cum præcedente; modo tamen conuerso. sicut enim duo quadrata, quadratum inquam totius & quadratum vnius segmenti, conferuntur: sic etiam hoc in loco quadratum totius, & vnius segmenti tanquam vnius rectę quadratum, & vt ibi ęquale rectangulo quod tota & prædicto segmento his continetur est ęquale; Ita hoc in loco æquale, eo quod quater continetur tota & prædicto segmento: quadrato reliqui segmenti & ideoq; duo sunt similia, vt & ante, ipsa similis fuit dualitas.

PROPOSITIO X.

SI recta linea fuerit secta. Possumus prę̨sentis theorematis propositionem etiam hoc modo explicare. Si recta linea fuerit secta in partes inæquales: tum quadratum totius. cum quadrato excessus, quo maius segmentum excedit minus; duo hęc quadrata inquam, dupla sunt quadratorum ab ipsis segmentis descriptorum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

D*Atam rectam secare*. In hoc secundo libro, cum sint quatuordecim theoremata; ex his undecymum & decimum quartum sunt problemata. *Verum* per numeros non demonstrantur, vt ex insequentibus intelligimus. Nam in hoc ipso problemate si fieri potest, numerus A B, diuidatur in numeros A C, C B, ita vt factus ex multiplicatione numerorum A B, BC; sit æquales quadrato numero AC. Erit igitur numerus ex multiplicatione numerorum AB, BC, quater facta: cum quadrato numeri A C, quintuplus numeri quadrati A C. sed numerus ex multiplicatione numerorum AB, BC. quater factus, cum quadrato numeri A C; est numerus quadratus: vt demonstratum est in propositione octaua. & numerus AC etiam est quadratus. Quare duo quadrati habent rationem eam inter se, quam quinque ad vnum. Id quod fieri nequit.

Quod autem hoc in loco geometrica sit proportio, inde manifestum est. Quoniam A B secta est in puncto C, & inuentum est, quod rectangulum AB, BC rectis contentum, sit æquale quadrato rectæ CA. idcirco manifestum est; quod sit, vt BA, ad AC, sic AC, ad C B. hoc autem ex secunda.

cunda consequitur geometrica medietas. Idem in sequentibus dicetur secari in extremam & mediam rationem. nunc vero cum nihil sciamus de ratione, idcirco non dixit extrema & media ratione secare: nec resoluitur, cum non definierit sectionem.

Ponamus rectam A B, esse vnitatum 8. & segmentum minus vnitatum 4. 56. et 5 3. & segmentum minus vnitatum 3. 3. & 18. erit rectangulum tota & minore segmento contentum vnitatum 24. & quadratum maioris segmenti eodem modo vnitatum 24. & 59. ... multi ... udon ...

PROPOSITIO XII.

IN *trigonis amblygonijs*. Vnde manifestum sit, quod A D, perpendicularis non cadat intra trigonum A B C. Est etenim si C D procurat demonstrandum est. Dicimus ergo quod fieri nequeat vt intra cadat. Nam si id fieri potest cadat A E recta. Quoniam angulus A E B est rectus: & angulus A B E obtusus, atque recto maior, quod fieri nequit. Quare non intra cadit, sed extra. Id quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

IN *trigonis oxygonijs*. Quoniam in definitionibus libri primi, docet trigonum.

num oxygonium esse quod tres habet acutos angulos: sciendum est, quod hoc in loco illud non sic intelligat: sed omnia trigona appellat oxygonia. quia omnia habent acutos angulos, etsi non omnes, tamen ad minimum duos.

Propositio itaque sic se habet. Omnis trigoni latus acutum angulum subtendens, minus potest, quam latera acutum angulum continentia, rectangulo. & reliqua quæ sequuntur. Quod si ergo rectangulum fuerit trigonum, accipies ex lateribus duobus angulum acutum continentibus, quod subtendit angulum rectum. Ita vt perpendicularis in illud latus cadat. Eodem modo si fuerit amblygonium.

Conuersum huius theorematis hoc est. Si quadratum rectæ AB, minus quadratis AB, CA, rectangulo quod his continetur rectis AC, CD, & reliqua quæ sequuntur. Dico quod trigonū ABC, sit oxygonium. Ducatur à puncto A, rectæ BC, ad angulos rectos, recta A D. & sit recta A D, æqualis rectæ B C. Quare quadrata rectarum BC, CA &c.

Finis libri secundi Elementorum Geometriæ Euclidis.

ISAACI MONACHI

SCHOLIA

In Tertium Librum Elementorum Geometriæ Euclidis

SCOPVS Euclidis est in hoc libro explicare accidentia circulorum, tam quoad lineas rectas, quam etiam quod ad angulos attinet.

PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum. Sicut libro primo omnium simplicissimam trigonorum inquam figuram, nempe trigonum æquilaterum, eiusque constitutionem posuit statim ab initio: propter insequentes demonstrationes quæ faciendæ erant: Ita & hoc in libro, ab initio ponit centri inuestigationem, quia circularis generationis causa est.

Omnis itaque circulus ...

& proprium centrum habet, sua natura definitum & circumscriptum. [sed quoad nos, non omnis circulus, suum proprium centrum habet, sed is tantum cuius genesim videmus.]

In prioribus itaque theorematibus, in quibus circuli iam facti erant, centra quoque existebant, manifesteque apparebant: in his vero theorematibus, in quibus de circulorum substantia quaestiones instituuntur, centrum quoque inuestigatur: quia ad essentiam circuli constituendam multum adiumenti adfert.

Hoc autem primum theorema videtur medium tenere locum, inter problemata & theoremata. propterea quod dum proponit aliquid quod faciendum est: problema: dum vero non ad faciendum, sed ad inuestigandum aliquid proponit: theorema videtur esse. Veruntamen magis dicendum est: esse theorema, quod propositionem habeat figurarum & verbis circumscriptam: sicuti etiam idem dici potest de quarta propositione lib. primi. Propositis duobus trigonis & duobus angulis aequalibus, atque lateribus duobus aequalibus existentibus: inuenire vtrum & bases sint aequales. Sicuti enim in illa propositione quaeritur aliquod accidens, quod in sua natura trigonis inest: Ita etiam hoc in loco, accidens aliquod circuli. praesertim si consideret ratis proprium problematis; & quod contrarium est propositionis : tamen longe magis hæc propositio, nomen problematis effugiat : nec tenero potobit... br

Ex hoc theoremate demonstratur illud quod cum definitione circuli conuertitur. Nam si ad circumferentiam circuli à puncto quodam, ex ijs quæ intra figuram sunt omnes lineæ rectæ ductæ, fuerint æquales, eam figuram illa, erit Circulus. Ponamus non esse circulum, sed figuram aliquam rectilineam & latus eius aliquod, in quod duæ rectæ lineæ æquales incidant: erit igitur trigonum æqui crurum, quod si nunc basis secetur in duas partes æquales: & una recta quæ ducta est; faciet angulos rectos: erit illa minor vtroque latere. Id quod fieri nequit: quia proponitur quod omnes sint æquales, quæ quouis puncto seu centro ad circumferentiam ducuntur.

PROPOSITIO IV.

SI in circulo. Quod si enim rectæ illæ per centrum ductæ essent: non opus erat inquirere an sese mutuo in duas partes æquales secarent. quia manifestum est quod centrum ipsorum, sit ipsa sectio in partes æquales. Eodem modo si altera per centrum ducta fuerit: altera vero per centrum non fuerit ducta: ex ... per centrum

trum ducta est, nunquam bifariam secatur: quæ vero per centrum non est ducta: tum primum secabitur bifariam, quando ad angulos rectos est, rectæ per centrum ductæ.

PROPOSITIO VI.

SI duo circuli. Quidam addunt (interne) hoc est, si duo circuli sese mutuo tangunt interne: ac si dicerent, fieri posse, vt si sese tangant externe: vnum & idem centrum habere possint: id quod non est: verum siue interne, siue externe sese tangant, nunquam vnum & idem est ipsorum centrum. Quapropter superfluum est, si ponatur in propositione interne.

PROPOSITIO VII.

SI in Circulo aliquo. Cum isto theoremate conuertitur hoc theorema: Si in circulo aliquo, interne fuerit sumptum aliquod punctum, & ab hoc puncto, ad circulum ductæ fuerint aliquot lineæ rectæ, quarum vna quidem sit maxima, altera vero minima, ex reliquis nonnullæ quidem æquales, aliæ vero inæquales fuerint: tum maxima per centrum erit ducta, minima vero è directo posita ei, quæ per centrum est ducta, ita vt tota ex maxima

& mi-

& minima constans, circuli sit diameter: ex cæteris vero maiores, centro sunt viciniores: æquales vero, equaliter à centro distant.

Sit enim per punctum I, quod in circulo est, ducta recta linea maxima IA, minima I B. deinde recta I C, sit maior quidem quam I D, & æqualis rectæ I H. Dico quod recta A I, per centrum sit ducta & recta I B, directo posita eidem, & I C recta vicinior centro, quam I D recta. & rectæ I C, I H, æqualiter distantes à centro. Quod si enim id non est, scilicet recta IA non sit per centrum ducta, sed aliqua alia, quæ è puncto I ducta est. etiam maxima communis erit & per C punctum ducta. sed & IA per centrum ducta est. quod fieri nequit. Quare I A, & I B rectæ sunt ex directò positæ, ita vt tota A B, sit diameter. Dico etiam quod I C, sit vicinior centro, quam recta I D. Nam si vicinior non est, tum vel longius erit remota, vel æqualiter ab eo distabit. sed si longius remota fuerit, tum ID, maior est quam I C, quod fieri nequit. Nam I C proponitur minor esse quam sit recta I C. quod si æqualiter distabunt, etiam æquales inter se erunt, sed sunt inæquales, quod fieri nequit. nam I C vicinior est centro quam recta ID & IC recta est æqualis rectæ I H. quare æqualiter à centro distabunt.

bunt. quæ enim inæqualiter à centro distant, & ipsæ inæquales sunt.

PROPOSITIO XVIII.

Rectâ quæ circuli diametro. Conuertitur cum hâc propositione. Si recta quædam linea ducta fuerit, quæ circulum tangit, & à puncto contactus, recta quædam linea, lineæ tangenti fuerit ducta ad angulos rectos, intra ipsum circulum: ea quæ producta erit ad alteram circuli partem erit circuli diameter.

PROPOSITIO XXXIII.

In circulo angulus in semicirculo. Si omnes semicirculi propter similitudinem, æquales capiunt angulos: sunt enim recti: & segmenta circulorum maiora, angulos rectis minores: manifestum est, quod si similia fuerint segmenta: etiam angulos recipient æquales. quanto enim sunt maiora semicirculis, eo magis minuunt angulum rectum. Similiter & segmenta semicirculis minora, proportionaliter augêt rectum. Vnde sequitur, quod circulorum segmenta similia, angulos capiant æquales.

Sed cum segmentorum anguli diuersi generis sint ab angulis rectilineis, quia

mixti:

minori: non comparantur cum illis sub certa magnitudine; nisi habita ratione maioris & minoris. Vnde etiam accidit ut progrediente maiore segmento ad minus; & angulo maiore existente, quouis angulo recto: in semicirculo fiat angulus rectus; & in segmento minore: progrediatur angulus ad angulum, qui recto est minor. Id quod absurdum esse videtur. Sic enim quæ in contrarium mutantur; solent per media quædam progredi. Possunt etiam eiusmodi immediata in cæteris quoque inueniri: quæ hac ratione sunt opposita. Nam linea, quæ circulum claudit, cum conuexa sit, & concaua, non potest esse recta.

PROPOSITIO XXXV.

SI in circulo duæ. Præsens hoc theorema duobus modis in quæstione collocari potest: uno quidem sic. Si rectarum in circulo sese mutuo secantium; vna quidem per centrum fuerit ducta: altera vero per centrum non fuerit ducta: neque secta sit in duas partes æquales a recta per centrum ducta. Altero vero sic. Si etiam hoc modo fuerint, vt vna per centrum ducatur: altera vero per centrum non fuerit ducta: ab altera secta fuerit in duas partes æquales. Est autem talis demonstratio. Sit circulus B.C.A.D. & in eo rectæ sese

mutuo

mutuo secantes in puncto E: recta quidem CD per centrũ ducta: recta vero AB nõ sit per centrum ducta: neque AB recta sit secta in duas partes æquales à recta CD. itaque non erit ad angulos rectos, quod per se manifestum est, ex supra demonstratis. Sumatur centrum circuli: & sit punctum F. aeque à puncto F rectæ AB: ducatur ad angulos rectos, seu perpendicularis FG, & ducantur rectæ FB, FG. Quoniam recta quædam CD, secta est in partes quidem æquales in puncto F: inæquales vero in puncto E. Erit igitur rectangulum CE, ED rectis contentum: cum quadrato à recta FE descripto, æquale quadrato à recta FD descripto: verum recta FD. est æqualis rectæ FB. Quare rectangulum rectis CE,ED contentum: cum quadrato à recta FE, descripto: est æquale quadrato rectæ FB. Verum quadrata rectarum BG, GF, sunt æqualia quadrato FB. quia angulus ad punctum G, est rectus. sed quadrato rectæ FE, sunt æqualia quadrata rectarum FG,GE. siquidem rursus angulus ad punctum G est rectus. Quapropter rectangulum CE, ED rectis contentum: cum quadratis rectarum FG, GE, est æquale quadratis rectarum BG, GF. commune auferatur quadratum rectæ GF. Quare rectangulum CE, ED rectis contentum, cum quadrato rectæ GE:

est

est æquale quadrato rectæ B G. Verum, rectangulum BE, EA rectis contentum, cum quadrato rectæ E G: est æquale quadrato rectę B G, quia recta A B, secta est in partes quidem æquales in puncto G; in partes vero inęquales, in puncto E. Vnde etiam, rectangulum rectis C E, E D contentum, cum quadrato rectæ E G, est æquale rectangulo AE, EB rectis contento, cum quadrato rectę E G. Commune auferatur, quadratum rectæ E G. Ergo rectangulum rectis CE, ED, contentum est æquale rectangulo rectis A E, E B contento.

Rursus sit vna harum per centrum ducta: vt recta C D: altera vero non sit per centrum ducta, vt recta A B, & secetur per rectam C D, in duas partes æquales, in puncto E. manifestum itaque est, quod etiam secta sit ad angulos rectos: & sumatur centrum circuli, & sit punctū F: ducatur etiam linea recta, F B. Quoniam recta quædam linea C D, secta est in partes quidem æquales in puncto F, & in partes inæquales, in puncto E: erit igitur rectangulum rectis C E, E D contentum, cum quadrato rectæ F E, æquale quadrato rectæ F D. sed recta F D, est æqualis rectæ F B. Quare & rectangulum CE, ED, rectis contentum, cum quadrato rectæ F E, est æquale, quadrato rectæ F B. sed qua-

N drato

drato rectæ F B. sunt æqualia quadrata rectarum BE, EF. erit igitur rectangulum, rectis CE, ED, contentum, cum quadrato rectæ FE, æquale quadratis rectarum, BE, E F. Commune auferatur, quadratum rectæ FE. Erit igitur rectangulum C E, E D, rectis contẽtum, æquale quadrato rectæ B E. sed recta B E, est æqualis rectæ E A. Quare rectãgulum CE, ED rectis contentum, est æquale rectangulo rectis BE, EA, contento.

Finis Libri Tertij Elementorum Geometriæ Euclidis.

LIBER

LIBER QVARTVS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ EVCLIDIS.

ETSI de inſcriptionibus, & circũſcriptionibus, doctrina, varia & multiplex ſit: attamẽ non prolixe eam perſequitur: ſed poſtquam ad hexagonum peruenit: & in fine quædam de pentecædecagono, tanquam ijs quæ ad aſtronomiam plurimum conducunt, tradidiſſet: finem imponit huic doctrinæ.

Primum vero theorema eſt lemma alterius lemmatis in quo conſtitutio pentagoni traditur: & quæ ei neceſſaria erant: in tali diſtribuitione, & diſtinctione, atque ordine: ea proponit, & in ordinem redigit. Et quia conſtitutio trilateræ figuræ: ſimpliciorem habet delineationem: priore collocata eſt loco: & antecedit reliqua theoremata.

PROPOSITIO II.

R*Eliquus igitur angulus B A C, reliquo angulo EDF est aequalis &c.* Quomodo id fiat, vt angulus B A C, fit æqualis angulo EDF, demonstrabitur. Id quidem in libri primi propositione 26. est demonstratum. Vbi docet quod si fuerint duo trigona, quæ duos angulos duobus angulis habeant æquales, alterum alteri: habeant etiam vnum latus, vni lateri æquale, & reliqua: hoc vero in loco, nullum latus trigoni A B C, alicui lateri trigoni D EF, proponitur æquale.

Respondemus ergo, quod & sic demonstrari possit, id quod propositum est. Sint & proponantur eadem trigona A B C, D E F, quorum duo anguli A B C, A C B duobus angulis DEF, DFE, sint æquales: alter alteri. sit etiam vnum latus ad æquales illos angulos inæquale vni lateri ad æquales angulos constituti: & ponatur latus B C, maius latere E F. Dico quod & hoc modo angulus BAC, æqualis sit futurus angulo EDF. Ponatur enim lateri EF ęquale latus B H, vel basis B H, basi E F æqualis: & per punctum H, ducatur rectæ CA æquidistans recta H L. Quoniam nunc rectæ CA, HL, sunt æquidistantes: & in eas incidit recta B C: idcirco angulus

lus BHL, angulo B C A est æqualis: sed angulus BCA, angulo EFD, est æqualis. quare & angulus B H L, angulo E D F æqualis erit. Per eadem demonstrabitur, quod angulus BLH, angulo B A C sit æqualis. Verum angulus B L H, angulo E DF, est æqualis. Erit igitur etiam angulus BAC, angulo EDF æqualis.

Finis libri Quarti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

Liber Quintus.

SCOPVS huius quinti libri est: præcepta tradere proportionum, & rationum. & est hic liber communis Geometriæ & Arithmeticæ, & Musicæ: & vt vno dicam verbo, totius mathematicæ scientiæ. Quæ enim in hoc libro demonstrantur, non solum conueniũt geometricis theorematibus: sed omnibus iis, quæ Mathematicæ subiacent disciplinæ, vt antea dictum est. atque hic est scopus huius libri.

Quidam vero aiunt, hunc librum, eiusque doctrinam ab Eudoxo inuentam traditamque esse: qui Platonis fuit præceptor. Cum itaque scopus eius sit tractare doctrinam proportionum: & proportio sit rationum habitudo: Idcirco primò lo-

co

co necessum est scire: quæ & quales sint rationes. quia prius simplicia quam composita cognoscere conuenit.

Quando itaque quędam inter se comparantũr, exempli gratia, duæ magnitudines: tũ nominãtur istæ duæ magnitudines termini, differentia vero, qua inter se vna ab altera differt, interuallum seu distantia: comparatio denique vnius magnitudinis ad alteram magnitudinem habitudo, quam veteres appellarnnt rationem. postremo comparationem aut habitudinem similitudine quadam factam, huius rationis, ad alteram rationem, appellarũt analogicam proportionem, & proportionalitatem, ne scilicet vt hæc magnitudo, ad hanc magnitudinem conferatur: sed vt hæc ratio ad hanc rationem.

Ipsa quoque comparatio, ratio dicitur esse rationis. Vt si fuerint duæ lineæ rectę, quarum altera ad alteram duplam habeat rationem: quadratũ descriptũ à recta duplam rationem habente, dicetur habere rationem quadruplam, ad quadratum ab altera recta descriptum, quam habeat maior recta, ad minorem rectam. Nam quæ longitudine sunt dupla. potentia sunt quadrupla, cum itaque ratio quadratorum, sit quadrupla: & rectarum ratio dupla erit. atq; hæc ratio nominatur rationis ratio. sed est illa ratio, quæ ad quantitatem pertinet.

Duplex enim est ratio: vna dignitatis & excellentiæ, altera vero quantitatis. Dignitatis quidem ratio nullam habet speciem, quæ nobis vsui esse in hac doctrina possit: sed ratio quantitatis est quintuplex. Multiplex. vt 6. ad 3. superparticularis vt 4. ad 3. Superpartiens vt 5. ad 3. atque hæ tres sunt simplices: ex quibus Multiplex est simplicior quam reliquæ. reliquæ ex duarum fiunt compositione. Multiplex superparticularis, vt 7. ad 3. & multiplex superpatiens. vt 8. ad 3. Hypologi dicuntur, minores rationes ad maiores. Prologi vero, maiores ad minores.

Sciendum etiam est: quod hic liber in duas sit diuisus partes: & contineat in se prima pars simplicium rationum doctrinam. hoc est doctrinam multiplicium. secunda pars vniuersalem de omnibus rationibus præceptionem. Necesse enim est, vt in omni re explicanda, antecedat, vt dictum est, priore loco simplicium doctrina: atque eodem modo quo liber hic diuisus est, etiam definitiones sunt diuisæ. Nam definitiones priores, de partibus & multiplicibus loquuntur: sequentes vero vniuersalem habent omnium rationum explicationem.

DE-

DEFINITIONES.

PArs est. Vulgus appellat partem, id quod minus est in vnaquaque eiusdem speciei re. vt in numeris 3. est pars de 5. sed Geometra partem appellat, eam magnitudinem, quæ æqualiter metitur, magnitudinem maiorem. hoc est, quando facta dimensione aut diuisione, id quod relinquitur fuerit æquale ei quod alterũ metitur. sed si contingat; vt quod post factam diuisionem (vt vocant Logistici) aliquid supersit, tum minus non erit pars, sed partes: vt in numeris 3. metitur quidẽ 5. sed facta diuisione relinquitur 2. qui numerus æqualis non est 3. Vnde etiam 3 non sunt pars 5. sed partes. nempe quinæ partes.

Ratio est. Addidit, ratio est: vt indicaret habitudinem postea duarum magnitudinum. vt distingueret has ab alijs quantitatis speciebus. Præterea, eiusdem generis.) nequis forsitan lineam cum superficie conferret. quia hæc inter se non sunt proportionalia. Tandem addit, secundum quantitatem.) vt seiungeret has, ab infinitis magnitudinibus. quia quantitatis continuæ, terminus est *Pelicotes*; & quantitatis discretæ, terminus est *Posotes*. Nam discreta quantitas non est magnitudo, sed multitudo. Postremo loco addit ali-

liqua habitudo.) Sunt enim vt antea di-
tum est quinque species habitudinis..

Aliter.

Eiusdem generis. Dicit, eiusdem generis esse debere, propterea quod ea, quæ eiusdem generis non sunt: nunquam rationem aliquam inter se habent, Neque enim linea ad planam superficiem; neque plana superficies, ad solidum, rationem aliquam habere potest. sed linea ad lineam, superficies ad superficiem: & superficies plana ad planam superficiem.

Magnitudinum. Adiecit hoc explicationis ergo, & distinctionis gratia: vt excluderet eas, quæ habitudinem quidem inter se habent: sed non eam quę secundum magnitudinem consideratur. vt pater ad filium, dominus ad seruum, amicus ad amicum, dextrum ad sinistrum. dicitur etiam alia habitudo esse secundum id quo quis habet, aut deficit, vel non habet.

Rationem habere. In numeris quidem, omnis ratio numerorum, habet quantitaté quæ effari potest: sed in magnitudinibus est ratio aliqua, quæ non potest exprimi per numerum. Sunt enim quædam quæ non nisi solo quem habent inter se excessu cognoscuntur. quantitas vero excessus, est incognita. atque hæc dicuntur habere rationem excessus: non autem eam rationem quam habet numerus ad numerum. ideo-

que

que addidit in definitione rationis magnitudinum (si secundum quantitatem.) quia ratio effabilis, fit secundum magnitudinem, & secundum multitudinem. neque vero semper & omnino consequitur, quod ratio secundum quantitatem, etiam sit effabilis. Quare postquam vniuersaliter definiuisset, quænam magnitudines rationem inter se habeant: & cuiusmodi illæ essent: addidit, quæ multiplicatæ sese mutuo excedere possunt. hoc omnibus applicare potest effabilibus quas rationales vocant.) & ineffabilibus seu irrationalibus. qualis est quadrati diameter. in rationalibus rationibus quidem diameter ad latus, est irrationalis. sed in excessus ratione, habet rationé eam, quam habet maius ad minus & fieri potest, vt latus multiplicatum aliquando excedat diametrum.

In eadem ratione. Si quis per numeros velit explicare diluciditatis gratia, quænam rationem inter se habere dicantur: id facere poterit hoc modo.

Sint quatuor nobis numeri propositi: & scire cupimus: vtrum in eadem sint ratione, primus ad secundum. & tertius ad quartum: an vero habeant maiorem rationem primus ad secundum, quam tertius ad quartum: an vero minorem. Multiplicentur tertius & quartus inter se: ita vt qui ex multiplicatione fiunt numeri, sint inter se aequales; Postea multiplicentur primus in quartum, & secundus in tertium. Quod si nunc numeri ex multiplicatione primi in secundum fuerint aequales: dicemus in eadem ratione esse, primum ad secundum, & secundum ad tertium. Quod si vero numerus ex multiplicatione primi fuerit maior numero ex multiplicatione secundi: tum dicemus maiorem habere rationem numerum primum ad secundum, quam habeat tertius ad quartum. sin vero numerus ex multiplicatione primi, fuerit minor. quam numerus ex multiplicatione secundi: tum minorem rationem habere dicetur: primus ad secūdum, quam habeat tertius ad quartum. Exempli gratia ponantur in eadem ratione esse hi numeri. 12. 6. 8. 4. Multiplicentur interse tertius & quartus. 8. & 4. fient 32. & simili modo multiplicetur primus 12. in secundum 6. fiunt 48. & multiplicetur secundus 6. in tertium 8. fiunt etiam 48. Manifestum ergo est quod sint in eadem ratione. 12. ad 6. & 8. ad 4. Nunc sumamus alios numeros, ita vt primus maiorem rationem habeat ad secundum, quam tertius ad quartum & sint hi. 10. 4. 6. 3. Multiplicentur inter se 6. & 3. fiunt 18. & 3. in 6. fiunt etiam 18. postea multiplicentur 10. & 3. fiunt 30. & multiplicentur 4. in 6. fiunt 24. Fit ergo manifenifestum quod 16. ad 4. maiorem habeant rationem, quam 6. ad 3.

Denique sumamus alios numeros, vt primus ad secundum minorem rationem habeat, quam tertius ad quartum. & sint hi numeri 12. 7. 18. in 9. nunc multiplicentur 18. in 9. fiunt 162. & rursus 9. in 18. fiunt 162. postea 12. in 9. multiplicentur fiunt 108. & 7. in 18. fiunt 126. & fit apertum atque manifestum, quod primus ad secundum minorem rationem habeat, quam tertius ad quartum.

Quando vero tres magnitudines fuerint proportionales. Non dicit quod duæ rationes sint vnius duplæ. & hoc quidem esset: sed quod ratio quæ fit ex duabus, sit dupla, vt 8.4.2. vel 9.3.1. quia in prioribus numeris duæ rationes duplæ sunt continuæ quam rationem habet 8. ad 4. eam habet 4. ad 2. sed 8. ad 2. vel primus ad tertium, non habet duplam rationem, quam habuit ad 2. hoc est secundum. sed bis duplam, hoc est quam habet primus ad secundum, & quam habet secundus ad tertium.

2 Simili ratione fit in triplis 9.3.1. Nam 9. ad 3. habet rationem triplam: & 3. ad 1. eodem modo triplam. sed 9. ad 1. dicitur bis habere rationem, quam habet ad 3. siquidem inter 9. 3. & 1. sunt duæ triplæ rationes. Idem in alijs sentiēdum est. Atq; sic se habet, si tres fuerint magnitudines.

Quod

Quod si vero fuerint quatuor magnitudines, tum prima ad quartam triplicatam habebit rationem: quam habet ad secundam. quia inter numeros quatuor in eadem ratione existentes, sunt tres eædem rationes, atque eam ob causam dicitur prima ad quartam habere terneam rationem, quam habet ad secundam: hoc est triplicatam.

Compositio rationis. Recentiores hanc addiderunt definitionem. non enim vnum & idem est, compositio magnitudinum, & compositio rationum. Nam hic quidem antecedens compositum consequenti, magnitudo inquam cum magnitudine. tum tota fiet magnitudo facta & composita ex magnitudinibus, quæ etiam erit æqualis magnitudinibus, ex quibus ipsa est facta & composita. Verum rationum compositio, aliam facit rationem: quemadmodum etiam in sequenti libro dicit, Ratio ex rationibus composita esse dicitur &c.

Sed sicut ego in antiquis legi libris, hãc compositionem vocarunt *Synthenti logon*: sic etenim in insequentibus theorematibus loquitur Euclides, & vocat *Synthen ti*. nihilominus tamen etiam hac ratione ex *Synthenti* intelligitur *Synthesis*.

Existimo tamen melius esse, si quis dicat esse *Synthesin* compositionem terminorum, non autem rationum. Voco autem *Horus*

ter-

terminos, ipſas propoſitas magnitudines: non autem habitudinem ipſam, quam inter ſe habent.

Simili modo & diuiſio. Non, vt ſic dicam, intelligitur rationis diuiſio eſſe: duplæ in ſeſquialteram & ſeſquitertiam: aut triplæ in ſeſqui alteram & duplam: ſed magnitudinum diuiſio. Nam exceſſus antecedentis ad conſequentem, conſideratur ad conſequentem.

Perturbata. vt (8. 4. 1.) vt 8. ad 4. ſic 6. ad 3. & vt 4. ad 1. (24. 6. 3.) ſic 24. ad 6.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO II.

P*Rima magnitudo*. Hoc theorema eſt in demonſtrationem aſſumptum, definitionis ſuperioris in qua docuit, quæ magnitudines, in eadem ſint ratione. vbi ſic inquit. In eadẽ ratione magnitudines eſſe dicuntur: quando æque multiplices magnitudines primę & tertiæ, hoc eſt antecedentiũ, æque multiplicibus ſecundæ & quartæ, hoc eſt cõſequentiũ, vel ſimul fuerint ęquales, vel ſimul eas excedunt, & ijs maiores ſunt; vel ſimul deficiũt, & ijs minores ſunt. Quod autẽ & ipſæ cũ illis eandem rationeẽ habeãt: id hoc in theoremate demonſtrat.

De his vero nullam ab initio mentionem.

nem fecit: quia non potuit dicere, illas magnitudines in eadem ratione esse: quarum æquemultiplices magnitudines in eadem sunt ratione: præsertim cum illud ipsum nos inuestigemus: quidnam illud sit, Esse in eadem ratione. Cum itaque ab initio dixisset: Simul excedere, simul deficere, simul æquales esse: demonstrat in hoc theoremate: quod etiam in eadem sint ratione. Ita vt manifestè appareat definitio magnitudinum in eadem ratione existentium talis esse. Quando primæ & tertiæ magnitudinis æqualiter multiplices magnitudines, ad secundæ & quartæ æqualiter multiplices magnitudines eandem habuerint rationem. Demonstrat vero illas magnitudines in eadem ratione esse, per hoc theorema & per conuersum.

PROPOSITIO VI.

SI duæ magnitudines. Non propositum est in hoc theoremate demonstrare, quod si à multiplicibus multiplicia auferantur: tum reliqua magnitudo vel erit æqualis, vel multiplex. hoc enim per se est manifestum. sed quod si duæ magnitudines ita se vt dictum est habeant, si reliqua prioris multiplex est, & altera alterius multiplex erit: sin æqualis, vt si quadruplæ fuerint: & triplę ex ambabus fuerint sublatæ:

tæ: tum æquales erunt ambæ ijs, quæ post factam triplæ subtractionem fuerunt relictæ: sin fuerint duplæ, tum earundem duplæ etiam erunt.

PROPOSITIO VIII.

In*æqualibus magnitudinibus.* In ipso demonstrationis contextu prope eum locum vbi hæc sunt verba, conclusionis. Quare A B ad C maiorem rationem &c.) Sunt hoc in loco quatuor magnitudines: prima quidem A B, secunda C, tertia, A & quarta C: quia C bis sumitur: pro secunda & pro quarta. atqui primæ multiplex est E D, secundæ vero C, multiplex est FG: tertiæ etiam A, multiplex est E. Ad hæc E D, primæ A B: est maior quam sit F G. quæ magnitudo F G, est multiplex secundæ magnitudinis C, & magnitudo E, multiplex tertiæ magnitudinis A est minor magnitudine FG, quę FG magnitudo est multiplex quartæ magnitudinis C. Quoniam nunc primæ magnitudinis multiplex, maior est secundæ magnitudinis multiplici: & tertiæ magnitudinis multiplex non sit maior multiplici quartæ magnitudinis: idcirco magnitudo A B, ad magnitudinem C, maiorem rationem habet: quam magnitudo A, ad ipsam C magnitudinem. Per definitionem quæ dicit.

Quan-

Quando vero æque multiplicia: & quæ sequuntur.

PROPOSITIO XVI.

S*I quatuor magnitudines*. Hoc in loco mentionẽ facit *Enallax* permutatæ rationis. & manifestè patet, quod & cæterarum facit mẽtione *synthenti*, *anastrepsanti*, & *anapalin*, & *di isu*, & inordinatæ proportione, atque ordinatæ.

PROPOSITIO XVII.

S*I magnitudines composita*. Hic initium facit *Dielutnti*, & *synthenti*, & *anastrepsanti*, & *anapalin*, & *di isu* in proportione inordinata, & ordinata.

Veruntamen huius theorematis lemma est, theorema præcedens vel *Enallax*. sicuti & 20. theorema, theorematis 21. seu *di isu* in proportiono perturbata: & 22. simili modo 23. lemma est.

Finis libri quinti Elementorum Geometriæ Euclidis.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

Liber Sextus.

DEFINITIONES.

RECIPROCAE *figuræ sunt*. Si in figuris latera fuerint proportionalia tum omnino reciproca erunt, sed non viceuersa quæ latera reciproca habent, illarum etiam latera proportionalia sunt, simpliciter: nisi etiam fuerint æqualium angulorum figuræ.

PROPOSITIO XI.

D*atis duobus*. Arhithmeticæ vero medium terminum proportionalem in seipsum multiplicatum, diuides antecedentem, hoc est primam rectam: & quotus numerus, erit tertius proportionalis.

PRO-

PROPOSITIO XII.

D*Atis tribus*. Arhithmeticè, secundam in tertiam multiplicabis: & per primam diuides productam. & quotus qui erit numerus, erit quarta recta proportionalis.

PROPOSITIO XIII.

D*Atis duobus rectis*. Arhithmetice sic inuenies, mediam proportionalem. Extremas in se multiplica, & numeri producti, sume latus quadratum: siue sit rationale, siue irrationale: & habebis mediam proportionalem.

PROPOSITIO XIV.

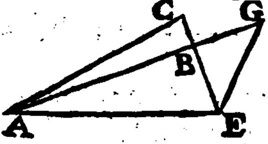
P*Arallelogramma*. Illa quidem parallelogramma, quæ habent vnum angulum vni angulo æqualem: & reliquos reliquis æquales habent: alterum alteri: omnino vniuersaliter sunt æquiangula. verum hoc in loco propter illam comparationem laterum vnum angulum continentium: dicit quæ habent vnum angulum, vni angulo æqualem: sed trigona sic se non habent. Fieri enim potest, vt trigona æqualia, vnum angulum vni angulo æqualem

lem habeant: veruntamen non habeant reliquos reliquis æquales. vt per omnia sint trigona ęquiangula.

PROPOSITIO XV.

Aequalia trigona quæ habent. Trigonis æquiangulis solis hoc contingit: vt omnia latera habeant proportionalia: sed non quod sint ratione reciproca. Trigonis vero æqualibus, & vnum latus, vni lateri æquale habentibus, accidit: quod latera sint omnia reciproca. quia latus lateri est æquale: alterum alteri: & ratio æqualitatis conuertitur ad seipsam, hoc est ratio quę sumitur ex antecedente & consequente, eadem est & indifferens. Ita vt quędam trigona tantum latera habeant proportionalia: quædam vero trigona habeant latera reciproca: denique nonnulla trigona habeant latera proportionalia & reciproca. Sunt autem priora quidem trigona, quæ æquiangula quidem sunt: sed non æqualia. secundaria vero, quæ ęqualia quidem sunt trigona, & vnum angulum, vni angulo habent æqualem: verum non sunt æquiangula. Cætera vero præter hæc trigona, sunt & æqualia & æquiangula.

Quod autem sint trigona æqualia, & vnum angulum vni angulo æqualem habenbentia : ita tamen vt non sint æquiangula : id inquam manifestum est ex numeris quos in schemate & figura proposuimus.



Quoniam enim trigoni quidem BEG, duo latera, BE, BG, sunt inter se æqualia : & anguli ad basim eiusdem trigoni, sunt inter æquales. Præterea in trigono ABC: cum duo latera BA, BC sint inæqualia : etiam anguli ad basim sunt inæquales. Vnde sequitur quod BEG trigonum, non sit æquale A B C trigono. Id quod erat demonstrandum.

FINIS.

ISAACI

ISAACI MONACHI PROLEGOMENA

In Euclidis Elementorum Geometriæ Libros.

Definitiones Geometriæ, duæ.

GEOMETRIA est scientia magnitudinum, & earum rerum quæ his accidunt. Elementa vero inscribuntur Geometrię, quia nobis suppeditant principia disciplinæ mathematicæ. Aliter Geometria est scientia, quæ versatur circa quantitatem continuam, quæ nullum per se habet motum: quæ etiam dimensionem inuenit longitudinis, latitudinis, & profunditatis, per syllogisticas demonstrationes, factas ex axiomatibus, sententijs communibus, & cęteris his similibus demonstrandi rationibus.

VARIA

MISCELLANEA

AD GEOMETRIÆ

Cognitionem necessaria ab *Isaaco Monacho collecta*.

GEOMETRIA ab initio ab Aegyptijs inuenta est. Thales vero Milesius, primus fuit qui in Græciam hanc transtulit disciplinam: post Thaletem vero Mamertius Stesichori poetæ frater, & Hippias Elæus hanc excoluerunt scientiam. post quos subsequutus est Pythagoras: qui paulo altius cum considerasset huius scientiæ principia: omnia theoremata absque materia, & intellectu solo atque abstracte perlustrauit. Pythagoram Anaxagoras & Plato sunt sequuti. & Oenopolis Asiaticus, Theodorus Cyrenaicus, & Hippocrates qui antecessit Platonem: Leodamas Thasius, & Archytas Tarentinus, Theętetus Atheniensis, Eudoxus Cnidius, qui tribus proportionalibus, alias tres proportionales addidit:

didit: & vt vno dicam verbo, quamplurimi alij post Thaletem extiterunt in Gręcia Geometrę: inter quos & Euclides fuit qui Elementa conscripsit Geometrię: non multis annis iunior ijs, quos enumeraui. Vixit enim tempore primi Ptolemęi: ita vt iunior quidem sit Platone: sed prior ętate ipso Eratosthene & Archimede: qui duo vno eodemque vixerunt sęculo.

Dicimus etiam, quod hoc nomen Mathematicę, & mathematicarum disciplinarum, idcirco his scientijs sit datum: quia omnis mathesis est *Anamnesis*, hoc est, recordatio: non externè menti & rationi accedens: sicuti imaginationes sunt, quę ab rebus sensilibus imprimuntur nostris cogitationibus: neque etiam accessoria quòd sint: sicuti quæ in opinionibus hominum versantur. sed tales sunt, quæ cum ex ijs, quæ apparent excitantur: & interne ab ipsa ratione in seipsam conuersa, secundum species proposita sunt: atque priore loco ipsa scientia hęc assumit in seipsam: quamuis non in actum eas per seipsas producat scientias: siquidem omnibus modis substantialiter & occulte has in se continet. tum vero has profert scientias, quando impedimenta quæ à sensibus oriuntur aufert: quia sensus copulant rationem hominis cū rebus partilibus: imaginationes autem eandem coniungunt formalibus motibus. denique cupiditates implicant rationem hominis, vitę adfectibus obnoxiam. omne vero partibile, impedit conuersionem eam quæ fit in seipsam, & in vnum punctum. Aristoteles enim quodam in loco dicit: quod qui contemnunt studia mathematica, non gustarint iucundas illas voluptates, quas ex his percipimus studijs. Plato etiam dicit, mathematicam disciplinam purgare mentem nostram: & ita informare, vt ad quęuis abstrusiora percipienda habilis atque idonea sit. verum mathemata recedunt quidem ab illa impartibili & diuina natura: sed excellētiora sunt quam partibilis illa sit rerum essentia. post mentem ipsam, quæ supremum tenet locum, secundaria esse mathemata: sed perfectiora, certiora, & puriora esse, quam sint, quę opinionibus hominum cognoscuntur.

Diuidunt Philosophi scientiam dupliciter: in eam quæ nulla vtitur hypothesi: & in alteram quæ hypothesi vtitur: prima illa quę nulla vtitur hypothesi est, vt aiunt, quæ vniuersarum rerum cognitionem in se habet: & quæ vsque ad boni, & summæ omnium rerum causę comprehensionem ascendit: quæ etiam finem extremum propositum habet: ipsummet summum bonum.

Altera verò, vt Philosophi docent, est

quæ

quæ certa & definita habet principia, ex quibus demonstrat ea quæ principia sequuntur: neque ad principium, sed ad finem progreditur. Cum itaque & ipsa mathematica scientia vtatur hypothesibus: idcirco inferior est summa illa scientia, quæ nullis vtitur hypothesibus, & omnium est perfectissima scientia. siquidem vna tantum est vera & essencialis scientia rerum, per quam omnia quæ sunt & existunt, comprehendimus: & à qua omnium reliquarum scientiarum principia deducuntur: ita vt alijs quidem propiora quæ sunt communicet: alijs vero remotiora. Sicuti vero mens superat rationem hominis, & sursum ducit principia, atque ex seipsa rationem hominis perficit: ita quoque Apodeictica purissima philosophiæ pars existens, proxime superat mathemata & in se comprehendit vniuersarum rerum mathematicarum solutionem seu doctrinam. omnes etiam potentias seu facultates quas habet perficiendi, iudicandi & intelligendi, varijs & multiplicibus mathematicis scientijs participat atque communicat. Analyticam intelligo facultatem, & diuisoriam, definitoriam, & apodeicticam, quibus facultatibus præeuntibus mathematica, quasi ducta, & inuenit nonnulla per analysim ac synthesim, & diuisionibus factis quædam recenset, & de-
 fini-

finitionibus explicat: & demonstrationibus, *quæ in quæstione erant proposita*, confirmat, dum has de quibus loquor methodos, rebus sibi subiectis recte & bona ratione accommodat.

Scopus vero huius geometricæ institutionis elementaris duplex est: alter enim res subiectas, de quibus doctrina instituitur, respicit; alter vero ipsum discentem. Quod si enim res subiectas intueri velimus: dicemus, geometram, omnem hanc geometricam *doctrinam instituisse* propter mundi figuras, quas *Corpora regularia* vulgo vocant; quibus mundus consistere dicitur. incipit enim à simplicibus, & finem facit in constitutione quinque corporum regularium. atque singula quidem, seorsim describit; nihilominus tamen sub finem omnia hæc vni inscribit sphæræ; & quam inter se rationem hæc habeant, demonstrat. Ideoque in singulis libris quidam existimarunt, scopos librorum singulorum ad mundum referendos esse, eamq; ob causam, vtilitatem quam ad contemplationem vniuersitatis consequendam, præstant, conscripserunt.

Ad discentem quod attinet: dicimus scopum Elementorum esse; vt per hanc elementatem doctrinam ratio discentis recte & absolutè informetur, & imbuatur in his, vt eo perspicacius vniuersæ geometriæ doctrinam intueri possit, & adsequi quæ in hac sciētia sunt abstrusissima. Nam qui ab his elementis, discendi initium facitunt: etiam alias partes huius scientiæ cognoscere poterunt.

Nam in his traduntur, & collecta sunt principalissima & simplicissima theoremata, & primis hypothesibus maxime cognata: atque ratione bona, conuenientique modo disposita & distincta. Neque etiam fieri potest, vt absque his, variam ac multiplicem cæterarum rerum geometricarum cognitionem, percipere possimus. siquidem reliquarum rerum geometricę demonstrationes, his vtuntur tanquam manifestissimis; & ab his tanquam iam notis, ordiuntur suas demonstrationes. Atque ex his nunc patet, quod scopus horum elementorum sit, discentem informare in his primis elementis: vt vniuersam geometrię doctrinam sibi comparare possit: & vt distinctas mundanarum figurarum constitutiones tradat.

Sed vt aliquid quæramus de inscriptione, necessum erit: elementaris vnde dicatur doctrina, & elementum: vnde etiam elementares libri dicuntur. Sciendum itaque, quod elementa dicantur ea, quarum contemplatio diffusa est per reliqua scientię subiecta: & necessaria sunt ad illorum subiectorum perceptionem consequēdam:

& per quæ nos dubia, quæ in his accidunt, soluere possumus. Quemadmodum enim in grammaticis sunt principia prima & simplicissima, & indiuisibilia, vt vocantur elementa: hoc est literæ, & syllabæ. ex quibus omnis dictio, & omnis constat oratio: ita quoque totius geometriæ sunt quædam primaria & antecedentia theoremata, quæ principiorum instar sunt respectu insequentium.

Menæchmus autem dicit, quod elementum dupliciter sumatur, id enim quod cõfirmat & demonstrat aliud: dicitur esse elementum eius quod confirmatur. vt primum problema Euclidis, secundi elementum esse dicitur: & quartum quinti. Deinde etiam dicitur elementum esse id quod simplex est: & in quod id quod compositum est, diuiditur. Hoc sane tantum iis conuenit, quæ solummodo sunt omnium maxime primis principiis proxima, sicuti postulata & axiomata, sunt elementa theorematum. Iuxta hanc vero elementi significationem, etiam Euclidis elementa sumi possunt, & sic etiam sunt cõscripta & distincta ab alijs geometriæ scriptis: & partim geometriæ, partim stereometriæ elementa dicuntur esse. eodem etiam modo in Arithmeticis elementa numerorum extant: vt & multi fuerunt qui astronomica elementa conscripserunt.

Diffi-

Difficile vero eſt delectum facere propoſitionum elementarium: & illas rite diſponere, à quibus reliquæ dependeant, & in quas reſoluuntur cæteræ propoſitiones. Speciem quoque elementorum habét propoſitiones: quæ aliquo vſque ſuam extendunt vim: & ſimplicitatem in ſe habent atque facilitatem. non autem vt elementa, ita & hæ propoſitiones ad vniuerſam ſciẽtiam, eandem habent vtilitatem & neceſſitatem ſimplicem, apertam, & facilem, vt elementa. Denique propoſitiones, quæ neque longe lateque diffuſam habent cognitionem; neque adeo dilucidam & perſpicuam habent explicationem: tales neq; elementares ſunt propoſitiones, neque elementorum ſpeciem habent.

Sunt autem geometriæ principia, Definitiones, Poſtulata, & Axiomata. quæ quidem inter ſe differunt. Quandocunq; enim id quod principij loco ſumitur: & diſcenti notum eſt; & per ſe fidem facit: talis propoſitio inquam appellatur axioma. vt. Quę eidem ſunt æqualia, etiam inter ſe ſunt æqualia, & quæ ſequuntur axiomata. quæ etiam communes appellantur ſententiæ. propterea quod omnibus ferè hominibus etiam imperitis, eiuſmodi propoſitiones cognitæ ſint: nec vlla indigent demonſtratione.

Quando vero is qui propoſitionem audit:

dit, fidem ei non habet: eamque per se. nihilominus tamen simul illam esse, ponit: & docenti concedit eam: ita vt non quærat demonstrationem alicuius accidentis: quod res de qua est quæstio accidere possit: talis propositio, appellatur Definitio. vt si dicam circulum esse figuram planam, & reliqua quę sequuntur; neque enim communi notione absque *præceptione* & *institutione* hoc prius sciuimus; veruntamen cum definitionem hanc circuli audimus, *concedimus eam absque* vlla adhibita demonstratione, eadem est in cęteris definitionibus ratio.

Cum vero simili, vt ante dictum est, ratione, is qui propositionem aliquam audit, communi ratione eam non intelligit, nec per se fidem habet propositio: nihilominus tamen ponit illam esse veram: & concedit eam docenti: tum non est definitio: sed tantum iubemur aliquid facere, quod & ipsum absque demonstratione sumitur, & appellatur *Aetima* postulatum, vel *Doma* datum, vt petatur a quouis puncto, ad quoduis punctum lineam rectam ducere. & reliqua quæ sequuntur.

Quod si vero quis dixerit, Axiomata esse theoremata *Anapodeicta*, quæ demonstrari non possunt, nec debent: & Postulata esse problemata indemonstrabilia: non longe à veritate rei aberrauerit. verum

rum hæc Aristotelis, est diuisio. Stoici autem omnes propositiones vocant hypotheseis.

Differunt quoque eodem modo Problemata à Theorematibus: quod problema figurarum ortus & generationes contineat: sectiones etiam & delineationes, quę in his fiunt: subductiones & additiones, & vt vno dicam verbo, quomodo constituantur passiones, quæ figuris accidunt. Theoremata vero, neque ortum & generationem, neque effectionem aliquam in se continent: sed tantum demonstrant, quę singulis accidant figuris. Ideoque perpetuo in problematibus, in propositione quidem ponit constituere oportet, aut ducere, aut subtrahere. & quæ his sunt similia, atque operationem aliquam requirunt alicuius rei: & effectionem. in fine autem subiungit, absque vllo discrimine *Oper edei poiësa*, quia problematum proprium est facere, efficere, operari ita vt *Poiësis* operatio, propria sit problematum. Verum in theorematibus in propositione quidem semper ponit: hoc huic æquale est: & alterum alteri æquale. & hæc aliis: in fine vero indifferenter ponit *Oper edei deixai* ita vt *deixis* demonstratio propria sit theorematum.

Sciendum præterea, quod in primo libro primas & principalissimas figuras rectilineas explicet: trigonum inquam, & parallelogrammum. namque in his tanquam genere continentur causæ figurarum. æquicrurum, trigonum, & scalenum dico, & quæ ex his constituuntur figuræ, trigonum æquilaterum, & quadratum: à quibus figuræ quatuor elementorum suam acceperunt constitutionem. Nam trigonum ęquilaterum, proxima causa est trium elementorum, ignis, aeris, & aquæ: quadratum vero terræ.

Vtilis ergo est primi libri scopos ad vniuersam doctrinam, & ad figurarum mundanarum contemplationem, atque etiam elementarem institutionem: qua discipuli ad percipiendam figurarum rectilinearum doctrinam informantur. Diuiditur vero in tres partes: primo in trigonorum generationem & contemplationem: deinde in parallelogrammorum eodem modo generationem & contemplationem: tertio in trigonorum & parallelogrammorum comparationem & communionem.

Ad hęc operæ pretium est scire, quod per reductionem ad impossibile, demonstrandi inquam illam viam & rationem: sumamus id quod cum quæsito pugnat: & illud ponendo, eousque progrediamur, donec in manifestum incidamus absurdum: quo facto, per illud absurdum, & inconueniens, hypothesim tollimus: atque

con-

confirmamus, quod ab initio in quæstione positum fuit.

Omnino scire oportet: quod omnes mathematicæ demonstrationes, vel ex principijs fiant: vel ad principia, vt quodam in loco Porphyrius docet. Vnde quę ex principijs fiunt demonstrationes: & ipsæ quoque duplices sunt. aut enim ex communibus sententijs & axiomatibus, atque definitionibus demonstrationes faciunt: tanquam ex ijs quæ per se manifesta sunt, & fidem per se habentia: aut ex ijs quę iam sunt demonstrata, certa, & affirmata, minimeque dubia.

Rursus, quæ ad principia reducuntur: & ipsæ sunt duplices: vel enim principia confirmant: vel eadem tollunt. quod si principia confirmauerint: appellantur Analyseis: quibus opponuntur syntheseis: potest enim fieri vt ratione bona, & conuenienti modo, à principijs ad quæsiti inuestigationem procedendo, demonstremus; & hoc dicitur esse synthesis. Quæ vero demonstrationes ad principia progredientes, ipsa tollunt principia: nominantur reductiones ad impossibile. Quia aliquid ex ijs, quæ concessa & affirmata & per se manifesta sunt; euertere, aut oppugnare conamur hac demonstrandi ratione.

Verum hæc demonstrandi ratio, habet etiam syllogismum: qui tamen non idem est, qui in analysi fuit; siquidem in reductione ad impossibile, copula fit per secundum modum syllogismorum hypotheticorum. Vt exempli gratia. Si trigonorum duos angulos æquales habentium, & vnum latus vni lateri, angulos æquales continentium æquale: latera æquales angulos subtendentia non fuerint æqualia; tum totum erit æquale parti. sed hoc fieri nequit. sublato itaque absurdo, concluditur id quod consentaneum est principijs, quod his positis: latera æquales angulos subtendentia sint equalia.

Vnitatem dicunt esse punctum, quod dari & poni nequit: punctū vero dari posse & poni. Verum punctum imaginatione concipitur. & quasi in loco aliquo fit: & materiam habet iuxta intelligibilem materiam. quare vnitas poni non potest, vt ea quæ immateriata est, & extra omnem distantiam, omneque interuallum. Sed punctum habet in loco aliquo positionem, tanquam id quod in sinu & grenuo phantasiæ inditum & impositum est. Duplex vero est punctum: aliud quidem sumitur per se: aliud vero in linea, vt sit tanquam finis & terminus lineæ. solum & vnum existens, nec totum habens, nec partes: & imitatur summam rerum naturam ideoque proportionale est vnitati: linea vero binario: superficies ternario.

Spe-

Species lineę duplicem habet potestatem: impartibilem & partibilem. quia punctum habet in se, quod impartibile est: & interualla quæ partitionem admittunt. Pythagorei dicunt, superficiem ternario cōuenire: ideoque omnes figuras in ipsa descriptas, primam causam habere ternarium numerum. quia circulus principium est orbicularium omnium, occulte in se habet ternarium: ratione habita centri, interualli, & circumferentię. trigonum vero principium tenet in omnibus figuris rectilineis: ideoque manifestum est, quod omnino ternario conueniat numero: & secundum eum formetur. vnum dicitur esse terminus & finis atque infinitas, seu infinitum; omnes enim res ex his vniuntur.

Sciendum est, quod locus circa vnum punctum, diuidatur in quatuor angulos rectos: & tantum tres figuræ, ęquilateræ & æquiangulæ locum circa vnum punctum, totum complere possunt. trigonum inquam & tetragonum, & hexagonum, sed trigonum sexies sumptum. sex enim dimidia vnius anguli recti, faciunt quatuor rectos. Hexagonum vero ter sumptum: siquidem quiuis angulus hexagonicus est æqualis vni angulo recto, & tertiæ parti. Tetragonum denique quater si sumatur, locum totum circa vnum punctum complebit. quia vnusquisque angulus te-

tra-

tragonicus rectus est. Quapropter sex trigona ęquilatera inter se concurrētia, complent & efficiunt quatuor angulos rectos: & quatuor tetragona, atque tria hexagona idem præstant. reliqua vero polygona, aut excedunt quatuor rectos, aut ab iisdem deficiunt. sola vero ista tria, trigonum, tetragonum, & hexagonum, æqualia fiunt iuxta prædictos numeros. Ex quo manifestum fit, quod rectitudo angulorum, cognata sit æqualitati. Simili etiam ratione similitudo fini & termino: dissimilitudo infinitati, aut infinito. quod enim in quantitatibus est ęqualitas: id in qualitatibus est similitudo.

Quoniam anguli rectilinei consistunt secundum finitum, & infinitum: idcirco doctrina finis angulum determinat rectum: qui vnus tantum est, & æqualitate comprehensus, perpetuo & semper. Ita vt neque augmentum, neque decrementum recipiat. sed altera doctrina de infinito secundarium tenet locum, & binario conuenit: atque duplices facit angulos præter rectum, inæqualitate iuxta maius & minus distinctos. & secundum id quod magis atque minus in infinitum moueantur. Ita vt alter magis & minus obliquus fiat. alter magis & minus acutus. atque in rebus naturalibus, substantiæ accommodatur ipsa rectitudo, quia tandem defini-

fini-

finitionem & eandem essentiam semper & perpetuo retinet. accidentibus vero anguli obtusus & acutus. hi enim recipiunt maius & minus, & mutantur in infinitum vsque, neque ab eiusmodi cessant mutatione.

Perpendicularis linea recta est symbolum stabilitatis & puritatis, atq; non coloratæ potentiæ, & eius quæ nunquam declinata atque similium rerum. est etiam symbolum diuinæ & intellectualis mensuræ. quia per rectas perpendiculares, figurarum altitudines metitur: facta ratione ad rectum angulum, cæteras figuras rectilineas distinguimus & definimus. quæ per se indefinitæ sunt, quia excessu & defectu consideratur. vnaquæque enim per se infinita est.

Omne problema, & omne theorema perfectum & absolutum, omnibus suis partibus, hęc omnia in se habet. protasin, ectesim, diorismum, katasceuen, apodeixin, & symperasma. Ex quibus propositio quidem subiecti & dati, aliquod quæsitum proponit; atque propositio perfecta, ea dicitur, quæ ex dato & quęsito constat. quam necessario sequuntur dati explicatio & quæsiti explicatio. nam ectesis, ipsum datum per se seorsim sumit & considerat; atque illud pręparat, vt quęstio de eo fieri possit. Diorismus vero, hoc est quęsiti expplicaplicatio, aperit & ostendit quodnam sit quæsitum. quando vero propositio hæc duo non habuerit, datum inquam, & quæsitum: tum neque dati, nempe quæsiti, explicatio erit. Nam si propositio exempli gratia dicit: inueniendum esse hoc, simpliciter dato aliquo, quidnam explicabit explicatio dati? aut quid explicabit quæsiti explicatio? Katasceue hoc est delineatio, ea quæ desunt dato, vt quod in quæstione est inquiratur, addit. Apodeixis seu demonstratio, artificiose ex iam concessis & affirmatis minimeque dubijs, probat id inesse rei subiectæ, quod in quæstione fuit propositum. Conclusio rursus se conuertit ad propositionem, eamque repetit: & corroborat atque confirmat id quod demonstratum est. Atqui omnes problematũ & theorematum partes sunt hę: quæ vero maximè sunt necessariæ, & sine quibus esse non possunt, sunt hæ. propositio, demonstratio, & conclusio. Necesse enim est, vt prius sciamus quid in quæstionem venerit: & id postea demonstrandum est per media. tandé quod demonstratum est cõcluditur: atq; ex his tribus vt aliquid abesse possit aut desit, nunquam fit. reliquæ tres vero partes, sæpius non assumũtur: sed aliquando cũ vtilitaté & necessitatem nullam habent prætermittuntur. Nam diorismus & cęteris, in hoc problemate nõ sunt.

Septem

Septem sunt trigonorum species: nempe æquilaterum: deinde æquicrurum triplex, vt orthogonium, oxygonium, amblygonium. tertio scalenum simili ratione triplex, orthogonium, oxygonium, & amblygonium.

Problemata, quæ proprie problemata sunt, alia quidem casum nullum habent: alia vero plures recipiunt casus, sicuti & theoremata. quæcunque igitur eandem vim & potestatem habent, quæ per plura diagrammata se extendit, & mutat suas positiones: ita tamen vt eadem demonstrandi retineatur ratio. eiusmodi inquam problemata dicuntur habere casus. quæcunque vero vnam habent positionem, & vnam delineationem, appellantur *Aptota* hoc est problemata sine casibus. Hinc casus per se & simili consideratione, in omnibus problematibus accidunt in ipsa delineatione.

Data, quatuor dantur modis, Aut positione, vt cum dico, ad hanc lineam rectam, & ad hoc punctum quod in ea est, ponatur angulus. Aut specie, vt cum dicimus: sit angulus datus rectus, aut acutus, aut obtusus, aut in genere rectilineus, aut circumferentialis, vel etiam mixtus. Aut magnitudine, vt cum dico hunc angulum huius anguli duplum esse, aut vniuersali & generali appellationn maiorem vel minorem.

morem. Aut ratione, vt cum dicimus tertiam aut dimidiam recti partem, & sic in cæteris.

Hypothesis & antistrophe sic apud geometras sumuntur. vt si proponatur trigonum æquicrurum: & geometra demonstret: in omni trigono æquicruro, angulos ad basim esse inter se æquales: & est *hypothesis*. Antistrophe vero est, quando dicimus trigonum cuius anguli ad basim sunt inter se æquales: est equicrurum. Aliud exemplum. Hypothesis est: quando quis ita propositionem instituit. omne trigonum, cuius duo anguli sunt æquales: etiam latera æquales angulos subtendentia habebit æqualia. Antistrophe vero: omne trigonum, cuius duo latera sunt æqualia: etiam angulos habebit, quos æqualia illa latera continent, æquales.

Sciendum quoque est, quod ex omnibus figuris rectilineis, solum & vnicum quadratum, latera habet omnia æqualia, & omnes angulos rectos. ideoque inter omnes figuras rectilineas principem tenet locum. Pythagoricis diuinis assimilatur corporibus: quia loco & ordine eo est, vt non coloratum & fucatum sit: sed firmum & stabile. & quod imitetur stabilem illam potentiam sua æqualitate laterum, & angulorum rectitudine. nam motus inequalitati, sicuti status æqualitati conuenit: &

ex motu nascitur inæqualitas, ex statu æqualitas.

Postremo & hoc annotandum est, lineam infinitam, neque multiplicationem, neque comparationem admittere, cum altera linea. quæ enim eiusdem generis non sunt: non possunt rationem inter se habere. propterea quod ratio sit duarum eiusdem generis rerum aliqua inter se habitudo. vt finitæ lineæ, ad finitam lineam, & superficiei finitæ, ad finitam superficiem. & in cæteris eodem modo.

FINIS.

INDEX RERVM.

Lem-

Tri-

FINIS.