EVCLIDIS
ELEMENTA
GEOMETRICA.

EVCLIDIS
SEX PRIMI
ELEMENTORVM
GEOMETRICORVM

Libri cum parte Vndecimi

Ex maioribus CLAVII Commentarijs in commodiorem formam contracti.

RERVMQVE MATHEMATICARVM

CHRISTOPHORI
Grienbergeri Oenohallensis
è Societate IESV

OPVSCVLVM PRIMVM.

Accessere
ISAACI MONACHI
In sex eosdem Libros [illegible]

ROMAE,
Typis Nicolai Angeli Tinassij. 1655.

Superiorum permissu.

Sumptibus Dominici Grialdi.

Imprimatur,

Si videbitur Reuerendiss. Sac. Palatij Apostol. Magistro.

M. A. Od. Vicesg.

Reimprimatur,

Fr. Saluator Pagliari Reuerendissimi Sacri Apostolici Palatij Magistri Socius.

AD LECTOREM.

BENE & abundè satisfecit Clauius studio mathematicæ ætatis suæ; quando scientiæ omnium candidissimæ adeo iacebant incultæ, atque neglectæ; vix vt nomen Geometriæ purioris extaret. Audiebatur quidem in Scholis, & in Posterioribus ab Aristotele sæpius repetebatur geometricum illud, quó asseritur; Tres angulos cuiuscunque Trianguli æquales esse duobus rectis: *& fortassis nomen trianguli adhuc agnoscebatur; sed quid esset, tres angulos esse æquales duobus rectis, vix erat qui explicaret, & fortassis nemo qui demonstraret. Eadem voces feriere quoque non semel aures Clauij atque ad Geometriam iam olim* *à Natura factas etiam vulnerauere: non enim sonos, sed verborum sensum, atque sententiam percipere cupiebant. Quare iam diu multumque solicitum tandem P. Petrus Fonseca, quo tunc Conimbricæ vtebatur Magistro in Philosophia (& cuius mihi postea ad initium huius sæculi contigit interesse exequijs Olyssipone) eum in communem Collegij bibliothecam ad Euclidem illic iam diu latitantem, talemque hospitem auidè expectantem amandat. Neque opus fuit longo circuitu: vltro statim seipsum suaque ei obtulit obsequia Euclides; tredecim Elemennorum libros coram expandit, Propositionem Aristoteli ita, vt diximus, familiarem, ad trigesimam secundam primi libri legendam præbuit, lectam explicauit, eamque rationibus adeo euidentibus confirmauit, nihil vt amplius dubij superesse videretur. Obstupuit primum Clauius tantam agnoscens, in re tam difficili, facilitatem, & claritatem tantam in tanta oscuritate, eoque*

eoque. statim amoris affectu Euclidem complexus est, ut eius amicitiam nunquam amplius deposuerit, immo id omni conatu procurarit, eum ut locum obtineret apud omnes, quem apud se amplissimum inuenerat.

Nihil igitur cunctatus, illicò ad instaurationem Geometriæ iacentis sese accinxit; prima eius fundamenta accuratissimè recognouit; infirmiora nouis substructionibus corroborauit; collapsa restituit; & quicquid ferè Elemẽtorum reperit ab alijs additum, id omne quamdiligentissimè duos in tomos distribuit: utque Geometriæ quamprimum succurreret, dedit in lucem utrũq. deditque iterum iterumq. copiosiores. Quo autem bono, quoue Lectorum emolumento, non dico: illud certum est, statim venustiorem solidioremq. comparuisse in publico Geometriam. De me fatebor libenter, eius me lectitatione acquisiuisse, si quid hisce in Disciplinis assequutus sum; & puto, nisi mea me fallat conscientia, aliquid etiam animi

sui

ſui in me transfudiſſe; vt ipſe quoque in hæc ſtudia aliquid operis conferrem, rerumq. mathematicarum ſtudioſis, ſi quo modo poſſem, prodeſſem.

Sed ante omnia viſum eſt ſubuenire, non tam alienæ quam domeſticæ neceſſitati, quam nemo eſt qui non agnoſcat. Nam ſine fundamẽtis, ſublimiora præſertim ædificia quis diu ſtare poſſe credat? Commentarios Clauij omnes commendant: ſed quotus quiſque eſt, qui eo fruatur, quem commendat? Non quidem deerant viuente adhuc Clauio, Clauij: ſed eo iam ante annum ſeptimum ſupra decimum ſublato è viuis, librorum etiam cæpit ſentiri penuria; eſtque ſpes perexigua editionum poſthumarum.

Recte igitur Germania Euclidem denuo Latinum fecit ex Græco. Duacum omiſsis ijs, quæ rarius attinguntur in Scholis, ea ſaltem alimenta quibus Geometria iunior nutriri ſolet, prouidit ſibi. Idem fecit Ferraria. Quin & Neapolis, & cum Neapoli vniuer-

ſa

ſa Schola mathematica ſimilibus ſubſidijs ſuam vellent leuare egeſtatem. Ego Romam & Romanum Gymnaſium appello; quod licet præter Clauiũ in his diſciplinis Doctorem alium neque debeat admittere, neque admittat, Clauiolum tamen aliquem tractabiliorem optimo iure exoptat.

Quare vt deſiderijs, nè dicam querelis tam iuſtis, tandem finis imponatur; en ipſe quoq; vobis profero in lucem Elementorum Euclidis, & Commentariorum Clauij Compendiolum: nimirum ſex libros priores, cum aliqua parte vndecimi: hoc eſt, ea quæ quotannis audire conſueuiſtis. Atque ita non erit quod è Germania, Belgio alijſq; partibus etiam Italiæ huiuſmodi auxilia euocetis. Domi habebitis Clauiolum, quem deſideraſtis; habebitis etiam foris, qui vos vbiq; comitetur; quiue audita in publico, repetat in priuato, & paucioribus referat, quæ pluribus verbis ingeſſerat Clains maior.

Neque videri debet alicui factum

male,

male, quod hic propoſitiones demonſtrationeſq; recitentur ſtylo non prorſus Clauiano. Nam hæc ſunt propria Compendiorum priuilegia. Certe breuior eſt, & multo clarior Propoſitio, quæ ſimul proponitur & ſimul per figuram explicatur. Ita Pappius Alexandrinus in ſuis Collectionibus, ita alii complures magni Geometræ. Immo Clauius ipſe hoc ipſum facit immediatè poſt Propoſitiones abſolutè poſitas, antequam demonſtrationes aggrediatur.

Numerus vero Problematum atque Theorematum omnino fuit retinẽdus, ne citata à citatis diſcreparent: non tamen opus fuit obſeruare ordinem in omnibus eundem. Saltem in quarto libro, vbi agitur de Inſcriptione, & Circumſcriptione figurarum, melius fuit aliquas coniungere, quam ſeparare, vt praxes, demonſtrationeſque omnibus eſſent communes.

Denique boni, vt ſpero, conſulet Clauius maior, & veniam dabunt ſtu-

dioſi

diosi Lectores, si vno alterove in loco Clauius minor demonstratiunculam aliquam suam substituit non suæ; vt factum est ad primam, & secundam vndecimi: quæ quia alioquin videbantur vrgeri variis instantiis, indigebāt aliquo succursu; & quia per se sunt notissima, & in præcedentibus libris supposita, poterāt etiam penitus omitti. Sed de huiusmodi iudicent Doctiores. Ego id præstare Deo adiuuante conatus sum, quod Studiosis vtile, gratumque fore, & sinceritati Geometriæ consonum existimaui.

De Problematibus id solum postremo loco aduerto; non esse quidem hic tractata pro dignitate, sufficienter tamen quo ad vsum quem habent in Elementis, qui in eo potissimum cōsistit, vt omnia illa quæ ad demonstrationem Theorematum assumuntur, certa sint, & explorata. hoc est, vel ex Principiis, vel ex aliis propositionibus præmonstratis deducta.

Cum vero eadem Problemata tra-

ctan-

ctantur per se, & gratia sui, longe aliter se habet eorum tractatio. Tunc enim Geometra non debet esse contentus mõstrasse vnam viam, eamq; qualemcunque; sed debet circumspicere, & tentare qlures aditus, & ex omnibus semitis illam seligere, qua planius, & compendiosius, ad solutionem Problematis intellectum practicum deducat. Iure igitur suo videntur Problemata postulare Opusculum suum. Et sane per me obtineat licet, dummodo per gratiam eius liceat, sine quo nihil licet: qui si, vt cœpit fauere inchoatis, sic bene faueat progressibus, fieri poterit vt hoc Opusculum, quod iam solitarium est, & non tam primum quam vnum, primum esse possit proprio ex Titulo, & ex enumeratione sequentium, principium fiat aliorum.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

Quibus vocabula Artis, & Termini in Elementis vsurpati explicantur.

Definitio 1. Punctum, est cuius pars nulla est.

2 Linea, vnius tantum dimensionis secundum longitudinem capax.

3 Lineæ termini sunt puncta.

4 Linea recta est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

Secundũ Archimedem est minima earũ quæ terminos habent eosdem, hoc est, breuissima extensio inter duo puncta.

5 Superficies est duarum dimensionum secundum longitudinem & latitudinem capax.

6 Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7 Plana superficies est, quæ ex æquo

 suas

suas interiacet lineas.

Secundum Heronem, cui omni ex p
congruit linea recta.

8 Planus angulus est duarum linea
in plano concurrentium, & non in
rectum iacentium) ita vt vna ve
concursum & secundum naturam s
protracta non continuetur cum alte
alterius ad alteram inclinatio.

9 Rectilineus angulus est, quem c
stituunt lineæ rectæ.

10 Angulus recticlineus rectus est qu
facit linea alteri lineæ insistens, &
vtramque partem æque inclinata. &
les lineæ dicuntur sibi mutuo perpe
culares.

11 Obtusus angulus est qui recto m
est.

12 Acutus qui minor recto.

13 Terminus est, id quod alicuius
tremum est.

14 Figura est, quæ sub vno vel pluri
terminis continetur.

15 Circulus est figura plana, vnica l
comprehensa, quæ peripheria appe
tur, ad quam omnes rectæ ex quoda
puncto eductæ sunt æquales.

16 Hoc punctum centrum circuli v
tur.

17 Diameter est, quæ producta per
trum diuidit circulum bifariam.

18 vr

18 Vnde semicirculus, est figura contenta diametro, & semipheria.

19 Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis lineis continentur.

20 Trilateræ, quæ sub tribus.

21 Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22 Reliquæ vocantur multilateræ.

23 Æquilaterum triangulum est, quod tria habet latera ęqualia.

24 Isosceles quod duo.

25 Scalenum quod omnia tria habet inæqualia.

26 Rectangulum triangulum est, quod habet angulum rectum.

27 Amblygonium quod habet obtusum.

28 Oxygonium quod omnes acutos.

29 Quadratum est quod æquilaterum, & rectangulum est.

30 Altera parte longior figura est rectangula non æquilatera.

Potest vno nomine vocari Oblonga, vel Oblongum.

31 Rhombus æquilatera est, non rectangula.

32 Rhomboides habet latera, & angulos oppositos æquales, & neque æquilatera est, neque rectangula.

33 Reliquæ figuræ quadrilateræ vocantur Trapezia.

34 Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sunt plano, quantumcumque

protractæ, non possunt concurrere.

35 Parallelogrammum est figura quadrilatera habens latera opposita parallela.

36 In parallelogrammo propositionis 43. duo parallelogramma AHGE, GFDI, dicuntur circa diametrum AD existere, & reliqua duo HCFG, GBEI, vocantur complementa.

PETITIONES seu POSTVLATA.

Sunt propositiones practicæ, & supponuntur vt per se notæ.

1 A Puncto ad punctum liceat lineam rectam ducere. id quod fit per cōceptionem breuissimæ extensionis.

2 Et lineam rectam quantumlibet producere.

3 Item quouis centro, & interuallo eidem centro applicato, circulum describere.

AXIOMATA seu PRONVNCIATA.

Sunt Propositiones speculatiuæ, quæ non indigent demonstratione.

1 QVæ eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

2 Si

2 Si æqualibus adijciantur æqualia, fiunt æqualia.

3 Si ab æqualibus abijciantur æqualia, remanent ęqualia.

4 Inæqualia cum æqualibus, faciunt inæqualia.

5 Aequalia ablata ex inæqualibus, relinquunt inæqualia.

6. 7. Dupla vel dimidia eiusdem, sunt æqualia.

8 Quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia; debet autem talis congruentia constare intellectui.

9 Totum sua parte maius est.

10. 11. Duæ rectæ concurrentes, & se mutuo secantes, non habent aliquam partem communem.

12 Omnes recti anguli sunt æquales.

13 Et Eucidis 11. ponitur ad propositionem 28. sine qua non potest sufficienter concipi.

14 Duæ lineæ rectæ possunt quidem constituere angulum; sed non claudere spatium, aut constituere figuram.

15. 16. 17. 18. Non sunt vsui in Elementis.

19 Omne totum est æquale suis partibus simul sumptis.

20 Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, etiam reliquum est duplum reliqui. Sed hoc axioma non est neces-

ſarium, poteſt enim eius loco citari 19. quinti, cuius demonſtrationes non dependent ab alijs libris præcedentibus.

DE PROPOSITIONIBVS *in genere*.

PRopoſitiones, vel ſunt Theoremata, vel Problemata. illa verſantur circa quantitatem abſtractam ſpeculatiue: iſta practicè, quia habent pro fine aliquod opus intellectuale, circa eandem quantitatem abſtractam. Et ita ſumptæ propoſitiones ſunt propriè Mathematicæ, & purè Geometricæ. Ad Theoremata reuocantur Pronunciata; ad Problemata Poſtulata. de quibus ſuperius.

Problemata quæ fiunt per inſtrumenta non ſunt pure Geometrica; poſſunt tamen aliquo modo dici Mathematica ſaltem, illa, quæ vtuntur ſola Regula, & Circino. Hæc enim duo inſtrumenta fundantur immediatè in poſtulatis, hoc eſt in linea recta, & circulari.

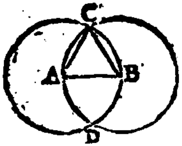
Eodem poſſunt reduci etiam illa inſtrumenta quæ fiunt per Regulam & Circinum. Reliqua vero referantur ad Mechanica. ex quibus aliqua ſunt quidē vera, ſed nondum Geometricè demōſtrata; alia falſa, vel ſaltem dubia, quæ tamen ſubinde admittūtur, quia videtur ſatisfacere ſenſui.

Deni-

Denique tam problemata, quàm theoremata proponuntur aliquando nomine Lemmatum, quæ præmittuntur vel subijciuntur propositionibus principalibus, quando sunt necessaria, neq; possunt commode citari.

PROPOSITIO 1. PROBLEMA 1.

Super data linea A B, triangulum æquilaterum describere.



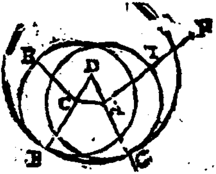
CEntro A, interuallo A B, describatur per 3. postul. circulus C B D; & centro B eodem interuallo B A. alter C A D, secans priorem v. g. in C; & ex C, ad A, B ducantur C A, C B, per postul. 1. Dico triangulum A B C esse æquilaterũ. Est enim A C, æqualis A B, & B C, æqualis eidem per definitionẽ circuli; ergo æquales inter se, per 1. pron. atque adeo triangulum A B C, est æquilaterum per def. 23.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

Ad datum punctum A data B C ponere lineam æqualem.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Ex maiori A H . minori B C æqualem abscindere.



PEr præcedentem describatur supra A C, triangulum æquilaterum ACD, & centro C, interuallo C B, per postul. 3. circulus B E secans protractam DC, in E. & rursus centro D, interuallo D E alius E G secans protractam D A in G. & tertius G I, descriptus ex A, interuallo A G, abscindat ex A H, rectam A I. Dico A I, æqualem esse datæ B C. Rectæ enim A I, est æqualis A G per definitionem circuli, A G æqualis C E quia D E, D G sunt ęquales per eandem definitionem circuli; & ablatæ D A, D C sunt ęqoales per def. trianguli æquilateri: ergo per 3. pron. A G, & 4. est æqualis C E. Est autem eidem C E, per def. 15. æqualis B C, ergo tam A I, quàm A G, sunt æquales ipsi B C.

PRO-

PROPOS. 4. THEOREMA 1.

Angulus A, sit æqualis Angulo D, & latus A B, æquale lateri D E, & A C, ipsi DF: Dico basim B C, æqualem esse basi E F, & triangulum G, æquale triangulo H, & angulum B, angulo E, quibus opponuntur æqualia latera A C, D F; & angulum C, angulo F, quibus opponuntur, reliqua duo latera æqualia A B, D E.

FActa enim superpositione, A B, congruit D E, & angulus A, angulo D; & consequenter latus A C, lateri D F, propterea quod omnia ista sint æqualia ex hypothesi. Ergo & basis B C congruit basi E F; triangulum G triangulo H; angulus B, angulo E, & C ipsi F. & ideo omnia ista sunt inter se æqualia per 8. pron.

PROPOS. 5. THEOREMA 2.

Latus A B, sit æquale lateri A C, sintque producta ad D, E utcumque: Dico tam angulos A B C, A C B, quàm D B C, E C B, esse æquales.

PEr tertiam fiat A E æqualis A D; nectanturque per postul. 1. C D, B E. Eruntque per 3. pron. etiam B D, C E æquales; & in triangulis A B E, A C D erunt circa communem angulum A, latera lateribus æqualia A B, ipsi A C, & AE, ipsi A D. Ergo per 4. basis B E, est æqualis C D; angulus A B E, angulo A C D, & A E B, angulo ADC. Rursus in triangulis B C E. C B D circa ęquales angulos E & D. Latus B E est ęquale lateri C D, & C E ipsi BD. Ergo per eandem 4. angulus B C E, est æqualis C B E; & hi sunt duo anguli infra basim B C: & angulus C B D, & hi sublati ex æqualibus A CD, A B E relinquunt supra eandem basim æquales ACB. A B C.

Coroll. Hinc patet triangulum æquilaterum esse æquiangulum.

PROPOS. 6. THEOR.

Angulus A B C, sit æqualis A C B. Dico latera A C, A B. esse æqualia.

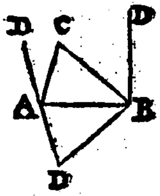
SI enim essent inæqualia, posset semper ex maiori v. g. AB, abscindi BD æqualis minori A C; atque ita fieret triangulum BCD, æquale

quale triangulo A B C, per 4. quia circa æquales angulos DBC, ACB, sunt latera lateribus æqualia.

Coroll. Ergo triangulum æquiangulum, erit quoque æquilaterum.

PROPOS. 7. THEOR. 4.

A D sit æqualis A C, & BD, æqualis sibi conterminæ B C; & AC, BC, conueniant ad C. Dico reliquas A D. B D ad partes C, non conuenire ad aliud punctum.



Aliter.

Triangulis A C B, ADB sit communis basis A B; & A D, æqualis A C, & B D, ipsi BC. Dico AB D, translatum in alteram partem, coincidere prorsus cum triangulo A B C.

Euclides præmittit hanc propositionem octauæ, quam Proclus ita demonstrat, vt potius octaua præluceat septimæ.

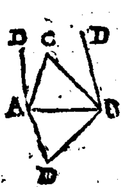
PROPOS. 8. THEOR. 5.

Latus AB, sit æquale DB, & AC, ipsi DC, necnon basis BC, basi B C. Dico angulum A, æqualem esse angulo D.

INtelligantur coniuncta ad communem basim B C ita vt latera æqualia sint etiam contermina, sed ad partes diuersas, nectaturque A D, quæ vel transit per C, vt in primo casu; vel cadit inter B C, vt in secundo; vel extra, vt in tertio. In primo propter æqualitatem laterum B D, BA, anguli A, D sunt æquales per 5. In secundo, & tertio propter æqualitatem laterum AB, B D, sunt æquales anguli B A D, BDA; & propter æqualitatem laterum C D, C A sunt quoque æquales anguli C D A, C A D. Ergo in secundo casu totus angulus BAC erit æqualis toti B D C; & in tertio reliquus angulus B A C reliquo B D C.

Coroll. Et quia circa angulos æquales B DC, BAC sunt latera lateribus æqualia: erunt per 4. triangula æqualia; & reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

AD 7. PROPOSIT.



IN septima ponuntur eadem quæ in octaua. Ergo in triangulis ABD, ABC erunt anguli DAB, DBA, æquales angulis CAB, CBA. Et ideo in superpositione sibi mutuo congruēt, & latus AD, coin-

coincidet cum A C; & B D, cum B C, atque adeo punctum D, cum puncto C.

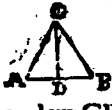
PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum B A C, bifariam secare.

ABscindantur per 3. æquales A D, A E, & supra D E fiat per 1. triangulum æquilaterum D E F. Dico A F satisfacere proposito. Angulus enim F A D, est æqualis angulo F A F, per 8, quia duo latera F A, A D, sunt æqualia duobus F A, A E, & basis F D, basi F E.

PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datam rectam A B bifariam secare.



DEscribatur per primam triangulum æquilaterum ABC, & recta CD secet per 9. angulum C, bifariam. Dico eandem CD, secare quoque bifariam A B. est enim AD æqualis D B, per 4. quia circa æquales angulos ad C, sunt latera lateribus æqualia.

PRO-

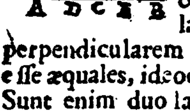
PROPOS. 11. PROBL. 6.

Ex puncto C, recta A B, erigere perpendicularem.

ACcipiantur per 3. æquales C D, CE, & D E F, fit per 1. æquilaterum. Dico F C, esse perpendicularem. hoc est augulos ad C, esse æquales, ideoque per defin. 10. rectos. Sunt enim duo latera C F, C D, æqualia duobus CF, C E, & basis F D, æqualis F E. ergo per 8. F C D, æqualis angulo F C E.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ex puncto C, in datam A B, perpendicularem demittere.



CEntro C, describatur per 3 post. circulus secans AB vtcunque in D, E, & D E secetur per 10. bifariam in F. Dico CF, esse perpendicularem. quia F C, FD, sunt iterum æqualia lateribus FC, FE, & basis CD æqualis C E per def. circuli. ergo.

PRO-

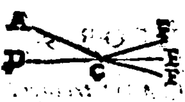
PROPOS. 13. THEOR. 6.

Recta rectæ insistens, vel facit duos rectos, vel duobus rectis æquales.

QVando EB insistēs, est perpendicularis: certum est angulos EBC, EBD, esse rectos. At AB magis inclinata in vnam partem quàm in aliam, constituit saltem duos angulos ABC, ABD, æquales duobus EBC, EBD: quia tam isti, quàm illi sunt æquales tribus EBC, EBA, ABD.

PROPOS. 14. THEOR. 7.

CD, CE sunt vna linea continuata, cum alia AC, facit angulos ACD, ACE, æquales duobus rectis.



SI enim CF, pars protracta DC, caderet supra, vel infra CE; essent nihilominus per 13. anguli ACD, ACF, æquales duobus rectis, & æquales duobus ACD, ACE, quod est absurdum.

PRO-

PROPOS. 15. THEOR. 8.

AB, CD, secent se mutuo ad verticem E. Dico angulum AEC, æqualem esse DEB, & AED, ipsi BEC.

NAm & AE, cum CD, & CE cum AB facit per 13. angulos duobus rectis æquales. & ideo AED, AEC, æquales sunt duobus CEA, CEB; demptoque communi AEC, remanet AED, æqualis CEB. Similis est ratiocinatio de angulis AEC, BED.

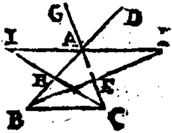
Coroll. 1. Hinc patet omnes quatuor angulos ad punctum E esse æquales quatuor rectis.

Coroll. 2. Immo quotcunque fuerint anguli ad E, omnes simul erunt quatuor rectis æquales.

PROPOS. 16. THEOR. 9.

Dico angulum externum CAD, trianguli ABC, maiore esse vtrolibet interno, & opposito, tam ACB, quàm ABC.

SEcto latere AC, bifariam in E, & ex protracta BE, sumpta EF æquali ipsi BE,



B E, & iunctà F A: erunt per 15. æquales anguli B E C, FEA, & duo latera E B, E C, æqualia duobus E F, E A; & ideo per 4. angulus E A F, æqualis E C B. est autem externus C A D, maior quàm E A F. ergo idem externus est quoque maior B C E.

Protracto autē latere C A ad G, fit externus B A G, æqualis priori C A D per 15. & secto bifariam latere A B in H, factaque H I, æquali H C, demonstratur, vt prius, angulum B A G, maiorem esse A B C, ergo & C A D, erit maior eodem.

Ex Prolo.

Si A B, A C, sunt æquales, quæuis alia A D, non erit eisdem æqualis.

SI enim A D esset æqualis, esset per 5. angulus C, æqualis B, & eidem B, esset æqualis A D B. ideoque æqualis A C D, quod est absurdum, quia A D B est externus, ideoque maior interno & opposito C.

PRO-

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Duo quilibet anguli trianguli, sunt minores duobus rectis.

PRoductis B C, B A, in D. E, efficitur per 16. externus A C D maior B, & ideo A C D, A C B maiores duobus A B C, A C B. Sunt autem illi æquales duobus rectis per 13. ergo isti sunt minores duobus rectis. Eadem est ratio de duobus angulis B A C, BCA. Pro duobus autem C A B, C B A assumendus est externus C A E.

Ex Proclo.

EX eodem puncto A. in C D, vna tantum cadit perpendicularis A C. Si enim præter A C, esset alia A B: essent duo anguli A C B, A B C, æquales duobus rectis, quod est absurdum.

Coroll. 1. Propter eandem causam, in triangulo non potest esse nisi vnus tam rectus, quam obtusus.

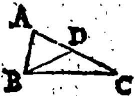
Coroll. 2. Existente angulo ABC, acuto, perpendicularis AC, cadit ex parte anguli acuti. si enim caderet ex parte obtusi, qualis

qualis est A D; ABD, A D B, essent duobus rectis maiores.

Coroll. 3. Duo anguli basim isoscelij; & omnes tres trianguli æquilateri, sunt acuti.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Maius latus A C, subtendit maiorem angulum A B C, & A B, minus minorem A C B.



SI enim A D, fiat æqualis A B, erunt per anguli ad basim B D, æquales, est autem per 16. A D B, maior C: ergo & A B D, & multo magis A B C, erit maior C.

Coroll. Hinc patet in Scaleno tres angulos esse inæquales.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Maiori angulo A B C opponitur maius latus A C, & minori C, minus latus A B.

SI enim latus A B in superiori figura foret æquale A C, essent prædicti anguli æquales; & si A B, esset maius: esset per præcedentem, contra hypothesim, angulus C, maior angulo A B C.

Coroll.

Coroll. Omnium rectarum A C, AC, A C, perpendicularis AB, est omnium breuissima; quia A B opponitur acutis, & A C, opponuntur recto.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Duo qualibet latera trianguli, sunt reliquo maiora.

Lateribus C A, A B, sit æqualis C A D, hoc est A D, æqualis A B. Ergo ad basim B D, sunt per 5. anguli æquales. Estque A B D, minor D B C: ergo & A D B, seu C D B, est minor eodem, & per 19. B C, minor C D, hoc est minor duabus C A, A B, & ita de reliquis.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Duæ rectę B D, C D, intra triangulum A B C, sunt minores lateribus conterminis A B, A C, & angulus B D C, maior A.

Producta enim B D, in E; erunt per 20. B A, A E, maiora reliquo latere B E, adiectaque E C, duæ rectę rectæ A B, A E C, maiores duabus B E, E C. Sunt autē & C E, E D, maiores C D, addita D B, duæ C E, E D B, sunt maiores duabus C D, D B. ergo A B, A C, sunt & multo maiores duabus B D, D C. Porro angulus B D C, maior est D E C, per 16. & hic maior angulo E A B: ergo B D C, est multo maior B A E, seu B A C.

PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis A, B, C, quarum vnaquaque sit minor aggregato reliquarum; triangulum construere.

IN recta D G, sumantur D E, E F, F G, equales tribus datis A, B, C, & centris E, F, interuallis E D, F G, describantur duo circuli se mutuo secantes in H. eruntque per defin. 15. E H, F H equales ipsis E D, F G, hoc est ipsis A, C, estque E F, æqualis ipsi B. ergo.

PROPOS. 23. PROBL. 9.

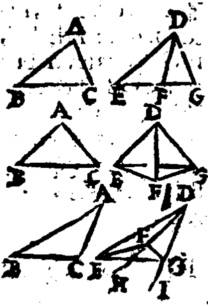
Ad punctum C, rectæ A B, constituendus sit angulus G C H, æqualis dato D E F.

DVcatur vtcunque D F, & fiat per 22. triangulū G C H habens latus C G, æqua-

æquales lateri ED; CH æquale EF, & GH, æquale DF: sic enim necesse est angulum GCH per 8. æqualem esse angulo DEF.

PROPOS. 24. THEOR. 15.

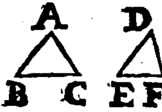
Latus AB, sit æquale lateri DE, & AC, ipsi DF; basis autem BC, maior sit basi EF: Dico angulum A, esse maiorem angulo EDF.



ANgulo A, fiat æqualis EDG, & DG, æqualis AC, nectaturque EG, quę in primo casu continuatur cum EF, in 2. cadit supra, & in 3. infra. In omnibus vero casibus recta EG, est per 4. æqualis basi BC. & in primo quidem casu manifestum est EG, ideoque & BC, maiorem esse EF. In secundo vero in triangulo isoscelio DFG, anguli ad basim FG. sunt per 5. æquales, estque DGF, maior sua parte EGF. ergo & DFG, multoque magis co-totus EFG, maior est eodem E G F. ideoque per 19. E G, hoc est B C, maior base E F. Denique in tertio in quo æquales D F, D G, sunt protractæ ad H, I, anguli infra basim FG sunt per 5. æquales; estque I G F, maior sua parte E G F. ergo & H F G, & multo magis E F G, maior est eodem E G F. & idcirco E G, seu B C, maior quam E F vt prius.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

Vice versa angulus A, maior est angulo D, quando basis B C maior est base E F, & reliqua latera reliquis æqualia, vt in præcedenti.



ESset enim per 4. basis B C, æqualis E F, si angulus A, posset esse æqualis angulo D, & B C; per 24. minor esset quam E F, si A esset minor D.

PROPOS. 26. THEOR. 17.

Anguli B, C, sint æquales angulis E, F, & latus B C, ipsi E F, nimirum adiacens adiacenti; vel certe A B ipsi D E, quæ æqualibus angulis opponuntur: Dico & reliqua reliquis esse æqualia.

Sit

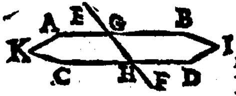
SIt primo B C æqualis EF,& DF si fieri potest sit maior AC. Sumpta igitur F G, æquali ipsi A C; erunt circa æquales angulos C,F, latera AC, C B, æqualia lateribus G F, F E; ideoque per 4. angulus A B C, seu D E F, æqualis angulo G E F, quod est absurdum.

Secundo sit A B æqualis D E, & si fieri potest E F, sit maior B C. Sumpta igitur E G, æquali ipsi B C; erit vt prius angulus B C A, hoc est E F D, æqualis EGD, internus externo contra 16.

Sunt igitur omnia latera omnibus æqualia, ideoq; per 8. etiam reliqua æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 18.

Recta E F secet duas A B, C D, faciatque angulum A G H æqualem alterno DHG: Dico A B, C D, esse parallelas.



SIn minus cõcurrant in I, Cum igitur trianguli G H I, latus I G; sit protractum; erit per 16. angulus externus A G F, maior interno & opposito IHG, quod est absurdum. idem sequitur si concurrerent ad K.

PRO-

PROPOS 28. THEOR. 19.

Eadem AB, CD, erunt quoque parallelæ, si constet externum A G E, æqualem esse interno C H G: vel duos internos AGH, C H G, æquales duobus rectis.

EX vtroque enim sequitur alternum BGH, ęqualem esse alterno CHG. Externo enim A G E æqualis est per 15. B G H, ad verticem G. & duo A G H, C H G sunt per 13. ęquales duobus H G A, HGB, estque HGA, communis. ergo reliquus H G B, ęqualis est reliquo C H G, alternus alterno. ergo per 27. A B, C D, sunt parallelę.

Ex hac posteriore parte constat sufficienter veritas 13. pronunciati.

AXIOMA 13.

SI in duas rectas incidat recta O, I, faciatque duos angulos O, I, minores duobus rectis: duæ rectæ A B. C D, concurrent ad partes angulorum O, I.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

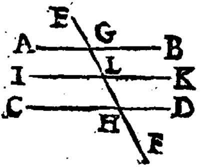
Duas parallelas A B, C D secet E F, in G H. Dico alternum alterno; externum interno; & duos angulos internos esse duobus rectis æquales, conuertendo duas præcedentes.

NAm primo si alternus AGH esset maior alterno DHG, addito communi B G H essent duo D H G, B G H, minores duobus AGH, BGH, hoc est minores duobus rectis. & ideo per 13. axioma A B, C D, concurrerent ad partes B, D, quod est contra hypothesim. Ergo alterni sunt æquales, hoc est, BGH, ipsi C H G. Est autem per 15. BGH, æqualis A G E, ergo etiam externus AGE, erit çqualis interno CHG, & quia BGH, cum A G H, çquipollet per 13. duobus rectis, eruntque duo interni AGH; C H G çquales duobus rectis.

PROPOS. 30. THEOR. 21.

AB, C D, sint parallelæ eidem I K: Dico etiam ipsas esse parallelas inter se.

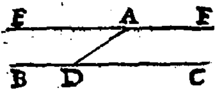
Du-



DVcta enim E F erit per 29. B G K, equalis alterno I L G & CHL, æqualis KLH: sed ILG, KLH, sunt per 15. equales. ergo & alterni BGL, CHL sunt æquales, & per 27. A B, CD parallelę.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

Per A, ducere parallelam data B C.

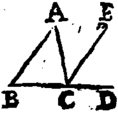


DVcta A D vtcunque, & facto per 23. angulo D A E, æquali alterno ADC, erit per 27. EAF, ipsi B C, parallela.

PROPOS. 32. THEOR. 21.

Externus angulus A C D, est aequalis duobus internis, & oppositis A, B: & omnes tres anguli cuiuscunque trianguli sunt aequales duobus rectis.

DVcatur per 30. CE, parallela A B; eritque per 29. E C A, ęqualis alterno A, & externus ECD, ęqualis in-



terno B, & totus externus A C D, ęqualis duobus internis A, B. Adiectoque communi A C B. erunt omnes tres interni A, B, C, ęquales duobus A C D, ACB. hi autem sunt per 13. ęquales duobus rectis. ergo & illi.

Coroll. 1. Ergo omnes tres anguli vnius trianguli sunt ęquales tribus cuiuscunque alterius trianguli simul sumptis: & quando duo sunt ęquales duobus, erit & reliquus reliquo ęqualis.

Coroll. 2. In triangulo isosceli rectangulo; anguli ad basim sunt semirecti.

Coroll. 3. Angulus trianguli ęquilateri est vna tertia duorum rectorum, vel duæ tertię vnius recti.

Ex Scholio.

OMnis figura rectilinea distribuitur in tot triangula, quot ipsa continet latera demptis duobus; ita vt anguli triangulorum constituant angulos figurę.

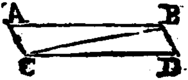
Cumque anguli cuiuscunque trianguli sint ęquales duobus rectis, erunt omnes anguli figuræ rectilineę ęquales bis tot rectis, quot ipsa habet latera, demptis duobus.

Quot

Quot autem habet latera, tot habet angulos internos & externos. Ergo interni simul cum externis sunt ęquales bis tot rectis quot sunt latera; quia quilibet externus cum suo interno æquiualet duobus rectis per 13. Interni autem soli, sunt æquales bis tot rectis, quot sūt latera demptis duobus, quibus respondent quatuor recti, demptis igitur omnibus internis, remanebunt externi quatuor rectis ęquales. & ideo omnium figurarum anguli externi simul sumpti, sunt ęquales simul sumptis.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

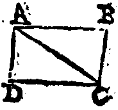
Sint A B, C D, æquales & parallelæ. Dico etiam A C, B D, esse æquales, & parallelas.



Ducta enim B C, erunt per 29. alterni A B C, D C B æquales, & duo latera A B, B C, duobus BC, CD ęqualia. ergo per 4. etiam basis BD, ęqualis basi A C, & angulus ACB, ęqualis alterno C B D, ideoque per 27. B D, parallela A C.

PROPOS. 34. THEOR. 24.

In parallelogrammo latera & anguli oppositi sunt aequales; & diameter secat ipsum bifariam.



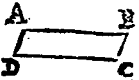
CVm enim per defin. 35. latera A B, D C, necnon A D, B C sint parallelæ; erit per 29. angulus B A C ęqualis D C A; & A C B, ipsi C A D. estque latus A C, ipsis adiacens commune. ergo per 26. AB, erit æquale CD, & AD, ipsi B C, & angulus B, angulo D; & triangulum ABC, triangulo A D C. Denique reliqui anguli A & C, sunt æquales, quia constant ex ęqualibus.

Ex Scholio.

Omne quadrilaterum habens latera opposita, vel angulos oppositos aequales, est parallelogrammum.

SInt primo A B, C D, & AD, B C, ęquales. Ducta igitur A C, erunt duo latera AB, BC, ęqualia duobus CD, DA, & AC, basis erit communis. Vnde per

per 8. non solum angulus B angulo D, sed & angulus B A C, angulo D C A, & A C B, æqualis erit C A D, nimirum alterni alternis, atque adeo per 27. A B, erit parallela CD, & AD, ipsi BC.



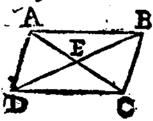
Secundo. Angulus A, sit æqualis C, & B, ipsi D; eruntque duo A, B, ęquales duobus C, D; & duo A, D, ęquales duobus C B. Sunt autem omnes quatuor æquales quatuor rectis per Scholium 32. ergo tam A, B, quàm A, D, erunt duobus rectis æquales, & ideo per 28. A B, C D, & AD, B C, erunt parallelę.

Ex priore parte huius demonstrationis constat Quadratum, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma.

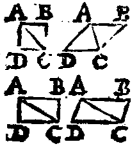
Ex posteriore constat idem de Quadrato, figura altera parte longiore, & Rhomboide.

Item.

In omni parallelogrammo diametri se mutuo secant bifariam: & in Quadrato & Rhombo secant angulos bifariam; in figura altera parte longiore siue oblonga, & Rhomboide non bifariam. eademque in Quadrato, & oblongo sunt æquales, in Rhombo & Rhomboide inæquales.



DIco primo AC, BD, secari bifariam in E. Anguli enim EAD, EDA sunt æquales angulis E CB, EBC, per 29. & latera adiacentia A D, B C, sunt ęqualia, per 34. ergo per 26. EA, est ęqualis EC, & E B, ęqualis E D.

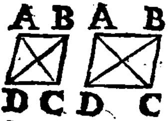


Dico secundo, in Quadrato, & Rhombo angulos A, C secari bifariam à diametro A C. latera enim C A, A D, ęqualia sunt lateribus A C, AB, & basis CD, basi C B. ergo per 8. angulus CAD, angulo C A B.

Dico tertio, in oblongo, & Rhomboide angulos A, C, secari à diametro A C non bifariam. Est enim angulus BAC, minor angulo BCA, per 18. & per 29. B C A, est ęqualis alterno CAD. ergo BAC, minor est C A D.

Dico quarto, in Quadrato, & oblongo diametros A C, I D, esse ęquales per 4. quia circa æquales angulos nempe rectos latera D A, D C, sunt ęqualia lateribus B C, C D.

Dico quinto, in Rhombo & Rhomboide diametrum A C, quę subtendit minorem angulum D, minorem esse diametro



tio B D, quę subtendit maiorem C. Sunt autem D & C, inęquales, quia simul sunt ęquales duobus rectis per 29. & per definitiones neuter est rectus. Cum enim latera D A, D C, sint ęqualia lateribus C B, C D, & angulus D minor angulo C, ex hypothesi; erit basis A C, minor base B D, per 24.

PROPOS. 35. THEOR. 25.

Parallelogramma A C D E, F C D B, super eadem basi C D, & inter easdem parallelas A B, C D, sunt aequalia.

IN primo casu coincidit pũctum F cum pũcto E; in secundo existit inter puncta A, E: in tertio inter puncta E, B. In omnibus autem tribus casibus angulus C A F ęqualis est per 29. D E B, & per 34. AC aequalis D E, & A E, F B ęquales eidem C D, ideoque ęquales inter se. & in secundo casu auferendo intermediam F E relinquuntur ęquales A F, E B. & in-tertio fit idem addendo communem E F. Atque ita circa æquales angulos C A F, D E B, erunt duo latera C A, A F, æqualia duobus lateribus D E, E B, & idcirco per 4. triangulum C A F, erit æquale triangulo D E B. & in primo casu addito triangulo C E D. in secundo Trapezio C F E D. & in tertio abiecto primo triangulo G E F, & postea adiecto triangulo C D G, fit parallelogrammum A C D E, æquale parallelogrammo F C D B.

PROPOS. 34. THEOR. 26.

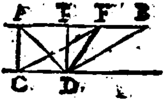
Similiter parallelogramma A C D E, F G H B, super æqualibus basibus C D, G H. & inter easdem parallelas A B, C H, sunt æqualia.

CVm enim CD, sit æqualis G H, & eidem G H, æqualis per 34. F B, erunt C D, F B, æquales inter se, & parallelę. ergo per 33. & C F, D B, sunt parallelę, & C D B F, parallelogrammum, cui per præcedentem sunt æqualia A C D E, F G H B; quia illa sunt super eadem basi C D; hęc super basi F B. ergo & A C D E æquale est parallelogrammo F G H B.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 27.

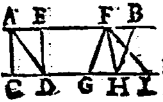
Triangula ACD, FCD, super eadem basi CD, & inter easdem parallelas AB, CD, sunt æqualia.



Rectæ enim DE, DB, parallelę ipsis AC, FC constituunt per 35. duo parallelogramma ACDE, FCDB ęqualia, eademque per 34. dupla triangulorũ ACD, FCD. ergo etiam triangula ACD, FCD, sunt ęqualia.

PROPOS. 38. THEOR. 28.

Idem constat de triangulis ACD, FGH super æqualibus basibus CD, GH.



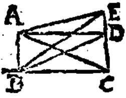
Quia sunt semisses ęqualium parallelogrammorum ACDE, FGHB.

Ex Scholio.

Recta igitur FH, secans basim GI, bifariam in H; secat etiam bifariam triangulum FGI.

PROPOS. 39. THEOR. 29.

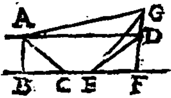
Triangula A B C, B C D, sint super communi basi B C, æqualia. Dico A D, esse parallelam B C.



SI minus, sit A E parallela, & secet CD, in E; eritque per 37. triangulum BCE æquale eidem ABC: & ideo B C E, B C D, æqualia; quod est absurdum.

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Idem dico quando triangula A B C, D E F sunt æqualia, & super æqualibus basibus B C, E F.

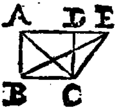


SI enim alia AG, esset parallela; triangula A B C, G E F, essent æqualia per 38. necnon G E F, D E F.

PROPOS. 41. THEOR. 31.

Parallelogrammum A B C D, & triangulum E B C, sint inter parallelas A E, B C. Dico parallelogrammum duplum esse trianguli.

Quia



QVia parallelogrammum ABCD est per 24. duplum trianguli ABC; & hoc est ęquale triangulo EBC, per 37. Ergo.

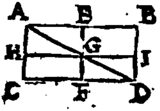
PROPOS. 42. PROBL. 11.

Triangulo ABC, constituere parallelogrammum aquale, cum angulo D.

BAsis BC, secetur bifariam in E: per 10. eritque per 38. triangulum ABC, duplum trianguli AEC; & facto angulo CEF, ęquali D, ductaque AFG, parallela BC, & CG, parallela EF; factum erit parallelogrammum EG, duplum eiusdem trianguli AEC, per 41. & idcirco ęquale triangulo ABC.

PROPOS. 43. THEOR. 32.

Complementa GB, GC, de quibus defin. 36. sunt aqualia.

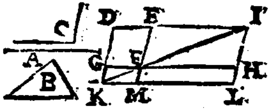


TRiangulum enim ACD æquale est triangulo ADB, per 34. AGH, ipsi AGE; & GDF, ipsi GDI: Et ablatis

tis AGH, GDF ex A C D, remanet complementum G C, & ablatis AGE, G D I ex ADB, remanet complementum G B. Ergo.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ad datam A, dato triangulo B; æquale parallelogrammum applicare, cum dato angulo C.

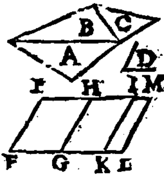


PEr 42. fiat parallelogrammũ G E, æquale triangulo B, cum angulo F, æquali C; & ex D E protracta sumatur E I, æqualis A; & IF, secet DG, in K, perficiantur que reliqua parallelogramma: ex quibus complementum F L, est per 43. æquale complemento G E, hoc est triangulo B; & habet latus FH, æquale ipsi E I, hoc est, ipsi A; & angulum M F H æqualem angulo F, per 15. hoc est angulo C.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Dato rectilineo A, B, C: æquale parallelogrammum constituere, cum angulo D.

Di-



DIstribuatur rectilineum in sua triangula A,B,C, ipsique A, fiat per 42. æquale parallelogrammum FH cum angulo F, æquali D: & aliud GI æquale ipsi B applicetur ad GH, cum angulo G, æquali eidem D: denique ad KI applicetur KM æquale ipsi C, & IKL; sit rursus æqualis angulo D: erunt FH, GI, KM simul æqualia rectilineo A,B,C. Quod autem FM, sit parallelogrammum, probatur hoc modo. Angulus F est æqualis HGK, & duo HGK, HGF, sunt æquales duobus HGF, GFE, & hi duo sunt æquales duobus rectis per 29: ergo & illi, & ideo per 14. GF, GK, sunt vna linea: & eadem est ratio de KG, KL. immo eadem quoque de tribus EH, HI, IM; quia angulis F,G,K, sunt per 34. æquales, oppositi H, I, M. Cumque GH, sit æqualis & parallela EF, & KI, æqualis, & parallela GH, & LM, æqualis, & parallela ipsi KI: erunt etiam EF, LM, æquales & parallelæ, & per 33. FL, EM, erunt similiter equales & parallelæ.

PRO-

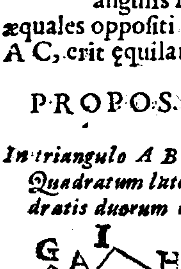
PROPOS. 46. PROBL. 14.

Super datam A B, quadratum describere.

ERigantur duæ perpendiculares A D, BC æquales ipsi A B: eritque per 33. etiam D C æqualis, & parallela ipsi A B, & angulis rectis A, B, erunt per 34. æquales oppositi C, D. Hoc est figura A C, erit equilatera, & rectangula.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In triangulo A B C, habente rectum ad A: Quadratum lateris B C, æquale est Quadratis duorum laterum A B, A C,



DEscribatur per 46. quadrata BD, BG, C I: eritque per 14. tam BAI, quam C A G vna linea recta, quia anguli ad A, sunt recti. Et quia A B F, CBE sunt æquales; addito communi A BC, fit totus FBC, æqualis toti ABE; & ductis rectis F C, AE, & A L k, parallela ipsi B E; erunt circa æquales angulos F BC, ABE duo latera FB, B C, æqualia duobus A B, B E. Quare triangulum F B C, æquale erit triangulo A B E, per 4.

Trian-

Trianguli autem F B C duplum eſt Quadratum B G, per 41. quia ſunt ſuper eadem baſi B F, & inter eaſdem parallelas B F, C G: & trianguli A B E duplum eſt parallelogrammum BLkE: quia ſunt ſuper eadem baſi B E, & inter parallelas BF, CG, & triãguli ABE duplum eſt parallelogrammum B L k B; quia ſunt ſuper eadem baſi B E, & inter parallelas B E, A K. Ergo parallelogrammum B L K E æquale eſt quadrato B G. Eodemque modo demonſtratur alterum parallelogrammum L C D K, ęquale eſſe quadrato C I. Totum igitur quadratum B D, erit æquale duobus quadratis B G, C I.

Ex Scholio.

INuentio huius Theorematis tribuitur Pythagoræ; qui cum aduertiſſet in quibuſdam numeris, quales ſunt 3. 4. 5. duorum 3. & 4. quadratos 9. & 16. facere 25. quadratum tertij; voluit idem experiri in lineis, &

inuenit ex tribus lineis ab huiuſmodi numeris numeratis conſtitui ſemper triangulum rectangulum.

Inuentio autem huiuſmodi numerorum ita ſe habet. Pro minimo ſumatur quicunque numerus impar, v. g. 5. & ex eius quadrato 25. abijciatur 1. Reliqui enim numeri 24. medietas 12. erit ſecundus, & tertius

tertius erit 13. vnitate maior. Vel ſic: pro minimo ſumatur par v.g.6. & ex quadrato 9. hoc eſt ex quadrato numeri 3. qui eſt medietas numeri 6. abijciatur 1, eidemque addatur 1. eritque ſecundus numerus 8. & tertius 10.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Vice verſa angulus A, eſt rectus, quando quadrata A B, A C ſunt æqualia quadrato B C.

ERigatur ex puncto A ſuper BA, perpendicularis AD, & æqualis AC; eritque per 47. quadratum B D, æquale quadratis A B, AD; hoc eſt, quadratis A B, A C: atque adeo quadrato B C; & ideo B D, erit æqualis B C. Et quia præterea duo latera A B, A D, ſunt æqualia duobus A B, A C; erit angulus B A D æqualis B A C, ſed ille eſt rectus; ergo & iſte.

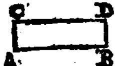
EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

1 Parallelogrammum rectangulum dicitur cõtineri ſub duabus lineis rectis, quæ comprehendunt angulum rectum.

Ex Scholio.

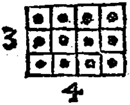
Ratio eſt, quia in duabus illis lineis, & angulo recto, aſſignantur omnia illa, quibus datis datur ipſum rectangulum; nimirum longitudo, & latitudo, & angulus rectus, qui eſt ſolus ex omnibus angulis inuariabilis.

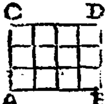


Alia ratio eſt, quia ex ductu huiuſmodi linearum vnius in alteram, formatur optimè conceptus ipſius rectanguli. Nam ſi duæ rectæ A B, A C contineant angulum rectum A, & A C intelligatur moueri per rectam

rectam A B ex A vsque ad B, ita vt semper ipsi A B, existat perpendicularis; describet punctum C tertium latus C D, & si eadem recta A C intelligatur aliquid post se relinquere, id erit superficies plana, inter A B, A C, C D, D B comprehensa.

Habet etiam hæc comprehensio rectanguli sub duabus rectis, necnon hic ductus vnius lineæ in alteram, magnam affinitatem cum multiplicatione, vel ductu vnius numeri in alium. Sicut enim ex multiplicatione v. g. 3. in 4. producitur numerus 12. cuius vnitates possunt disponi in forma rectanguli, diciturque idem numerus 12. contineri sub duobus numeris 3. & 4. eo quod fiat ex ductu 3. in 4. ita quoque si A C, trium partium, ducatur in A B. 4. partium; producuntur 12. quadratula vnius partis, quæ constituunt totum rectangulum contentum sub ijsdem duabus rectis A C, A B.





Secunda definitio. In parallelogrammo C B diuiso in alia quatuor; duo complementa G C, G B, vna cum H E; constituunt Gnomonem F H E I, & cum parallelogram-

grammo F I, constituunt Gnomonem H F I E.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Rectangulum contentum sub A, & B C, æquale est B C F G: æquale est iis, quæ continentur sub eadem A, seu B G, & singulis partibus rectæ B C.

Actis enim per D, E, ipsi B G parallelis D H, E I; distribuitur rectangulum B F in rectangula B H, D I, E F, quæ continentur sub B G, D H, E I, hoc est sub A; & sub partibus B D, D E, E C. Est autem per 19. pronunc. omne totum æquale suis partibus; ergo.

Applicatio ad numeros.

Sit B C, 10. segmenta B D, D E, E C. sint 5. 1. 4. & recta A vel B G, sit 6. Eritque rectangulum B F, seu numerus productus ex B G, 6. in B C, 10. numerus 60: & B G 6. in B D 5. erit 30: & D H 6. in D E 1. erit 6: & E I 6. in E C 4. erit 24. Et hæc omnia tria rectangula numerica collecta in vnam summam, faciunt eundem numerum 60. quem facit A 6.

in

in B C 10. Et hoc modo applicari possunt numeris ferè omnes propositiones sequentes.

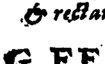
PROPOS. 2. THEOR. 2.

B C, secta sit vtcunque in D: Dico Quadratum B C æquale esse rectangulis contentis B C, B D, & sub B C, D C.

HÆC non differt à præcedenti, si BG, intelligatur æqualis ipsi B C. Rectangulum enim BE, hoc est quadratum ipsius B C, erit æquale rectangulo BF, contento sub B G, B D, hoc est BC, BD; & rectangulo DB, contento sub D F, D C, hoc est sub B C, D C.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

B C, sit secta vtcumque in D: Dico rectangulum contentum sub B C, & sub vno segmētorū v.g. sub BD, æquale esse quadrato BD, & rectangulo sub segmentis B D, D C.



HAec quoque continetur in prima, estque manifesta, si B G, ponatur æqualis B D. Sic enim B F, est quadratum ipsius B D; & D E, rectangulum sub D F, seu B D, & D C.

PRO-

PROPOS. 4. THEOR. 4.

AB, secta sit vtcumque in C: Dico Quadratum totius A B, æquale esse duobus quadratis A C, C B, & duobus rectangulis sub segmentis AC, C B.

Quadratus totius A B, sit A D, diameter B E; C G F, parallela A E; & H G I, parallela ipsius A B. Dico primo H F, CI, esse quadrata segmentorum, AC CB. Nam latera AB, AE, circa rectum A, sunt æqualia; ergo per 2. Coroll. 32. anguli AEB, ABE sunt semirecti: sed istis sunt æquales CGB, HGB, HGE, per 29: ergo omnes quatuor sunt æquales, & per 6. primi HG, HE; & CB, CG, æquales inter se, atque adeo H F, quadratum rectæ H G, quæ per 34. est æqualis A C, & C I, quadratum segmenti C B. Dico secundo rectangula A G, GD contineri sub ijsdem segmentis AC, CB. illud enim continetur sub ACCG, & C G, est æqualis C B; & G D, continetur sub GF, GI, & GF, est æqualis GH, hoc est, AC, & GI, segmento C B. Quibus ita demonstratis manifesta est propositio.

Coroll. Hinc patet, parallelogramma H F.

H F C I circa diametrum quadrati, esse quadrata.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

A B secta sit bifariam in C, & non bifariam in D: Dico quadratum CB, æquale esse rectangulo ADB, vna cum quadrato CD.

Facto quadrato CF, & ductis reliquis parallelis; erit per coroll quartæ K G quadratum sectionis intermediæ CD, & D I quadratum segmenti D B; & rectangulum A H, erit illud quod continetur sub inæqualibus segmentis A D, DB, eo quod D H, sit æqualis DB. Dico hoc rectangulum A H, vna cum quadrato K G æquale esse quadrato C F. Complementum enim H C, est per 43. primi æquale complemento H F; adiectoque D I; rectangulum G B, æquale rectangulo B K. Sed BK, est æquale kA per 35. primi: ergo KA, G B, sunt æqualia, & vna cum C H, erit AH æquale Gnomoni GBK; rursus addito quadrato k G; erit A H, vna cum quadrato Gk, æquale toti quadrato CF, quod componitur ex Gnomone, & quadrato k G.

PRO-

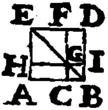
PROPOS. 6. THEOREMA 6.

Recta AB, secta bifariam in C, adiecta sit B D: Dico rectangulum A DB, vna cum quadrato C B, æquale esse quadrato ipsius C D.

Constructio similis est præcedenti. Dico rectangulum A I, quod continetur sub AD, DI, hoc est sub AD, DB, vna cum quadrato kG quod est quadratum rectæ C B, æquale esse quadrato C F. Nam C L,CH sunt æqualia per 35. primi, & CH, H F; æqualia per 43. ergo C L, equale est H F adiectoque communi C I, totum A I, æquale Gnomoni GIBk. Sed hic vna cum quadrato kG, æquiualet quadrato CF: ergo & A I, k G, æquiualent eidem.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

A B. secta sit vtcunque in C: Dico quadratum totius A B, nimirum A D, vna cum quadrato segmenti v. g. A C, hoc est vna cum quadrato H F, æquale esse rectangulo BAC, bis, hoc est duobus rectangulis A F, H D, vna cum quadrato C I, reliqui segmenti C B.



DVo enim rectangula A F, H D sunt æqualia Gnomoni C H F I, & quadrato HF: addito ego quadrato CI, erunt duo rectãgula A F, HD, & quadratum C I æqualia Gnomoni, & duobus quadratis H F, C I. Gnomon autem & quadratum C I, faciunt quadratum A D. Ergo qnadrata A D, H F, sunt æqualia duobus rectangulis A F, H D, & quadrato C I.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Recta AB, secta vtcunq; in C adiiciatur BD, æqualis v.g. segmento BC. Dico quadratum totius AD, æquale esse quatuor rectangulis ABC, seu ABD, & quadrato reliqui segmenti AC.

COnstructio est similis superioribus, & AE est qnadratum totius AD: O I, quadratum segmenti AC: NQ, BM, *sunt* quadrata æqualia BC, BD, qualia sunt etiam quadrata CH, HP. *V*nde constat vnum ex quatuor rectangulis esse A H, quia continetur sub AB, BH quæ est æqualis B C. Secundum eſt L Q: quia continetur ſub L H, H Q, quæ ſunt iterum æquales ipſis A B, B C: Tertium eſt H E, contentum ſub HG, HM, quæ etiam ſunt æquales eiſdem A B, B C. Quartum denique conſtituunt KG, BM, quia kG, eſt æquale QE per 36. primi & quadratum B M, eſt æquale quadrato H P. Cum igitur hæc quatuor rectangula conſtituant Gnomonem, qui cum quadrato O I, facit totum quadratum AE; manifeſtum eſt, totum quadratum A E, æquale eſſe quatuor rectangulis ABC, & quadrato ſegmenti A C.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

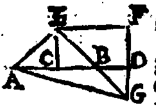
Recta A B ſecta ſit biſariam in C, & non biſariam in D: Dico quadrata inæqualium ſegmentorum A D, D B, dupla eſſe quadratorum ex A C, C D.

PErpendicularis C E ſit æqualis C A, vel CB: eruntque ACE, ECB. Iſoſcelia rectangula, & quatuor anguli ad baſes A E, EB erunt per ſecundum corol. 37. ſemirecti, & totus AEB, rectus. Rurſus perpendicularis D F, ſecet E B. in F, & F G, ſit parallela C D: eruntque etiam F D B, FGE, rectangula; & quia anguli D B F, G E F, ſunt ſemirecti, erunt & reliqui D

F B, GFE semirecti, & per 6. primi D F, æqualis DB, & EG æqualis G F, vel CD. Vnde per 47. primi quadratum rectæ AE, æquale est quadratis CA, C E, & duplum quadrati A C. Et quadratum EF duplum quadrati GF, vel C D, & duo quadrata A E, E F, hoc est quadratum A F, vel loco istius, duo quadrata A D, D F. vel duo AD, DB, dupla quadratorum AC, CD.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

A B secta bifariam in C, adiiciatur quæcunque B D. Dico duo quadrata A D, D B dupla esse duorum A C, C D.

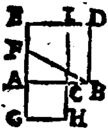


Constructio est eadem cum præcedēte, & angulus A E G, rectus, & A C E, EGF, BGD triangula Isoscelia, & ideo quadrata AE, E G, dupla quadratorum A C, E F, hoc est quadratorum A C, C D. duobus autem quadratis AE, E G, est per 47. primi æquale quadratum A G; & quadrato AG sunt æqualia AD, DG, hoc est A D, D B. Ergo etiam duo quadrata AD, DB sunt dupla quadratorum AC, CD.

PRO-

PROPOS. 11. PROBL. 1.

Rectam A B ita secare in C, vt rectangulum A B C, sit æquale quadrato segmenti A C.



QVadratum ipsius A B, sit A D; & latus AE, bifariam sectum in F; & recta F G, æqualis ipsi F B; & AC æqualis AG; perficiaturque quadratum AH; & H I, sit protracta HC: eritque E H, rectangulum contentum sub EG, GH hoc est, sub EG, G A. Hoc autem rectangulum vna cum quadrato A F æqualia sunt per 6. quadrato FG, hoc est, quadrato FB; & per 47. primi quadratis A B, A F: ergo rectangulum E H, cum quadrato A F, æquale est quadratis A B, AF, hoc est, quadrato A D, & quadrato rectæ A F. Dempto igitur quadrato communi A F, remanebit quadratum A H, hoc est, quadratum segmenti A C, æquale rectangulo C D, hoc est, rectangulo contento sub tota A B, & reliquo segmento C B.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

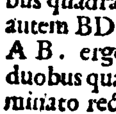
In triangulo A B C, sit angulus B, obtusus; ita vt perpendicularis A D per** Schol. 17. **primi cadat extra triangulum: Dico quadra-

dratum lateris A C, excedere quadrata laterum A B, B C, gemino rectangulo C B D.

QVadratum enim C D est per 4. æquale quadratis B C, B D, & gemino rectangulo C B D addito ergo quadrato AD; erũt duo CD, DA, hoc est, per 47. primi quadratum A C, æquale geminato rectangulo C B D, & tribus quadratis C B, B D, D A. Quadratis autem BD, D A, æquale est quadratum A B. ergo quadratum A C, æquale est duobus quadratis A B, B C, vna cum geminato rectangulo C B D.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

In triangulo A B C, sit angulus C, acutus; eritque saltem alter reliquorum acutus, v. g. B: & ideo perpendicularis A D, cadet intra triangulum. Dico quadratum lateris A B, minus esse quadratis AC, BC, geminato rectangulo B C D.



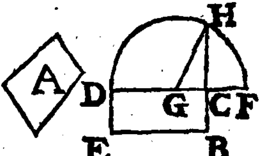
QVadrata enim B C, CD, sunt per 7. æqualia gemino rectangulo B C D, & insuper quadrato B D. Ergo addito quadrato A D, erunt tria quadrata B C, C D, A D, vel duo BC, AC, æqualia rectangulo gemino B C D, &

duo-

duobus quadratis B D, D A, quibus est æquale quadratum A B. Ergo solum quadratum A B, minus est duobus quadratis B C, A C, prædicto gemino rectangulo B C D.

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo A, æquale quadratum exhibere.



PER 42. vel 45 primi fiat rectilineo A æquale rectangulum B D, ipsiq; C B sumatur æqualis C F; & centro G, circa totam D F, describatur semicirculus, eumque secet B C in H. Dico quadratum C H, æquale esse rectangulo D B, hoc est rectilineo A. Rectangulum enim D C F, hoc est D B, vna cum quadrato G C, æquale est, per 5. quadrato G H. Sed huic sunt per 47. primi, æqualia quadrata C H, C G. Ergo hæc duo quadrata, sunt æqualia dicto rectangulo D B, & quadrato G C; demptoque communi quadrato G C, remanebit quadratum C H æquale rectangulo D G, hoc est, rectilineo A.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

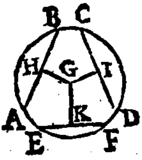
DEFINITIONES.

1 AEquales circuli sunt, quorum diametri, vel semidiametri sunt æquales.

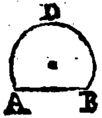
2 Linea recta tangit circulum, quem tangendo non secat.

3 Circulus circulum tangit, quem tangendo non secat.

4 A B, C D dicuntur æqualiter distare à centro G; cum perpendiculares G H, G I, sunt æquales. Cum vero v. g. perpendicularis G K, maior est quàm GH; dicitur E F, magis distare à centro, quàm A B.

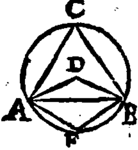


6 Segmentum circuli, est figura, quæ sub recta linea, & peripheria circuli comprehenditur.



6 Segmenti autem angulus eſt, qui fit à recta, & peripheria; qualis eſt angulus quem facit peripheria A D B, cum recta A B, ad punctum A, vel B.

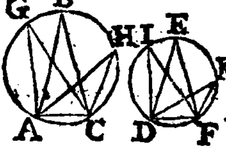
7 Angulus in ſegmento v.g. in ſegmento A C B A, eſt angulus rectilineus A C B, cum angulus C eſt ad peripheriam, & latera C A, C B. pertingunt ad terminos baſis AB.



8 Tam angulus rectilineus ACB ad peripheriam quàm A D B ad centrum, dicitur inſiſtere peripheriæ AB, quam intercipiunt lineæ rectæ continentes angulos C, D.

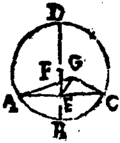
9 Figura autem mixta A B D, & contenta peripheria A B, & duabus rectis A D, B D coeuntibus in centro D, appellatur Sector.

10 Similia circuli ſegmenta ſunt, in quibus anguli iuxta definit. 7. ſunt æquales, & ſatis eſt ſi vel vnus ABC, ſit æqualis vni D E F, quia per 21. huius etiam reliqui ſunt æquales, quia omnes in eodem ſegmento ſunt æquales.



PROPOS. 1. PROBL. 1.

Dati circuli centrum reperire.



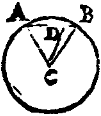
RECta B D, secans aliam AC bifariam,& ad angulos rectos in E, secetur bifariam in F. Dico F, esse centrum. Si enim F non est centrum, sit aliud G, extra ipsam BD. recta enim BD, semel tantum secatur bifariam in puncto F. Nectantur GA, GC, GE, eruntque duo latera G E, EA, æqualia duobus G E, E C; & per 15. def. primi basis GA,basi GC. ergo per 8. primi GEC, GEA,sunt æquales, & recti, & rectus GEC, æqualis recto DEC; quod est absurdum.

Coroll. Ergo in quauis recta, quæ aliam secat bifariam, & ad angulos rectos, est centrum circuli; atque adeo in communi earundem concursu.

PROPOS. 2. THEOR. 1.

Recta A B, nectens duo puncta peripheriæ A B, cadit intra circulum.

EX centro C, ad A B ducantur semidiametri C A, CB; & ad quoduis aliud



aliud punctum D, recta C D. Erunt igitur per 5. primi, C AB, C B A æquales. Est autem per 16. primi CDA maior C B A, ergo etiam maior quàm C A D; ideoque per 19. primi C D minor semidiametro C A.

Coroll. Ergo linea tangens, tangit circulum in vnico puncto.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Diameter C A E secans aliam B D, non per centrum ductam bifariam, secat ad angulos rectos: & vice versa, secans ad angulos rectos, secat bifariam.

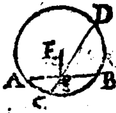
IN prima enim hypothesi duo latera A F, F B sunt æqualia duobus A F, F D, & basis AB, basi A D. ergo per 8. primi angulus AFB æqualis est angulo AFD.

In secunda, præter angulos rectos ad F, erunt per 5. primi æquales A B D, ADB, & latus AF istis oppositum commune. ergo per 26. primi, latus FB erit æquale lateri F D.

Coroll. Eodem modo in omni triangulo isosceli A B D; recta A F secans bifariam basim B D, secat ipsam ad angulos rectos; & secans ad angulos rectos, secat bifariam.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

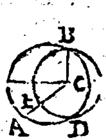
Extra centrum, nulla lineæ se mutuo secans bifariam.



SI enim A B, C D sectæ essent bifariam in E; recta F E, ducta ex centro F, esset per 3. perpendicularis ad vtramque, & anguli F E A, F E C, essent æquales, quod est absurdum.

PROPOS. 5. THEOR. 4.

Circuli se mutuo secantes non habent idem centrum.

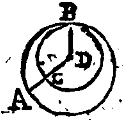


SI fieri potest, commune centrum sit C. Ergo CB, erit semidiameter communis, eique erunt æquales aliæ C A, C E; ideoque æquales inter se, quod est absurdum.

PRO-

PROPOS. 6. THEOR. 5.

Etiam se mutuo tangentium, non est idem centrum.



PRopter eandem causam, quia D B, esset communis, & D A, D C, æquales essent eidem D B, & æquales inter se.

PROPOS. 7. THEOR. 6.

Si ex puncto excentrico I, educantur AFIB, per centrum F, & alia IC, ID, IE, vtcumque: erit IFA omnium maxima; IB, minima; IC maior ID, & eidem v.g. IE vna tantum poterit esse æqualis ex altera parte maxima, vel minima.

PRimo. FI, FC sunt per 20. primi, maiores I C, sed FI, F C sunt æquales F I, F A. Ergo IA, maior est I C, &c.

Secundo I F, FC, sunt æquales IF, F D; & angulus IFC, maior IFD. ergo per 24. primi IC maior quàm ID, &c.

Tertio IF, IE, sunt maiores FE, hoc est, FB: dempta igitur communi IF, remanet I E maior I B.

Quare

Quarto si angulo B F E, fiat æqualis B FG: erunt circa ipsos latera IF, FE æqualia lateribus IF, FG. ergo per 4. primi & basis I E, basi I G, & nulla alia. reliquæ enim omnes sunt maiores vel minores, ex præmissis.

PROPOS. 8. THEOR. 7.

Ex puncto A extra circulum posito, ducantur quotcunque rectæ A B F E per centrum F, A D I, AGH vtcumque, tam ad concauam peripheriam, quàm ad conuexam: Dico A E, esse maximam eductarum ad concauam; A B, minimam eductarum ad conuexam; A I, maiorem esse A H, & A G maiorem A D: ipsique v. g. A D, vnam tantum aliam posse esse æqualem.

PRimo. A F, FI, sunt per 20. primi, maiores A I. ergo & AFE, quæ est æqualis ipsis AF, FI, &c.

Secundo. A D, D F, sunt maiores AF. ergo demptis æqualibus FD, F B; remanebit A D, maior quàm AB &c.

Tertio A F, FI sunt æquales A F, F H; sed angulus A FI, maior est A F H. Ergo per 24. primi AI, maior quàm AH &c.

Quar-

Quarto. duæ A D, D F, sunt per 21. primi, minores duabus AG, GF; & GF, DF, sunt æquales. ergo AD, minor quàm A G, &c.

Quinto. angulus A F C, sit æqualis A F D. ergo per 4. primi A D, erit æqualis A C, quia circa æquales angulos latera AF, FD, sunt æqualia lateribus AF, FC.

PROPOS. 9. THEOR. 8.

Tres rectæ A B, A C, A D, sint æquales: Dico A esse centrum.

Rectæ CB, C D, secentur bifariam in E, F, & ducantur AE, AF; eruntque duo latera AE, E B, æqualia duobus AE, EC, & basis A B, æqualis A C. Ergo per 8. primi anguli A EB, AEC, sunt æquales, & recti: & per coroll. primæ huius, in EA, erit centrum circuli; sed propter eandem causam debet esse in FA. ergo centrum est A.

PROPOS. 10. THEOR. 9.

Circulus circulum secat duntaxat in duobus punctis.

Si

SI enim fieri potest sint tria puncta B, A, C; & centrum vnius sit D. Cum ergo tria puncta B, A, C, sint communia; erunt etiam ad alterius circuli peripheriam tres rectæ D B, D A, D C, æquales; ideoque D centrum erit vtriusque, quod est contra 5. *huius*.

PROPOS. 11. THEOR. 10.

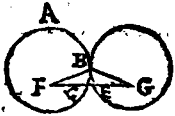
Recta coniungens centra duorum circulorum se mutuo tangensium interius, transit per contactum.

PVnctum contactus sit A, centrum interioris circuli G, exterioris F; & recta F G, si fieri potest non transeat per A, sed interiorem secet in B, exteriorem in E. Eruntque GA, GB, æquales, adiectaque FG, erunt AG, GF æquales FB,; sed A G, G F sunt maiores A F, per 20. primi. ergo etiam F B, maior est quàm A F, hoc est, maior quàm FE quod est absurdum. idem sequeretur ex altera parte, si F, poneretur esse centrum interioris, & G exterioris, etiamsi puncta C, D, vel B, E, ponerentur coincidere in vnum.

PRO-

PROPOS. 12. THEOR. 11.

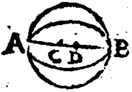
Recta coniungens centra duorum circulorum se mutuo tangentium exterius; transit per contactum.



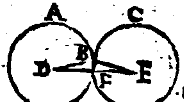
SI enim FG, coniungens centra F,G, nō transit per contactum B, sed secet circulos in C, E. erunt duo latera FB, G B, vel æqualia, vel minora tertio F C E B, quod est contra 20. primi.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

Contactus circulorum; est vnicum punctum.



SI duo essent puncta contactus v. g. A, B; recta C D, coniungens cētra C,D, per 11. huius transire per vtrum, essetque A C D B, communis diameter, eademque secta bifariam in duobus punctis C,D. quod est absurdum.



Si autem duo circuli se mutuo tangerent in duobus punctis B,F, exterius, vna, eademque D E, D E, transiret per vtrumque, per 12. vel certe FD, F E, essent æquales ipsi D F E, quæ omnia sunt absurda.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

Ad æquales A B, C D, cadunt æquales perpendiculares E F, E G; & A B, CD, sunt æquales: quando perpendiculares E F, E G sunt æquales.

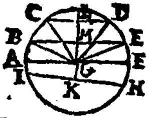
PErpendiculares enim EF, E G, secant AB, CD, bifariam per 3. huius; & ideo AF, DG, semisses æqualium, sunt æquales. & quia æqualibus quadratis semidiametrorum EA, ED æqualia sunt per 47. primi, quadrata AF, F E; & quadrata D G, G E: necesse est hæc duo, illis duobus esse æqualia, & demptis equalibus AF, D G, remanere æqualia quadrata EF, E G, & rectas E F, E G æquales.

Vice versa, si ex duobus quadratis E F, FA, quæ sunt æqualia duobus E G, G D, quia sunt æqualia quadratis EA, ED; tollantur æqualia EF, EG; remanent æqualia quadrata FA, G D, ipsæque AF, DG æquales. Est autem per 3. huius AF medietas totius AB, & DG medietas totius DC. ergo A B, D C sunt æquales.

PRO-

PROPOS. 15. THEOR. 14.

Applicatarum in circulo maxima est diameter. v.g. A G F; & H I centro propinquior, maior est remotiore C D.



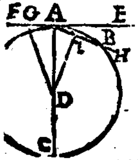
Dvcantur perpendiculares GK. GL, quarum illa erit per defin. 4. huius minor ista, & ideo ex G L poterit abscindi G M, æqualis G K; & B E, æquidistans ipsi C D, erit per 14. huius æqualis I H. Nectantur præterea G B, G C, G D, G E; eruntque per 20. primi, duo latera G B, G E maiora reliquo B E, sed G B, G E sunt æquales diametro AF. Ergo.

Quod autem H I, sit maior C D; patet per 24. primi, quia latera GB, G E, sunt æqualia GC, G D, & angulus BGE, maior C G D.

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Recta F A E diametro A D C perpendicularis in A, tota cadit extra circulum: & angulus contingentiæ E A B, non potest diuidi per lineam rectam: Angulus etiam semicirculi C A B maior est, & reliquus

liquus contingentiæ minor omni angulo re-ctilineo acuto.



PRimo. Ad quodlibet pũctum G, rectæ E F, ducatur ex centro D, recta D G. Quoniam igitur rectus A, maior est acuto D G A; erit per 19. primi DG, maior semidiametro D A; & G, extra circulum &c.

Secundo. Dico rectam A H, eductam ex A, vtcunque infra A E, secare circulum. Angulo enim E A H, fieri potest æqualis A D I, ad centrum D, per 23. primi, & D I, concurrit necessario cum AH, 3.g. in I, quia duo IAD, IDA, sunt minores duobus rectis, quia sunt æquales recto D A E, & ideo necesse est D I A, esse rectum, & per 19. primi DI, minorem esse semidiametro D A, atque adeo punctum I, nec non totam A I, esse intra circulum; & rectam A H nequaquam cadere inter rectam AE, & peripheriam AB.

Tertio. Dico angulum semicirculi C AB, maiorem esse acuto CAH. quia præter acutum, continet angulum segmenti, quod abscindit eadem A H.

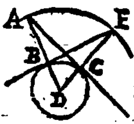
Quarto. Dico angulum contingentiæ contentum recta A E, & peripheria A B, minorem esse quolibet acuto E A H. Hic enim

enim continet angulum contingentiæ, & simul angulum segmenti abscissi à recta AH.

Coroll. Hinc patet rectam EF, si cum diametro CA, ad punctum A, constituat rectos CAE, CAF; tangere circulum in puncto A.

PROPOS. 17. PROBL. 2.

Ex A, ducere rectam, quæ tangat circulum BC.

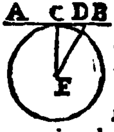


CEntro D interuallo DA, describatur alius circulus, vel arcus AE, eumque secet perpendicularis BE, in E; & DE, secet circulum C: dico AC, tangere circulum in C. Est enim per 4. primi angulus DCA, æqualis recto DBE, quia circa angulum D duo latera DC, DA, sunt æqualia duobus DB, DE.

PROPOS. 18. THEOR. 16.

AB tangat circulum in C: Dico semidiametrum EC, esse perpendicularem ad AB.

Nam



NAm si alia E D, esset perpendicularis; esset EDC, rectus, & ECD, acutus, & per 19. primi, ED minor semidiametro E C; punctumque D, intra circulum. quod est contra hypothesim.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Recta C E continuat cum tangente A B, angulum rectum A C E. Dico C E transire per centrum.

SI enim E, non est centrum, sit F. ergo per antecedentem rectus F C A, æqualis erit recto E C A. quod est absurdum.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

Angulus B D C, ad centrum D; duplus est B A C. anguli ad peripheriam; cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN primo casu anguli E DC, EDB, sunt dupli angulorum D A C, DAB: quia triangula D A C, DAB, sunt Isosceliæ; & EDC, EDB, sunt

per

per 32. primi æquales duobus internis, & oppoſitis.

In ſecundo, propter eandem cauſam BDC, duplus eſt anguli BAC.

In tertio, totus EDC, duplus eſt totius EAC; & ablatus EDB, ablati EAB; ergo reliquus BDC, duplus reliqui BAC.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Qui in eodem ſegmento ſunt anguli, quales ſunt ADB, ACB, AEB; ſunt inter ſe æquales.

RAtio eſt, quia vnus & idē angulus AFB, ad centrum, eſt duplus angulorum, ADB, ACB, AEB.

Vnde ſapiēter Euclides definit vltima definitione ſimilitudinem ſegmentorum, per æqualitatem huiuſmodi angulorum.

Ex Scholio.

REcta AB, ſubtendit ad eaſdem partes duos angulos æquales ADB, AEB: Dico puncta A, B, E, D eſſe ad peripheriam eiuſdem circuli.

culi. Si enim peripheria ABE, non transit per D, secet rectam BD, vltra vel citra punctum D. in F ducta igitur A F, erunt per demonstrata anguli A F B, A E B, in eodem segmento ABFA, æquales. & consequenter etiam A F B, A D B æquales. quod est absurdum, vnus enim est altero maior per 16. primi, quia vnus est externus, & alter internus & oppositus.

PROPOS 22. THEOR. 20.

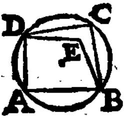
Quadrilateri A B C D inscripti circulo, anguli oppositi sunt æquales duobus rectis.

ANguli enim ACB, ADB, sunt æquales per 21. huius, & similiter ABD, ACD. & idcirco ABD, A D B simul æquales toti BCD: adiectoque B A D; duo BCD, BAD, sunt æquales tribus angulis trianguli ABD; quos constat esse duobus rectis æquales per 32. primi, &c. Simili enim modo ostenditur idem de duobus angulis A B C, A D C.

Ex Scholio.

In quadrilatero A B C D, duo anguli A, C, vel duo B, D, sint æquales duobus rect i, Dico quatuor puncta A, B, C, D, esse ad peripheriam circuli.

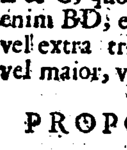
Si



SI enim circulus ABD, nō transit per C, transeat vltra vel citra, & in eo sumatur aliquod punctum E, quod non sit in rectis B C, D C. Erunt igitur per 22. iam demonstratam etiam duo anguli A, E æquales duobus rectis, & æquales duobus A, C; & dempto communi A, remanebunt æquales E & C, quod est contra 21. primi. ducta enim BD; erit angulus BED, vel intra, vel extra triangulum B C D, ideoque vel maior, vel minor angulo C.

PROPOS. 23. THEOR. 21.

Segmenta similia, & super eadem basi constituta, sunt æqualia.



SI enim in superpositione non sibi penitus cōgruūt; aliqua recta A C D, secabit vnius peripheriam in C, alterius in D; fietque angulus externus A C B, maior interno C D B, quod est contra hypothesim, anguli enim similium segmentorum debent esse æquales.

PROPOS. 24. THEOR. 22.

Idem verum est quando bases sunt æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 3.

Dati segmenti A B C, centrum reperire.

DVæ rectæ A B, A C, quæ non sint parallelæ, secentur bifariam in D, E, & ex D, E erigantur perpendiculares D F, E F, in quibus necessario existit cētrum circuli per coroll. primæ huius, nimirum in communi concursu F.

Eodem modo describitur circulus per quælibet alia tria puncta A, B, C, vel etiam circa triangulum, dummodo puncta non existant in vna linea recta.

Quod autem prædictę perpendiculares EF, DF, concurrant, probatur in sequenti lemmate.

Lemma.

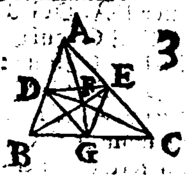
Perpendiculares secantes latera trianguli bifariam, concurrunt ad vnum punctum.

In

IN primo triãgulo ABC, angulus A eſt rectus; in ſecundo obtuſus; & in tertio ſunt omnes acuti, in omnibus autem, ſectum eſt latus AD, biſariam in D, & D G pararella lateris A C, occurrit baſi BC, in G; & GE eſt parallela A B; & ex his procreatur parallelogrammum A D G E, in quo latera oppoſita D G, A E, & A D, GE, & D B, ſunt æqualia per 34. primi; & per 29. angulus E G C, æqualis interno B, & G E C, G D B, æquales inter ſe, quia ſunt æquales eidem A. Et quia angulis E G C, G E C adiacet latus G E, & BD ipſi G E æquale, adiacet duobus G BD, GDB; erit per 26. primi GC, æqualis GB, & G D, æqualis E C; atque adeo E G, æqualis ipſi A E. Atque hæc ſunt communia.

2

3

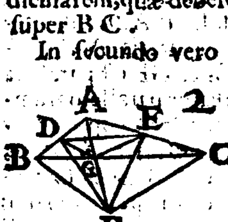


Iam vero in prima figura perpendiculares DF, EF, coincidunt cum parallelis D G, GE, eo quod etiã anguli GDB, GEC ſint æquales recto A. Vnde conſtat etiam perpendiculares D F, E F concurrere, &

& concurſum F eſſe punctum G, in quo baſis BC; ſecta eſt bifariam: ita vt in hoc caſu non ſit opus ducere tertiam perpendicularem, quæ deberet erigi ex puncto G, ſuper B C.

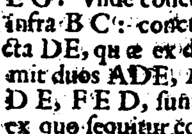
In ſecundo vero caſu perpendiculares D F, E F, concurrunt infra B C. Cũ enim

2



angulus GDB, equalis ſit obtuſo A; & B D F ſit rectus, recta D F, cadit neceſſario inter D G, & D B, & ſimiliter E F cadit inter E C, E G. vnde concurſus non poteſt non eſſe infra B C: concurſum autem probat recta DE, quæ ex duobus rectis ad D, E demit duos ADE, A E D. & ideo reliqui F D E, F E D, ſunt duobus rectis minores; ex quo ſequitur concurſus per 13. Axioma.

3



In tertio caſu perpẽdiculares D F, E F, cadunt inter DA, DG, & inter A E, E G, quia anguli BDF, CEF ſunt maiores angulis GDB, G E C, qui ſunt æquales acuto A, & ideo concurſus F eſt intra triangulum A B C.

Denique in vtroque caſu tertia perpendicularis coincidit cum recta F G. Nam

pri-

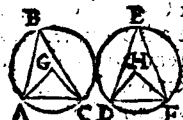
primo F B, est æqualis FA, per 4. primi; quia circa rectos FDA, FDB sunt duo latera FD, D A, equalia duobus FD, D B. secundo F C, equalis est eidem F A, eandem ob causam, assumendo triangula F E A, F E C. ergo etiam F C, est æqualis F B. sunt autem etiam duo latera F G, GB, æqualia duobus F G, G C. ergo per octauam primi, anguli FGB, FGC erunt æquales & recti. atque adeo omnes tres perpendiculares concurrent ad commune punctum F. quod erat demonstrandum.

Pro figuris regularibus plurium laterum ponitur aliud Lemma huic simile ad octauam propositionem quarti.

Ceterum in propositione 25. non est necesse vt rectæ A C, A B, habeant punctum A, commune, dummodo non sint parallelæ. Et licet hic coucursus perpendicularium demonstratus sit duntaxat in triangulis; idem tamen sequitur si duæ lineæ ducantur vtcunque, dummodo non sint parallelæ quales sunt AH, CI. Nam productæ constituunt cum A C, triangulum A C B, & perpendiculares DG, FG concurrunt in G. ergo etiam perpendiculares KM, LM, quæ secant AH, C I, bifariam concurrunt alicubi in M, cum sint parallelæ ipsis D G, E G, &c.

PROPOS. 26. THEOR. 23.

In eodem, vel in æqualibus circulis anguli æquales insistunt æqualibus peripheriis, siue sint constituti ad centrum, siue ad peripheriam.



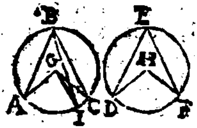
Sint primo æquales anguli ad centra G H: Cum igitur circa eosdem sint quatuor semidiametri æquales, erit per 4. primi basis A C, æqualis basi D F. & quia ijdem anguli G, H, sunt per 20. huius dupli ABC, D E F: ideoque super æqualibus basibus segmenta ABC, DEF, similia, erunt per 24. huius eadem segmenta æqualia, & peripheriæ ABC, DEF. necnon reliquæ AC, DF æquales.

Deinde si anguli B, E ponantur æquales; necesse est etiam G, H esse æquales: ergo &c.

PROPOS. 27. THEOR. 24.

Quando arcus D F, A C sunt æquales, sunt quoque tam anguli ad centra G, H, quàm anguli B, E, ad peripheriam æquales.

Si

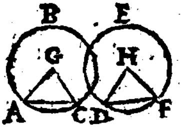


SI enim angulus A G C, esset maior DHF, ipsique D H F, fieret æqualis AGI, arcus A I, esset æqualis D F, per 26. huius, hoc est, ipsi A C, quod est absurdum.

Similis est ratio de angulis B, E.

PROPOS. 28. THEOR. 25.

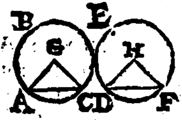
In eodem, vel æqualibus circulis, æquales rectæ subtendunt æquales peripherias.



ERunt enim per 8. primi anguli G, H, æquales, quia circa ipsos sunt quatuor semidiametri æquales; & insuper basis A C, ponitur æqualis basi DF. ergo per 26. huius, arcus A C, est æqualis DF, & reliquus ABC, reliquo DEF.

PROPOS. 29. THEOR. 26.

Peripherias æquales subtendunt rectæ æquales.



QVia per 27. huius erit etiam angulus G, æqualis H, ſi peripheria A C, ſit æqualis D F, & per 4. primi baſis AC, ęqualis baſi DF, propter quatuor ſemidiametros ęquales.

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Datam peripheriam A B C, biſariam ſecare.

HOc præſtat recta B D B, quæ ſubtenſam A C, ſecat biſariam, & ad angulos rectos in D. quia circa rectos ſunt latera BD, DA, æqualia lateribus BD, DC. Et idcirco per 4. primi baſis AB, æqualis BC; & per 28. huius, arcus B A, ęqualis B C.

PROPOS. 31. THEOR. 27.

Angulus in ſemicirculo rectus eſt, in maiore ſegmento minor; in minore maior recto. Angulus quoque ſegmenti maioris maior eſt recto, & minoris minor.

DIco primo angulum A B C in ſemicirculo ABC, eſſe rectum. Angulus enim

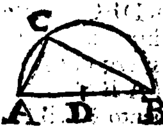
enim A D B, duplus est DBC; & CDB, duplus DBA, eo quod triangula ABD, DBC, sint Isoscelia: sed illi dupli sunt æquales duobus rectis, ergo D B A. DBC, constituent rectum A B C.

Dico 2. in maiori segmento CAB, angulos esse acutos. In eodem enim segmento est quoque angulus B A C, qui est acutus, quia A B C, est rectus. huic autem BAC, sunt omnes reliqui in eodem segmento æquales per 21. huius. Ergo.

Dico 3. angulum B E C, in minori segmento B E C, esse obtusum. In quadrilatero enim A B E C, oppositi E, A, sunt æquales duobus rectis per 22. huius, & A est acutus. ergo E obtusus.

Denique reliquæ duę partes sunt manifestæ; quia angulus segmenti maioris, nempe angulus mixtus CBA, componitur ex recto ABC, & angulo segmenti quod abscindit recta AB: Et protracta AB, in F, fit angulus rectus CBF, maior angulo segmenti minoris nempe mixto C B E.

Ex Scholio.



Vice versa, dico angulum rectum, v. g. ACB, esse in semicirculum, hoc est, si recta AB, ducta utrinque, secetur bifariam in D, & centro D, circa AB describatur semicirculus, ipsum transire per C.

SI enim punctum C esset in alio segmento, angulus ACB, non esset rectus; sed obtusus, vel acutus, vt demonstratum est.

PROPOS. 32. THEOR. 28.

Recta AB, tangat circulum in C, & CD, secet eundem in C, D. Dico angulo ACD, æquales esse angulos in alterno segmento DEC; & angulo DCB, angulos in alterno segmento CFD.

SI CD, non transit per centrum H, transeat CHE: eruntque per 18. huius. ECA, ECB, recti, & ipsis erunt æquales CGE, CDE, in segmentis, hoc est, in semicirculis quos abscindit diameter CE.

Dein-

Deinde quoniam CDE, rectus est, erũt DEC, DCE, vni recto, nempe toti ECA æquales, per 32. primi, demptoque communi DCE, reliquus DEC, in alterno segmento, æqualis erit reliquo ACD, ad punctum contactus C.

Denique in quadrilatero EDFC, anguli oppositi DFC, CED, sunt per 22. huius æquales duobus rectis, hoc est, duobus DCA, DCB. Sed DCA, æqualis est DEC. ergo reliquus DFC, in alterno segmento, est æqualis reliquo DCB, ad contactum C.

PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta AB, describere segmentum circuli, capiens angulum dato æqualem.

Primo, quando angulus datus est rectus, certum est segmentum esse semicirculum.

Secundo, quando angulus datus est acutus. v. g. C, tunc constituatur ipsi æqualis BAD, & ex A, super AD erigatur perpendicularis AE, & in puncto B fiat angulus ABF, æqualis BAE: eruntque FA, FB, æquales, & F, centrum circuli AGBK; & angulus AGB, in segmento ABGA, erit æqualis angulo BAD,

D 6 ad

ad punctum contactus A. Nam propter rectum DAE, recta DA, tangit circulum per 16. huius. Est autem BAD, æqualis C. ergo etiam AGB, est æqualis C.

Tertio, quando angulus datus v. g. H, est obtusus, accipiatur eius loco acutus C. Descripto enim segmento AGB; habebitur reliquum AKB, & angulus K, erit æqualis H, quia per 22. huius G, & H, æquiualent duobus rectis, hoc est, duobus C, H. C autem est æqualis G, ergo K, æqualis H.

PROPOS. 34. PROBL. 6.

A dato circulo abscindere segmentum, quod capiat angulum æqualem dato, v. g. D.

DVcatur tangens EAF, & angulus EAC, fiat æqualis D. angulus enim ABC, in alterno segmento CBA, erit per 32. huius æqualis angulo EAC, hoc est, angulo D.

PROPOS. 35. THEOR. 29.

Si in circulo duæ rectæ se mutuo secent: rectangula sub segmentis erunt æqualia.

Pri-

PRimo, quando interſectio fit in centro, omnia ſegmenta ſunt ſemidiametri, & rectangula ſub ſegmentis ſunt quadrata æqualia.

Secundo quando C D, tranſit per centrum F, ſecat A B, biſariam, atque adeo ad angulos rectos E, per 3. huius. Tunc recta C D, erit ſecta biſariam in F, & non biſariam in E; & per 5. ſecundi, rectangulum CED, vna cum quadrato E F, erit æquale quadrato F D, hoc eſt quadrato F B, & per Pythagoricam, quadratis B E, E F: ablatoque communi E F, remanebit quadratum B E æquale rectangulo CED. Quadratum autem B E, eſt idem cum rectangulo AEB. ergo rectangulum ſub ſegmentis A E, E B, eſt ęquale rectangulo contento ſub ſegmentis C E, E D.

Tertio. Quando CD, tranſiens per cẽtrum F, non ſecat biſariam AB, in E, ſecabitur biſariam in alio puncto G, FG, erit ad AB, perpendicularis; & per 5. ſecundi

rectangulum A E B, vna cum quadrato EG, erit æquale quadrato GB; adiectoque quadrato GF, erit idem rectangulum A E B, cum quadratis E G, G F, hoc eſt, cum quadrato E F, æquale quadratis GB, GF, hoc eſt, quadrato FB.

Huic

Huic autem quadrato FB, seu FD, ostendimus æquale esse rectangulum CED, vna cum eodem quadrato EF, ablato igitur quadrato EF; remanebunt rectangula CED, AEB, æqualia.

Quarto, & vltimo, neutra transeat per centrum: dico nihilominus rectangula AEB, CED, esse æqualia; quia vtrumque debet esse æquale rectangulo GEH, per casus antecedentes, ducendo GEH, per centrum F.

PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si ex puncto D, recta DB, tangat circulum & alia DCA, secet: Rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

TRanseat primo recta DCA, per centrum F. Quoniam igitur AC, secta est bifariam in F, ipsique addita CD: ergo per 6. secundi, rectangulum ADC, cum quadrato FC, æquale est quadrato FD, hoc est, per 47. primi, quadratis DB, BF. Sunt autem FC, FB, æqualia. ergo & reliqua, nimirum rectangulum ADC, & quadratum DB, sunt æqualia.

Se-

Secundo, recta DCA, non transeat per centrum F, sed recta FE, sit ad ipsam perpendicularis, atque adeo per 3. huius, secet eius segmentum GD, bifariam in E. Quare iterum per 5. secundi, rectangulum ADC, cum quadrato EC, erat aequale quadrato ED: adiectoque quadrato EF: erit idem rectangulum ADC, cum duobus quadratis EC, EF, hoc est, cum quadrato FC, aequale quadratis ED, EF, hoc est, quadrato FD. Quadrato autem FD, sunt aequalia quadrata DB, BF, & BF, est aequale FC. ergo etiam reliqua erunt aequalia: nempe rectangulum ADC, & quadratum DB.

Coroll. 1. Hinc manifestum est, si à puncto D, ducantur plurimae rectae circulum secantes; rectangula sub totis, & sub segmentis inter punctum, & conuexam peripheriam interceptis, esse aequalia: quia omnia sunt eidem quadrato tangentis aequalia.

Coroll. 2. Constat etiam duas tangentes ex eodem puncto ductas, esse equales.

Coroll. 3. Ex eodem puncto solum duci duas tangentes.

Coroll. 4. Si duae rectae aequales circulo incidant, & vna tangat, etiam aliam tangere.

PRO-

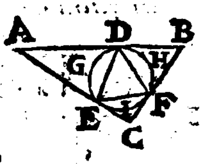
PROPOS. 37. PROBL. 31.

Quod si constet rectangulum A E C, æquale esse quadrato D B: recta D B, incidens circulo erit tangens.

DVcatur tangens DF, & connectatur EF, quæ ad DF, erit per 19. perpendicularis, & quia eidem rectangulo A D C, æqualia sunt quadrata DF, DB, erunt etiam ipsa æqualia, & rectæ DF, DB, æquales. Cumque duo latera EF, FD, sint æqualia duobus EB, BD, & ED, sit basis communis: erit per 8. primi angulus EBD æqualis recto F. & ideo per 16. huius DB, tangent circulum, quod erat demonstrandum.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.



1 FIgura rectilinea v. g. DEF dicitur inscribi figuræ ABC: cum anguli D, E, F attingunt latera figuræ ABC.

2 ABC, dicitur circumscribi figuræ DEF: cum latera figuræ ABC, attingunt angulos figuræ DEF.

3 Vt rectilineum DEF dicatur inscriptum circulo, debent anguli D,E,F, esse ad peripheriam GHI.

4 Vt autem rectilineum ABC, dicatur circulo circumscriptum; debent latera rectilinei, tangere circulum.

5 Item circulus erit figuræ ABC, inscriptus; cum figuræ latera contigerint circulum.

6 De-

6 Denique circulus erit figuræ D E F, circumscriptus, cum peripheria transierit per angulos D,E,F.

7 Recta linea dicitur coaptari circulo, cum eius termini fuerint ad circuli peripheriam.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

In dato circulo, data recta D, (quando id fieri poterit iuxta 15. tertij.) cooptare æqualem.

Ex diametro B C abscindatur BE, æqualis D, per 3. primi: & centro B, interuallo BE, describatur arcus secans datum circulum in A. Recta enim BA, erit æqualis B E, per defin. circuli, & æqualis ipsi D, per primam pronunc.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

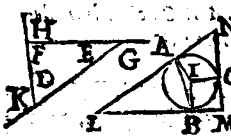
In dato circulo inscribere triangulum, dato triangulo DEF æquiangulum.

Ad punctum contactus A, cum tangente GH, fiat angulus G A B, æqualis F; & H A C, æqualis E. Dico triangulum ABC, ipsi DEF, esse equianguangulum. Angulus enim C, est per 32. tertij, æqualis G A B, seu F; angulus B, æqualis H A C, hoc est E. ergo per 32. primi, etiam reliquus reliquo.

Nota: Si hoc modo inscribatur æquilaterum, circulum diuidi in tres partes æquales.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circulo circumscribere triangulum, cuicunque DEF æquiangulum.



Externis G, H, fiant in centro I, æquales A I B, B I C: eritque reliquus AIC, æqualis reliquo K, quia per 15. primi, omnes anguli ad I, & per 32. eiusdem omnes externi G, H, K, sunt æquales quatuor rectis. Demum ducantur per A, B, C, tres tangentes, quæ concurrent ad tria puncta L, M, N. Cum enim IAL, IBL, sint recti; erunt B A L, ABL, minores duobus rectis; & ideo per 13. Axioma A L, B L concurrent versus L; & ita de reliquis. Dico angulum L, æqualem esse E. Omnes enim anguli quadrilateri AIBL, sunt per 32. primi æquales quatuor rectis. Cum igitur duo ad A, B, sint recti: reliqui I &

L,

L, erant æquales duobus rectis, hoc est duobus G, EL. sed AIB, & G sunt æquales. ergo etiam L & E, &c. eadem enim est ratio de reliquis.

Nota in triangulo æquilatero, & similiter in omnibus alijs figuris regularibus, omnes externos esse inter se æquales. Atque ita etiam anguli ad centrum I, erunt æquales, & per ipsos secabitur circulus in partes æquales.

PROPOS. 4. PROBL. 4.

Intra triangulum A E C, circulum describere.

DVo anguli B, C secentur bifariam, & BD, CD, concurrant ad D: Dico tres perpēdiculares DE, DF, DG, esse æquales &c. Anguli enim D E B, D B E, sunt æquales D F B, D B F, & DB rectis E, F opposituni, est commune. ergo per 26. primi, perpendicularis D E, æqualis est D F. Est autem eidem etiam æqualis DG: eo quod C, sectus sit bifariam, & F, G, sint recti, & C D, communis. ergo omnes tres sunt æquales, & circulus descriptus per E, F, G, tanget latera per 16. tertij.

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Triangulo A B C, circulum circumscribere.

HOc problema re ipsa non differt à prop. 25. tertij, vbi docuimus per tria puncta data, qualia hic sunt A, B, C, describere circulum. perpendiculares enim D F, E F, quæ secant quælibet duo latera A B, A C, bifariam; necessario concurrunt in quæsito centro F.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

Dato circulo quadratum inscribere.

DVæ diametri AC, BD, sint inuicem perpendiculares in cẽtro E: Dico quadrilaterum ABCD, esse quadratum. Quatuor enim angulis rectis ad centrum respondent per 26. tertij, quatuor arcus æquales; & quatuor arcus ęquales subtendunt quatuor lineæ ęquales AB, BC, CD, DA per 29. eiusdem. Denique quatuor anguli ad A, B, C, D, per 31. tertij, sunt ęquales; quia sunt in quatuor semicirculis.

PRO-

PROPOS. 10. PROBL. 10.

Estque Lemma ad sequentem.

Triangulum Isosceles constituere, cuius vterque æqualium angulorum sit duplus reliqui.

PEr 11. secundi secetur quæuis A B, ita, vt, rectangulum A B C, æquale sit quadrato A C; & centro A, interuallo AB describatur circulus, vel arcus, eique applicetur per 1. huius B D, æqualis A C. & per 5. huius describatur circulus circa triangulum A D C, quem recta BD, tanget in D, per 37. tertij; quia rectangulum A B C, æquale est quadrato B D, eo quod B D æqualis sit AC, & per 32. eiusdem angulo BDC, ad contactum D, æqualis erit in alterno segmento angulus C A D; adiectoque communi CDA, erunt duo CAD, CDA, æquales toti ADB; & quia duobus CAD, CDA, æqualis est per 32. primi externus DCB; huic erit æqualis ADB, seu ABD: & in triangulo DCB, erunt per 6. primi, D B, D C, æquales. estque D B, æqualis C A; ergo C A, æqualis C D, & per 5. primi anguli C A D, C D A, æquales; & DCB,

DCB, necnon A D B, vel ABD, duplus ipsius B A D. ergo &c.

PROPOS. 11. PROBL. 11.

Circulo Pentagonum Regulare inscribere.

PEr secũdam huius inscribatur circulo triangulũ EFG, ęquiangulum triangulo ABD, propositionis antecedentis, & G H, F I, secent angulos EFG, EGF, bifariam. Hac enim ratione erũt omnes quinque anguli FEG, IFE, IFG, HGE, H G F, æquales; quia EFG, EGF, sunt dupli FEG: & ideo per 26. tertij quinque arcus FG, EI, IG, EH, H F, sunt ęquales; & quinque rectæ ipsos subtendentes ęquales per 29. eiusdem; & omnes quinque anguli ęquales per 27. quia sicut H E I, insistit tribus arcubus æqualibus H F G I, ita quoque reliqui insistunt totidem ęqualibus.

PROPOS. 15. PROBL. 15.

Circulo Hexagonum regulare inscribere.

SEmidiametro A G, applicentur ęquales AB, AC, eruntque AGC, ABG, trian-

triangula æquilatera; & tam angulus AGC, quàm AGB, erit per 32. primi vna tertia duorum rectorum. Producta autem CG, in E, fiunt omnes tres AGC, AGB, BGE æquales duobus rectis. ergo BGE, erit reliqua pars tertia, & omnes tres erunt ęquales: & totidem à'ʒ erunt eisdem ęquales ad verticem G. & ideo insistent sex arcubus ęqualibus, & arcus subtendent sex rectę ęquales; & omnes sex anguli erunt ęquales; quia sicut EDF, insistit quatuor arcubus æqualibus EBACF, ita reliqui.

PROPOS. 16. PROBL. 16.

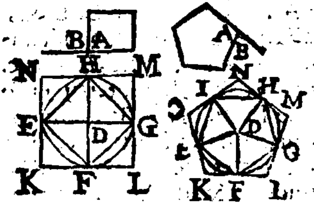
Circulo inscribere Quintodecagonum regulare.

INscribatur triangulum æquilaterum ABC, per 2. huius, & per 11. pentagonum ADEFG. Qualium igitur partium 15. est tota circumferentia, talium 5. erit AB; & talium trium AG, & AGF, 6. atque adeo talium partium erit vna, arcus BF, hoc est vna decimaquinta.

PRO-

PROPOS. & PROBL. 7. & 12.

Circulo Quadratum, & Pentagonum regulare circumscribere.



VT praxis sit omnibus figuris, ipsique etiam triangulo cõmunis, angulus quadrati, vel pẽtagoni internus sit A, externus B; quibus in figuris regularibus constat reliquos esse æquales; & externo B, fiant ad centrum D, æquales quatuor pro quadrato, & quinque pro pentagono, id quod potest fieri, quia omnes anguli externi cuiuscunque figuræ æquiualent quatuor rectis per 32. primi; & hoc ipso diuisus erit circulus in quatuor, vel quinque partes æquales, & lineæ subtendentes arcus ęquales constituẽt quadratum EFGH, vel pẽtagonum EFGHI, regulare, & circulo inscriptum, vt patet ex demonstrationibus 6 & vndecimæ. Inuentis autem punctis E F G &c. circumscribitur circulo quadratum, vel pentagonum per tangentes, sicut in tertia circumscriptum est triangulum, & sicut ibi ita

E etiam

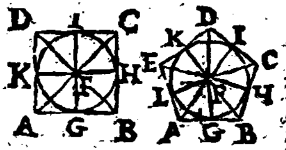
etiam hic demonstratur omnes angulos K L M &c. esse æquales internis A, quia v. g. in quadrilatero E D F K, propter duos rectos E, F, reliqui duo D & K sunt æquales duobus rectis, hoc est duobus A, B, & quia D, factus est æqualis B, sequitur K, æqualem esse A. Latera vero KL, L M, &c. esse æqualia, probatur hoc modo. Tangentes KE, KF, & similiter LF, LG, &c. sunt æquales per 2. coroll. 36. tertij. ergo omnia triangula EKF, FLG, &c. sunt isoscelia, & ad æquales bases EF, FG &c. sunt anguli angulis æquales; eò quod etiam K, L, &c. sint æquales. & ideo per 26. primi erunt etiam omnia latera E K, K F, F L, &c. æqualia, nec non duo K F, F L, duobus L G, G M, &c. æqualia.

PROPOS. & PROBL. 8. & 13.

In Quadrato, & Pentagono, circulum inscribere.

TRiangulo inscriptus est circulus propos. 4. diuidendo duos angulos bifariam, id quod etiam habet locum in omnibus figuris regularibus. Rectæ enim BF, CF, diuidentes bifariam angulos v. g. B, C, concurrunt necessario intra figuram alicubi in F, per lemma quod sequitur; & perpendiculares F G, FH, FI, &c. ductæ ex puncto F, in singula latera sunt æquales;

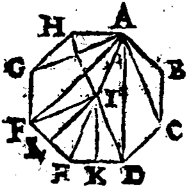
les; idque demonſtratur eodem modo, quo in quarta, quod attinet ad tres perpédiculares FG, FH, FI, pro reliquis vero præmonſtrandum eſt, etiam reliquas FD, FE, FA, ſecare reliquos angulos D, E, A biſariam,



Dico igitur angulũ FDC equalem eſſe FBC. Nam circa æquales FCB, FCD, duo CF, CB, ſunt æqualia duobus lateribus CF, CD. ergo per 4 primi angulus CDF, æqualis eſt CBF. hic autem eſt medietas totius B, ipſique B æqualis eſt totus D: ergo etiam FD. ſecat biſariam angulum D. & ita de reliquis. eodem enim modo, & ordine proceditur ad reliquos, & tandem per 26. primi demonſtratur reliquas perpendiculares FK, FL, &c. æquales eſſe tribus FG, FH, FI. quia v. g. in triangulis FDI, FDK, præter rectos ad I, K, anguli ad D, ſunt æquales, & latus FD, rectis oppoſitum eſt commune. quare circulus deſcriptus centro F intervallo FG, tranſit per reliqua puncta H, I, k, L, & in ijſdem tangit latera figuræ datæ.

Lemma.

In figura regulari, & primo in figura laterum numero parium v.g. in octogono: Dico primo, rectam A E, ductam ad angulos oppositos A, F, vtrumque angulum secare bifariam.



EX eodem enim puncto A, ducantur reliquæ rectæ ad reliquos angulos, ita vt fiant ad vtramque partem rectæ AE, tria triangula. Erunt primo duo triangula A GH, ACB, penitus æqualia per 4. primi, quia circa æquales angulos H,B, latera lateribus sunt æqualia; hoc est basis AG erit æqualis A C, & angulus H A G, angulo BAC; & HGA, angulo BCA: & isti duo dempti ex totis G,B, qui etiam sunt æquales, relinquunt alios duos AGF, A C D, æquales: Et circa istos erunt iterum duo latera duobus æqualia, ideoq; per 4. & basis AF, æqualis basi AD, & angulus FAG, æqualis DAC, & G F A æqualis C D A. Denique eodem modo demonstratur angulum AEF, æqualem esse angulo AED, & EAF, ipsi EAD. Patet igitur rectam

A E,

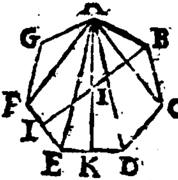
AE, secare angulum E bifariam; immo & angulum B A H; quia ad vtramque partem rectæ E A, sunt tres anguli tribus æquales.

Dico 2. rectam EI transire per A, si bifariam secet angulum E. Debet enim coincidere cum recta AE, quam ostendimus eundem angulum E secare bifariam.

Dico 3. si duæ rectę E I, D I, bifariam secent duos angulos E, D, ipsas concurrere intra figuram. Anguli enim figurarum regularium sunt minores duobus rectis. ergo & semisses IED, I D E; & ideo per 13. Axioma EI, DI, concurrent; & quia trãseunt per angulos oppositos, concurrunt intra figuram.

Dico 4. etiam duas perpendiculares LI, KI, quæ bifariam secant latera E F, E D, concurrere in I. Nectantur enim L I, k I. Cum igitur in triangulo IED, anguli sint æquales; erunt I E, I D, æquales: sunt autem etiam I k, k E ęqualia duobus lateribus I k, K D. ergo per 8. primi, anguli ad K, sunt recti. Rursus duo latera IE, EL, sunt æqualia duobus I E, E K, & anguli contenti ęquales. ergo per 4. primi angulus L, est ęqualis recto k. Quoniam igitur perpendiculares prędictæ necessario coincidunt cum istis L I, kI concurrunt etiam ipsæ in I.

In figura autem laterum imparium.



V.g. in Heptagono; dico primo rectã A K, quæ secat angulum A, bifariam; secare etiam bifariam latus oppositum E D. Ducantur A F, AC, AE, A D: & secta E D, bifariam in K, nectatur A k. demonstrabitur, vt prius, A E, AD esse æquales. Sunt autem & Ak, kE æqualia lateribus Ak, kD, ergo per 8. primi anguli ad k, sunt recti, & k AE, kAD. ęquales. sunt autem iuxta demonstrationem prędecentem, etiam reliqui duo EAF, F A G, ęquales duobus D AC, CAB. ergo & totus kAG, toti kAB, & ideo recta secans angulum A bifariam coincidit cum Ak, secatque similiter latus ED bifariam, & ad angulos rectos in puncto k.

Dico 2. vice versã perpendicularem kI, secare bifariam angulum A. Coincidit enim necessario cum illa quam ostendimus secare bifariam angulum A.

Dico 3. Duas A I, B I, secantes bifariam angulos A, B, concurrere intra figuram v.g. in I. ratio est, quia debent secare latera opposita bifariam.

Dico

Dico 4. Ad idem punctum I coire perpendiculares LI, kI, si bifariam secent latera E F, E D. Vtraque enim coincidit necessario cum illis, quæ secant bifariam angulos A, B.

PROPOS. & PROBL. 5. & 14.

Quadrato, & Pentagono regulari circulum circumscribere.

Secentur duo latera A B, B C bifariam in G, H, sintque GF, H F, perpendiculares, hoc est, idem fiat hic quod in propositione 5. factum est, in descriptione circuli circa triangulum: concurrent dictę perpendiculares intra figuram ad F, per lemma præmissum. & tres lineæ F A, F B, F C, ostendentur esse æquales sicut in 5. Nam circa ęquales angulos ad G, sunt latera lateribus æqualia, & similiter circa rectos ad H. Ergo per 4. primi F A, F C, sunt ęquales eidem F B, atque adeo omnes tres ęquales inter se; & triangula ABF, BCF, isosceles habentia ęquales angulos ad bases AB, BC. Dico easdem FA, FB, FC, immo & reliquas F D, F E, secare bifariam angulos A, B, C, D, E. Sunt enim B, FB C æqualia lateribus FB, B A, & basis FC, æqualis F A. ergo per 8. primi angulus F BC, æqualis est FBA. hoc est vterque erit semissis totius B. Sunt autem iisdem æquales F A B, F C B. ergo etiam illi sunt semisses angulorum A, C. & quia rursus circa æquales F C B, F C D, latera F C, C B, æqualia sunt lateribus F C, C D: erit per 4. etiam F D, æqualis F B, & angulus FDC, æqualis F B C. hoc est, etiam FDC, erit semissis totius D, & FD erit æqualis F B. eodemque modo demonstrabitur F E, esse æqualem F C, & angulum FED. esse semissem totius E. &c. Cum igitur omnes rectæ FA, FB, FC, FD, FE, &c. sint æquales. si centro F, interuallo FA describatur circulus, transibit per reliqua puncta B, C, D, E, &c.

Scholium.

EX his patet inscriptionem quidem figurarum intra circulum esse plerisque figuris regularibus peculiarem, reliquas vero inscriptiones & circumscriptiones esse vniuersales.

Peculiares sunt omnes illæ, quas tradit Euclides, nimirum inscriptio triãguli, quadrati, pentagoni, hexagoni & quintidecogoni intra circulum, hoc est diuisio circu li culi in 3. 4. 5. 6. & 15. partes æquales: possunt tamen aliquæ esse vniuersales. Nam ex prædicta diuisione possunt fieri infinitæ aliæ, praxi omnibus communi. nimirum per continuam bisectionem arcuũ bifariam. Beneficio enim quadrati inscribitur octogonum: figura 16. laterum, 32. laterum, 64. 128. &c. & similiter beneficio Pentagoni figura 10. laterum, 20. 40. 80. &c. & ita de reliquis.

Inscriptio vero Heptagoni, Nonagoni, 11. laterum 13. &c. adhuc desideratur; quia nondum est repertum problema, & constructio trianguli isoscelij, cuius vterlibet angulorum æqualium sit triplus, quadruplus &c. reliqui anguli, quorum beneficio inscriberentur circulo heptagonum nonagonum &c, eo modo quo descriptum est pentagonum. Et beneficio heptagoni & nonagoni inscriberetur figura 63. laterum, sicut inscriptum fuit ab Euclide quintidecagonum.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

1 PARS, scilicet aliquota est, quæ metitur suum totum, præcise.

2 Ipsum vero totum vocatur multiplex suæ partis aliquotæ. v.g. 3. est pars aliquota numeri 12. & 12. multiplex numeri 3.

3 Ratio est duarum magnitudinum, eiusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

4 Rationum autē similitudo, est Proportio; vel potius proportionalitas. Exempli gratia relatio 2. ad 1. vel 4. ad 2. vocatur ratio, & quia eadem est relatio 2. ad 1. & 4. ad 2. idcirco inter 2. & 1. & inter 4. & 2. dicitur esse proportio.

5 Eiusdem generis magnitudines sunt illæ, quæ multiplicatæ se mutuo possunt superare. tales non sunt lineæ, & superficies; & corpus; angulus contingentiæ, & an-

& angulus rectilineus. Quid autem sentiendum sit de angulis segmentorum, consule Clauium. Neque verum est quod aliqui dicunt, recti ad curuum non esse proportionem. Sunt enim quadratæ nonnullæ lunulæ, & ab Archimede quadrata est: Parabola figura mixta, ex curuo & recto.

6. Vt eadem sit ratio A ad B, & C ad D, debent equemultiplices antecedentium A, C, v.g. E, F, quecunque illæ sint, duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. respectu quarumcunque equemultiplicium consequentium B, & D. hoc est respectu G, H; quæ etiam possunt esse duplæ, triplæ, &c. habere hanc conditionem, vt E, F vna sint equales ipsis G, H, vel vna excedāt, vel vna deficiant; hoc est, quando E est æqualis ipsi G, etiam F, sit equalis H; quando E, est maior, quam G, etiā F sit maior quam H; & quando E, est minor quàm G, etiam F sit minor quàm H.

E	A	B	G
	3	6	
F	C	D	H
	4	8	

7. Eandem proportionem habentes magnitudines vocantur proportionales.

8. Quod si in exemplo defin. 6. deprehēderetur aliquam multiplicem E, maiorem quidem esse multiplici G, at equimultiplicem F non esse maiorem H.

tum A ad B, dicetur habere maiorem rationem quàm C ad D.

9 Termini proportionales vt minimum sunt tres, potest enim consequens terminus prioris rationis esse antecedens sequentis, vt contingit in proportione continua. In discreta verò requiruntur vt minimum quatuor termini.

10 Non habet vsum in hoc libro, & respondet quintæ definitioni libri sexti.

11 Homologæ magnitudines sunt antecedentes antecedentibus; & consequentes consequentibus.

Sequuntur modi argumentandi in proportionibus, qui inferius suis locis demonstrantur.

12. Primus modus est Ratio Alterna, seu permutata. Quando ex eo quod vt A ad B; ita est C ad D, infertur, ergo permutando, vt A ad C. antecedens ad antecedentem, ita est B ad D consequens ad consequentem.

A	B
C	D
A	C
B	D

13 Secundus modus est ratio Inuersa. Quando ex eo quod vt A ad B ita est C ad D. infertur, ergo conuertendo, vel inuertendo vt B, ad A, ita est ad D ad C.

A	B
C	D
B	A
D	C

14 Ter-

14 Tertius modus est Cõpositio rationis.

A	B
C	D
AB	B
CD	D

Quando ex eo quod vt A ad B ita est C ad D; infertur. Ergo componendo vt A B simul, ad eandem B, ita & C D simul ad eandem D.

15 Quartus modus est Diuisio rationis.

AB	B
CD	D
A	B
C	D

Quando ex eo, quod vt AB simul ad partem B, ita sunt CD simul, ad partem D; infertur. Ergo diuidendo vt pars A, ad eandem partem B, ita reliqua pars C, ad eandem D.

16 Quintus modus estCõuersio rationis.

AB	B
CD	D
AB	A
CD	C

Quãdo ex eo quod vt A B, simul ad partem B, ita sunt CD, ad partem D; infertur. Ergo per conuersionẽ rationis vt A B, simul ad reliquam partem A, ita C D, simul ad reliquam partem C.

17 Sextus modus est ratio ex Aequalitate: Quando sunt plures termini ex vna parte, & totidem ex alia parte, & infertur eadem ratio extremorum: estque duplex.

18 Ordinata est quando v. g. vt A ad B, ita fuerit D ad E; & vt B ad C, ita E ad F; & hinc infertur. Ergo ex æqualitate ordinata vt A ad C, ita D, ad F.

ABC DEF
A C D F

19. Perturbata est quando fuerit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E; infertūrque iterum. Ergo ex æqualitate perturbata vt A ad C, ita D ad F.

PROPOS. I. THEOR. I.

Sint quotcunque magnitudines v. g. A, B, totidem magnitudinum C, D, æquemultiplices: Dico A, B, simul tam esse multiplices ipsarum C, D, simul, quàm est A ipsius C.

EFG HIK
A B
C D

SI enim in A sunt v. g. tres magnitudines E, F, G, æquales ipsi C; erunt etiam in B, totidem magnitudines H, I, K æquales ipsi D: & E, H, simul æquales erunt ipsi C, D, semel; & F, I, secundo; & G, H, tertio. atque adeo quoties A, continet C, toties E, F, G, H, I, K, hoc est, A & B simul, continebunt C, D simul.

PRO-

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Sint A & C, æquemultiplices ipsarum B & D; aliæ E, F sint earundem B, D æquemultiplices: Dico A, E simul, & C, F simul, esse earundem B, & D, æquemultiplices.

AE CF
B D

SI enim æqualibus multitudinibus A, C, addantur æquales multitudines E, F; fiunt A, E simul, & C, F simul, æquales multitudines earundem B, D.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

A, B sint æquemultiplices magnitudinum C, D; & E F æquemultiplices æquemultiplicium A, B: Dico E, F earundem C, D esse æquemultiplices.

GHI KLM
EA B F
C D

SI enim in E, sunt v.g. tres partes G, H, I, æquales ipsi A, erunt totidem k, L, M in F, æquales ipsi B. Cumque G, k, sint æquales ipsi A, B, erunt G, k ipsarum C, D. æquemultiplices. sunt autem & H, L, eandem ob causam, earundem æquemultiplices, ergo per præcedentem G, H simul,

simul, & k, L simul, sunt earundem C, D æquemultiplices; & quia etiam I, M sunt earundem æquemultiplices; erunt per eandem omnes G, H, I, & omnes k, L, M, hoc est, E & F, æquemultiplices ipsarum C, D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Vt A ad B, ita sit C, ad D; & E, F sint æquemultiplices antecedentium A, C; & G, H vtcunque æquemultiplices consequentium B, D. Dico esse vt E ad G, ita F ad H.

I E.A B.G L
k F.C D.H M

Ipsarum enim E, F sumantur quæcunque æquimultiplices I, k, & aliæ quæcunque æquemultiplices L, M, ipsarum G, H. Ergo per præcedentem I, k, erunt æquemultiplices ipsarum A C; & L, M æquemultiplices ipsarum B, D, atque adeo per defin. 6. I, k, erunt vel vna æquales ipsis L, M, vel vna excedent, vel vna deficient. Sunt autem I, k æquemultiplices ipsarum E, F, & L, M æquæmultiplices ipsarum G, H. Ergo per eandem sextam definitionem, erit quoque vt E ad G, ita F ad H.

Pr-

Demonstratio rationis Conuersæ.

Coroll. Ex eadem definitione probatur eadem facilitate ratio Conuersæ. Nam si vt A ad B, ita fuerit C ad D; & ipsarum A, C, sumantur æquimultiplices E, F, & aliæ G, H æquemultiplices, quæcunque ipsarum B, D. erunt per defin. 6. E, F vel vna æquales ipsis G, H, vel vna excedent, vel vna deficient; immo & vice versa G & H, vel vna erunt æquales, vel vna excedent, vel vna deficient ab E, F. Vnde sequitur per eandem definitionem, vt B ad A, ita esse D ad C.

E	A	B	G
F	C	D	H

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Quàm est multiplex magnitudo A B, magnitudinis C D, tam sit ablata A, multiplex ablata C: Dico etiam reliquam B, tam esse multiplicem reliquæ D, quàm est tota totius, vel ablata ablata.

A	B
E C	D

QVam est multiplex tota totius, vel ablata A ablatę C, tam sit B, multiplex alicuius magnitudinis E. Ergo per primam, A, B simul, tam erunt multiplices ipsarum C, E simul,

simul, quàm est A ipsius C, vel quàm est A B simul, ipsarum C D. Atque ita A B simul, sunt æquemultiplices tam ipsarum CE, quàm ipsarum C, D, & ideo C, E sunt æquales C, D; & ablata communi C, remanebit D, æqualis E: sed B, ita est multiplex ipsius E, vt ablata A, ablatæ C. ergo etiam B, ita erit multiplex ipsius D, vt A ipsius C, vel AB, ipsarum CD.

PROPOS. 6. THOR. 6.

A B, C D, sint æquemultiplices magnitudinum E & F; & A, C ablatæ, sint earundem E, F æquemultiplices: Dico reliquas B, D, vel esse æquales ipsis E, F; vel earundem æquemultiplices.

A B E
C D F

His enim positis erunt in A B, C D, partes ipsis E, F, magnitudine & numero æquales: & similiter tot erunt in A, quot in C. ablato ergo numero partium A, C remanebit æqualis numerus partium in B, D æqualium eisdem E, F.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Aequales A, B, ad eandem C habent eandem rationem: & C eandem ad æquales A, B.

Nam

D E
A B
C
F

NAm æquemultiplices antecedentium A, B v.g. D, E, sunt æquales, & ideo vel vna sunt æquales ipsi F multiplici ipsius C, vel vna deficiũt, vel vna excedunt. Ergo per defin. 6. vt A ad C, ita est B ad C. Et vice versa multiplex F, vel vna erit æqualis ęquemultiplicibus D, E, vel vna excedet, vel vna deficiet; eritque per eandem defin. 6. vt C ad A, ita C ad B.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Sint duæ magnitudines A B maior & A minor (potest enim minor concipi vt pars maioris) & tertia sit quæcunque C. Dico maiorem A B, ad C, habere maiorem rationem, quàm minor A, ad eandem C.

E D
A B
C
F G

SVmantur ipsarum B, & A, ęquemultiplices D, E, hac lege, vt D, maior sit quam C, & E, non minor. Quoniam igitur D, E sunt æquemultiplices duarum B, A; erunt per primam huius D, E simul, ita multiplices totius A B, vt est E, multiplex minoris A. Capiatur quoque FG multiplex ipsius C. proxime maior E. dempta igitur G, quæ intelligitur æqualis C, reliqua F, non erit maior quã E.

E. est autem & D maior quàm C, hoc est quàm G. ergo tota D E maior est tota F G. Quare cum D E, & E, sint æquemultiplices ipsarum A B maioris, & A minoris, & F G, ipsius C, quæ est instar duarum consequentium, sitque E D multiplex primæ A B, maior quidem multiplice secundæ C, hoc est maior quàm F G, sed multiplex tertiæ A, hoc est E, non maior F G, multiplice quartæ C. Erit per 8 definitionem maior ratio AB, ad C, quàm A ad eandem C.

E vice versa C ad A B, habebit minorem quàm ad A, quia vicissim, est quidem F G maior quàm E; sed non est maior quam D E.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Sine A, & B, eandem habeant rationem ad C: siue C eandem ad A & B; semper A & B, erunt æquales.

A B C

SI enim A, maior foret quã B, non haberent rationem eandem ad C, per præcedentem, quod est contra hypothesim. Neque C haberet eandem ad A, B.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Si A ad C maiorem rationem habeat, quàm B, ad eandem C. Erit A, maior quam B. Et vice versa si C ad A habet maiorem quàm ad B; erit B, maior quàm A.

A B C

SI enim A esset æqualis B, non haberet proportionem maiorem ad C., & si esset minor haberet minorem per antecedentes. Et è contrario C, ad A, & B haberet eandem si A & B, essent æquales & si A esset maior quàm B; haberet C ad A, minorem, quod est absurdum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

Si A ad B, & C ad D, eadem sit ratio, qua E ad F: erunt etiam ipsæ eadem inter se.

G	I	H
A	E	C
B	F	D
K	M	L

SInt G, I, H æquemultiplices A, E, C, & k, M, L æquemultiplices ipsarum B, F, D. Quoniam igitur vt E ad F, ita est tam A ad B, quàm C ad D. ergo per def. 6. quando I, est æqualis, maior, vel minor quàm M, erunt quoque G & H æquales ipsis k & L, vel vna deficient, vel vna excedent, & ideo

per

per eandem sextam definitionem A, B; C, D, sunt proportionales, hoc est, vt A ad B, ita est C ad D.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Si fuerit vt A ad B, ita C ad D, & ita E ad F, &c. erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes, & vna ad vnam v.g. vt A ad B.

G	H	I
A	C	E
B	D	F
K	L	M

SVmantur G, H, I ęquemultiplices antecedentium, & k, L, M vtcunque ęquemultiplices consequentium: ita vt per primam huius tam sint multiplices G, H, I, ipsarum A, C, E simul, quàm est G ipsius A; & k, L, M ipsarum B, D, F ita multiplices, vt k ipsius B. Deinde quoniam rationes A ad B, C ad D, E ad F, sunt eædem; ergo quando G, est æqualis, maior, vel minor, quàm k, erit etiam H, & I ęqualis, maior, vel minor quam L & M. Atque adeo quando G maior est, minor, vel æqualis ipsi k, erunt omnes G, H, I maiores, minores, vel ęquales omnibus k, L, M. Sunt autem G, & G, H, I. æquemultiplices A, & A, C, E. & k, & K L, M ęquemultiplices B, & B, D, F. ergo per def. 6. vt A ad B, ita sunt omnes A, C, E, ad omnes B, D, F.

PRO-

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Si A ad B eandem rationem habuerit quam C ad D; at C ad D, maiorem quam E ad F: etiam A ad B, habebit maiorem, quàm E ad F.

G H I
A C E
B D F
K L M

SVmptis enim æquemulti-plicibus, vt in præcedenti; erit per def. 6. G, semper maior quam K. quando H, maior est quam L: at per octauam definitionem, quando H, maior est quam L, non semper I est maior quam M. Ergo etiam I, potest esse non maior quam M, quando G maior est quam K, & ideo per eandem defin. 8. maior erit ratio A ad B, quam E ad F.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Vt A ad B, ita sit C ad D: Dico A & B, vel vna esse æquales ipsis C, D, vel vna excedere, vel vna deficere.

A B C D

EXistente enim A, v. g. maiore ipsa C, ratio A ad B maior est, quam C ad B, per 8. huius. Sed vt A ad B, ita est C ad D. Ergo maior est ratio C ad D, quam C ad B;

B; ideoque per 10. maior erit B, quàm D. simillima est ratiocinatio in reliquis.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes A, B, cum æquemultiplicibus C, D; sunt in eadem ratione.

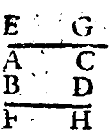
Sint enim exempli gratia in C, tres partes æquales ipsi A, nimirum E, F, G. Erunt ergo totidem in D, nempe H, I, k, æquales ipsi B; vtque A ad B, ita erit E ad H, F ad I, & G ad k; & per 12. vt E ad H, hoc est vt A ad B, ita erunt omnes E, F, G, ad omnes H, I, K, hoc est, ita erit C, ad D.

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Ratio alterna.

Vt A, ad B, ita sit C ad D: Dico permutando vt A ad C: ita esse B ad D: & hoc quãdo omnes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis.

Sint

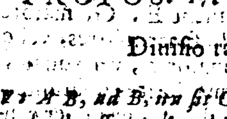


SInt E, F æquemultiplices ipsarum A, B; & G, H vtcunque æquemultiplices ipsarum C, D. Ergo vt A ad B, ita erit per antecedentem, E ad F; & vt C ad D, ita G ad H; per 11. vt E ad F, ita G ad H; & per 14. E & F, erunt vel vna æquales ipsis G, H, vel vna excedent, vel vna deficient, perque def. 6. vt A ad C, ita erit B ad D, sunt enim E, F æquemultiplices antecedentium, & G, H, æquemultiplices consequentium.

PROPOS. 17. THEOR. 17.

Diuisio rationis.

Vt AB, ad B, ita sit CD, ad D: Dico diuidendo esse vt A, ad B, ita C ad D.



SVmantur E, F, G, H, omnes æquemultiplices ipsarum A, B, C, D. eritque per primam huius aggregatum EF tam multiplex totius AB, quam est E ipsius A; & GH; tam multiplex totius CD, quam G, ipsius C. Sed E & G, sunt æquemultiplices ipsarum A, C. Ergo etiã EF, & GH, sunt æquemultiplices tota-

rum AB, CD. Sint quoque aliæ I, K, earundem B, D æquemultiplices. ergo per secundam etiam F, & H, K, erunt earundem B, D, æquemultiplices. Cum igitur E F, G H, sint æquemultiplices antecedentium A B, CD, & FI, HK, consequentium B D. ergo per def. 6. EF, & G H, vel vna erunt æquales, vel vna deficient, vel vna excedent multiplices FI, HK. Quando autem EF, & G H sunt maiores quàm F I, H K, tunc demptis communibus F, H, remanent E, G, maiores quam I & K; quando sunt minores, vel æquales, remanent maiores, vel æquales. suntque E, G æquemultiplices ipsarum A, C, & I, K ipsarum B, D, ergo per eandem def. 6. erit vt A ad B, ita C ad D.

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Compositio rationis.

Vt A B, ad B C, ita sit D E, ad E F: Dico componendo, vt A C, ad B C, ita esse D F, ad E F.

Sint

SIn minus sit vt A C, ad B C, ita D F, ad F G, minorem EF. Ergo diuidendo vt AB, ad B C, ita erit D G, ad G E. Sed ita ponebatur etiam DE, ad EF. ergo vt DE, ad E F, ita erit DG, ad G F. Sed prima D E, minor est quam D G. ergo tunc per 14. huius etiam E F, minor est quam GF, quod est absurdum. Quod si vt AC, ad BC, ita esset D F, ad F G, maiorem ipsa EF, sequeretur EF, esse maiorem GF, quæ ponebatur maior.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

Vt tota A B, ad totum C D, ita sit ablata A, ad ablatum C: Dico ita quoque esse reliquam B, ad reliquam D.

A B C D

ERit enim per 16. permutãdo vt AB, ad A, ita C D, ad C; & diuidendo vt B ad D, ita A ad C, vel A B ad C D.

Conuersio Rationis.

Coroll. Vt AB ad B, ita sit C D ad D: ergo diuidendo vt A ad B, ita erit C ad D; & conuertendo, vt B ad A, ita D ad C; & componendo vt B A ad A, ita D C ad C, & hoc est argumentari per conuersionem rationis.

PROPOS. 20. THEOR. 20.

Vt A ad B, ita ſit D ad E; & vt B ad C, ita E ad F: Dico primas A; D, vel eſſe vna æquales extremis C, F; vel maiores, vel minores.

A B C
D E F

QVando enim A, C, ſunt æquales, tunc A & C habent eandem proportioné ad B. Sed vt A ad B, ita eſt D ad E, & vt C ad B, ita eſt conuertendo F ad E. ergo etiam vt D ad E, ita eſt F ad E: & idcirco per 9. D, & F, ſunt æquales. ſimilis eſt ratio in reliquis caſibus.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

Vt A ad B ita ſit E ad F; & vt B ad C, ita D ad E: Dico iterum A & D, vel vna eſſe æquales extremis C, F, vel vna maiores, vel vna minores.

A B C
D E F

QVando A maior eſt quam C, tunc A ad B habet maiorem proportionem quam C ad B; ſed vt A ad B, ita eſt E ad F; & vt C ad B, ita eſt conuertendo E ad D. ergo E ad F, habet maiorem rationem quàm E ad D, & ideoque per

10.

10. D, maior est quam I. & ita de reliquis casibus.

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Aequalitas ordinata.

Sit rursus vt in 20. vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F: ita vt proportio sit ordinata etiam in pluribus terminis. Dico ex æqualitate ordinata, vt A ad C, ita esse D ad F.

A B C N   D E F O
G I L   H K M

Ipsarum A, D, sint æquemultiplices G H; ipsarum B. E æquemultiplices I, K; & L, M, æquemultiplices ipsarum G F. Ergo per 4. vt G ad I, ita est H ad K; & vt I ad L, ita K ad M; & per 20. primæ G, H, erunt vna æquales, vel maiores, vel minores extremis L, M. & ideo per 6. defin. vt A ad C, ita erit D ad F.

Quod si præterea, vt C ad N, ita fuerit F ad O, sequeretur primo per demonstrationem præmissam, vt A ad C, ita esse D ad F. & quia vt A ad C, ita est D ad F, & vt C ad N, ita F ad O. ergo per eandem erit iterum, vt A ad N, ita D ad O &c.

PROPOS. 23. THEOR. 23.

Aequalitas perturbata.

Vt A ad B, ita sit E ad F; & vt B ad C, ita sit perturbate D ad E: Dico ex aequalitate perturbata, vt A ad C, ita esse D ad F.

A B C N   O D E F
G H K   I L M

Sint G,H,I, aequemultiplices trium A,B,D, & K, L, M, aequemultiplices reliquarum. Ergo per 15. vt A ad B, ita est G ad H; & vt E ad F, ita L ad M: sed vt A ad B, ita est E ad F. ergo vt G ad H, ita est L ad M. Item per quartam vt H ad K, ita est I ad L. Cum ergo vt G ad H, ita sit L ad M; & vt H ad K, ita I ad L. ergo per 21. G & I, vel vna erunt aequales ipsis K, M, vel maiores, vel minores. & per def. 6. vt A ad C, ita erit D ad F. & si vt C ad N, ita foret alia O ad D, &c. sequeretur eodem modo, vt A ad N, ita esse O ad F.

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Vt A ad B, ita sit C ad D; & vt E ad B, ita F ad D: Dico, vt A E simul, ad B, ita esse C F simul ad D.

Nam

A E C F
B D

NAm conuertendo, erit quoque vt B ad E, ita D ad F, & sic A, B, E, & totidem C, D, F, erunt ordinatè proportionales. Quare vt A ad E, ita erit per 22. C ad F, & Componendo vt A E ad E, ita C F ad F. & sic erunt iterum tres AE, E, & B, & tres C F, F & D, ordinatè proportionales, iterumque per 22. vt A E ad B, ita erit CF ad D.

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines A B, C D, A, C, proportionales fuerint & A B maxima, ideoque C minima: maxima, & minima simul, erunt reliquis maiores.

COncipiantur tertia A & quarta C vt partes primæ A B, & secundæ C D. Cum igitur sit vt A B ad C D, ita ablata A ad ablatam C; erit per 19. reliqua B ad reliquam D, vt tota AB ad totam C D. sed A B ponitur maior CD. ergo per 14. B erit maior D. Additis ergo A, C; erunt A, B, C, maiores quam A, C, D.

Propositiones ab alijs additæ.

PROPOS. 26. THEOR. 26.

Ratio A ad B, sit maior ratione C ad D: Dico, conuertendo B ad A, minorem esse D ad C.

A B C D
E

Nam vt C ad D, ita fit E ad B: eritque etiã ratio A ad B, maior ratione E ad B; ideoque per 10. A maior quàm E; & per 8. ratio B ad A, minor quam B ad E, hoc est, quam D ad C.

PROPOS. 27. THEOR. 27.

Ratio A ad B, sit maior ratione C ad D: Dico permutando A ad C, maiorem esse B ad D.

A B C D
E

Sit iterum vt C ad D, ita E ad B: eritque vt in præcedente A, maior quàm E. Quare maior erit ratio A ad C, quam E ad C. sed vt E ad C, ita est permutando B ad D. ergo maior est A ad C, quam B ad D.

PROPOS. 28. THEOR. 28.

Ratio A ad B, maior sit ratione C ad D: Dico, componendo A B, ad B, maiorem esse C D, ad D.

A B   C D
E

VT C ad D, ita sit E ad B; eritque irerũ A maior quàm E;& AB maior quam E B; & per 8. ratio A B ad B, maior ratione EB ad B, hoc est, ratione CD ad D, quia componendo vt EB ad B, ita est C D ad D.

PROPOS. 29 THEOR. 29.

Ratio A B ad B, sit maior ratione C D ad D: Dico, diuidendo A ad B, maiorem esse C ad D.

A B   C D
E

VT C D ad D, ita sit E B ad B: eritque A B maior quàm E B; & dempta communi B, erit A, maior quam E, & per 8. ratio A ad B, maior ratione E ad B, hoc est C ad D, quia diuidendo vt C ad D, ita est E ad B.

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Ratio A B ad B, sit maior ratione C D ad D: Dico, per conuersionem rationis, AB ad A, minorem esse C D ad C.

A B C D

NAm diuidẽdo per 29. erit quoque A ad B maior, quam C ad D; & conuertendo per 26. B ad A, minor quàm D ad C; & componendo per 28. AB ad A, minor C D ad C.

PROPOS. 31. THEOR. 31.

Ratio A ad B, sit maior D ad E; & B ad C, maior E ad F: Dico ex æqualitate ordinata, A ad C, maiorem esse, D ad F.

A D
B E
C F
G
H

VT E ad F, ita sit G ad C; & vt D ad E, ita H ad G. Quoniam igitur B ad C, maior est quam E ad F, seu G ad C; erit B maior G; & ratio A ad G, maior ratione A ad B. est autem A ad B, maior ratione D ad E, hoc est H ad G. ergo A ad G, maior est ratione H ad G; & A maior quam H. Quare ratio A ad C, maior est ratione H ad C. vt autem H ad C, ita vt:

ex

ex æqualitate ordinata D ad F. ergo etiam A ad C, maior est ratione D ad F.

Idem verum est in pluribus terminis; possunt enim reduci ad 3. sicut factum est in 22.

PROPOS. 32. THEOR. 32.

Maior sit ratio A ad B, quàm E ad F; & B ad C, maior quàm D ad E; Dico ex æqualitate perturbata, A ad C, maiorem esse ratione D ad F.

A	D
B	E
C	F
G	
H	

VT D ad E, ita sit G ad C, & H ad G, vt E ad F: eritque ratio B ad C, maior ratione D ad E, hoc est, G ad C; ideoque B maior quam G; & ratio A ad G, maior quam A ad B, per 8. Sed hæc maior est quam E ad F, seu H ad G. ergo A ad G, multo est maior ratione H ad G, & A maior quam H, & ideo ratio A ad C, maior ratione H ad C. Sed vt H ad C, ita est ex æqualitate D ad F. ergo A ad C, maior est ratione D ad F.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Ratio totius AB ad totam CD, maior sit ratione ablatæ A, ad ablatam C; Dico ratio-

tionem reliqua B ad reliquam D, maiorem esse totius ad totam.

A B C D

NAm permutãdo per 27. erit maior ratio A B ad A, quam C D ad C; & per conuersionem rationis, hoc est per 30. ratio A B ad B, minor ratione C D ad D; iterumque permutando A B ad C D, minor ratione B ad D.

PROPOS. 34. THEOR. 34.

Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliæ D, E, F, ipsis numero æquales, sitque maior ratio A ad D, quam B ad E; item B ad E, maior quam C ad F: dico rationem A B C ad omnes D E F maiorem esse ratione B C ad E F; minorem quam A ad D; & maiorem quam C ad F.

A D
B E
C F

CVm enim maior sit A ad D, quam B ad E; erit per 27. permutando maior A ad B, quam D ad E; & componendo per 28. A B ad B, maior quam D E ad E; & iterum permutando, maior A B ad D E, quam ablatæ B ad ablatam E. Quare per 33. reliquæ A ad reliquam D, maior erit quam A B ad D E. Eademque ratione, erit B ad E, maior quam totius B C ad

totam

totam EF. multo igitur maior erit A ad D, quam BC totius ad totam E F; & permutando A ad BC, maior quam D ad EF: & componendo ABC ad BC, maior quam D E F ad E F. & rurſus permutando omnium ABC ad omnes D E F, maior quam B C ad EF, quod eſt primum.

Cumque ABC ad DEF ſit maior quam BC ad EF, erit per 33. reliqua A ad reliquam D. maior quam totius ABC, ad totum DEF, quod eſt ſecundum.

Rurſus ex eo quod ratio B ad E, maior eſt quam C ad F, ſequitur permutando B ad C, eſſe *maiorem* E ad F; & componendo totius BC, ad C, maiorem totius EF ad F. & *rurſus* permutando BC ad EF, maiorem C ad F. eſt autem ratio ABC ad D E F, *maior quam* B C *ad* EF, *vt oſtendimus.* multo ergo maior erit A, B, C ad D, E, F, quam C ad F, quod eſt tertium.

A	D
B	E
C	F
G	H

Iam vero ſit quoque C ad F, maior quam G ad H. Eritque per demonſtrata maior ratio B ad E, quam B C G ad E F H; multo igitur maior A ad D, quam B C G ad EFH; & permutando A ad B C G, maior quam D ad E F H, & componendo maior ABCG ad BCG, quam DEFH ad EFH: & permutando ABCG ad DEFH, maior quam B CG ad EFH, quod eſt primum.

Cum-

Cumque sit maior ratio totius ABCG ad totam DEFH, quam ablatæ B C G ad ablatam E F H; erit & reliquæ A ad reliquam D, maior totius ABCG ad totam DEFH, quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus demonstratum est, maior est BCG ad E F H, quam G ad H, & maior A B C G ad D E F H, quam B C G ad EFH: multo maior erit A BC G ad DEFH, quam vltimæ G ad vltimam H, & ita de pluribus.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

1 SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ angulos angulis habent æquales, & circa ipsos latera lateribus proportionalia.

2 Reciprocæ sunt, cum in vtraque antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

3 Linea v. g. A B, secta erit media & extrema ratione cum tota A B cum partibus A C, C B fuerint continuè proportionales.

A. C B

4 Altitudo figuræ, est linea perpendicularis, à vertice in basim ducta.

5 Ratio duarum magnitudinum dicitur composita ex tot rationibus, quot inter easdem continuantur.

A B C D hoc est, si inter A, C intercedat B; propor-

tio

ratio A ad C dicitur composita, ex ratione A ad B, & B ad C; siue huiusmodi rationes interiectæ sint eædem, siue non. Item, ratio A ad D componi dicitur, ex rationibus A ad B, B ad C, & C ad D. propterea quod dictæ rationes inter terminos A, D, continuentur per interiectos terminos B, C.

Defin. 10. Libri 5.

A B C D

QVando omnes proportiones interiectæ sunt eædem; tunc ratio A ad C dicitur per cõpendium esse duplicata proportionis A ad B: eo quod eadem ratio sit bis continuata per communem terminum B; & A ad D, dicitur triplicata eiusdem; quia ter continuatur per terminos B, C. &c.

Scholium.

IN duabus istis defin. explicandis multus quidem fuit Clauius, non tamen superfluus. Quinta enim, quæ definit compositionem rationum, suæ debuit restitui integritati, & quorundam expositiones falsæ fuere detegendæ, & reijciendæ. Nam, quod in vulgari defin. habetur, denominatorem rationis compositæ, fieri ex multiplicatione denominatorum rationum cõponenponentium, non est Definitio, sed Theorema; neque eo in sensu vsurpatur ab Euclide, alijsque Geometris, vt videre est ad propositionem 23. in qua ostenditur, rationem parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum, quæ sunt circa angulos æquales, continuando dictas rationes componentes in tribus terminis, & demõstrando rationem primi ad tertium, quam Euclides per defin. 5. vel esse compositam ex intermedijs, eandem esse cum ratione, quam habet parallelogrammum ad parallelogrammum. Vnde manifestè colligitur defin. compositionis vulgarem non esse ex sententia Euclidis positam, sed ab alio aliquo immutatam. Ex sensu enim compositionis vero, non potest aliud inferri, nisi quod rationes componentes positæ inter duos terminos habentes dictam rationem compositam, possint continuari, saltem eo eo ordine quo pronunciantur. Quod autẽ interponi possint ad libitum, videtur potius petendum à Theoremate peculiari, quam à definitione generali. Atque hoc est quod hic peculiari lemmate demonstrandum suscepi.

Lemma.

SI ratio v.g. A ad B dicatur composita, v.g. ex rationibus a. e. i: Dico eandem componi ex eisdem quocunque ordine positis. Hoc est, inter duos terminos A B licitum esse continuare dictas rationes toties, quoties possunt inter se mutare locum. iuxta Regulam ad initium Sphere positam, vbi Clauius disputat de numero, & ordine Elementorum. estque sequens.

Regula mutationnm.

SVmantur tot numeri in serie naturali, quot sunt res propositæ: multiplicati enim inuicem producunt summam mutationum: quæ pro duabus rebus est 2. pro tribus 6 pro quatuor 24. pro quinque 120. &c. ut videre est in calculo hic adiecto; & manifestius in quatuor exēplis ad singulas mutationes extensis, quorum consideratio, & cōparatio plurimum facit ad abbreuiandam demonstrationem.

	Mutat.	Ser. nat.	Res.
		1	A
pro duabus	2	2	B
pro tribus	6	3	C
pro quatuor	24	4	D
pro quinque	120	5	E
	&c.	&c.	&c.

Pri-

Primum exemplum duarum rerum.

	a		e
1	a e	2	e a

Secundum exemplum trium rerum.

	a		e		i
1	a e i	3	e a i	5	i a e
2	e i e	4	e i a	6	i e a

Tertium exemplum quatuor rerum.

	a		e		i		o
1	a e i o	7	e a i o	13	i a e o	19	o a e i
1	a e o i	8	e a o i	14	i a o e	20	o a i e
3	a i e o	9	e i a o	15	i e a o	21	o e a i
4	a i o e	10	e i o a	16	i e o a	22	o e i a
5	a o e i	11	e o a i	17	i o a e	23	o i a e
6	a o i e	12	e o i a	18	i o e a	24	o i e a

Quar-

Quartum exemplum quinque rerum.

	a		e		i		o		u
1	a e i o u	25	e a i o u	49	i a e o u	7	o a e i u	9	u a e i o
2	a e i u o	26	e a i u o	50	i a e u o	74	o a e u i	98	u a e o i
3	a e o i u	27	e a o i u	51	i a o e u	75	o a i e u	99	u a i e o
4	a e o u i	28	e a o u i	52	i a o u e	7	o a i u e	100	u a i o e
5	a e u i o	29	e a u i o	53	i a u e o	77	o a u e i	101	u a o e i
6	a e u o i	30	e a u o i	54	i a u o e	78	o a u i e	102	u a o i e
7	a i e o u	31	e i a o u	55	i e a o u	79	o e a i u	[illegible]	u e a i o
8	a i e u o	32	e i a u o	56	i e a u o	80	o e a u i	104	u e a o i
9	a i o e u	33	e i o a u	57	i e o a u	81	o e i a u	10	u e i a o
10	a i o u e	34	e i o u a	58	i e o u a	82	o e i u a	106	u e i o a
11	a i u o e	35	e i u a o	59	i e u a o	83	o e o a i	107	u e o a i
12	a i u e o	36	e i u o a	60	i e u o a	84	o e u i a	108	u e o i a

13	a o e i u	37	e o a i u	61	i o a e u	85	o i a e u	109	u i a e o
14	a o e u i	38	e o a u i	62	i o a u e	86	o i a u e	110	u i a o e
15	a o i e u	39	e o i a u	63	i o e a u	87	o i e a u	111	u i e a o
16	a o i u e	40	e o i u a	64	i o e u a	88	o i e u a	112	u i e o a
17	a o u e i	41	e o u a i	65	i o u a e	89	o i u a e	113	u i o a e
18	a o u i e	42	e o u i a	66	i o u e a	90	o i u e a	114	u i o e a
19	a u e i o	43	e u a i o	67	i u a e o	91	o u a e i	115	u o a e i
20	a u e o i	44	e u a o i	68	i u a o e	92	o u a i e	116	u o a i e
21	a u i e o	45	e u i a o	69	i u e a o	93	o u e a i	117	u o e a i
22	a u i o e	46	e u i o a	70	i u e o a	94	o u e i a	118	u o e i a
23	a u o e i	47	e u o a i	71	i u o a e	95	o u i a e	119	u o i a e
24	a u o i e	48	e u o i a	72	i u o e a	96	o u i e a	120	u o i e a

In primo exemplo, videre eſt duas ſeries in tranſuerſum, notatas literis a, e, & ſub ſingulis mutationes ſingulas, & duas in vniuerſum, quia ſingulæ literæ non poſſunt occupare primum locum ſæpius, quam ſemel.

In ſecundo exemplo, ſunt tres ſeries, in tranſuerſum, denominatæ à tribus literis a, e, i, & ſub ſingulis ſunt duæ mutationes. quia ſingulæ literæ poſſunt occupare primum locum bis, hoc eſt toties quòd in primo exemplo erat mutationes in vniuerſum. vnde in ſecundo exemplò ſunt mutationes 6.

In tertio exemplo, ſunt quatuor ſeries tranſuerſæ denominatæ à quatuor literis a, e, i, o, & infra ſingulas ſunt 6. mutationes, & in vniuerſum 24.

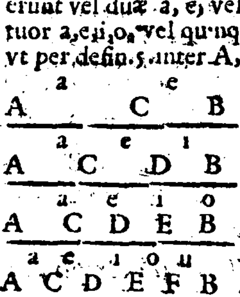
In quarto exemplo, ſunt quinque tranſuerſæ ſeries denominatæ à quinque literis a, e, i, o, u, & ſub ſingulis, mutationes 24. quæ multiplicatæ per quinque faciunt 120. &c.

Altera conſideratio eſt, quod in ſecundo exemplo, primæ duæ literæ ſerierum a, e. In tertio, primæ tres ſerierum a, e, i, & in quarto, primæ quatuor ſerierum a, e, i, o. ſint eædem. licet non eodem ordine poſitæ. & idem verum eſt de poſterioribus literis vltimarum ſerierum, quæ in ſecundo exemplo ſunt iterum duæ a, e, in tertio, tres a, e, i, in quarto, quatuor a, e, i, o.

Postremo. in omnibus seriebus præter literas quæ primum locum occupant, reliquæ sunt eædem cum ijs quæ ponuntur in capite.

Ex his generalibus considerationibus, formatur lemmatis demonstratio, eademque quoad præcipuas partes communis, hoc modo.

Pro omnibus exemplis termini rationis compositæ erunt A, B, & componentes erunt vel duæ a, e, vel tres a, e, i, vel quatuor a, e, i, o, vel quinque a, e, i, o, u, &c. ita vt per defin. 5. inter A, B possint continuari, vel duæ rationes a, e, per vnum terminum intermedium C, vel tres a, e, i, per duos C, D, vel quatuor a, e, i, o, per tres C, D, E, vel quinque a, e, i, o, u, per quatuor C, D, E, F, B.



Demonstratio primi exempli.

1 | a e
| A C B
| e a
2 | G I H

Deinde pro primo exemplo præter terminos A C B, quibus continuantur duæ rationes a, e, continuentur in aliis tribus terminis G, I, H, eædem proportiones ordine mutato, ita vt ratio G ad I, sit e, & ratio I ad H, sit a. Dico rationes A ad B, & G ad H, esse easdem. Cum enim vt A ad C, ita sit I ad H; & sicut C ad B, ita G ad I. ergo per æqualitatem ordinatam, erit quoque vt A ad B, ita G ad H; sed G ad H componitur per defin. 5. ex rationibus e, a. ergo etiam A B, componitur ex eisdem. hoc est, ratio A ad B, componitur, tam ex rationibus a, e, quam ex rationibus e, a.

Demonstratio secundi exempli.

1 | a e i
| A C D B
| e a i
3 | G I K H
| i a e
5 | G I K H

In secundo exẽplo præter terminos ACDB, quibus cõtinuãtur rationes a, e, i. primi casus

casus secundi exempli superius positi, continuentur in alijs quatuor terminis GIKH rationes e,a,i, vt habentur in tertio casu, & rationes i,a.e, vt habentur in quinto.

Quoniam igitur in primo & tertio casu inter AD, & GK continuantur duæ rationes a, e vtcunque; ergo per demonstrationem primi exempli, vt A ad D, ita erit G ad K; vt autem D ad B, ita est K ad H; ergo per æqualitatem vt A ad B, ita erit G ad H,

In quinto vero casu quoniam rationes a, e sunt continuatæ inter posteriores tres terminos IKH; ideo vt A ad D, ita erit I ad H. & quia præterea vt D ad B, ita est G ad I, erit rursus per æqualitatem vt A ad B, ita G ad H. Cum igitur G ad H in tertio casu componatur ex rationibus e, a, i; & in quinto ex rationibus i,a,e, manifestum est eandem rationem A ad B, non solum componi ex a,e,i; sed etiam ex e, a, i; & i,a, e.

Reliqui casus 2. 4. & 6. reducuntur ad tres priores 1,3. & 5. mediante tertia consideratione, ex qua constat in singulis seriebus, primas literas esse easdem, & reliquas quotcunque sint non differre nisi positione. tales sunt in serie a, literæ e, i, in serie e literæ a, i, & in serie i literæ a, e. Quæ sicut in præcedenti demonstratione ex eo quod in 1. & 3. casu componentes a e. e a sunt similes, & reliqua vtrobique est eadem litera i, ostensum est, vt A ad B, ita esse G ad H. ita etiam hic, quoniam in 1. & 2. casu e i, i e sunt similes, & reliqua a, eadem, valet eadem consequentia; hoc est, vt A ad B, ita esse G ad H; si inter A B, per C D, continuentur rationes a, e, i, primi casus; & inter G H, per I & K, rationes a, e, i, 2. casus.

	a	e	i	
1	A	B	C	D
	e	a	i	
3	G	I	K	H
	e	i	a	
4	G	I	K	H

Similiter si per G I K H continuentur rationes e a i, e i a tertij & quarti casus; vt G ad H in 3. casu, ita erit G ad H, in 4. Vt autem G ad H, in 3. casu, ita ostendimus esse A ad B, in primo casu. Ergo etiam vt A ad B, ita erit G ad H, in 4. casu.

Denique in 5. & 6. casu omnia sunt similia, & consequenter manet etiam demonstratum totum secundum exemplum. hoc est, rationem A ad B, componi ex rationibus a e i quocunque ordine positis.

Demonstratio reliquorum exemplorum.

In reliquis exemplis non est alia differentia, quàm quod in ipsis rationes componentes sint plures tribus. Methodus autem demonstrandi est eadem. Rationes enim

enim componentes, quæ habentur in capite singularum serierum, reducuntur ad rationes primo loco propositas, & ad has reliquæ quæ sub ijsdem capitalibus, subijciuntur, non aliter quàm factum est in præcedenti exemplo.

Corollarium.

HVic licentiæ permutandi rationes componentes, puto corollariorum titulo annecti posse non inutiliter nonnulla eòdem spectantia.

Primum est. Compositionis campum patere latissime, vt vt appareant rari qui ipsum peruagentur. Omnis enim ratio proposita quamuis non componatur ex quibuslibet; immo vnam tantum si demas, componitur ex quotlibet & quibuslibet.

a	e	i	o	
A	C	D	E	B

Sint duæ magnitudines A, B, habentes quamcunque rationem, inter quas statuantur quotcunque, & aliæ quæcunque magnitudines eiusdem generis C, D, E. eritque ex vi defin. 5. ratio A ad B composita ex rationibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Neque dubium est, si priores tres fuissent v. g. rationes datæ a e i easdem continuari posse à magnitudine A, per aliquos terminos C D E, vsque ad E, atque ita solum manere postremam rationem o, inter E & B, quæ sola non potest assignari ad arbitrium, sed determinatur eo ipso quod reliquæ sint continuatæ per terminos C, D, E.

2. *Coroll.* Certum est easdem rationes componere easdem, & easdem componi ex eisdem. hoc enim sequitur ex definitione immediate. Quare si ratio A ad B, & F ad G, est eadem, & prior A ad B, sit cōposita ex a e i o, erit etiam F ad G ex ijsdem composita. & vice versa, nulla habita ratione ordinis, quod attinet ad rationes componentes.

a e i o
A C D E B
u a
A L C
i e a o
F H I K G

3. *Coroll.* Et hinc deducitur hæc alia consequentia. Si rationes a e i o per terminos CDE sint continuatæ inter A B; & & inter F G per terminos H I K, fuerint continuatæ eædem; & hoc modo permutatæ i e a o: ita & constet sicut A ad C, ita esse I ad k, vt C ad D, ita H ad I; vt D ad E, ita F ad G; sequitur etiam reliquas E ad B & k ad G esse easdem.

4. *Coroll.* Si a e i o componant rationes A ad B, & F ad G, vt in præcedenti exemplo, abijciaturque vtrinque ratio a, reliquæ non component quidem rationem A ad B, vel F ad G, component tamen aliquam aliam eandem.

5. *Co-*

5. *Coroll.* In eodem exemplo si ratio v. g. A ad C, hoc est ratio a, dicatur composita ex alijs v. g. ex rationibus u a, ita vt ratio A ad L sit ratio u, & L ad C sit a. sequitur non solum rationem A ad B componi ex rationibus u a e i o, sed etiam rationem F ad G. Item si dematur vtrinque ratio a, etiam compositas ex reliquis u e i o esse easdem. quamuis ita composita non sit eadem cum ratione A ad B, vel F ad G. Huiusmodi argumentationem licet videre apud Pappum lib. 7. propos. 142.

6 Parallelogrammum A D cum non occupat totam lineam A B, sicut occupat parallelogrammum A F; dicitur deficere, vel deficiens. Parallelogrammum vero A F, quod occupat AB maiorem A C, dicitur excedere, vel excedens, parallelogrammo C F.

PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula ABC, DEF; item parallelogramma CG, EH, inter easdem parallelas, eiusdemque altitudinis; sunt inter se vt basis EC, ad basim EF.

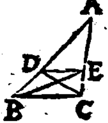
SInt BI, IK, k L æquales BC, & FM, MN æquales EF: hoc est BL, FN sint basium multiplices; nectanturque AI, AK, AL, DM, DN; Eruntque triangula ABI, AIk, AkL per 38. primi æqualia ipsi ABC, & simul tam multiplicia eiusdem, quam est BL multiplex basis BC. similiter, triangula DFM, D M N, tam erunt multiplicia trianguli D E F, quàm est basis FN, basis EF Quãdo autem BL, æqualis est FN, semper triangulum A B L est æquale triangulo DF N; & quando B L maior est quam F N, etiam triangulum est maius triangulo; & quando minus, minus. Quare per 6. defin. vt B C, ad E F, ita est triangulum A BC, ad triangulum D E F.

Parallelogramma autem C G, EH sunt dupla triangulorum A B C, DEF per 41. primi. ergo per 15. quinti, vt triangulum ad triangulum, hoc est, vt basis B C, ad basim E F, ita est parallelogrammum ad parallelogrammum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

In triangulo A B C, DE, sit parallela B C: Dico latera A B, AC, secta esse proportionali-

naliter in D & E: & quando secta sunt proportionaliter; rectam D E esse parallelam B C.

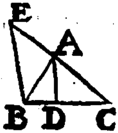


DVctæ enim B E, C D faciũt per 37. primi, æqualia triangula DEB, E D C; & ideo per 7. quinti habent eandem rationem ad triangulum ADE. Sed ratio D E B, ad A D E, est vt basis BD, ad basim DA: quia triangula EBD, EDA, sunt eiusdem altitudinis: ratio EDC, ad ADE, est vt basis C E, ad AE, vt demonstratum est in præcedenti. Ergo per 11. quinti vt D B, ad D A, ita est C E ad E A.

Vice versa, si vt AD ad DB, ita sit AE ad EC, habebit triangulum A D E ad triangula DEB, E D C rationem eandem. & idcirco eadem triangula DEB, EDC, erunt æqualia. & D E, B C parallelæ per 39. primi.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Recta A D secet angulum B A C, bifariam: Dico vt A B ad A C, ita esse segmentum BD ad DC. Et vice versa, si vt AB ad A C, ita sit B D ad D C: Dico A D secare angulum B AC bifariam.



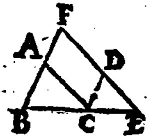
SIt BE parallela AD, & occurrat C A in E. Ergo per 29. primi, anguli AEB, ABE sunt æquales æqualibus DAC, DAB: & ideo per 6. primi A B, A E sunt æquales. Vt autem A E ad AC, ita est per 2. BD ad DC. ergo etiam vt A B ad A C, ita est B D ad D C.

Deinde supposita eadem constructione, si sit vt BD ad DC, ita AB ad A C; cum per secundam, etiam A E ad A C sit vt B D ad DC: erit quoque vt AB ad AC, ita A E ad eandem A C; & idcirco A B, AE, sunt æquales, & anguli ad basim B E æquales. Est autem propter parallelas A D, E B, D A C, æqualis ipsi A E B, & D A B ipsi A B E. ergo etiam illi sunt æquales.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Triangula A B C, D C E, sint æquiangula: Dico circa æquales angulos A, D latera A B, AC esse proportionalia lateribus D C, D E, &c. & homologa subtendere angulos æquales.

La-

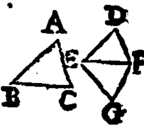


LAtera B C, C E adiacentia æqualibus angulis, continuentur in eadem recta BCE; ita vt ABC sit æqualis DCE, & ACB, ipsi D E C, sic enim erunt AB, DC, & AC, DE parallelæ; & E D, B A protractæ constituent parallelogrammum C F; eritque A C æqualis FD, AF, ipsi C D, per 34. primi, & per 2. huius erit, vt AB ad AF, hoc est ad C D, ita BC ad CE. & permutãdo vt AB ad BC, ita CD ad CE. item vt BC ad CE, ita est FD, seu CA ad ED; & iterum permutando vt B C ad CA, ita C E ad ED. Denique ex eo quod vt AB ad BC, ita est CD ad CE, & vt BC ad CA, ita CE ad ED, sequitur ex æqualitate ordinata, vt AB ad A C, ita esse C D ad D E. Atque ex hac ipsa demonstratione est manifestum, tam antecedentes terminos, quàm consequentes, hoc est homologos, opponi angulis æqualibus.

Coroll. Constat etiam, parallelam C D, vel A C, abscindere ex toto triangulo F BE, triangulum simile.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

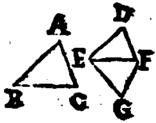
Triangula ABC, DEF habeant latera lateribus proportionalia: Dico latera homologa opponi angulis æqualibus.



Angulis B, C, fiant æquales G E F, GFE: eritque per 32. primi reliquus G æqualis reliquo A, & per 4. huius erunt circa ęquales angulos latera lateribus proportionalia, hoc est, vt AB ad B C, ita erit G E ad E F. Vt autem A B ad BC, ita ponitur esse D E ad E F. ergo etiam vt G E ad E F, ita erit D E ad eandem E F. & ideo per 9. quinti G E, D E erunt æquales. neque aliter demonstrabitur G F æqualis D F, atque ita erunt duo latera GE, G F, æqualia duobus lateribus DE, DF. estque basis E F communis. ergo per octauam primi, non solum angulus D erit æqualis angulo G, sed etiam reliqui reliquis: & quidem illi erunt ęquales, quibus homologa latera opponuntur: & quia GEF est æquiangulum ABC, erunt etiam ABC, DEF dicto modo æquiangula.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

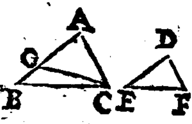
Circa æquales angulos B, & D E F, sint latera proportionalia: Dico triangula esse æquiangula, & angulis æqualibus subtendi latera homologa.



FIat iterum triangulum G E F æquiangulum triangulo ABC, vt in præcedenti, eritque iterum G E æqualis D E. & quia circa æquales angulos D E F, GEF latera D E, E F sunt æqualia lateribus G E, E F. erunt triangula DEF, GEF, penitus æqualia. Sed GEF est ipsi A B C æquiangulum; ergo & D E F. & ideo per 4. huius habebunt etiam reliqua latera circa reliquos angulos proportionalia &c.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

In triangulis ABC, DEF, sint æquales anguli A, D; & latera A C, CB proportionalia lateribus DF, FE, & reliqui anguli B, E sint minores, vel non minores recto: Dico triangula esse æquiangula.



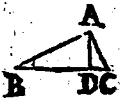
SInt primo anguli E B minores recto, & si fieri potest angulus AGB sit maior angulo F. Facto igitur angulo A C G, æquali ipsi F; erunt duo triangula ACG, DFE æquiangula, & per 4. huius, erit vt D F ad F E, ita A C ad C G. sed vt D F ad F E, ita ponitur A C ad C B. ergo vt A C ad C G, ita est eadem AC ad CB. & propterea C G, CB, erunt per 9. quinti æquales, & anguli C BG, CGB, æquales per 5. primi. Est autem B acutus, sicut est E. ergo etiam C G B. reliquus vero C G A, quem ostendimus æqualem acuto E, erit obtusus. quod est absurdum.

Si autem anguli B, E ponerentur esse non minores recto; essent in triangulo isoscelio C B G ad basim duo anguli obtusi, vel recti; quod est similiter absurdum. Quare necesse est angulum ACB æqualem esse angulo F: & per præcedentem, triangula esse æquiangula, & similia.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

In triangulo ABC sit angulus A rectus, & AD, ad basim perpendicularis: Dico triangula ADB, ADC esse similia toti.

Est

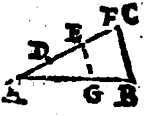


EST enim rectus A D B, æqualis recto BAC; & B est communis. ergo reliquus æqualis est reliquo. similiter A D C, æqualis est B A C; & C communis. ergo.

Coroll. Hinc sequitur, per quartam huius, B D, D A, D C, esse continue proportionales, & A B esse mediam proportionalem inter CB, BD; & A C mediam inter B C, C D.

PROPOS. 9. PROBL. 1.

A data recta A B, partem imperatam auferre. v.g. duas tertias.

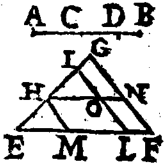


SVmantur in alia A C, tres partes æquales AD, DE, EF, & duæ partes tertiæ sint A D E. Ducta igitur FB, &E G, ipsi FB parallela; erit etiam AG duæ tertiæ totius AB, per 2. huius, quia vt A F ad A E, ita est A B ad A G.

PROPOS. 10. PROBL. 2.

Secta AB vtcunque in C, D: aliam EF similiter secare.

Recta



RECtæ EH, HI, IG, sumantur æquales partibus AC, C D, DB; & per H, I ducantur parallelæ ipsi G F; eritque per secundam huius, vt E H ad H I, ita E M ad M L; & ducta alia H O N parallela ipsi E F, vt H I ad IG, ita erit HO ad ON, hoc est ML ad LF, quia per 34. primi H O, O N sunt æquales M L, LF.

PROPOS. 11. PROBL. 3.

Datam rationem A B ad AC, continuare.

IPsi AC sumatur ęqualis BD, ipsique BC agatur parallela D E: eritque CE tertia proportionalis, quia vt A B ad B D, hoc est, ad AC, ita est per 2. huius A C ad ad CE.

PROPOS. 12. PROBL. 4.

Tribus datis AB, B C, AD, quartam proportionalem adiungere.

IPsi B D agatur parallela C E; eritque vt A B ad BC ita A D ad D E.

PRO-

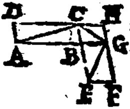
PROPOS. 13. PROBL. 5.

Inter datas AB, BC, mediam proportionalem inuenire.

CIrca AC compositam ex AB, BC describatur cẽtro E, semicirculus: Perpendicularis enim BD erit per corollarium octauæ huius, media proportionalis in AB, BC.

PROPOS. 14. THEOR. 9.

Parallelogramma BD, BF sint æqualia, & anguli ad B sint æquales: Dico latera esse reciprocè proportionalia, vt AB ad BG, ita esse BE ad EC. & si latera circa æquales angulos dicto modo sint proportionalia: parallelogramma æqualia esse.



COniungantur parallelogramma ad angulum B, ita vt AB, BG sint continuę, hac enim ratione erunt etiam BE, BC continuæ per 14. primi. Ex concursu autem DC, FG in H, fit tertium parallelogrammum BH, eiusdem altitudinis cum parallelogrammis BD, BF: Et idcirco per primam huius, vt BD

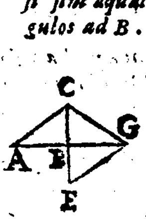
a.d.

ad B H, ita erit AB ad BG: vtque BF ad B H, ita BE ad BC. Sed BD & BF, ad B H, est vna eademq; proportio per 7. quinti:, ergo etiam vt AB ad B G, ita erit B E B C.

Vice versa, si fuerit vt AB ad B G, ita BE ad BC; habebunt BD, B F, eandem proportionem ad B H; ideoque BF, B,D, erunt æqualia per 9. quinti.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Eadem est ratio de triangulis A B C, B G E, si sint æqualia, habeantque æquales angulos ad B.

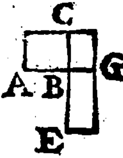


POssunt enim copulari ad angulum B, vt parallelogramma, & referri ad tertium triangulum B G C, vt videre est tam in superiori figura, quam in ista.

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint; æqualia erunt parallelogramma rectangula quæ fiunt ab intermediis, & extremis. Et si hæc sint æqualia, quatuor lineæ erunt proportionales.

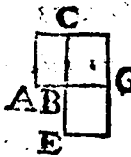
Hæc



HAec propositio nullo negotio reducitur ad decimamquartam. Si enim AB, BG, BE, BC sint proportionales; iam est demõstratum BD, BF, esse æqualia: &, si BD, BF, sint æqualia, quatuor rectas AB, BG, BE, BC, esse proportionales.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si fuerint tres proportionales; rectangulum sub extremis erit æquale quadrato intermedia. & si hoc illi fuerit æquale, latus quadrati erit medium proportionale inter latera rectanguli.

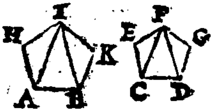


HAec non differt à præcedenti, si in præcedenti duæ intermediæ intelligantur esse æquales; ita vt quatuor proportionales sint AB, BG, BE, BC; & BG, BE, sint æquales.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

Super datam AB, rectilineo CDGFE simile rectilineum describere.

Di-



DIstribuatur rectilineum datũ in sua triangula, & super AB fiat primo triangulum A B I æquiangulum triangulo C D F: tum super A I, & B I fiant alia A I H, B I K ęquiangula triangulis CFE, D F G &c. ita vt sicut F C D, FCE constituunt totum angulum C, ita IAB, IAH constituant totum A, & ita de reliquis: Dico etiam circa eosdem angulos, latera esse proportionalia. Per quartam enim huius vt EC ad CF, ita est HA ad A I, & vt C F ad C D. ita I A ad A B, ergo ex æqualitate ordinata, vt H A ad A B, ita & E C ad C D &c.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SIt ABC simile triangulo DEF, & latera homologa sint BC, EF; sitque tertia proportionalis B G; ita vt iuxta definitionem 10. quinti, proportio B C ad B G, sit duplicata proportionis BC ad EF: Dico rationem triãguli ABC ad DEF, esse rectæ BC, ad BG.

Quan-

Quando triangula sunt æqualia, hoc est, quando B C, E F, necnon tertia proportionalis B G sunt æquales, res est manifesta.

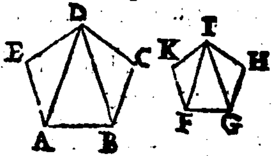
Quando vero latera B C, E F sunt inæqualia, demonstratur, hoc modo. Iungatur A G. Quoniam igitur angulus B est æqualis E; & propter similitudinem triangulorum, vt AB ad BC, ita est DE ad EF; & permutando vt AB ad DE, ita B C ad E F; hoc est EF ad B G: erunt circa angulos æquales B E, latera reciproce proportionalia. Quare per 15. triangula A BG, D E F erunt æqualia; & per 7. quinti, vt triangulum ABC, ad ABG, ita erit idem triangulum ABC ad D E F. vt autẽ ABC ad A B G, ita est per 1. huius, B C ad B G. ergo ABC ad D E F erit, vt B C ad B G.

Coroll. Hinc sequitur si tres lineæ A, B, C, fuerint proportionales; vt prima ad tertiam, ita esse triangulum A super primam, ad simile triangulum B supra secundam.

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia Poligona A B C D E, F G H I K, in similia triangula resoluuntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona

gona habent rationem duplicatam laterum homologorum.



Nam eo ipſo quo Polygona ponuntur eſſe ſimilia, neceſſe eſt & angulos eſſe æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia. Quare vt D E ad E A, ſic erit IK ad K F; ideoque per 6. triangula A D E, F I K ſimilia, & anguli E D A, EAD, æquales angulis K I F, KFI. eſt autem totus A, æqualis toti F; ergo & reliquus DAB, æqualis reliquo IFG. Iam ſic, vt AD ad AE, ita eſt IF ad FK; & vt AE ad AB, ita FK ad FG. ergo ex æqualitate, erit quoque vt AD ad AB, ita I F ad ad F G, ideoque rurſus per 6. triangula DAB, I FG, ſimilia. Atque in hunc modum proceditur ad reliqua.

Demum, quoniam omnium iſtorum triangulorum latera homologa ſunt proportionalia, hoc eſt vt AE ad FK, ita AB ad FG; & B C ad GH, &c. ipſaque triãgula ſimilia habeant per 19. rationem duplicatam laterum homologorum; manifeſtum eſt, etiam ipſa triangula eſſe proportionalia. hoc eſt, vt A D E ad FIK, ita A BD ad FGI, &c. Quare per 12. quinti, vt vnum triangulum v.g. ADE ad F I k, ita

erunt

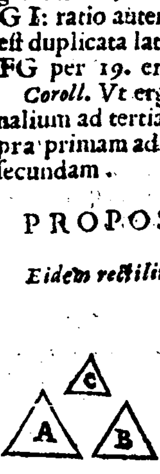
erunt omnia simul ad omnia. & ideo triangulum v. g. ADE erit homologum polygono ACE, & triangulum FIk, homologum polygono FHK.

Tertia deniq; propositionis pars sequitur ex dictis. Polygonum enim ad polygonum est, vt triangulum, A B D, ad F G I: ratio autem trianguli ad triangulum, est duplicata laterum homologorum A B, FG per 19. ergo & polygonorum.

Coroll. Vt ergo prima trium proportionalium ad tertiam, ita est polygonum supra primam ad polygonum simile supra secundam.

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Eidem rectilineo similia; sunt inter se similia.



Nam similia eidem, sunt eidem æquiangula. Ergo A, B æquiangula ipsi C, sunt æquiangula inter se; ideoque per 4. similia.

PROPOS. 22. THEOR. 16.

Vt A B ad C D, ita sit E F ad G H; sintque I, K rectilinea similia: & L, M similia

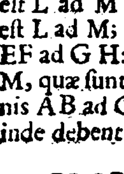
vt

vt libet. Dico I K & L M, esse proportionalia. & vice versa.

PRoportio enim I ad k, est duplicata proportionis A B ad C D, vel EF ad G H, per 19 vel 20. Est autem & ratio L ad M, duplicata eiusdem rationis EF ad G H. ergo vt I ad k, ita est L ad M. Vice versa. si vt I ad K, ita est L ad M; erit quoque vt AB ad CD, ita EF ad G H: quia rationes I ad k, & L ad M, quæ sunt eædem, sunt duplicatæ rationis AB ad CD, & E F ad G H, quæ proinde debent esse quoque eædem.

PROPOS. 23. THEOR. 17.

Parallelogramma æquiangula v.g. C A, C F: habent rationem compositam ex ratione lateris C B ad C G, & ratione lateris C D ad C E.

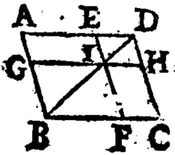


PArallelogrãma CA, CF, componãtur ad angulum C vt in 16. Vtque BC ad CG, ita sit quædam I ad K; & vt C D ad C E, ita K ad L, hoc est rationes laterum sint continuatæ in tribus terminis I, K, L. Ergo per

per defi. 5. ratio cõposita ex ratione laterũ erit ratio I ad L. Dico vt I ad L, ita esse CA ad CF. Nam vt CB ad CG, hoc est vt I ad K, ita est per primam CA ad CH; & vt CD ad CE, hoc est vt k ad L, ita CH ad CF. ergo ex æqualitate, vt I ad L, ita est CA ad CF.

PROPOS. 24. THEOR. 18.

Parallelogramma FG, HE, existentia circa diametrum DB; sunt similia toti AC.

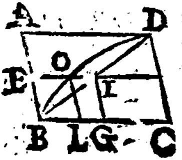


SVnt enim æquiãgula; quia habent cõmunes angulos ad B & D. vide Schol. 34. primi. Deinde per 4. huius vt BA ad AD, ita est BG ad GI. item vt BA ad BD, ita BG ad BI. vt autem BD ad BC. ita est BI ad BF. ergo ex æquo, vt BA ad BC, ita est BG ad BF. eodemque modo demonstrantur reliqua latera circa reliquos angulos esse proportionalia.

PRO-

PROPOS. 26. THEOR. 19.

Parallelogramma similia AC, EG; existant ad communem angulum B: Dico eadem existere circa commune diametrum BID.



SI enim diameter secaret EI, in alio puncto O, esset etiam parallelogrammum LE, simile ipsi AC, per præcedentem, vtque BA ad AD, hoc est, vt BE ad EI; ita esset BE ad EO. & ideo per 9. quinti EI, EO, essent æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 7.

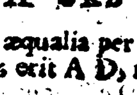
Dato rectilineo A; construere aliud simile, & alteri B, æquale.

PEr vltimam secundi ipsis A, B, fiant æqualia quadrata, quorum latera sint E, F; & vt E ad F, sic fiat CD ad GH; & super GH fiat per 18. figura similis A, dico ipsam

ipsam æqualem esse figuræ B. Nam per 22. vt quadratum E, ad quadratum F, hoc est, vt A ad B, ita est idem A, ad simile rectilineum ipsius G H. Ergo per 9. quinti G H, & B, sunt æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 20.

Super A C semissem totius A B, applicatum sit parallelogrammum A D, ita vt à toto AE deficiat parallelogrammo C E, quod semper est æquale & simile ipsi A D. Deinde ad quoduis aliud segmentum A K, sit applicatum aliud parallelogrammum AG ita deficiens, vt defectus sit parallelogrammum K I, simile ipsi C E, hoc est circa communem diametrum B G D: Dico A G minus esse parallelogrammo A D.

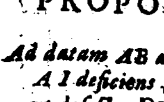


QVando punctum K est inter C, B, tunc parallelogrammum LH, quod per 36. primi est æquale L E, maius est quam GC: quia LE maius est quam G E, & GB, G C, sunt complementa æqualia per 43. primi. Addito ergo L A, erit A D, maius A G.

Quando vero punctum k, est inter A, C; tunc DF, DI sunt æqualia, quia sunt super æqualibus basibus, & D I, D K, æqualia, quia sunt cō-plementa. ergo & D F, D K, sunt æqualia, & GH minus DK; adiectoque communi kH; totum AG, minus toto A D.

PROPOS. 28. PROBL. 8.

Ad datam AB applicare parallelogrammum A I deficiens, & æquale rectilineo C; ita ut defectus PN, sit similis parallelogrammo D. debet autem C non esse maius parallelogrammo A F applicato ad A E, semissem totius A B, & defectum E G, habente similem defectui P N, vel D iuxta præcedentem.

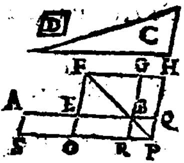


Differentia inter A F, vel E G, & C sit O, ipsique O sit æquale L K, & simile ipsi D, vel E G; sintque Lk, EG, circa cōmunem angulum E F G. ideoque per 26. circa communem diametrum B I F. Dico A I, cuius defectus est P N, similis D esse æquale ipsi C.

Quoniam enim C & O, hoc est, C & Lk, æquantur ipsi EG, necesse est gnomonem K N P L, æquari ipsi C. Sed gnomoni æquale est A I; vt patet, si æqualibus AL, EN, adduntur æqualia complementa E I, I G. ergo A I, est æquale ipsi C.

PROPOS. 29. PROBL. 9.

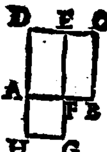
Ad datam rectam AB, dato rectilineo C, applicare parallelogrammum æquale, cum excessu simili ipsi D.



Secta A B, bifariam in E, fiant circa communem angulum F, E G, O H, similia ipsi D & E G, sit applicatū ad E B & O H, sit æquale ipsi E G, & C simul, hac enim ratione gnomon E R Q G, erit æqualis eidem C. Sed gnomoni æquale est S Q, vt patet si æqualibus A O, O B, seu æqualibus AO, BH, addatur commune O Q. Ergo S Q, excedens parallelogrammo R Q, simili D, est æquale rectilineo C.

PROPOS. 30. PROBL. 10.

Rectam A B, secare ratione media & extrema.



Ad AD, latus quadrati A BCD, applicetur per 29. eidem quadrato ęquale rectangulum DG, vt excessus sit quadratum A G. Ablato enim communi A E. remanebit FC, æquale quadrato A G, & per 14. erit vt BC, seu A B, ad AH, ita AH hoc est A F, ad F B.

PROPOS. 31. THEOR. 21.

In triangulo A B C sit rectus A; & E F, G. sint rectilinea similia: Dico E, F, simul, æqualia esse ipsi G.

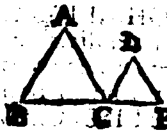
Demissâ enim perpendiculari A D, fiunt B C, CA; C D; necnon B C, BA, B D continuè proportionales per coroll. 8. & per coroll. 19. & 20. vt C D ad BC, ita erit F ad G. item vt BD ad eandem B C, ita E ad idem rectilineum G. Ergo per 24. quinti, vt CD,

BD

BD simul, ad BC, ita erunt F, E simul ad G. sed CD, BD, æquantur ipsi BC. ergo etiam F, E, adęquant G.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Vt AB ad AC, ita sit DC ad DE; & AB, DC, sint parallela, & similiter AC, DE; & C punctum sit commune: Dico BC, CD, esse in directum.

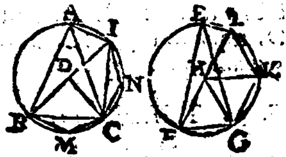


QVoniam enim circa angulos A, D, qui sunt æquales eidem ACD, per 29. primi, latera sunt proportionalia, sequitur per 6. angulum B, æqualem esse DCE. Additis ergo A & ACD. erit ACE, æqualis duobus A B. Sicut ergo A, B cum ACB, sunt æquales duobus rectis per 32. primi: ita erunt etiam duo ACE, ACB: & ideo BC, CD, erunt vna recta per 14. eiusdem.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

In æqualibus circulis, tam anguli BAC, FEG, ad peripheriam, quam BDC, FHG, ad centra: necnon sectores BDC, FHG eandem habent rationem, quam peripheriæ BC, FG.

 Ar-



Arcus BCI sit vtcunque multiplex ipsius BC, & FGKL multiplex ipsius FG. Cum igitur anguli insistentes æqualibus peripherijs sint æquales; tam erunt multiplices anguli BDC, CDI ipsius BDC, quam est arcus BCI multiplex peripheriæ BC: & similiter anguli FHG, GHK, KHL, & arcus FGKL, erunt æquemultiplices anguli FHG, & arcus FG. Et quando arcus BCI, est æqualis, maior, vel minor arcu FGKL, erunt etiam anguli BDC, CDI, æquales, maiores, vel minores angulis F HG, GHK, KHL: & ideo per 6. definit. quinti, erit vt arcus BC, ad FG, ita angulus BDC, ad FHG: immo & angulus BAC, ad angulum FEG, eo quod sunt semisses angulorum BDC, FHG, per 20. tertij.

Pro sectoribus fiant anguli BMC, CNI: qui sunt æquales, quia insistunt æqualibus peripherijs, quas abscindunt æquales, arcus BC, CI. Vnde per 24. tertij segmenta BMC, CNI, sunt æqualia. sunt autem & triangula BDC, CDI, æqualia, propter æqualitatem laterum. Ergo & sectores BDCM, CDIN, eruntque prædicti sectores, & arcus BCI, æquemultiplices sectoris, BDCM; & arcus BC. Et eodem modo erunt sectores FHG, GHK, KHL, æquemultiplices sectoris FHG, & peripheriæ FG. Et idcirco rursus per 6. defin. quinti, vt BC, ad FG, ita erit sector BDC, ad sectorem FHG.

Coroll. 1. Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum.

Coroll. 2. Item vt est angulus ad centrum circuli ad quatuor rectos, ita peripheria anguli, ad totam circumferentiam.

De reliquis libris.

In prioribus sex libris versata est Euclidis opera circa lineas, angulos, & figuras planas. Aggressurus autem figuras solidas, cum videret earum tractationem indigere lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus, & hę supponere cognitionem numerorum: idcirco libro 7. 8. & 9. præmittit nonnullas affectiones numerorum, & in 10. agit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus. & tandem in 11. aggreditur solida, & in 12. & 13. prosequitur quinque corpora regularia diligentius, & in particulari. De quibus etiam agunt 14. & 15. qui attribuuntur Hypsicli Alexandrino, & 16. quem addidit Franciscus Flussata.

Ego hic consulto omitto corpora regularia, & ea solum ex 11. attingo, quæ propriè sunt Elementa Solidorum.

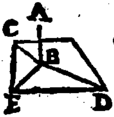
EX LIBRO VNDECIMO.

DEFINITIONES.

1 SOLIDVM est quod trinam dimensionem habet, secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

2 Solidi extremum est superficies.

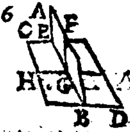
3 Linea recta A B, recta est, seu perpendicularis ad planum C D, cum ad omnes rectas B C, BD, B E concurrentes in eodem plano ad B, recta est, & perpendicularis.



4 Planum AB, rectum est ad planum C D; cum omnes O H, I K, quæ in plano AB, sunt perpendiculares ad communem sectionem BE, rectæ sunt ad planum C D.

5 

Angulus inclinationis, quo recta AB, inclinatur ad planum CD, est angulus BAE, quam BA, facit cum AE, ducta per punctum E, in quod cadit perpendicularis BE.

6 

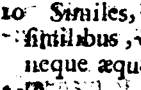
Plani AB, inclinati ad planum CD; inclinationis angulus est FGH, cum GF, GH, sunt perpendiculares ad communem intersectionem EB.

7 Planum ad planum dicitur inclinatum similiter, cum dicti inclinationum anguli fuerint æquales.

8 Parallela plana sunt, quæ non possunt concurrere.

9 Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus, & multitudine æqualibus planis continentur.

10 Similes, & æquales sunt, quæ planis similibus, & multitudine, magnitudineque æqualibus continentur.

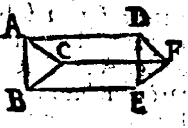
11 

Solidus angulus est inclinatio plurium linearum non in eodem plano concurrentium; & ideo cōtinetur pluribus angulis planis, quàm duobus. Qualem constituunt tres lineæ AB, AC, AD, ad concursum A,

& tres.

& tres anguli plani B A D, D C A, C A B.

12  Pyramis est figura solida, v. g. A B C D E, quæ continetur planis ABCD, DAE, AEB, BEC, C E D, ab vno plano ABCD, constituta, ad vnum punctum E.

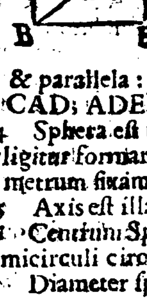
13  Prisma est figura solida planis contenta; quorum duo aduersa A B C, D EF, sunt æqualia, similia, & parallela: reliqua vero B E F C; F C A D; A D E B; parallelogramma.

14 Sphera est tale solidum, quale intelligitur formari à semicirculo circa diametrum fixam, integrè reuoluto.

15 Axis est illa diameter fixa.

16 Centrum Spheræ, est idem quod semicirculi circumducti.

17 Diameter spheræ est, quæuis linea per centrum acta, atque ad sphęræ superficiem terminata.

18  Conus est figura solida, qualem format triãgulum rectangulum A B C, cum circulus A B, in seipsum integrè reuoluitur. estque orthogonius, quando latera A B, B C, sunt æqualia: amblygonius,

 quan-

quando B C, maius est, quàm A B. & oxygonius, quando minus.

Ab Apollonio in conicis traditur alia coni definitio vniuersalior.

20 Basis coni, est circulus, quem in reuolutione describit B C. Superficies coni, quam describit A C; & A, est vertex coni.

21 Cylindrus est figura solida formata à parallelogrammo rectangulo v.g. ABCD, circa A B, integrè reuoluto.

22 Axis, est ipsa AB, manens.

23 Bases sunt circuli descripti à lateribus AD, BC. reliquum autem CD, describit superficiem cylindricam.

24 Similes coni, & cylindri, sunt quorum axes & diametri basium sunt proportionales.

25 Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

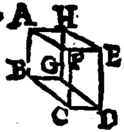
26 Tetraedrum, quæ sub quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus continetur.

27 Octaedrum, quæ sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris.

28 Dodecaedrum, quæ sub 12. pentagonis æqualibus, & æquilateris.

29 Icosaedrum, quæ sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris.

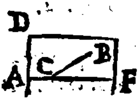
30 Pa-

30 

Parallelopipedũ, eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris contenta, ita vt aduerſæ ſint parallelæ.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si lineæ rectæ pars v. g. AC, exiſtat in plano DF; reliqua CB, non exiſtit in ſublimi.



SI enim CB eſſet in ſublimi, tota recta ACB non attingeret ſuperficiem DF; ergo non eſſet plana. iuxta definitionem 7. primi, ſecundum Heronem.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

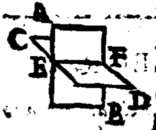
Rectæ AB, CD, ſe mutuo ſecantes in E, & ſimiliter omne triangulum; exiſtunt in vno plano.

DVcatur BD, & circa DC, intelligatur circunduci planum; quo trãſeunte per B, erunt DB, EC, in eodem plano cum CD. ergo &c.

PRO-

PROPOS. 3. THEOR. 3.

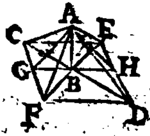
Duorum planorum A B, C D, communis sectio E F, est linea recta.



PVncta enim E, F, sunt communia, ergo & recta EF: debet enim EF, per defin 7. primi extendi tam per planum AB, quam CD.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta A B, duabus C D, E F, perpendiculariter insistat ad concursum B: erit A B ad planum C E D F, recta.



FIat B C, æqualis BD: & BF, æqualis BE; nectanturque FC, ED; & ducta GBH, vtcunque per B, nectantur A F, A G, A C, AE, AH, A D. Eritque primo FC, æqualis ED, & angulus BFC, angulo BED per 4. primi; quia circa æquales angulos ad verticem B, latera B C, B F sunt æqualia lateribus B D, B E.

2. Latera B G, G F, sunt æqualia lateribus B H, H E, per 26. primi, quia B F, B E,

B E, sunt æquales, & adiacent angulis æqualibus.

3. A G, A D, sunt æquales, per 4. primi; quia circa rectos ad B, A B, B C, sunt æquales A B, B D. & simili argumento sunt æquales A F, A E.

4. Angulus A F C, est æqualis A E D, per 8. primi; quia A F, F C sunt æquales A E, E D, & basi A C, basi A D.

5. A G, A H, sunt æquales per 4. primi; quia circa æquales angulos A F G, A E H, sunt latera lateribus æqualia.

6. Per 8. primi anguli A B G, A B H sunt æquales & recti, quia A B, B G sunt æquales A B, B H, & basis A G, basi A H.

Eodemque modo demonstratur eandem A B perpendicularem esse ad qualcunque alias G B H.

PROPOS. 13. THEOREM. 5.

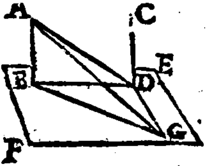
Recta A B, insistat tribus B C, B D, B E, ad angulos rectos: Dico omnes tres in uno plano esse.

SI enim B E non est in plano D F, in quo sunt B D, B C; erit saltem in eodem cum recta A B, nempe in A G, quod cum

FD, intelligatur facere communem sectionem B G. Quoniam igitur A B, recta est ad planum F D, per 4. huius; erit eadem A B, etiam perpendicularis ad B G, per defin. 3. atque ita anguli ABG, ABE, recti erunt & æquales quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Recta A B, C D, sint recta ad planum E F: Dico ipsas esse parallelas.



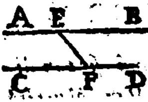
IVngantur A D, B D, & in plano EF, recta DG, sit perpendicularis ad BD, & æqualis A B; nectanturque BG, AG. Eritque primo B G, æqualis A D, per 4. primi; quia circa rectos B, D, sunt B D, B A, æquales B D, DG. secundo BG, BA sunt æquales AD, DG, & basis A G est communis; ergo angulus A D G est æqualis A B G. Sed hic est rectus per defin. 3. ergo & ille. & quia per eandem definitionem 3. eadem GD est quoque recta ad C D. erit igitur eadem D G, recta ad tres B D, A D, D C. & ideo per præcedentem eædem tres sunt in vno plano. Sed & A B, est in eodem cum B D, D A, plano. ergo etiam A B, C D, sunt in vno plano, & propter

rectos

rectos A B D, C D B, sunt per 29. primi parallelæ.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

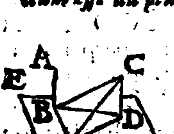
Parallelas AB, CD, nectat vtcumque EF: Dico omnes tres esse in vno plano.



Nam AB, CD, sunt in eodem plano per defin 34. primi; & EF, in eodem per 7. defin. secundum Heronem.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

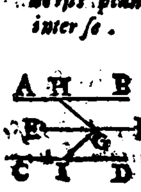
Recta AB, CD, sint parallelæ, & CD sit recta ad planum EF: Dico etiam AB rectam esse ad planum EF.



Constructio est similis sextæ, hoc est BG fit perpendicularis ad BD, & æqualis CD, &c. Quoniam igitur circa rectos CDB, GBD, BD, DC, sunt æquales DB, BG; erit basis BC, æqualis GD, per 4. primi. & quia rursus DC, DG, sunt æquales CB, BG, & CG, communis; erit per 8. primi CBG, æqualis recto CDG. Atque ita GB, erit perpenpendicularis ad duas BD, BC; ideoque per 4. recta ad planum CBD. & quia in eodem exiſtit AB, erit recta AB, perpendicularis ad B G, per defin. 3. Eſt autem eadem A B, etiam recta ad BD; ergo per 4. recta eſt ad planum G B D. hoc eſt ad planum E F.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Quæ eidem ſunt parallelæ, etiamſi ſint in diverſis planis, ſunt nihilominus parallelæ inter ſe.

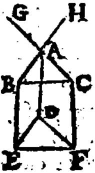


QVando AB, C D, ſunt parallelæ eidem E F, & omnes in eodem plano, iam propoſitio eſt demonſtrata ad 30. primi. Hic ergo A B, E F, ſint in vno, & C D, E F, in alio plano: & G H, G I, ſint perpendiculares ad E F. eritque per 4. E F recta ad planum HGI. & quia AB, C D, ſunt eidem EF, parallelæ; erunt etiam AB, CD, ad idem planum rectæ, per 8. & per 6. parallelæ inter ſe.

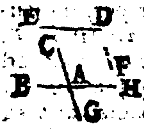
PROPOS. 10. THEOR. 10.

Rectæ A B, A C, concurrentes in A ſint parallelæ rectis D E, D F, concurrentibus in D:

D: Dico angulos B AC, E DF, esse aequales, vel aequivalere duobus rectis.



IN priori figura AB, AC, & D E, E F, sunt parallelæ, & similiter positę: item AH, AG, sunt parallelæ eisdem D E, E F, sed non similiter positæ; quia AH, AG, sunt sursum, & D E, DF deorsum: Dico in vtroque casu angulos BAC, H A G æquales esse angulo E D F. Quando A H, A G non sunt similiter positæ, erunt saltem protractæ similiter positæ, quales sunt AB, AC, quarum illa fiat æqualis DE, & hæc ęqualis D F; nectanturque reliquæ lineæ. ex quibus B E, CF, erunt eidem A D parallelæ, & æquales per 33. primi; & ideo æquales & parallelæ inter se; & quia easdem coniungunt rectæ B B, E F, erunt etiam per eandem 33. B C, EF æquales, & parallelæ. Et quia in triangulis B A C, E D F, præter bases B C, EF æquales sunt latera AB, AC, lateribus D E, D F, erit per 8. primi angulus B A C, necnon H A G, æqualis angulo E D F.

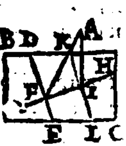


In posteriore figura rectæ AB, AH, sunt iterum parallelæ rectæ DE, & AC, AG, parallelæ rectæ D F, & quidem AB, D E positæ sunt similiter

militer, at AC, D F dissimiliter; est enim DF, deorsum, at AC sursum: item A G, D E, sunt positæ similiter, sed AH est ad dexteram puncti A, & D E, ad sinistram puncti D: Dico in hoc casu tam angulum BA C, quam H A G, constituere angulos duobus rectis æquales cum E D F. Producta enim C A, quæ non est similiter posita cum DF, fit etiam A G, similiter posita. & ideo per demonstrata in prioribus casibus angulus B A G. est æqualis angulo E D F; adiectoque communi B A C. fiunt duo BAC, BAG æquales duobus BAC, EDF. illi autem duo sunt æquales duobus rectis, per 13. primi: ergo etiam isti duo sunt æquales duobus rectis. idemque demonstratur eodem modo de duobus angulis E D F, H G.

PROPOS. II. PROBL. I.

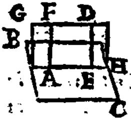
A puncto A, in sublimi, ad planum B C, perpendicularem ducere.



IN plano B C, ducatur quæuis D E, in quam ex A, demittatur perpendicularis A F, per 12. primi; & G F H sit perpendicularis ad eandem D E in plano B C, & in hanc cadat alia perpendicularis ex A, A, nempe A I: Dico ipsam esse rectam ad planum B C. Sit enim KIL parallela D E, sicut ergo D F, recta est ad planum A F I, per 4. ita erit quoque K I L, per 8. hoc est angulus AIL, erit rectus: Est autem & A I H, rectus. ergo per 4. A I, est recta ad planum BC; in quo existunt GH, K I.

PROPOS. 12. PROBL. 2.

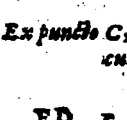
Ad datum planum B C, à puncto A, perpendicularem excitare.



EX alio puncto D, demittatur perpedicularis per præcedentem nempe D E; & per E, A, ducatur HA; & in plano DEA, ducatur per A, ipsi DE, parallela AF: eritque A F, recta ad B C, per 8.

PROPOS. 13. THEOR. 11.

Ex puncto C, vna tantum linea est perpendicularis ad planum AB.

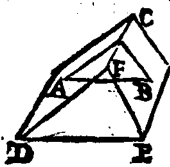


SI enim essent duæ C D, CE; essent parallelæ per 6. quod est absurdum, quia concurrunt in C.

PRO-

PROPOS. 14. THEOR. 12.

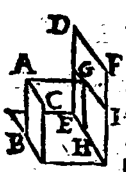
Eadem AB sit recta ad duo plana CD, CE: Dico eadem plana esse parallela.



NAm si concurrunt, & L in cõmuni sectione FC, sumatur quoduis punctum L, nectanturque AL, BL: Erunt in triangulo ABL, duo anguli LAB, LBA, per defin. 3. recti, contra 17. primi.

PROPOS. 15. THEOR. 13.

In plano BC, recta AB, AC, sint parallela rectis DE; DF, in alio plano FE; Dico ipsa plana esse parallela.



EX A, ducatur in planum EF, perpendicularis AG, per 11. & per G ducantur GH, GI, parallelæ DE, DF, quæ per 9. erunt quoque parallelę AB, AC: & ideo per 29. primi, anguli GAB, AGH erunt duobus rectis æquales. & quia AGH rectus est, erit & GAB, rectus. immo & GAC, AGI, erunt similiter recti: ideoque

que eadem A G erit ad vtrumque planum recta, & per præcedentem BAC, EDF, erunt plana parallela.

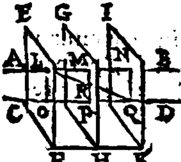
PROPOS. 16. THEOR. 14.

Si duo plana parallela A B, C D, secentur plano E F: communes sectiones E H, G F, erunt parallelæ.

SI enim concurrerent v.g. in I; concurrerent etiam ipsa plana, quod est contra hypothesim.

PROPOS. 17. THEOR. 15.

Si duæ lineæ A B, C D, secentur planis parallelis E F, G H, I K, in L, M, N; & O, P, Q; secabuntur similiter.



IVngatur LQ, occurrens plano GH in R, à quo ad M, & P, ducatur RM, RP; eritque per præcedentem R M, parallela N Q; & R P parallela L O; & ideo per 2. sexti vt L R, ad R Q ita erit tam L M ad M N, quam OP, ad P Q, &c.

PRO-

PROPOS. 18. THEOR. 16.

Sit AB, recta ad planum C D: Dico omnia plana per A B, ducta esse recta ad planum C D.

PEr AB, sit ductum planum EF, faciens cum CD, communem sectionem GBF, & H I, sit parallela AB, in plano ABF; quæ per 8. erit quoque recta ad planum CD; & ita de omnibus alijs rectis HI. ergo per defin. 4. planum EF, rectum est ad C D.

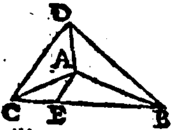
PROPOS. 19. THEOR. 17.

Si plana A B, C D, sint recta ad planum G H: erit quoque eorundem communis sectio E F, ad idem planum recta.

QVæ enim educitur in plano A B, perpendicularis ad DF, ea est recta ad planum G H per defin. 4. & similiter ea, quæ educitur ex eodem puncto F, perpendiculariter super B F, in plano CD, est recta ad idem in planum GH. Ergo per 11. F E, F E sunt vna linea, hoc est, communis sectio A F, erit ad G H, recta.

PROPOS. 26. THEOR. 18.

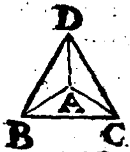
Angulus solidus A, contineatur tribus angulis planis B A C, C A D, D A B: Dico quoslibet duos esse reliquo maiores.



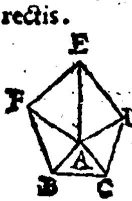
QVando omnes tres sunt æquales, manifesta est propositio. quando duo sunt æquales, & tertius minor; similiter. quando vero B A C est maximus probatur reliquos B A D, CAD esse ipso maiores hoc modo. Fiat BAE æqualis B AD, & AE æqualis AD; Et ducta vtcunque BEC iungantur B D, C D. Eruntque BE, ED, æquales per 4. primi. Duo autem latera DB, DC; sunt per 20. primi maiora reliquo B C; demptis ergo æqualibus BD, BE; remanebit CD, maior CE, & angulus D A C, erit maior C A E, per 24. primi, quia CA, AD, sunt æquales C A, AE, & basis C D, maior basi C E. Quare DAC, DAB, simul sunt maiores C A E, EAB; hoc est, toto BAC.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Omnes anguli plani continentes angulum solidum, simul sumpti; sunt minores quatuor rectis.



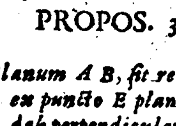
Solidus A, contineatur primo tribus planis angulis BAC, CAD, D A B. Ductis ergo B C, C D, DB; erunt tres anguli solidi ad puncta B, C, D; & duo plani anguli ABC, ABD, erunt per præcedentem maiores tertio C B D; & ita de reliquis: ita vt sex anguli ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, A D C, sint maiores tribus CBD, BDC, D C B, hoc est maiores duobus rectis. Dicti autem sex anguli vna cum tribus ad A, sunt æquales 6. rectis, per 32. primi. demptis ergo 6. illis, qui sunt maiores duobus rectis, remanebunt isti tres ad verticem A, minores quatuor rectis.



Secundo contineatur solidus A quinque angulis planis: eruntque omnes quinque in pentagono BCDEF per 32. primi 6. rectis æquales, & 10. anguli A B C, ABF, ACB, ACD, ADC, ADE, A D E,&c. erunt sex rectis maiores, sicut in præcedenti demonstratione. (... tem 10. vna cum 5. angulis ad A, ... 10. rectis æquales. sublatis ergo 10. illis qui sunt maiores sex rectis, remanebant 5. ad A, minores quatuor rectis. & ita de alijs.

PROPOS. 38. THEOR. 33.

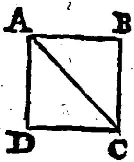
Planum A B, sit rectum ad planum A C, & ex puncto E plani A B, in planum AC, cadat perpendicularis E G: Dico E, esse ad communem sectionem A D.



SIn minus, sit alia perpendicularis EI, & I G, sit perpendicularis ad A D, ideoque per 4. defin. recta ad planum AB, & perpendicularis ad EG. in triangulo igitur EGI erunt duo recti EGI, EIG, quod est contra 17. primi.

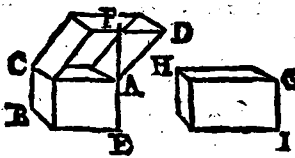
PROPOSITIONES aliæ ex iisdem Elementis depromptæ, quarum demonstrationes, hoc compendium Clauio relinquit.

EX X.



PRopos. 117. In quadratis diameter & latus sunt lineæ incommensurabiles. Hoc est, proportio diametri AC, ad latus AB, nulla ratione potest exhiberi numeris; Nulla enim datur earundem rectarum AC, AB, mensura communis.

EX XI.

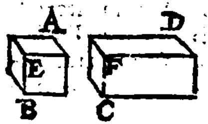


PRoposit. 29. 30. & 31. Solida parallelepipeda super eadẽ, vel super æqualibus basibus constituta & in eadem altitudine; sunt æqualia.

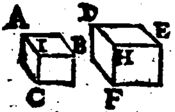
Talia

Talia sunt parallelepipeda AB, CD habentia communem basim A C, & æquales altitudines A E, A F.

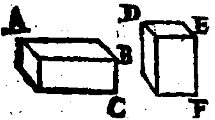
Item parallelepipeda AB, HI, habentia æquales bases AC, GH, & æquales altitudines A E, G I.



Propos. 32. Solida parallelepipeda A B, C D, sub eadem vel æquali altitudine BE, C F, inter se sunt vt basis AE, ad basim D F.

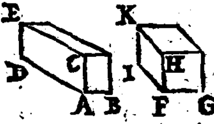


Propos. 33. Similia solida parallelepipeda, v.g. ABC, DEF, in quibus tria plana A B, BC, C A, circa angulum solidum I, sunt similia tribus planis D E, EF, FD, circa angulum solidum H, æqualem ipsi I, sunt in triplicata ratione laterum homologorum, qualia sunt CI, F H. Hoc est, si ratio C I, ad F H, continuetur vsque ad quartum terminum, vt primus ad quartum, ita erit parallelepipedum AB C, ad parallelepipedum D E F.

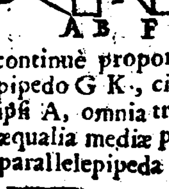


Propos. 34. Aequalium parallelepipedorum A B C, D EF, bases & altitudines reciprocantur. Hoc est, vt basis AB, ad basim DE, ita est

altitudo E F, ad altitudinem B C. Et vice versa, si vt AB, ad DE, ita est EF, ad BC, parallelep ipeda sunt æqualia.



Propos. 36. Si in parallelepipedo BF, circa angulum solidum A, tria latera AB, AC, AD, sint continuè proportionalia: & in parallelepipedo G K, circa angulum F æqualem ipsi A, omnia tria latera FG, FH, FI, sint æqualia mediæ proportionali A C, erunt parallelepipeda B E, G K, æqualia.



Propos. 37. *Si fuerit vt* recta A ad B, ita C ad D. fuerintque parallelepipeda A, B inter se similia; & parallelepipeda C, D inter se similia, erit quoque vt parallelepipedum A ad B, ita C ad D, & vice versa.

E X X I I.

PRopos. 1. Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt vt à diametris quadrata.

Propos. 2. Circuli inter se sunt à diametris quadrata.

Propos. 5. & 6. Eiusdem altitudinis Pyramides tam Triangulares, quam Polygonæ: *inter se sunt, vt bases*.

Pro-

Propos. 8. Similes Pyramides sunt in triplicata ratione laterum homologorum, vt dictum est Propos. 33. vndecimi de parallelepipedis.

Propos. 9. Aequalium pyramidum reciprocantur bases & latera.

Propos. 10. Conus tertia pars est Cylindri eiusdem basis, & altitudinis.

Propos. 11. Tam Coni, quam Cylindri eiusdem altitudinis, inter se sunt bases.

Propos. 12. Tam Coni, quam Cylindri similes, sunt in triplicata ratione diametrorum.

Propos. 15. Tam Conorum quàm Cylindrorum æqualium, reciprocantur altitudines & bases.

Propos. 16. Sphæræ sunt in triplicata ratione diametrorum.

ELENCHVS PROPOSITIONVM SEX LIBRORVM EVCLIDIS

Sicut habentur apud Clauium.

PROPOSITIONES Libri Primi.

1 SVPER data recta linea terminata triãgulum æquilaterum constituere.

2 Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtri-

vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis coutentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli *inter se* sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli inter *se* æquales erunt.

6 Si tri anguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliç duæ rectç lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrique vtrique, æqualia; habuerint vero & basim basi çqualem: Angulum quoque sub çqualibus rectis lineis, contentum angulo æqualem habebunt.

9 Datum angulum rectilineum bifariam secare.

10 Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare.

11 Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

13 Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineę non ad eaſdem partes ductę, eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſę rectę lineę.

15 Si duæ rectæ lineę ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem ęquales inter ſe efficient.

16 Cuiuſcunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito maior eſt.

17 Cuiuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

18 Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

19 Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

20 Om-

20 Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

21 Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectę lineę interius constitutę fuerint: hæ constitutę reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

22 Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis ęquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

23 Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo ęqualem angulum rectilineum constituere.

24 Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub ęqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi maiorem habebunt.

25 Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrumque vtrique, basim vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis cōtentum angulo maiorem habebunt.

26 Si duo triangula duos angulos duo-

bus angulis ęquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri ęquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 Si in duas rectas lineas incidens linea alternatim angulos æquales, inter se fecerit: Parallelæ erunt inter se illæ rectę lineæ.

28 Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem paries, ęqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis ęquales: Parallelę erunt inter se ipsæ rectę lineę.

29 In parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se ęquales efficit; & externũ interno, & opposito, & ad easdem partes ęqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis ęquales facit.

30 Quæ eidem rectæ lineę parallelę, & inter se sunt parallelę.

31 A dato puncto, datę rectę lineę parallelam rectam lineam ducere.

32 Cuiuscunque trianguli vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est ęqualis; Et trianguli

guli tres interni anguli duobus sunt rectis ęquales.

33 Rectæ lineæ quæ ęquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; & ipsæ ęquales, & parallelæ sunt.

34 Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli: Atque illa bifariam secat diameter.

35 Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

36 Parallelogramma super æqualibus, basibus & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

37 Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt ęqualia.

38 Triangula super ęqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

39 Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

40 Triangula ęqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta: in eisdem sunt parallelis.

41 Si parallelogrammum cum triangulo eandem basim habuerit, in eisdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

42 Da-

42 Dato triangulo æquale parallelogrãmum constituere in dato angulo rectilineo.

43 In omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 In triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

48 Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quę à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

PROPOSITIONES Libri Secundi.

1 SI fuerint duæ rectæ lineę, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, ęqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3 Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, ęquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

4 Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, ęquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus

libus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6 Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia æquale est quadrato à *linea*, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

7 Si recta linea secetur vtcunque; Quod à tota quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis *sub tota*, & *dicto* segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

8 *Si recta linea secetur* vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

9 Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 Si

10 Si recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 Datam rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

12 In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum cõprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub

per-

perpendiculari prope acutum angulum.

14 Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

PROPOSITIONES

Libri Tertij.

1 Dati circuli centrum reperire.

2 Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per cētrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 Si in circulo duæ rectæ lineę sese mutuo secent non per centrum extensæ: Sese mutuo bifariam non secabunt.

5 Si duo circuli sese mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

6 Si duo circuli sese mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.

7 Si in diametro circuli quodpiam suma-

sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum; minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ çquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

8 Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectę quędam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: in connexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum diametrum interponitur; aliarum autem ea, quę propinquior est minimæ, remotiore semper minor est: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum

culum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ ęquales: Acceptum punctum, centrum est ipsius circuli.

10 Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

11 Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

13 Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

14 In circulo æquales rectæ lineæ ęqualiter distant à centro: & quę ęqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

15 In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

16 Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere,

cere, quę datum tangat circulum.

18 Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

19 Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos *ipsi* tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli, ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21 In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se ęquales.

22 Quadrilaterorũ in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

23 Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad eadem partes.

24 Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

26 In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 In

26 In æqualibus circulis ęquales anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 In æqualibus circulis, anguli, qui ęqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

28 In æqualibus circulis, ęquales rectæ lineæ ęquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 In ęqualibus circulis, æquales peripherias, ęquales rectæ lineæ subtendunt.

30 Datam peripheriam bifariam secare.

31 In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

33 Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum

lum æqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 Si in circulo duæ rectę lineę sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æqualis erit ei, quod sub segmentis alterius comprehéditur, rectangulo.

36 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tãgat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam periphetiam assumpta compreheditur rectangulum, ęquale erit ei, quod à tangente dęscribitur, quadrato.

37 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum, cadant duę rectæ lineę, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

PRO-

PROPOSITIONES
Libri Quarti.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectę lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

2 In dato circulo triangulum describere dato triangulo ęquiangulum.

3 Circa datum circulum triangulum describere, dato triangulo ęquiangulum.

4 In dato triangulo circulum inscribere.

5 Circa datum triangulum circulum describere.

6 In dato circulo quadratum describere.

7 Circa datum circulum quadratum describere.

8 In dato quadrato circulum describere.

9 Circa datum quadratum circulum describere.

10 Isosceles triangulum cōstituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.

11 In dato circulo pentagonum æquilaterum

laterum & ęquiangulum inſcribere.

12 Circa datum circulum pentagonum ęquilaterum, & aequiangulum deſcribere.

13 In dato pentagono ęquilatero, & ęquiangulo circulum inſcribere.

14 Circa datum pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum circulum deſcribere.

15 In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

16 In dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

PROPOSITIONES

Libri Quinti.

1 SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, ęquemultiplices: quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.

2 Si prima ſecundæ ęque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundę æquemultiplex, atque ſexta quartæ; Erit & compoſita prima

cum quinta: secundę ęquemultiplex, atque tertia cum sexta, quartę.

3 Si sit prima secundę ęquemultiplex, atque tertia quartę; sumantur autem ęquemultiplices primę, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarum vtraque vtriusq; ęquemultiplex, altera quidem secundę, altera autem quartæ.

4 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam ęquemultiplices primę & tertię ad ęquemultiplices secundę & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

5 Si magnitudo magnitudinis ęque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

6 Si duę magnitudines duarum magnitudinum sint ęque multiplices, & detractæ quędam sint earūdem ęquemultiplices. Et reliquę eisdem aut ęquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

7 Aequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad ęquales.

8 Inęqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 Quæ ad eandem, eandem habent ratio-

tionem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eę quoque sunt inter se ęquales.

10 Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

11 Quæ eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem.

12 Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13 Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

14 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam tertia, maior fuerit; Erit & secunda maior, quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartę: Si vero minor, & minor erit.

15 Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mu-

tuo respondent, ita sumantur.

16 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17 Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hę quoque diuisæ proportionales erunt.

18 Si diuisę magnitudines sint proportionales; hę quoque compositę proportionales erunt.

19 Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

20 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, maior fuerit: Erit & quarta quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta ęqualis sextæ: Si in illa minor, hæc quoque minor erit.

21 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis ęquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex ęquo autem prima, quam tertia maior fuerit; Erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit ęqualis, erit & quarta ęqualis sextę: sin illa minor, hęc quoque minor erit.

22 Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

25 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

26 Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

27 Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

28 Si prima ad secundam habuerit maiorem

iorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam, maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

29 *Si composita prima cum secunda ad* secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam, maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

30 Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

31 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundę posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex ęqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

32 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam

quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

33 Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

34 Si fuit quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum, maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

PROPOSITIONES

Libri Sexti.

1 TRiangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

2 Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea; hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint; quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

3 Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum, recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli angulum.

4 Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum ęquales angulos, & homologa sunt latera, quæ ęqualibus angulis subtenduntur.

5 Si

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

6 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8 Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta fit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, ęquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum ęquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo: illæ quatuor rectę lineę proportionales erunt.

17 Si tres rectę lineæ sint proportionales; quod sub extremis comprehenditur

tur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectę lineę proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere.

19 Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero ęqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

22 Si quatuor rectę lineę proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

23 Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quę ex lateribus componitur.

24 In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma

& toti, & inter se sunt similia.

25 Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 Si à parallelogrammo parallelogrãmum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 Ad datam lineam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri parallelogrãmo dato. Oportet autẽ datum rectilineũ, cui æquale applicandũ est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cũ similes fuerint, defectus & eius, quod ad dimidiã applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

29 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 Propositam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.

31 In *rectangulis triangulis*, figura quęuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi *similes*, & *similiter positæ* à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32 Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt *homologa* eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quipppe qui ad centra consistunt.

ISAACI

ISAACI MONACHI SCHOLIA IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRIAE.

Euclidis Elementorum Geometriæ Liber I.

DEFINITIONES.

PVNCTVM est. Vtitur Euclides doctrina synthetica, quia nõ à superficie facit initium: sed à puncto. Punctum vero si fuerit in linea: tum Peras terminus: sed in axe, polus: in circulo denique nominatur centrum. Ea etiam quæ sunt & existunt: vel per nomina explicantur, vel per definitiones, aut etiam descriptiones: vel denique per longiores explicationes.

Figura. Vno quidem termino continetur circulus, quia vna linea circumferentiali clanclauditur. pluribus autē terminis, reliquæ figuræ, vtpote trilateræ, & multilateræ.

Circulus. In definitione circuli ponitur: intra figuram: propter polum. Polus enim in superficie eadem cum circulo non est: sed extra, & sublimiore: & ab eo ad circuli circumferentiam ducuntur rectæ lineæ æquales.

Orthogonium. Fieri enim nequit, vt trigonum aliquod habeat duos angulos rectos propterea quod in omni trigono, tres anguli sihe æquales duobus rectis. Eodem modo nō potest dari trigonum, in quo sint anguli obtusi, quia duo anguli obtusi, duobus rectis sunt maiores.

COMMVNES SENTENTIAE, *quæ etiam Axiomata à quibusdam appellantur.*

QVAE *eidem sunt æqualia.* Postulatis & axiomatibus commune hoc est: quod nulla indigeant demonstratione, aut geometrica probatione: sed simpliciter sumuntur pro veris, certis, & manifestis: denique principiorum loco ponuntur.

Diferunt etiam inter se, ratione quæ theoremate problematibus: sicuti enim in theoremata volumus id scire & cognoscere, quod rem consequitur subiectam: & in pro-

problemate, efficere aliquid, quod ad faciendum proponitur. Ita etiam in axiomatibus ea sumuntur, quæ per se facile intelligi possunt: atque sua natura nota & manifesta sunt: atque facilem habent apprehensionem.

In postulatis verò eiusmodi quæsita sumuntur, quæ facilem habent effectionem, ita vt mens nostra, nostræque cogitationes non multum laborent in talium quęstionum sumptione, neque magna est delineationis varietas aut difficultas. Quare cognitio aperta, & indemonstrabilis; & assumptio propositi absque demonstratione: distinguunt postulata atque axiomata. sicuti cognitio per demonstrationem facta: & quæstionis sumptio per delineationem facta: discernunt theoremata à problematibus. Quapropter necesse est vt vtrumque horum, Axioma inquam, & Postulatum, habeant simplicem, & facilem atque comprehensibilem, & immediatam naturam. Ita tamen vt postulatum tanquam factu facile sumatur, & suppeditet nobis viam efficiendi & inueniendi quandam materiam facilem ad faciendam demonstrationem; axioma denique vt cognitu facile, & concessum atque affirmatum sumitur. neque de materia, vt in postulatis: sed de accidente propositiones hæ theorematicę sunt.

PRO-

PROPOSITIONES libri primi Elementorum Euclidis.

PROPOSITIO I.

Problema.

S*Vper data linea recta.* Scire conuenit Geometriæ theoremata & problemata in sex diuidi partes. *Protasin, Ekthesin, Diorismum*, quem & *Prodiorismum*, appellant, *Kataskeuen, Apodeixin*, & *Symperasma. hoc est*, Propositionem, Explicationem dati, Explicationem quæsiti, Delineationem, Demonstrationem & Conclusionem.

Differt autem *Problema*, à *Theoremate*; quod *problema* iubet, & facit etiam id quod iubetur: eiusque rei iam factę demonstrationem in medium adfert: sed *theorema*, demonstrat accidentia & adfectiones rei subiectæ. Vnde etiam in conclusionibus problematum subiungitur: *Oper edei poiesai*. quod faciendum erat. at in theorematum conclusionibus additur: *Oper edei deixai*. quod ad contemplandum & demonstrandum erat propositum.

Præterea & hoc sciendum est: quod in omni

omni problemate: etiam hæc inuestiganda sint: & obseruanda omni diligentia. *Lemma, Ptosis, Porisma, Enstasis, & Apagoge.* id est, *Assumptiua Propositio, Casus, Corollarium, Instantia, & Deductio.*

Assumptiua quidem *Propositio* est, quando quærimus an aliquid sit, quod confirmare problema possit: illud inquam quod ad delineationem à præceptore est sumptum.

Casus est, nihil aliud quam delineationis quædam occasio. interdum vero fit, vt problemata absque casu sint, quæ *Aptota* dicuntur. quæ nulla opus habent varietate delineationis.

Corallarium est, quando quærimus vtrũ in ijs, quæ in problemate demonstrata sunt, & iam manifestè patent: aliquid aliud sit, quod appareat.

Instantia est, quando quærimus, vtrum id quod propositum est: in se habeat, aut recipere possit, obiectionem aliquam necessariam.

Reductio denique est, quando quærimus an fieri possit, vt propositum problema reduci possit in delineationem alterius problematis.

PRO-

PROPOSITIO VII.

S*Uper vna eademqu.* Etsi priora problemata & theoremata, affirmatiuas habuerint propositiones: tamen præsens hoc theorema propositione vtitur negante. Vnde etiam sequitur reductio ad impossibile, modus inquam ille syllogisticus. Docet enim Aristoteles, quod vniuersale affirmatiuum, maxime scientijs conueniat, illisque sit proprium. Nam si negatiua fuerit aliqua propositio: necesse est vt si demonstrationem admittere velit: affirmatione opus habeat. Siquidem sine affirmatione, neque fit demonstratio, neque syllogismus. eamque ob causam scientiarum demonstrationes, maxima ex parte conclusiones faciunt affirmantes.

1. Quod autem Euclides proponit sic. *Super vna eademque*, id fecit, ne super alia atque alia recta, duas duabus ęquales quis demonstret, atque ita fallacia hac aliud statueret quam ij, qui vna eademq; vtuntur recta.

2. Addit etiam, *altera alteri*, & hoc rectæ: potest enim fieri vt quis duas duabus rectis æquales simul cõstituat ad aliud atq; aliud punctum: super vna eademq; recta linea: non tamen alteram alteræ.

3. Hæc quoque adiunxit. *Ex ijsdem par-*

partibus, ne vnam rectam faciamus communem basim duorum trigonorum: quorum vertices essent oppositi. Ita vt alter vertex ex hac, alter ex alia esset parte.

4. *Easdem habentes extremitates, cum rectis ab initio propositis*: Quia sumi possunt duo puncta in vna eademque linea recta: a quibus duæ rectę constituerentur æquales altera alteræ, ad aliud punctum: & non ad id punctum, ad quod reliquæ constitutæ essent. Ita tamen vt non ex ijsdem extremitatibus essent cum prioribus.

His itaque omnibus circumscriptionibus vsus est Euclides: & firmam reddidit propositionis veritatem: & demonstratio ipsa absque dubitatione perfecta est.

Theorema etiam hoc ab Euclide demonstratur per reductionem ad impossibile: & id quod pugnans est, contra communem pugnant sententiam, quæ sic se habet: Totum maius est sua parte. deinde, Vnum & idem non potest esse maius, & æquale. Videtur vero hoc theorema esse lemma propositionis octauę, quia vtile est ad faciendam eius demonstrationem, neque simpliciter elementaris propositio est: neque speciem elementaris propositionis habet. propterea quod huius Theorematis vtilitas non longe lateque se diffundat.

PROPOSITIO VIII.

S*I fuerint duo trigona*. Scopus huius octauæ propositionis est: vt propositis duobus trigonis, habentibus latera lateribus æqualia & inter se applicatis: angulos inquam *habeant* æquales, eos qui ad verticem sunt. Cuius quidem æqualitatis causa esse videtur: laterum angulos ad verticem continentium ęqualitas: & basium ęqualitas. si enim baseis essent inęquales, fieret vt vna basi existente minore, etiam angulus minor fieret: & altera basi existente maiore, angulus quoque maior fieret. Neque lateribus inęqualibus existentibus, & basibus iisdem manentibus anguli ęquales inuenientur. aut denique lateribus ęqualibus manentibus & basibus existentibus inæqualibus. Securius ergo erat dicere, basi ęquali existente basi, & lateribus ęqualibus: sequi etiam angulorum ad verticem positorum ęqualitatem.

Hoc etiam theorema conuertitur cum quarto theoremate, quamuis *hæc* verba in ambobus sint hypothesis: duo latera inquam duobus lateribus esse æqualia. sed basim esse ęqualem basi: in propositione quarta ad quæsitum: in hac vero datum, & angulum angulo esse æqualem, datum fuit

fuit in quarta: hic vero quæsitum. Itaque sola datorum & quæsitorum permutatio, facit hanc conuersionem. Indiget hæc propositio ad faciendam demonstrationem propositione septima. quia & illa & hæc per reductionem ad impossibile demonstratur: & propositio septima indiget quinta: unde etiam merito antepositæ sunt octauæ propositioni. neque statim hæc octaua subsequuta est quartæ, etiamsi cum ipsa conuertatur, ut iam dictum est.

Sciendum denique quod si anguli trigonorum ad verticē existentes fuerint æquales: latera etiam hos continentia æqualia sint: etiam reliqui anguli reliquis æquales erunt. Ideoque etiam addidit, ut in quarta etiam reliquos angulos æquales esse.

PROPOSITIO IX.

D*atum angulum rectilineum*. Hæc propositio est problema: miscet enim Euclides theoremata problematibus, & problemata theorematibus, atque sic totam his propositionibus perficit elementarem doctrinam. Interdum res subiectas inueniendo & consequendo: interdum etiam accidentia rerum contemplando. Cum itaque demonstrasset per præcedentia in trigonis, laterum æqualitatem subsequi angulorum æqualitatem. & econuerso so æqualitatem angulorum, sequi laterum æqualitatem. transit ad problemata: & proponit atque iubet in hoc problemate: datum angulum rectilineum in duas æquales partes secare.

Quia vero angulus varijs modis dari potest. vtpote datur positione, quando dicimus, ad datam rectam: & ad datum in ea punctum, angulum constituere: Datur deinde specie: vt si datur angulus rectus, aut acutus, aut obtusus. Vel denique vniuersaliter, angulus aut rectilineus, aut circumferentialis, aut mixtus. Datur etiam ratione, quando dicimus duplum huius, vel triplum, aut in genere maiorem vel minorem. Postremo angulus datur magnitudine, vt si angulus tertia recti pars aut dimidia detur.

Angulus in hoc problemate, sola specie datur. cum dicit angulum rectilineum secare *Dicho*. Vtitur autem in hoc problemate, ad delineationem faciendam postulato vno, & problemate primo atque tertio; ad demonstrationem perficiendam sola propositione octaua. quia & illa demonstratur per reductionem ad absurdum vt & hæc.

PRO-

PROPOSITIO X.

D*atam lineam rectam.* Decima hæc propositio etiam est problema proponens lineam rectam finitam: quæ in duas partes æquales sit secanda. neque enim finiri & terminari potest recta, ex vtraque parte infinita: neque ea quæ ex altera parte tantum finita est. nam quacunque ex parte sumeretur punctum aliquod: tum in partes inæquales fieret sectio propterea quod vna eius pars in infinitum esset protracta. reliquum itaque est, vt ex vtraque parte recta finita sumatur: quæ in duas est secanda partes æquales.

Vtitur Euclides ad delineationem huius problematis propositione prima, & nona: ad demonstrationem sola quarta: nam per angulos æquales, demonstrat basium æqualitatem.

PROPOSITIO XI.

D*ata linea recta.* Et hęc propositio problematica est. Nam in hac facit angulos contiguos rectos: constituendo rectam super recta. Siue ergo ex vtraque parte finitam faciamus rectam: siue infinitam: siue vna ex parte finitam: procedet huius problematis delineatio. quod si enim in extremitatibus datæ lineę rectę', recta erigatur: protracta linea recta, atque longiore facta: eadem efficiemus.

Manifestum vero est, quod punctum in hoc problemate positione sit datum: nempe in ipsa linea recta. Recta autem linea vnico modo data est specie: cum nulla exprimatur positio, nec magnitudo, nec ratio. Vtitur in delineatione propositionibus prima & tertia: & vno postulato. Demonstratio constat ex propositione: octaua: & vna definitione.

PROPOSITIO XII.

Ad rectam lineam datam infinitam, &c. Etiam in hoc problemate Euclides constituit rectam lineam super recta ad angulos rectos erigere: sed antiqua appellatione nominat cathetum perpendicularem, secundum gnomonem: vnde etiam gnomon ad angulos rectos est, plano subiecto. Differunt enim sola habitudine recta ad angulos rectos ducta: & recta perpendicularis: cum tamen ratione subiecti, non differant.

Est autem perpendicularis duplex: vna quidem plana, altera vero solida. quarum plana ducitur ad rectam: solida autem ducitur ad planum. Vnde necesse est: vt hæc non ad vnam tantum lineam rectam

an-

angulos faciat rectos: sed ad omnes quotquot in plano subiecto describuntur, & ducuntur, atque sese secant in puncto, in quod perpendicularis cadit.

Attamen Euclides in hoc problemate tantum perpendicularem planam, ducere vult: atqui in vndecima propositione, postquam in ipsa recta sumptum fuit punctum, à quo recta fuit erigenda ad angulos rectos: nullo modo infinitum requirebat. In hac vero propositione, quia punctum extra lineam rectam datam sumitur: proponit eam infinitam. Nam si esset finita, forsitan contingeret: perpendicularem à puncto dato ductam: extra datam lineam rectam cadere: ita vt problema hoc sibi non constaret.

Sciendum autem, quod in sensilibus rebus, nulla sit magnitudo infinita: quæ & quantacunque etiam esse possit distantia, aut quodcunque internallum. Sicut Aristoteles, & qui eius sectati sunt doctrinam, demonstrant. neque enim coelum quod mouetur, infinitum esse dicemus: nec etiam alia simplicia corpora. vnumquodque enim corpus locum suum finitum habet. Reliquum ergo est, vt infinitum statuatur in imaginatione. non autem in cogitatione. simul enim dum cogitamus de infinito: formam & terminum accipimus. ipsaque cogitatione, imaginationis constituitur excursus, eumque variat. manente autem imaginatione, id quod animo conceptum est, indefinitum permanet, & tanquam nullas partes habens, & mente incomprehensibile. Illud inquam in infinitum esse relinquitur. Et enim visus cognoscit, tenebras non videndo: sic etiam imaginatio, non cogitando; infinitum determinat: Id enim, quod tanquam incomprehensibile relinquit: appellatur infinitũ.

Quapropter cum petimus datam lineã infinitam: imaginatione sola hoc facimus: vt & alias species geometriæ hoc modo infinitas ponimus: trigona inquam, circulos, angulos, lineas. vnde mirari desinamus, qua ratione fiat: vt actu recta linea sit infinita.

PROPOSITIO XIII.

S*I recta super recta constituta.* Hæc decimatertia propositio, est theorema: non enim docet quomodo faciendi sint anguli recti, vel obtusi, vel acuti. id quod proprium problematum. sed angulos iam constitutos super aliqua recta sumit: & demonstrat eos esse vel duos rectos, vel duobus rectis æquales. Consequens enim fuit, vt demonstratis ijs quæ in problematibus fuerunt proposita: transiret ad theoremata.

Quia

Quia etiam in propositione duodecima, ducta fuit perpendicularis in rectam subiectam: quæ angulos contiguos facit rectos: proximum erat quærere, quod si non fuerit perpendiculariter ducta: quales nam faciet angulos: & quomodo se habeat recta super altera constituta ad subiectam rectam.

Vniuersaliter ergo demonstrat, quod omnis recta super alia recta constituta: ita vt angulos faciat. si in neutram partem declinauerit & erecta fuerit normaliter: duos utiquam angulos rectos faciet. sed si in alteram partem magis inclinauerit: ab altera parte plus distiterit: duobus rectis æquales angulos faciet. Quantum enim ab vna parte recedit ab angulo recto: tantum adijcit reliquo, suo excessu.

1. Non vero simpliciter dixit: recta super recta stans, angulos facit duos rectos, vel duobus rectis æquales. sed adiecit: si angulos fecerit. Nam recta si ad extremitatem rectæ subiectæ fuerit constituta angulum quidem sed non angulos faciet. itaque fieri nequit vt vnus angulus duobus rectis æqualis sit. Omnis enim angulus rectilineus, etiam valde obliquus, minor est duobus rectis: sicuti omnis angulus solidus quatuor rectis minor est. etiam si sumpseris angulum obliquissimum: tamen mensuram duorum rectorum angulorum

nunquam adsequetur. Quapropter sic collocanda est recta super recta: vt angulos faciat.

PROPOSITIO XIV.

S*I ad rectam lineam.* Decima quarta propositio etiam theorema est: & conuertitur cum decima tertia: quia semper theoremata conuersa, sequuntur sua theoremata antecedentia, cum quibus conuertuntur, in quibus vnum est datum. nam si plura fuerint data: sepenumero multis alijs interpositis post antecedentem propositionem conuersa tandem sequitur: vt supra in quarta & octaua factum fuisse ostendimus.

Postquam ergo in praecedenti theoremate demonstrabit: quod recta super recta stans, si angulos fecerit: vel duos faciat rectos, vel duobus rectis aequales. nunc demonstrat quod si ad rectam quandam, duae rectae positae fuerint: haec & haec fecerunt: vt ipsa habet propositio: quapropter id quod in altero fuit datum, in altero est quaesitum. Demonstratur etiam per reductionem ad impossibile. hac etiam demonstrandi ratione, gaudent conuersae propositiones.

Digna etiam est admiratione, certitudo haec scientiarum. postquam enim diuisisset

Si ad rectam aliquam, adiecit & illud *& ad punctum, quod in ea est*. vt scilicet rectæ illæ ab vno sint ductæ puncto. quod si enim ex duobus punctis extremis datæ rectę, aliæ duæ fuerint ductæ; tum non è directo positæ erunt inter se.

Postea addidit & illud, *Exis continuè*, quasi dicat, inter quas nihil aliud simile interpositum est. sicuti columnas contiguas nominamus: inter quas nulla alia media posita est: etiamsi aer interponatur: attamen aer non est eiusdem cum columna generis; ideoque non dicitur columnæ contiguus.

Præterea adiecit & hoc, *non in easdem partes ducta*, negatione ostendens, quod in vtramque partem sint ducendæ lineę rectæ, & ponendæ. tales enim poterunt angulos contiguos duobus rectis æquales facere; & è directo positæ esse demonstrari. Nam si ex ijsdem partibus fuerint positæ: non è directo erunt sitæ; etiamsi duobus rectis æquales angulos faciant. Atque hæc de hac propositione.

In delineatione vero vtitur secundo postulato, & in demostratione, præcedenti theoremate, & duobus axiomatibus: secundo & tertio. atque ad reductionem ad absurdum faciendam: sumit hoc axioma. Totum est maius sua parte: sed & ęqualis; quod fieri nequit.

Quare rectæ illæ lineæ sunt ducendæ in vtramque partem, quæ faciant duos angulos duobus rectis æquales: ab vno ductæ puncto: & vna in hanc, altera in alteram protracta partem: è directo collocabuntur.

PROPOSITIO XV.

S*I duæ lineæ rectæ.* Sciendum, quod anguli ad verticem differant ab angulis contiguis. quia *anguli contigui*, sunt inter se vicini: nec alium interpositum angulum habent. sed *anguli ad verticem* vnum intermedium relinquunt. præterea *anguli contigui* seu *vicini sunt*, quando recta super recta fuerit constituta: *anguli* vero *ad verticem*, sunt recta linea alteram secante, vel rectis sese mutuo secantibus.

Appellatur autem *Anguli ad verticem*, quia vertices habent in vnum idemque punctum tendentes.

Hoc theorema non habet omnes partes, & omnia capita, quæ supra enumeraui. deest enim delineatio.

Quod autem sub finem theorematis subijcitur: *Ex hoc manifestum fit*, &c. est porisma, seu corollarium.

Corollarium est, vocabulum geometricum: docet vero hoc vocabulum nos, quod in theoremate, quæstione quadam facta,

eaque

eaque demonstrata: simul aliud quid apparet, quod non erat propositum in quæstione, vt demonstraretur. Sicuti apparet in hoc præsenti. Quæstio enim erat, vtrum anguli ad verticẽ sint inter se æquales, si duæ rectæ sese mutuo secant: quod cum esset demonstrandum, peracta demonstratione, simul fuit demonstratum: quatuor angulos, æquales esse quatuor angulis rectis.

Est igitur *Porisma*, theorema, quod per alterius theorematis demonstrationem, & ipsum quoque simul demonstratur. videmur enim quodam casu quasi in ipsa incidere porismata. quia nec volentibus, nec inuestigantibus, nobis obuiam fiunt porismata. Fœcunda itaque huius scientiæ natura & vis, profert & generat huiusmodi porismata, ex antecedentibus demonstrationibus; & declarat abundantiam illam theorematum, quæ in his est scientijs.

Sunt autem quædam porismata geometrica, vt hæc & alia plura. quædam arithmetica, cuiusmodi lib. 7. propositione secunda habemus porisma arithmeticum.

PROPOSITIO XVI.

IN *omni trigono*. Hæc decima sexta est theorema; & nos docet, quod si in quouis trigono vnum latus protraxeris: angulum qui extra trigonum constituetur, inuenies maiorem, angulo interno opposito. Necesse fuit, vt hunc conferret cum angulis oppositis: non autem cum angulo contiguo, qui ei est interne iuxta positus. Is enim potest angulo externo esse æqualis, & eo minor. Nam si fuerit trigonum orthogonium, atque vnum latus eorum, quæ angulum rectum continent, protractum fuerit: tum internus & vicinus angulus, externo erit æqualis. si vero amblygonium sit: externus minor erit interno contiguo. quapropter inquit angulis internis oppositis maior erit. quia in propositionibus sequentibus demonstrabit hunc angulum duobus æqualem, & angulos duobus rectis minores; denique tres angulos duobus rectis æquales. Habemus itaque viam & methodum in his, qua ratione generationes rerum nobis in conspectum adferant veras quæstionum causas.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

IN *omni trigono*. Indefinite in hoc theoremate decimo ſeptimo demonſtrat: quod duo anguli quouis modo ſumpti in trigono: ſint duobus rectis minores. ſed in ſequentibus definitiue docebit: quanto ſint minores: ſcilicet reliquo trigoni angulo. ſiquidē tres ſunt duobus rectis æquales. vnde duo ſunt reliquo minores duobus rectis.

PROPOSITIO XVIII.

IN *omni trigono*. Per quintum & ſextum theorema didicimus, quod laterum æqualitas efficiat angulorum ęqualitatem quos latera æqualia ſubtendunt; & viciſſim angulorum æqualitas, efficiat laterum ſubtendentium æqualitatem.

In hoc vero theoremate docet: quod inæqualitatem laterum, conſequatur angulorum, quos latera inæqualia ſubtendunt inæqualitas. & conuerſum demonſtrat, in theoremate ſequenti; nempe quod inæqualitatibus angulorum, ſubſequantur: laterum ſubtendentium inæqualitas demonſtrata ſuit duabus propoſitionibos idque per cōuerſionem eſt factum. Ita etiam inæqualitas horum duobus theorematibus per conuerſionem demonſtratur.

Aequalitas itaque angulorum & laterum conueniebat æquilateris & æquicruris trigonis; inæqualitas vero scalenis & æquicruris. *verum in scalenis trigonis; diuidemus maximum latus, & facimus trigonum æquicrurum, atque inæqualitatem angulorum demonstrabimus.*

PROPOSITIO XIX.

IN *omni trigono*. Hæc conuertitur cum *præceden ti propositione*.

PROPOSITIO XX.

IN *omni trigono*. Hoc theorema Epicuræi solent irridere. aiunt enim, hoc etiam Asino esse omnino notum, nec vlla indigere delineatione. Dicimus ergo, quod theorema quoad sensum videatur, notum, & manifestum esse: sed ea ratione manifestum, vt notum sit modo quodam scientijs conuenienti. Vt ignem calefacere, sensibus est manifestum: sed quomodo & quibus de causis calefaciat, incorporali potentia, aut sectionibus corporeis, partibus sphæricis, vel pyramidalibus: hoc inquam tantum scientiarum est officium: vt explicent & demonstrent.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

S*I in trigono.* Hoc theorema demonstratur per duo theoremata vigesimum, & decimumsextum. *Nam vt demonstret, rectas duas intra trigonum constituitas esse minores, quam quæ latera trigoni sunt exteriora; indiget 20. propositione. in qua* demõstratur, duo latera reliquo maiora esse. Verùm ad faciendam demonstrationem eius quod *angulum comprehendant maiorem*: assumit 16. propositionem, in qua demonstratum fuit, quod in omni trigono vno latere producto, angulus externus angulo interno opposito sit maior.

Necesse tamen fuit Euclidi addere hæc verba: ab extremitatibus ipsius basis interne constituendas esse duas rectas: non autem à partibus aliquibus ipsius basis: quia rectæ, quæ ab extremitatibus basis, non ducuntur: sed à partibus eius aliquibus: etiam continere possunt angulo externo æqualem vel minorem angulum.

PROPOSITIO XXII.

E*X tribus rectis lineis.* In 22. problemate, iubet Euclides constituere trigonũ ex trib. lineis rectis, quæ datis tribus rectis sint æquales, singulæ singulis, vna vni, & addit distinctionem, non simpliciter dã-

das

das esse rectas lineas: sed necesse est, inquit, vt duæ sint maiores tertia ; quouis modo sumptæ. propterea quod in omni trigono duo latera sint maiora tertio. ideoque & hoc in loco nisi duo latera sint tertio maiora: non constituetur trigonum.

Hoc autem problema est ex numero definitorum problematum, & non indefinitorum: vt enim sunt theoremata definita, & indefinita: Ita etiam sunt problemata duplicia. Nam si sic dicimus: Ex tribus rectis, quæ datis rectis sunt æquales: trigonum constituere: indefinitum problema est, & hoc quod proponitur, nequit fieri. quod si vltro addamus, duas debere esse tertia maiores; etsi quouis modo sumantur: duæ ex his tribus; id quod ipsa sumptio ostendet: tum fit problema definitum; & poterit fieri talis trigoni constitutio.

PROPOSITIO XXIII.

AD *datam rectam*. Si vtemur delineatione propositionis precedentis, nulla diligenti habita cautione: tum inuenietur quidem angulus æqualis, verum non ad datum punctum: sed vel ad alterum extremum, vel ad communem sectionem circulorum. Quare ne hoc fiat, necesse est, vt propositam lineam rectam fa-

faciamus vnam ex illis, quæ angulum continent: alteram vero efficiamus vnam ex continentibus angulum, ad quas partes datum punctum positum est. Eudemus in sua historia geometrarum ait, Oenopidem hoc problema inuenisse.

PROPOSITIO XXIV.

S*I duo trigona*. In 22. theoremate cum versetur Euclides, demonstrat inæqualitatem trigonorum: sicuti superius idem fecit in demonstratione æqualitatis. Duo enim trigona proponit, quæ duo latera duobus lateribus habent æqualia alterum alteri: angulum inquam ad verticem, æqualem angulo ad verticem posito: præsupponit: & quoque inæqualem & demonstrauit, æqualitatem angulorum consequi basium æqualitatem: & econtra, æqualitatem basium cōsequi angulorum ad verticem positorum æqualitatem atque hoc facit in vtrisque propositionibus.

Hoc vero theorema opponitur quarto theoremati. nam in quarto proponit angulos ad verticem esse æquales: in hoc vero theoremate inæquales. præterea in illa demonstrat per æqualitatem angulorum ad vertices positorum, etiam basium æqualitatem consequi: in hoc vero contrarium: nisi quod eadem sit similitudo. quia per

inginęqualitatem angulorum ad verticem positorum: demonstrat inæqualitatem basium.

Quapropter duas copulationes, seu coniunctiones propositionum aut theorematum Euclides nobis proponit, in trigonorum demonstratione, quæ sibimet sunt opposita: inæqualitatis consideratione, atque inæqualitatis contemplatione: atque copula quidem æqualitatis continet in se quartum & octauum theorema. copula vero inæqualitatis hoc præsens theorema & id quod statim sequitur: & cum hoc præsenti conuertitur. Commune vero est in his quatuor theorematibus, quod duo latera, duobus lateribus sint æqualia, alterum alteri. si enim essent inæqualia: superflua & falsa esset omnis quæstio.

PROPOSITIO XXVII.

SI in duas rectas. Post doctrinam trigonorum, vt docebat in elementari institutione: transit ad parallelogrammorum præceptionem. & quia fieri non poterat, vt aliquid diceretur de parallelogrammis: nisi prius seorsim de rectis æquidistantibus aliquid præciperetur: idcirco prius ea, quæ parallelis rectis accidunt proponit: & ex omnibus accidentibus, quæ parallelis rectis eueniunt: tantum tria pro-

proponit. quia ex his reliqua facile possunt cognosci. Id quod hoc modo accipiendum est. Anguli vel sunt ex ijsdem partibus: vel non ex ijsdem sunt partibus. quod si fuerint ex ijsdem partibus: vel extra sunt ambo: vel ambo intra: vel denique alter extra, alter intra. Rursus si ex ijsdem partibus non fuerint, eodem modo hæc sunt consideranda. Vnde sequitur quod cum sex modis accipiantur æquidistantium linearum rectarum accidentia: tria tantũ Euclides absoluerit: vnũ quidem accidens, quod non ex ijsdem fit partibus: duo vero, quæ ex ijsdem sunt partibus. Ex ijs qui ex ijsdem partibus non sunt: & tantum interne sumuntur, *Enallàx* permutatos vocat: qui vero ex ijsdem sunt partibus: & ambo interne accipiuntur; duobus rectis æquales. denique externum interno æqualem esse debere.

Nos itaque dicimus, quod eadem consequatur tres reliquas hypotheseis. Sint enim duo anguli ex ijsdem partibus externi ambo anguli TH, E, B, & D, Z, K. Dico quod hi duo anguli sint ęquales duobus rectis. Nam si angulus D, Z, K æqualis est angulo Z, E, B: & anguli Z, E, B: TH, E, B duobus rectis æquales sunt: tum etiam anguli D, Z, K: TH, E, B duobus rectis æquales erunt. Eodem modo demonstrabimus: si ex ijsdem partibus anguli isti non fue-

fuerint: & vnus angulus internus, alter externus sit: quod duobus rectis sint æquales. denique & tertium demonstrabimus, si ambo externi fuerint, & non ex iisdem partibus: quod æquales sint. quia illi sunt iidem cum angulis ad verticem, & æquales illis per 15. qui vero ad verticem ponuntur, sunt permutati. Ergo æquales.

PROPOSITIO XXX.

Q*Va eidem linea recta*. Hoc non in omnibus fit modis: quia ea quæ eiusdem sunt dupla; non etiam inter se sunt dupla. videtur autem in iis tantum habere locum: quæ inter se conuertuntur. vt quæ æqualitatis, aut similitudinis sunt. & in rectis æquedistantibus.

PROPOSITIO XXXI.

P*Er datum punctum*. Non est idem si dicimus per punctum datum: & à dato puncto: Nam quãdo punctum est principium lineæ rectæ ducendæ: tum linea recta á puncto ducta dicitur. & propterea à puncto fit descriptio. quando vero punctum in ipsa est linea recta: per datum punctum describitur. ideoque descriptio rectæ lineæ dicitur esse facta per punctum. Non enim dicitur per punctum, ac si linea

recta

recta punctū secaret: sed quod recta illa in punctum incidat: & distinguat summmet interuallum, suamque distantiam, quam habet æquidistans recta, inter illam quæ posita est, & quæ ducenda proponitur.

Videtur etiam hoc theorema, proponere genesim parallelorum. verum obseruare conuenit propositio num differentiam. Nam perpendicularis à puncto, æquidistans vero per punctum ducitur. & sicuti non poteramus duas perpendiculares ducere ab vno eodemque puncto: Ita etiam non possumus duas æquidistanteis per vnum punctum ducere. demonstratur vero per præcedentem. Nam æquidistantes erunt, quæ inter se non concurrunt.

PROPOSITIO XXXII.

In omni trigono. In hoc theoremate explicat duo superiora theoremata, decimum sextum & decimum septimum. non enim quod angulus externus angulis internis oppositis sit maior demonstrat; sed & quanto sit maior ostēdit: nempe altero oppositorum. deinde non tantum quod duo anguli in trigono sint duobus rectis minores: sed quod reliquo angulo interno minores sint. Quia tres anguli in trigono, sunt duobus rectis æquales. Nam cognitio nostra ab imperfecto, solet ire ad perfefectum. ideoque scientia eodem modo ex indefinitis procedens obiectis, ad definitas & irrefutabiles progreditur doctrinas. Quapropter ea quæ describebant in 16. & 17. theoremate: ea nunc addit, vt supra quoque dictum est.

PROPOSITIO XXXIII.

R*ECTA quæ æquales &c.* Hoc theorema simplicem parallelogrammo rum generationem tradit: fiunt enim parallelogramma, ex parallelis rectis lineis: & ex ijs quæ has coniungunt.

Verum diligenter obseruanda est propositionis certitudo, & exacta eius ratio: quod quidem non simpliciter dixerit recta quæ æquales rectas coniunxerit: & ipsæ æquales sunt. sed adiecit & illud *Aequidistantes*. Ideoque non per omnia fit, vt rectæ, quæ ęquales rectas coniungunt: etiam ipsæ ęquales sint. vt in trigono æquilatero, & ęquicruro. non enim quæ medio coniungit latera duo, est æqualis basi. Quapropter oportet vt etiam sint æquidistantes, rectæ illæ quæ dantur, ita vt rectę quę dantur. Ita rectæ quæ has coniungunt, eodem modo sint ęquales & ęquidistantes.

Rectè etiam Euclides addidit, coniunctionem illam debere fieri in rectis ęqualibus

libus, & æquidistantibus, ex partibus ijsdem. quod si enim non ex ijsdem partibus eas coniunxerint; sed diagonales fuerint: erunt quidem hę inter se ęquales; non autem æquidistantes: sed in medio sese secantes.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum. Cum præsenti theoremate conuertuntur. Quarumcumque quadrilaterarum figurarum latera opposita sunt ęqualia, vel quarumcunque quadrilaterarum figurarū anguli oppositi sunt ęquales: etiam illę quadrilaterę figuræ sunt parallelogramma. Denique quarum figurarū quadrilaterarum diagonales coniunctæ in duas partes ęquales, secant ipsas figuras quadrilateras: illæ etiam sunt parallelogramma.

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma. Hoc theorema numeratur quoque inter illa, quæ in se continent ea quæ contra hominum sunt opinionem: & difficile conceduntur. Videtur enim plurimis absurdum esse: si longitudo multiplicetur: non tollat ęqualitatem, eadem basi manente. quantum enim ęquidistanteis protrahuntur: tantum

etiam

etiam alterum parallelogrammum augetur.

Sciendum tamen, quod angulorum æqualitas & inæqualitas, plurimum possint. quo enim inæqualiores fecerimus angulos: eo etiam minorem reddimus aream: tum scilicet quando eadem manet latitudo.

Sicuti sunt *theoremata* quędam *simplicia*, quędam *composita*, & hęc vel *vniuersalia*, vel *particularia*: Ita quoque quædam sunt *localia*, quędam vero *localia* non sunt. Vocantur autem *localia*: in quibus vnum & idem accidens vniuerso loco accidit. Locus autem est positio quędam lineę aut superficiei: quæ vnum & idem accidens efficit.

Localia etiam *theoremata*, nonnulla sunt *ad lineas constituta*: alia vero *ad superficies*, atque ex his superficiebus aliæ sunt *plana*, aliæ *solida*. *Plana* quidem, in quibus simplex est notio in superficie plana: *solida* autem, quarum generatio fit ex quadam sectione alicuius figurę solidę. vt helicę circa cylindrum, & lineæ conicæ.

Localia etiam *circa lineas*, quædam habent locum *planum*, quędam *solidum*.

Theorema itaque hoc 35. est locale, & planum. nam quod inter omnia parallelogramma est: id dicetur locus parallelográmorum constitutorum super vna basi, quæ etiam Euclides demonstrat esse æqualia.

Quare

Quare hoc theorema est omnium primum locale theorema: sunt & sequentia localia, præterquam quod scire oporteat, cum Euclides de rectilineis agat figuris hoc in loco: esse localia plana ad lineas rectas. in tertio vero libro, vbi agit de circulis & circulorum accidentibus: tradit localia ad circumferentias. Sicut est in libro tertio propositio ista. Anguli in eodem constituti segmento: sunt inter se æquales. & altera. Anguli in segmento sunt recti. Quoniam multi anguli, imò infiniti, cum constituantur ad circumferentiam, super vna eademq; basi: omnes demonstrãtur esse ęquales. Denique sunt quoq; figuræ istæ proportionales trigonis parallelogrammis super vna eademque basi constitutis.

Verum cum ante hac nullam trapeziorum fecerit mentionem: primo loco nominat *Trapezia*, de quibus inter principia nomina sunt relata. Sunt autem *Trapezia*, quę sunt quidem figuræ quadrilateræ, non autem parallelogramma Quia figuræ, quę latera opposita non habent æqualia: & angulos oppositos inęquales; egrediuntur ordinem parallelogrammorum.

Cum vero sint duæ species Trapeziorum: Ita vt alia trapezia habeant tantum duo latera parallela, seu ęquidistantia: verum inæqualia; alia vero ęqualia quidem:

dem: sed non equidistantia; in hac præsenti delineatione sumit duo latera equidistantia: sed inæqaulia, vt sunt latus AC, & latus C D.

PROPOSITIO XXXVI.

P*arallelogramma*. Siue distent inter se baseis, siue ex parte aliqua communionem habeant, siue vno latere fuerint coniuncta duo parallelogramma: tum vnum & idem demonstrabitur.

Obseruandum tamen est, quod in polygonis parallelogrammis hoc non fiat. quia non omnia sunt æquilatera. sed si equilatera fuerint; consequetur hoc, vt quæ super basibus equalibns constituuntur; inter se conferantur. & si dimidia alterius latera fuerint alterius homologis lateribus, equalia erunt; inequalia vero; cum se ita non habebunt.

PROPOSITIO XXXVII.

T*rigona super eadem basi constituta*. Et hoc theorema locale est; & vides quod non solum parallelogrammis hoc insit: verum etiam trigonis, circulis, & cylindris, & conis applicetur. denique pariter solidis figuris: quæcunque existentes sub eadem altitudine, baseis habent æqua-

æquales.: liber vero hic primus magis est vniuersalis quam sextus: Cum hoc theoremate duo conuertuntur. quod statim subsequitur & quod habet in se hoc. Trigona æqualia, & trigona super eadem basi existentia: postea alterum, quæ æqualia sunt, & inter easdem æquidistantis lineas rectas: vel esse super vna eademque basi: vel super basibus æqualibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

TRigona super basibus. Præcedens theorema easdem sumit baseis: hoc vero ęquales, non autem easdem baseis. commune tamen ipsis est, quod parallelogrāma constituantur inter easdem lineas rectas æquedistantes.

Necesse igitur est vt parallelogramma & trigona, neque vlterius & extra lineas ęquidistantes: neque intra easdem: nam parallelogramma dicuntur in ijsdem esse lineis rectis ęquidistantibus, quando baseis ipsarum & latera his opposita, ijsdem rectis ęquidistantibus applicatæ conueniat.

PROPOSITIO XXXIX.

TRigona æqualia. Rectæ Euclides addidit: *ex ijsdem partibus*. Fieri enim

 potest

vt accipiamus super vna base trigona æqualia: non autem ex iisdem partibus: sed ex altera parte: Ita vt non sint inter easdem æquidistantes rectas lineas; neque enim sunt sub eadem altitudine.

Sciendum etiam est, quod cum sit *triplex* theorematum cõuersio: dum vel totũ cum toto conuertitur, vt decimum octauum & decimumnonum theorema: vel cum parte, vt sextum & quintum theoremata: vel pars *cum parte, vt quartũ & octauum.* neq; enim totum datum in altero est quæsitum: vel etiam quæsitum datum. Illa ipsa obseruãdu esse in his de trigonis theorematibus quęsitum trigona esse æqualia, atqui hęc non *solum datum est in his propositionibus* pręsentibus; verum etiam pars aliqua adsumitur de ijs, quę in illis proposita fuerunt: quia super basibus ijsdem, & basibus ęqualibus constitui datum est in *his* & *illis*. adijcit tamen aliquid illorum hypothesibus: quod neque quęsitum, neque datum in ipsis fuit: nam ex ijsdem partibus, aliunde & extra adsumitur.

PROPOSITIO XXXXI.

SI *parallelogrammorum*. Et hoc quadragesimum primum theorema locale est. Et cum Euclides antea seorsim de trigonis, & seorsim de parallelogrammis egisset; in hoc loco miscet constitutiones paral-

parallelogrammorum, & trigonorum, sub eadem altitudine existentium. Simul enim vtraque sumens; demonstrat & contemplatur, quomodo illa erga sese mutuo habeant. quod si seorsim parallelogramma sint, & seorsim etiam ponantur trigona, æqualitatis constabit veritas, quia demonstrauit quod quæ super basibus æqualibus, vel ijsdem: & inter easdem equidistantes rectas collocantur; sint æqualia inter se: parallelogramma parallelogrammis, & trigona trigonis. sed in hoc theoremate in quo confert parallelogrammum cum trigono: inæqualitatis ratio apparet: & est primus modus inæqualium. hoc est ratio duplorum. nam demonstrat quod parallelogrammum, sit duplum trigoni: si eadem fuerit basis, & eadem altitudo.

Notandum etiam, quòd cùm sint duo casus in hoc præstanti theoremate, vtpote, eadem existente basi, & parallelogrammi & trigoni: necesse est vt trigonum habeat verticem suum, vel intra parallelogrammum, vel extra: tamen Euclides alterum casum tantum accepit: & vtitur eo casu quo extra parallelogrammum cadit vertex trigoni. demonstrationem enim talem facit, quæ conuenit huic casui, quo extra parallelogrammum vertex trigoni cadit.

Glim etiam quæ sint equidistanteis: necesse est vt altera sit maior, & longior altera

tera minor & breuior: vt constituatur per copulationem trigonum ipsum: & habeat hic verticem extra parallelogrammum.

PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi. Siue parallelogramma, quæ circa eandem sunt diametrum, sese mutuo tangant; vt Euclides demonstrat: siue inter se distent: siue sese mutuo secent; vnum & idem demonstrabitur.

Nomen vero hoc *Paraplerомaton, hoc est* complementorum à re ipsa sumpsit Euclides: quasi diceret, præter duo parallelogramma; hæc compleant totum parallelogrammum, quod in se complectitur ambo parallelogramma. Nam quæ diameter secat: illa sunt parallelogramma: quæ vero extra diametrum sunt, appellantur complementa, & supplementa. Ita vt totum parallelogrammum quod ambo parallelogramma interna, continetur duo complementa: ex his constare dicatur, vel hæc in se continere.

Itaque & paraplероma seu complementum per se quidem non inter definitiones numeratur: propterea quod varietatem habet, & minus est perspicuum & notum. nec tam facile scire possimus, quid sit parallelogrammum, & quæ sint parallelogramgrāmū, & quæ sint parallelogramma circa diametrum intra totum constituta parallelogrammum. Prius etenim hæc explicāda sunt: antequam horum fiat, quid sit complementum. Propterea hęc distribuit recto ordine & bono modo: & nunc primum cum his opus habet complementis, ad parallelogrammum constituendum, quod illa in se continet complementa; mentionem horum facit.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam lineam rectam. Sciendum hoc in loco est: quod cum iuniores geometræ vidissent explicatas ab Antiquis esse *Parabolen*, *Hyperbolen*, & *Elleipsim*. ab hoc nomina transtulerunt ad lineas, quas *Conicas* appellant: & aliam quidem parabolen, aliam hyperbolen, tertiam elleipsin appellarunt.

Nam quando data & proposita aliqua linea recta: figura quæ applicatur, vniuersæ lineę rectę datę applicatur; tum dicunt figuram illam rectæ datæ applicatam esse, & parabolen dici: quod si vero longior fuerit figura, quam linea data: hyperbolen esse, & excedere; denique si minor & breuior fuerit; elleipsin esse, & deficere. Verum hyperbolæ & Elleipsis mentionem faciet libro sexto: Sunt autem hæc a Pythagoricis inuenta & tradita.

PROPOSITIO XLV.

D*ata figura rectilinea*. Hoc problema magis vniuersale est, quam quod antecessit; idcirco etiam his tanquam lemmatibus vtitur. Quia omni polygono promittit se æquale facturum parallelogrammum: cum dicit figuræ rectilineę, absque nomine, & communi modo. Nam si hic proponatur rectilineum trapezium: & diuidatur in trigona duo: constituetur problema, quod si vero proponatur polygonum esse rectilinea figura data; tum rursus eodem modo diuidetur in trigona quotquot erunt necessaria; & vnicuique trigono, ęqualibus parallelogrammis ad primi latus applicatis constituetur.

PROPOSITIO XLVI.

A *Data linea recta*. Ad lineationem theorematis quadragesimi septimi faciendam; opus habemus quadragesima sexta. Scire vero conuenit, quod Euclides generationem & productionem duarum præstantissimarum figurarum in hoc primo tradiderit libro. quia ad constitutionem figurarum mundanarum, maxime harum, requiritur vsus figurarum rectilinearum. Nam Eicosaedrum, & Octaedrum

drum, & Pyramis, sunt & constant ex trigonis æquilateris: Cubus vero ex quadratis.

Recte etiam dicit & proprie constituere; in ijs figuris in quibus est constitutio: quando multa colliguntur, ad vnius compositionem & effectionem: & describere dicit in quadrato; quoniam ab vna linea recta quadratum describitur.

PROPOSITIO XLVIII.

S*I in trigono*. Hoc quadragesimum octauum theorema conuertitur cum præcedente, totum cum toto. Nam cum datum esset trigonum orthogonium: in præcedenti demonstratum fuit quadratum à latere rectum angulum subtendente descriptum, æquale esse quadratis à lateribus rectum angulum continentibus descriptis. in hoc vero theoremate per conuersionem demonstrat: quod si in trigono aliquo, quadratum à latere rectum angulum subtendente descriptum, æquale fuerit quadratis, à lateribus rectum angulum continentibus descriptis: tum quoque trigonum propositum erit orthogonium trigonum, quod angulum habent rectum; quem duo reliqua latera continent.

Atque sic absoluit Euclides hunc primum librum: postquam multas conuersionum species nobis tradidisset; conuertit enim tota totis, & totum cum partibus, & partes cum partibus. Simul etiam magnam problematum varietatem ostendit, quia linearum rectarum, & angulorum sectiones, & positiones, & constitutiones, & applicationes tradidit: & loci illius theorematum quem paradoxum præter opinionem hominum constitutum mentionem fecit, & theoremata localia explicauit: Ita vt satis nobis in mentem reuocarit, quæ nam tam vniuersalia, quam particularia, elementarem perficiant doctrinam: eamque sustinere possint. Ita etiam problemata definita, & indefinita in quibus differant; demonstrauit. & hac ratione hanc primi libri doctrinam ad vnum tantum scopum dixerit: Elementarem inquam simplicissimarum figurarum rectilinearum contemplationem; in qua harum constitutiones & descriptiones inuenit, & quæ ipsis per se insunt, considerauit.

Finis libri primi Euclidis Elementorum Geometriæ.

ISAACI

ISAACI MONACHI SCHOLIA

In Secundum Librum Elementorum Geometriæ Euclidis.

SECVNDVS hic liber Elementorũ Geometriæ ad multa vtilis & necessarius est: quia non solum ad stereometriam, sed & ad planorum doctrinam multum prodest. deinde per huius libri doctrinam multa problemata refutari possunt, quæ veritatis speciem habent. denique & in Astronomicis non parum prodest.

Scoopus autem huius libri, hic est, Vult linearũ rectarũ *Anagraphas*, hoc est descriptiones & *Dygameis*, potentias explicare; neque id tantum, sed & partiũ seu segmentorum: ex quibus tandem colliguntur sectiones irrationales linearum rectarum.

Praeterea inuestigat, & inuenit etiam duas medietates, Arithmeticam & geometricam, neque lemmate opus habet: neque instantiam aliquam apparentem animaduertit, quae demonstrationi obesse possit.

DEFINITIONES.

Omne parallelogrammum. Addidit Euclides *rectangulum*, vt distingueret ea quę rectangula parallelogramma sunt, ab ijs quę rectangula non sunt. nam in ijs, quę rectangula non sunt, neutiquam dicimus quod continetur rectis &c,

Quae vero eiusmodi sint parallelogramma non rectangula: in priore didicimus libro. talia enim fuerunt quę prioribus enumeratis tam parallelogrammis & trigonis super basi simul fuerunt connumerata. & in quibus si rectas lineas aequidistanteis lateribus trigonorum duxerimus, tum efficimus parallelogramma, quod quidem in multis alijs apparuit: maxime vero in theoremate tricesimo octauo, & quadragesimo primo.

Deinde recte & necessario etiam addidit (duobus lateribus, rectum angulum continentibus) non enim quibusuis lineis rectis, sed rectis quae angulum rectum continent, vtendum nobis est, ne forsitan quis

quis accipiat latera opposita; quę angulum non continent. neque etiam parallelogrammum rectangulum contineri his potest: nisi talia summantur latera.

Sed si quis quęrat, cur cum sint quatuor lineæ rectę, quę parallelogrammum conficiunt, dicat tantum rectangulum quod duabus continetur rectis. Respondetur, quod sub his duabus, subintelligat, etiam reliquas duas, cum sint his æquales altera alterę. Quia parallelogramma habent latera opposita inter se æqualia.

Siquidem in multiplicatione laterum, quando illa multiplicamus; tum inuenimus aream, seu ambitum orthogonij; non autem quatuor illa latera multiplicantes. sed vnum latus longitudinis; & alterum latitudinis: denique in quadrato vnum latus in seipsum multiplicantes: satis nos fecisse inuestigationi nouimus. siquidem longitudo, latitudini est æqualis.

Propterea si quando inquit. quod his continetur lineis rectis, parallelogrammum altera parte longius est intelligendum. sed si dicat ab hac recta; intellige quadratum.

Quia scire conuenit quod parallelogrãmum sit species rectilinei. genus autem parallelogrammorum, habet species quatuor; quadratum quadrangulum oblongum, Rhombum, & Rhomboeides.

Gnomon vero inuectus est breuitatis gratia à Geometris, & nomẽ eius per accidẽs factum ; quia ab hoc gnomone vel totum cognoſcitur ſpatium, & totus ambitus, vel reliqua eius pars ſi vel addatur, vel auferatur. Habet etiam in horoſcopijs hoc officium ſolummodo ; vt horas inſtantes cognitas faciat.

Complementa vero dicuntur, non quod ipſa non ſint parallelogramma, ſed quod toto non ſint ſimilia. Verum compleant ſimilitudinem totius ad ipſum.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO VI.

SI recta linea fuerit ſecta. In hoc theoremate demonſtratur arithmetica proportio ; qui enim eſt exceſſus, AD. ad ipſius G D : hoc eſt G B : idem eſt G D, recta ad BD. per numeros vero facilius & manifeſtius comparebit; quod ille quidem ęqualiter ſuperat & excedit, & ſuperatur atque exceditur ab extremis. Theorema vero ſic habet ; quod quadratum exceſſus cum rectangulo extremorum, ſint æqualia, quadrato à media deſcripto.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI *recta linea*. Præſentis theorematis propoſitio, eadem eſt cum præcedente; modo tamen conuerſo. ſicuti enim duo quadrata, quadratum inquam totius, & quadratum vnius ſegmenti, conferuntur; ſic etiam hoc in loco quadratum totius, & vnius ſegmenti tanquam vnius rectę quadratum. & vt ibi ęquale rectangulo quod tota & prædicto ſegmento his continetur eſt ęquale: Ita hoc in loco æquale, eo, quod quater continetur tota & prædicto ſegmento: quadrato reliqui ſegmenti. & ideoq; duo ſunt ſimilia, vt & ante, ipſa ſimilis fuit dualitas.

PROPOSITIO X.

SI *recta linea fuerit ſecta*. Poſſumus pręſentis theorematis propoſitionem; etiam hoc modo explicare. Si recta linea fuerit ſecta in partes inæquales: tum quadratum totius, cum quadtato exceſſus, quo maius ſegmentum excedit minus; duo hęc quadrata inquam, dupla ſunt quadratorum ab ipſis ſegmentis deſcriptorum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

D*Atam rectam secare*. In hoc secundo libro, cum sint quatuordecim theoremata; ex his vndecimum & decimum quartum sunt problemata. Verum per numeros non demonstrantur, vt ex insequentibus intelligimus. Nam in hoc ipso problemate si fieri potest, numerus A B: diuidatur in numeros A C, C B, ita vt factus ex multiplicatione numerorum A B, BC; sit equales quadrato numero AC. Erit igitur numerus ex multiplicatione numerorum AB, B C, quater facta: cum quadrato numeri A C, quintuplus numeri quadrati A C. sed numerus ex multiplicatione numerorum AB, BC. quater factus, cum quadrato numeri A C; est numerus quadratus: vt demonstratum est in propositione octaua. & numerus AC etiam est quadratus. Quare duo quadrati habent rationem eam inter se, quam quinque ad vnum. Id quod fieri nequit.

Quod autem hoc in loco geometrica sit proportio, inde manifestum est. Quoniam A B secta est in puncto C, & inuentum est, quod rectangulum AB, BC rectis contentum, sit æquale quadrato rectæ CA. idcirco manifestum est; quod sit, vt BA, ad AC, sic AC, ad C B. hoc autem ex secunda

cunda consequitur geometrica medietate. Idem in sequentibus dicetur secari in extremam & mediam rationem. nunc vero cum nihil sciamus de ratione, idcirco non dixit extrema & media ratione secare, nec resoluitur, cum non definierit sectionem.

Ponamus rectam A B, esse vnitatum 8. & segmentum minus vnitatum 4. 56. & 50. & segmentum minus vnitatum 3. 3. & 10. erit rectangulum tota & minore segmento contentum vnitatum 24. & 25. & quadratum maioris segmenti eodem modo vnitatum 24. & 25.

PROPOSITIO XII.

IN *trigonis amblygoniis*. Vnde manifestum sit, quod A D, perpendicularis non cadat intra trigonum A B C: sed extra; si C D protrahatur demonstrandum est. Dicimus ergo quod fieri nequeat vt intra cadat. Nam si id fieri potest: cadat AE recta. Quoniam angulus AEB est rectus: & angulus A B E obtusus, atque recto maior, quod fieri nequit. Quare non intra cadit, sed extra. Id quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

IN *trigonis oxygoniis*. Quoniam in definitionibus libri primi, docet trigonum

num oxygonium esse quod tres habet acutos angulos: sciendum est, quod hoc in loco illud non sic intelligat: sed omnia trigona appellat oxygonia, quia omnia habent acutos angulos, etsi non omnes, tamen ad minimum duos.

Propositio itaque sic se habet. Omnis trigoni latus acutum angulum subtendens, minus potest, quam latera acutum angulum continentia, rectangulo. & reliqua quæ sequuntur. Quod si ergo rectangulum fuerit trigonum, accipies ex lateribus duobus angulum acutum continentibus, quod subtendit angulum rectum. Ita vt perpendicularis in illud latus cadat. Eodem modo si fuerit amblygonium.

Conuersum huius theorematis hoc est. Si quadratum rectæ AB. minus quadratis AB, CA, rectangulo quod his continetur rectis AC, CD, & reliqua quæ sequentur. Dico quod trigonũ ABC, sit oxygonium. Ducatur à puncto A. rectæ BC, ad angulos rectos, recta A D. & sit recta A D, æqualis rectæ B C. Quare quadrata rectarum BC, CA &c.

Finis libri secundi Elementorum Geometriæ Euclidis.

ISAACI

ISAACI MONACHI

SCHOLIA

In Tertium Librum Elementorum Geometriæ Euclidis

SCOPVS Euclidi est in hoc libro explicare accidentia circulorum, tam quoad lineas rectas, quam etiam quod ad angulos attinet.

PROPOSITIO I.

D*ati circuli centrum*. Sicut libro primo omnium simplicissimam trigonorum inquam figuram, nempe trigonum æquilaterum, eiusque constitutionem posuit statim ab initio: propter insequentes delineationes quæ faciendæ erant: Ita & hoc in libro, ab initio ponit centri inuestigationem, quia circularis generationis causa est.

Omnis itaque circulus, suum peculiare & pro-

& proprium centrum habet, sua natura definitum & circumscriptum. sed quoad nos, non omnis circulus, suum proprium centrum habet; sed is tantum cuius genesim videmus.

In prioribus itaque theorematibus, in quibus circuli iam facti erant, centra quoque existebant, manifesteque apparebant. in his vero theorematibus, in quibus de circulorum substantia quæstiones instituũtur, centrum quoque inuestigatur: quia ad essentiam circuli constituendam multum adiumenti adfert.

Hoc autem primum theorema videtur medium tenere locum, inter problemata & theoremata. propterea quod dum proponit aliquid quod faciendum est: problema: dum vero non ad faciendum, sed ad inuestigandum aliquid proponit: theorema videtur esse. Veruntamen magis dicendum est: esse theorema, quod propositionem habeat figurarum & verbis circumsctiptam: sicuti etiam idem dici potest de quarta propositione lib. primi. Propositis duobus trigonis & duobus angulis æqualibus, atque lateribus duobus æqualibus existentibus: inuenire utrum & bases sint æquales. Sicuti enim in illa propositione quæritur aliquod accidẽs, quod iam sua natura trigonis inest: Ita etiam hoc in loco, accidens aliquod circuli præsertim si con-

considerentus proprium problematis, & quod contrarium est propositioni: tum, longe magis hæc propositio, nomen problematis effugiet: nec tenere poterit.

Ex hoc theoremate demonstratur id, quod cum definitione circuli conuertitur. Nam si ad circumferentiam circuli, à puncto quodam, ex ijs quæ intra figuram sunt: omnes lineæ rectæ ductæ, fuerint æquales: tum figura illa, erit circulus. Ponamus autem non esse circulum, sed figuram aliquam rectilineam: & latus eius aliquod, in quod duæ rectæ lineæ æquales incidant: erit igitur trigonum æqui crurum, quod si nunc basis secetur in duas partes æquales: tum recta quæ ducta est, faciet angulos rectos: erit illa minor vtroque latere, id quod fieri nequit: quia proponitur quod omnes sint æquales, quotquot à puncto seu centro ad circumferentiam ducuntur.

PROPOSITIO IV.

SI in circulo. Quod si enim rectæ illæ per centrum ductæ essent, non opus erat inquirere an sese mutuo in duas partes æquales secarent, quia manifestum est, quod centrum ipsorum, sit ipsa sectio in partes æquales. Eodem modo si altera per centrum ducta fuerit: altera vero per centrum non fuerit ducta: ea quæ per cen-

trum

trum ducta est, nunquam bifariam secatur; quæ vero per centrum non est ducta, tum primum secabitur bifariam, quando ad angulos rectos est, recta per centrum ducta.

PROPOSITIO VI.

SI *duo circuli*. Quidam addunt (interne) hoc est, si duo circuli sese mutuo tangunt interne: ac si dicerent, *fieri posse*, vt si sese tangant externe: vnum & idem centrum habere possint. Id quod non est: verum siue interne, siue externe sese tangant, nunquam vnum & idem est ipsorum centrum. Quapropter superfluum est, si ponatur in propositione interne.

PROPOSITIO VII.

SI *in Circulo aliquo*. Cum isto theoremate conuertitur hoc theorema: Si in circulo aliquo, interne fuerit sumptum aliquod punctum, & ab hoc puncto, ad circulum ductæ fuerint aliquot lineæ rectæ, quarum vna quidem sit maxima; altera vero minima, ex reliquis nonnullæ quidem æquales, aliæ vero inæquales fuerint: tum maxima per centrum erit ducta, minima vero è directo posita ei, quæ per centrum est ducta, ita vt tota ex maxima

& mi-

& minima constans, circuli sit diameter: ex cæteris vero maiores, centro sunt vici- niores: æquales vero, æqualiter à centro distant.

Sit enim per punctum I, quod in circulo est, ducta recta linea maxima IA, minima IB. deinde recta IC, sit maior quidem quam ID, & æqualis rectæ IH. Dico quod recta AI, per centrum sit ducta, & recta IB, directo posita eidem: & IC recta vicinior centro, quam ID recta. & rectæ IC, IH, æqualiter distantes à centro. Quod si enim id non est, scilicet recta IA non sit per centrum ducta, sed aliqua alia, quæ à puncto I ducta est, etiam maxima communis erit & per C punctum ducta, sed & IA per centrum ducta est. quod fieri nequit. Quare IA, & IB rectæ sunt ex directo positæ, ita vt tota AB, sit diameter, Dico etiam quod IC, sit vicinior centro, quam recta ID. Nam si vicinior non est, cùm vel longius erit remota, vel æqualiter ab eo distabit: sed si longius remota fuerit, tum ID, maior est quam IC, quod fieri nequit. Nam IC proponitur minor esse quam sit recta IC. quod si æqualiter distabunt, etiam æquales inter se erunt, sed sunt inæquales, quod fieri nequit. nam IC vicinior est centro, quam recta ID & IC recta est æqualis rectæ IH. quare æqualiter à centro distabunt.

bus. quæ enim inæqualiter à centro distant, & ipsæ inæquales sunt.

PROPOSITIO XVIII.

Recta quæ circuli diametro. Conuertitur cum hac propositione: Si recta quædam linea ducta fuerit, quæ circulum tangit, & à puncto contactus, recta quædam linea, lineæ tangenti fuerit ducta ad angulos rectos, intra ipsum circulum: ea quæ producta erit, in alteram circuli partem, erit circuli diameter.

PROPOSITIO XXXIII.

In circulo angulus in semicirculo. Si omnes semicirculi propter similitudinem, æquales capiunt angulos: sunt enim recti: & segmenta circulorum maiora, angulos rectis minores: manifestum est, quod si similia fuerint segmenta: etiam angulos recipient æquales. quanto enim sunt maiora semicirculis, eo magis minuunt angulum rectum. Similiter & segmenta semicirculis minora, proportionaliter auget rectum. Vnde sequitur, quod circulorum segmenta similia, angulos capiant æquales.

Sed cum segmentorum anguli diuersi generis sint ab angulis rectilineis, quia mixti:

mixti: non comparantur cum illis sub certa magnitudine: nisi habita ratione maioris & minoris. Vnde etiam accidit vt progrediente maiore segmento ad minus: & angulo maiore existente, quouis angulo recto: in semicirculo fiat angulus rectus: & in segmento minore: progrediatur angulus ad angulum, qui recto est minor. Id quod absurdum esse videtur. Ea enim quæ in contrarium mutantur: *solent per media* quædam progredi. Possunt etiam eiusmodi immediata in cæteris quoque inueniri: quæ hac ratione sunt opposita. Nam linea quæ circulum claudit, cum conuexa sit, & concaua, non potest esse recta.

PROPOSITIO XXXV.

S*I in circulo duæ*. Præsens hoc theorema duobus modis in quæstione collocari potest: vno quidem sic. Si rectarum in circulo sese mutuo secantium: vna quidem per centrum fuerit ducta: altera vero per centrum non fuerit ducta: neque secta sit in duas partes æquales à recta per centrum ducta. Altero vero sic. Si etiam hoc modo fuerit, vt vna per centrum ducatur: altera vero per centrum non fuerit ducta: ab altera secta fuerit in duas partes æquales. Est autem talis demonstratio. Sit circulus B C A D: & in eo rectæ sese

mutuo

mutuo secantes in puncto E: recta quidem CD per centrū ducta: recta vero AB nō sit per centrum ducta: neque AB recta sit secta in duas partes æquales à recta C D. itaque non erit ad angulos rectos, quod per se manifestum est, ex supra demonstratis. Sumatur centrum circuli: & sit punctum F. atque à puncto F rectæ A B: ducatur ad angulos rectos, seu perpendicularis F G, & ducantur rectæ F B, F G. Quoniam recta quædam C D, secta est in partes quidem æquales in puncto F: inæquales vero in puncto E. Erit igitur rectangulum CE, E D rectis contentum: cum quadrato à recta FE descripto, ęquale quadrato à recta F D descripto: verum recta FD. est æqualis rectæ FB. Quare rectangulum rectis CE, ED contentum: cum quadrato à recta F E, descripto: est æquale quadrato rectæ F B. Verum quadrata rectarum B G, GF, sunt æqualia quadrato FB. quia angulus ad punctum G, est rectus. sed quadrato rectæ FE, sunt æqualia quadrata rectarum FG, GE. siquidem rursus angulus ad punctum G est rectus. Quapropter rectangulum C E, ED rectis contentum: cum quadratis rectarum FG, GE, est æquale quadratis rectarum BG, G F. commune auferatur quadratum rectæ G F. Quare rectangulum C E, ED rectis contentum, cum quadrato rectę GE: est

est æquale quadrato rectæ B G. Verum rectangulum BE, EA rectis contentum, cum quadrato rectæ E G: est æquale quadrato rectæ B G, quia recta A B, secta est in partes quidem æquales in puncto G; in partes vero inæquales, in puncto E. Vnde etiam, rectangulum rectis C E, E D contentum, cum quadrato rectæ E G, est æquale rectangulo AE, EB rectis contento, cum quadrato rectæ E G. Commune auferatur, quadratum rectæ E G. Ergo rectangulum rectis CE, ED, contentum est æquale rectangulo rectis A E, E B contento.

Rursus sit vna harum per centrum ducta: vt recta C D: altera vero non sit per centrum ducta, vt recta A B, & secetur per rectam C D, in duas partes æquales. in puncto E. manifestum itaque est, quod etiam secta sit ad angulos rectos: & sumatur centrum circuli, & sit punctũ F: ducatur etiam linea recta, F B. Quoniam recta quædam linea C D, secta est in partes quidem æquales in puncto F, & in partes inæquales, in puncto E: erit igitur rectangulum rectis C E, E D contentum, cum quadrato rectæ F E, æquale quadrato rectæ F D. sed recta F D, est æqualis rectæ F B. Quare & rectangulum CE, ED, rectis contentum, cum quadrato rectæ F E, est æquale, quadrato rectæ F B. sed qua-

 drato

drato rectæ F B. sunt æqualia quadrata rectarum BE, EF. erit igitur rectangulum rectis CE, ED, contentum, cum quadrato rectæ FE, æquale quadratis rectarum BE, E F. Commune auferatur, quadratum rectæ FE. Erit igitur rectangulum C E, E D, rectis contẽtum, æquale quadrato rectæ B E. sed recta B E, est æqualis rectæ E A. Quare rectãgulum CE, ED rectis contentum, est æquale rectangulo rectis BE, BA, contento.

Finis Libri Tertij Elementorum Geometriæ Euclidis.

LIBER

LIBER QVARTVS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ EVCLIDIS.

ETSI de inscriptionibus, & circũscriptionibus, doctrina, varia & multiplex sit: attamẽ non prolixe eam persequitur: sed postquam ad hexagonum peruenit: & in fine quædam de pentecædecagono, tanquam ijs quæ ad astronomiam plurimum conducunt, tradidisset: finem imponit huic doctrinæ.

Primum vero theorema est lemma alterius lemmatis in quo constitutio pentagoni traditur: & quæ ei necessaria erant: in tali distributione, & distinctione, atque ordine: ea proponit, & in ordinem redigit. Et quia constitutio trilateræ figuræ: simpliciorem habet delineationem: priore collocata est loco: & antecedit reliqua theoremata.

PROPOSITIO II.

Reliquus igitur angulus B A C, reliquo angulo EDF, est aequalis &c. Quomodo id fiat, vt angulus B A C, sit æqualis angulo EDF, demonstrabitur. Id quidem in libri primi propositione 26. est demonstratum. Vbi docet quod si fuerint duo trigona, quæ duos angulos duobus angulis habeant æquales, alterum alteri: habeant etiam vnum latus, vni lateri æquale, & reliqua: hoc vero in loco, nullum latus trigoni A B C, alicui lateri trigoni D EF, proponitur æquale.

Respondemus ergo, quod & sic demonstrari possit, id quod propositum est. Sint & proponantur eadem trigona A B C, D E F, quorum duo anguli A B C, A C B duobus angulis DEF, DFE, sint æquales: alter alteri. sit etiam vnum latus ad æquales illos angulos inæquale vni lateri ad æquales angulos constituti: & ponatur latus B C, maius latere E F. Dico quod & hoc modo angulus BAC, æqualis sit futurus angulo EDF. Ponatur enim lateri EF æquale latus B H, vel basis B H, basi E F æqualis: & per punctum H, ducatur rectæ CA æquidistans recta H L. Quoniam nunc rectæ CA, HL, sunt æquidistantes: & in eas incidit recta B C; idcirco angulus

lus

lus BHL, angulo B C A est æqualis: sed angulus BCA, angulo EFD, est æqualis, quare & angulus B H L, angulo E D F æqualis erit. Per eadem demonstrabitur, quod angulus BIH, angulo B A C sit æqualis. Verum angulus B L H, angulo E DF, est æqualis: Erit igitur etiam angulus BAC, angulo EDF æqualis.

Finis libri Quarti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

Liber Quintus.

SCOPVS huius quinti libri est: præcepta tradere proportionum, & rationum. & est hic liber communis Geometriæ & Arithmeticæ, & Musicæ: & vt vno dicam verbo, totius mathematicæ scientiæ. *Quæ enim in hoc libro* demonstrantur, non solum conueniūt geometricis theorematibus: sed omnibus ijs, quæ Mathematicæ subiacent disciplinæ, vt antea dictum est. atque hic est scopus huius libri.

Quidam vero aiunt, hunc librum, eiusque doctrinam ab Eudoxo inuentam traditamque esse: qui Platonis fuit præceptor. Cum itaque scopus eius sit tractare doctrinam proportionum: & proportio sit rationum habitudo: Idcirco primo loco necessum est scire: quæ & quales sint rationes. quia prius simplicia quam composita cognoscere conuenit.

Quandó itaque quędam inter se comparantur, exempli gratia, duæ magnitudines: tũ nominãtur istæ duæ magnitudines termini, differentia vero, qua inter se vna ab altera differt, interuallum seu distantia: comparatio denique vnius magnitudinis ad alteram magnitudinem habitudo, quam veteres appellarnnt rationem. postremo comparationem aut habitudinem similitudine quadam factam, huius rationis, ad alteram rationem, appellarũt analogicam proportionem, & proportionalitatem, ne scilicet vt hæc magnitudo, ad hanc magnitudinem conferatur: sed vt hæc ratio ad hanc rationem.

Ipsa quoque comparatio, ratio dicitur esse rationis. Vt si fuerint duæ lineæ rectę, quarum altera ad alteram duplam habeat rationem: quadratũ descriptũ á recta duplam rationem habente, dicetur habere rationem quadrupiam, ad quadratum ab altera recta descriptum, quam habeat maior recta, ad minorem rectam. Nam quæ longitudine sunt dupla. potentia sunt quadrupla, cum itaque ratio quadratorum, sit quadrupla: & rectarum ratio dupla erit. atq; hæc ratio nominatur rationis ratio. sed est illa ratio, quæ ad quantitatem pertinet.

Duplex enim est ratio; vna dignitatis & excellentiæ, altera vero quantitatis. Dignitatis quidem ratio nullam habet speciem, quæ nobis vsui esse in hac doctrina possit: sed ratio quantitatis est quintuplex. sic. Multiplex. vt 6. ad 3. superparticularis vt 4. ad 3. Superpartiens vt 5. ad 3. atque hæ tres sunt simplices: ex quibus Multiplex est simplicior quam reliquæ. reliquæ ex duarum fiunt compositione. Multiplex superparticularis, vt 7. ad 3. & multiplex superpatiens vt 8. ad 3. Hypologi dicuntur, minores rationes ad maiores. Prologi vero, maiores ad minores.

Sciendum etiam est: quod hic liber in duas sit diuisus partes: & contineat in se prima pars simplicium rationum doctrinam. hoc est doctrinam multiplicium, secunda pars vniuersalem de omnibus rationibus præceptionem. Necesse enim est, vt in omni re explicanda, antecedat, vt dictum est, priore loco simplicium doctrina: atque eodem modo quo liber hic diuisus est, etiam definitiones sunt diuisæ. Nam definitiones priores, de partibus & multiplicibus loquuntur: sequentes vero vniuersalem habent omnium rationum explicationem.

DE-

DEFINITIONES.

Pars est. Vulgus appellat partem, id quod minus est in vnaquaque eiusdem speciei re. vt in numeris 3. est pars de 5. sed Geometra partem appellat, eam magnitudinem, quæ æqualiter metitur, magnitudinem maiorem. hoc est, quando facta dimensione aut diuisione, id quod relinquitur fuerit æquale ei quod alterũ metitur. sed si contingat, vt quod post factam diuisionem (vt vocant Logistici) aliquid supersit, tum minus non erit pars, sed partes, vt in numeris 3. metitur quidẽ 5. sed facta diuisione relinquitur 2. qui numerus æqualis non est 3. Vnde etiam 3. non sunt pars 5. sed partes. nempe quinæ partes.

Ratio est. Addidit, ratio est: vt indicaret habitudinem postea duarum magnitudinum. vt distingueret has ab alijs quantitatis speciebus. Præterea, eiusdem generis.) nequis forsitan lineam cum superficie conferret. quia hæc inter se non sunt proportionalia. Tandem addit, secundum quantitatem.) vt seiungeret has, ab infinitis magnitudinibus: quia quantitatis continuæ, terminus est *Pelicotes*; & quantitatis discretæ, terminus est *Posotes*. Nam discreta quantitas non est magnitudo, sed multitudo. Postremo loco addit, aliqua habitudo.) Sunt enim vt antea dictum est quinque species habitudinis.

Aliter.

) *Eiusdem generis*, Dicit, eiusdem generis esse debere, propterea quod ea, quæ eiusdem generis non sunt; nunquam rationem aliquam inter se habent. Neque enim linea ad planam superficiem: neque plana superficies, ad solidum, rationem aliquam habere potest. sed linea ad lineam, superficies ad superficiem: & superficies plana ad planam superficiem.

Magnitudinum. Adiecit hoc explicationis ergo, & distinctionis gratia; vt excluderet eas, quæ habitudinem quidem inter se habent: sed non eam quę secundum magnitudinem consideratur. vt pater ad filium, dominus ad seruum, amicus ad amicum, dextrum ad sinistrum. dicitur etiam alia habitudo esse secundum id quo quis habet, aut deficit, vel non habet.

Rationem habere. In numeris quidem, omnis ratio numerorum, habet quantitatē quæ effari potest: sed in magnitudinibus est ratio aliqua, quæ non potest exprimi per numerum. Sunt enim quædam quæ non nisi solo quem habent inter se excessu cognoscuntur. quantitas vero excessus, est incognita. atque hæc dicuntur habere rationem excessus: non autem eam rationem quam habet numerus ad numerum. ideoque

que addidit in definitione rationis magnitudinum: si secundum quantitatem.) quia ratio effabilis, fit secundum magnitudinem, & secundum multitudinem. neque vero semper & omnino consequitur, quod ratio secundum quantitatem, etiam sit effabilis. Quare postquam vniuersaliter definiuisset, quænam magnitudines rationem inter se habeant: & cuiusmodi illæ essent: addidit, quæ multiplicatæ sese mutuo excedere possunt. hoc omnibus applicare potest effabilibus quas rationales vocant.) & ineffabilibus seu irrationalibus. qualis est quadrati diameter. in rationalibus rationibus quidem diameter ad latus, est irrationalis. sed in excessus ratione, habet ratione eam, quam habet maius ad minus & fieri potest, vt latus multiplicatum aliquando excedat diametrum.

In eadem ratione. Si quis per numeros velit explicare dilucidiratis gratia, quænam rationem inter se habere dicantur: id facere poterit hoc modo.

Sint quatuor nobis numeri propositi:& scire cupimus: vtrum in eadem sint ratione, primus ad secundum. & tertius ad quartum: an vero habeant maiorem rationem primus ad secundum, quam tertius ad quartum: an vero minorem. Multiplicentur tertius & quartus inter se: ita vt qui ex multiplicatione fiunt numeri, sint inter se æquales, Postea multiplicentur primus in quartum, & secundus in tertium. Quod si nunc numeri ex multiplicatione primi in secundum fuerint æquales: dicemus in eadem ratione esse, primum ad secundum, & secundum ad tertium. Quod si vero numerus ex multiplicatione primi fuerit maior numero ex multiplicatione secundi: tum dicemus maiorem habere rationem, numerum primum ad secundum, quam habeat tertius ad quartum. Sin vero numerus ex multiplicatione primi, fuerit minor. quam numerus ex multiplicatione secundi: tum minorem rationem habere dicetur: primus ad secũdum, quam habeat tertius ad quartum. Exempli gratia ponantur in eadem ratione esse hi numeri. 12. 6. 8. 4. Multiplicentur interse tertius & quartus. 8. & 4. fient 32. & simili modo multiplicetur primus 12. in secundum 6. fiunt 48. & multiplicetur secundus 6. in tertium 8. fiunt etiam 48. Manifestum ergo est quod sint in eadem ratione. 12. ad 6. & ... ad 4. Nunc sumamus alios numeros, ita vt primus maiorem rationem habeat ad secundum, quam tertius ad quartum & sint hi. 10. 4. 6. 3. Multiplicentur inter se 6. & 3. fiunt 18. & 3. in 6. fiunt etiam. 18. postea multiplicentur 10. & 4. fiunt 40. & multiplicentur 4. in 6. fiunt 24. Fit ergo manifenifestum quod 16. ad 4. maiorem habeant rationem, quam 6. ad 3.

Denique sumamus alios numeros, vt primus ad secundum minorem rationem habeat, quam tertius ad quartum. & sint hi numeri. 12. 7. 18. in 9. nunc multiplicentur 18. in 9. fiunt 162. & rursus 9. in 18. fiunt 162. postea 12. in 9. multiplicentur fiunt 108. & 7. in 18. fiunt 126. & fit apertum atque manifestum, quod primus ad secundum minorem rationem habeat, quam tertius ad quartum.

Quando vero tres magnitudines fuerint proportionales. Non dicit quod duæ rationes sint vnius duplæ. & hoc quidem esset: sed quod ratio quæ fit ex duabus, sit dupla, vt 8. 4. 2. vel 9. 3. 1. quia in prioribus numeris duæ rationes duplæ, sunt continuæ quam rationem habet 8. ad 4. eam habet 4. ad 2. sed 8. ad 2. vel primus ad tertium, non habet duplam rationem, quam habuit ad 2. hoc est secundum. sed bis duplam, hoc est quam habet primus ad secundum, & quam habet secundus ad tertium.

Simili ratione fit in triplis 9. 3. 1. Nam 9. ad 3. habet rationem triplam: & 3. ad 1. eodem modo triplam. sed 9. ad 1. dicitur bis habere rationem, quam habet ad 3. siquidem inter 9. 3. & 1. sunt duæ triplæ rationes. Idem in alijs sentiẽdum est. Atq; sic se habet, si tres fuerint magnitudines.

Quod

Quod si vero fuerint quatuor magnitudines, tum prima ad quartam triplicatam habebit rationem: quam habet ad secundam. quia inter numeros quatuor in eadem ratione existentes, sunt tres eædem rationes. atque eam ob causam dicitur prima ad quartam habere ter eam rationem, quam habet ad secundam. hoc est triplicatam.

Compositio rationis. Recentiores hanc addiderunt definitionem. non enim vnum & idem est, compositio magnitudinum, & compositio rationum. Nam hic quidem antecedens compositum consequenti, magnitudo inquam cum magnitudine. tum tota fiet magnitudo facta & composita ex magnitudinibus, quæ etiam erit æqualis magnitudinibus, ex quibus ipsa est facta & composita. Verum rationum compositio, aliam facit rationem: quemadmodum etiam in sequenti libro dicit, Ratio ex rationibus composita esse dicitur &c.

Sed sicut ego in antiquis legi libris, hāc compositionem vocarunt *Synthenti logon*: sic etenim in insequentibus theorematibus loquitur Euclides, & vocat *Synthenti*. nihilominus tamen etiam hac ratione ex *Synthenti* intelligitur *Synthesis*.

Existimo tamen melius esse, si quis dicat esse *Synthesin* compositionem terminorum, non autem rationum. Voco autem *Horus*

ter-

terminos; ipsas propositas magnitudines: non autem habitudinem ipsam, quam inter se habent.

Simili modo & diuisio. Non, vt sic dicam, intelligitur rationis diuisio esse: duplæ in sesquialteram & sesquitertiam: aut triplæ in sesqui alteram & duplam: sed magnitudinum diuisio. Nam excessus antecedentis ad consequentem, consideratur ad consequentem.

Perturbata. vt (8. 4. 1.) vt 8. ad 4. sic 6. ad 3. & vt 4. ad 1. (24. 6. 3.) sic 24. ad 6.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO II.

P*Rima magnitudo*. Hoc theorema est in demonstrationem assumptum, definitionis superioris in qua docuit, quæ magnitudines, in eadem sint ratione. vbi sic inquit. In eadē ratione magnitudines esse dicuntur, quando æquemultiplices magnitudines primę & tertiæ, hoc est antecedentiū, æque multiplicibus secundæ & quartæ, hoc est cōsequentiū, vel simul fuerint ęquales, vel simul eas excedunt, & ijs maiores sunt; vel simul deficiūt, & ijs minores sunt. Quod autē & ipsæ cū illis eandem rationeē habeāt: id hoc in theoremate demonstrat.

De his vero nullam ab initio mentionem

nem fecit: quia non potuit dicere, illas magnitudines in eadem ratione esse: quarum æquemultiplices magnitudines in eadem sunt ratione: præsertim cum illud ipsum nos inuestigemus: quidnam illud sit, Esse in eadem ratione. Cum itaque ab initio dixisset: Simul excedere, simul deficere, simul æquales esse: demonstrat in hoc theoremate: quod etiam in eadem sint ratione. Ita vt manifestè appareat definitio magnitudinum in eadem ratione existentium talis esse. Quando primæ & tertiæ magnitudinis æqualiter multiplices magnitudines, ad secundæ & quartæ æqualiter multiplices magnitudines eandem habuerint rationem. Demonstrat vero illas magnitudines in eadem ratione esse, per hoc theorema & per conuersum.

PROPOSITIO VI.

SI *duæ magnitudines*. Non propositum est in hoc theoremate demonstrare, quod si à multiplicibus multiplicia auferantur: tum reliqua magnitudo vel erit æqualis, vel multiplex: hoc enim per se est manifestum. sed quod si duæ magnitudines ita se vt dictum est habeant, si reliqua prioris multiplex est, & altera alterius multiplex erit: sin æqualis, vt si quadruplæ fuerint: & triplæ ex ambabus fuerint sublatæ: tum æquales erunt ambæ ijs, quæ post factam triplæ subtractionem fuerunt relictæ: sin fuerint duplæ, tum earundem duplæ etiam erant.

PROPOSITIO VIII.

INæqualibus magnitudinibus. In ipso demonstrationis contextu. prope eum locum vbi hæc sunt verba, conclusionis. Quare A B ad C maiorem rationem &c.) Sunt hoc in loco quatuor magnitudines: prima quidem A B, secunda C, tertia, A & quarta C: quia C bis sumitur: pro secunda & pro quarta: atqui primæ multiplex est E D, secundæ vero C, multiplex est FG: tertiæ etiam A, multiplex est E. Ad hæc E D, primæ A B: est maior quam sit F G. quæ magnitudo F G, est multiplex secundæ magnitudinis C, & magnitudo E, multiplex tertiæ magnitudinis A est minor magnitudine FG, quę FG magnitudo est multiplex quartæ magnitudinis C. Quoniam nunc primæ magnitudinis multiplex, maior est secundæ magnitudinis multiplici: & tertiæ magnitudinis multiplex non sit maior multiplici quartæ magnitudinis: idcirco magnitudo A B, ad magnitudinem C, maiorem rationem habet: quam magnitudo A, ad ipsam C magnitudinem. Per definitionem quæ dicit.

Quan-

Quando vero æque multiplicia. & quæ sequuntur.

PROPOSITIO XVI.

SI *quatuor magnitudines*. Hoc in loco mentionẽ facit *Enallax* permutatæ rationis. & manifeſtè patet, quod & cæterarum facit mẽtione *Synthenti*, *anaſtrepſanti*, & *anapalin*, & *di iſu*, & inordinatæ proportione, atque ordinatæ.

PROPOSITIO XVII.

SI *magnitudines compoſitæ*. Hic initium facit *Dielnonti*, & *ſynthenti*, & *anatrepſanti*, & *anapalin*, & *di iſu* in proportione inordinata, & ordinata.

Veruntamen huius theorematis lemma eſt, theorema præcedens vel *Enallax*. ſicuti & 20. theorema, theorematis 21. ſeu *di iſu* in proportione perturbata: & 22. ſimili modo 23. lemma eſt.

Finis libri quinti Elementorum Geometriæ Euclidis.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

Liber Sextus.

DEFINITIONES.

RECIPROCAE *figuræ sunt*. Si in figuris latera fuerint proportionalia tum omnino reciproca erunt, sed non viceuersa quæ latera reciproca habent, illarum etiam latera proportionalia sunt, simpliciter: nisi etiam fuerint æqualium angulorum figuræ.

PROPOSITIO XI.

D*Atis duobus*. Arhithmeticæ vero medium terminum proportionalem in seipsum multiplicatum, diuides antecedentem, hoc est primam rectam: & quotus numerus, erit tertius proportionalis.

PRO-

PROPOSITIO XII.

D*Atis tribus*. Arhithmeticè, secundam in tertiam multiplicabis: & per primam diuides productam. & quotus qui erit numerus, erit quarta recta proportionalis.

PROPOSITIO XIII.

D*Atis duobus rectis*. Arhithmeticè sic inuenies, mediam proportionalem. Extremas in se multiplica, & numeri producti, sume latus quadratum: siue sit rationale, siue irrationale: & habebis mediam proportionalem.

PROPOSITIO XIV.

P*Arallelogramma*. Illa quidem parallelogramma, quæ habent vnum angulum vni angulo æqualem: & reliquos reliquis æquales habent: alterum alteri: omnino vniuersaliter sunt æquiangula. verum hoc in loco propter illam comparationem laterum vnum angulum continentium: dicit quæ habent vnum angulum, vni angulo æqualem: sed trigona sic se non habent. Fieri enim potest, vt trigona æqualia, vnum angulum vni angulo æqua-

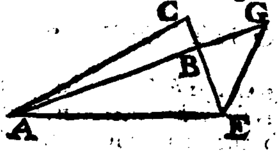
lem

lem habeant: veruntamen non habeant reliquos reliquis æquales. vt per omnia sint trigona æquiangula.

PROPOSITIO XV.

Aequalia trigona quæ habent. Trigonis æquiangulis solis hoc contingit: vt omnia latera habeant proportionalia: sed non quod sint ratione reciproca. Trigonis vero æqualibus, & vnum latus, vni lateri æquale habentibus, accidit: quod latera sint omnia reciproca. quia latus lateri est æquale: alterum alteri; & ratio æqualitatis conuertitur ad seipsam, hoc est ratio quę sumitur ex antecedente & consequente, eadem est & indifferens. Ita vt quędam trigona tantum latera habeant proportionalia: quædam vero trigona habeant latera reciproca: denique nonnulla trigona habeant latera proportionalia & reciproca. Sunt autem priora quidem trigona, quæ æquiangula quidem sunt: sed non æqualia. secundaria vero, quæ ęqualia quidem sunt trigona, & vnum angulum, vni angulo habent æqualem: verum non sunt æquiangula. Cætera vero præter hæc trigona, sunt & æqualia & æquiangula.

Quod autem sint trigona æqualia, & vnum angulum vni angulo æqualem habenbentia: ita tamen ut non sint æquiangula: id inquam manifestum est ex numeris quos in schemate & figura proposuimus.



Quoniam enim trigoni quidem BEG, duo latera, BE, BG, sunt inter se æqualia: & anguli ad basim eiusdem trigoni, sunt inter æquales. Præterea in trigono ABC: cum duo latera BA, BC sint inæqualia: etiam anguli ad basim sunt inæquales. Vnde sequitur quod BEG trigonum, non sit æquale A B C trigono. Id quod erat demonstrandum.

FINIS.

ISAACI

ISAACI MONACHI
PROLEGOMENA
In Euclidis Elementorum Geometriæ Libros.

Definitiones Geometriæ, duæ.

GEOMETRIA est scientia magnitudinum, & earum rerum quæ his accidunt. Elementa vero inscribuntur Geometriç, quia nobis suppeditant principia disciplinæ mathematicæ. Aliter Geometria est scientia, quæ versatur circa quantitatem continuam, quæ nullum per se habet motum: quæ etiam dimensionem inuenit longitudinis, latitudinis, & profunditatis, per syllogisticas demonstrationes, factas ex axiomatibus, sententijs communibus, & cęteris his similibus demonstrandi rationibus.

VARIA
MISCELLANEA
AD GEOMETRIÆ
Cognitionem necessaria ab *Isaaco Monachio collecta.*

GEOMETRIA ab initio ab Aegyptijs inuenta est: Thales vero Milesius, primus fuit qui in Græciam hanc transtulit disciplinam: post Thaletem vero Mamertius Stesichori poetæ frater, & Hippias Elæus hanc excoluerunt scientiam. post quos subsequutus est Pythagoras: qui paulo altius cum considerasset huius scientiæ principia: omnia theoremata absque materia, & intellectu solo atque abstracte perlustrauit. Pythagoram Anaxagoras & Plato sunt sequuti, & Oenopolis Asiaticus, Theodorus Cyrenaicus, & Hippocrates qui antecessit Platonem: Leodamas Thasius, & Archytas Tarentinus, Theętetus Atheniensis, Eudoxus Cnidius, qui tribus proportionalibus, alias tres proportionales addidit:

didit: & vt vno dicam verbo, quamplurimi alij post Thaletem extiterunt in Grecia Geometre: inter quos & Euclides fuit qui Elementa conscripsit Geometrię: non multis annis iunior ijs, quos enumeraui. Vixit enim tempore primi Ptolemęi: ita vt iunior quidem sit Platone: sed prior ętate ipso Eratosthene & Archimede: qui duo vno eodemque vixerunt seculo.

Dicimus etiam, quod hoc nomen Mathematicę, & mathematicarum disciplinarum, ideirco his scientijs sit datum, quia omnis mathesis est *Anamnesis*, hoc est, recordatio: non externè menti & rationi accedens: sicuti imaginationes sunt, quę ab rebus sensilibus imprimuntur nostris cogitationibus: neque etiam accessoria quòd sint: sicuti quæ in opinionibus hominum versantur. sed tales sunt, quæ cum ex ijs, quæ apparent excitantur: & interne ab ipsa ratione in seipsam conuersa secundum species proposita sunt: atque priore loco ipsa scientia hęc assumit in seipsam; quamuis non, in actum eas per seipsas producat scientias: siquidem omnibus modis substantialiter & occulte has in se continet. tum vero has profert scientias, quando impedimenta quæ à sensibus oriuntur aufert: quia sensus copulant rationem hominis cũ rebus partilibus: imaginationes autem eandem coniungunt formalibus motibus: denique cupiditates implicant rationem hominis, vitę adfectibus obnoxiam. omne vero partibile, impedit conuersionem eam quæ fit in seipsam, & in vnum punctum. Aristoteles enim quodam in loco dicit: quod qui contemnunt studia mathematica, non gustarint iucundas illas voluptates, quas ex his percipimus studijs. Plato etiam dicit, mathematicam disciplinam purgare mentem nostram: & ita informare, vt ad quęuis abstrusiora percipienda habilis atque idonea sit. verum mathemata recedunt quidem ab illa impartibili & diuina natura: sed excellētiora sunt quam partibilis illa sit rerum essentia. post mentem ipsam, quæ supremum tenet locum, secundaria esse mathemata: sed perfectiora, certiora, & puriora esse, quam sint, quę opinionibus hominum cognoscuntur.

Diuidunt Philosophi scientiam dupliciter: in eam quæ nulla vtitur hypothesi: & in alteram quæ hypothesi vtitur: prima illa quę nulla vtitur hypothesi est, vt aiunt, quæ vniuersarum rerum cognitionem in se habet: & quæ vsque ad boni, & summæ omnium rerum causę comprehensionem ascendit: quæ etiam finem extremum propositum habet: ipsum met summum bonum.

Altera vero, vt Philosophi docent, est

quæ

quæ certa & definita habet principia, ex quibus demonstrat ea quæ principia sequuntur: neque ad principium, sed ad finem progreditur. Cum itaque & ipsa mathematica scientia vtatur hypothesibus: idcirco inferior est summa illa scientia, quæ nullis vtitur hypothesibus,& omnium est perfectissima scientia. siquidem vna tantum est vera & essentialis scientia rerum, per quam omnia quæ sunt & existunt, comprehendimus: & à qua omnium reliquarum scientiarum principia deducuntur: ita vt alijs quidem propiora quæ sunt communicet: alijs vero remotiora. Sicuti vero mens superat rationem hominis, & sursum ducit principia, atque ex seipsa rationem hominis perficit: ita quoque Apodeictica purissima philosophiæ pars existens, proxime superat mathemata & in se comprehendit vniuersarum rerum mathematicarum solutionem seu doctrinam. omnes etiam potentias seu facultates quas habet perficiendi, iudicandi & intelligendi, varijs & multiplicibus mathematicis scientijs participat atque communicat. Analyticam intelligo facultatem, & diuisoriam, definitoriam, & apodeicticam; quibus facultatibus præeuntibus mathematica, quasi ducta, & inuenit nonnulla per analysim ac synthesim, & diuisionibus factis quædam recenset, & definifinitionibus explicat: & demonstrationibus, quæ in quęstione erant proposita, confirmat, dum has de quibus loquor methodos, rebus sibi subiectis recte & bona ratione accommodat.

Scopus vero huius geometricę institutionis elementaris duplex est: alter enim res subiectas, de quibus doctrina instituitur, respicit: alter vero ipsum discentem. Quod si enim res subiectas intueri velimus, dicemus, geometram, omnem hanc geometricam doctrinam instituisse propter mundi figuras, quas *Corpora regularia* vulgo vocant: quibus mundus consistere dicitur. incipit enim à simplicibus, & finem facit in constitutione quinque corporum regularium. atque singula quidem seorsim describit: nihilominus tamen sub finem omnia hęc vni inscribit sphęrę; & quam inter se rationem hęc habeant, demonstrat. Ideoque in singulis libris quidam existimarunt, scopos librorum singulorum ad mundum referendos esse. eamq; ob causam, vtilitatem quam ad contemplationem vniuersitatis consequendam pręstant, conscripserunt.

Ad discentem quod attinet: dicimus scopum Elementorum esse: vt per hanc elementarem doctrinam ratio discentis recte & absolutè informetur, & imbuatur in his, vt eo perspicacius vniuersæ geome-

tria

triæ doctrinam intueri possit, & adsequi quæ in hac sciétia sunt abstrusissima. Nam qui ab his elementis, discendi initium faciunt: etiam alias partes huius scientiæ cognoscere poterunt.

Nam in his traduntur, & collecta sunt principalissima & simplicissima theoremata, & primis hypothesibus maxime cognata: atque ratione bona, conuenientique modo disposita & distincta. Neque etiam fieri potest, vt absque his, variam ac multiplicem cæterarum rerum geometricarum cognitionem, percipere possimus. siquidem reliquarum rerum geometricę demonstrationes, his vtuntur tanquam manifestissimis; & ab his tanquam iam notis, ordiuntur suas demonstrationes. Atque ex his nunc patet, quod scopus horum elementorum sit: discentem informare in his primis elementis: vt vniuersam geometrię doctrinam sibi comparare possit: & vt distinctas mundanarum figurarum constitutiones tradat.

Sed vt aliquid quæramus de inscriptione, necessum erit: elementaris vnde dicatur doctrina, & elementum: vnde etiam elementares libri dicuntur. Sciendum itaque, quod elementa dicantur ea, quarum contemplatio diffusa est per reliqua scientię subiecta: & necessaria sunt ad illorum subiectorum perceptionem consequédam:

& per quæ nos dubia, quæ in his accidant, soluere possumus. Quemadmodum enim in grammaticis sunt principia prima & simplicissima, & indiuisibilia, vt vocantur elementa: hoc est literæ, & syllabæ. ex quibus omnis dictio, & omnis constat oratio: ita quoque totius geometriæ sunt quædam primaria & antecedentia theoremata, quæ principiorum instar sunt respectu insequentium.

Menæchmus autem dicit, quod elementum dupliciter sumatur: id enim quod cōfirmat & demonstrat aliud: dicitur esse elementum eius quod confirmatur. vt primum problema Euclidis, secundi elementum esse dicitur: & quartum quinti. Deinde etiam dicitur elementum esse id quod simplex est: & in quod id quod compositum est, diuiditur. Hoc sane tantum ijs conuenit, quæ solummodo sunt omnium maxime primis principiis proxima. sicuti postulata & axiomata, sunt elementa theorematum. Iuxta hanc vero elementi significationem, etiam Euclidis elementa sumi possunt, & sic etiam sunt conscripta & distincta ab alijs geometriç scriptis: & partim geometriæ, partim stereometriæ elementa dicuntur esse. eodem etiam modo in Arithmeticis elementa numerorum extant: vt & multi fuerunt qui astronomica elementa conscripserunt.

Diffi-

Difficile vero est delectum facere propositionum elementarium: & illas rite disponere, à quibus reliquæ dependeant, & in quas resoluuntur cæteræ propositiones. Speciem quoque elementorum habet propositiones: quæ aliquo vsque suam extendunt vim: & simplicitatem in se habent atque facilitatem. non autem vt elementa, ita & hæ propositiones ad vniuersam sciẽtiam, eandem habent vtilitatem & necessitatem simplicem, apertam, & facilem, vt elementa. Denique propositiones, quæ neque longe lateque diffusam habent cognitionem; neque adeo dilucidam & perspicuam habent explicationem: tales neq; elementares sunt propositiones, neque elementorum speciem habent.

Sunt autem geometriæ principia, Definitiones, Postulata, & Axiomata. quæ quidem inter se differunt. Quandocunq; enim id quod principij loco sumitur: & discenti notum est: & per se fidem facit: talis propositio inquam appellatur axioma. vt. Quę eidem sunt æqualia, etiam inter se sunt æqualia, & quæ sequuntur axiomata. quæ etiam communes appellantur sententiæ. propterea quod omnibus ferè hominibus etiam imperitis, eiusmodi propositiones cognitæ sunt: nec vlla indigent demonstratione.

Quando vero is qui propositionem au-

dit, fidem ei non habet: eamque per se. nihilominus tamen simul illam esse, ponit: & docenti concedit eam: ita vt non quærat demonstrationem alicuius accidentis: quod res de qua est quæstio accidere possit: talis propositio, appellatur Definitio. vt si dicam circulum esse figuram planam, & reliqua quę sequuntur; neque enim communi notione absque præceptione & institutione hoc prius scimus; veruntamen cum definitionem hanc circuli audimus, concedimus eam absque vlla adhibita demonstratione, eadem est in cęteris definitionibus ratio.

Cum vero simili, vt ante dictum est, ratione, is qui propositionem aliquam audit, communi ratione eam non intelligit: nec per se fidem habet propositio: nihilominus tamen ponit illam esse veram: & concedit eam docenti: tum non est definitio: sed tantum iubemur aliquid facere, quod & ipsum absque demonstratione sumitur, & appellatur *Aetima* postulatum, vel *Doma* datum, vt petatur a quouis puncto, ad quoduis punctum lineam rectam ducere. & reliqua quæ sequuntur.

Quod si vero quis dixerit, Axiomata esse theoremata *Anapodeicta*, quæ demonstrari non possunt, nec debent: & Postulata esse problemata indemonstrabilia: non longe à veritate rei aberrauerit. verum

rum hæc Aristotelis, est diuisio. Stoici autem omnes propositiones vocant hypotheseis.

Differunt quoque eodem modo Problemata à Theorematibus: quod problema figurarum ortus & generationes contineat: sectiones etiam & delineationes, quę in his fiunt: subductiones & additiones, & vt vno dicam verbo, quomodo constituantur passiones, quæ figuris accidant. Theoremata vero, neque ortum & generationem, neque effectionem aliquam in se continent: sed tantum demonstrant, quę singulis accidant figuris. Ideoque perpetuo in problematibus, in propositione quidem ponit constituere oportet, aut ducere, aut subtrahere. & quæ his sunt similia, atque oqerationem aliquam requirunt alicuius rei, & effectionem. in fine autem subiungit, absque vllo discrimine *Oper edei poijsa*, quia problematum proprium est facere, efficere, operari ita vt *Poisis* operatio, propria sit problematum. Verum in theorematibus in propositione quidem semper ponit: hoc huic æquale est: & alterum alteri æquale. & hæc alijs: in fine vero indifferenter ponit *Oper edei deixa* ita vt *deixis* demonstratio propria sit theorematum.

Sciendum præterea, quod in primo libro primas & principalissimas figuras rectilineas explicet: trigonum inquam, & parallelogrammum. namque in his tanquam genere continentur causæ figurarum. æquicrurum, trigonum, & scalenum dico, & quæ ex his constituuntur figuræ, trigonum æquilaterum, & quadratum: à quibus figuræ quatuor elementorum suam acceperunt constitutionem. Nam trigonum æquilaterum, proxima causa est trium elementorum, ignis, aeris, & aquæ: quadratum vero terræ.

Vtilis ergo est primi libri scopos ad vniuersam doctrinam, & ad figurarum mundanarum contemplationem, atque etiam elementarem institutionem: qua discipuli ad percipiendam figurarum rectilinearum doctrinam informantur. Diuiditur vero in tres partes: primo in trigonorum generationem & contemplationem: deinde in parallelogrammorum eodem modo generationem & contemplationem: tertio in trigonorum & parallelogrammorum comparationem & communionem.

Ad hæc operæ pretium est scire, quod per reductionem ad impossibile, demonstrandi inquam illam viam & rationem: sumamus id quod cum quæsito pugnat: & illud ponendo, eousque progrediamur, donec in manifestum incidamus absurdum: quo facto, per illud absurdum, & inconueniens, hypothesim tollimus: atque con-

confirmamus, quod ab initio in quæstione positum fuit.

Omnino scire oportet: quod omnes mathematicę demonstrationes, vel ex principijs fiant: vel ad principia, vt quodam in loco Porphyrius docet. Vnde quę ex principijs fiunt demonstrationes: & ipsæ quoque duplices sunt. aut enim ex communibus sententijs & axiomatibus, atque definitionibus demonstrationes faciunt: tanquam ex ijs quæ per se manifesta sunt, & fidem per se habentia: aut ex ijs quę iam sunt demonstrata, certa, & affirmata, minimeque dubia.

Rursus, quæ ad principia reducuntur: & ipsæ sunt duplices: vel enim principia confirmant: vel eadem tollunt. quod si principia confirmauerint: appellantur Analyseis: quibus opponuntur synthefeis: potest enim fieri vt ratione bona, & conuenienti modo, à principijs ad quæsiti inuestigationem procedendo, demonstremus; & hoc dicitur esse synthesis Quæ vero demonstrationes ad principia progredientes, ipsa tollunt principia: nominantur reductiones ad impossibile. Quia aliquid ex ijs, quæ concessa & affirmata & per se manifesta sunt; euertere, aut oppugnare conamur hac demonstrandi ratione.

Verum hæc demonstrandi ratio, habet etiam syllogismum: qui tamen non idem est, qui in analysi fuit; siquidem in reductione ad impossibile, copula fit per secũdum modum syllogismorum hypotheticorum. Vt exempli gratia. Si trigonorum duos angulos æquales habentium, & vnum latus vni lateri, angulos æquales continentium æquale: latera æquales angulos subtendentia non fuerint æqualia; tum totum erit æquale parti. sed hoc fieri nequit. sublato itaque absurdo, concluditur id quod consentaneum est principijs, quod his positis: latera æquales angulos subtendentia sint ęqualia.

Vnitatem dicunt esse punctum, quod dari & poni nequit: punctũ vero dari posse & poni. Verum punctum imaginatione concipitur. & quasi in loco aliquo fit: & materiam habet iuxta intelligibilem materiam. quare vnitas poni non potest, vt ea quæ inmateriata est, & extra omnem distantiam, omneque interuallum. Sed punctum habet in loco aliquo positionem, tanquam id quod in sinu & gremio phantasiæ inditum & impositum est. Duplex vero est punctum: aliud quidem sumitur per se: aliud vero in linea, vt sit tanquam finis & terminus lineæ. solum & vnum existens, nec totum habens, nec partes: & imitatur summam rerum naturam ideoque proportionale est vnitati: linea vero binario: superficies ternario.

Spé-

Species lineę duplicem habet potestatem: impartibilem & partibilem. quia punctum habet in se, quod impartibile est; & interualla quæ partitionem admittunt. Pythagorei dicunt, superficiem ternario cõuenire: ideoque omnes figuras in ipsa descriptas, primam causam habere ternarium numerum. quia circulus principium est orbicularium omnium, occulte in se habet ternarium: ratione habitą centri, interualli, & circumferentię. trigonum vero principium tenet in omnibus figuris rectilineis: ideoque manifestum est, quod omnino ternario conueniat numero; & secundum eum formetur. vnum dicitur esse terminus & finis atque infinitas, seu infinitum; omnes enim res ex his vniuntur.

Sciendum est, quod locus circa vnum punctum, diuiditur in quatuor angulos rectos: & tantum tres figuræ, ęquilateræ & æquiangulæ locum circa vnum punctum, totum complere possunt. trigonum inquam & tetragonum, & hexagonum, sed trigonum sexies sumptum. sex enim dimidia vnius anguli recti, faciunt quatuor rectos. Hexagonum vero ter sumptum: siquidem quiuis angulus hexagonicus est æqualis vni angulo recto, & tertiæ parti. Tetragonum denique quater si sumatur, locum totum circa vnum punctum complebit. quia vnusquisque angulus te-

tra-

tragonicus rectus est. Quapropter sex trigona equilatera inter se concurrētia, complent & efficiunt quatuor angulos rectos: & quatuor tetragona, atque tria hexagona idem præstant. reliqua vero polygona, aut excedunt quatuor rectos, aut ab iisdem deficiunt. sola vero ista tria, trigonum, tetragonum, & hexagonum, æqualia fiunt iuxta prædictos numeros. Ex quo manifestum fit, quod rectitudo angulorum, cognata fit æqualitati. Simili etiam ratione similitudo fini & termino: dissimilitudo infinitati, aut infinito. quod enim in quantitatibus est equalitas: id in qualitatibus est similitudo.

Quoniam anguli rectilinei consistunt secundum finitum, & infinitum: idcirco doctrina finui angulum determinat rectum: qui vnus tantum est, & æqualitate comprehensus, perpetuo & semper, Ita vt neque augmentum, neque decrementum recipiat. sed altera doctrina de infinito secundarium tenet locum, & binario conuenit: atque duplices facit angulos præter rectum, inæqualitate iuxta maius & minus distinctos: & secundum id quod magis atque minus in infinitum moueantur. Ita vt alter magis & minus obliquus fiat. alter magis & minus acutus. atque in rebus naturalibus, substantiæ accommodatur ipsa rectitudo, quia eandem de-

fini-

finitionem & eandem essentiam semper & perpetuo retinet. accidentibus vero angulus obtusus & acutus. hi enim recipiunt maius & minus, & mutantur in infinitum vsque, neque ab eiusmodi cessant mutatione.

Perpendicularis linea recta est symbolum stabilitatis & puritatis, atq; non coloratæ potentiæ, & eius quæ nunquam declinata atque similium rerum. est etiam symbolum diuinæ & intellectualis mensuræ. quia per rectas perpendiculares, figurarum altitudines metitur: facta ratione ad rectum angulum, cæteras figuras rectilineas distinguimus & definimus. quæ per se indefinitæ sunt, quia excessu & defectu consideratur. vnaqueque enim per se infinita est.

Omne problema, & omne theorema perfectum & absolutum, omnibus suis partibus, hęc omnia in se habet. protasin, ectesim, diorismum. katasceuen, apodeixin, & sympérasma. Ex quibus propositio quidem subiecti & dati, aliquod quæsitum proponit; atque propositio perfecta, ea dicitur, quæ ex dato & quęsito constat. quam necessario sequuntur dati explicatio & quæsiti explicatio. nam ectesis, ipsum datum per se seorsim sumit & considerat; atque illud pręparat, vt quęstio de eo fieri possit. Diorismus vero, hoc est quęsiti explicaplicatio, aperit & ostendit quodnam sit quæsitum. quando vero propositio hæc duo non habuerit, datum inquam, & quæsitum: tum neque dati, nempe quæsiti, explicatio erit. Nam si propositio exempli gratia dicit: inueniendum esse hoc, simpliciter dato aliquo, quidnam explicabit explicatio dati? aut quid explicabit quæsiti explicatio? Katasceue hoc est delineatio, ea quæ desunt dato, vt quod in quæstione est inquiratur, addit. Apodeixis seu demonstratio, artificiose ex iam concessis & affirmatis minimeque dubijs, probat id inesse rei subiectæ, quod in quæstione fuit propositum. Conclusio rursus se conuertit ad propositionem, eamque repetit: & corroborat atque confirmat id quod demonstratum est. Atqui omnes problematũ & theorematum partes sunt hę: quæ vero maximè sunt necessariæ, & sine quibus esse non possunt, sunt hæ. propositio, demonstratio, & conclusio. Necesse enim est, vt prius sciamus quid in quæstionem venerit: & id postea demonstrandum est per media, tandẽ quod demonstratum est cõcluditur. atq; ex his tribus vt aliquid abesse possit aut desit, nunquam fit. reliquæ tres vero partes, sæpius non assumũtur: sed aliquando cũ vtilitatẽ & necessitatem nullam habent prætermittuntur. Nam diorismus & cæteris, in hoc problemate nõ sunt.

Septem

Septem sunt trigonorum species: nempe æquilaterum: deinde æquicrurum triplex, vt orthogonium, oxygonium, amblygonium. tertio scalenum simili ratione triplex, orthogonium, oxygonium, & amblygonium.

Problemata, quæ proprie problemata sunt, alia quidem casum nullum habent: alia vero plures recipiunt casus, sicuti & theoremata. quæcunque igitur eandem vim & potestatem habent, quæ per plura diagrammata se extendit, & mutat suas positiones: ita tamen vt eadem demonstrandi retineatur ratio. eiusmodi inquam problemata dicuntur habere casus. quæcunque vero vnam habent positionem, & vnam delineationem, appellantur *Aptota* hoc est problemata sine casibus. Hinc casus per se & simili consideratione, in omnibus problematibus accidunt in ipsa delineatione.

Data, quatuor dantur modis, Aut positione, vt cum dico, ad hanc lineam rectam, & ad hoc punctum quod in ea est, ponatur angulus. Aut specie, vt cum dicimus: sit angulus datus rectus, aut acutus, aut obtusus, aut in genere rectilineus, aut circumferentialis, vel etiam mixtus. Aut magnitudine, vt cum dico hunc angulum huius anguli duplum esse, aut vniuersali & generali appellationn maiorem vel minorem.

norem. Aut ratione, vt cum dicimus tertiam aut dimidiam recti partem. & sic in cæteris.

Hypothesis & antistrophe sic apud geometras sumuntur. vt si proponatur trigonum æquicrurum: & geometra demonstret: in omni trigono æquicruro, angulos ad basim esse inter se æquales: & est hypothesis. Antistrophe vero est, quando dicimus trigonum cuius anguli ad basim sunt inter se æquales: est æquicrurum. Aliud exemplum. Hypothesis est quando quis ita propositionem instituit, omne trigonum, cuius duo anguli sunt æquales: etiam latera æquales angulos subtendentia habebit æqualia. Antistrophe vero: omne trigonum, cuius duo latera sunt æqualia, etiam angulos habebit, quos æqualia illa latera continent, æquales.

Sciendum quoque est, quod ex omnibus figuris rectilineis, solum & vnicum quadratum, latera habet omnia æqualia, & omnes angulos rectos, idcoque inter omnes figuras rectilineas principem tenet locum. Pythagoricis diuinis assimilatur corporibus: quia loco & ordine eo est, vt non coloratum & fucatum sit: sed firmum & stabile. & quod imitetur stabilem illam potentiam sua æqualitate laterum, & angulorum rectitudine. nam motus inequalitati, sicuti status æqualitati conuenit: &

ex motu nascitur inæqualitas, ex statu æqualitas.

Postremo & hoc annotandum est, lineam infinitam, neque multiplicationem, neque comparationem admittere, cum altera linea. quæ enim eiusdem generis non sunt: non possunt rationem inter se habere. propterea quod ratio sit duarum eiusdem generis rerum aliqua inter se habitudo. vt finitæ lineæ, ad finitam lineam, & superficiei finitæ, ad finitam superficiem. & in cæteris eodem modo:

FINIS.

INDEX

INDEX RERVM.

Angulus varijs modis datur. 240
Angulorum natura. 245
Angulorum ad verticem & contiguorum differentia. 248
Angulorum diuisio. 257
Axiomatum & postulatorum differentia. 232
Cathetus. 242
Circulorum doctrina. 232. 276
Demonstrationes mathematicæ quales sint. 323
Data quatuor modis dantur. 329
Enstasis. 234
Ellipsis. 269
Elementorum Geometriæ scopus duplex. 316
Elementa quid sint. 317
Figurarum differentia. 231
Figurarum inscriptiones & circumscriptiones. 291
Figura reciproca. 307
Gnomon. 242. 276
Geometriæ duæ definitiones. 311
Geometria à quibus inuenta. 312
Geometriæ principia. 319
Hyperbole. 269
Hypothesis & antistrophe. 330

Lem-

Lemma. 235
Linea finita, & infinita. 232. 332
Magnitudo finita, & infinita. 243
Medietas, arithmetica & geometrica. 274
Mathematica vnde dicatur. 313
Orthogonium trigonum cur habeat vnum tantum angulum rectum. 232
Punctum quid sit. 231
Polus. 232
Ptosis. 235
Porisma. 235
Propositiones negatiuæ. 236
Perpendicularis. 242
Problemata definita, & indefinita. 254
Parallelorum accidentia. 256
Parallelogrammorum genesis. 260
Parapleuromata. 268. 275
Parabole. 269
Potentia linearum. 173
Proportio. 275
Quadratæ figuræ dignitas. 330
Scientiarum diuisio. 314
Theorematum & Problematum sex partes. 235. 329
Trigonorum, laterum & angulorum æqualitas & inæqualitas. 252. 329
Theorematum diuisio.
Theorematum conuersio triplex. 266
Trapezia. 263
Termini rationum. 303
Theorematum & problematum differētia 321

Tri-

Trigonorum rectilineorum septem species. 322
Reductio ad impossibile. 120
Recta ex vna & altera parte, & ex vtraque finita. 241
Ratio. 294
Rationis diuisio. 295

FINIS.

3.8.626

2