Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

345297

OEUVRES

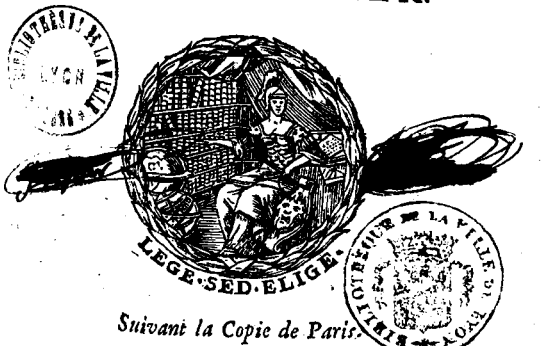
POSTHUMES

11094
133

DE

Mr. ROHAULT.

TOME PREMIER.



Suivant la Copie de Paris.

A LA HAYE,
Chez HENRY van BULDEREN, Marchand Libraire, dans le Pooten, à l'Enseigne de MEZERAY.

M. DC. XC.

A MONSEIGNEUR
D'ESTRÉES,
EVESQUE ET DUC DE LAON,
PAIR DE FRANCE,
COMTE D'ANISY.

MONSEIGNEUR,

Entre toutes les connoissances auxquelles l'Esprit humain se peut appliquer, il n'y en a point qui ayent plus de rapport à la Religion que les Mathématiques. Toutes les Sciences se proposent également la recherche de la Verité, mais il n'y a qu'elles seules qui se puissent vanter incontestablement de l'avoir atteinte. En effet, si la Religion, par les lumieres surnaturelles de la Foi, nous fait jour à ce qui est au-dessus de la portée de nos Esprits: Les Mathématiques, par le moyen de ce Flambeau interieur & naturel que Dieu a allumé en nous, & à la faveur des premieres veritez generales qui sautent d'abord aux yeux de tout le monde, nous introduisent dans

une longue suite de plusieurs autres veritez, qui en dépendent, & qui ne sont pas moins certaines que leurs principes. Cette raison seule doit suffire, MONSEIGNEUR, pour satisfaire le Public, sur le choix que j'ai fait d'un des plus Illustres Princes de l'Eglise, pour Lui consacrer un Ouvrage tout consacré lui-même à la Verité; & qui appliquant nôtre Esprit à des objets qui n'ont rien qui flate les Sens, mais que nous ne laissons pas de trouver infiniment agreables, à cause des veritez qu'on y découvre, peut mêmes contribuer en quelque façon au réglement de nos mœurs, en nous détachant des choses sensibles, qui sont les causes les plus ordinaires de leur corruption. Dés cette premiere ouverture que je donne de ma pensée, chacun sans doute y applaudit, & enchérissant même pardessus, me prévient déja sur tout ce que je puis avoir à dire à Vôtre gloire. Vôtre Illustre Nom, MONSEIGNEUR, comme un nouveau Flambeau qui surprend & qui brille, fait voir tout d'un coup les nobles convenances qui se rencontrent en mon dessein, de mettre cét Ouvrage sous une si glorieuse protection. Le passage est aisé du Rang à la Personne; & l'on n'a pas plûtôt approuvé de voir les veritez Mathématiques sous l'azi[redacted]e d'un des plus sacrez Dépositaires de celles de la Foi, qu'on les félicite, & moi avec elles, d'être à l'abry d'un si beau Nom, où tout est également grand & solide, majestueux & éclatant. Une Ambassade dans la premiere Cour du Monde Chrêtien, prolongée pour la quatriéme fois au delà des termes ordinaires, fait voir à tout l'Univers, en la Personne de Monseigneur Vôtre Pere, une fidelité sans reproche, une sagesse consommée, une capacité sans bornes. Ces Négotiations reiterées de Monseigneur le Cardinal d'Estrées, Vôtre Oncle, à Rome, par ordre de Sa Majesté, dans les conjonctures les plus délicates, où la Politique, aussi bien que la Nature, demande deux yeux, non pour voir plus clair, mais pour voir plus seurement, & avec plus d'étenduë, ne marquent-elles pas une distinction particuliere de merite, & une confiance entiere en la force &

en

en la prudence de son génie. Et ne diroit-on pas, que le Monarque le plus éclairé que la France ait jamais eu, pleinement content & satisfait des services de ces deux Illustres Freres, semble au milieu de tant de grands Sujets, n'en trouver pas un digne de leur succeder, jusques à ce qu'associé à la Pourpre de l'un, & remplissant le merite de tous-les-deux, Vous alliez Vous-même continuer à soûtenir la gloire de la France, & celle de Vos Ancestres, sur cét auguste Théatre, uniquement destiné, ce semble, à ceux de Vôtre Nom. D'ailleurs ces grands & fameux Exploits, par où Monseigneur le Maréchal, Vôtre Oncle, commença à se signaler, aussitôt que Sa Majesté l'eût honoré de la Charge de Vice-Amiral, & que le bruit de ses Canons a fait retentir partout; Et sur tout ce prodige de valeur & de prudence qu'il fit paroître à Tabago, (où tout ce qui sembloit devoir concourir à sa perte, la disposition des lieux, le grand nombre des Ennemis, celui de leurs Vaisseaux, la difficulté de les aborder, le Canon pointé pour leur deffense, toute une Isle en un mot armée contre luy, ses blessures même & ses naufrages, n'ont servy qu'à rendre sa vie plus illustre, & sa victoire plus glorieuse) font voir en sa Personne tant de courage & d'intrépidité, de conduite & de bon[illegible]une tout ensemble, que ce Monde-ci semble ne pas suffire aux grands & vastes desseins, & à toutes les genereuses & hardies entreprises de Ceux de Vôtre Maison. Pardonnez, MONSEIGNEUR, cette double saillie de mon zéle, qui ne sçauroit déplaire qu'à Vôtre modestie; mais qui agréera sans doute à ces premieres Têtes de tous les Ordres de l'Etat, qui Vous ont veu soûtenir & présider avec tant d'éclat, dans la plus celebre Ecole du monde; où vous avez commencé à jetter les premiers fondemens, & faire concevoir les premieres espérances de cette Grandeur & Dignité que Vous possédez, & de toutes les autres qui Vous attendent, & auxquelles Vous pouvez si legitimement aspirer. J'ose même dire, que l'on a déja veu briller en Vous par avance, toutes les marques & tous les caracteres de cette future Grandeur, dans ces premiers

essais de generosité, de justice, & de graces, que vous avez fait paroître, dés l'entrée de Vôtre Episcopat. Il est bon, MONSEIGNEUR, qu'il en reste quelque marque à la Posterité; & que ceux qui honoreront dans les siecles à venir la memoire de feu Monsieur Rohault, (que Messieurs Vos Freres, les Marquis de Cœuvres & de Témines, avec les plus Grands de la Cour, n'ont pas autrefois dédaigné d'avoir pour Maître,) sçachent, qu'elle a été assez chere à un Prélat de Vôtre rang, non seulement pour agréer que ses Ouvrages posthumes parussent sous son Nom; mais pour donner aussi accez à ses plus Proches, pour se justifier devant Vous, & pour Vous obliger à marquer de la joye de leur innocence. J'en avois entrepris la deffense, comme Beau-Pere du Deffunt, & j'en devrois partager la réconnoissance avec les Vivans, si Vos bontez ne m'engageoient à être entierement & sans partage, & avec une vénération trés-profonde,

MONSEIGNEUR,

De Vôtre Grandeur

Le trés-humble & trés-obeïssant
Serviteur,

CLERSELIER.

PRE-

PREFACE.

JE ne doute point qu'il n'y ait bien des gens qui trouveront à redire au Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre, *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, & à qui ce frontispice ne plaira pas. Et si par hazard vous, qui lisez ceci, étiez de ce nombre, comme cela pourroit bien être : je veux bien vous avertir ici dés l'entrée, que ni vous, ni tous ceux qui pourroient vous ressembler, ne serez pas les premiers qui y auront trouvé à redire, puis que moi-même je l'ai condamné, & qu'il ne m'a pas plû.

Mais aussi à dire le vrai, ce n'est pas une chose si facile que l'on pourroit peut-être s'imaginer, que de donner à un Livre, un Titre qui lui convienne, & qui lui convienne justement. Et même j'ose dire, qu'aprés s'être bien donné de la peine pour en chercher un, il est presque impossible de pouvoir jamais rencontrer au gré de tout le monde.

C'est donc comme une necessité, que le Titre d'un Livre soit contrôllé : mais qu'il le soit, à la bonne heure ; pourveu que d'ailleurs le corps en soit bon, & ne contienne rien que de vray & de raisonnable, l'on ne doit pas s'en mettre fort en peine, ni chicaner beaucoup là-dessus.

Or je puis assurer qu'en prés de cent feüilles que ce Livre contient, & par consequent en prés de huit cens pages, il n'y a rien qui ne soit entierement conforme à la Raison, & qui la puisse choquer le moins du monde. Chaque page, chaque ligne, chaque mot, sont autant de veritez, dont nous sommes convaincus par la Lumiere naturelle, comme étant les réponses vives & nettes de cette Lumiere interieure, qui ne manque jamais de nous éclairer & de nous instruire, toutes les fois que nous la consultons, par l'attention que nous sommes obligez de prêter aux choses

que nous voulons bien concevoir, & que nous ne sommes point honteux d'apprendre. Aussi, n'est-ce que faute de cette attention, (comme l'a fort bien dit un celebre Auteur de ce temps,) que nous tombons tous les jours en de lourdes fautes, soit en approuvant ce que nous n'entendons point, soit en contredisant les veritez les plus certaines, mais que nous ne voulons pas sçavoir, & auxquelles nous ne donnons pas toute l'application qu'il faut pour les comprendre; parce qu'elles sont contraires à d'anciens préjugez dont nous ne voulons pas nous défaire, & dans la possession desquels nous sommes bien aises de nous maintenir, pour joüir paisiblement de nôtre maîtrise, & couvrir par ce moyen nôtre ignorance.

Ce n'est pas que je ne sceusse fort bien quel Titre il auroit fallu mettre à ce Livre, pour qu'il luy convint justement; mais ce Titre n'auroit pas été au gré du Libraire. Et comme, pour l'ordinaire, il arrive de la contestation entre les Libraires & les Auteurs sur la disposition du Titre; ceux-cy n'ayant en veuë que la conformité qu'il doit avoir avec le Texte, afin que l'un ne démente pas l'autre; & ceux-là au contraire ne se souciant pas beaucoup de cette conformité, mais voulant quelque chose de specieux, qui puisse exciter la curiosité des Lecteurs, & leur en attirer plusieurs: il ne faut pas s'étonner si l'un est quelquefois obligé de ceder à l'autre, pour s'ajuster ensemble, & accorder leurs differens.

Or personne ne peut douter que tout l'interêt que peut avoir un Libraire dans l'impression d'un Livre, ne soit son interêt propre & particulier; qui est, que le Livre dont il entreprend l'impression, ait du débit, qu'il ait cours dans le monde, & qu'il ne lui demeure pas sur les bras, renfermé dans un Magazin, pour être rongé des vers, & mangé par la poussiere, plûtôt que dévoré par l'avidité d'un grand nombre de Curieux; comme sans doute il se le promet quand il commence une Impression. C'est pourquoi il a été juste de le contenter ici; & c'est ce que j'ay prétendu faire par le Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre.

Mais

Mais quelqu'un tournant là-dessus ici le feüillet, pour voir donc ce Titre specieux que je dis avoir mis à la tête de ce Livre, (ne se resouvenant plus quel il est,) & ne trouvant que trois ou quatre mots fort simples & fort communs, croira peut-être que je me suis oublié de mon dessein, ou que j'ai retenu, comme un secret que je n'ai pas voulu divulguer, ce Titre specieux dont je parle; ou bien peut-être qu'aprés lui avoir ingenûment confessé que je n'en sçai point d'autre que celui qu'il porte, il ne pourra pas s'empêcher de s'emporter contre moi, en m'accusant de mauvaise foy & d'ignorance. De mauvaise foy, en ce que sçachant, comme j'ai dit, le juste Titre que l'on devoit mettre à ce Livre, je ne l'y ai pas voulu mettre; & d'ignorance, en ce qu'il n'est pas possible que tout autre Titre que l'on y auroit pû mettre, ne fût pour le moins aussi specieux que celui que j'y ai mis, & peut-être mêmes plus au goût de toute le monde. Où enfin, peut-être qu'aprés être un peu revenu de son emportement, pour m'en faire une espece d'excuse, & me rendre quelque justice, ayant appris par le bruit commun, que je ne passe pas dans le monde pour un homme de mauvaise foi, ni tout à fait ignorant, il me priera de bonne grace que je lui dévelope donc le mystere qu'il juge devoir être renfermé dans ce Titre, pour meriter, sous des termes si simples, le nom de specieux. Et en cela je confesse qu'il aura quelque raison; & c'est aussi ce que je vais tâcher de faire dans la suite, pour le retirer de la peine où cela l'aura mis.

La réputation que Monsieur Rohault s'étoit acquise de son vivant, étoit devenuë si grande, & son nom si celebre, qu'il étoit connu non seulement dans tout ce Royaume, mais mêmes dans toute l'Europe. Et quoi que depuis sa mort jusqu'aujourd'hui, il se soit écoulé prés de dix années, pendant lesquelles il semble que sa memoire auroit dû se perdre, n'ayant rien parû de lui depuis ce temps-là: neanmoins comme l'estime qu'il avoit laissée de lui en mourant, faisoit aisément croire à tout le monde, qu'il n'étoit pas possible qu'un homme comme lui se fût tenu sans rien faire, ensorte qu'il ne fût rien resté, & qu'on

eût, pour ainsi dire, tout enseveli & enterré avec lui en le mettant dans le tombeau ; cela a fait que les plus curieux & les plus vigilans se sont aussi-tôt soigneusement informez s'il n'avoit point laissé quelques Ecrits aprés sa mort. Et le bruit s'étant répandu partout qu'il en avoit laissé quelques-uns : j'ai depuis ce temps-là été si souvent & si puissamment sollicité par les instantes prieres d'une infinité de personnes de toutes sortes de conditions, & par les lettres frequentes que j'ai receuës de toutes parts, d'en vouloir faire part au Public, que je n'ai pû m'en deffendre, ni me délivrer mêmes de leurs pressantes sollicitations & importunitez, qu'en satisfaisant à leur desir.

C'est donc ce Livre, ou plûtôt ce Recüeil de plusieurs divers petits Traitez de Mathématique, qui paroît aujourd'hui. Mais si j'avois mis à sa tête, ce Titre qu'il devroit porter, cela lui auroit fait perdre une bonne partie de l'estime qu'on en avoit conçûë auparavant sans le voir, & auroit de beaucoup refroidi l'ardeur & la curiosité de plusieurs. Car il y a partout un si grand nombre de Livres de Mathématique, & où tout ce que l'on sçauroit dire touchant cette matiere, est si bien & si amplement déduit, qu'il ne semble pas possible qu'on puisse là-dessus rien desirer davantage. C'est pourquoi pour ne pas tant se découvrir d'abord, & laisser à deviner aux Curieux quels peuvent être ces Ouvrages de Monsieur Rohault, il a fallu déguiser un peu le Titre ; & au lieu de nommer chaque Traité par son nom, on a été obligé de les comprendre tous ensemble sous ce Titre general & specieux, d'*Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*. Or ces termes generaux d'*Oeuvres posthumes*, emportent avec soi, & font concevoir quelque chose de grand, quand celui qui en est l'Auteur, est d'un grand nom, comme est sans doute celui de Monsieur Rohault ; particulierement chez les Etrangers, où la jalousie ne regne point, & qui pour cela en ont toûjours fait beaucoup d'estime. Et ce sont eux qu'un Libraire a principalement à ménager, à cause que le plus souvent c'est d'eux qu'il tire son plus grand profit.

Au reste, ce n'est pas sans peine & sans travail, que Monsieur

sieur Rohault s'étoit acquis cette grande réputation. Il est vrai que la Nature, par un avantage tout singulier, lui avoit donné un Esprit tout à fait Méchanique, fort propre à inventer & à imaginer toutes sortes de Machines; & avec cela des mains artistes & adroites, pour executer tout ce que son Imagination lui pouvoit representer. Aussi se faisoit-il un plaisir d'aller dans les boutiques de toutes sortes d'Ouvriers, pour les voir travailler chacun de leur Métier, & pour y considerer avec attention les divers Outils dont ils se servoient pour l'exécution de leurs Ouvrages. Et c'étoit une des choses qu'il admiroit le plus, & en quoi l'industrie de l'Esprit humain lui paroissoit plus merveilleuse, d'avoir pû inventer tant de sortes d'Instrumens, qui rendent le travail aisé, & sans quoi il seroit impossible de venir à bout d'aucun ouvrage. Mais comme son genie surpassoit de beaucoup en invention & & en adresse celui de la plus-part des Ouvriers, aussi leur donnoit-il souvent de bons avis, soit pour la construction de leurs Outils, soit pour faciliter leur travail & diminuer leur peine; & il ne leur disoit rien de particulier, qu'il ne mît aussi-tôt la main à l'œuvre, pour leur apprendre lui-même à le mettre en pratique.

Ce Naturel ingenieux & pénétrant, dont la Nature l'avoit doüé, lui rendoit si facile tout ce à quoi il s'appliquoit, qu'il n'avoit presque trouvé aucune difficulté à apprendre les Mathématiques; & pour cela il ne lui avoit point fallu de Maître. C'est pourquoi les ayant, pour ainsi dire, comme inventées de lui-même, il les possedoit parfaitement. Aussi est-ce ce qui lui donnoit un grand avantage pardessus tous ceux qui comme lui faisoient profession de les enseigner, & qui faisoit qu'on le préferoit aux autres, à cause de la netteté & facilité que cela lui donnoit pour s'expliquer. Je le pourrois ici certifier moi-même, ayant été son Disciple comme les autres, si je ne craignois que mon témoignage ne passât pour suspect. Mais il en a eu tant d'autres de toutes conditions, & des plus qualifiez du Royaume, soit de la Robe, soit de l'Epée, soit de la Cour, qui ne feroient pas de difficulté

culté de le certifier comme moi, s'il en falloit venir à cette preuve de fait, que je ne feins point de dire ici hardiment, que l'Usage & l'Exercice lui avoient ouvert l'Esprit à une maniere d'enseigner, si aisée, si claire, & avec cela si particuliere, qu'il n'y en avoit point qui approchât de lui, & qui lui fût en cela comparable.

Aussi, s'il m'est ici permis de faire entrer dans ses loüanges une chose qui n'a été qu'en projet, & n'a point eu d'execution : Si la mort ne nous l'eût pas si-tôt ravi, il étoit sur le point de recevoir le plus grand honneur qu'il pouvoit jamais avoir en sa vie, puisqu'on le destinoit à être le Précepteur de Monseigneur le Dauphin, pour lui enseigner les Mathématiques & la Philosophie, aussi-tôt que le cours de ses Etudes l'auroit conduit jusques-là. Et ce que je dis ici à sa gloire, & que j'avance sans autre preuve que ma bonne foi, n'est pourtant pas une chose si difficile à croire. L'exemple de Messieurs les Princes de Conti, qu'on lui avoit mis entre les mains dés leur bas âge, pour leur former l'Esprit de bonne heure, & fortifier leur Raison, avant qu'elle se pût corrompre par les fausses idées d'une vaine Philosophie, & qui donnoient à la Cour de si belles marques de cette ouverture d'Esprit, & du progrés qu'ils faisoient tous les jours sous sa conduite, pouvoit bien être un motif capable de faire venir cette pensée à ceux qui avoient alors la direction sur les Etudes de Monseigneur.

Mais quand bien mêmes ce que dis n'auroit été qu'une vaine présomption de Monsieur Rohault, & une fausse imagination dont il se seroit laissé flater sur de trop légeres conjectures, il me suffit pour moi que je n'avance ici rien de moi-même, & que je n'aye appris de fort bonne part. Et à l'égard de Monsieur Rohault, quand il se seroit trompé dans sa pensée, cela ne pourroit rien faire contre lui, ni porter aucun préjudice à sa réputation ; puis que cela même en supposeroit une en lui assez bien établie, pour que l'on pût jetter les yeux sur lui, comme sur une personne capable de remplir un

poste

poste si honorable. Et de vrai, quoi que cela n'ait point eu d'effet, soit parce que la mort l'a prévenu, soit parce que cela ne devoit point être : cela neanmoins n'a pas empêché que sa réputation ne se soit étenduë fort loin, & n'a rien diminué de l'estime qu'on en avoit.

Mais aprés tout, il n'est pas mal-aisé de deviner d'où lui est venuë cette grande estime ; les causes en sont trop publiques pour pouvoir être ignorées. Chacun sçait qu'il avoit l'honneur d'enseigner la plus grande partie des jeunes gens de la premiere qualité ; ce qui le faisoit connoître à la Cour. Et comme les Esprits y sont beaucoup plus raffinez qu'ailleurs, que l'on y épargne moins les gens, & que les défauts y sont plus relevez : si sa Méthode d'enseigner n'en avoit été tout à fait exempte, il seroit bientôt devenu la fable & la risée de la Cour, & n'auroit pas manqué d'être baffoüé & mépriſé de tout le monde. Mais quand on a vû que les plus grands, à l'envi les uns des autres, lui confioient l'instruction de leurs Enfans, cela a fait que chacun à leur exemple l'a voulu avoir pour Maître ; jusques-là même, que plusieurs qui portoient le bonnet, & qui professoient publiquement dans les Colleges, n'ont point eu honte de devenir ses Disciples. Bien plus, sa réputation ayant passé les limites de ce Royaume, & s'étant répanduë dans les païs étrangers, il lui en venoit de toutes parts, & en si grand nombre, qu'il ne pouvoit plus suffire à tous.

Toutefois ce n'est pas encore de là qu'il a tiré sa plus grande gloire. Les Conferences publiques qu'il faisoit une fois toutes les semaines, où se trouvoient des personnes de toutes sortes de qualitez & conditions, Prélats, Abbez, Courtisans, Docteurs, Médecins, Philosophes, Geometres, Regens, Ecoliers, Provinciaux, Etrangers, Artisans, en un mot des personnes de tout âge, de tout sexe, & de toute profession, & où il prononçoit presqu'autant d'oracles, qu'il faisoit de réponses aux difficultez qui lui étoient proposées indifferemment par toutes sortes de personnes, l'avoient mis dans une si grande réputation, qu'il s'en est trouvé plusieurs, les uns par

curiosité, pour se donner la satisfaction de l'entendre, les autres par jalousie, pour juger de sa doctrine & tâcher de la combattre, qui ont quitté leur païs, & entrepris de grands voyages.

La Méthode que Monsieur Rohault gardoit dans ses Conferences, étoit d'y expliquer l'une aprés l'autre toutes les questions de Physique, en commençant par l'établissement de ses principes, & descendant ensuite à la preuve de ses effets les plus particuliers & les plus rares. Pour cela il faisoit d'abord un discours d'environ une heure, lequel n'étoit point étudié, & où il disoit simplement ce que son sujet lui fournissoit sur le champ. C'est pourquoi il permettoit à un chacun de l'interrompre, quand il arrivoit que ce qu'il avoit dit, ou n'avoit pas été assez bien compris, ou que quelqu'un trouvoit quelque objection à y faire. Et alors avec une patience & moderation que j'ai cent fois admirée, & dont lui seul étoit capable, il écoutoit paisiblement tout ce qu'on lui vouloit objecter, pour extravagant qu'il pût être, sans jamais interrompre celui qui parloit; & aprés avoir satisfait à ses objections, il reprenoit le fil de son discours où il l'avoit quitté, & continuoit à expliquer le reste de la matiere qu'il avoit entrepriſe. Aprés quoi la disputе étoit ouverte à tout le monde; non pas une dispute tumultueuse, qui se passât simplement en bruit, mais une dispute paisible & honnête, où chacun proposoit modestement & nettement les difficultez qu'il avoit remarquées sur la matiere qui avoit été agitée ce jour-là, afin de s'en instruire, & de remporter du fruit de ces Conferences. Et pour l'ordinaire la dispute finissoit dés la premiere réponse qu'il y faisoit; car aprés avoir reconnu par les difficultez qu'on lui avoit proposées, ce qui avoit manqué à sa premiere explication, il résumoit si bien, & dans un si bel ordre, tout ce qu'on lui avoit objecté, & y répondoit avec tant de netteté & de lumiere, que ceux qui les lui avoient proposées, & tous les autres spectateurs de la dispute, n'ayant rien à repliquer, s'en retournoient si satisfaits de ses réponses, qu'il s'attiroit l'admiration de

tout

tout le monde. J'en appelle ici à témoin des milliers de personnes qui ont assisté plusieurs fois à ses Conferences, & qui ayant alors été charmez de la justesse & de la beauté de ses réponses, & n'en ayant pas encore perdu le souvenir, le regrettent encore tous les jours.

Mais ce qui a rendu son nom plus recommandable & plus celebre, est cette Méthode simple & facile dont il se servoit pour expliquer les plus difficiles & plus curieuses questions de Physique; comme la Lumiere, les Couleurs, l'Arc-en-ciel, les Lunettes, le Flux & Reflux de la Mer, les proprietez de l'Ayman, la pesanteur de l'Air, les questions du Vuide, & quantité d'autres. Car à l'entendre parler là-dessus, vous eussiez dit qu'il étoit de concert avec la Nature, & qu'elle prenoit plaisir à lui découvrir ses secrets; qu'elle lui avoit fait voir les differentes parties dont les Corps sont composez, & lui avoit appris quels effets devoient suivre de la communication de leurs mouvemens; car il faisoit comme toucher au doigt tout ce qu'il disoit sur ces matieres. Et afin qu'il n'en pût rester aucun doute, il y joignoit pour preuves quantité de belles experiences, qu'il faisoit devant tout le monde, & dont le plus souvent il faisoit prévoir les effets à chacun, (ensuite des principes qu'il avoit auparavant établis,) avant même que d'en venir à l'épreuve.

C'est ainsi qu'aprés avoir prouvé & établi pour principe la pesanteur de l'Air, il faisoit voir que tous ces effets que l'on a coûtume d'attribuer à la crainte du Vuide, n'en sont que de simples dépendances, dont les consequences se tirent d'elles-mêmes, & sans beaucoup de raisonnement. Et pour le faire comprendre, & toucher, pour ainsi dire, au doigt & à l'œil, il avoit fait faire tout exprés quantité de Tuyaux de verre, de toutes sortes de façons, qu'il rempliſſoit de diverses liqueurs, selon les differens effets qu'il vouloit prouver; mais celle dont il se servoit le plus, & qui lui étoit la plus commode pour ses experiences, étoit le Vif-argent. Car comme une fort petite quantité contrepése à beaucoup d'eau, & à une bien plus grande quantité d'Air, il pouvoit commodément, & avec des

Tuyaux

Tuyaux d'une médiocre grandeur, faire voir par experience la plus grande partie des effets qui réſultent de cette peſanteur.

Or entre tous ces Tuyaux, il en avoit inventé un d'une conſtruction tout-à-fait ingenieuſe & particuliere, ſemblable à peu prés à la figure dont les Anatomiſtes ſe ſervent pour repreſenter la grande Artere aſcendante & deſcendante; par le moyen duquel il faiſoit voir en même temps deux effets tout contraires, & pour cela même fort ſurprenans, de la peſanteur de l'Air. Car aprés avoir rempli ce Tuyau de Vif-argent, & fait toutes les ceremonies requiſes pour faire qu'en ſe vuidant d'une partie dans un vaiſſeau, il en reſtât dedans la hauteur de deux pieds trois pouces, comme il arrive d'ordinaire: on avoit le plaiſir de voir en même temps monter le Vif-argent dans un petit tuyau renfermé dans la branche d'enhaut, & deſcendre celui qui étoit reſté dans la branche d'embas, auſſi-tôt que par une fort petite ouverture, faite ſeulement avec la pointe d'une épingle, on avoit donné moyen à l'Air groſſier d'entrer dans ce tuyau. Or cette ſeule experience eſt une preuve ſi manifeſte de la peſanteur de l'Air, & prouve en même temps ſi manifeſtement que c'eſt cette peſanteur qui produit tous ces effets merveilleux qu'on attribuë ordinairement à la crainte du Vuide, qu'il faut ſe boucher les yeux, on n'en avoit point, pour en douter.

Sa maniere d'expliquer la Lumiere & les Couleurs étoit auſſi admirable; & ſi ceux qui veulent que les Couleurs ſoient des Accidens Réels, & qui voudroient même en faire un article de nôtre Foi, lui avoient fait l'honneur d'aſſiſter eux-mêmes à ſes explications, & veu les expeperiences dont il ſe ſervoit pour en découvrir la nature, & fait voir que ce ne ſont que des modifications differentes de la Lumiere, ſelon qu'elle tombe ſur des Corps dont les parties ont diverſes figures & differens mouvemens, & que de là elle rejaillit vers nos yeux avec les diverſes modifications qu'elle a receuës des Corps ſur leſquels elle eſt tombée: je doute fort qu'ils euſſent voulu aprés cela

traiter

traiter d'hérétiques, ceux qui ne les regardent du côté des objets, que comme des differentes modifications de la Matiere; & du côté de celui qui les apperçoit, que comme des sentimens en lui, qu'il rapporte aux objets qui les ont excitez.

Ce principe supposé, il ne rendoit pas seulement raison, mais des preuves sensibles, de tout ce qu'il y a de plus singulier & de plus merveilleux dans l'Arc-en-ciel, & que Mr. Des-cartes, avant lui, a expliqué si admirablement dans ses Méteores. Car par le moyen de certaines phioles ou bouteilles de verre, pleines d'eau, il faisoit remarquer les endroits par où les rayons de lumiere, qui se changent en couleur, entrent dans le verre; les lieux où ils se réfléchissent; & ceux par où ils sortent, pour venir de là fraper nos yeux, avec les modifications qu'ils ont receuës de ces diverses réfléxions & réfractions, d'où résulte en nous le sentiment des Couleurs. Quelquefois même il avoit l'industrie de faire paroître dans sa chambre un Arc-en-ciel artificiel, par le moyen d'une pluye qu'il avoit l'addresse de répandre aux lieux où il devoit paroître, selon l'endroit où le Soleil étoit alors; & de le recevoir sur une toile bien blanche & bien unie; où ses Couleurs se peignant fort exactement, donnoient le moyen aux spectateurs de les pouvoir considerer avec soin & exactitude.

Je n'aurois jamais fait, si je voulois parcourir toutes les diverses experiences dont il se servoit pour justifier ses raisonnemens. Mais entre toutes celles qu'il communiquoit au Public, il n'y en avoit point qui surprît avec plus d'étonnement l'Esprit des spectateurs, qui leur donnât davantage d'admiration, & qui excitât plus vivement leur curiosité, que celle de l'Ayman. Aussi quand on sçavoit qu'il en devoit expliquer les proprietez, & en faire les experiences, il y accouroit tant de monde, que non seulement la salle où il les faisoit, mais toute sa maison, n'étoit pas capable de le contenir.

Il avoit pour cela une boîte, où étoit renfermé tout ce qui lui étoit necessaire pour faire ses experiences; d'où il tiroit

tiroit chaque piece l'une aprés l'autre, selon l'effet ou la proprieté qu'il vouloit prouver, & l'experience que pour cela il avoit à faire. Et quoi qu'il ne dît rien en cela que ce qu'il avoit appris de Monsieur Des-cartes : neanmoins, comme il rendoit les choses sensibles par le moyen de ses experiences, & que sa Méthode de les expliquer étoit differente de la sienne, cela faisoit que l'on eût dit qu'il en eût été l'Inventeur. Car Monsieur Des-cartes s'est simplement contenté de rendre raison de toutes les proprietez de l'Aiman qui lui étoient connuës, & que les Curieux, avant lui, avoient observées ; mais il ne s'est pas mis en peine de les mettre dans un ordre qui en fît connoître la liaison & la dépendance. Or c'est ce que Monsieur Rohault faisoit dans ses explications publiques ; où aprés avoir rendu raison de trois ou quatre proprietez les plus communes de l'Ayman, il en déduisoit toutes les autres par une suite si necessaire, qu'il n'y avoit personne dans l'Assemblée qui ne les remarquât aussi bien que lui, & qui n'en prévît l'effet, avant que d'en venir à l'experience.

Ces sortes de preuves si claires, si convainquantes, & si sensibles, fort differentes de ces vertus & qualitez occultes dont les autres Philosophes ont coûtume de se servir, pour rendre raison de ce qu'ils ignorent, justifient ce me semble bien clairement la verité des Principes dont elles dépendent ; car le moyen de pouvoir tirer un si grand nombre de consequences justes, & que les effets verifient, d'un si petit nombre de Principes, si ces Principes n'étoient veritables ? Et n'est-ce pas une chose bien étrange, que ces Principes étant clairs à l'Esprit, que la Raison en étant convaincuë, & que personne n'ayant pû découvrir le moindre effet de la Nature auquel ils contrarient, depuis tant de temps qu'on les examine : il y ait cependant aujourd'hui des gens assez imprudens pour se servir du plus auguste & du plus incomprehensible de nos Mysteres, pour les combattre, & pour tâcher d'en déduire, s'ils pouvoient, la fausseté. Ces personnes ne prennent pas garde sans doute aux inconveniens qui s'en ensuivent ;

vent ; puis que contre leur dessein, ce qu'ils font ne sert qu'à fournir des armes à nos Adversaires ; & peut même être capable d'ébranler la foi des Fidéles, & de faire chanceler ceux qui ne sont pas encore bien affermis dans leur croyance. Car comme nous sommes tous Hommes, c'est à dire Raisonnables, avant que d'être Chrêtiens : ce qui persuade la Raison, entre plûtôt dans l'Esprit, que ce qui nous est enseigné par la Foi. Outre que tout ce qu'ils disent, n'étant fondé que sur des suppositions fausses, il n'y a rien de plus injuste & de plus dangereux, que de faire combattre la Verité contre la Verité, c'est à dire la Foi contre la Raison bien éclairée ; puis que l'une n'est jamais, & ne peut même jamais être contraire à l'autre. C'est pourquoi il suffiroit pour toute réponse, de leur dire en un mot, qu'ils n'entendent point ce qu'ils combattent ; & que tout ce qu'ils disent n'a aucun fondement de verité. Mais nous verrons tantôt ce que nous aurons à leur objecter, & peut-être aussi à leur répondre.

Monsieur Rohault voyant donc sa réputation suffisamment établie, & que dans la profession qu'il faisoit, il n'avoit plus rien à ménager pour l'établissement de sa fortune, crut ne devoir plus refuser au Public la satisfaction qu'il desiroit de lui, de mettre au jour son Traité de Physique ; afin qu'on n'eût plus la peine de copier ses Ecrits, ni de faire des Remarques particulieres sur ce qu'il avoit traité dans ses Conferences publiques ; comme le faisoient la plus-part de ses Auditeurs au sortir de ces Conferences, pour ne pas laisser échaper de leur memoire ce qu'ils lui avoient entendu dire, & profiter par ce moyen de ses Leçons.

Ce desir mêmes si naturel à l'Homme, d'acquerir de la gloire, desir qui n'est point blâmable, quand les moyens en sont loüables & honnêtes, le fit aussi résoudre à contenter là-dessus le Public. Bien plus, il jugea mêmes qu'il y alloit alors de son honneur, de ne pas differer davantage. Car voyant que ses Ecrits étoient entre les mains d'une infinité de personnes, & qu'étant ainsi passez de

main

main en main, ils étoient devenus méconnoissables, par les fautes que chaque Copiste avoit ajoûtées à celles qui s'étoient rencontrées dans son Original ; outre que n'ayant mis lui-même dans ces Ecrits, qu'autant qu'il en falloit pour donner à ses Disciples l'envie d'apprendre ; mais ne s'y étant pas assez expliqué & étendu, pour pouvoir d'eux-mêmes en tirer une parfaite connoissance, sans avoir besoin de l'explication du Maître : il prit enfin la résolution de faire imprimer ce Traité, & d'y mettre la derniere main.

Or comme l'on met toûjours une grande difference, entre ce que l'on ne fait que pour soy, & pour le cabinet, & ce que l'on fait pour être vû par le Public : aussi ceux qui avoient vû ces Ecrits particuliers qui couroient de lui dans le monde, ont bien sçeu remarquer qu'il y avoit bien de la difference entre son Livre & ces Ecrits. Mais il ne s'en faut pas beaucoup étonner ; car ceux-ci n'étoient que comme le projet & le broüillon de l'Ouvrage parfait qu'il méditoit de faire un jour, & qu'enfin l'on a veu paroître ; où comme il avoit deux sortes de personnes à contenter, les Curieux & les Difficiles : il a tâché de travailler de telle sorte, que les uns n'y pussent trouver rien à reprendre, & les autres rien à desirer.

C'est pourquoi, pour satisfaire au desir & à la curiosité des premiers, il a traité dans son Livre toutes les questions les plus curieuses de la Physique ; & en les examinant chacune à part, il s'est donné la peine de descendre jusques aux circonstances les plus particulieres, n'ayant rien oublié en chacune qui pût meriter sa réfléxion, & lui ayant donné tout le jour dont elle est capable. Ce qui fait que tout le monde s'étonne comment il a pû en si peu de mots expliquer un si grand nombre de choses, traiter en si peu de pages un si grand nombre de Questions, & faire de chaque Article presqu'autant de Résolutions.

Mais comme le nombre des Fâcheux l'emporte de beaucoup pardessus l'autre, qu'ils sont plus pointilleux & plus à craindre, & qu'il est trés-difficile de les pouvoir

voir contenter tous, chacun ayant des veuës particulieres touchant l'examen qu'il fait d'un Livre; car les uns s'attachent à la diction, les autres à l'ornement du discours, quelques-uns vont au fond de la matiere, d'autres examinent la verité des Principes, d'autres considerent l'enchaînement qu'ils ont & qu'ils doivent avoir avec les sujets auxquels on les applique, d'autres par des veuës d'interêt ne remarquent que les endroits les plus foibles & les plus négligez, pour avoir dequoi le faire mépriser, & d'autres enfin, par jalousie, ou par un faux zéle, y cherchent dequoi faire décrier & rendre suspect l'Auteur & sa doctrine: Aussi ce sont eux que Monsieur Rohault a eu principalement en veuë dans la composition de ce Traité-là; afin de tâcher, sinon de les contenter tous, au moins de se mettre hors de prise, & de pouvoir se rendre ce témoignage à soi-même, d'y avoir fait tout son possible; & heureusement il est arrivé que le succez a surpassé son attente.

Car premierement pour ce qui est de la diction, tout le monde demeure d'accord que les termes en sont propres, bien choisis, & en usage; ensorte qu'il n'y en a point qui blessent l'oreille, ni qui laissent l'Esprit du Lecteur en suspens sur le sens & la signification qu'ils renferment. Et pour ce qui regarde la politesse & l'ornement du discours, la matiere qu'il y traite n'en demande point d'autre, qu'une énonciation pure, nette, & qui ne soit point embarassée. Et c'est ce qu'il est aisé d'y remarquer, chaque chose y étant en sa vraye place; où ce qui précede n'attend pas sa clarté & son intelligence de ce qui suit; & où ce qui suit est compris & contenu dans ce qui précede, comme dans son Principe; & ainsi chaque chose y étant en son rang, & dans son ordre, tout y paroît avec une grace & une beauté tout-à-fait naturelle.

Quant à ceux qui sont capables de juger du fond de la matiere, d'examiner les Principes dont elle dépend & qui la soûtiennent, & de comprendre l'enchaînement & les consequences qui la prouvent: ce sont eux principalement

lement que Monsieur Rohault a toûjours souhaité d'avoir pour Juges ou pour Arbitres. Car comme il étoit à présumer que des personnes d'Esprit n'auroient pas voulu agir autrement que de bonne foi, il ne lui pouvoit arriver à leur égard que l'une de ces deux choses: ou de les avoir pour ses Approbateurs, ou de les avoir pour des Censeurs; & l'une ou l'autre ne lui pouvoit être que très-avantageuse. Car s'il arrivoit qu'il les eût pour Approbateurs, c'étoit se rendre eux-mêmes les Paranymphes de son Livre; c'étoit ouvertement, & par leur exemple, persuader les autres des veritez qu'il contient; c'étoit enfin leur en faire concevoir bonne opinion, & le confirmer lui-même dans la sienne. Et au contraire, s'il arrivoit qu'il deût les avoir pour Censeurs, c'étoit ajoûter un nouveau moyen de s'instruire, à ceux dont il avoit coûtume de se servir. Et à dire la verité, il auroit fort souhaité d'en rencontrer plusieurs qui eussent bien voulu avoir cette bonté ou cette complaisance pour lui, que de lui faire connoître ses fautes, lui montrer en quoi il se seroit mépris, & lui marquer ce qu'il auroit dû mettre dans son Livre pour le rendre plus parfait qu'il n'est.

Mais personne n'a jamais voulu lui rendre ce bon office. Tant s'en faut, tout le monde l'a receu avec tant d'applaudissement & d'approbation, que de son vivant une infinité de personnes de qualité & de merite lui en sont venus faire leurs complimens & conjoüissances. Et depuis sa mort, j'ai receu moi-même de toutes parts tant de témoignages de l'estime que chacun en fait, & en reçois encore tous les jours, qu'on peut dire qu'il n'y a gueres de Livre de ce genre, qui soit si universellement approuvé.

Au reste, on ne sçauroit gueres apporter de meilleur témoignage de cette estime generale que chacun en fait, que de voir qu'il a déja été ici imprimé pour la quatriéme fois; que nos Libraires tâchent partout de le contrefaire; que dans les païs étrangers il s'imprime publiquement; & que déja on l'a traduit en plusieurs Langues. Nos Professeurs même ne font point de scrupule d'en ti-

rer

rer une partie de leurs plus belles démonſtrations ; de l'indiquer à leurs Ecoliers comme un des meilleurs Livres qui ait paru depuis long-temps ſur une ſemblable matiere ; & d'en faire un des principaux ornemens de leur Cabinet & Bibliotheque.

Cependant, nonobſtant cette generale & univerſelle approbation, comme la Science & la Vertu engendrent ſouvent l'Envie & la jalouſie, il s'eſt trouvé des perſonnes aſſez indiſcrettes, ou plûtôt aſſez malicieuſes, pour faire courir de mauvais bruits, & de l'Auteur & de ſon Livre. De celui-ci, ayant eu l'effronterie & l'impudence d'écrire contre la verité, que la doctrine qu'il contient avoit été trouvée ſi dangereuſe & ſi mauvaiſe, qu'on l'avoit fait brûler par la main d'un Bourreau ; Et à l'égard de l'Auteur, certains Eſprits mal-faits & emportez, ont eu pour lui ſi peu de reſpect & de retenuë, qu'ils n'ont pas feint, en preſence de Monſieur de Blampignon Docteur de Sorbonne, Curé de ſaint Mederic ſon Paſteur, de rendre ſa Foi ſuſpecte, & de le traiter d'Hérétique, au ſujet du plus ſaint & du plus auguſte de nos Myſteres, l'accuſant de ne pas croire la Tranſſubſtantiation. Ce qui fit que Monſieur de Blampignon, qui d'ailleurs étoit aſſuré de la Foi de Monſieur Rohault, pour s'être pluſieurs fois entretenu avec lui ſur ce Myſtere, ſe crut obligé, lorſqu'il lui porta le ſaint Viatique, pour avoir des Témoins qui puſſent comme lui répondre de ſa Foi, de l'interroger en preſence de toute la Compagnie qui aſſiſta à cette pieuſe & triſte ceremonie, ſur les principaux Articles de nôtre Croyance, & entr'autres ſur celui de la Tranſſubſtantiation ; lui demandant publiquement, s'il ne croyoit pas cette converſion miraculeuſe qui ſe fait en ce Sacrement, de toute la ſubſtance du pain en la ſubſtance du Corps, & de toute celle du vin en la ſubſtance du Sang de Nôtre Seigneur JESUS-CHRIST, que l'Egliſe appelle Tranſſubſtantiation. A quoi Monſieur Rohault répondit : qu'à la verité il étoit un trés-grand pécheur, mais qu'il n'avoit jamais douté de tout ce que la Foi nous enſeigne, & particuliere-

ment

ment touchant ce Myſtere ; qu'il pouvoit ſe reſſouvenir des entretiens qu'ils avoient eus autrefois là-deſſus enſemble ; & qu'il n'ignoroit pas quelle étoit ſur cela ſa Foi : mais qu'il voyoit bien que la demande qu'il lui faiſoit, ne venoit que des mauvais diſcours qu'on lui avoit tenus de lui ſur ce point. Dequoi il s'étonnoit d'autant plus, que ſi ce reproche, de ne pas croire la Tranſſubſtantiation, pouvoit tomber ſur quelqu'un, c'étoit moins ſur lui que ſur beaucoup d'autres ; puis que ſelon ſes Principes mêmes, la Tranſſubſtantiation étoit tellement renfermée dans ce Myſtere, que s'il n'y en avoit point, il ſeroit impoſſible que le Corps de JESUS-CHRIST y fût, ni par conſequent JESUS-CHRIST même. Mais qu'il confeſſoit avec toute l'Egliſe, qu'il y avoit en ce Myſtere une veritable Tranſſubſtantiation du pain au Corps, & du vin au Sang de Nôtre Seigneur JESUS-CHRIST ; & que cét Article de nôtre Foi, faiſoit un des Articles de ſa Croyance. Cette réponſe de Monſieur Rohault, ou plûtôt cette profeſſion publique de ſa Foi, contenta fort Monſieur de Blampignon ; tant parce que le ſalut de ſon Parroiſſien lui étoit cher, que parce qu'il étoit bien aiſe d'avoir des Témoins qui, comme lui, euſſent dequoi pouvoir confondre ou détromper ceux qu'ils pourroient encore à l'avenir entendre mal parler de lui touchant ce Myſtere. Et ce qu'il avoit préveu lui arriva ainſi qu'il l'avoit penſé ; car dés le même jour, il rencontra un de ces Médiſans, ou du moins un de ceux que d'autres avoient ſéduit par leurs calomnies ; lequel ayant appris qu'il avoit porté le ſaint Viatique à Monſieur Rohault, ne manqua pas de lui en faire reproche, & de lui dire, qu'il s'étonnoit fort, qu'un homme éclairé comme lui, ſe fût tellement laiſſé ſurprendre & abuſer, que d'avoir adminiſtré ce Sacrement à une perſonne qui ne croyoit pas la préſence réelle du Corps de JESUS-CHRIST au ſaint Sacrement, puis qu'il ne croyoit pas la Tranſſubſtantiation. A quoi il fut aiſé à Monſieur de Blampignon de répondre, qu'il auroit fort ſouhaité de l'avoir eu lui-même, il n'y avoit qu'un moment,

ment, pour Témoin de la Foi de Monsieur Rohault touchant ce Mystere; qu'il ne doutoit point qu'il n'eût été bien joyeux, & mêmes fort édifié, de lui entendre faire là-dessus sa confession de Foi, laquelle il lui avoit fait faire publiquement, avant que de lui administrer le saint Viatique. Que sans doute cela l'auroit détrompé, & l'auroit obligé en même temps de détromper ceux qui pouvoient lui avoir inspiré ces mauvais sentimens. Au reste, ce que je dis ici, n'est pas un conte fait à plaisir; c'est une verité, dont il est aisé à un chacun de s'éclaircir; puis que Monsieur de Blampignon est encore vivant; lequel ne refusera pas de le certifier, si l'on veut se donner la peine de s'en aller informer à lui.

Puis donc que Monsieur Rohault n'a trouvé jusques-ici que des Approbateurs de ses Ouvrages; & que ceux qui ont osé mal parler de lui & de son Livre, ont été reconnus pour des injustes Calomniateurs: ce n'est pas sans raison ni fondement, que j'ai dit au commencement de cette Préface, qu'un Livre qui porte son nom, ne peut que donner la pensée de quelque grand Ouvrage, quand d'ailleurs on ne s'en explique point. C'est pourquoi j'ai mis pour Titre à ce Recueil, *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, pour exciter par-là la curiosité de plusieurs, les attirer chez le Libraire, & les obliger par ce moyen de le feüilleter d'un bout à l'autre, pour voir ce qu'il contient, la maniere dont les choses y sont traitées; & la difference qu'il y a entre ce Livre & les autres qui traitent de semblables matieres; car je m'assure qu'il y en aura peu, qui aprés l'avoir veu, s'en retournent les mains vuides.

Comme Monsieur Rohault n'est pas le seul de qui l'on a tenu de mauvais discours, & rendu la Foi suspecte; mais qu'il y en a eu d'assez imprudens & indiscrets, que de condamner hardiment, & par des Livres publics, la doctrine de Monsieur Des-cartes, comme contraire à la Foi, & conforme aux Erreurs de Calvin: l'on ne doit pas trouver mauvais, si ayant été mis au rang & à la tête des Carteſiens, pour lever le scandale & les mauvais

soupçons que cela a pû faire naître dans l'Esprit de quelques-uns, touchant leur Foi & leur doctrine, je dis ici:

Premierement, pour ce qui regarde leur Religion, Que graces à Dieu ils sont fort bons Catholiques; qu'ils ne chancelent point dans leur Foi; qu'ils ont pour l'Eglise, & pour les Décisions des Conciles, toute la soûmission que l'on sçauroit desirer des Fidéles les plus zélez & les plus simples; qu'ils n'examinent jamais les veritez de la Foi par leurs Principes, comme pour juger ce qu'ils doivent croire ou ne pas croire; mais qu'au contraire, ils s'assurent & se confirment dans leurs Principes, parce qu'ils voyent qu'ils sont plus conformes aux Articles de nôtre Foi, aux Décisions des Conciles, au sentiment des Peres, à la Tradition, & à la veritable Théologie, que ne le sont ceux qui sont communément receus; ce qu'il ne leur seroit pas fort difficile de verifier, si on vouloit leur permettre d'en faire la preuve.

Et pour ce qui regarde leur doctrine, je croi pouvoir dire que ceux qui l'ont publiquement décriée, ne l'ont jamais bien entenduë; qu'ils leur attribuent cent absurditez dont ils ne demeurent pas d'accord, & qu'ils les font parler tout autrement qu'ils ne pensent. Car s'ils en avoient le moins du monde de connoissance, bien loin de les blâmer, & d'invectiver, comme ils font, contr'eux, ils se rendroient peut-être à leur sentiment, & seroient les premiers à approuver la maniere avec laquelle ils s'expliquent sur le Mystere dont il s'agit, & dont ils veulent leur faire un crime; laquelle maniere n'est nullement celle qu'ils combattent, & qu'ils revêtent de cent extravagances, qui la rendent sans doute fort ridicule. Mais en verité, il me semble que ceux qu'ils attaquent ainsi, ont donné d'assez bonnes marques de la justesse de leur Esprit, pour ne leur pas attribuer des visions & des chimeres si hors de sens & de comprehension.

Aussi, bien loin de cela, l'explication que Monsieur Des-cartes donne lui-même à ce Mystere, est si naturelle

& si

& si simple, & avec cela si conforme à ce que la Foi nous enseigne, au sentiment des Peres, & aux Décisions des Conciles; & résout si clairement les plus grandes difficultez qui s'y rencontrent: que tout Mystere de Foi qu'il est, la Raison n'en est point choquée, & ne trouve rien qui l'effarouche. Enforte qu'il seroit peut-être du bien de l'Eglise, qu'elle fût serieusement examinée par ceux qui ont l'authorité en main, & qui ont droit d'en juger. Car si une fois elle étoit receuë, il seroit impossible que toutes les Héréfies ne tombassent par-terre; & qu'il pût y avoir d'autre Croyance touchant ce Mystere, que celle de l'Eglise Catholique, Apostolique & Romaine. Desorte que ni l'Impanation des Lutheriens, ni la Figure des Calvinistes, ni toute autre Héréfie que ce puisse être, ne pourroit résister à la force & à la clarté de cette explication.

Cependant pour faire voir par quelque exemple, que ce n'est pas temerairement qu'ils avancent ces choses; & que des Principes dont ils se servent, l'on en peut tirer des consequences fort justes pour nous fortifier dans la Foi, & pour la conduite & le réglement de nos mœurs; & qu'au contraire, de ceux de ces faiseurs de Livres, on en peut tirer de tout opposées; prenons pour exemple ce ce qui les effarouche le plus, & qui les fait tant crier contre Monsieur Des-cartes & sa doctrine

S'il est vrai, comme Monsieur Des-cartes le prétend, que l'essence de la Matiere, ou du Corps, consiste dans l'étenduë en longeur, largeur & profondeur: il n'est pas difficile de comprendre que l'Ame de l'Homme, ou ce Principe interieur qui est en lui capable de penser, est une Substance distincte du Corps. Car il est visible que l'Etenduë, de quelque maniere qu'on la conçoive taillée & remuée, ne peut jamais ni raisonner, ni vouloir, ni même sentir. Ainsi, ce qui est en nous qui pense, est necessairement une Substance distinguée du Corps.

Les connoissances, les volontez, les sentimens actuels, sont actuellement des manieres d'être de quelque Substance. Or toutes les divisions qui arrivent à la Matiere,

ou à l'Etenduë, ne produiſent en elle que des figures; & tous ſes mouvemens, ne produiſent autre choſe que des rapports de diſtance; l'Etenduë n'eſt pas capable d'autres modifications. Donc nôtre penſée, nôtre deſir, nos ſentimens de plaiſir & de douleur, ſont des manieres d'être d'une Subſtance qui n'eſt point Corps. Donc l'Ame de l'Homme eſt diſtinguée du Corps. Et cela poſé, voici de quelle maniere l'on peut démontrer qu'elle eſt immortelle.

Jamais aucune Subſtance ne s'aneantit par les forces ordinaires de la Nature; car comme la Nature ne peut faire quelque choſe de rien, auſſi ne peut-elle réduire quelque choſe à rien.

Les manières des Eſtres peuvent s'aneantir; par exemple, la rondeur d'un Corps ſe peut détruire; car ce qui eſt rond peut devenir quarré. Mais cette rondeur n'eſt pas un Eſtre, une Choſe, une Subſtance; ce n'eſt qu'un rapport d'égalité, dans la diſtance qui eſt entre les parties qui terminent ce Corps, & celle qui en eſt le Centre. Ainſi ce rapport changeant, la rondeur n'eſt plus; mais la Subſtance ne peut être réduite à rien.

Or par les raiſons que je viens de dire, l'Ame n'eſt point une maniere d'être du Corps; Donc elle eſt immortelle. Et quoi que nôtre Corps ſe diſſolve en une infinité de parties de differente nature, & que la conſtruction de ſes organes ſe rompe: l'Ame ne conſiſtant point dans cette conſtruction, ni dans aucune autre modification de la Matiere, il eſt évident que la diſſolution, ni mêmes l'anéantiſſement de la Subſtance du Corps humain (ſuppoſé que cét anéantiſſement fût veritable) ne peut anéantir la Subſtance de nôtre Ame.

Voici encore une autre preuve de l'immortalité de l'Ame fondée ſur le même Principe.

Quoi que le Corps humain ne puiſſe être réduit à rien, à cauſe que c'eſt une Subſtance, il peut neanmoins mourir, & toutes ſes parties ſe peuvent diſſoudre, parce que l'Etenduë ſe peut diviſer. Or l'Ame étant une Subſtance diſtinguée de l'Etenduë, elle ne peut être diviſée; car

on

on ne sçauroit diviser une pensée, un desir, un sentiment de douleur & de plaisir, de même que l'on peut diviser un Quarré en deux ou en quatre Triangles. Donc la Substance de l'Ame est indissoluble, incorruptible, & par consequent immortelle; parce qu'elle n'a point d'étenduë.

Voilà de veritables démonstrations, qui convainquent l'Esprit de tout homme qui veut être attentif; & auxquelles il faut se rendre, ou renoncer à la Raison.

Mais si, comme le prétendent ces Auteurs inconnus, l'essence du Corps consiste dans quelqu'autre chose que dans l'Etenduë: comment convaincront-ils les libertins, que nôtre Ame n'est ni materielle ni mortelle? Ils leur soûtiendront, que ce quelqu'autre chose, en quoi ils disent que consiste l'essence du Corps, est capable de penser; & que la Substance qui pense, est la même que celle qui est étenduë. Que s'ils leur nient, ils leur feront voir que c'est sans raison; puis que selon leur Principe, le Corps étant autre chose que de l'Etenduë, ils n'ont point d'idée distincte de ce que ce peut être; & qu'ainsi ils ne peuvent sçavoir, si cette chose inconnuë n'est point capable de penser. Ceux qui ont tant soit peu de discernement, peuvent voir aisément les dangereuses consequences qui se peuvent tirer de là.

C'est pourquoi ceux qui font un crime à nos Philosophes, de ce qu'ils démontrent que l'Etenduë n'est point une maniere d'être, mais l'essence même du Corps, ou de la Matiere, devroient penser aux fâcheuses consequences qu'on peut tirer de leurs Principes; & ne pas renverser la principale, ou mêmes la seule démonstration que l'on peut avoir de la distinction qui est entre l'Ame & le Corps. Car enfin la distinction de ces deux Parties de nous-mêmes, prouvée par des idées claires & distinctes, comme l'ont fait nos Philosophes en plusieurs endroits, est de toutes les Veritez celle qui est la plus féconde & la plus necessaire, soit pour la Philosophie, soit pour la Théologie, soit aussi pour la Morale Chrêtienne.

Il est donc bien important, lors qu'il s'agit de l'établisse-

bliſſement de quelque Principe, de prendre garde de ne rien admettre qui ne ſoit clair à l'Eſprit; c'eſt la clarté qui nous perſuade, qui nous convainc, & qui nous aſſure de la Verité; ſans cela l'on ne peut s'aſſurer de rien. Mais quand un Principe eſt clair, toutes les conſequences le ſont auſſi; l'on en voit aiſément la ſuite & la liaiſon. Et comme les Veritez s'entretiennent toutes, & qu'elles ne ſont point contraires les unes aux autres: l'on ne ſçauroit tirer de conſequence contraire à la Religion, d'un Principe qui eſt évident. Mais lors qu'un Principe n'eſt pas évident, qu'il eſt obſcur, qu'il ne porte aucune idée de ſoy à l'Eſprit, & qu'il a par conſequent la vraye marque de la fauſſeté: il n'y a rien de plus facile à ceux qui ſçavent tant ſoit peu l'Art de raiſonner, que d'en tirer des conſequences contraires à la Foi. Deſorte que s'il étoit permis de rendre ſuſpecte la Foi des autres hommes, par des conſequences tirées des Principes dont ils ſont perſuadez: comme il n'y a point d'homme qui ne ſe trompe en quelque choſe, & qui ne prenne pour vrai ce qui ne l'eſt pas, il n'y en a point auſſi que l'on ne pût traiter d'Hérétique. Et ainſi, c'eſt ouvrir la porte à une infinité de querelles & de diſputes, que de laiſſer aux hommes la liberté de rendre ſuſpecte la Foi de ceux qui en matiere de Philoſophie ne ſont pas de leur ſentiment. Auſſi je ne puis comprendre, comment ſur des conſequences que l'on deſavoüe, on ſe plaît de faire paſſer pour Hérétiques, des perſonnes qui ſont trés-ſoûmiſes à l'Egliſe, & à toutes ſes Déciſions.

Chacun ſçait que l'on doit diſtinguer la Théologie d'avec la Philoſophie; les Articles de nôtre Foi, d'avec les Opinions des hommes; les Veritez que Dieu apprend à tous les Chrêtiens par une authorité viſible, de celles qu'il ne découvre qu'à quelques perſonnes en récompenſe de leur attention & de leur travail. Des choſes qui dépendent de Principes ſi differens, ne doivent pas ſans doute être confonduës. L'on ne doute point auſſi qu'il ne faille faire ſervir les Sciences humaines à la Religion, chacun en demeure d'accord; mais cela ſe doit faire dans

un

un Esprit de paix & de charité, sans se condamner les uns les autres, tant que l'on convient des Veritez que l'Eglise a décidées; car c'est ainsi que la Verité se découvrira, & qu'ajoûtant de nouvelles découvertes à celles des Anciens, toutes les Sciences se perfectionneront de plus en plus.

Mais l'Imagination de la plus-part des hommes ne s'accommode pas des nouvelles découvertes. La nouveauté des sentimens, même les plus avantageux à la Religion, les effraye; & ils se familiarisent facilement avec les Principes les plus faux, & les plus obscurs, pourveu que quelque Ancien les ait avancez. Et lors qu'ils se sont ainsi familiarisez avec ces Principes, quelqu'obscurs qu'ils soient, ils les trouvent évidens, & les regardent comme trés-utiles, quoi qu'ils soient trés-dangereux. Ils s'accoûtument même si bien, à dire & à écouter ce qu'ils ne conçoivent point, & à se défaire d'une difficulté réelle par une distinction imaginaire, qu'ils demeurent toûjours trés-satisfaits de leurs fausses idées, & ne sçauroient même souffrir qu'on leur parle un langage qui soit clair & distinct: Semblables en cela à ces personnes qui sortant d'un lieu obscur, apprehendent la Lumiere, & ne peuvent la supporter, s'imaginant qu'on les aveugle, lors même que l'on tâche de dissiper les tenebres qui les environnent.

Ainsi, quoi que Monsieur Rohault ait fait voir plusieurs fois dans ses Conferences publiques, par plusieurs justes raisonnemens & consequences, qu'il est dangereux de soûtenir, par exemple, que les bestes ont une Ame plus noble que le Corps: cependant, comme cette opinion est ancienne, & que la plus-part des hommes sont accoûtumez à la croire; & que celle qui lui est contraire, & qui ne les fait considerer que comme des Machines, a le caractere de la nouveauté: ceux qui jugent de la dureté des opinions, plûtôt par la frayeur & la surprise qu'elles produisent dans l'Imagination, que par l'évidence & la lumiere qu'elles répandent dans l'Esprit, ne manqueront pas de regarder cette opinion des Carte-

teſiens, comme dangereuſe; & ils condamneront bien plûtôt ces Philoſophes comme temeraires, qu'ils ne feront ceux-là mêmes qui ſoûtiennent que les beſtes ſont capables de raiſonner.

Delà vient, que ſi dans une Compagnie, quelque perſonne un peu grave vient à dire d'un ton ſerieux, ou plûtôt avec cét air que répand ſur le viſage, l'Imagination, lors quelle eſt ſurpriſe & affrayée par quelque choſe d'extraordinaire: *En verité les Carteſiens ſont d'étranges gens; ils ſoûtiennent que les beſtes n'ont point d'Ame: I'apprehende fort que bien-tôt ils n'en diſent autant de l'Homme.* Cela ſeul ſera ſuffiſant pour perſuader pluſieurs perſonnes que cette opinion eſt dangereuſe; il n'y a point de raiſons qui puiſſent empêcher l'effet de ce diſcours ſur les Imaginations foibles. Et ſi par hazard il ne ſe trouve dans la Compagnie quelque Eſprit vif & enjoüé, qui en faſſe voir le ridicule, & qui par un air fier & reſolu, ne raſſure la Compagnie de la peur qu'on lui aura faite: les Carteſiens auront beau ſe tourmenter, ils n'effaceront jamais par leurs raiſonnemens, l'impreſſion qu'on aura donnée d'eux & de leur doctrine.

Cependant il n'y auroit rien de plus facile que de faire voir l'extravagance de ce diſcours; il n'y auroit ſimplement qu'à mettre la Définition à la place du Défini. Car ſi par exemple, quelqu'un diſoit ſerieuſement: *Les Carteſiens ſont d'étranges gens; ils diſent que les beſtes ne penſent ny ne ſentent point: I'apprehende fort que bien-tôt ils n'en diſent autant de nous;* Certainement on ſe mocqueroit d'une perſonne qui avanceroit un tel diſcours; & chacun jugeroit aiſément que ſon apprehenſion ſeroit fort impertinente, & fort mal-fondée. Car que les beſtes ſoient tout ce que l'on voudra, qu'elles penſent ou qu'elles ne penſent point, qu'elles ſentent ou qu'elles ne ſentent point: cela ne prouve & ne conclud rien à nôtre égard, & n'empêche pas que nous ne ſoyons ce que nous ſommes, & que chacun ne ſoit convaincu de ſa propre penſée, & de ſon propre ſentiment.

Mais

Mais la plus-part des hommes ne sont pas capables de démêler les moindres équivoques ; principalement lors que leur Imagination est effrayée par l'idée de quelque nouveauté qu'on represente comme dangereuse. Outre que l'air, & les manieres avec lesquelles on dit les choses, nous persuadent sans peine, & souvent même avec plaisir ; mais la Verité ne se découvre point sans quelque application d'Esprit, dont plus de la moitié du monde n'est pas capable.

Mais je ne m'apperçois pas que cette Préface est déja si longue, que je crains mêmes qu'elle ne soit ennuyeuse ; & cependant je n'ai encore rien dit de mon sujet, n'ayant jusques ici parlé que du Titre qu'il porte. Cela pourtant ne s'est pas fait sans raison ; car voyant que je n'avois que fort peu de choses à dire touchant le corps de ce Livre, qui neanmoins est assez gros, j'ai cru qu'il ne lui falloit pas mettre une tête qui lui fût tout à fait disproportionnée. Et pour avoir de la matiere, je me suis un peu étendu sur les loüanges de l'Auteur ; soit pour laisser à la Posterité ce petit monument de sa gloire, soit pour deffendre sa personne & sa doctrine des insultes de ses Envieux.

Je viens maintenant à mon sujet, dont je n'ai que deux mots à dire.

Ce Livre n'est autre chose qu'un Recueil de plusieurs differens Traitez de Mathématique, que Monsieur Rohault avoit coûtume d'enseigner à ceux qui lui faisoient l'honneur de vouloir bien l'avoir pour Maître. Il n'est pas necessaire que je les désigne tous ici par leur nom, puis que cela se verra ci-aprés par la Table. Je puis dire seulement, que bien que ces Traitez soient trés communs, les choses y sont touchées d'une maniere qui n'est pas commune. Car Monsieur Rohault avoit cela de particulier, que ne s'étant jamais appliqué à beaucoup approfondir ces parties de Mathématiques, qui étant d'une trop grande & trop profonde spéculation, & abstraction, sont de peu d'usage parmi le monde, quoi que sans doute ce soient pourtant celles qui font davan-

tage paroître la grandeur de l'Esprit humain, & jusques où peut aller sa capacité & son étenduë,) mais s'étant uniquement attaché à celles qui entrent plus dans le commerce des hommes, & dont il est presque impossible de se pouvoir passer: aussi s'étoit-il étudié à les bien comprendre, & particulierement à trouver des manieres propres à les faire bien concevoir aux autres.

C'est ce que je me promets que l'on reconnoîtra facilement ici, par les expressions simples & propres dont il se servoit pour les donner à entendre à ses Auditeurs. Aussi, quoi que les divers Traitez qui sont contenus dans ce Livre, soient dans les mains de plusieurs: neanmoins l'on trouvera bien de la difference entre ces mêmes Traitez, tels qu'ils sont ici, & leurs copies, ou pour mieux dire leurs premiers crayons. Car on ne les donne pas ici simplement comme il les donnoit lui-même à ses Disciples, mais comme il les leur expliquoit dans ses Leçons particulieres. Si bien que ceux qui voudront se rendre tant soit peu attentifs, pourront aisément d'eux-mêmes, & sans autre Maître que l'Esprit de Monsieur Rohault qui y regne partout, entendre tout ce qui est conteuu dans ce gros Livre.

J'espere aprés cela, que chacun trouvera que ce Livre ne sera pas d'une mediocre utilité pour le Public; puis que toutes sortes de personnes y pourront trouver dequoi s'instruire. Les jeunes Gentils-hommes y pourront apprendre les premiers Elemens de la Géometrie; puis passer de là aux Fortifications, où ils verront les differentes Manieres de fortifier les Places, tant regulieres qu'irregulieres; les avantages qu'il y faut ménager, les égards qu'il faut avoir à toutes les choses du dedans & du dehors; ils verront, entre ces differentes Manieres, quelles sont les plus parfaites, en quoi elles le sont, pourquoi elles ne le sont pas toûjours, & quand l'une doit être préferée à l'autre. Mais ils y apprendront aussi, que la maniere d'attaquer d'aujourd'huy: les grandes ruines que font les Bombes, les Carcasses, & le Canon: & sur tout que la vigueur, & la generosité extraordinaire de

nos

nos Generaux, de nos Capitaines, & de nos Soldats: font qu'il n'y a plus de Places imprenables.

Ceux qui voudront se donner au Negoce ou aux Affaires, & y agir en gens de bien & d'honneur, y pourront apprendre à bien tenir leurs Livres, & dresser leurs Comptes; à ne se point laisser tromper, & à ne point aussi tromper les autres, par quelque erreur de calcul, ou imprévueë, ou malicieuse. Car ce n'est pas d'aujourd'hui que l'on sçait, que pour faire une grande fortune, & s'enrichir aux dépens d'autrui, il ne faut voir les choses qu'à demi, & non pas voir si clair. Une Conscience bien éclairée, est un obstacle invincible & impénétrable au Mal.

Les Artisans pourront aussi par le moyen des Méchaniques, se former eux-mêmes l'Esprit, & se rendre capables de bien exercer leurs Arts; & s'ils ont un peu de genie & d'industrie, cela leur ouvrira l'Esprit pour inventer de nouvelles Machines, fabriquer de nouveaux Instrumens, & faciliter ainsi les moyens d'executer leurs Ouvrages.

Je n'ai plus qu'une chose à faire observer, qui est, qu'ayant tâché de mettre chaque Traité dans l'ordre & dans le rang où il doit être, il est arrivé neanmoins que celui qui devroit être le premier, est ici le dernier. Dequoi je n'ai point d'autre raison à rendre, sinon que comme c'étoit celui où Monsieur Rohault s'étoit le moins étendu & expliqué, & par consequent où il avoit laissé plus de choses au soin de celui qui pourroit un jour travailler à le mettre en état de paroître au jour, je l'ai reservé pour le dernier, afin de me donner le loisir d'y pouvoir bien penser, tandis qu'on imprimeroit les autres Traitez. Mais il n'y a rien de plus facile, que de passer pardessus les autres, & de lire ce Traité-là le premier.

Si je ne m'étois point déja trop étendu, je pourrois ici faire remarquer les grands avantages que l'on peut tirer des Mathématiques, & particulierement de la Géometrie; C'étoit mêmes le premier dessein que je m'étois pro-

proposé, afin de donner quelque étenduë à cette Préface, & me fournir de la matiere dequoi pouvoir proportionner la tête de ce Livre avec le reste du corps. Mais ayant depuis consideré qu'il étoit important de disculper Monsieur Rohault, & moi avec lui, des reproches qui nous étoient faits par ceux qui se donnoient la liberté de rendre publiquement suspecte la Foi du Maître & des Disciples, par les mauvaises consequences qu'ils tiroient de leurs Principes : cela m'a fait changer de dessein, & m'a déterminé à celui que j'ai pris. Si j'y ai bien ou mal reüssi, je laisse à chacun à en juger. Mais au moins je puis assurer avec sincerité, que ce n'est que le desir de deffendre la Verité, & de repousser la Calomnie, en faisant connoître la pureté de leur Foi & de leur Doctrine, qui me l'a fait entreprendre.

—

AVER-

AVERTISSEMENT

Sur cette

Nouvelle Edition.

ON pourroit se dispenser de rendre compte ici des changemens que l'on a apportez dans cette Nouvelle Edition, & il suffiroit de n'avoir rien changé que bien à propos. Car il n'en est pas des Mathématiques, comme des Matieres de Morale : dans celles-ci, les droits d'un Autheur sont inviolables, & l'on n'ose toucher ni à ses pensées, ni à ses expressions ; au lieu que dans celles-là, l'evidence qui les accompagne toûjours, & l'interest de la Verité, ne permettent pas de copier des fautes. D'ailleurs, comme le principal but que doit avoir un Auteur en traitant des Sciences, & surtout des Mathématiques, est de les illustrer autant qu'il luy est possible, & d'en faciliter l'usage, puis qu'il est si universel dans tous les Arts : il doit prendre en bonne part la censure de ceux qui se proposent la même fin. C'est aussi par ce seul motif, de rendre cét Ouvrage plus utile au Public, qu'on en a éclairci & corrigé plusieurs endroits, qui étoient un peu negligez ; en quoi l'on n'a rien fait qu'avec l'approbation d'un Mathématicien du premier ordre, & qui n'est pas moins connu en France qu'en Hollande. On reconnoît cependant, avec tout le monde, le merite distingué de feu Mr. Rohault, & l'on n'a garde de refuser à sa memoire la justice qui lui est deuë. Ainsi l'on considere ses Oeuvres Posthumes, comme plusieurs Traitez détachez, qu'il n'avoit composez que pour son usage particulier, & auxquels il n'avoit pas mis la derniere main.

Mais pour satisfaire en partie la curiosité de ceux qui n'au-

n'auront pas la premiere Edition de ce Livre, & qui souhaiteroient pourtant de voir les endroits qu'on a retouchez, en voici quelques-uns des plus considerables.

Tome I. Pag. 355. *l.* 13. Or il est à remarquer &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: Or il est à remarquer, que quand ce qui reste, excede 50000, on ajoûte une unité dans les Tables. *C'est une faute; car pour sçavoir si l'on doit ajoûter l'Unité, il ne faut pas comparer ce qui reste, à* 50000, *mais seulement à la Racine trouvée. On a corrigé la même faute dans le Calcul du Côté du Decagone, pag.* 367.

Tome II. pag. 109. *l.* 24. en multipliant &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: en multipliant MC par MK, & le Produit par le tiers de la profondeur du Fossé. *Ce Calcul suppose faussement que les deux Pyramides ont pour Bases les Triangles CMK, CLK; au lieu que ce sont les Rectangles de CM & CL par la profondeur du Fossé; ce qu'il est important de remarquer. On a corrigé la même faute dans le Toisé du Talus du Rempart, pag.* 114. *lig.* 9. & 10.

Pag. 125. *l.* 6. A quoi l'on peut encore &c. *Dans la premiere Edition, il y a:* A quoi l'on peut encore ajoûter le Plan incliné, & la Superficie plane, ou le Traisneau. *On a ôté cette* Superficie plane (*l'Auteur a voulu dire*, Superficie Horizontale) *& ce* Traisneau, *parce que ce n'est pas une Machine simple.*

Pag. 454. *l.* 16. il ne faut que diviser &c. *Dans la premiere Edition, il y a:* il ne faut que diviser le Numerateur de la Fraction à diviser, ou du Dividende, par le Numerateur de l'autre; & donner au Quotient le Dénominateur commun. Ainsi pour diviser $\frac{8}{9}$ par $\frac{2}{9}$, il ne faut que diviser 8 par 2, le Quotient

tient sera 4, & donner au Quotient le Dénominateur commun, ce qui sera $\frac{4}{9}$. *A quoi bon ce* Dénominateur commun? *c'est une fa[illegible] Quotient est* 4, *& non pas* $\frac{4}{9}$.

Enfin on donne avis, que le Profil qui se trouve dans les pages 69 *&* 70 *du* II. *Tome, n'est pas exact. Car premierement la largeur* CD *de l'Esplanade ne répond pas à la construction, ayant* 10 *Toises, au lieu de* 8. *De plus, la lettre* R *servt à marquer deux points differens, qui sont si proches l'un de l'autre, qu'ils se confondent en un: pour corriger ce défaut, il auroit fallu aggrandir tellement la Figure, qu'elle n'auroit pû tenir dans la Page; on prie le Lecteur de suppléer à cela.*

Fautes à corriger.

Page 167. ligne 23. par la 24. *lisez*, par la 23.
Pag. 242. l. 11. multiple CD, *lis.* multiple de CD,
Pag. 262. l. penult. sera AC, *lis.* sera à AC,
Pag. 305. l. 16. que à AF *lis.* que AF
Pag. 327. l. 15. à CF. *lis.* à CE.
Pag. 336. l. 3. aussi au *lis.* aussi semblable au

TABLE

TABLE
DES
TRAITEZ
Contenus dans le
PREMIER TOME.

PREMIER TRAITE'.

LEs six premiers Livres des Elemens d'Euclide. Page 1

SECOND TRAITE'.

La Trigonometrie; ou la Resolution des Triangles. 349

TROISIE'ME TRAITE'.

La Geometrie Pratique. 387

LES

LES SIX PREMIERS LIVRES DES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

ON ne peut pas douter qu'il n'y ait des Eſtres étendus en longueur, largeur, & profondeur ; Et c'eſt ce qu'on appelle *Corps* ou *Soliде*.

En examinant en particulier un de ces Corps, comme celui qui eſt ici repreſenté, qui reſſemble à un dé à joüer, il eſt certain que l'on y reconnoît un Deſſus, un Deſſous, un Devant, un Derriere, & des Côtez.

Puis ne conſiderant que le Deſſus

de ce Corps, on peut assurer, sans craindre de se tromper, qu'il a de la longueur & de la largeur, & point du tout de profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *Superficie* ou *Surface*.

Ensuite, considerant l'une des extremitez de cette superficie, l'on n'y remarque que de la longueur, sans largeur ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *une Ligne*.

Enfin, considerant l'extremité de l'une de ces lignes, on reconnoît que c'est une chose qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *un Point*.

Ainsi, il est indubitable qu'il y a des Superficies, des Lignes, & des Points; mais il est certain aussi que c'est seulement par la pensée que les Points sont separez des Lignes, les Lignes des Superficies, & les Superficies des Corps, ou Solides; Ce qu'il suffit de remarquer ici pour établir le fondement & la verité des définitions suivantes.

Mais auparavant, comme dans les Sciences dont nous avons à traiter, on ne doit rien avancer qui ne soit clair à l'Esprit, & qui ne soit fondé en preuves, & que souvent pour la preuve des Propositions qu'on examine, on se sert de Definitions, de Demandes, d'Axiomes, de Theoremes, de Problemes, de Lemmes, & de Corollaires; il est bon d'expliquer ici ce que l'on entend par ces termes.

Definition, est une explication claire & précise de la signification des mots, ou des choses que les mots signifient.

Demande, est une proposition, qui étant claire & certaine, est supposée vraye, pour n'être pas obligé de la démontrer.

Axiome, est une proposition si évidente d'elle-même, que l'Esprit n'en peut douter, & qui pour cela n'a pas besoin de preuve.

Theoreme, est une proposition qui contient quelque proprieté à démontrer.

Pro-

Probleme, eſt une propoſition qui contient la preuve de quelque choſe qui étoit à faire, ou à trouver.

Lemme, eſt une propoſition qui n'eſt miſe au lieu où elle eſt, que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent.

Corollaire, eſt une propoſition qui ſuit d'une autre qu'on vient de prouver.

DEFINITIONS.

1. Un Point, eſt ce qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; & qui par conſequent n'a ni étenduë, ni parties.

2. Une Ligne, eſt une Etenduë en longueur, ſans largeur ni profondeur.

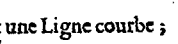
3. Les extremitez d'une Ligne, ſont les points qui la terminent.

4. Une Ligne droite, eſt une Ligne qui a toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez; en ſorte que l'une ne s'éléve & ne s'abaiſſe point plus que l'autre.

Par exemple, la Ligne AB eſt une Ligne droite, parce qu'elle a toutes ſes parties tellement poſées entre ſes extremitez A, & B, que pas une n'eſt plus élevée, ny plus abaiſſée que l'autre.

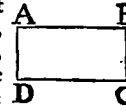
5. Une Ligne courbe, eſt une Ligne qui n'a pas toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez.

Par exemple, la Ligne CD eſt une Ligne courbe; parce qu'elle a quelques-unes de ſes parties, comme E, & F, qui ne ſont pas également poſées entre ſes extremitez, & dont l'une s'éléve ou s'abaiſſe plus que l'autre.



6. Une Superficie, ou Surface, eſt une Etenduë en longueur & largeur, ſans profondeur.

Par exemple, l'Etenduë qui eſt renfermée entre les Lignes AB, BC, CD, & DA, eſt une Superficie, parce qu'elle a de la longueur & de la largeur, & qu'elle n'a point de profondeur.



7. Les extremitez d'une Superficie, ſont les lignes dont elle eſt bornée.

8. Une Superficie plane, ou un Plan, eſt une Superficie qui a toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez; en ſorte que l'une ne s'éléve & ne s'abaiſſe point plus que l'autre, comme ici A B C D.

9. Une Superficie courbe, eſt une Superficie qui n'a pas toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez; & dont l'une s'éléve ou s'abaiſſe plus que l'autre.

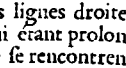
10. Une Superficie convexe, eſt une Superficie courbe, conſiderée du côté qu'elle s'éléve.

11. Une Superficie concave, eſt une Superficie courbe, conſiderée du côté qu'elle s'enfonce ou s'abaiſſe.

Ainſi, la Superficie d'un Globe eſt une Superficie courbe; laquelle conſiderée par le dehors eſt convexe, & conſiderée par le dedans eſt concave.

12. Des Lignes paralleles, ſont des lignes droites qui ſont ſur un même plan, & qui étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, ne ſe rencontrent jamais, & ſont toûjours également diſtantes.

Par exemple, les lignes A B, C D, ſont paralleles; parce qu'elles ſont ſur un même plan, & qu'étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, elles ne ſe rencontreront jamais, & ſeront toûjours également diſtantes.



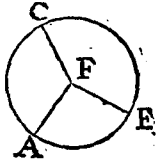
13. Le Terme, eſt l'extremité de quelque Grandeur.

14. Une

14. Une Figure, eſt ce qui eſt environné de termes.

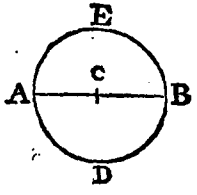
15. Un Cercle, eſt une figure plane, bornée d'une ſeule ligne courbe, qu'on nomme Circonference, au dedans de laquelle il y a un point, qu'on nomme Centre, duquel toutes les lignes droites menées à la circonference ſont égales entr'elles.

Par exemple, la Figure ACE eſt un Cercle; parce que c'eſt une Figure plane, qui eſt bornée d'une ſeule ligne courbe, à ſçavoir AEC, & qu'au dedans il y a un point, à ſçavoir F, duquel toutes les lignes droites, comme FA, FC, FE, qui ſont menées à la circonference, ſont égales entr'elles.



16. Le Diametre d'un Cercle, eſt une ligne droite qui paſſe par le centre, & qui ſe termine de part & d'autre à la circonference.

Par exemple, au Cercle ADBE, la ligne droite AB, eſt un diametre; parce qu'elle paſſe par le centre C, & que ſes extremitez A, & B, ſe terminent de part & d'autre à la circonference.



17. Un Arc de Cercle, eſt une partie de la circonference d'un Cercle, comme BE.

Si la circonference d'un Cercle eſt diviſée en 360 parties égales, chacune de ces parties s'appelle Degré, dont la 60e. partie s'appelle Minute, &c.

18. Un Demi-Cercle, eſt une figure compriſe du diametre du Cercle, & de la moitié de la circonference, comme AEB.

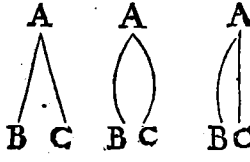
19. Un Angle, eſt l'inclinaiſon de deux lignes qui

se rencontrent en un point non directement ; ou pour mieux dire, c'eſt l'eſpace qui eſt compris entre deux lignes ainſi inclinées.

Ainſi, les lignes BA, CA, qui ſont inclinées l'une vers l'autre, & qui ſe rencontrent non directement au point A, forment ce qu'on appelle un Angle.

20. Les Côtez d'un Angle, ſont les lignes qui forment l'Angle.

21. La Pointe, ou le Sommet d'un Angle, eſt le point où ſe rencontrent les deux Côtez de l'Angle.



L'on déſigne quelquefois un Angle par une ſeule lettre, que l'on met au ſommet ; & quelquefois par trois, & alors celle qui marque le ſommet ſe doit mettre au milieu. Ainſi pour déſigner par trois lettres l'Angle A, l'on dit l'Angle BAC, ou bien l'Angle CAB.

22. Un Angle rectiligne, eſt un Angle compris de deux lignes droites.

23. Un Angle curviligne, eſt un Angle compris de deux lignes courbes.

24. Un Angle mixte, eſt un Angle compris d'une ligne droite & d'une ligne courbe ; comme on peut voir en la figure precedente.

Comme l'Angle rectiligne eſt d'un plus grand uſage que les deux autres, c'eſt de lui que l'on entendra parler ci-aprés, lors qu'on parlera ſimplement d'un Angle, ſans en déſigner l'eſpece.

25. La Quantité ou la Grandeur d'un Angle, eſt le nombre des degrez que contient l'arc que ſes côtez comprennent, d'un Cercle qui a ſon ſommet pour centre.

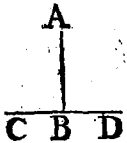
Et ainſi, pour déterminer la quantité ou la grandeur

deur d'un Angle, il ne faut que décrire un Cercle dont le sommet de l'Angle soit le centre ; puis il faut sçavoir combien de degrez contient l'arc de ce Cercle compris entre ses deux Côtez, & le nombre de ces degrez en determinera la grandeur.

D'où il suit qu'un Angle est d'autant plus grand, que cét arc comprend un plus grand nombre de degrez.

26. Une Ligne perpendiculaire, est une ligne droite, qui tombant sur une autre ligne droite, fait de part & d'autre des Angles égaux.

Ainsi, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD ; parce qu'elle tombe de telle sorte sur cette ligne, qu'elle fait les Angles ABC, & ABD, égaux entr'eux.

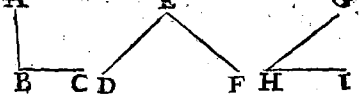


Quand une ligne droite tombe à l'extremité d'une autre ligne droite, elle ne laisse pas de lui être perpendiculaire, si cette autre ligne étant prolongée, elle fait avec elle des angles de part & d'autre égaux entr'eux.

Si une ligne est perpendiculaire à une autre, cette autre reciproquement lui est aussi perpendiculaire ; ainsi les deux lignes AB, CD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

27. Un Angle droit, est un Angle compris de deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre ; comme l'Angle ABC.

28. Un Angle obtus, est un Angle plus grand qu'un droit, comme l'Angle DEF.



29. Un Angle aigu, est un Angle plus petit qu'un droit, comme l'Angle GHI.

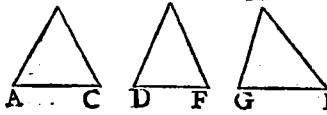
30. Une Figure rectiligne, est une Figure compriſe

prise ou bornée de plusieurs lignes droites ; Et c'est de celle-là seule, & du Cercle, dont il est parlé dans ces Elemens.

31. Les Côtez d'une Figure rectiligne, sont les lignes droites dont elle est bornée.

32. Un Triangle, est une Figure compriſe de trois lignes droites, comme ABC.

Le Triangle considéré selon ses côtez, se divise en trois especes, sçavoir, en Triangle Equilateral, en Isoscéle, & en Scaléne.



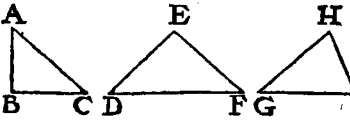
33. Un Triangle Equilateral, est un Triangle qui a ses trois côtez égaux, comme ABC.

34. Un Triangle Isoscéle, est un Triangle qui a deux de ses côtez égaux, comme DEF.

35. Un Triangle Scaléne, est un Triangle qui a ses trois côtez inégaux, comme GHI.

Le Triangle considéré selon ses Angles, se divise aussi en trois especes ; sçavoir, en Triangle Rectangle, en Amblygone, & en Oxygone.

36. Un Triangle Rectangle, est un Triangle qui a un angle droit, comme ABC.



37. Un Triangle Amblygone, ou Obtus-angle, est un Triangle qui a un angle obtus, comme DEF.

38. Un Triangle Oxygone, ou Aigu-angle, est un Triangle qui a ses trois angles aigus, comme GHI.

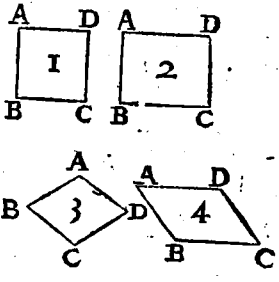
39. La Baze d'un Triangle, est un de ses trois Côtez indifferemment, que l'on nomme ainsi suivant le besoin qu'on en a.

Ainsi

Ainſi en tout Triangle chaque Côté peut ſervir de Baze ; & mêmes l'Hypotenuſe d'un Triangle Rectangle (c'eſt à dire le Côté oppoſé à l'Angle droit) peut être conſiderée comme Baze de ce Triangle.

40. Un Parallelogramme, eſt une Figure compriſe ou bornée de quatre lignes droites, dont les oppoſées ſont paralleles.

Ainſi, les Figures qui ſont ici marquées ABCD, ſont des Parallelogrammes ; par ce que chacune eſt compriſe de quatre lignes droites, dont les oppoſées, comme AB, CD, ſont paralleles.



Il y a quatre ſortes de Parallelogrammes, ſçavoir, le Quarré, le Rectangle, (ou le Quarré-long,) le Rhombe, & le Rhomboïde.

41. Un Quarré, eſt un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les quatre angles droits, comme ABCD. 1.

42. Un Rectangle, ou un Quarré-long, eſt un Parallelogramme, qui a les quatre angles droits, & les côtez oppoſez égaux entr'eux, comme ABCD. 2.

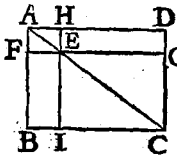
43. Un Rhombe, eſt un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les angles oppoſez égaux entr'eux, comme ABCD. 3.

44. Un Rhomboïde, eſt un Parallelogramme, qui a les côtez & les angles oppoſez égaux entr'eux, comme ABCD. 4.

45. La Diagonale, ou le Diametre, d'un Paralle-

lelogramme, eſt une Ligne droite, tirée de l'un des Angles de ce Parallelogramme, à celui qui lui eſt oppoſé.

Ainſi la Ligne AC, eſt la Diagonale ou le Diametre du Parallelogramme ABCD.

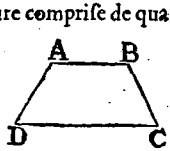


46. Les Parallelogrammes à l'entour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce ſont deux Parallelogrammes, dont les Diagonales, priſes chacune à part, ſont partie de ce Diametre; & priſes enſemble, ſont le Diametre total.

Ainſi les Parallelogrammes AFEH, & EICG, ſont des Parallelogrammes qui ſont alentour du Diametre du Parallelogramme ABCD; parce que leurs Diagonales AE, EC, priſes chacune à part, ſont partie du Diametre AC; & priſes enſemble ſont ce Diametre total.

47. Les Supplémens des Parallelogrammes qui ſont alentour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce ſont deux Parallelogrammes, par leſquels ce Diametre ne paſſe point, & qui avec les deux autres qui ſont alentour du Diametre, compoſent cét autre Parallelogramme total; comme ſont ici les Parallelogrammes FBIE, EHDG, leſquels avec ceux qui ſont alentour du Diametre ſont le Parallelogramme total ABCD.

48. Un Trapéze, eſt une Figure compriſe de quatre Lignes droites, dont les côtez oppoſez, ou pour le moins deux de ces côtez, ne ſont point paralleles; Comme ABCD eſt un Trapéze; parce que ſes deux côtez oppoſez AD, BC, ne ſont point paralleles.



Et ainſi un Trapéze eſt une Figure de quatre côtez

tez, qui n'eſt point Parallelogramme.

DEMANDES.

1. Que d'un Point donné à un autre Point donné l'on puiſſe mener une Ligne droite.
2. Que l'on puiſſe prolonger tant que l'on voudra une Ligne droite donnée & terminée.
3. Que l'on puiſſe décrire un Cercle de quelque centre & de quelque intervalle que ce ſoit.
4. Que toute Grandeur donnée puiſſe être augmentée ou diminuée.

AXIOMES.

1. Les Grandeurs égales à une même Grandeur ſont égales entr'elles.

Ainſi les Lignes AB, EF, qui ſont chacune égales à la Ligne CD, ſont égales entr'elles.

A	B
C	D
E	F

2. Si à des Grandeurs égales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts ſeront égaux.
3. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, les reſtes ſeront égaux.
4. Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts ſeront inégaux.
5. Si de Grandeurs inégales on retranche des Grandeurs égales, les reſtes ſeront inégaux.
6. Les Grandeurs qui ſont doubles, ou triples, ou quadruples &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, ſont égales entr'elles.
7. Les Grandeurs qui ſont moitié, ou tiers, ou quart &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, ſont égales entr'elles.
8. Les Grandeurs qui conviennent enſemble, ſont égales entr'elles.

C'eſt à dire, par exemple, que ſi deux Grandeurs

deurs étant miſes l'une ſur l'autre, ſe peuvent tellement ajuſter, que l'une n'excede point l'autre, mais la couvre préciſement: ces deux Grandeurs ſont égales entr'elles.

9. Le Tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

10. Le Tout eſt plus grand qu'une de ſes parties.

11. Les Angles droits ſont égaux entr'eux.

12. Deux Lignes droites n'enferment point un eſpace.

13. Si deux Lignes droites ſe coupent l'une l'autre, elles ſe couperont en un Point.

14. Si deux Lignes droites ſe rencontrent non directement en un Point, étant prolongées, elles ſe couperont l'une l'autre en ce même Point.

15. Si à des Grandeurs égales, on ajoûte des Grandeurs inégales, l'excez des toutes ſera le même que l'excez des ajoûtées.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont égales, & qu'on leur ajoûte les Lignes inégales BE, DF: l'excez dont la toute AE ſurpaſſera la toute CF, ſera égal à l'excez dont l'ajoûtée BE ſurpaſſe l'ajoûtée DF.

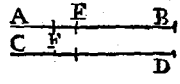
16. Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, l'excez des toutes ſera le même que l'excez des premieres.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont inégales, & qu'on leur ajoûte les Lignes égales BE, DF: l'excez dont la toute AE ſurpaſſera la toute CF, ſera le même que celui dont AB ſurpaſſe CD.

17. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs inégales, l'excez des Grandeurs qui reſtent, ſera égal à l'excez des Grandeurs retranchées.

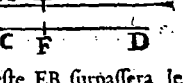
Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont égales, & qu'on en retranche les parties in-

inégales AE, CF : l'excez dont le reſte FD ſurpaſſera le reſte EB ; ſera égal à l'excez dont AE ſurpaſſe CF.



18. Si de Grandeurs inégales, on retranche des Grandeurs égales, l'excez des reſtes ſera le même que l'excez des toutes.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont inégales, & qu'on en retranche les parties égales AE, CF : l'excez dont le reſte EB ſurpaſſera le reſte FD, ſera le même que celui dont la toute AB ſurpaſſe la toute CD.

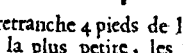


19. Si une Grandeur eſt double d'une autre, & l'ajoûtée de l'ajoûtée : le Tout ſera double du Tout.

Ainſi, ſi à une Ligne de 8 pieds, qui eſt double d'une Ligne de 4 pieds, l'on ajoûte une Ligne de 4 pieds, qui eſt double d'une Ligne de 2 pieds : le Tout 12 pieds ſera double du Tout 6 pieds.

20. Si une Grandeur eſt double d'une autre, & la retranchée de la retranchée : le reſte ſera double du reſte.

Ainſi, une Ligne de 12 pieds étant double d'une Ligne de 6 pieds, ſi l'on retranche 4 pieds de la plus grande, & 2 pieds de la plus petite, les 8 pieds qui reſteront en l'une, ſeront doubles des 4 qui reſteront en l'autre.



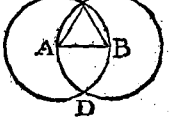
PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Sur une Ligne droite donnée & terminée, décrire un Triangle Equilateral.

JE suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée ; & je propose de décrire sur cette Ligne un Triangle Equilateral. Pour le faire,

Décrivez du centre A, & de l'intervalle AB, le Cercle CBD ; décrivez aussi du Centre B, & de l'intervalle BA, le Cercle DAC ; ce Cercle coupera l'autre aux deux points C, & D ; de l'un de ces points, par exemple de C, menez les deux Lignes droites CA, CB. Ces deux Lignes avec la Ligne AB, feront un Triangle ; & je dis que ce Triangle sera Equilateral. Pour le prouver,

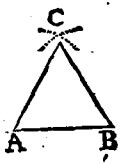


La Ligne AB, & la Ligne AC, sont les rayons du Cercle CBD ; donc elles sont égales entr'elles. De même, la Ligne BA, & la Ligne BC, sont les rayons du Cercle DAC, donc elles sont aussi égales entr'elles. Par conséquent la Ligne AC, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à sçavoir AB, sont égales entr'elles, par le premier Axiome. Ainsi le Triangle ABC, qui est décrit sur la Ligne droite donnée AB, est Equilateral ; ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Ouvrez le Compas

pas de l'intervalle AB ; puis des points A, & B, comme centres, décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent au point C ; & menez du Point C les Lignes droites CA, CB ; & le Triangle ABC sera Equilateral.

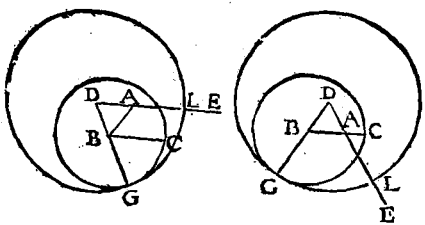


PROPOSITION II.

PROBLEME II.

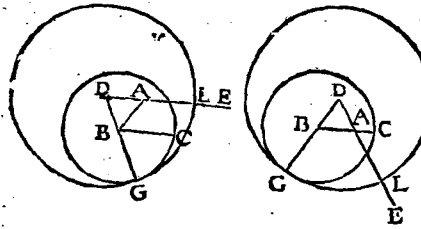
D'un Point donné mener une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée.

JE suppose que l'on donne le point A, & la Ligne droite BC ; & je propose de tirer du Point A une Ligne droite égale à la Ligne BC. Pour le faire,



De l'une des extremitez de la Ligne BC, par exemple, du point B, comme centre, & de l'intervalle BC, décrivez le Cercle CG ; puis du Point A au point B menez la Ligne droite AB ; décrivez ensuite sur cette Ligne, par la Proposition précedente, le Triangle Equilateral ABD ; prolongez aprés cela le côté DB, jusqu'à ce qu'il rencontre la

la circonference du Cercle CG en quelque point, comme G ; prolongez auſſi la Ligne DA indefiniment vers E ; enfin du centre D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle GL ; ce Cercle coupera la Ligne indefinie DE en quelque point, comme L. Cela étant, je dis que la Ligne AL, qui part du Point donné A, eſt égale à la Ligne droite donnée BC. Pour le prouver,



La Ligne DL, & la Ligne DG, ſont les rayons du Cercle GL ; donc elles ſont égales entr'elles. Maintenant ſi de ces deux Lignes on retranche les parties DA, DB, qui ſont égales, parce que ce ſont les côtez d'un Triangle Equilateral : les reſtes AL, & BG, ſeront égaux entr'eux, par le 3^e^. Ax. D'ailleurs, la Ligne BC, & la Ligne BG, ſont les rayons du Cercle CG ; donc elles ſont auſſi égales entr'elles. Par conſequent la Ligne AL, & la Ligne BC, qui ſont égales à une même, à ſçavoir BG, ſont égales entr'elles, par le 1^er^. Ax. Nous avons donc d'un Point donné mené une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Propoſition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la Ligne donnée, puis le tranſportant au point donné, y mener une Ligne égale à ſon ouverture.

PRO-

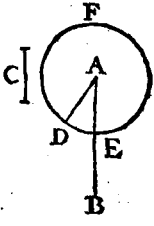
PROPOSITION III.

PROBLEME III.

Deux Lignes droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une partie égale à la plus petite.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, & C, soient données, & que AB soit la plus grande; & je propose de retrancher de AB une partie égale à C. Pour le faire,

De l'une des extremitez de la Ligne AB, par exemple du Point A, menez, par la Proposition precedente, la Ligne droite AD, qui soit égale à C; puis du centre A, & de l'intervalle AD, décrivez le Cercle DEF; ce Cercle coupera la Ligne AB au Point E. Cela étant, je dis que la partie AE, qui est retranchée de AB, est égale à C. Pour le prouver,



La Ligne AE, & la Ligne AD, sont les rayons du Cercle DEF; donc elles sont égales entr'elles; mais la Ligne AD, par la construction, est égale à la Ligne C; donc la Ligne AE, qui est égale à la Ligne AD, est aussi égale à la Ligne C, par le premier Axiome; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

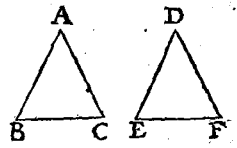
Pratique de cette Proposition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la plus petite, & la retrancher de la plus grande.

PROPOSITION IV.

THEOREME I.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au ſien, & l'Angle compris de ces deux Côtez égal à l'Angle: la Baze ſera égale à la Baze, les deux autres Angles ſeront égaux aux deux autres Angles, chacun au ſien; & tout le Triangle ſera égal à tout le Triangle.

JE ſuppoſe que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB ſoit égal au Côté DE, le Côté AC au Côté DF, & que l'Angle A, compris des deux Côtez AB, AC, ſoit égal à l'Angle D, compris des deux Côtez DE, DF. Cela étant, je dis que la Baze BC eſt égale à la Baze EF; que l'Angle B eſt égal à l'Angle E; l'Angle C à l'Angle F; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF. Pour le prouver,



Tranſportez par penſée le Triangle DEF ſur le Triangle ABC, en ſorte que vous faſſiez tomber le Côté DE ſur le Côté AB, & les extremitez D & E ſur les extremitez A & B; ce qui ſe peut faire, puiſque ces deux Lignes ſont ſuppoſées égales. Enſuite

te dequoi, puis que l'Angle D eſt égal à l'Angle A, par ſuppoſition, il s'enſuit que le Côté DF tombera ſur le côté AC ; & puis que la Ligne DF eſt ſuppoſée égale à la Ligne AC, il s'enſuit que l'extremité F tombera ſur l'extremité C ; ainſi les Points E & F, qui ſont les extremitez de la Baze EF, tombant ſur les points B & C, qui ſont les extremitez de la Baze BC, il s'enſuit que la Baze EF tombera ſur la Baze BC, par la 4^e. Défin. & par conſequent ces deux Lignes, qui conviennent enſemble, ſont égales entr'elles, par le 8^e. Ax. D'ailleurs, puis que l'Angle E convient avec l'Angle B, il s'enſuit qu'il lui eſt égal ; & puis que l'Angle F convient avec l'Angle C, il s'enſuit auſſi qu'il lui eſt égal ; & enfin puis que le Triangle DEF convient avec le Triangle ABC, il s'enſuit que ces deux Triangles ſont auſſi égaux entr'eux, par le huitiéme Axiome ; Qui eſt tout ce qu'il falloit demontrer.

PRO-

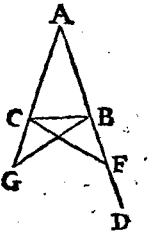
PROPOSITION V.

THEOREME II.

Si un Triangle eſt Iſoſcele, les Angles ſur la Baze ſont égaux entr'eux; & ſes Côtez étant prolongez, les Angles ſous la Baze ſeront auſſi égaux entr'eux.

JE ſuppoſe que le Triangle ABC ſoit Iſoſcele, & que ſes Côtez AB, AC, ſoient égaux; cela étant, je dis premierement que les Angles ABC, & ACB, qui ſont ſur la Baze BC, ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Prolongez le côté AC autant qu'il vous plaira, par exemple, juſqu'au Point G; puis prolongez le côté AB indefiniment; en ſuite retranchez, par la troiſiéme Propoſition, du Côté AB prolongé, la partie AF, égale à AG; menez aprés cela une Ligne droite du point C au Point F, & une autre du Point B au Point G.



Cette conſtruction ſuppoſée, comparez le Triangle BAG avec le Triangle CAF. Le Côté AB du premier Triangle eſt égal au Côté AC du ſecond, par ſuppoſition; le Côté AG du même premier Triangle eſt égal au côté AF du ſecond, par la conſtruction. Voilà donc deux Côtez, ſçavoir AB, AG, égaux à deux Côtez, AC, AF; deplus l'Angle compris des deux Côtez AB, AG, eſt égal à l'Angle compris des deux autres Côtez AC, AF,

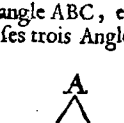
AF, parce que c'eſt l'Angle A qui eſt commun aux deux Triangles. Partant il ſuit par la Propoſition precedente, que la Baze BG eſt égale à la Baze CF: que l'Angle G eſt égal à l'Angle F; & que l'Angle ABG eſt égal à l'Angle ACF. Maintenant, puis que les Lignes AG, AF, ont été faites égales, ſi on en retranche les parties AC, AB, qui ſont ſuppoſées égales: les reſtes CG, BF, ſeront égaux entr'eux. Comparez maintenant le Triangle CGB avec le Triangle BFC. Le Côté CG du premier Triangle eſt égal au Côté BF du ſecond, puis que ce ſont les reſtes de grandeurs égales; le Côté GB eſt égal au Côté FC, cela a déja été prouvé; l'Angle G, compris des deux Côtez CG, GB, eſt égal à l'Angle F, compris des deux Côtez BF, FC, cela a auſſi été prouvé; D'où il ſuit, par la même Propoſition precedente, que l'Angle GCB eſt égal à l'Angle FBC, & l'Angle GBC égal à l'Angle FCB. Si donc nous ôtons ces deux Angles égaux GBC, & FCB, des deux Angles ABG, ACF, qui ont été prouvez égaux: les Angles reſtans ABC, & ACB, ſeront égaux entr'eux, par le troiſiéme Axiome. Or ces Angles ABC, ACB, ſont les Angles ſur la Baze BC du Triangle Iſoſcele ABC. Partant, ſi un Triangle eſt Iſoſcele, les Angles ſur la Baze ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que les Côtez égaux AB, AC, du Triangle Iſoſcele ABC, étant prolongez, les Angles ſous la Baze BC ſeront auſſi égaux entr'eux. Car ces Angles ne ſont autres que les Angles GCB, & FBC, qui ont déja été prouvez égaux. Ainſi en tout Triangle Iſoſcele les Angles ſur la Baze, & les Angles ſous la Baze, ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition qu'un Triang'e Equilateral,

lateral, tel que je suppose ici le Triangle ABC, est aussi Equiangle, c'est à dire qu'il a ses trois Angles égaux.

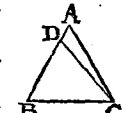


Car puis que les Côtez AB, AC, sont égaux : il s'ensuit, par cette 5e. Proposition, que les Angles B & C sont égaux entr'eux. De même, puisque les Côtez BA, BC, sont égaux : il s'ensuit aussi que les Angles A & C sont égaux entr'eux. Ainsi les Angles A & B étant égaux au troisiéme C, il s'ensuit qu'ils sont tous-trois égaux entr'eux ; & partant que le Triangle Equilateral ABC est Equiangle.

PROPOSITION VI.

THEOREME III.

Si un Triangle a deux Angles égaux entr'eux, les Côtez qui les soûtiennent sont aussi égaux entr'eux.



JE suppose que dans le Triangle ABC les Angles ABC, & ACB, soient égaux entr'eux ; Cela étant, je dis que les Côtez AB, AC, qui soûtiennent ces deux Angles, sont aussi égaux.

Car si ces deux Côtez AB, AC, n'étoient pas égaux entr'eux, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre ; posons que ce soit AB. Retranchez donc, par la troisiéme Proposition, du Côté AB, la partie BD, égale AC, & menez la Ligne CD. Comparez ensuite le Triangle DBC

DBC avec le Triangle ACB. Le côté DB du premier Triangle, est égal au Côté AC du second, par la construction; le Côté BC est commun aux deux Triangles; de plus l'Angle B, compris des deux Côtez DB, BC, est égal à l'Angle ACB, compris des deux autres Côtez AC, CB, par supposition. Donc par la quatriéme Proposition, le Triangle DBC seroit égal au Triangle ABC, c'est-à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Côté AB soit plus grand que le Côté AC. On prouvera de même que le Côté AC ne sçauroit être plus grand que le Côté AB; & ainsi les deux Côtez AB, AC, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que tout Triangle Equiangle, c'est à dire qui à ses trois angles égaux, comme nous supposons ici le Triangle ABC, est aussi Equilateral.

Car de ce que les Angles B & C sont égaux, les deux côtez AB, AC, qui les soûtiennent, s'ensuivent égaux. De même, de ce que les Angles A & B sont égaux, les deux Côtez AC, BC, qui les soûtiennent, s'ensuivent aussi égaux. D'où il suit que les deux côtez AB, BC, qui sont égaux au troisiéme AC, sont égaux entr'eux, par le premier Axiome; & partant que le Triangle ABC est Equilateral.

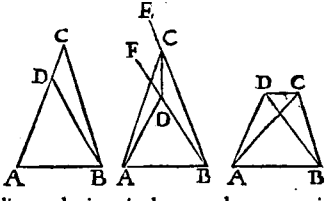
PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME IV.

Si des extremitez d'une Ligne droite, on méne deux Lignes droites, qui ſe rencontrent en un Point: on ne pourra pas des mêmes extremitez, & de même part, mener deux autres Lignes droites égales aux deux premieres, chacune à la ſienne, qui ſe rencontrent en un autre Point.

JE ſuppoſe que des extremitez de la Ligne droite AB on méne les deux Lignes droites AC, BC, qui ſe rencontrent au Point C; & je dis que des mêmes extremitez A, & B, l'on ne ſçauroit mener de même part, à ſçavoir vers C, deux autres lignes droites égales aux deux premieres AC, BC, chacune à la ſienne, (c'eſt à dire, en ſorte que celle qui part du Point A ſoit égale à AC, & celle qui part du Point B ſoit égale à BC,) qui ſe rencontrent en un autre Point qu'au Point C.



Car ſi elles ſe pouvoient rencontrer ailleurs qu'au Point C, il faudroit que le Point de leur ren-

rencontre fût ou sur l'un des Côtez AC, BC, du Triangle ABC : ou dans ce Triangle : ou hors ce Triangle.

Premierement, ce Point de rencontre ne peut être sur l'un des Côtez AC, BC, par exemple en D ; autrement il s'ensuivroit que AD seroit égale à AC, c'est à dire la partie au tout, ce qui est absurde & impossible.

Secondement, ce Point de rencontre ne peut aussi être dans le Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce Point D les Lignes AD, BD ; puis du Point D au Point C menez la Ligne DC ; enfin prolongez BC, BD, vers E, & vers F. Cette construction supposée : puis que dans le Triangle ACD les Côtez AC, AD, sont supposez égaux, il s'ensuit, par la cinquiéme Proposition, que les deux Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle ECD est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie ; il est donc aussi plus grand que son égal ADC, & à plus forte raison que l'Angle FDC, qui n'est encore que partie de ADC. Maintenant puis que les Côtez BC, BD, du Triangle BCD, sont supposez égaux, & qu'ils sont prolongez vers E, & vers F : il s'ensuit, par la cinquiéme Proposition, que les Angles ECD, FDC, qui sont sous la Baze, sont égaux entr'eux. Mais nous avons déja prouvé que l'Angle ECD étoit plus grand que l'Angle FDC. Ainsi il s'ensuivroit que deux Angles seroient égaux & inégaux, ce qui est impossible. Il est donc impossible que ce point de rencontre puisse être dans le Triangle ABC.

Enfin ce point de rencontre ne peut être hors du Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce point D les Lignes AD, BD ; puis du Point D au Point C menez la ligne DC. Cette construction supposée : puis que les Côtez AC, AD, du Triangle ACD, sont supposez égaux, il

s'enſuit par la cinquiéme Propoſition, que les Angles ACD, & ADC, ſont auſſi égaux. Or l'Angle BCD eſt plus grand que l'Angle ACD, qui n'eſt que ſa partie; il eſt donc auſſi plus grand que ſon égal ADC, & à plus forte raiſon que ſa partie BDC. Maintenant, puis que dans le Triangle BDC les Côtez BC, BD, ſont ſuppoſez égaux: il s'enſuit (par la cinquiéme Propoſition) que les Angles BCD, & BDC, qui ſont ſur la Baze, ſont égaux entr'eux. Mais nous venons de prouver que l'Angle BCD étoit plus grand que l'Angle BDC. Donc il s'enſuivroit que l'Angle BCD, & l'Angle BDC, ſeroient tout-enſemble égaux & inégaux; ce qui eſt abſurde & impoſſible. Il eſt donc impoſſible que ce Point de rencontre puiſſe être hors du Triangle ABC. Mais nous avons auſſi prouvé qu'il ne peut être ni dans le Triangle, ni ſur ſes Côtez, excepté au Point C; il s'enſuit donc que le Point de rencontre de ces deux Lignes ne peut être ailleurs qu'au point C; Ce qu'il falloit démontrer.

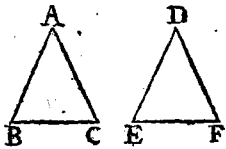
PROPOSITION VIII.

THEOREME V.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au ſien, & la Baze égale à la Baze: l'Angle compris de ces Côtez égaux ſera auſſi égal à l'Angle.

JE ſuppoſe que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB ſoit égal au Côté DE, le Cô-

Côté AC au Côté DF, & la Baze BC à la Baze EF ; cela étant, je dis que l'Angle A, compris des deux Côtez AB, AC, est égal à l'Angle D, compris des deux Côtez DE, DF. Pour le prouver,



Transportez par pensée le Triangle ABC sur le Triangle DEF, en sorte que vous fassiez tomber la Baze BC sur la Baze EF, & les extremitez B, & C, sur les extremitez E, & F ; ce qui se peut faire, puisque BC, & EF, sont supposées égales. Cela étant, considerez que des extremitez de la Ligne EF partent deux Lignes droites ED, FD, qui se rencontrent au Point D ; & que des mêmes extremitez partent deux autres Lignes droites BA, & CA, qui leur sont égales, chacune à la sienne, par supposition, & qui se rencontrent aussi en un Point. Partant, par la Proposition precedente, ces deux Lignes ne peuvent pas se rencontrer en un autre Point qu'au Point D. D'où il suit que le Point A tombera sur le Point D ; que la Ligne AB tombera sur DE ; la Ligne AC tombera sur DF ; & qu'ainsi l'Angle A conviendra avec l'Angle D ; & partant qu'il lui est égal ; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

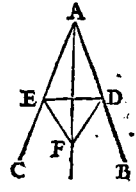
Puis que par la démonstration precedente il a été prouvé que le Triangle ABC convenoit avec le Triangle DEF : outre que nous avons conclu que les Angles A, & D, étoient égaux entr'eux, nous pouvons encore conclure que les deux Angles B, & C, sont égaux aux deux Angles E, & F, chacun au sien ; & que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

PROPOSITION IX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Angle rectiligne donné.

JE suppose que l'Angle rectiligne BAC soit donné, & je propose de le couper en deux également. Pour le faire,



Prenez sur les Côtez AB, AC, deux parties égales AD, AE; menez du Point D au Point E la Ligne droite DE; décrivez sur la Ligne DE, par la premiere Proposition, le Triangle Equilateral DEF; menez du point A au Point F la Ligne droite AF; Cela étant je dis que cette Ligne AF coupe l'Angle BAC en deux également. Pour le prouver,

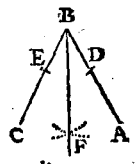
Comparez le Triangle DAF avec le Triangle EAF. Le Côté AD est égal au Côté AE, par la construction; le Côté AF leur est commun; la Baze DF est égale à la Baze EF, puis que ces deux Lignes sont les Côtez d'un Triangle Equilateral. Partant, par la Proposition precedente, l'Angle DAF est égal à l'Angle EAF; Et par consequent l'Angle BAC est coupé en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper un Angle rectiligne donné en 4. 8. 16. 32. &c. & ainsi de suite en doublant toûjours: Car aprés l'avoir divisé en deux également, il n'y a qu'à diviser cha-

chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

REMARQUE.



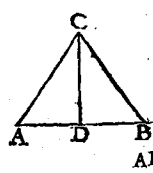
Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas au Point B; & l'ayant ouvert à discretion, marquez les Points E, & D; puis avec la même ou autre ouverture, mettez vôtre Compas au Point E, & décrivez vers F, un arc de Cercle; & sans changer d'ouverture transportez vôtre Compas au Point D, & décrivez un autre arc qui coupe le premier au Point F; Enfin menez par le Point B & le Point F une Ligne droite; & cette Ligne coupera l'Angle donné en deux également.

PROPOSITION X.

PROBLEME V.

Couper en deux également une Ligne droite donnée, & terminée.

JE suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée, & je propose de la couper en deux parties égales. Pour le faire,



Décrivez sur la Ligne AB le Triangle Equilateral ACB, par la 1. Prop. puis, par la Proposition précedente, coupez l'Angle ACB en deux également par la Ligne droite CD; cette Ligne coupera la Ligne

AB au Point D ; Cela étant, je dis qu'elle sera coupée en deux parties égales. Pour le prouver,

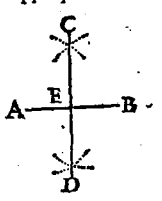
Comparez le Triangle ACD, avec le Triangle BCD. Le Côté AC est égal au Côté BC, parce que ce sont les Côtez d'un Triangle Equilateral ; le Côté CD est commun aux deux Triangles. Voilà donc les deux Côtez AC, CD, égaux aux deux Côtez BC, CD, chacun au sien. De plus l'Angle ACD, compris de ces deux Côtez, est égal à l'Angle BCD, compris des deux autres, par la construction. Donc par la 4e. Prop. la Baze AD est égale à la Baze BD ; Et ainsi la Ligne donnée AB est coupée en deux également ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper une Ligne droite donnée en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite, en doublant toûjours ; car aprés l'avoir coupée en deux également, il ne faut que couper derechef chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas à l'une des extremitez de la Ligne donnée ; & le tenant ouvert plus que de la moitié de cette Ligne, décrivez deux Arcs de Cercle vers C, & vers D. Transportez vôtre Compas à l'autre extremité, & avec la même ouverture décrivez deux autres Arcs qui coupent les deux premiers aux Points C, & D. Puis du point C au point D menez une Ligne droite ; cette Ligne



gne coupera la Ligne AB en deux parties égales au Point E.

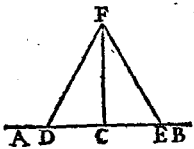
PROPOSITION XI.

PROBLEME VI.

D'un point donné dans une Ligne droite élever une Ligne perpendiculaire.

JE suppose que la Ligne AB soit donnée, & le Point C dans cette Ligne ; Et je propose d'élever du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,

Prenez sur la Ligne AB, de part & d'autre du Point C, deux parties égales CD, CE. Décrivez sur la Ligne DE (par la 1re. Prop.) le Triangle Equilateral DFE. Menez du Point C au Point F la Ligne droite CF. Cela étant, je dis que cette Ligne CF, qui part du Point donné C, est perpendiculaire à la Ligne donnée AB. Pour le prouver,

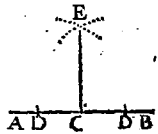


Comparez le Triangle DCF avec le Triangle ECF. Le Côté CD est égal au Côté CE, par la construction ; le Côté CF est commun aux deux Triangles. Voilà donc deux Côtez CD, CF, égaux à deux Côtez EC, CF, chacun au sien. De plus, la Baze DF est égale à la Baze EF, parce que ce sont les Côtez d'un Triangle Equilateral. Partant (par la 8e. Prop.) l'Angle DCF, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle ECF, compris des deux Côtez de l'autre Triangle ; Et ainsi la Ligne CF, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre

égaux entr'eux, est perpendiculaire. Nous avons donc d'un Point donné dans une Ligne droite, élevé une Perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas au Point C, & le tenant ouvert comme il vous plaira, marquez de part & d'autre de la Ligne donnée les deux Points D & D. Ouvrez aprés cela un peu davantage vôtre Compas, & le mettant successivement aux Points D & D, décrivez avec cette ouverture deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent au Point E; puis du Point C au Point E menez la Ligne droite CE; Et cette Ligne sera perpendiculaire à la Ligne donnée.



Si le Point donné étoit à l'extremité de la Ligne, il la faudroit prolonger, & pratiquer ensuite ce qui vient d'être dit. Il y a encore une autre maniere d'élever une Perpendiculaire à l'extremité d'une Ligne droite, qui sera enseignée ci-aprés.

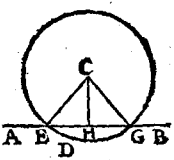
PROPOSITION XII.

PROBLEME VII.

D'un Point donné hors d'une Ligne droite indeterminée, abaisser sur cette Ligne, une Ligne perpendiculaire.

JE suppose qu'on donne la Ligne droite AB, qui est indeterminée, & le Point C hors de cette Ligne ; & je propose d'abaisser du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,

Prenez au delà de la Ligne AB un Point tel qu'il vous plaira, comme D ; puis du Centre C, & de l'intervalle CD, décriyez un Cercle. Ce Cercle coupera la Ligne AB aux Points E, & G. Coupez aprés cela (par la 10. Prop.) la partie EG en deux également au Point H. Menez du Point C au Point H la Ligne droite CH. Cela étant, je dis que cette Ligne CH, qui tombe du Point donné C sur la Ligne AB, lui est perpendiculaire. Pour le prouver,

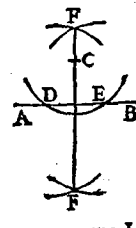


Menez les Lignes droites CE, CG, & comparez le Triangle EHC avec le Triangle GHC. Le Côté EH est égal au Côté GH ; parce que la Ligne EG a été coupée en deux également ; le Côté HC est commun aux deux Triangles ; Voilà donc les deux Côtez EH, HC, égaux aux deux GH, HC. De plus, la Baze CE est égale à la Baze CG, parce que ce sont les rayons d'un même Cercle. Partant (par la 8. Prop.) l'Angle CHE, compris des deux premiers Côtez, est égal à l'Angle CHG, compris des

deux autres. D'où il suit que la Ligne CH, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre égaux entr'eux, est perpendiculaire à AB. Ainsi nous avons d'un Point donné hors d'une Ligne droite indeterminée, abaissé sur cette Ligne une Ligne perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas au Point donné C, & décrivez un Cercle de tel intervalle qu'il coupe la Ligne AB aux deux Points D, & E; puis ouvrant tant soit peu le Compas, & l'appliquant successivement aux deux Points D, & E: décrivez d'une part ou d'autre de la Ligne AB deux arcs qui s'entrecoupent au Point F. Enfin par le Point F, & par le Point C, menez une Ligne droite qui rencontre la Ligne AB; & cette Ligne sera perpendiculaire à la Ligne donnée.

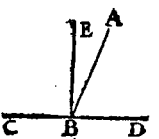


PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME VI.

Quand une Ligne droite tombe sur une autre Ligne droite, ou elle fait deux Angles droits, ou deux Angles égaux à deux droits.



JE suppose que la Ligne droite AB tombe sur la Ligne droite CD. Cela étant, je dis que les deux Angles ABC ABD, sont droits, ou égaux à deux droits.

Car, ou la Ligne droite AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire en ce cas, il est évident que les deux Angles ABC, & ABD, sont deux Angles droits. Si AB n'est pas perpendiculaire à CD, élevez (par la 11^e. Prop.) la Ligne BE, qui lui soit perpendiculaire. Cela étant, les Angles EBC, EBD, sont deux Angles droits. Mais les deux Angles ABC, ABD, pris ensemble, sont égaux aux deux Angles EBC, EBD, avec lesquels ils conviennent; donc ils sont égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si la quantité de l'un des deux Angles que fait une Ligne droite en tombant sur une autre, est connuë, on connoîtra facilement la quantité de l'autre. Car il n'y au-

ra qu'à ôter la quantité connuë de la valeur de deux Angles droits, & le reste sera la quantité de l'autre. Comme par exemple, si l'Angle ABC étoit connu de 110 degrez: en ôtant cette quantité de 180 degrez, le reste 70 degrez seroit la quantité de l'Angle ABD.

II. Corollaire.

Il suit encore de cette Proposition, que si deux Lignes droites s'entrecoupent, les quatre Angles qu'elles feront vaudront quatre Angles droits. Car deux de ces Angles pris ensemble, & à côté l'un de l'autre, valent deux droits par cette Proposition; & les deux restans valent aussi deux droits, par la même raison.

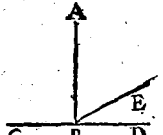
III. Corollaire.

Il suit derechef, que si d'un Point pris dans un Plan, on tiroit tant de Lignes droites que l'on voudra sur le Plan: tous les Angles que feroient toutes ces Lignes, pris ensemble, vaudroient quatre Angles droits; étant certain qu'ils conviendroient tous avec les quatre Angles que feroient deux Lignes droites qui s'entrecouperoient en ce même Point.

PROPOSITION XIV.

THEOREME VII.

Si à un Point de quelque Ligne droite se rencontrent deux autres Lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux Angles égaux à deux droits: ces deux Lignes se rencontreront directement.



JE suppose que les deux Lignes droites CB, DB, se rencontrent au Point B de la Ligne droite AB, & qu'elles font de part & d'autre de cette Ligne les deux Angles ABC, & ABD, égaux à deux droits. Cela étant, je dis que ces deux Lignes se rencontrent directement; c'est à dire, qu'elles ne font ensemble qu'une seule Ligne droite.

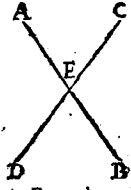
Car si CB ne concouroit pas directement avec DB, il s'ensuivroit que CB étant prolongée vers D, passeroit au dessus ou au dessous de DB. Supposons, si vous voulez, qu'elle passe au dessus, vers E. Cela étant, la Ligne CBE étant droite, & la Ligne AB tombant dessus: il s'ensuivroit, par la precedente Proposition, que les deux Angles ABC, & ABE, vaudroient deux Angles droits. Mais, par la supposition, les deux Angles ABC, & ABD, valent aussi deux droits; donc les Angles ABC, & ABE, seroient égaux aux deux Angles ABC, & ABD, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la

Ligne CB étant prolongée, passe au dessus de DB. On prouvera qu'il s'ensuivroit la même absurdité, si on prétendoit que CB étant prolongée, dût passer au dessous de DB. Et partant les Lignes CB, DB, se rencontrent directement, ou ne font qu'une Ligne droite; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME VIII.

Si deux Lignes droites s'entrecoupent, les Angles opposez au sommet seront égaux entr'eux.



JE suppose que les deux Lignes droites AB, CD, s'entrecoupent au Point E, autour duquel elles font quatre Angles. Cela étant, je dis que les Angles AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux.

Car puis que la Ligne AE tombe sur CD, il s'ensuit, (par la 13°. Prop.) que les Angles AEC, AED, sont égaux à deux droits. De même, DE tombant sur AB, les deux Angles AED, DEB, sont égaux à deux droits. Partant les deux Angles AEC, AED, sont égaux aux deux Angles AED, DEB. Ostant donc l'Angle AED qui leur est commun, les Angles restans AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, s'ensuivent égaux. On prouvera par un semblable raisonnement que les Angles AED, & CEB, qui sont aussi opposez au sommet, sont égaux entr'eux. Donc si deux Lignes s'entrecoupent, les Angles qu'el-

qu'elles font oppoſez au ſommet, ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Nous pouvons ici établir une Propoſition, qui peut en quelque façon paſſer pour la Converſe de la precedente, à ſçavoir; que ſi deux Lignes droites, venant de part & d'autre d'une autre Ligne droite, ſe rencontrent à un même Point de cette Ligne, & font avec elle les Angles oppoſez au ſommet égaux: ces deux Lignes ſe rencontrent directement. Par exemple,

Poſons que les deux Lignes droites CE, DE, viennent de part & d'autre de la Ligne droite AB ſe rencontrer au Point E, en ſorte qu'elles faſſent les Angles AEC, DEB, oppoſez au ſommet, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que ces deux Lignes concourent directement.

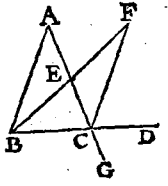
Car puiſque les Angles AEC, DEB, ſont ſuppoſez égaux, en leur ajoûtant l'Angle commun AED, il s'enſuivra que les deux Angles AEC, AED, pris enſemble, ſeront égaux aux deux autres BED, AED, auſſi pris enſemble. Or puis que la Ligne DE tombe ſur la Ligne droite AB, les deux Angles BED, AED, valent deux droits, (par la 13^e. Prop.) Partant les deux Angles AEC, AED, valent auſſi deux droits. Et par conſequent, par la Propoſition precedente, les deux Lignes CE, DE, concourent directement.

PRO-

PROPOSITION XVI.

THEOREME IX.

Si le Côté d'un Triangle est prolongé, l'Angle exterieur sera plus grand que chacun des deux opposez interieurs.



JE suppose qu'au Triangle ABC le Côté BC soit prolongé vers D. Cela étant, je dis premierement que l'Angle exterieur ACD est plus grand que l'Angle interieur CAB, qui lui est opposé alternativement. Pour le prouver,

Coupez la Ligne AC en deux parties égales au Point E. Menez par le Point B & par le Point E la Ligne droite indeterminée BF. Retranchez de cette Ligne la partie EF, égale à EB; & du Point C au Point F menez la Ligne droite CF. Cela posé:

Comparez le Triangle CEF avec le Triangle AEB. Le Côté EC du premier Triangle, est égal au Côté EA du second, puis que la Ligne AC a été coupée en deux également. Le Côté EF a été fait égal au Côté EB. Voilà donc les deux Côtez CE, EF, égaux aux deux Côtez AE, EB, chacun au sien. De plus, l'Angle CEF, compris des deux Côtez CE, EF, est égal à l'Angle AEB, compris des deux autres Côtez; parce que ces deux Angles sont opposez au sommet. Partant (par la 4 Prop.) la Baze sera égale à la Baze, & les autres Angles égaux aux autres Angles, chacun au sien; c'est à dire

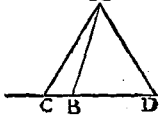
dire que l'Angle ECF, ou ACF, sera égal à l'Angle EAB, ou CAB. Or l'Angle ACD est plus grand que l'Angle ACF, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que l'Angle CAB; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que le même Angle exterieur ACD est plus grand que l'autre Angle interieur ABC, qui lui est simplement opposé. Pour le prouver,

Continuez la Ligne AC vers G. L'Angle BCG est exterieur, & son opposé alternativement est ABC. Donc par ce qui vient d'être dit dans la premiere partie de cette Proposition, l'Angle BCG est plus grand que l'Angle ABC. Or par la Proposition precedente, l'Angle ACD est égal à l'Angle BCG, qui lui est opposé au sommet. Partant l'Angle ACD est aussi plus grand que l'Angle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que d'un même Point comme A, pris où l'on voudra hors d'une Ligne droite, par exemple CD, on ne peut mener vers cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles. Car si on prétendoit qu'on en pût mener trois, comme AC, AB, AD: de ce que les deux Lignes AB, AD, seroient égales, il s'ensuivroit (par la 5. Prop.) que l'Angle ABD seroit égal à l'Angle D.



Mais puis que les Lignes AC, & AD, seroient aussi égales, il s'ensuivroit aussi que l'Angle ACD seroit égal au même Angle D. Partant les deux Angles ACD, ABD, qui seroient égaux à l'Angle D, seroient égaux entr'eux; c'est à dire qu'un Angle exterieur seroit égal à son opposé interieur, ce qui est

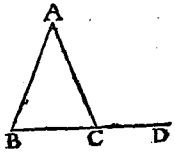
est impossible, par la Proposition precedente. Il est donc impossible que d'un Point pris hors d'une ligne droite, on puisse mener sur cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

PROPOSITION XVII.

THEOREME X.

En tout Triangle, deux Angles tels que l'on voudra, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits.

Je suppose le Triangle ABC, & je dis que deux Angles de ce Triangle tels que l'on voudra, comme ABC, & ACB, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits. Pour le prouver,

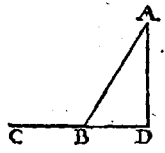


Prolongez la Ligne BC (aux extremitez de laquelle sont ces deux Angles,) vers tel côté qu'il vous plaira, comme vers D. L'Angle ACD est exterieur, & l'Angle ABC est son opposé interieur. Donc, par la Proposition precedente, l'Angle ABC est plus petit que l'Angle ACD. Et partant les deux Angles ABC, & ACB, pris ensemble, seront moindres que les deux Angles ACD, & ACB, pris aussi ensemble. Or (par la 13^e. Prop.) les deux Angles ACD, & ACB, valent deux droits. Donc les deux autres ABC, & ACB, valent moins que deux droits. On prouvera de même que ACB, & BAC; ou bien ABC, & BAC; valent moins que deux droits. Et partant deux Angles d'un Triangle pris comme l'on voudra, valent en-

enſemble moins que deux droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que d'un même Point comme A, on ne peut faire tomber ſur une Ligne droite, par exemple ſur CD, qu'une ſeule Perpendiculaire. Car s'il en pouvoit tomber deux, comme par exemple AD, AB, il s'enſuivroit que chacun des deux Angles ABD, & ADB, ſeroient droits, & qu'ainſi deux Angles d'un Triangle ne ſeroient pas moindres que deux droits ; Ce qui eſt contre la Propoſition precedente.

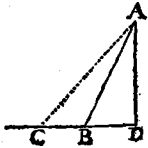


II. COROLLAIRE.

Il ſuit encore, que ſi un Angle d'un Triangle eſt droit, ou obtus, chacun des deux autres ſera aigu. Car chacun de ceux-ci étant pris avec celui qui eſt déja droit, ou obtus, il s'en doit faire un Tout moindre que deux Angles droits. Partant, ſi l'on en ôte celui qui eſt droit, ou obtus, le reſtant ſera moindre qu'un droit, c'eſt à dire aigu.

III. COROLLAIRE.

Il ſuit en troiſiéme lieu, que ſi une Ligne droite, comme AB, tombant ſur une autre Ligne droite, comme CD, fait d'une part un Angle obtus, comme ABC, & de l'autre part un Angle aigu, comme ABD : en prenant quelque Point dans la Ligne AB, par exemple A, d'où l'on faſſe tomber une Per-



pen-

pendiculaire sur CD, cette Perpendiculaire tombera de la part de l'Angle aigu, comme vous voyez ici que tombe la Ligne AD. Car si l'on prétendoit que cette Perpendiculaire pût tomber de la part de l'Angle obtus, comme tombe AC: l'Angle ACB s'ensuivroit droit. Et d'ailleurs l'Angle ABC étant supposé obtus, il s'ensuivroit que deux Angles d'un même Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est contre la precedente Proposition.

IV. COROLLAIRE.

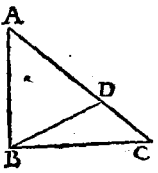
Il est enfin évident que les trois Angles d'un Triangle Equilateral, ou les deux Angles égaux d'un Triangle Isoseele, sont aigus. Car ces Angles étant égaux, si l'un d'eux étoit droit ou obtus, les autres le seroient aussi. Et ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est impossible, comme il vient d'être démontré.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XI.

En tout Triangle, le plus grand Côté soûtient le plus grand Angle.

JE suppose que dans le Triangle ABC le Côté AC soit plus grand que le Côté AB. Cela étant, je dis que l'Angle ABC est plus grand que l'Angle C. Pour le prouver,



Retranchez de AC la partie AD, égale à AB, & menez la Li-

gne

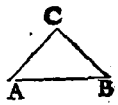
gne droite BD. Le Côté CD, du Triangle BCD, est prolongé vers A ; donc (par la 16. Prop.) l'Angle exterieur ADB est plus grand que son opposé interieur C. D'ailleurs, puis que AD est égale à AB, les Angles ABD, ADB, sont égaux, par la 5. Prop. Or l Angle ABC est plus grand que l'Angle ABD, qui n'est que sa partie ; il sera donc aussi plus grand que l'Angle ADB, & à plus forte raison que l'Angle C, qui a été prouvé moindre que ADB ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XII.

En tout Triangle, le plus grand Angle est soûtenu par le plus grand Côté.

JE suppose que dans le Triangle ABC l'Angle C soit plus grand que l'Angle B. Cela étant, je dis que le Côté AB, qui soûtient le plus grand Angle, est plus grand que AC, qui soûtient le plus petit.

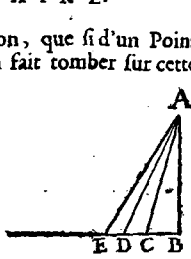


Car si AB n'étoit pas plus grand que AC, il s'ensuivroit qu'il lui seroit égal, ou moindre ; s'il lui étoit égal, les Angles B, & C, seroient égaux, (par la 5. Prop.) ce qui est contre sa supposition. S'il étoit plus petit, le Côté AC seroit plus grand, & (par la Proposition precedente) l'Angle B seroit plus grand que l'Angle C ; ce qui est encore contre la supposition. Et partant le Côté AB ne pouvant être ni égal, ni plus petit que AC, il s'ensuit qu'il est plus grand ; Ce qu'il falloit démontrer.

COROL-

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que ſi d'un Point hors d'une Ligne droite, on fait tomber ſur cette Ligne tant de Lignes droites que l'on voudra, comme AB, AC, AD, AE, l'une deſquelles, ſçavoir AB, ſoit perpendiculaire: cette Perpendiculaire ſera la plus petite de toutes; car elle ſoûtiendra neceſſairement un Angle aigu, comme ſont C, D, E; au lieu que les autres ſoûtiendront un Angle droit, comme eſt B.

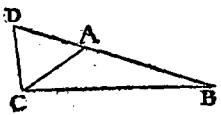


PROPOSITION XX.

THEOREME XIII.

En tout Triangle, deux Côtez tels que l'on voudra, pris enſemble, ſont plus grands que le troiſiéme.

JE ſuppoſe le Triangle ABC, & je dis que deux de ſes Côtez, tels que l'on voudra, comme AB, AC, pris enſemble, ſont plus grands que le troiſiéme BC. Pour le prouver,



Prolongez le Côté AB vers D; puis ayant fait AD égal à AC, menez la Ligne droite DC. Cela poſé: Au Triangle ADC les Côtez AC, AD, ſont

ſont égaux, par la conſtruction. Donc (par la 5^e. Prop.) l'Angle ACD eſt égal à l'Angle D. Or l'Angle BCD eſt plus grand que ACD, qui n'eſt que ſa partie; donc il eſt auſſi plus grand que l'Angle D, ſon égal.

Maintenant, puiſque dans le Triangle BDC l'Angle BCD eſt plus grand que l'Angle D: il s'enſuit par la Propoſition precedente, que le Côté BD eſt plus grand que le Côté BC. Or les deux Côtez BA, AC, du Triangle ABC, ſont égaux à BD, par la conſtruction. Donc les deux Côtez BA, AC, pris enſemble, ſont plus grands que BC; Ce qu'il falloit démontrer.

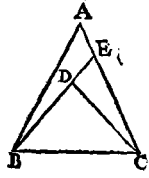
PROPOSITION XXI.

THEOREME XIV.

Si des extremitez d'un Côté de quelque Triangle, on méne deux Lignes droites qui ſe rencontrent au dedans d'icelui, ces deux Lignes ſeront plus petites que les deux autres Côtez de ce Triangle; mais elles feront un plus grand Angle.

JE ſuppoſe le Triangle ABC; & ayant pris un de ſes Côtez à diſcretion, comme BC, je méne les deux Lignes droites BD, CD, qui ſe rencontrent en dedans au Point D. Cela étant, je dis, 1°. que ces deux Lignes BD, CD, ſont plus petites que les deux Côtez BA, AC. Pour le prouver,

Prolongez BD juſques en E. Cela poſé: Dans le Triangle BAE les deux Côtez BA, AE, ſont plus grands



grands que le troisiéme BE, par la Proposition precedente; donc en leur ajoûtant EC commun, il s'ensuit que BA AE, EC, (c'est à dire BA, AC,) sont plus grands que BE, EC. De même au Triangle CED les deux Côtez CE, ED, sont plus grands que le troisiéme CD; donc en leur ajoûtant DB, commun, il s'ensuit que CE, ED, DB, (c'est à dire BE, EC,) sont plus grands que BD, CD. Mais il a déja été prouvé que BA, AC, sont plus grands que BE, EC. Donc à plus forte raison BA, AC, sont plus grands que BD, CD; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC. Pour le prouver,

Le Côté ED, du Triangle CED, est prolongé vers B, & l'Angle BDC est exterieur; donc par la 16. Prop. il sera plus grand que son oppose interieur DEC, ou BEC. De même, le Côté AE, du Triangle BAE, est prolongé vers C; partant l'Angle exterieur BEC est plus grand que son oppose interieur BAE, ou BAC. Mais il a déja été prouvé que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BEC. Donc à plus forte raison l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC; Ce qu'il falloit démontrer.

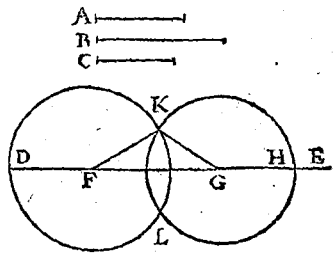
PRO-

PROPOSITION XXII.

PROBLEME VIII.

Décrire un Triangle qui ait les trois Côtez égaux à trois Lignes droites données, qui soient telles que deux d'entr'elles, prises ensemble, soient plus grandes que la troisiéme.

JE suppose qu'on donne les trois Lignes droites A, B, C, deux desquelles, telles que l'on voudra, comme A, & C, prises ensemble, sont plus grandes que la troisiéme B. Cela étant, je propose de décrire un Triangle qui ait les trois Côtez égaux à ces trois Lignes données, chacun à la sienne. Pour le faire,



Menez la Ligne droite indéterminée DE. Prenez sur cette Ligne la partie DF, égale à l'une de ces trois Lignes droites données, par exemple à A. Prenez ensuite la partie FG égale à l'une des deux restantes, par exemple à B. Prenez enfin la partie GH égale à la troisiéme C. Décrivez un Cercle du centre F,

& de l'intervalle FD. Décrivez un autre Cercle du centre G, & de l'intervalle GH. Ce second Cercle coupera le premier aux deux Points K, & L. Prenez l'un de ces deux Points, par exemple K, duquel menez deux Lignes droites aux Points F, & G. Cela étant, je dis que le Triangle FGK a les trois Côtez égaux aux trois Lignes droites données A, B, C. Pour le prouver,

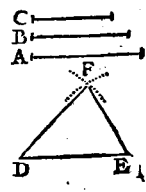
1°. Les Lignes FK, FD, sont égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais FD a été faite égale à la Ligne A; donc FK lui est aussi égale.

2°. Le Côté FG, par la construction, est égal à la Ligne B.

3°. Les Lignes GK, GH, sont aussi égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais GH a été faite égale à la Ligne C; donc la Ligne GK est aussi égale à la Ligne C. Et partant le Triangle FGK a les trois Côtez égaux aux trois Lignes droites données A, B, C; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Supposons qu'on donne les trois Lignes A, B, C; deux desquelles prises comme l'on voudra sont plus grandes que la troisiéme.



Prenez avec le Compas la grandeur de la Ligne A, & la transportez en DE. Prenez en suite la grandeur de la Ligne B, & appliquant le Compas au Point D, décrivez un Arc de Cercle vers F. Prenez aussi la grandeur de la Ligne C, & transportant le Compas au Point E, décrivez encore un Arc de Cercle qui coupe le premier au Point F. Enfin tirez les Lignes FD, FE; & le Triangle DEF aura ses trois Côtez égaux aux trois Lignes données.

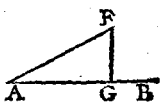
PRO-

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME IX.

Une Ligne droite étant donnée, & un Point en icelle, tirer de ce Point une Ligne, qui faſſe avec la Ligne donnée un Angle égal à un Angle rectiligne donné.

JE ſuppoſe que la Ligne donnée ſoit AB ; que le Point donné en icelle ſoit A ; & que l'Angle donné ſoit C. Et je propoſe de tirer du Point A une Ligne droite qui faſſe avec AB un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,

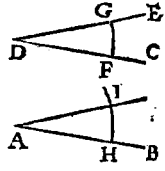


Prenez ſur les Lignes CD, CE, tels Points qu'il vous plaira, comme D, & E, & menez la Ligne droite DE. Puis ayant pris AG, égale à CE, achevez par la Propoſition precedente de décrire le Triangle AGF, qui ait les trois Côtez égaux aux trois Côtez du Triangle CDE ; ſçavoir les deux Côtez AG, AF, égaux aux deux Côtez CE, CD ; & la Baze FG égale à la Baze DE. D'où il ſuit, (par la 8. Prop.) que l'Angle A eſt égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit faire.

REMARQUE.

Pratique de cette Propoſition. Suppoſons que l'on donne le Point A dans la Ligne droite AB, avec l'Angle D. Appliquez le pied du Compas au

Point D, & de tel intervalle qu'il vous plaira décrivez l'Arc FG. Puis transportant le Compas ainsi ouvert au Point A, décrivez l'Arc HI. Cela fait, prenez avec le Compas la distance FG, & la transportez de H en I. Tirez enfin par le Point A & par le Point I, la Ligne droite AI; & alors l'Angle A sera égal à l'Angle D.



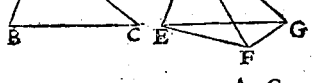
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XV.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & que l'un d'iceux ait l'Angle compris de ces Côtez égaux plus grand que l'autre; la Baze sera aussi plus grande que la Baze.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; mais que l'Angle A soit plus grand que l'Angle EDF. Cela étant, je dis que la Baze BC sera plus grande que la Baze EF. Pour le prouver,

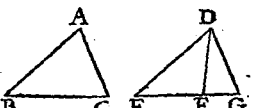
Tirez (par la Proposition precedente) la Ligne DG, qui fasse avec DE l'Angle EDG égal à l'Angle



A. Cer-

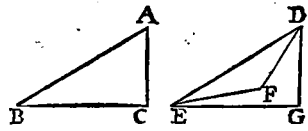
A. Cette Ligne DG tombera hors le Triangle DEF, puis que l'Angle EDF est supposé plus petit que l'Angle A. Faites ensuite DG égale à DF, ou à AC son égale, & menez la Ligne droite EG. Cette Ligne passera necessairement ou au dessus du Point F, ou par le Point F, ou au dessous. Pensons qu'elle passe au dessus, comme ici; & tirons la Ligne FG. Maintenant en comparant les Triangles DEG, & ABC, les deux Côtez ED, DG, sont égaux aux deux Côtez BA, AC, chacun au sien; & l'Angle EDG égal à l'Angle A, par la construction. Partant la Baze EG est égale à la Baze BC, par la 4. Prop. Deplus, au Triangle DFG les deux Côtez DF, DG, sont égaux, par la construction. Donc (par la 5. Prop.) les Angles DFG, DGF, sur la Baze, s'ensuivent égaux. Or l'Angle EFG est plus grand que l'Angle DFG, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que l'Angle DGF, & à plus forte raison que l'Angle EGF, qui n'est que partie de DGF. Cela étant: puis qu'au Triangle EFG, l'Angle EFG est plus grand que l'Angle EGF, il s'ensuit (par la 19. Prop.) que le Côté EG, qui soûtient le plus grand Angle, est plus grand que le Côté EF, qui soûtient le plus petit. Mais BC est égale à EG, comme il a été prouvé. Partant BC est plus grande que EF.

Pensons maintenant que la Ligne EG passe par le Point F, comme dans cette Figure; auquel cas on monstrera, comme ci-dessus, que EG est égale à BC. Or EG est plus grande que EF, qui n'est que sa partie; donc BC sera aussi plus grande que la Ligne EF.



Pensons en troisiéme lieu que la Ligne EG passe au dessous du Point F, comme ici; auquel cas la Ligne EG sera toûjours prouvée égale à BC. Or

les Lignes DF, FE, qui sont menées dans le Triangle DEG, sont plus petites que les deux



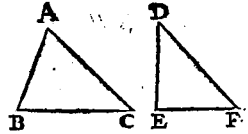
DG, GE, par la 21. Prop. Donc si de ces deux Touts inégaux on ôte les parties DF, DG, qui sont égales, par la construction : le reste EF s'ensuivra moindre que le reste EG ; & partant moindre que son égale BC. Ainsi de quelque façon que tombe la Ligne EG, cette Ligne, ou son égale BC, sera toûjours plus grande que EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XVI.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & la Baze plus grande que la Baze : ils auront auſſi l'Angle compris de ces Côtez égaux plus grand que l'Angle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE, le Côté AC au Côté DF, & que la Baze BC soit



plus grande que la Baze EF. Cela étant, je dis que l'Angle A est plus grand que l'Angle D.

Car

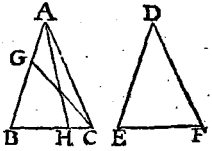
Car si cela n'étoit, il lui seroit égal, ou plus petit. Mais il ne peut lui être égal ; parce qu'il s'ensuivroit que la Baze BC seroit égale à la Baze EF, par la 4. Prop. ce qui est contre la supposition. Il ne peut non plus être plus petit ; car il s'ensuivroit que la Baze EF seroit plus grande que la Baze BC, par la Proposition precedente ; ce qui est aussi contre la supposition. Donc l'Angle A est plus grand que l'Angle D ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XVII.

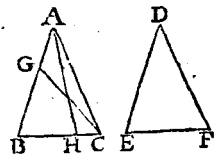
Si deux Triangles ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & un Côté égal à un Côté, sçavoir, ou celui aux extremitez duquel sont les Angles égaux, ou celui qui soûtient l'un de ces Angles : ils auront aussi les deux autres Côtez égaux, chacun au sien, & l'autre Angle égal à l'autre Angle, & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle E, l'Angle ACB à l'Angle F, & que le Côté BC soit égal au Côté EF, aux extremitez des-



quels ſont les Angles égaux. Cela étant, je dis que le Côté AB eſt égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; que l'Angle BAC eſt égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF.

Car ſi AB n'étoit pas égal à DE, il s'enſuivroit que l'un de ces deux Côtez ſeroit plus grand que l'autre; penſons, ſi vous voulez, que ce ſoit AB. En ce cas retranchez de AB la partie BG égale ED; puis tirez la Ligne CG. Maintenant comparant le Triangle GBC au Triangle DEF: le Côté GB ſera égal au Côté ED par la conſtruction; le Côté BC eſt égal au Côté EF, & l'Angle B égal à l'Angle E, par ſuppoſition. Donc (par la 4. Prop.) la Baze ſera égale à la Baze, & l'Angle GCB égal à l'Angle F. Mais l'Angle ACB eſt ſuppoſé égal à l'Angle F; ainſi il s'enſuivroit que l'Angle GCB, & l'Angle ACB, ſeroient égaux entr'eux, c'eſt à dire la partie au tout; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que le Côté AB ſoit plus grand que le Côté DE. On prouvera de même que DE ne ſçauroit



être plus grand que AB. Donc ces deux Côtez AB, DE, ſont égaux. Enſuite dequoi, puis que, par la ſuppoſition, le Côté BC eſt égal à EF, & l'Angle B égal à l'Angle E: il s'enſuit (par la 4. Prop.) que la Baze AC eſt égale à la Baze DF; que l'Angle BAC eſt égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF; Ce qu'il falloit démontrer.

Suppoſons maintenant que le Côté AB, qui ſoûtient l'Angle ACB, & le Côté DE, qui ſoûtient l'Angle F, ſont égaux entr'eux. Cela étant, je dis que le Côté BC eſt égal à EF; le Côté AC égal à DF; que l'Angle BAC eſt égal à l'Angle D; & enfin

fin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF.

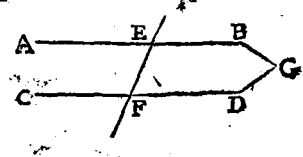
Car ſi BC n'étoit pas égal à EF, il s'enſuivroit que l'un de ces deux Côtez ſeroit plus grand que l'autre. Penſons que ce ſoit BC; auquel cas retranchez de BC la partie BH égale à EF, & tirez la Ligne AH. Maintenant, comparant le Triangle ABH au Triangle DEF: le Côté BH ſera égal au Côté EF, par la conſtruction; le Côté AB eſt égal au Côté DE, & l'Angle B égal à l'Angle E, par ſuppoſition. Partant (par la 4. Prop.) la Baze ſera égale à la Baze, & l'Angle AHB ſera égal à l'Angle F. Or l'angle ACB eſt ſuppoſé égal à l'Angle F. Donc l'Angle AHB ſeroit égal à l'Angle ACB, c'eſt à dire l'Angle exterieur à ſon oppoſé interieur; ce qui eſt impoſſible, par la 16. Prop. Il n'eſt donc pas vrai que le Côté BC ſoit plus grand que EF. On prouvera de même que EF n'eſt pas plus grand que BC. Partant ces deux Côtez BC, EF, ſont égaux. Mais le Côté AB étant ſuppoſé égal à DE, & l'Angle ABC égal à l'Angle E: il s'enſuit (par la 4. Prop.) que la Baze AC eſt égale à la Baze DF; que l'Angle BAC eſt égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XVIII.

Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les Angles opposez alternativement, égaux entr'eux: ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites; & que la Ligne EF tombant dessus fait les deux Angles CFE, & FEB, qui sont alternativement opposez, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.



Car si elles ne sont pas paralleles, ces deux Lignes étant prolongées d'une part ou d'autre se pourront rencontrer; pensons que ce soit vers G. En ce cas, les deux Lignes EG, FG, avec la Ligne EF, formeront le Triangle EFG, dont le Côté GF se trouve prolongé vers C. Partant (par la 16. Prop.) l'Angle exterieur CFE sera plus grand que son opposé alternativement FEB; ce qui est contre la supposition. Donc les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

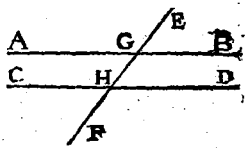
PRO-

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XIX.

Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait l'Angle exterieur égal à son opposé interieur de même part, ou bien les deux interieurs de même part égaux à deux droits: ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites, & que la Ligne EF tombant dessus, & les coupant aux Points G, & H, fasse l'un des Angles exterieurs, comme EGA, égal à l'Angle GHC, qui est son opposé interieur de même part. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.



Car (par la 15. Prop.) l'Angle HGB est égal à l'Angle EGA. Mais l'Angle EGA est égal à l'Angle GHC, par supposition. Partant l'Angle HGB est égal à l'Angle GHC, qui est son opposé alternativement. D'où il suit, par la Proposition precedente, que les Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les deux Angles AGH, & GHC, qui sont les deux oppofez interieurs de même part, soient égaux à deux droits.

Cela étant, je dis encore que les deux Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car puis que les deux Angles AGH, & GHC, sont égaux à deux droits, il s'ensuit qu'ils sont égaux aux deux Angles AGH, & HGB, qui valent aussi deux droits, par la 13. Prop. Donc, si de ces deux Touts, qui sont égaux, l'on ôte l'Angle AGH, qui leur est commun: les Angles restans GHC, & HGB, qui sont opposez alternativement, seront égaux; & partant, par la Proposition precedente, les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

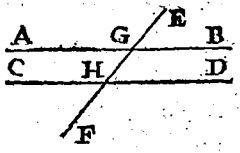
Si on supposoit que la Ligne AB inclinât tant soit peu par l'extremité A, vers la Ligne CD, & qu'ainsi l'Angle AGH devenant un peu plus petit, les deux Angles AGH, & GHC, pris ensemble, valussent moins que deux droits: en ce cas il est évident que les Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles; mais qu'étant prolongées elles se rencontreroient du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits. Et partant nous pouvons établir ici cette vérité: Que si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les deux Angles interieurs de même part moindres que deux droits, ces deux Lignes ne sont point paralleles; & qu'étant prolongées elles se rencontreront du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits.

PRO-

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XX.

Si une Ligne droite tombe sur deux Lignes droites paralleles : elle fera les Angles opposez alternativement, égaux entr'eux ; l'Angle exterieur égal à son opposé interieur de même part ; & les deux interieurs de même part égaux à deux droits.

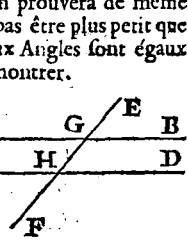


JE suppose que les deux Lignes droites AB, CD, soient paralleles, & que la Ligne droite EF tombe dessus, & les coupe aux Points G, & H. Cela étant, je dis premierement que les Angles opposez alternativement, tels que sont AGH, & GHD, sont égaux entr'eux.

Autrement il faudroit que l'un de ces deux Angles fût plus petit que l'autre. Pensons que ce soit AGH, auquel cas AGH pris avec GHC, vaudroit moins que GHD pris avec le même GHC. Mais GHD, & GHC, valent deux droits, par la 13. Prop. Partant AGH, & GHC, vaudront moins que deux droits. Et ainsi il s'ensuivroit, par la remarque precedente, que ces Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles ; ce qui est contre la supposition. L'Angle AGH ne peut donc pas être plus

petit que l'Angle GHD. On prouvera de même que l'Angle GHD ne peut pas être plus petit que l'Angle AGH. Donc ces deux Angles sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle exterieur EGB est égal à son opposé interieur de même part, sçavoir GHD.



Car (par la 15. Prop.) EGB est égal à AGH, qui lui est opposé au sommet. Or, par ce qui vient d'être prouvé, AGH est égal à GHD. Partant EGB est aussi égal à GHD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis enfin que les deux Angles interieurs de même part, comme BGH, & GHD, sont égaux à deux droits.

Car, par ce qui vient d'être prouvé, l'Angle GHD est égal à l'Angle AGH. Et partant GHD pris avec HGB, vaudra autant que AGH pris avec HGB. Or, par la 13. Prop. AGH, & HGB, valent deux droits. Donc GHD, & HGB, valent aussi deux droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

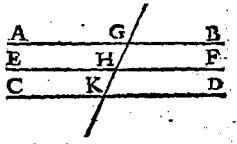
THEOREME XXI.

Les Lignes droites paralleles à une même, sont paralleles entr'elles.

JE suppose que les Lignes AB, CD, sont paralleles à la Ligne EF. Cela étant, je dis que ces Lignes sont paralleles entr'elles. Pour le prouver,

Tirez

Tirez la Ligne droite GK, qui coupe ces trois Lignes aux Points G, H, K. Enſuite dequoi, puis que les Lignes AB, EF, ſont paralleles, par ſuppoſition, & que GK tombe deſſus: il s'enſuit (par la 29. Prop.) que les Angles AGH, & GHF, qui ſont oppoſez alternativement, ſont égaux entr'eux. De même, puis que les Lignes EF, CD, ſont auſſi ſuppoſées paralleles, & que la même Ligne GK tombe deſſus: il s'enſuit (par la même Prop.) que l'Angle exterieur GHF eſt égal à ſon oppoſé interieur HKD. Ainſi les deux Angles AGH, & HKD, qui ſont égaux à un même, ſont égaux entr'eux. Or ces Angles ſont oppoſez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les deux Lignes AB, CD, ſont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

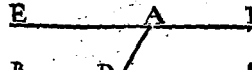


PROPOSITION XXXI.

PROBLEME X.

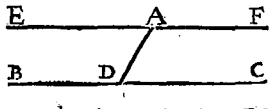
Par un Point donné mener une Ligne droite parallele à une Ligne droite donnée.

JE ſuppoſe que le Point donné ſoit A, & la Ligne droite donnée, BC; & je propoſe de mener par le Point A une Ligne, qui ſoit parallele à BC. Pour le faire,



Tirez du Point A à tel Point qu'il vous plaira de la

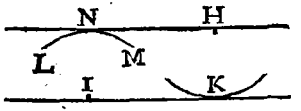
la Ligne BC, la Ligne droite AD, qui faſſe avec BC un Angle tel qu'il vous plaira, comme ADC. Menez enſuite par le Point A la Ligne droite EAF, qui faſſe avec AD l'Angle EAD égal à l'Angle ADC. Cela étant, je dis que la Ligne EF eſt parallele à BC.



Car les Angles EAD, ADC, qui ſont oppoſez alternativement, ſont égaux, par la conſtruction. Partant (par la 27. Prop.) les Lignes EF, BC, ſont paralleles; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Propoſition. Poſons que la Ligne IK ſoit donnée, & que le Point donné ſoit H. Mettez le pied du Compas au Point H, & l'ouvrez de telle ſorte, qu'en décrivant un Arc de Cercle, il raze la Ligne IK. Cela fait, tranſportez le Compas ainſi ouvert à un Point de la Ligne IK, comme I, & décrivez de la part du Point H, l'Arc LNM; puis tirez par le Point H une Ligne droite qui raze l'Arc LNM; & alors cette Ligne NH ſera parallele à la Ligne IK.

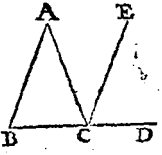


PRO-

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

En tout Triangle, un des Côtez étant prolongé, l'Angle exterieur eſt égal aux deux oppoſez interieurs; & les trois Angles d'un Triangle ſont égaux à deux droits.



JE ſuppoſe que du Triangle ABC le Côté BC ſoit prolongé vers D. Cela étant, je dis premierement que l'Angle exterieur ACD eſt égal aux deux oppoſez interieurs A, & B, pris enſemble. Pour le prouver,

Menez par le Point C, la Ligne droite CE parallele à AB, par la Prop. precedente. Cela poſé: puis que les Lignes AB, CE, ſont paralleles, & que la Ligne AC tombe deſſus: il s'enſuit (par la 29. Prop.) que l'Angle ACE eſt égal à l'Angle A, qui lui eſt oppoſé alternativement.

De même, puis que les Lignes AB, CE, ſont paralleles, & que la Ligne BD tombe deſſus: il s'enſuit (par la même 29. Prop.) que l'Angle exterieur ECD eſt égal à ſon oppoſé interieur B. Et partant l'Angle total ACD eſt égal aux deux Angles A, & B; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que les trois Angles du Triangle ABC ſont égaux à deux droits.

Car il vient d'être prouvé que les deux Angles A, & B,

& B, sont égaux à l'Angle ACD. Or l'Angle ACD, avec l'Angle ACB, sont égaux à deux droits, (par la 13. Prop.) Donc les deux Angles A, & B, avec l'Angle ACB, sont aussi égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il suit premierement de cette Proposition, que les trois Angles d'un Triangle pris ensemble sont égaux aux trois Angles d'un autre Triangle, pris aussi ensemble. Car les trois Angles de l'un valent deux droits, de même que les trois Angles de l'autre.

II. COROLLAIRE.

Il suit en second lieu, que si deux Angles d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle, le troisiéme sera aussi égal au troisiéme.

III. COROLLAIRE.

Il suit en troisiéme lieu, que si l'un des Angles d'un Triangle est droit, les deux autres valent autant qu'un droit.

IV. COROLLAIRE.

Il suit enfin, que si deux Angles d'un Triangle sont connus, le troisiéme sera aussi connu; car ce troisiéme est le reste de deux droits.

REMARQUE.

Par cette Proposition nous pouvons déterminer à combien d'Angles droits sont égaux tous les Angles d'une Figure rectiligne. Car si de l'un des Angles de

de cette Figure l'on tire à tous les autres Angles autant de Lignes droites qu'il eſt poſſible de former de Triangles: cette Figure ſera diviſée en pluſieurs Triangles, les Angles de chacun deſquels valant deux droits, l'on ſçaura la valeur des Angles de cette Figure, puis qu'ils ſont les mêmes que ceux de tous ces Triangles. Ainſi parce qu'une Figure de quatre Côtez ſe peut reſoudre en deux Triangles: il s'enſuit que ſes quatre Angles valent quatre Angles droits. Et parce qu'une Figure de cinq Côtez ſe peut reſoudre en trois Triangles, ſes cinq Angles valent ſix Angles droits &c. Et d'autant que toute Figure de pluſieurs Côtez ſe peut reſoudre en autant de Triangles qu'elle a de Côtez, moins deux: nous devons conclure que tous les Angles d'une Figure rectiligne ſont égaux à deux fois autant d'Angles droits qu'elle a de Côtez, moins deux. Ainſi les Angles d'un Decagone valent 16 Angles droits; ceux d'un Dodecagone valent vingt Angles droits; & ceux d'un Chiliagone, ou d'une Figure de mille Côtez, valent 1996 Angles droits.

PROPOSITION XXXIII.

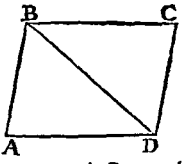
THEOREME XXIII.

Si deux Lignes droites ſont égales & paralleles, les Lignes droites qui joignent leurs extremitez de même part, ſont auſſi égales & paralleles.

JE ſuppoſe que les Lignes AD, BC, ſont égales & paralleles, & que leurs extremitez ſont jointes de même part par les Lignes droites AB, DC. Cela étant, je dis que ces Lignes AB, DC, ſont auſſi

aussi égales & paralleles. Pour le prouver,

Du Point B au Point D tirez la Ligne droite BD. Cela posé, puis que les Lignes droites A D, B C, sont paralleles, & que la Ligne BD tombe dessus : il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les Angles ADB, & C B D, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux. Comparant ensuite les Triangles ABD, & CBD, le Côté AD est égal au Côté BC, par supposition ; le Côté BD est commun ; l'Angle ADB est égal à l'Angle CBD, comme il vient d'être prouvé. Partant la Baze AB est égale à la Baze CD, & l'Angle ABD égal à l'Angle CDB par la 4. Prop. Or ces deux Angles ABD, & CDB, sont opposez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les Lignes AB, DC, sont aussi paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.



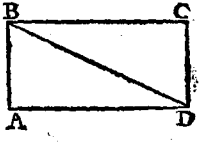
PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXIV.

En tout Parallelogramme les Côtez & les Angles opposez sont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux également.

JE suppose que AC est un Parallelogramme, & que BD est la Diagonale. Cela étant, je dis que le Côté AB est égal à son opposé CD ; le Côté AD égal à son opposé BC ; que l'Angle A est égal à son opposé C ; & que l'Angle ABC est égal à son

à son opposé ADC ; & enfin que le Triangle ADB est égal au Triangle CDB, & qu'ainsi la Diagonale coupe le Parallelogramme en deux également.



Car puis que les Lignes AB, CD, sont les Côtez opposez d'un même Parallelogramme, il s'ensuit qu'elles sont paralleles. Et par consequent la Ligne BD tombant dessus ; les Angles ABD, & BDC, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux, par la 29. Prop. Par la même raison, les deux Angles ADB, & CBD, qui sont opposez alternativement, sont aussi égaux entr'eux. Ainsi les deux Triangles ABD, BDC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & le Côté BD, aux extremitez duquel sont les Angles égaux, est commun. Partant (par la 26. Prop.) les deux autres Côtez AB, AD, sont égaux aux deux autres Côtez CD, CB, chacun au sien, sçavoir AB à CD, & AD à CB ; l'Angle A est égal à l'Angle C ; & tout le Triangle ABD est égal à tout le Triangle CBD. Enfin puis que les deux Angles ABD, & CBD, ont été separément prouvez égaux aux deux Angles CDB, & ADB : il est évident que l'Angle total ABC est égal à l'Angle total ADC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'en tout Parallelogramme, si un Angle est droit, les trois autres le sont aussi. Car puis que les deux Angles sur un même Côté sont égaux à deux droits : si l'un est droit, l'autre l'est aussi ; & par consequent aussi leurs opposez.

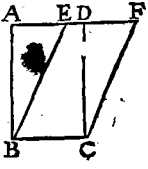
PRO-

PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXV.

Les Parallelogrammes conſtituez ſur une même Baze, & entre mêmes paralleles, ſont égaux entr'eux.

JE ſuppoſe que les Parallelogrammes AC, BF, ſont ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AF, BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

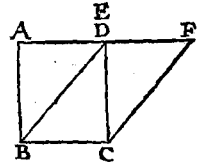


Cette ſuppoſition peut avoir trois cas. Car ou le Point E tombera entre A, & D; où il tombera ſur le Point D; ou au delà du Point D.

Au premier cas, le Côté AD eſt égal au Côté BC, qui eſt ſon oppoſé dans le Parallelogramme AC. De même, le Côté EF eſt égal au même Côté BC, qui eſt auſſi ſon oppoſé dans le Parallelogramme BF. Donc AD, & EF, ſont égaux. Et ſi l'on en ôte la partie ED, qui leur eſt commune: les reſtes AE, DF, ſeront égaux entr'eux. De plus, dans le même Parallelogramme AC, le Côté AB eſt égal au Côté DC, qui eſt ſon oppoſé. Mais puis qu'ils ſont paralleles, & que la Ligne AF tombe deſſus: l'Angle exterieur CDF eſt égal à ſon oppoſé interieur BAE, par la 29. Prop. D'où il ſuit que les deux Triangles BAE, CDF, ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au ſien, & l'Angle compris de ces Côtez égal à l'Angle; & partant

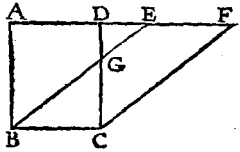
(par

(par la 4. Prop.) ces deux Triangles BAE, CDF, sont égaux entr'eux. C'est pourquoi si on leur ajoûte à chacun le Trapéze EBCD: il s'ensuivra que le Triangle BAE avec ce Trapéze, sera égal au Triangle CDF avec ce même Trapéze; c'est à dire le Parallelogramme AC au Parallelogramme BF; Ce qu'il falloit démontrer.



Au second cas, où le Point E tombe sur le Point D, on prouvera de même que le Côté AD est égal au Côté EF; le Côté AB au Côté DC; que l'Angle exterieur CDF est égal à son opposé interieur BAE; & que le Triangle BAE est égal au Triangle CDF. C'est pourquoi si on leur ajoûte une chose commune, à sçavoir le Triangle EBC: il s'ensuivra que le Parallelogramme AC sera égal au Parallelogramme BF; Ce qu'il falloit démontrer.

Au troisiéme cas, on prouvera de même que AD est égal à EF; & en leur ajoûtant la partie commune DE, la toute AE sera égale à la toute DF. On prouvera aussi que le Côté AB est égal au Côté DC; que l'Angle exterieur CDF est égal à son opposé interieur A; & que le Triangle BAE est égal au Triangle CDF. Donc si on ôte de ces deux Triangles, le Triangle commun DGE: le Trapéze ABGD restera égal au Trapéze EGCF. A quoi si l'on ajoûte le Triangle GBC, il s'ensuivra que le Trapéze ABGD avec ce Triangle, sera égal au Trapéze EGCF avec ce même Triangle; c'est à dire que le Parallelogramme AC sera



égal

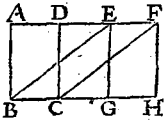
égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXVI.

Les Parallelogrammes constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Parallelogrammes AC, EH, sont constituez sur Bazes égales, sçavoir BC, GH, & entre mêmes Paralleles AF, BH. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



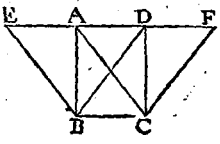
Menez du Point B au Point E la Ligne BE, & du Point C au Point F la Ligne CF. Cela posé, BC est égal à GH, par supposition ; EF est aussi égal à GH, étant les Côtez opposez d'un même Parallelogramme. Donc BC est égal à EF. D'ailleurs BC, EF, sont supposées paralleles. Donc (par la 33. Prop.) les Lignes droites BE, CF, qui joignent leurs extremitez, sont aussi égales & paralleles. Et par consequent la Figure BF est un Parallelogramme. Or ce Parallelogramme est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles, que le Parallelogramme AC. Donc (par la Prop. precedente) les deux Parallelogrammes AC, BF, sont égaux entr'eux. Mais ce même Parallelogramme BF, & le Parallelogramme EH, étant sur une même Baze, à sçavoir EF, & entre mêmes Paralleles, sont aussi égaux entr'eux. Et partant les Parallelogrammes AC,

AC, EH, qui ſont égaux au Parallelogramme BF, ſont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXVII.

Les Triangles conſtituez ſur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, ſont égaux entr'eux.



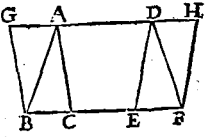
JE ſuppoſe que les Triangles ABC, DBC, ſont ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC. Cela étant, je dis que ces deux Triangles ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Menez par le Point B la Ligne droite BE parallele à AC, & par le Point C la Ligne droite CF parallele à BD, par la 31. Prop. Cela poſé, il s'enſuit que les Figures AB, DC, ſont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DC, ſont les Diagonales. Et partant (par la 34. Prop.) les Triangles ABC, DBC, en ſont les moitiez. Or les Parallelogrammes AB, DC, étant ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC, ſont égaux entr'eux, par la 35. Prop. Donc les Triangles ABC, DBC, qui en ſont les moitiez, ſont auſſi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME XXVIII.

Les Triangles constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.



JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont sur Bazes égales, sçavoir BC, EF, & entre mêmes Paralleles, GH, BF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

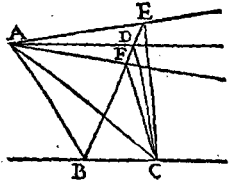
Menez par le point B la Ligne droite BG parallele à AC, & par le Point F la Ligne droite FH parallele à ED, par la 31. Prop. Cela posé, il s'ensuit que les Figures AB, DF, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DF, sont les Diagonales. Et partant (par la 34. Prop.) les Triangles ABC, DEF, en sont les moitiez. Or les Parallelogrammes AB, DF, étant sur des Bazes égales BC, EF, & entre mêmes Paralleles BF, GH, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. Donc les Triangles ABC, DEF, qui sont leurs moitiez, sont aussi égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXIX.

THEOREME XXIX.

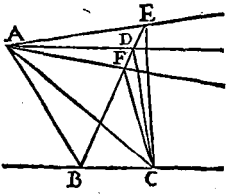
Les Triangles égaux constituez sur une même Baze & de même part, sont entre mêmes Paralleles.



JE suppose que les Triangles ABC, DBC, sont égaux; qu'ils sont constituez sur une même Baze, à sçavoir BC; & qu'ils sont de même part. Cela étant, je dis que ces Triangles sont entre mêmes Paralleles; c'est à dire que si par le Point A, & le Point D, on méne la Ligne droite AD, cette Ligne sera parallele à BC. En voici la preuve:

Car si elle n'étoit pas parallele, on pourroit par le Point A mener une autre Ligne parallele à BC, par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de AD. Pensons donc premierement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait ici AE. Puis prolongez la Ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AE au Point E, & tirez la Ligne CE. Cela posé, les deux Triangles ABC, EBC, étant sur une même Baze & entre mêmes Paralleles, seroient égaux entr'eux, par la 37. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DBC est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle EBC seroit égal au Triangle DBC, qui n'est que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc

impossible qu'une Ligne menée par le Point A parallele à la Ligne BC, passe au dessus de la Ligne AD.



Pensons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait ici AF, & menez la Ligne droite CF. Cela posé, le Triangle FBC seroit égal au Triangle ABC, par la 37. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DBC est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle FBC seroit égal au Triangle DBC, c'est à dire, la partie au Tout; ce qui est impossible. Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD; ni au dessus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD est parallele à BC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XL.

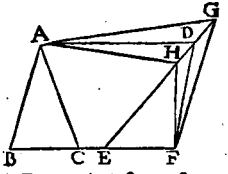
THEOREME XXX.

Les Triangles égaux constituez sur Bazes égales, & de même part, sont entre mêmes paralleles.

JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont égaux; qu'ils sont constituez sur Bazes égales, à sçavoir BC, EF; & qu'ils sont de même part. Cela étant, je dis qu'ils sont entre mêmes paralleles; c'est à dire que si par le Point A, & par le Point D, on mène la Ligne droite AD, cette Ligne sera parallele à BF. En voici la preuve:

Car

Car si elle n'étoit parallele, on pourroit par le Point A mener une autre Ligne parallele à BF, par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de AD. Pensons donc premierement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait ici AG. Puis prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AG au Point G, & menez la Ligne FG. Cela posé, les deux Triangles ABC, GEF, étant sur Bazes égales BC, EF, & entre mêmes Paralleles, seroient égaux entr'eux, par la 38. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DEF est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle GEF seroit égal au Triangle DEF, qui n'est que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'une Ligne menée par le Point A parallele à BF, passe au dessus de AD.

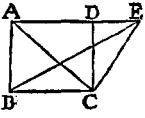


Pensons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait ici AH, & menez la Ligne droite FH. Cela posé, le Triangle HEF seroit égal au Triangle ABC, par la 38. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DEF est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle HEF seroit égal au Triangle DEF, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD; ni au dessus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD est parallele à BF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLI.

THEOREME XXXI.

Si un Parallelogramme & un Triangle ſont conſtituez ſur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme ſera double du Triangle.



JE ſuppoſe que le Parallelogramme AC, & le Triangle EBC, ſoient conſtituez ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC. Cela étant, je dis que le Parallelogramme eſt double du Triangle. Pour le prouver,

Menez la Diagonale AC. Cela poſé, puis que les Triangles ABC, EBC, ſont ſur la même Baze BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC, ils ſont égaux, par la 37. Prop. Or le Triangle ABC eſt moitié du Parallelogramme AC, d'autant que la Diagonale AC le coupe en deux également, par la 34. Prop. Donc le Triangle EBC eſt auſſi moitié du Parallelogramme AC. Et par conſequent le Parallelogramme AC eſt double du Triangle EBC; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

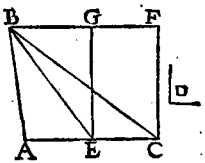
Par là il eſt auſſi évident que ſi un Parallelogramme & un Triangle étoient conſtituez ſur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme ſeroit double du Triangle.

PRO-

PROPOSITION XLII.

PROBLEME XI.

Décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE suppose que l'on donne le Triangle ABC, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propose de décrire un Parallelogramme égal au Triangle ABC, & qui ait un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Coupez l'un des Côtez de ce Triangle, par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point tirez (par la 23. Prop.) la Ligne EG, qui fasse avec EC l'Angle CEG égal à l'Angle donné D. Tirez aussi (par la 31. Prop.) du Point C la Ligne CF parallele à EG. Enfin menez par le Point B la Ligne BF parallele à AC. Cela posé, je dis que la Figure EF est un Parallelogramme; que ce Parallelogramme est égal au Triangle ABC; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,

Puis que CF est parallele à EG, & que GF est parallele à EC, il est évident que la Figure EF est un Parallelogramme, qui a l'Angle CEG égal à l'Angle donné D, par la construction; si bien qu'il reste seulement à prouver qu'il est égal au Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point B au Point E menez la Ligne droite BE. Cela posé: puis que les Triangles BAE, BEC,

ſont ſur des Bazes égales, AE, EC, & entre mêmes Paralleles, BF, AC, ils ſont égaux entr'eux, par la 38. Prop. Par conſequent le Triangle ABC, qui eſt compoſé de ces deux Triangles, eſt double du Triangle BEC. Mais le Parallelogramme EF eſt auſſi double de ce même Triangle BEC, par la Prop. précedente, puis qu'il eſt ſur la même Baze, & entre mêmes Paralleles. Donc le Triangle ABC, & le Parallelogramme EF, qui ſont doubles d'une même choſe, ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

La pratique de cette Propoſition conſiſte ſeulement à faire un Parallelogramme ſur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles. C'eſt pourquoi nous pouvons établir comme une verité Geometrique, que tout Parallelogramme conſtitué ſur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles, eſt égal à ce Triangle.

PROPOSITION XLIII.

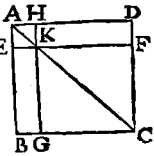
THEOREME XXXII.

En tout Parallelogramme, les Supplemens des Parallelogrammes qui ſont alentour du Diametre ſont égaux entr'eux.

JE ſuppoſe que la Figure AC eſt un Parallelogramme, dont le Diametre eſt AC, alentour duquel ſont les Parallelogrammes AK, KC. Cela étant, je dis que les Supplemens KB, KD, ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Puis

Puis que (par la 34. Prop.) le Diametre AC coupe le Parallelogramme AC en deux également, le Triangle ABC eſt égal au Triangle ACD. De même, les Parallelogrammes AK, KC, étant coupez en deux également par leurs Diametres AK, KC, le Triangle AEK eſt égal au Triangle AKH, & le Triangle KGC égal au Triangle KCF. Si donc des Triangles ABC, ACD, qui ſont égaux, nous ôtons choſes égales, ſçavoir, du Triangle ABC les deux Triangles AEK, KGC, & du Triangle ACD les deux Triangles AKH, KCF: les reſtes, qui ſont les Supplemens KB, KD, ſeront égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

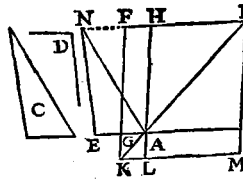


PROPOSITION XLIV.

PROBLEME XII.

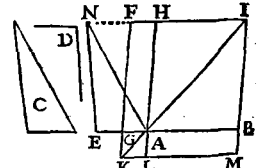
Sur une Ligne droite donnée décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.

JE ſuppoſe qu'on donne la Ligne droite AB, le Triangle C, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propoſe de décrire ſur AB un Parallelogramme égal au Triangle C, & qui ait un An-



Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Prolongez AB vers E ; & aprés avoir fait AE égale à un des Côtez du Triangle C, achevez (par la 22. Prop.) de décrire le Triangle AEN égal au Triangle C. Puis (par la 42. Prop.) décrivez le Parallelogramme AF égal au Triangle AEN, & qui ait l'Angle HAG égal à l'Angle D. Prolongez aprés cela FG, & HA, indefiniment vers K, & vers L. Prolongez de même FH indefiniment vers I ; & ayant mené par le Point B la Ligne IBM parallele à FG, (par la 31. Prop.) tirez du Point I, où les Lignes IBM, & FHI, se rencontrent, la Ligne droite IAK, si longue, qu'elle rencontre la Ligne FGK au Point K. Enfin menez par le Point K la Ligne droite KLM parallele à AB, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure AM, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Parallelogramme ; que ce Parallelogramme est égal au Triangle donné C ; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,



Puis que les Lignes AB, LM, & les Lignes AL, BM, sont paralleles, par la construction : il s'ensuit que AM est un Parallelogramme. Et puis que FI, KM, sont paralleles à AB, elles sont paralleles entr'elles, par la 30. Prop. De plus, les Lignes IBM, FGK, ayant aussi été faites paralleles, il est évident que la Figure FM est un Parallelogramme ; dans lequel les Parallelogrammes AM, AF, étant les Supplemens des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, il s'ensuit qu'ils sont égaux entr'eux, par la 43. Prop. Or, par la construction, AF est égal au Triangle AEN. Donc AM est aussi égal au Triangle AEN. Mais ce Triangle a été fait

égal

égal au Triangle C. D'où il suit que le Parallelogramme AM est aussi égal au Triangle C. D'ailleurs, (par la 15. Prop.) l'Angle LAB est égal à l'Angle HAG, qui a été fait égal à l'Angle D. Et partant l'Angle LAB est aussi égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

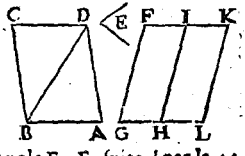
PROPOSITION XLV.

PROBLEME XIII.

Décrire un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.

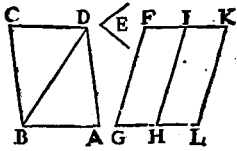
JE suppose qu'on donne la Figure rectiligne ABCD, & l'Angle rectiligne E. Cela étant, je propose de décrire un Parallelogramme égal à la Figure ABCD, qui ait un Angle égal à l'Angle E. Pour le faire,

Menez la Ligne droite BD, afin de resoudre la Figure ABCD en deux Triangles. Puis, (par la 42. Prop.) décrivez le Parallelogramme IG égal à l'un des Triangles, par exemple à ABD, & qui ait l'Angle FGH égal à l'Angle E. Ensuite (par la 44. Prop.) décrivez sur la Ligne HI le Parallelogramme IL égal au second Triangle BCD, & qui ait aussi l'Angle IHL égal à l'Angle E. Cela posé, je dis que la Figure FL, composée de ces deux Parallelogrammes, est un Parallelogramme égal à la Figure ABCD; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné E. Pour le prouver,



Les Parallelogrammes qui ſont les parties de la Figure FL, étant égaux aux Triangles qui ſont les parties de la Figure ABCD; il eſt évident que la Figure FL eſt égale la Figure ABCD. Deplus, la Figure FL a l'Angle FGL égal à l'Angle donné E. Il ne reſte donc plus qu'à prouver que les deux Parallelogrammes IG, IL, compoſent enſemble un ſeul Parallelogramme. Pour le prouver,

Les deux Côtez FG, KL, ſont égaux & paralleles, étant égaux & paralleles à IH. Suppoſe donc que FK, & GL, ſoient des Lignes droites, elles ſeront auſſi égales & paralleles entr'elles, par la 33. Prop. puis qu'elles joignent des Lignes droites égales & paralleles. Or je prouve que les Lignes FK, & GL, ſont des Lignes droites. Premierement, l'Angle G, & l'Angle IHL, ſont égaux entr'eux, par la conſtruction. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun GHI, les deux Angles G, & GHI, feront



égaux aux deux Angles qui ont le Point H pour ſommet. Mais les deux Angles G, & GHI, ſont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Donc les deux Angles qui ont le Point H pour ſommet, ſont égaux à deux droits. Et partant les Lignes GH, & LH, qui concourent à un même Point, font une Ligne droite. De même, l'Angle K, & l'Angle FIH, ſont égaux entr'eux, puis qu'ils ſont oppoſez aux Angles IHL, & G, qui ſont égaux entr'eux. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun HIK, les deux Angles K, & HIK, ſeront égaux aux deux Angles qui ont le Point I pour ſommet. Mais les deux Angles K, & HIK, ſont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Par conſequent les deux Angles qui ont le Point I pour ſommet, ſont égaux à deux droits; & partant les Lignes FI, & KI,

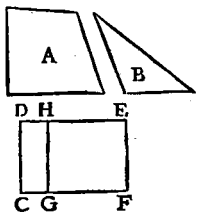
KI, qui concourent à un même Point, ſont une Ligne droite. D'où il ſuit que FL eſt un Parallelogramme; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. REMARQUE.

Si la Figure donnée eût eu plus de quatre Côtez, il auroit fallu la diviſer en tous les Triangles dont elle auroit pû être compoſée. Puis, aprés avoir fait (comme il vient d'être dit) le Parallelogramme FGLK égal à deux de ces Triangles: il auroit encore fallu décrire ſur LK un Parallelogramme égal à un autre Triangle, & ayant un Angle au Point K égal à l'Angle donné E; & ainſi continuer autant de fois de ſuite qu'il y auroit eu de Triangles.

II. REMARQUE.

Enſuite de la Propoſition précedente, ſi deux Figures rectilignes inégales ſont données, l'on pourra trouver l'excez de la plus grande pardeſſus la plus petite. Par exemple, ſi les Figures A, & B, ſont données, entre leſquelles A eſt plus grande que B: il n'y aura qu'à décrire le Parallelogramme CE égal à la Figure A; puis décrire ſur le Côté CD le Parallelogramme CH égal à la Figure B. Car alors il eſt évident que le Parallelogramme GE ſera l'excez de la Figure A pardeſſus la Figure B.



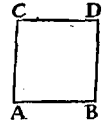
PROPOSITION XLVI.

PROBLEME XIV.

Sur une Ligne droite donnée décrire un Quarré.

JE suppose que la Ligne droite donnée soit AB, & je propose de décrire sur cette Ligne un Quarré. Pour le faire,

Elevez au Point A la Ligne droite AC perpendiculaire à AB, par la 11. Prop. & faites AC égale à AB. Puis menez par le Point C la Ligne CD parallele à AB, & par le Point B la Ligne BD parallele à AC, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure ACDB, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Quarré. Pour le prouver,



Puis que ACDB est une Figure de quatre Côtez, dont les opposez ont été faits paralleles, il s'ensuit que c'est un Parallelogramme. Et par consequent ses Côtez opposez sont égaux, par la 34. Prop. Ainsi CD est égal à AB. Mais AC est aussi égal à AB, par la construction. Donc CD est aussi égal à AC. De même, BD est égal à AC; & partant BD est aussi égal aux deux autres Côtez AB, CD. D'où il suit que le Parallelogramme AD a ses quatre Côtez égaux. D'ailleurs, puis que les Lignes AB, CD, sont paralleles, & que AC tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les deux Angles interieurs A, & C, sont égaux à deux droits. Or l'Angle A est droit, par la construction. Donc l'Angle C est aussi droit. Et parce qu'en tout Parallelogramme les Angles opposez sont égaux, les Angles B, & D, qui sont opposez à des Angles droits,

droits, ſont auſſi droits. Et par conſequent le Parallelogramme AD eſt un Quarré ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. Remarque.

Il s'enſuit de là, que tout Parallelogramme, qui a deux Côtez égaux alentour d'un Angle droit, eſt un Quarré.

II. Remarque.

Il ſuit auſſi de là, qu'en tout Parallelogramme un Angle étant droit, les trois autres le ſont auſſi.

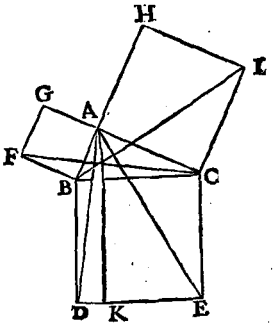
III. Remarque.

Comme les Grandeurs qui conviennent ſont égales entr'elles, il ſuit auſſi aſſez évidemment, que ſi deux Lignes ſont égales, leurs Quarrez ſeront auſſi égaux ; & que ſi deux Quarrez ſont égaux, les Lignes ſur leſquelles ils ſont décrits, ſeront auſſi égales.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME XXXIII.

Aux Triangles Rectangles, le Quarré du Côté qui soûtient l'Angle droit, est égal aux Quarrez des deux autres Côtez.



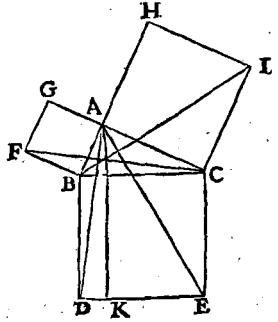
JE suppose que le Triangle ABC est Rectangle; que l'Angle BAC est droit; & que sur ses trois Côtez on ait décrit les trois Quarrez BE, FA, AI. Cela étant, je dis que le Quarré BE, décrit sur le Côté BC qui soûtient l'Angle droit BAC, est égal aux deux autres Quarrez FA, AI, décrits sur les deux autres Côtez AB, AC. Pour le prouver,

Menez par le Point A la Ligne droite AK parallele à BD, ou à CE; & menez les Lignes droites AD, AE, CF, BI. Cela posé: puis que l'Angle BAC est droit, par supposition, & que l'Angle BAG, qui est un des Angles du Quarré FA, est aussi droit: il s'ensuit (par la 14. Prop.) que les Lignes GA, AC, concourent directement. De même, puis que l'Angle CAB est droit, & que l'Angle CAH du Quarré AI, est aussi droit: il

s'ensuit

s'enſuit auſſi que les Lignes BA, AH, concourent directement. Maintenant, puis que les Lignes BF, GC, qui ſont les Côtez oppoſez du Parallelogramme ou du Quatré FA, ſont paralleles, il s'enſuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme FA eſt double du Triangle FBC, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une même Baze FB, & entre mêmes Paralleles FB, GC. De même, puis que les Lignes AK, BD, ſont paralleles, par la conſtruction, il s'enſuit que le Parallelogramme BK eſt double du Triangle ABD, étant tous-deux conſtituez ſur la même Baze BD, & entre mêmes Paralleles BD, AK. Comparant maintenant le Triangle CBF avec le Triangle ABD, le Côté CB du premier, eſt égal au Côté BD du ſecond, puis que ce ſont les Côtez d'un même Quarré BE. Par la même raiſon, le Côté BF du premier, eſt égal au Côté AB du ſecond. Si bien que ces deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au ſien. De plus, l'Angle CBF, compoſé d'un Angle droit & de l'Angle ABC, eſt égal à l'Angle ABD, qui eſt auſſi compoſé d'un Angle droit & du même Angle ABC. Donc (par la 4. Prop.) le Triangle CBF eſt égal au Triangle ABD. Et ainſi le Parallelogramme BK, & le Quarré FA, qui ſont doubles de choſes égales, ſont égaux entr'eux, par le 6. Ax. De même, puis que les Lignes IC, HB, qui ſont les Côtez oppoſez du Parallelogramme ou du Quarré AI, ſont paralleles: il s'enſuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme AI eſt double du Triangle ICB. De même, puis que les Lignes AK, CE, ſont paralleles, par la conſtruction: il s'enſuit que le Parallelogramme CK eſt double du Triangle ACE, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une même Baze CE, & entre mêmes Paralleles CE, AK. Comparant maintenant le Triangle BCI avec le Triangle ACE, le Côté CI du premier, eſt égal au Côté AC du ſecond,

second, puis que ce sont les Côtez d'un même Quarré AI. Par la même raison, le Côté CB du premier, est égal au Côté CE du second. De plus, l'Angle ICB, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle ACE, compris des deux Côtez du second, chacun de ces Angles étant composé d'un Angle droit & de l'Angle ACB. Donc (par la 4. Prop.) le Triangle ICB est égal au Triangle ACE. Et par consequent le Parallelogramme CK, & le Quarré AI, qui sont doubles de choses égales, sont égaux entr'eux.



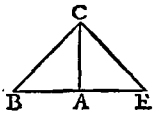
Mais il a déja été prouvé auparavant, que le Parallelogramme BK est égal au Quarré FA. Donc le Quarré BE, qui convient avec les deux Parallelogrammes BK, CK, ou plûtôt qui est la même chose, est égal aux deux Quarrez FA, AI, pris ensemble; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME XXXIV.

Si le Quarré de l'un des Côtez d'un Triangle eſt égal aux Quarrez des deux autres Côtez, l'Angle compris de ces deux autres Côtez eſt droit.



JE ſuppoſe qu'au Triangle ABC le Quarré du Côté BC ſoit égal aux Quarrez des deux autres Côtez AB, AC. Cela étant, je dis que l'Angle CAB, compris des deux Côtez AB, AC, eſt droit. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AC, & faites cette Ligne AE égale à AB; puis tirez la Ligne droite CE. Cela poſé:

Puis que le Triangle ACE eſt Rectangle, il s'enſuit, par la Propoſition precedente, que le Quarré du Côté CE, qui ſoûtient l'Angle droit CAE, eſt égal aux deux Quarrez de CA, & de AE, ou de AB ſon égal. Mais par la ſuppoſition, le Quarré du Côté BC eſt auſſi égal aux deux Quarrez de CA, & de AB. Donc le Quarré de BC & le Quarré de CE ſont égaux entr'eux, par le premier Ax. Et partant les Lignes BC, CE, qui ſont leurs Côtez, ſont égales entr'elles, par la troiſiéme Remarque de la 46. Prop. Comparant maintenant le Triangle ABC avec le Triangle ACE: le Côté AB eſt égal au Côté AE; le Côté AC eſt commun aux deux Triangles; de plus, la Baze BC vient d'être prouvée égale à la Baze CE. Donc (par la 8. Prop.)

Prop.) l'Angle CAB eſt égal à l'Angle CAE. Mais l'Angle CAE eſt droit, par la conſtruction. Donc l'Angle CAB, eſt auſſi droit; Ce qu'il falloit démontrer.

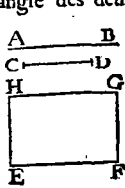
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

DEFINITIONS.

I. LE Rectangle de deux Lignes droites, eſt un Parallelogramme, dont les deux Côtez alentour de l'un de ſes Angles, ſont égaux à ces deux Lignes droites.

Ainſi le Rectangle des deux Lignes droites AB, CD, eſt le Rectangle EG, qui a l'un de ſes Côtez, ſçavoir EF, égal à AB; & l'autre, ſçavoir EH, égal à CD.

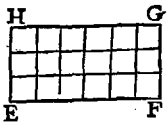


Et ainſi, tout Parallelogramme Rectangle eſt compris de deux Lignes droites, qui font l'Angle droit.

REMARQUE.

Pour mesurer la quantité de la surface d'un Rectangle, il faut se servir d'une petite mesure connuë, telle qu'on voudra ; par exemple, d'une Toise quarrée, d'un Pied quarré, d'un Pouce quarré ; & voir combien de ces Toises, de ces Pieds, ou de ces Pouces quarrez, contient ce Rectangle.

Ainsi, pour trouver la mesure ou la quantité de la surface du Rectangle EG, il faut diviser chacun de ses Côtez en Toises, en Pieds, ou en Pouces, & multiplier l'un par l'autre ; & le produit vous donnera ce que vous cherchez.

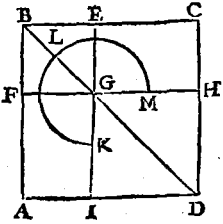


Par exemple, posé que le Côté EF contienne six Toises, & le Côté EH en contienne trois : multipliant l'un par l'autre, cela fait 18 Toises quarrées, qui est la mesure de la surface de ce Rectangle.

Et si le Rectangle dont on veut sçavoir la mesure, est un Quarré : il faut sçavoir combien un de ses Côtez contient de Toises, de Pieds, ou de Pouces, & le multiplier par lui-même ; & le produit vous en donnera la mesure.

II. Un Gnomon, est une partie d'un Parallelogramme composée d'un des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & des deux Supplemens.

Ainsi dans le Quarré ABCD, le Quarré FE, avec les deux Supplemens AG, GC, est un Gnomon.



Et

Et pour le désigner, on décrit une portion de Cercle, semblable à KLM, que l'on fait passer par ce Quarré, & par ces deux Supplemens, & que l'on marque avec trois lettres, comme est ici marqué le Gnomon KLM.

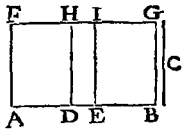
PROPOSITION I.

THEOREME I.

Si de deux Lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra: les Rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au Rectangle des deux toutes.

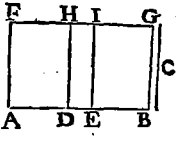
JE suppose que des deux Lignes AB, & C, la premiere AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple, aux points D, & E. Cela étant, je dis, que les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des parties de la coupée, sçavoir AD, DE, EB, pris ensemble, sont égaux au Rectangle des deux toutes AB, & C. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne droite AF perpendiculaire à AB, par la 11. du 1. & égale à C, par la 2. du 1. Puis, par les Points F, & B, menez les Lignes FG, BG, paralleles à AB, & à AF, par la 31. du 1. Elevez aux Points D, & E, les Lignes droites DH, EI, perpendiculaires à AB, qui



qui seront aussi paralleles à AF. Cela posé:

Puisque AF est égale à C, il est évident que le Parallelogramme AG est le Rectangle des deux toutes AB, & C. Il est d'ailleurs évident que le Rectangle AH est compris de la non-coupée C, ou de son égale AF, & de AD, qui est la premiere partie de la coupée AB.



De plus, les Lignes DH, & EI, étant égales à AF, par la 34. du 1. ou à C son égale: les Parallelogrammes DI, EG, sont les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des autres parties de la coupée AB. Or tous ces Rectangles AH, DI, EG, conviennent avec le Rectangle AG. Donc ils lui sont égaux, par le 8. Axiome; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Pour verifier cecy en nombres: Prenez par exemple les deux nombres 10 & 6. Divisez 10 en trois parties, telles qu'il vous plaira, comme 5, 3, & 2. Multipliez 10 par 6: il viendra 60, qui sera le Rectangle des deux nombres entiers. Aprés cela multipliez aussi 5, 3, & 2, par 6: & il viendra 30, 18, & 12, qui seront les Rectangles du nombre entier 6, & de chacune des parties du nombre 10. Enfin ajoûtez les trois Rectangles 30, 18, & 12: & la somme sera 60, qui est égale au Rectangle compris des deux nombres entiers 10 & 6.

PRO-

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si une Ligne droite eſt coupée comme l'on voudra : les Rectangles compris de la toute & de chacune de ſes parties, ſont égaux au Quarré de la toute.

JE ſuppoſe que la Ligne AB ſoit coupée comme l'on voudra, par exemple, au Point C. Et je dis que les Rectangles compris de la toute AB, & de chacune de ſes parties AC, CB, pris enſemble, ſont égaux au Quarré de AB. Pour le prouver,

Décrivez ſur AB le Quarré AE, par la 46. du 1. & élevez au Point C la Ligne CF perpendiculaire à AB, qui ſera auſſi parallele à AD, ou à BE. Cela poſé :

Puiſque AD eſt égale à AB, le Parallelogramme AF eſt le Rectangle compris de la toute AB, & de la partie AC. De même, CF étant égale à AD, ou à ſon égale AB, le Parallelogramme CE eſt le Rectangle compris de la toute AB, & de ſon autre partie CB. Or les Rectangles AF, CE, conviennent avec le Quarré AE, qui a été fait ſur la toute AB. Donc ces Rectangles ſont égaux à ce Quarré ; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

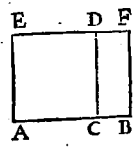
Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par

exemple, 10, & le diviſez en deux parties, comme 7, & 3. Cela étant: le Rectangle du nombre entier 10 & de ſa partie 7, eſt 70. Le Rectangle du même nombre 10 & de ſon autre partie 3, eſt 30; ajoûtez ces deux nombres, cela fait 100. Lequel nombre eſt égal au Quarré de 10.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si une Ligne droite eſt coupée comme l'on voudra : le Rectangle de la toute, & de l'une de ſes parties, eſt égal au Rectangle des deux parties, & au Quarré de la partie premierement priſe.



Je ſuppoſe que la Ligne AB ſoit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point C. Cela étant, je dis que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ſes parties, par exemple AC, eſt égal au Rectangle des deux parties AC, CB, & au Quarré de la partie AC, qui avoit été premierement priſe. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez par le Point E la Ligne EF parallele à AB; & par le Point B la Ligne BF parallele à AE; & au Point C élevez la Ligne CD perpendiculaire à AB, qui ſera auſſi parallele à AE, ou à BF. Cela poſé:

Puiſque AE eſt égale à AC, il s'enſuit que AD eſt le Quarré de AC, par la 1. Remarque de la 46.

du

du 1. Et puisque CD est égale à AE, ou à AC, son égale, il s'ensuit que CF est le Rectangle des deux parties AC, CB. Or le Quarré AD, & le Rectangle CF, conviennent avec AF, qui est le Rectangle de la toute AB, & de la partie AC. Donc le Rectangle AF est égal au Rectangle CF, & au Quarré AD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10; divisez le en deux parties, comme 7 & 3. Cela étant, le Rectangle des deux parties 7 & 3, est 21. Le Quarré de la premiere partie 7, est 49. Ajoûtez ces deux nombres, cela fait 70. Lequel nombre est égal au Rectangle du nombre entier 10, & de sa premiere partie 7.

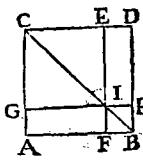
BIBLIOTHEQUE ROYALE LYON

PROPOSITION IV.

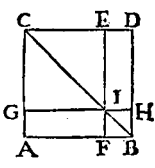
THEOREME IV.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : le Quarré de la toute est égal aux deux Quarrez des parties, & à deux Rectangles faits des deux parties.

JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB est égal aux deux Quarrez des parties AF, FB, & à deux Rectangles faits de ces deux



parties. Pour le prouver,



Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AD. Menez la Diagonale CB. Elevez au Point F la Ligne FE perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AC, & à BD. Et par le Point I, où la Ligne FE coupe la Diagonale CB, menez la Ligne droite GIH parallele à AB. Cela posé :

Puisque les Lignes AC, AB, qui sont les Côtez du Quarré AD, sont égales, il s'ensuit (par la 5. Prop. du 1.) que le Triangle ABC a les Angles ABC & ACB, sur la Baze BC, égaux entr'eux. D'ailleurs, les Lignes GH & AB étant paralleles, & la Ligne CIB tombant dessus, l'Angle exterieur GIC est égal à son opposé interieur ABC, par la 29. du 1. Or l'Angle ACB est égal à l'Angle ABC. Donc l'Angle ACB, ou GCI, est égal à l'Angle GIC. Et par consequent dans le Triangle CGI les Côtez CG, GI, qui soûtiennent ces deux Angles, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1.

D'ailleurs, puisque dans le Parallelogramme GE, l'Angle GCE est droit, étant un des Angles du Quarré AD : il s'ensuit (par la 2. Remarque de la 46. Prop. du 1.) que ce Parallelogramme GE a ses quatre Angles droits. Et puisque les deux Côtez CG, GI, qui sont alentour d'un de ces Angles droits, sont égaux entr'eux : il s'ensuit (par la 1. Remarque de la même Prop.) que ce Parallelogramme GE est le Quarré de GI, ou de son égale AF. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BIC tombe dessus : l'Angle exterieur FIB est égal à son opposé interieur ACB. Mais l'Angle ABC est égal à ACB. Donc l'Angle ABC, ou FBI, est égal à l'Angle FIB. Et par consequent dans le Triangle BFI les deux Côtez FI, FB, qui les soûtiennent, sont aussi

égaux

égaux entr'eux. D'où il suit que le Parallelogramme FH, qui a deux Côtez égaux alentour de l'Angle droit IFB, est le Quarré de la partie FB. De plus, AI, ID, sont deux Parallelogrammes Rectangles, puisque leurs Côtez opposez sont paralleles, & que les Angles A, & D, étant droits, tous les autres le sont aussi. Or AI est le Rectangle de AF, FI, ou bien de AF, FB; & ID est le Rectangle de DH, HI, ou de leurs égales AF, FB. Mais ces deux Rectangles AI, ID, avec les deux Quarrez GE, FH, conviennent avec le Quarré AD. Donc ce Quarré leur est égal; Ce qu'il falloit démontrer.

I. REMARQUE.

Il suit de cette Proposition, que quand deux Lignes droites paralleles aux Côtez d'un Quarré, coupent la Diagonale de ce Quarré en un même Point: les Parallelogrammes qui se font alentour du Diametre sont des Quarrez.

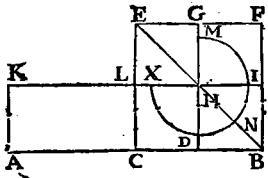
II. REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10, & le divisez en deux parties comme 7 & 3. Cela étant, le Quarré de 7 est 49; le Quarré de 3 est 9; le Rectangle des deux parties 7 & 3, est 21. Ce même Rectangle pris encore une fois est encore 21. Ajoûtez ces deux Quarrez & ces deux Rectangles, cela fait 100. Lequel nombre est égal au Quarré du nombre entier 10.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une Ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & en deux inégales: le Rectangle compris des deux parties inégales, avec le Quarré de la partie du milieu, ſont égaux au Quarré de la moitié de la toute.



JE ſuppoſe que la Ligne droite AB ſoit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D. Cela étant, je dis que le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB, avec le Quarré de la partie du milieu CD, ſont égaux au Quarré de la moitié de la toute CB. Pour le prouver,

Décrivez ſur CB le Quarré CF; tirez la Diagonale BE; élevez au Point D la Ligne DG perpendiculaire à AB, qui ſera auſſi parallele à BF, & à CE. Puis par le Point H, où la Ligne DG coupe la Diagonale, menez la Ligne droite IHK parallele à BA. Enfin menez par le Point A la Ligne AK parallele à CE. Cela poſé:

Il ſuit de la 1. Remarque ſur la Propoſition précedente, que LG eſt un Quarré, à ſçavoir, celui de LH, ou de ſon égale CD. Par la même

me raiſon, DI eſt auſſi un Quarré ; & partant DH eſt égale à DB. Par conſequent le Rectangle AH eſt le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB. De ſorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Rectangle AH avec le Quarré LG, ſont égaux au Quarré CF. Pour le prouver,

Les Rectangles CH, HF, ſont égaux entr'eux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoûte le Quarré DI, les Rectangles CI, DF, ſeront auſſi égaux entr'eux. Mais le Rectangle AL eſt égal à CI, par la 36. Prop. du 1. Donc il eſt auſſi égal à DF. Maintenant, ſi à ces deux choſes égales on ajoûte le Rectangle CH : le Rectangle AH ſera égal au Gnomon MNX. Et ſi l'on ajoûte à ce Rectangle & à ce Gnomon le Quarré LG : le Rectangle AH & le Quarré LG, pris enſemble, ſeront égaux au Gnomon MNX & au Quarré LG, pris auſſi enſemble. Or ce Gnomon & ce Quarré compoſent le Quarré CF. Donc le Rectangle AH, avec le Quarré LG, ſont égaux au Quarré CF ; Ce qu'il falloit démontrer.

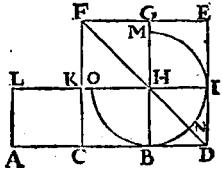
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 20. Diviſez ce nombre en deux parties égales 10 & 10 ; & en deux inégales 17 & 3. Cela étant, le nombre dû milieu ſera 7. Multipliez maintenant 17 par 3 ; le Produit eſt 51. Quarrez le nombre 7, vous aurez 49. Ces deux nombres joints enſemble font 100 ; qui eſt le Quarré de 10, ou de la moitié de 20.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si une Ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoûte directement une autre Ligne droite : le Rectangle compris de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une ſeule Ligne, & de l'ajoûtée, avec le Quarré de la moitié de la toute, ſont égaux au Quarré de la moitié de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une ſeule Ligne.



JE ſuppoſe que la Ligne droite AB ſoit coupée en deux parties égales au Point C, & qu'on lui ajoûte directement la Ligne BD. Cela étant, je dis que le Rectangle compris de AD, BD, avec le Quarré de CB, ſont égaux au Quarré de CD. Pour le prouver,

Décrivez ſur la Ligne CD le Quarré CE ; tirez la Diagonale DF ; élevez au Point B la Ligne BG perpendiculaire à AD, qui ſera auſſi parallele à DE, & à CF. Puis, par le Point H, où la Ligne BG coupe la Diagonale, menez la Ligne IHL parallele à AD. Enfin menez par le Point A la Ligne AL parallele à CF. Cela poſé :

Puiſque

Puisque, par la premiere Remarque de la 4. Prop. BI est un Quarré : DI est égale à BD, & ainsi le Rectangle AI est le Rectangle compris de AD, BD.

Par la même Remarque, KG est aussi un Quarré, & le Quarré de KH, ou de son égale CB. Desorte qu'il ne s'agit plus que de montrer que le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sont égaux au Quarré CE. Pour le prouver,

Les Rectangles AK & CH, qui sont constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Mais les Rectangles HE & CH sont aussi égaux entr'eux, par la 43. Prop. du 1. Et ainsi le Rectangle AK & le Rectangle EH, qui sont égaux à un même Rectangle, sont égaux entr'eux. Si donc on leur ajoûte le Rectangle CI : le Rectangle AI sera égal au Gnomon MNO. Maintenant, si on ajoûte à ce Rectangle & à ce Gnomon le Quarré KG : le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sera égal au Gnomon MNO, avec ce même Quarré KG. Or ce Gnomon & ce Quarré composent le Quarré CE. Donc le Rectangle AI & le Quarré KG sont égaux au Quarré CE ; Ce qu'il falloit démontrer.

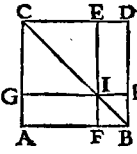
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 10. Divisez ce nombre en deux parties égales 5 & 5. Ajoûtez 3 à 10, cela fera 13. Cela étant, le Rectangle de 13 & de 3, est 39. Le Quarré de la moitié 5 est 25. Or 39 & 25 font 64 ; qui est aussi la valeur du Quarré du nombre 8, composé de la moitié 5, & du nombre ajoûté 3.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra: le Quarré de la toute, & le Quarré de l'une de ses parties, sont égaux au Quarré de l'autre partie, & à deux Rectangles faits de la toute & de la partie premierement prise.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB, & le Quarré de l'une de ses parties, par exemple de AF, sont égaux au Quarré de l'autre partie FB, & à deux Rectangles faits de la toute AB & de la partie AF, qui avoit été premierement prise. Pour le prouver,

Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AD; menez la Diagonale BC; élevez au Point F la Ligne FE perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AC & à BD. Puis, par le Point I, où la Ligne FE coupe la Diagonale, menez la Ligne GIH parallele à AB. Cela posé:

Puisque AD est un Quarré, AC est égale à AB; & par conséquent le Rectangle AE est compris de la toute AB, & de sa partie AF. D'ailleurs, puisque FH & GE sont des Quarrez, par la premiere Remarque de la 4. Prop. le Rectangle GD compris de CD, qui est égale à AB, & de CG, qui est égale

égale à GI, ou à AF, est aussi compris de AB, & de AF. De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Quarré AD, & le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD. Pour le prouver,

Le Quarré AD est déja égal au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, ID, pris ensemble, par le 8. Ax. Si donc on leur ajoûte le Quarré commun GE: il s'ensuivra que le Quarré AD, & le Quarré GE, seront égaux au Quarré FH, au Rectangle AE, au Rectangle ID, & au Quarré GE. Mais le Rectangle ID, & le Quarré GE, composent ensemble le Rectangle GD. Et partant le Quarré AD, &le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

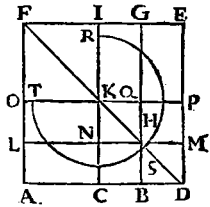
Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10; & le divisez en 7 & 3. Cela étant, le Quarré du nombre entier 10 est 100. Le Quarré de la partie 7 est 49. Ces deux Quarrez font ensemble 149. D'ailleurs le Quarré de l'autre partie 3, est 9; le Rectangle compris du nombre entier 10 & de la partie premierement prise 7, est 70. Le même Rectangle pris une seconde fois est encore 70. Or 9, 70, & 70, font aussi 149.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si une Ligne droite eſt coupée comme l'on voudra : quatre-fois le Rectangle compris de la toute & de l'une de ſes parties, avec le Quarré de l'autre partie, ſont égaux au Quarré de la toute & de la partie premierement priſe, comme d'une ſeule Ligne.

JE ſuppoſe que la Ligne AB ſoit coupée comme l'on voudra au Point C. Cela étant, je dis que quatre-fois le Rectangle de AB, CB, avec le Quarré de l'autre partie AC, ſont égaux au Quarré de la toute AB, & de la partie premierement priſe CB, comme d une ſeule Ligne. Pour le prouver,



Continuez AB vers D, & faites BD égale à BC. Puis ayant décrit ſur la Ligne AD le Quarré AE, menez la Diagonale DF. Elevez aux Points B & C les Perpendiculaires BG & CI, qui ſeront auſſi paralleles à AF & à DE; & par les Points H & K, où BG & CI coupent la Diagonale DF, menez les Lignes LHM & OKP paralleles à AD. Cela poſé:

Premierement (par la premiere Remarque de la 4. Prop.) BM & LG ſont des Quarrez. Enſuite de

de quoi NQ & OI ſont auſſi des Quarrez. Or puiſque BM eſt un Quarré, la Ligne BH eſt égale à BD; laquelle ayant été faite égale à BC, il s'enſuit que la Ligne BH eſt égale à BC, & ainſi que le Rectangle CH eſt un Quarré. Et d'autant que les Quarrez BM & CH ont le Côté BH commun, il s'enſuit que ces deux Quarrez ſont égaux entr'eux. Et par la même raiſon, les Quarrez CH & NQ ſont auſſi égaux, puis qu'ils ont le Côté NH commun. D'où il ſuit que les Quarrez BM, NQ, ſont égaux entr'eux, puis qu'ils ſont tous-deux égaux à CH. Cela étant, HM eſt égal à HQ, puiſque ce ſont les Côtez de Quarrez égaux. Et partant HP eſt encore un Quarré égal aux trois autres. Enſuite de quoi il eſt évident que les Rectangles AH & LQ ſont compris de la toute AB & de ſa partie BC. Et puiſque (par la 43. Prop. du 1.) le Rectangle HE eſt égal au Rectangle AH, il s'enſuit que le Rectangle HE eſt auſſi compris de AB & de BC. D'ailleurs les Rectangles IQ & GP étant ſur des Bazes égales KQ, QP, & entre mêmes Paralleles IE & KP, ſont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Si donc on leur ajoûte les Quarrez égaux BM & QM, il s'enſuivra que QI, pris avec BM, ſera équivalent à GP, pris avec QM, c'eſt à dire au ſeul Rectangle GM, ou HE. Et ainſi le Gnomon RST eſt égal à quatre-fois le Rectangle compris de AB, BC. Maintenant ſi à ces deux choſes égales on ajoûte le Quarré OI, qui eſt le Quarré de OK, ou de AC ſon égale: il s'enſuivra que quatre-fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, ſont égaux au Gnomon RST, avec le Quarré OI. Or ce Gnomon & ce Quarré compoſent enſemble le Quarré AE. Donc quatre-fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, ſont égaux au Quarré AE; Ce qu'il falloit démontrer.

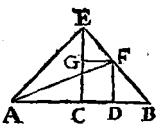
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 8 ; & le divisez en 6 & 2. Cela étant, le Rectangle du nombre entier 8, & de sa partie 2, est 16 ; & quatre-fois ce Rectangle est 64. D'ailleurs le Quarré de l'autre partie 6, est 36. Or 64 & 36 font 100. Ce que vaut aussi le Quarré du nombre 10, qui est composé du premier nombre 8, & de sa partie premierement prise, à sçavoir 2.

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales, les Quarrez des deux parties inégales sont doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la partie du milieu.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D ; & que la partie du milieu soit CD. Cela étant, je dis que les Quarrez des deux parties inégales AD, DB, sont doubles du Quarré de la moitié AC, & du Quarré de la partie du milieu CD. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez au Point E les Lignes droites

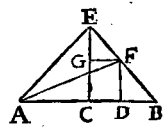
droites AE, BE. Elevez aussi au Point D la Ligne DF perpendiculaire à AB; & du Point F, où la Ligne DE coupe BE, abaissez la Ligne FG perpendiculaire à CE, qui sera aussi parallele à CD. Enfin du Point A au Point F menez la Ligne droite AF. Cela posé:

Puisque par la construction le Triangle ACE est Isoscele, les Angles AEC & EAC, sur la Baze AE, sont égaux entr'eux. Et puisque l'Angle ACE est droit, les deux Angles AEC, EAC, qui sont égaux, valent chacun un demi-droit. Et par la même raison les Angles CEB, CBE, valent aussi chacun un demi-droit. Par conséquent l'Angle AEB, ou AEF, qui est composé de deux de ces Angles, est droit. De plus, puisque dans le Triangle EGF l'Angle EGF est droit, & que l'Angle GEF vaut un demi-droit, l'Angle EFG vaut aussi un demi-droit. D'où il suit que les deux Côtez GE, GF, qui les soûtiennent, sont égaux entr'eux, par la 6. Prop. du 1. De même, puisque dans le Triangle FDB l'Angle FDB est droit, & que l'Angle B vaut un demi-droit, l'Angle DFB vaut aussi un demi-droit. Par conséquent les Côtez DF, DB, qui les soûtiennent, sont égaux entr'eux.

Ensuite de quoi, puisque le Côté AE soûtient l'Angle droit ACE, son Quarré est égal aux Quarrez de AC & de CE, par la 47. Prop. du 1. Et puisque ces deux Quarrez sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de AE est double du Quarré de AC. De même, puisque le Côté EF soûtient l'Angle droit EGF, son Quarré est égal aux Quarrez de EG & de GF. Et puisque ces deux Quarrez sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de EF est double du Quarré de GF, ou de son égale CD. Et ainsi les deux Quarrez de AE & de EF sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Or le Quarré de AF, qui soûtient l'Angle droit AEF, est égal aux deux Quarrez de AE & de EF. Donc le Quarré de

AF

AF est double des deux Quarrez de AC & de CD. Mais les deux Quarrez de AD & de DF, qui comprennent l'Angle droit ADF, sont égaux au Quarré de AF. Donc les deux Quarrez de AD & de DF, ou de BD son égale, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.



REM[illegible].

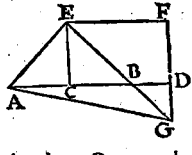
Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 12. Divisez ce nombre en deux parties égales 6 & 6; & en deux inégales 10 & 2. Cela étant, le nombre du milieu sera 4. Maintenant les Quarrez des deux parties inégales sont 100 & 4, qui ensemble font 104. D'ailleurs le Quarré de la moitié 6 est 36; le Quarré de la partie du milieu 4 est 16; 16 & 36 font 52, qui n'est que la moitié de 104, où dont 104 est le double.

PRO-

PROPOSITION X.

THEOREME X.

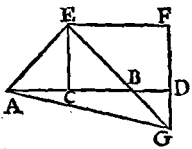
Si une Ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoûte directement une autre Ligne droite: le Quarré de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une ſeule Ligne, avec le Quarré de l'ajoûtée, ſont doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la moitié de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une ſeule Ligne.



JE ſuppoſe que la Ligne AB ſoit coupée en deux parties égales au Point C, & qu'on lui ajoûte directement la Ligne BD. Cela étant, je dis que le Quarré de AD & le Quarré de BD, pris enſemble, ſont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC, ou à CB. Du Point A au Point E menez la Ligne droite AE. Puis par le Point D menez la Ligne FDG parallele à EC, ou perpendiculaire à AD; & par le Point E la Ligne EF parallele à CD. Tirez du Point E, par le Point B, la Ligne droite EBG, ſi longue, qu'elle rencontre la Ligne FDG au Point G. Enfin du Point A au Point G me-

G menez la Ligne droite AG. Cela posé,



Puisque les Lignes AC, CE, sont égales, les Angles CAE, CEA, sur la Baze, sont égaux entr'eux. Or l'Angle ACE est droit. Donc les Angles CAE, CEA, valent chacun un demi-droit. De même, puisque dans le Triangle ECB les Côtez CE, CB, sont égaux, & que l'Angle ECB est droit, chacun des Angles CEB & CBE, vaut un demi-droit. Et par consequent l'Angle AEB est droit. Maintenant les Angles CBE & DBG, qui sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux. Mais l'Angle CBE vaut un demi-droit. Donc l'Angle DBG vaut aussi un demi-droit. De plus, dans le Triangle BDG l'Angle D est droit; donc l'Angle DGB vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez DB, DG, qui soûtiennent les Angles DGB, DBG, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1. De même, dans le Triangle EFG l'Angle F est droit, puis qu'il est opposé à l'Angle C. Mais l'Angle EGF vaut un demi-droit. Donc l'Angle GEF vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez FE, FG, qui les soûtiennent, sont aussi égaux entr'eux, par la 6. du 1.

Ensuite de quoi, puisque du Triangle ACE l'Angle ACE est droit, le Quarré de AE est égal aux deux Quarrez de AC & de CE, par la 47. du 1. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de AE est double du Quarré de AC. De même, puisque du Triangle EFG l'Angle EFG est droit, le Quarré de EG est égal aux deux Quarrez de EF & de FG. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de EG est double du Quarré de EF, ou de son égale CD. De sorte que les deux Quarrez de AE & de EG, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Or le Quarré de AG, qui soûtient l'Angle droit

droit AEG, est égal aux deux Quarrez de AE & de EG. Donc le Quarré de AG est double des Quarrez de AC & de CD. Mais les Quarrez de AD & de DG, qui comprennent l'Angle droit ADG, sont égaux au Quarré de AG. Donc les Quarrez de AD & de DG, ou de BD son égale, sont doubles des Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10. Divisez ce nombre en deux parties égales 5 & 5. Ajoûtez 2 à 10; cela fera 12. Cela étant, le Quarré de 12 est 144; le Quarré de 2 est 4; ces deux nombres font ensemble 148. D'ailleurs le Quarré de 5 est 25; le Quarré de 7 est 49. Ces deux nombres font ensemble 74, qui est la moitié de 148, ou dont 148 est le double.

PROPOSITION XI.

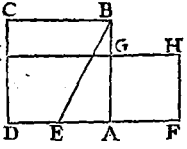
PROBLEME I.

Couper une Ligne droite donnée, de telle sorte, que le Rectangle de la toute, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie.

JE suppose que la Ligne droite donnée soit AB; & je propose de la couper de telle sorte, que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie. Pour le faire,

Décrivez sur AB le Quarré AC. Coupez le Côté

té AD en deux également au Point E. Du Point E au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez EA vers F, & faites EF égale à EB. Décrivez sur AF le Quarré AH ; & prolongez le Côté HG jusqu'en I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G comme il a été proposé ; c'est à dire de telle sorte, que le Rectangle de la toute AB, & de la partie BG, est égal au Quarré de l'autre partie AG. Pour le prouver,



Puisque la Ligne DA est coupée en deux parties égales au Point E, & que la Ligne AF lui est ajoûtée : le Rectangle de DF, & de FA, ou de FH son égale, (c'est à dire le Rectangle DH,) avec le Quarré de la moitié EA, sont égaux au Quarré de EF, ou de son égale EB, par la 6. Prop. Or les Quarrez de AB & de EA sont égaux au Quarré de EB, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle DH, & le Quarré de EA, sont égaux aux Quarrez de AB & de EA. Ostant donc le Quarré de EA de ces deux Touts égaux, ausquels il est commun, il restera le Rectangle DH égal au Quarré de AB, c'est à dire au Quarré AC. Que si maintenant de ce Rectangle & de ce Quarré, qui sont égaux, l'on ôte le Rectangle DG, qui leur est commun, il restera le Quarré AH égal au Rectangle IB. Or le Quarré AH est le Quarré de AG, & le Rectangle IB est le Rectangle compris de CB, ou de AB son égale, & de BG. Il est donc vrai de dire, que la Ligne AB a été coupée comme il a été proposé ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Il est impossible d'exprimer en nombre la quantité des parties AG, GB, de la Ligne AB coupée lui-

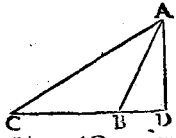
suivant la Prop. précedente ; parce que quelque nombre de parties qu'on puisse attribuer à la Ligne AB, il est impossible que AG, ou GB, contienne un nombre déterminé de ces parties.

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

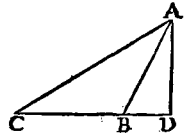
Aux Triangles Amblygones, le Quarré du Côté qui soûtient l'Angle obtus est plus grand que les Quarrez des deux autres Côtez, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Côtez alentour de l'Angle obtus, à sçavoir de celui sur lequel étant prolongé tombe la Perpendiculaire de l'Angle opposé, & de la partie compriſe entre cette Perpendiculaire & l'Angle obtus.

JE suppose qu'au Triangle ABC l'Angle ABC soit obtus. Cela étant, aprés avoir prolongé l'un des Côtez alentour de l'Angle obtus, comme CB, vers D, & avoir abaissé de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à CD : Je dis que le Quarré de AC est plus grand que les deux Quarrez de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris de CB, & de BD. Pour le prouver,



La

La Ligne CD *étant coupée au Point B, il s'enſuit* (par la 4. Prop.) que le Quarré de la toute CD eſt égal aux deux Quarrez des deux parties CB, BD, & à deux Rectangles compris de ces deux mêmes parties. Donc ſi à ces deux Touts égaux l'on ajoûte le Quarré de DA, il s'enſuivra que les Quarrez de CD & de DA ſeront égaux aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Mais le Quarré de AC (par la 47. Prop. du 1.) eſt égal aux deux Quarrez de CD & de DA. Donc le Quarré de AC eſt égal aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. D'ailleurs le Quarré de BA eſt égal aux deux Quarrez de BD & de DA. Prenant donc le Quarré de BA, au lieu de ces deux Quarrez : il s'enſuivra que le Quarré de AC ſera égal aux deux Quarrez de CB & de BA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Et ainſi le Quarré de AC eſt plus grand que les deux Quarrez de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles compris de CB & de BD ; Ce qu'il falloit démontrer.

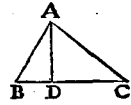


PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

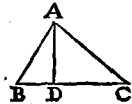
Aux Triangles Oxygones, le Quarré du Côté qui soûtient l'Angle aigu est plus petit que les Quarrez des deux autres Côtez, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Côtez alentour de l'Angle aigu, à sçavoir de celui sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire, & de la partie comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu.



JE suppose qu'au Triangle ABC l'Angle C soit aigu, & qu'ayant fait tomber de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à la Ligne BC, qui est l'un des Côtez qui comprend l'Angle aigu, cette Perpendiculaire tombe entre B & C. Cela étant, je dis que le Quarré du Côté AB, qui soûtient l'Angle aigu C, est plus petit que les deux Quarrez des deux autres Côtez AC, BC, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris du Côté BC, qui est alentour de l'Angle aigu C, & sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire AD, & de la partie DC comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu. Pour le prouver,

La

La Ligne BC étant coupée au Point D, il s'ensuit (par la 7. Prop.) que le Quarré de la toute BC, & le Quarré de l'une de ses parties, à sçavoir DC, sont égaux au Quarré de l'autre partie BD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Si donc à ces deux Touts égaux l'on ajoûte le Quarré de AD: il s'ensuivra que les trois Quarrez de BC, de DC, & de AD, seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Donc si nous prenons le Quarré de AC, au lieu des deux Quarrez de DC & de AD, auxquels il est égal, par la 47. Prop. du 1. il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'ailleurs, le Quarré de AB est égal aux deux Quarrez de BD & de AD. Prenant donc ce seul Quarré au lieu des deux autres, il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux au Quarré de AB, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'où il suit que les deux Quarrez de BC & de AC sont plus grands que le seul Quarré de AB, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC; ou, ce qui est la même chose, que le Quarré de AB est moindre que les deux Quarrez de AC & de BC, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC; Ce qu'il falloit démontrer.



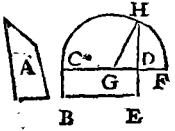
PROPOSITION XIV.

PROBLEME II.

Décrire un Quarré égal à une Figure rectiligne donnée.

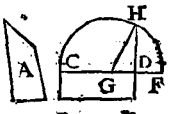
JE suppose que la Figure rectiligne A soit donnée ; & je propose de décrire un Quarré égal à cette Figure. Pour le faire,

Décrivez premierement (par la 45. Prop. du 1.) le Parallelogramme Rectangle BD égal à la Figure donnée A. Prolongez le Côté CD vers F, & faites DF égale à DE. Coupez la Ligne CF en deux également au Point G. Décrivez un demi-Cercle du Centre G, & de l'intervalle GC, ou GF. Enfin prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Circonference du Cercle au Point H. Cela étant, je dis que le Quarré de la Ligne DH est égal à la Figure rectiligne A. Pour le prouver,



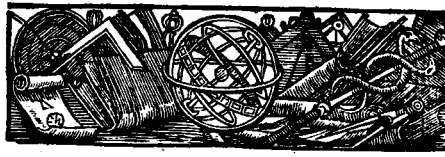
Du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela posé :

Puisque la Ligne CF est coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point D : il s'ensuit (par la 5. Prop.) que le Rectangle compris des deux parties inégales CD, DF, c'est à dire le Rectangle BD, & le Quarré de la partie du milieu GD, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute GF, ou de son égale GH. Mais ce Quarré de GH est égal aux Quarrez de GD & de DH, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle BD, & le Quarré de GD, sont égaux aux deux Quarrez de



GD & de DH. Et partant, ſi de ces deux Touts égaux l'on ôte le Quarré de GD, qui leur eſt commun, les reſtes, à ſçavoir le Rectangle BD, & le Quarré de DH, ſeront égaux. Mais le Rectangle BD a été fait égal à la Figure rectiligne donnée A. Donc le Quarré de DH eſt auſſi égal à cette Figure; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

ELE-



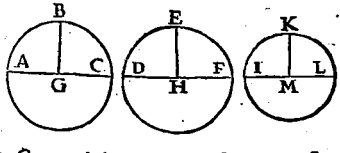
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIE'ME.

DEFINITIONS.

1. LEs Cercles égaux, ſont des Cercles dont les Diametres ſont égaux, ou dont les Lignes droites menées du Centre à leurs Circonferences, ſont égales.

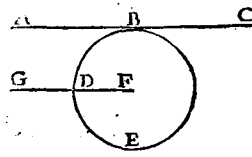
Ainſi les Cercles ABC, DEF, ſont égaux, parce que leurs Diametres AC, DF, ſont égaux; ou parce que les Lignes droites GB, HE, qui ſont menées du Centre à leurs Circonferences, ſont égales.



égales. Mais les Cercles DEF, IKL, ſont inégaux, parce que leurs Diametres DF, IL, ſont inégaux, ou parce que les Lignes droites HE, MK, qui ſont menées du Centre à leurs Circonférences, ſont inégales.

2. La Tangente d'un Cercle, ou la Ligne qui le touche, eſt une Ligne droite qui touche ſa Circonference de telle ſorte, qu'étant prolongée, elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.

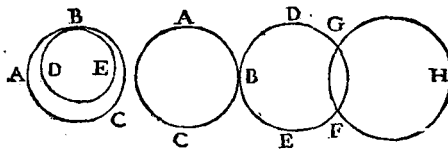
Ainſi la Ligne AB eſt la Tangente du Cercle BDE, parce qu'elle touche ſa Circonference de telle ſorte au Point B, qu'étant prolongée elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.



3. La Secante d'un Cercle, ou la Ligne qui le coupe, eſt une Ligne droite qui touche tellement ſa Circonference, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

Ainſi la Ligne GD eſt la Secante du Cercle BDE, parce qu'elle touche tellement ſa Circonference au Point D, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

4. Des Cercles ſont dits ſe toucher l'un l'autre, quand leurs Circonferences ſe touchent ſans ſe couper.



Ainſi les Cercles ABC, DBE, ſont dits ſe toucher l'un l'autre, parce que leurs Circonferences

ſe

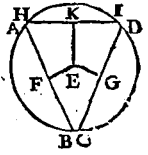
ſe touchent tellement au Point B, qu'elles ne ſe coupent point.

5. Deux Cercles ſont dits ſe couper l'un l'autre, lorſque leurs Circonferences ne ſe touchent pas ſimplement, mais qu'ils entrent reciproquement l'un dans l'autre.

Ainſi les Cercles FGD, FGH, ſont dits ſe couper l'un l'autre, parce que leurs Circonferences ne ſe touchent pas ſimplement, mais que ces Cercles entrent reciproquement l'un dans l'autre.

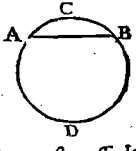
6. La diſtance d'une Ligne droite au Centre d'un Cercle, eſt la Ligne droite qui part du Centre de ce Cercle, & qui tombe perpendiculairement ſur cette Ligne.

Ainſi la diſtance de la Ligne AB au Centre du Cercle ABD, eſt la Ligne EF, qui part du Centre E, & qui tombe perpendiculairement ſur AB. D'où il ſuit que les deux Lignes droites AB, CD, ſont également diſtantes du Centre E, parce que leurs diſtances EF, EG, ſont égales. Mais que la Ligne HI eſt plus éloignée de ce même Centre, parce que ſa diſtance EK eſt plus grande que celle des autres.



7. La Soûtendante, ou la Corde d'un Arc de Cercle, eſt la Ligne droite bornée des deux extremitez de cét Arc.

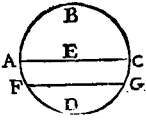
Ainſi la Ligne droite AB eſt la Soûtendante ou la Corde de l'Arc ACB, parce qu'elle eſt bornée de ſes deux extremitez A & B.



Il eſt évident que la même Ligne AB eſt auſſi la Soûtendante de l'Arc ADB. Si bien que la Ligne droite qui eſt la Soûtendante d'un Arc, eſt auſſi la Soûtendante du Complement de cét Arc à la Circonference entiere.

8. Un Segment, ou une portion de Cercle, eſt une Figure compriſe d'un Arc de Cercle & de ſa Soûtendante.

Ainſi les Figures ABC, FBG, FDG, ſont des Segmens ou des portions de Cercles, parce chacune de ces Figures eſt compriſe d'un Arc de Cercle & de ſa Soûtendante.



9. La Baze d'un Segment de Cercle, eſt la Ligne droite qui ſoûtient ce Segment, & qui le borne.

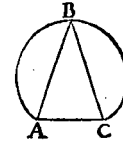
Ainſi la Ligne FG eſt la Baze du Segment FBG, & du Segment FDG, parce qu'elle les ſoûtient & les borne.

10. L'Angle du Segment, eſt l'Angle mixte compris de l'Arc du Segment & de ſa Baze.

Ainſi l'Angle mixte compris de l'Arc FD, & de la Ligne FG, eſt l'Angle du Segment FDG.

11. l'Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment eſt capable, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de l'Arc du Segment, & qui aboutiſſent aux deux extremitez de ſa Baze.

Ainſi l'Angle ABC eſt un Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment ABC eſt capable; parce qu'il eſt compris des deux Lignes droites BA, BC, qui partent du Point B de l'Arc du Segment, & aboutiſſent aux deux extremitez de ſa Baze A & C.

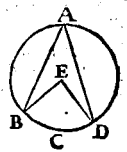


12. Un Angle au Centre d'un Cercle, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle, comme l'Angle BED.

13. Un Angle à la Circonference d'un Cercle, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de la Circonference du Cercle, comme l'Angle BAD.

14. Quand

14. Quand l'Angle que font deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle, ou d'un même Point de la Circonference, a pour Baze un Arc de ce Cercle, cét Angle eſt dit s'appuyer ſur cét Arc.



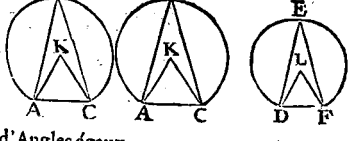
Ainſi l'Angle BED, ou l'Angle BAD, eſt dit s'appuyer ſur l'Arc BCD.

15. L'Arc ſur lequel s'appuye un Angle, ou qui lui ſert de Baze, eſt l'Arc compris entre les deux Côtez de l'Angle.

Ainſi l'Arc BCD eſt l'Arc ſur lequel s'appuyent les Angles BAD, BED, ou bien eſt la Baze de ces Angles, parce que cét Arc eſt compris entre leurs Côtez.

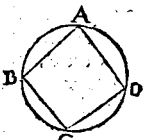
16. Un Secteur de Cercle, eſt une Figure compriſe de deux Lignes droites qui font un Angle au Centre, & de la partie de la Circonference que ces deux Lignes embraſſent, comme ci-deſſus la Figure EBCD eſt un Secteur de Cercle.

17. Des Segmens ſemblables, ſont des Segmens qui ſont capables d'Angles égaux.



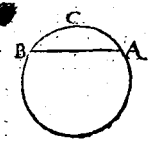
Ainſi les Segmens marquez ABC, & DEF, ſont des Segmens qui s'appellent ſemblables, parce que les Angles ABC, & DEF, dont ils ſont capables, ſont égaux. Mais ces mêmes Segmens ne laiſſent pas d'être inégaux, parce que l'un eſt plus grand que l'autre. Au lieu que les deux Segmens marquez ABC, ſont ſemblables, & égaux; parce que non ſeulement ils ſont capables d'Angles égaux, mais auſſi parce que l'un n'eſt pas plus grand que l'autre.

18. Une Figure rectiligne eſt dite inſcrite dans un Cercle, lorſque le Sommet de chacun de ſes Angles eſt dans la Circonference du Cercle.



Ainſi la Figure ABCD eſt inſcrite dans le Cercle ABCD, parce que tous les Sommets de ſes Angles A, B, C, D, ſont dans la Circonference de ce Cercle.

19. Une Ligne droite eſt dite être dans un Cercle, lorſque ſes extremitez ſe terminent à la Circonference.



Ainſi la Ligne AB eſt dite être dans le Cercle ABC.

PRO-

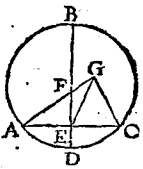
PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Trouver le Centre d'un Cercle donné.

JE ſuppoſe que l'on donne le Cercle ABC, & je propoſe d'en trouver le Centre. Pour le trouver,

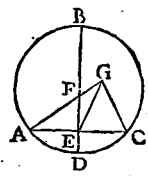
Menez dans ce Cercle la Ligne droite AC, qui coupe la Circonference où il vous plaira, comme aux Points A & C. Diviſez la Ligne AC en deux également au Point E, par la 10. du 1. Et par ce Point menez la Ligne BED perpendiculaire à AC, par la 11. du premier. Enfin coupez la Ligne BD en deux également au Point F. Cela étant, je dis que le Point F eſt le Centre du Cercle ABC. Pour le prouver,



Premierement il eſt évident que tout autre Point que F, pris dans la Ligne BD, ne peut être le Centre, puiſque cét autre Point ne diviſeroit pas la Ligne BD en deux également. C'eſt pourquoi ſi le Centre n'étoit pas au Point F, il faudroit qu'il fût en quelque Point hors de la Ligne BD. Penſons, ſi vous voulez, qu'il ſoit au Point G. Menez donc les Lignes droites GA, GE, GC. Cela poſé:

Comparez le Triangle AEG avec le Triangle CEG. Le Côté AE du premier eſt égal au Côté EC du ſecond, par la conſtruction; le Côté EG eſt commun aux deux Triangles; & la Baze GA ſeroit égale à la Baze GC, puis qu'elles ſeroient tirées du Centre à la Circonference. Ainſi (par la

8. du 1.) l'Angle AEG seroit égal à l'Angle CEG, & la Ligne GE seroit perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Et partant les Angles GEA, GEC, seroient droits. Mais, par la construction, l'Angle AEB est droit. Donc il s'ensuivroit que l'Angle AEB & l'Angle AEG seroient égaux, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle ABC soit hors la Ligne BD. Et partant le Point F est le Centre du Cercle ABC; Ce qu'il falloit trouver.

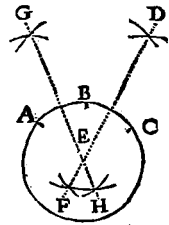


I. Remarque.

Il suit de-là, que si dans un Cercle une Ligne droite en coupe une autre qui se termine à sa Circonference, en deux également & perpendiculairement, cette Ligne droite passera par le Centre du Cercle.

II. Remarque.

Pratique de cette Proposition. Prenez dans la Circonference du Cercle ABC trois Points, tels qu'il vous plaira, A, B, C. Mettez successivement vôtre Compas à deux de ces Points A & B; & de même intervalle décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points G & H. Puis par ces Points menez la Ligne droite GH. Cela fait, mettez derechef successivement le pied du Compas aux Points B & C; & de même

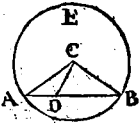


même intervalle décrivez encore deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points D & F. Enfin menez par ces deux Points la Ligne DF, si longue, qu'elle rencontre la Ligne GH au Point E. Alors le Point E sera le Centre qu'il falloit trouver.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

Si ayant pris deux Points dans la Circonference d'un Cercle, on méne de l'un à l'autre une Ligne droite, elle tombera dans le Cercle.

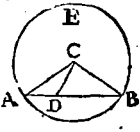


JE suppose que dans la Circonference du Cercle ABE l'on prenne deux Points tels qu'on voudra, comme A & B; & que du Point A au Point B on méne la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que cette Ligne tombera dans ce Cercle. Pour le prouver,

Menez du Centre C aux extremitez de la Ligne AB les Lignes droites CA, CB. Puis ayant pris à discretion dans la Ligne AB un Point entre A & B, comme par exemple D, menez la Ligne droite CD. Cela posé:

Les Lignes CA, CB, qui partent du Centre C, & vont se borner à sa Circonference, sont égales. Ainsi les Angles CAB, CBA, sont égaux entr'eux, par la 5. du 1. Mais l'Angle CDB est exterieur au respect du Triangle ADC. Donc (par la 16. du 1.) il est plus grand que son opposé interieur CAD, & par consequent aussi que son égal CBD. D'où il suit

suit (par la 19. du 1.) que le Côté CD est plus petit que le Côté CB, qui soûtient un plus grand Angle. Et puis qu'il est plus petit, son extremité D est dans le Cercle. Mais d'autant que le Point D a été pris à discretion dans la Ligne AB, & que la même chose se peut prouver de tout autre Point de cette Ligne, il suit que cette Ligne toute entiere est dans le Cercle; Ce qu'il falloit démontrer.

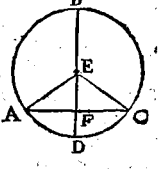


PROPOSITION III.

THEOREME II.

Si dans un Cercle, une Ligne droite passe par le Centre, & coupe en deux également une autre Ligne droite qui n'y passe point, elle la coupera perpendiculairement; Et si elle la coupe perpendiculairement, elle la coupera en deux également.

JE suppose premierement que la Ligne droite BD, qui est dans le Cercle ABC, passe par le Centre E, & qu'elle coupe en deux également au Point F la Ligne AC, qui n'y passe point. Cela étant, je dis que la Ligne BD coupe la Ligne AC perpendiculairement. Pour le prouver, Menez les Lignes droites AE, EC. Cela posé:



Dans

Dans les Triangles AFE & CFE, le Côté AF eſt égal au Côté FC, par ſuppoſition. Le Côté FE eſt commun à ces deux Triangles. Deplus, la Baze EA eſt égale à la Baze EC, par la definition du Cercle. Donc (par la 8. du 1.) l'Angle AFE eſt égal à l'Angle CFE, & la Ligne BD eſt perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que la Ligne BD qui paſſe par le Centre du Cercle, coupe la Ligne AC perpendiculairement. Cela étant, je dis qu'elle la coupe auſſi en deux également. Pour le prouver,

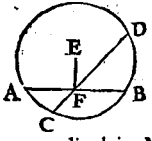
Puiſque les Lignes EA, EC, ſont égales, par la definition du Cercle: les Angles EAC & ECA, ſont égaux, par la 5. du 1. D'ailleurs puiſque la Ligné BF eſt perpendiculaire à la Ligne AC, les deux Angles EFA, EFC, ſont auſſi égaux. Si bien que les deux Triangles EFA, EFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au ſien; & le Côté EF, qui eſt commun aux deux, ſoûtient des Angles égaux. Partant (par la 26. du 1.) le Côté AF eſt égal au Côté FC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

Si dans un Cercle, deux Lignes droites qui ne passent pas par le Centre, s'entrecoupent, elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.

JE suppose que dans le Cercle ABD les deux Lignes droites AB, CD, qui ne passent point par le Centre, se coupent l'une l'autre au Point F. Cela étant, je dis qu'elles ne se coupent pas toutes-deux en deux parties égales. Pour le prouver,



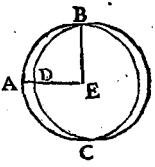
S'il étoit possible que chacune de ces deux Lignes fût coupée en deux parties égales: il s'ensuivroit, par la Proposition precedente, qu'en menant du Centre E au Point F la Ligne droite EF, cette Ligne seroit perpendiculaire à chacune des deux autres AB, CD; & par consequent que les Angles AFE & CFE seroient droits, & égaux entr'eux, & qu'ainsi la partie seroit égale au Tout, ce qui est impossible. Il est donc impossible que les Lignes AB, CD, se coupent toutes-deux en deux parties égales; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION V.

THEOREME IV.

Si deux Cercles ſe coupent l'un l'autre, ils n'auront pas un même Centre.



JE ſuppoſe que les deux Cercles ABC, BDC, ſe coupent l'un l'autre aux Points B & C. Cela étant, je dis qu'ils n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,

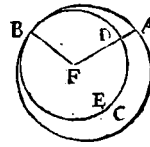
S'il étoit poſſible qu'ils euſſent tous-deux un même Centre, à ſçavoir E: en menant de ce Point une Ligne droite à l'un des Points où ces deux Cercles s'entrecoupent, par exemple au Point B, & une autre Ligne droite en quelqu'autre Point, comme A, qui les coupât tous-deux: De ce que le Point E ſeroit Centre du Cercle ABC, il s'enſuivroit que les Lignes EA, EB, ſeroient égales. D'ailleurs, de ce que ce même Point ſeroit auſſi le Centre du Cercle BDC, il s'enſuivroit que les Lignes ED, EB, ſeroient auſſi égales. Si bien que les deux Lignes EA, ED, qui ſeroient égales à une même, à ſçavoir à EB, ſeroient égales entr'elles. C'eſt à dire que le Tout ne ſeroit pas plus grand que ſa partie; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que les deux Cercles ABC, BDC, ayent un même Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME V.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre en dedans, ils n'auront pas un même Centre.



JE suppose que le Cercle BDE touche le Cercle ABC en dedans au Point B. Cela étant, je dis que ces deux Cercles n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,

S'il étoit possible qu'ils eussent tous-deux un même Centre, à sçavoir F: menant de ce Centre au Point de leur attouchement la Ligne droite FB, puis une autre Ligne droite à quelqu'autre Point de la Circonference du Cercle ABC, par exemple au Point A: De ce que le Point F seroit le Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes FA, FB, seroient égales. Et parce que ce même Point seroit aussi le Centre du Cercle BDE, il s'ensuivroit que les Lignes FD, FB, seroient aussi égales. Et ainsi les Lignes droites FA, FD, qui seroient égales à la même FB, seroient égales entr'elles, c'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDE, ayent un même Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

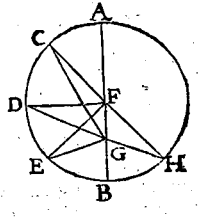
PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME VI.

Si ayant pris un Point, autre que le Centre, dans un Cercle, on méne de ce Point tant de Lignes droites que l'on voudra, juſqu'à la Circonference; la plus grande de toutes eſt celle qui paſſe par le Centre; & la plus petite eſt le reſte du Diametre. Quant aux autres Lignes, la plus proche de celle qui paſſe par le Centre eſt plus grande qu'une autre qui en eſt plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne ſçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

JE ſuppoſe que dans le Cercle ADB, dont le Centre eſt F, on ait pris à diſcretion le Point G, different du Centre F; & que de ce Point on ait mené à la Circonference pluſieurs Lignes droites, comme GA, GC, GD, GE, GB, entre leſquelles GA paſſe par le Centre F, &

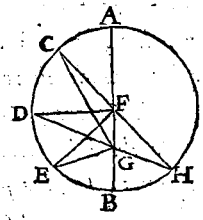


GB

GB achéve le Diametre AB. Cela étant, je dis premierement que la Ligne GA eſt la plus grande de toutes. Pour le prouver,

Menez du Centre F aux Points C, D, E, les Lignes droites FC, FD, FE. Cela poſé:

Au Triangle GFC les deux Côtez GF, FC, ſont plus grands que le troiſiéme GC, par la 20. du 1. Donc ſi au lieu de FC on prend FA, qui lui eſt égale par la definition du Cercle, les deux Lignes GF, FA, ou la toute GA, ſera plus grande que GC. On prouvera de même, que la Ligne GA eſt plus grande que les Lignes GD, GE. Mais GA eſt auſſi plus grande que GB, puiſque GA eſt plus grande que le demi-Diametre du Cercle, & que GB eſt plus petite. Et partant la Ligne GA eſt la plus grande de toutes.



Je dis en ſecond lieu, que la Ligne GB eſt la plus petite de toutes. Pour le prouver,

Au Triangle EGF, les deux Côtez FG, GE, ſont plus grands que le troiſiéme FE, par la 20. du 1. Ils ſont donc auſſi plus grands que la Ligne FB, qui lui eſt égale. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie FG, qui leur eſt commune: il s'enſuivra que le reſte GE ſera plus grand que le reſte GB, & ainſi que GB eſt plus petite que GE. On prouvera de même, que GB eſt plus petite que GD, ou GC. Et partant la Ligne GB eſt la plus petite de toutes.

Je dis en troiſiéme lieu, que la Ligne GC, qui eſt la plus proche de la Ligne GA qui paſſe par le Centre, eſt plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que GD, ou GE. Pour le prouver,

Comparez les deux Triangles CFG, & DFG.

Le

Le Côté CF du premier Triangle eſt égal au Côté FD du ſecond, par la definition du Cercle; le Côté FG eſt commun à ces deux Triangles. Deplus, l'Angle CFG, compris des deux Côtez du premier Triangle, eſt plus grand que l'Angle DFG, compris des deux Côtez du ſecond, puis qu'il n'eſt que ſa partie. Ainſi (par la 24. du 1.) la Baze GC eſt plus grande que la Baze GD. On prouvera de même, que GD eſt plus grande que GE. Et ainſi la Ligne GC, qui approche le plus de la Ligne qui paſſe par le Centre, eſt plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en quatriéme lieu, qu'on ne ſçauroit mener du Point G, de part & d'autre de la Ligne GB, plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ou bien qu'on n'en ſçauroit mener une troiſiéme égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Point F la Ligne FH, qui faſſe avec FB l'Angle BFH égal à l'Angle BFE; & du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela poſé:

Les Triangles GFH & GFE ont les deux Côtez GF, FH, égaux aux deux Côtez GF, FE; & l'Angle GFH, compris des deux Côtez du premier Triangle, eſt égal à l'Angle GFE, compris des deux autres, par la conſtruction. Donc la Baze GH eſt égale à la Baze GE, par la 4. du 1. Ainſi voilà deux Lignes droites égales menées du Point G de part & d'autre de la Ligne GB. Mais qu'on ne puiſſe pas en mener une troiſiéme égale aux deux autres, cela eſt évident, par ce qui a déja été prouvé. Car cette Ligne ou approchera plus prés du Point B, & ainſi elle ſera plus petite que GH: ou elle en ſera plus éloignée, & ainſi elle ſera plus grande; Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

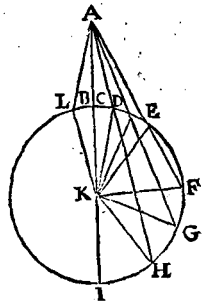
PROPOSITION VIII.

THEOREME VII.

Si d'un Point pris hors d'un Cercle on mène tant de Lignes droites que l'on voudra, qui se terminent à la Circonference concave du Cercle : la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre ; & celle qui en est plus proche est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Tout au contraire : de celles qui tombent sur la Circonference convexe, celle qui étant prolongée passe par le Centre, est la plus petite de toutes ; & celle qui en est plus proche est plus petite qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

JE suppose que du Point A, pris à discretion, hors du Cercle BCD, on ait mené plusieurs Lignes droites AF, AG, AH, AI, qui se vont terminer à sa Circonference concave ; & que la Ligne AI passe par le Centre K. Cela étant, je dis pre-

premierement que la Ligne AI est la plus grande de toutes. Pour le prouver,



Menez du Centre K les Lignes droites KF, KG, KH. Cela posé:

Au Triangle AKH les deux Côtez AK, KH, sont plus grands que le troisiéme AH, par la 20. du 1. Or AK & KH sont égaux à AK & à KI, ou à la toute AI. Ainsi la Ligne AI est plus grande que la Ligne AH. On prouvera de même, que la Ligne AI est plus grande que la Ligne AG, & que la Ligne AF. Donc la Ligne AI est la plus grande de toutes.

Je dis en second lieu, que la Ligne AH, qui est la plus proche de la Ligne AI qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que AG, ou AF. Pour le prouver,

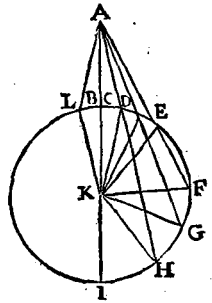
Aux Triangles AKH & AKG, les deux Côtez AK, KH, sont égaux aux deux Côtez AK, KG, chacun au sien. Mais l'Angle AKH est plus grand que l'Angle AKG, qui n'est que sa partie. Donc (par la 24. du 1.) la Baze AH est plus grande que la Baze AG. On prouvera de même, que la Ligne AG est plus grande que la Ligne AF. Et ainsi la Ligne AH, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en troisiéme lieu, qu'entre les Lignes AB, AC, AD, AE, qui partent du Point A, & qui tombent sur la Circonference convexe du Cercle BCD, la plus petite de toutes est la Ligne AB; qui étant prolongée passe par le Centre K. Pour le prouver,

Menez

Menez du Centre K les Lignes droites KC, KD, KE. Cela posé :

Au Triangle AKC le Côté AK est moindre que les deux Côtez KC, AC, par la 20. du 1. Donc si de ces deux Touts inégaux on ôte des parties égales, à sçavoir KB & KC : le reste AB sera plus petit que le reste AC. On prouvera de même, que la Ligne AB est plus petite que AD, ou AE. Et partant elle est la plus petite de toutes.



Je dis en quatriéme lieu, qu'entre les Lignes AC, AD, AE, celle qui approche de plus prés de la Ligne AB, est plus petite qu'une autre plus éloignée. Pour le prouver,

Les Lignes AC, KC, sont menées des extremitez de la Ligne AK, qui est un des Côtez du Triangle AKD, & se rencontrent dans ce Triangle. Donc (par la 21. du 1.) les Lignes AC, KC, sont plus petites que les Lignes AD, KD. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte les parties égales KC, KD : le reste AC sera plus petit que le reste AD. On prouvera de même, que AD est plus petite que AE. Et ainsi de toutes ces Lignes, celle qui est la plus proche de la Line AB est plus petite qu'une autre plus éloignée.

Je dis enfin qu'on ne sçauroit mener du Point A de part & d'autre de la Ligne AB plus de deux Lignes droites égales entr'elles ; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisiéme égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Centre K la Ligne KL, qui fasse avec KA l'Angle AKL égal à l'Angle AKC ; & du Point L au Point A menez la Ligne droite LA. Cela posé :

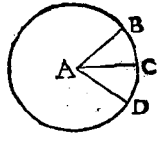
Les

Les deux Triangles AKL, AKC, ont les deux Côtez AK, KL, égaux aux deux Côtez AK, KC, chacun au sien ; & l'Angle AKL, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle AKC compris des deux autres Côtez, par la construction. Donc la Baze AL est égale à la Baze AC, par la 4. du 1. Ainsi voilà deux Lignes droites égales menées du Point A de part & d'autre de la Ligne AB. Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisiéme égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déja été prouvé. Car cette Ligne ou approchera plus prés de la Ligne AB, & ainsi elle sera plus petite : ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

THEOREME VIII.

Si ayant pris un Point dans un Cercle, l'on peut mener de ce Point à la Circonference du Cercle plus de deux Lignes droites égales entr'elles, ce Point-là est le Centre du Cercle.



JE suppose que dans le Cercle BCD l'on ait pris le Point A ; & qu'ayant mené de ce Point à la Circonference les trois Lignes droites AB, AC, AD, ces trois Lignes se trouvent égales. Cela étant, je dis que le Point A est le Centre de ce Cercle.

Car si cela n'étoit, il s'ensuivroit que d'un Point pris

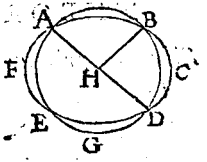
pris dans un Cercle, lequel Point ne seroit pas le Centre, on pourroit mener à la Circonference plus de deux Lignes droites égales entr'elles ; ce qui est impossible par la 7. Prop. Par consequent le Point A est le Centre de ce Cercle ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

THEOREME IX.

Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils ne se couperont pas en plus de deux Points.

JE suppose que les deux Cercles ABDGE & ABCDEF se coupent l'un l'autre. Cela étant, je dis qu'ils ne se coupent pas en plus de deux Points. Pour le prouver,



Supposons, s'il est possible, qu'ils se coupent l'un l'autre aux trois Points A, B, D. Cela posé :

Trouvez (par la premiere Proposition) le Centre du Cercle ABDGE, & que le Centre soit H ; puis de ce Centre menez à ces trois Points A, B, D, les Lignes droites HA, HB, HD. Cela posé :

Puisque le Point H est le Centre du Cercle ABDGE, les Lignes HA, HB, HD, qui partent de ce Centre, & se vont terminer à sa Circonference, sont égales entr'elles. Et puisque ces trois mêmes Lignes partent aussi d'un Point pris dans le

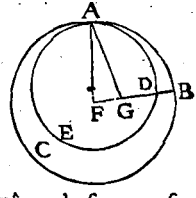
Cercle

Cercle ABCDEF, & qu'elles vont se terminer à sa Circonférence, le Point H est aussi le Centre du Cercle ABCDEF. Et ainsi il s'ensuivroit que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, auroient un même Centre; ce qui est impossible, par la 5. Prop. Il est donc impossible que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, se puissent couper en plus de deux Points; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

THEOREME X.

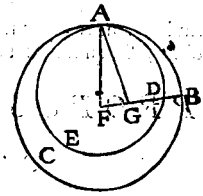
Si un Cercle en touche un autre en dedans, la Ligne droite menée par leurs Centres étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement.



JE suppose que le Cercle ADE touche le Cercle ABC en dedans au Point A. Cela étant, je dis que si on méne par leurs Centres une Ligne droite, cette Ligne étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement; ou, ce qui est la même chose, que si on méne du Point F, Centre du Cercle ABC, au Point A, qui est le Point de leur attouchement, la Ligne droite FA: le Centre du Cercle ADE se rencontrera dans cette Ligne.

Car si cela n'étoit, le Centre du Cercle ADE seroit en quelque Point hors de la Ligne FA. Qu'il soit donc au Point G, s'il est possible. En ce cas,

si l'on méne par le Point F, & par le Point G, la Ligne droite FGDB, elle coupera la Circonference des deux Cercles ailleurs qu'au Point de leur attouchement. Puis menant du Point G au Point A la Ligne droite GA, cette Ligne avec les deux autres FG, FA, composera le Triangle FGA, dont les deux Côtez FG, GA, seront plus grands que le troisiéme FA, par la 20. du 1. Ils seront donc aussi plus grands que son égale FB. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie commune FG, le reste GA sera plus grand que le reste GB. Mais puisque le Point G est le Centre du Cercle ADE, la Ligne GD est égale à GA. Et ainsi la Ligne GD sera aussi plus grande que la Ligne GB, c'est à dire la partie que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle ADE soit hors de la Ligne FA; Ce qu'il falloit démontrer.

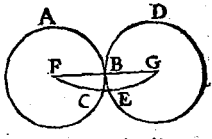


PRO-

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre par dehors, la Ligne droite menée d'un Centre à l'autre passera par le Point de leur attouchement.



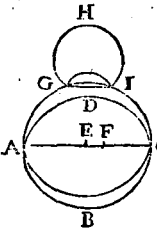
JE suppose que les Cercles ABC, DBE, se touchent l'un l'autre par dehors au Point B, & que du Centre de l'un au Centre de l'autre on ait mené la Ligne droite FG. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Point de leur attouchement.

Car si cela n'étoit, elle passeroit par ailleurs. Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les Points C & E, & qu'ainsi la Ligne FCEG soit une Ligne droite. Cela étant, les deux Lignes BF, BG, ne concourront pas directement, & ainsi feront un Angle au Point B, & avec la troisiéme FCEG feront un Triangle, dont les deux Côtez BF, BG, seront ensemble plus grands que le troisiéme FCEG, par la 20. du 1. Mais les Lignes FC, GE, sont égales à BF, BG, par la definition du Cercle. Donc ces mêmes Lignes FC, GE, seroient aussi plus grandes que la Ligne entiere FCEG, c'est à dire la partie que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne qui est menée par les Centres F & G, passe par un autre Point que B; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

Si un Cercle en touche un autre, soit en dedans, soit en dehors, il ne le touchera pas à plus d'un Point.



JE suppose premierement que le Cercle ADC touche le Cercle ABC en dedans. Cela étant, je dis qu'il ne le touche pas à plus d'un Point.

Car si cela étoit, posons, s'il est possible, qu'il le touche aux deux Points A, & C. Si cela est: puisque (par la 6. Prop.) deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, n'ont pas un même Centre, les deux Cercles ABC, ADC, auront chacun leur Centre particulier, par exemple E & F. Et puisque (par la 11. Prop.) la Ligne menée par les Centres de deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, étant prolongée, passe par le Point de leur attouchement, il s'ensuivra que la Ligne EF étant prolongée de part & d'autre, passera par les Points A & C. Ensuite dequoy, puisque le Point E est le Centre du Cercle ABC, la Ligne EA, & la Ligne EC, sont égales. Mais la Ligne FA est plus grande que EA, qui n'est que sa partie. Donc elle est aussi plus grande que la Ligne EC, & à plus forte raison que la Ligne FC. D'ailleurs, puisque le Point F est le Centre du Cercle ADC, la Ligne FA, & la Ligne FC, sont aussi égales. Si bien

bien que les deux Lignes FA, FC, ſont enſemble égales, & inégales; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible qu'un Cercle qui en touche un autre en dedans, le touche à plus d'un Point.

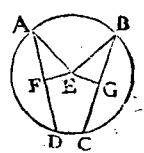
Je ſuppoſe en ſecond lieu que le Cercle GHI touche le Cercle ABC par dehors. Cela étant, je dis qu'il ne le ſçauroit toucher à plus d'un Point.

Car par exemple, s'il le pouvoit toucher aux deux Points G & I : puiſque ces deux Points ſeroient dans la Circonference de ces deux Cercles; en menant du Point G au Point I la Ligne droite GI, elle devroit (par la 2. Prop.) tomber dans l'un & dans l'autre de ces deux Cercles; ce qui eſt impoſſible, puiſque l'un eſt ſuppoſé hors de l'autre. Il eſt donc impoſſible que le Cercle GHI touche le Cercle ABC à plus d'un Point; Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIII.

Dans un Cercle, les Lignes droites égales ſont également diſtantes du Centre; Et celles qui ſont également diſtantes du Centre ſont égales entr'elles.



JE ſuppoſe que dans le Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, ſont égales entr'elles. Cela étant, je dis que ces deux Lignes ſont également diſtantes du Centre E. C'eſt à dire, que ſi du Centre E l'on abaiſſe ſur ces Lignes les Perpendiculaires EF, EG, par la

12. du 1. ces Perpendiculaires ſont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela poſé :

Puiſque les Lignes EF, EG, partent du Centre E, & qu'elles tombent perpendiculairement ſur AD & ſur BC, il s'enſuit qu'elles les coupent en deux également, par la 3. Prop. & partant AF eſt la moitié de AD, & BG la moitié de BC : d'où il ſuit que les deux Lignes AF, & BG, ſont égales, par le 7. Ax. du 1. D'ailleurs, puiſque le Triangle AFE eſt Rectangle, les deux Quarrez de AF & de FE ſont égaux au Quarré de AE, ou de ſon égale EB, par la 47. du 1. Mais puiſque le Triangle EGB eſt auſſi Rectangle, les deux Quarrez de BG & de EG ſont auſſi égaux au Quarré de EB. Et partant les deux Quarrez de AF & de FE ſont égaux aux deux Quarrez de BG & de EG. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de AF & de BG, qui ſont égaux, puiſque les deux Lignes dont ils ſont les Quarrez ſont égales, des reſtes, à ſçavoir le Quarré de EF & le Quarré de EG, ſeront égaux entr'eux. D'où il ſuit que les deux Lignes EF, EG, ſont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que dans le même Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, ſont également diſtantes du Centre E ; c'eſt à dire que les Perpendiculaires EF, EG, qu'on a abaiſſées du Centre E ſur ces deux Lignes, ſont égales. Cela étant, je dis que ces deux Lignes AD, BC, ſont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela poſé :

Puiſque le Triangle AEF eſt Rectangle, les deux Quarrez de EF & de FA ſont égaux au Quarré de EA,

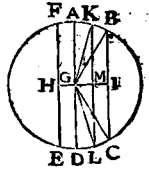
EA, ou de ſon égale EB. Mais les deux Quarrez de EG & de GB ſont auſſi égaux au Quarré de EB. Donc les deux Quarrez de EF & de FA ſont égaux aux deux Quarrez de EG & de GB. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de EF & de EG, qui ſont égaux, puiſque les deux Lignes dont ils ſont les Quarrez ſont ſuppoſées égales, les reſtes, à ſçavoir le Quarré de FA & le Quarré de GB, ſeront égaux entr'eux. D'où il ſuit que les deux Lignes FA, GB, ſont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1. Mais (par la 3. Prop.) les Lignes AD & BC ſont doubles de FA & de GB. Donc ces deux Lignes AD & BC ſont égales entr'elles; Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XIV.

Si on méne pluſieurs Lignes droites dans un Cercle, la plus grande de toutes eſt le Diametre, & celle qui approche le plus prés du Centre eſt plus grande que celle qui en eſt plus éloignée.

JE ſuppoſe que dans le Cercle ABCD on ait mené pluſieurs Lignes droites, comme AD, BC, FE; que AD ſoit le Diametre, & que FE ſoit plus prés du Centre G que n'eſt la Ligne BC. Cela étant, je dis premierement que AD eſt la plus grande de toutes. Pour le prouver,



Abaiſſez du Centre G ſur FE & ſur BC les Perpendiculaires GH, GI. Cela poſé:

Puiſque BC eſt ſuppoſée plus éloignée du Centre G que n'eſt pas FE, la Ligne GI eſt plus grande que GH, par la 6. Definition. Retranchez donc de GI la partie GM, égale à GH, & menez par le Point M la Ligne droite KML, perpendiculaire à GI. Enfin tirez les Lignes droites GK, GB, GL, GC. Cela poſé:

Au Triangle KGL, les deux Côtez KG, GL, ſont plus grands que le troiſiéme KL, par la 20. du 1. Or KG & GL ſont égaux à GA & à GD, ou au Diametre AD. Donc le Diametre AD eſt plus grand que la Ligne KL. Mais, par la Prop. precedente, KL eſt égale à FE, puiſqu'elle eſt autant éloignée du Centre G que la Ligne FE. Partant le Diametre AD eſt plus grand que la Ligne FE. On prouvera de même, que AD eſt plus grand que BC. Et ainſi le Diametre du Cercle eſt la plus grande de toutes les Lignes qu'on peut mener dans un Cercle.

Je dis en ſecond lieu, que la Ligne FE, ou ſon égale KL, qui eſt plus prés du Centre G que n'eſt pas BC, eſt plus grande que BC. Pour le prouver,

Aux deux Triangles KGL, & BGC, les deux Côtez KG, GL, ſont égaux aux deux Côtez BG, GC, chacun au ſien. Mais l'Angle KGL eſt plus grand que l'Angle BGC, qui n'eſt que ſa partie. Donc (par la 24. du 1.) la Baze KL eſt plus grande que la Baze BC; Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

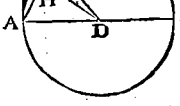
PROPOSITION XVI.

THEOREME XV.

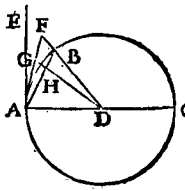
Si on élève une Perpendiculaire à l'extremité du Diametre d'un Cercle, elle touchera le Cercle ſans le couper. Et de l'extremité du Diametre on ne pourra pas mener une Ligne droite qui ſoit entre la Perpendiculaire & la Circonference. Deplus, l'Angle mixte, compris de la Circonference & du Diametre, eſt plus grand que tout Angle rectiligne aigu; & l'Angle mixte, compris de la Circonference & de la Perpendiculaire, eſt plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

JE ſuppoſe qu'à l'extremité A du Diametre AC du Cercle ABC, on a élevé la perpendiculaire AE. Cela étant, je dis premierement que cette Perpendiculaire touche le Cercle ſans le couper.

Car ſi cette Perpendiculaire coupoit le Cercle, comme fait ici la Ligne AB: en menant du Centre D au Point où cette Perpendiculaire couperoit le Cercle, par exemple au Point B, la Ligne droite DB; les Angles DAB, DBA, ſeroient égaux, par la 5. du 1. Mais l'Angle DAB eſt droit,



droit, par la construction. Par conſequent l'Angle DBA ſeroit auſſi droit; ce qui eſt impoſſible, par la 17. du 1. Il eſt donc impoſſible qu'une Ligne droite élevée perpendiculairement à l'extremité du Diametre d'un Cercle, coupe ce Cercle. Et par conſequent il eſt vrai qu'elle le touche ſans le couper; & ainſi qu'elle eſt hors le Cercle.



Je dis en ſecond lieu, que de l'extremité A on ne peut pas mener une Ligne droite qui ſoit entre la Perpendiculaire AE & la Circonference AB.

Car ſi l'on prétendoit qu'on en pût mener une, par exemple AF: comme cette Ligne ne ſeroit pas perpendiculaire au Diametre AC, ce Diametre ne lui ſeroit pas non plus perpendiculaire. Donc en tirant du Centre D une Ligne perpendiculaire à AF, cette Ligne tombera en quelque Point de la Ligne AF, par exemple au Point G; & ce Point ſera different du Point A, & par conſequent hors le Cercle. D'où il s'enſuivra que la Ligne DG, qui paſſera au delà de la Circonference, ſera plus grande que DA. Si bien que dans le Triangle DAG, l'Angle DAG, qui eſt ſoûtenu du Côté DG, ſera plus grand que l'Angle DGA, qui eſt ſoûtenu du Côté DA, qui eſt plus petit. Or l'Angle DGA eſt droit, par la conſtruction. Donc l'Angle DAG ſera plus grand qu'un droit. Et ainſi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui eſt impoſſible, par la 17. du 1. Il eſt donc impoſſible de pouvoir mener du Point A une Ligne droite qui ſe trouve entre la Perpendiculaire AE & la Circonference AB.

Je dis en troiſiéme lieu, que l'Angle BAD, compris de la Circonference AB & du Diametre AD, eſt plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

Car

Car si on méne du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus prés qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus grand Angle rectiligne aigu qu'il est possible: il s'ensuivra, par ce qui vient d'être prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec le Diametre AC un Angle plus petit que l'Angle mixte BAD; lequel par consequent est plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

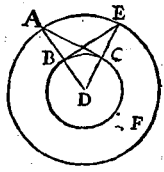
Je dis enfin, que l'Angle de contingence BAE, compris de la Circonference du Cercle & de la Perpendiculaire AE, est plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

Car si on méne du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus prés qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus petit Angle rectiligne aigu qu'il est possible: il s'ensuivra de même, par ce qui a été déja prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec la Ligne AE un Angle plus grand que l'Angle de contingence BAE; lequel par consequent est plus petit que tout Angle rectiligne aigu; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME II.

D'un Point donné hors d'un Cercle, mener une Ligne droite qui touche le Cercle.



JE suppose qu'on donne le Point A, hors le Cercle BC; & je propose de mener du Point A une Ligne droite qui touche le Cercle BC. Pour le faire,

Du Point A au Centre D menez la Ligne droite AD; & du Centre D, & de l'intervalle DA, décrivez le Cercle AEF. Puis du Point B, où la Ligne droite AD coupe le Cercle BC, élevez la Ligne droite BE perpendiculaire à AD. De même, du Point E, où la Ligne BE coupe le Cercle AEF, au Centre D, menez la Ligne droite ED. Enfin du Point A au Point C, où la Ligne DE coupe la Circonference du Cercle BC, menez la Ligne droite AC. Cela étant, je dis que la Ligne AC, qui part du Point donné A, touche le Cercle BC. Pour le prouver,

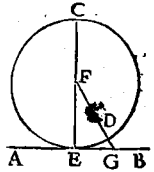
Les Triangles ADC, EDB, ont les deux Côtez AD, DC, égaux aux deux Côtez ED, DB, chacun au sien; & l'Angle D, compris de ces Côtez égaux, est commun. Donc (par la 4. du 1.) la Baze est égale à la Baze, & l'Angle ACD est égal à l'Angle EBD. Or l'Angle EBD est droit, par la construction. Donc l'Angle ACD est aussi droit. Et partant (par la Proposition précedente) la Ligne AC, qui est élevée perpendiculairement à l'extremité

tremité du Diametre DC, touche le Cercle BC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Centre à l'attouchement on méne une autre Ligne droite, cette Ligne sera perpendiculaire à la Touchante.



JE suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle EDC au Point E, & que du Centre F on méne au Point de l'attouchement E la Ligne droite FE. Cela étant, je dis que la Ligne FE est perpendiculaire à la Touchante AB.

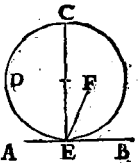
Car si FE n'étoit pas perpendiculaire à AB, on pourroit (par la 12. du 1.) du Point F abaisser sur AB une Perpendiculaire, comme FG; laquelle allant rencontrer la Ligne AB en un autre Point que celui de l'attouchement, passera au delà de la Circonference du Cercle, & par consequent sera plus grande que FD, qui est bornée à cette Circonference, ou que son égale FE. Si bien que dans le Triangle FEG, l'Angle FEG, qui est soûtenu du Côté FG, sera plus grand que l'Angle FGE, qui est soûtenu du Côté FE, qui est plus petit. Or l'Angle FGE est droit, par cette fausse construction. Donc l'Angle FEG sera plus grand qu'un droit. Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui est impossible,

par la 17. du 1. Il est donc impossible que la Ligne FE ne soit pas perpendiculaire à AB ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XVII.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on éléve une Perpendiculaire, elle passera par le Centre.



JE suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle CDE, au Point E ; & que de ce Point on éléve la Ligne droite EC perpendiculaire à AB. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Centre ; ou ce qui est la même chose, que le Centre du Cercle se rencontre dans la Ligne EC.

Car si cela n'étoit, le Centre de ce Cercle seroit en quelque Point hors de cette Ligne, par exemple, au Point F. Tirant donc de ce Point à celui de l'attouchement, la Ligne droite FE : cette Ligne, par la Proposition precedente, sera perpendiculaire à AB. Et partant l'Angle AEF sera droit. Mais l'Angle AEC est déja droit, par supposition. Ainsi l'Angle AEF seroit égal à l'Angle AEC, c'est à dire le Tout à sa partie ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle CDE soit hors de la Ligne EC, laquelle par consequent passe par le Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.

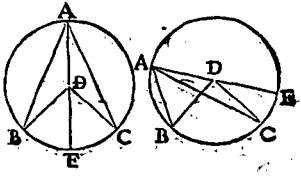
PRO-

PROPOSITION XX.

THEOREME XVIII.

Au Cercle, l'Angle du Centre est double de l'Angle de la Circonference, quand ils s'appuyent tous-deux sur un même Arc, où qu'ils ont une même portion de Circonference pour Baze.

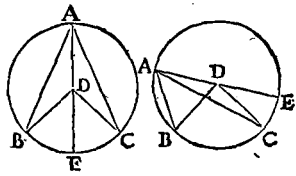
JE suppose que dans le Cercle ABC, l'Angle BDC, qui est au Centre D, & l'Angle BAC, qui est à la Circonference, s'appuyent tous-deux sur un même Arc, & ont la même portion de Circonference pour Baze, à sçavoir BC. Cela étant, je dis que l'Angle BDC est double de l'Angle BAC. Pour le prouver,



Menez par les Points A & D la Ligne droite ADE. Cela posé:

Au Triangle ADB les deux Côtez DA, DB, sont égaux, par la definition du Cercle. Donc (par la 5. du 1.) les deux Angles DAB & DBA sont égaux entr'eux. Or l'Angle exterieur BDE est égal aux deux Angles DAB & DBA, par la 32. du 1. Donc l'Angle BDE est double de l'Angle BAD. De même, au Triangle ADC les deux Côtez DA, DC, sont égaux; par consequent les deux Angles DAC & DCA sont aussi égaux. Or l'Angle EDC est aussi égal

égal aux deux Angles DAC & DCA ; donc il eſt double de l'Angle DAC. Si donc à l'Angle BDE on ajoûte l'Angle EDC, & à l'Angle BAD on ajoûte l'Angle DAC ; l'Angle BDC ſera double de l'Angle BAC, par le 19. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.



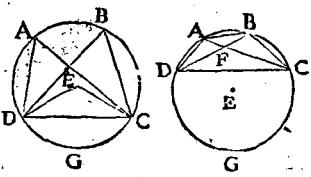
Que ſi le Point A avoit été pris comme dans cette ſeconde Figure, on auroit prouvé de même, que l'Angle BDE eſt double de l'Angle BAD, & que l'Angle CDE eſt double de l'Angle CAD. Enſuite de quoi, ôtant l'Angle CAD de l'Angle BAD, & l'Angle CDE de l'Angle BDE ; l'Angle reſtant BDC ſera double de l'Angle reſtant BAC, par le 20. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIX.

Au Cercle, les Angles qui ſont dans un même Segment, ou qui s'appuyent ſur un même Arc, ſont égaux entr'eux.

JE ſuppoſe que dans le Cercle ABCD les deux Angles DAC, DBC, ſoient dans le même Seg-



ment

ment DABC, ou, (ce qui est la même chose) qu'ils s'appuyent tous-deux sur le même Arc DGC. Cela étant, je dis que ces deux Angles DAC, DBC, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Comme tout Segment de Cercle est plus ou moins grand qu'un demi-Cercle; supposons premierement que le Segment DABC soit plus grand que le Demi-cercle. Cela supposé, menez du Centre E aux extremitez D & C de la Baze du Segment, les Lignes droites ED, EC. Cela posé:

L'Angle DEC, qui est au Centre, est double de l'Angle DAC, qui est à la Circonference, par la Prop. precedente; & par la même raison il est aussi double de l'Angle DBC. Et partant les deux Angles DAC & DBC, qui sont chacun moitié d'un même Angle, sont égaux entr'eux.

Supposons en second lieu, que le Segment DABC soit plus petit que le demi-Cercle. Cela supposé, du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela posé:

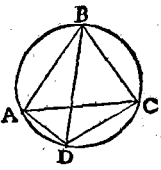
Puisque le Segment DABC est plus petit que le demi-Cercle, il s'ensuit que le Segment DGC est plus grand que le demi-Cercle, & à plus forte raison le Segment AGB. D'où il suit que les Angles ADB, ACB, qui sont dans le Segment AGB, sont égaux entr'eux, par ce qui vient d'être prouvé. D'ailleurs, les Angles AFD, BFC, sont aussi égaux entr'eux, par la 15. du 1. Par consequent les deux Triangles AFD, BFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien. Et partant le troisiéme DAF, ou DAC, est égal au troisiéme FBC, ou DBC, par le 2. Corollaire de la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXII.

THEOREME XX.

Les Figures de quatre Côtez inscrites au Cercle, ont les Angles opposez égaux à deux droits.



JE suppose que la Figure ABCD soit inscrite dans le Cerle ABCD. Cela étant, je dis que les Angles opposez, comme BAD & BCD, sont égaux à deux droits. Pour le prouver,

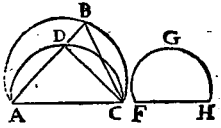
Menez les deux Lignes droites AC & BD. Cela posé:

L'Angle BAC & l'Angle BDC s'appuyent sur le même Arc BC; donc ils sont égaux, par la Proposition precedente. L'Angle CAD & l'Angle CBD s'appuyent aussi sur un même Arc, à sçavoir DC; donc ils sont aussi égaux. Partant les deux Angles BAC & CAD, qui font l'Angle total BAD, sont égaux aux deux Angles DBC & BDC. Mais ces deux-ci pris avec le troisiéme BCD, valent deux droits, par la 32. du 1. Donc l'Angle BAD, pris avec le même Angle BCD, valent aussi deux droits. On prouvera, par la même raison, que les deux Angles ABC & ADC sont égaux à deux droits; Qui est ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXI.

Si deux portions de Cercles ſont ſemblables & inégales, leurs Bazes ne ſeront pas égales.



JE ſuppoſe que les deux portions de Cercles ABC, FGH, ſoient ſemblables & inégales. Cela étant, je dis que leurs Bazes AC, FH, ne ſont pas égales.

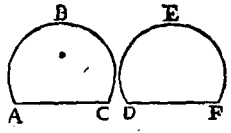
Car ſi ces Bazes étoient égales: en tranſportant par penſée le Segment ou portion de Cercle FGH ſur le Segment ABC, on pourroit faire convenir la Baze FH avec la Baze AC. Et d'autant que le Segment FGH eſt ſuppoſé inégal au Segment ABC, l'Arc FGH ne conviendroit pas avec l'Arc ABC. C'eſt pourquoi l'Arc FGH tomberoit en quelqu'autre endroit, comme par exemple à l'endroit ADC. Tirant donc la Ligne droite ADB, qui coupe ces Arcs aux Points D & B, & menant les Lignes droites CB, CD; il s'enſuivra que puiſque les Segmens ADC, ABC, ſont ſuppoſez ſemblables, les Angles ADC, ABC, qui ſont dans ces Segmens, ſeront égaux entr'eux, par la definition des Segmens ſemblables. Et ainſi l'Angle ADC, qui eſt exterieur au reſpect du Triangle DBC, ſeroit égal à ſon oppoſé interieur DBC; ce qui eſt impoſſible, par la 16. du 1. Donc ſi deux portions de Cercles ſont ſemblables & inégales, leurs Bazes ne ſeront pas égales; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXII.

Si deux Segmens, ou deux portions de Cercles, ſemblables, ont pour Bazes des Lignes droites égales, ils ſeront égaux entr'eux.



JE ſuppoſe que les deux Segmens ABC, DEF, ſoient ſemblables, & que leurs Bazes AC, DF, ſoient égales. Cela étant, je dis que ces deux Segmens ſont égaux entr'eux.

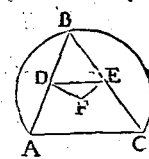
Car s'ils étoient inégaux, il s'enſuivroit que deux Segmens ſemblables & inégaux auroient des Bazes égales; ce qui eſt impoſſible, par la Prop. precedente. Donc ces deux Segmens ſont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXV.

PROBLEME III.

Une portion de Cercle étant donnée, décrire le Cercle duquel elle eſt portion.



JE ſuppoſe que la portion de Cercle ABC ſoit donnée, & je propoſe de décrire le Cercle entier duquel elle eſt portion; c'eſt à dire que je propoſe de trouver le Centre du Cercle, duquel la portion ABC eſt donnée. Pour le faire,

Prenez à diſcretion dans la Circonference ABC trois Points, par exemple A, B, C. Menez les deux Lignes droites AB, BC. Coupez chacune de ces Lignes en deux également aux Points D & E. De chacun de ces Points élevez une Perpendiculaire, ſçavoir DF, EF. Cela étant, je dis que ces deux Perpendiculaires ſe rencontreront; & que le Point de leur rencontre, à ſçavoir F, eſt le Centre du Cercle dont ABC eſt une portion. Pour le prouver,

Du Point D au Point E menez la Ligne droite DE. Cela poſé:

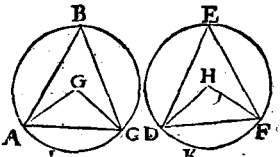
Puiſque les Angles BDF & BEF ſont droits, par la conſtruction, les Angles EDF & DEF, qui n'en ſont que les parties, ſont moindres que deux droits. Et partant les deux Lignes DF, EF, ſe doivent rencontrer, par la Remarque de la 28. du 1. Enſuite de quoi, il s'enſuit, par la 1. Remarque de la premiere Prop. de ce Livre, que le Point F eſt le Centre cherché; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles égaux, les Angles égaux s'appuyent sur Circonferences égales; soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonference.



JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez au Centre, ou les Angles ABC, DEF, qui sont constituez à la Circonference, soient aussi égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Arcs AIC, DKF, sur lesquels ces Angles s'appuyent, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites AC, DF. Cela posé:

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux, il s'ensuit que les Côtez AG, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez DH, HF, du Triangle DHF. Deplus, l'Angle AGC est supposé égal à l'Angle DHF. Partant la Baze AC est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ainsi nous avons deux Segmens de Cercles ABC, DEF, qui sont semblables, puis qu'ils sont supposez capables d'Angles égaux; & qui d'ailleurs ont pour Bazes des Lignes droites égales, sçavoir AC, DF. Et partant ces deux Segmens sont égaux, par la 24. Prop. D'où il suit, que si on les ôte des deux Cercles

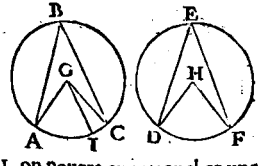
Cercles entiers, qui ſont ſuppoſez égaux, les Arcs reſtans AIC, DKF, ſeront égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXIV.

Aux Cercles égaux, les Angles qui s'appuyent ſur Circonferences égales ſont égaux entr'eux, ſoit qu'ils ſoient conſtituez au Centre, ou à la Circonference.

JE ſuppoſe que les Cercles ABC, DEF, ſoient égaux, & que les Arcs AC, DF ſoient auſſi égaux. Cela étant, je dis premierement que les Angles AGC, DHF, qui ſont conſtituez aux Centres G & H, & qui s'appuyent ſur ces deux Arcs, ſont égaux entr'eux.

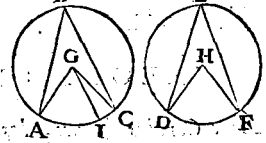


Car s'ils n'étoient pas égaux, il faudroit que l'un de ces Angles fût plus grand que l'autre. Poſons donc que ce ſoit l'Angle AGC Si cela eſt, par la 24. du 1. on pourra en retrancher une partie, comme AGI, égale à DHF. Enſuite de quoi, par la Prop. precedente, l'Arc AI ſera égal à l'Arc DF. Mais l'Arc AC eſt déja ſuppoſé égal à l'Arc DF. Ainſi l'Arc AI & l'Arc AC ſeroient égaux entr'eux, c'eſt à dire la partie au Tout ; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que l'Angle AGC ſoit plus grand que l'Angle DHF. On prouvera de même, que l'Angle DHF n'eſt pas plus grand que l'Angle

AGC ;

AGC ; & partant ces deux Angles sont égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les Angles ABC, DEF, qui sont à la Circonference, & qui s'appuyent sur ces mêmes Arcs, sont égaux entr'eux.



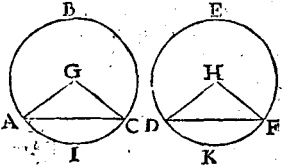
Car (par la 20. Prop.) ces deux Angles ABC, DEF, sont moitié des Angles AGC, DHF, qui viennent d'être prouvez égaux. Et partant les deux Angles ABC, DEF, sont égaux entr'eux, par le 7. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXV.

Aux Cercles égaux, les Lignes droites égales soûtiennent Circonferences égales.

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Lignes AC, DF, qui sont les Soûtendantes des Arcs AIC & DKF, soient égales. Cela étant, je dis que les Arcs AIC & DKF sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC ; HD, HF. Cela posé :

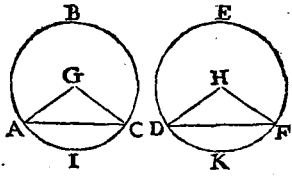
Les

Les Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux Côtez HD, HF, du Triangle DHF, par la definition des Cercles égaux. Deplus, la Baze AC est égale à la Baze DF, par supposition. Donc l'Angle AGC est égal à l'Angle DHF, par la 8. du 1. D'où il suit (par la 26. Prop.) que les Arcs AIC & DKF, sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXVI.

Aux Cercles égaux, les Circonferences égales ont leurs Soûtendantes égales.



JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Circonferences ou les Arcs AIC, DKF, soient aussi égales. Cela étant, je dis que les Lignes AC & DF, qui en sont les Soûtendantes, sont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC; HD, HF. Cela posé:

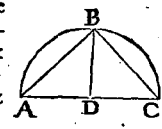
Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux: les deux Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez HD, HF, du Triangle DHF. D'ailleurs l'Angle AGC, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle DHF, compris des deux Côtez du second; puisque les Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont

égaux par ſuppoſition. Et partant la Baze AC eſt égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Arc de Cercle donné.



JE ſuppoſe que l'Arc de Cercle ABC, ſoit donné; & je propoſe de le couper en deux parties égales. Pour le faire,

Du Point A au Point C menez la Ligne droite AC; coupez cette Ligne en deux également au Point D; élevez au Point D la Perpendiculaire DB, qui rencontre l'Arc au Point B. Cela étant, je dis que cét Arc eſt coupé en deux également; c'eſt à dire que l'Arc AB eſt égal à l'Arc BC. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites AB, BC. Cela poſé:

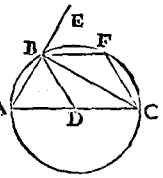
Le Côté AD, du Triangle ABD, eſt égal au Côté DC, du Triangle CDB, par la conſtruction. Le Côté BD eſt commun à ces deux Triangles. Deplus, l Angle ADB eſt égal à l'Angle CDB, par la conſtruction. Donc la Baze AB eſt égale à la Baze BC, par la 4. du 1. Et par conſequent les Arcs AB, BC, que ces deux Bazes ſoûtiennent, ſont égaux entr'eux, par la 28. Prop. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXVII.

Au Cercle, l'Angle qui eſt au demi-Cercle eſt droit; celui qui eſt au plus grand Segment eſt plus petit qu'un droit; & celui qui eſt au plus petit Segment eſt plus grand qu'un droit. De plus, l'Angle du plus grand Segment eſt plus grand qu'un droit; & l'Angle du plus petit Segment eſt plus petit qu'un droit.



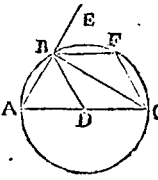
JE ſuppoſe qu'au Cercle ABC, D ſoit le Centre, & ADC le Diametre, & qu'ayant pris dans la Circonference le Point B à diſcretion, on ait mené de ce Point aux extremitez du Diametre les deux Lignes droites BA, BC, qui font l'Angle au demi-Cercle ABC. Cela étant, je dis premierement que l'Angle ABC eſt droit. Pour le prouver,

Menez du Point D au Point B la Ligne droite DB, & continuez la Ligne AB vers E. Cela poſé:

Au Triangle ABD, les Côtez DA, DB, ſont égaux, par la definition du Cercle. Donc l'Angle ABD eſt égal à l'Angle BAD, par la 5. du 1. De même, au Triangle DBC, les Côtez DB, DC, étant égaux, l'Angle DBC eſt égal à l'Angle BCD. Et ainſi l'Angle total ABC eſt égal aux deux An-

gles BAD, BCD. D'ailleurs, l'Angle exterieur EBC eſt égal à ces deux mêmes Angles BAC, BCD, par la 32. du 1. Partant l'Angle ABC & l'Angle EBC ſont égaux entr'eux. Et par conſequent la Ligne BC eſt perpendiculaire à AE, & l'Angle ABC eſt droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que l'Angle BAC, qui eſt au plus grand Segment CAB, eſt plus petit qu'un droit. Pour le prouver,



Au Triangle ABC, les deux Angles ABC & BAC ſont plus petits que deux droits, par la 17. du 1. Or il vient d'être prouvé que l'Angle ABC eſt droit. Donc l'Angle BAC eſt moindre qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en troiſiéme lieu, que l'Angle BFC, qui eſt au plus petit Segment CFB, eſt plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez ABFC eſt inſcrite au Cercle; & ainſi les deux Angles oppoſez BAC & BFC ſont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais il vient d'être prouvé que l'Angle BAC eſt moindre qu'un droit. Donc l'Angle BFC eſt plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en quatriéme lieu, que l'Angle du plus grand Segment, c'eſt à dire l'Angle mixte CBA, qui eſt compris de la Ligne droite BC, & de la Circonference BA, eſt plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

L'Angle mixte CBA eſt plus grand que l'Angle rectiligne ABC, qui n'eſt que ſa partie. Or l'Angle ABC eſt droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBA eſt plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je

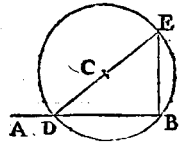
Je dis enfin que l'Angle du plus petit Segment, c'eſt à dire l'Angle mixte CBF, qui eſt compris de la Ligne droite CB, & de la Circonference BF, eſt plus petit qu'un droit. Pour le prouver,

L'Angle mixte CBF eſt plus petit que l'Angle rectiligne CBE, dont il n'eſt que partie. Or l'Angle CBE eſt droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBF eſt plus petit qu'un droit; Ce qui reſtoit à démontrer.

REMARQUE.

Cette Propoſition nous donne un moyen facile pour élever une Perpendiculaire à l'extremité d'une Ligne droite donnée.

Suppoſons que la Ligne droite donnée ſoit AB, & qu'à ſon extremité B il faille élever une Perpendiculaire. Pour le faire,

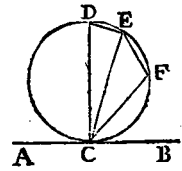


Prenez quelque Point, comme C, au deſſus de la Ligne AB. Puis du Point C, comme Centre, & de l'intervalle CB, décrivez le Cercle EBD. Ce Cercle coupera la Ligne AB en quelqu'autre Point, comme D. Par ce Point D & par le Centre C menez la Ligne droite DCE. Enfin du Point E au Point B menez la Ligne droite EB; & cette Ligne ſera perpendiculaire à AB. Car puiſque l'Angle B eſt au demi-Cercle, il eſt droit.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXVIII.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on méne une Ligne droite qui le coupe: l'Angle que fait de part & d'autre la Coupante avec la Touchante, eſt égal à l'Angle dont le Segment alterne eſt capable.



JE ſuppoſe que la Ligne AB touche le Cercle CDE au Point C, & que de ce Point on a méne la Ligne droite CE, qui coupe le Cercle en deux Segmens, ſçavoir CDE, & CFE. Cela étant, je dis premierement que l'Angle BCE, que la Coupante fait d'une part avec la Touchante, eſt égal à l'Angle dont le Segment alterne CDE eſt capable. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CD perpendiculaire à AB; & du Point D au Point E menez la Ligne droite DE, laquelle fera avec CD l'Angle CDE, dont le Segment CDE eſt capable. Si bien qu'il s'agit de montrer que l'Angle CDE eſt égal à l'Angle BCE. Pour le prouver,

Puiſque la Ligne AB touche le Cercle, & que CD a été élevée perpendiculairement au Point de l'attou-

l'attouchement, il s'enſuit (par la 19. Prop.) qu'elle paſſe par le Centre, & par conſequent qu'elle en eſt le Diametre, & que le Segment CFED eſt un demi-Cercle. D'où il ſuit que l'Angle CED, qui eſt au demi-Cercle, eſt droit, par la 31. Prop. Et d'autant que les trois Angles du Triangle CDE ſont égaux à deux droits, par la 32. du 1. il s'enſuit que les deux Angles CDE & DCE ſont égaux à un droit, c'eſt à dire à l'Angle BCD. Si donc de ces deux Touts, qui ſont égaux, on ôte l'Angle DCE, qui leur eſt commun, il reſtera l'Angle BCE égal à l'Angle CDE; Ce qu'il falloit démontrer.

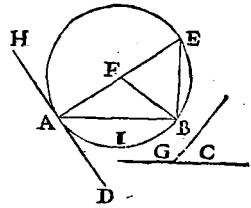
Je dis en ſecond lieu, que l'Angle ACE, que la Coupante CE fait avec la Touchante AB, eſt égal à l'Angle dont le Segment alterne CFE eſt capable; c'eſt à dire, que ſi dans l'Arc CFE on prend à diſcretion quelque Point, comme F, d'où l'on méne les Lignes droites FC, FE, l'Angle ACE ſera égal à l'Angle CFE. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez CDEF étant inſcrite au Cercle, les deux Angles oppoſez CDE, CFE, ſont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais les Angles ACE, BCE, ſont auſſi égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles CDE, CFE, ſont égaux aux deux Angles BCE, ACE. Si donc de ces deux Touts, qui ſont égaux, on ôte les Angles CDE & BCE, qui viennent d'être prouvez égaux, l'Angle reſtant CFE ſera égal à l'Angle reſtant ACE; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME V.

Sur une Ligne droite donnée, décrire une portion de Cercle capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée, & que l'Angle rectiligne C soit aussi donné ; & je propose de décrire sur AB une portion de Cercle capable d'un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,

Menez la Ligne droite HAD, qui fasse avec AB l'Angle BAD égal à l'Angle C. Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à HD. Puis tirez du Point B la Ligne droite BF, qui fasse avec AB l'Angle ABF égal à l'Angle FAB. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que la Circonference de ce Cercle passera par le Point B, & que le Segment AEB sera capable d'un Angle égal à l'Angle C ; c'est à dire, qu'ayant mené la Ligne BE, l'Angle AEB sera égal à l'Angle C. Pour le prouver,

Puisque les Angles FAB, FBA, sont égaux, par la construction : les deux Côtez FA, FB, qui les soûtiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. D'où il suit, que la Circonference du Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par le

le Point B. D'ailleurs, puiſque la Ligne AFE paſſe par le Centre F du Cercle AEB, il s'enſuit qu'elle en eſt le Diametre ; & puiſque la Ligne HAD lui eſt perpendiculaire, il s'enſuit que cette Ligne HAD touche ce Cercle, par la 16. Prop. Or la Ligne AB part du Point de l'attouchement, & coupe le même Cercle. Donc (par la Propoſition precedente) l'Angle BAD, qu'elle fait avec la Touchante, eſt égal à l'Angle AEB, dont le Segment alterne AEB eſt capable. Mais l'Angle BAD a été fait égal à l'Angle C. Donc l'Angle AEB eſt auſſi égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit démontrer.

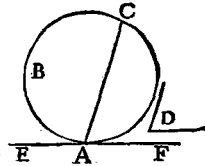
Si l'Angle donné eût été obtus, comme l'Angle G, il auroit toûjours fallu faire la même conſtruction que ci-deſſus. Mais au lieu de prendre la portion AEB, il auroit fallu prendre la portion AIB, comme étant celle qui eſt capable d'un Angle égal à l'Angle donné G.

Si l'Angle donné eût été droit, il n'auroit fallu que décrire un demi-Cercle ſur la Ligne donnée AB. Car le demi-Cercle eſt capable d'un Angle droit, par la 31. Prop. Ainſi dans tous les cas poſſibles, nous avons ſur une Ligne droite donnée décrit un Segment, ou une portion de Cercle, capable d'un Angle rectiligne donné ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME VI.

D'un Cercle donné, retrancher un Segment capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE suppose que le Cercle ABC soit donné, & que l'Angle rectiligne D soit aussi donné; & je propose de retrancher du Cercle ABC un Segment capable d'un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Menez la Ligne droite EAF, qui touche le Cercle au Point A. Puis (par la 23. du 1.) tirez du Point A dans le Cercle la Ligne droite AC, qui fasse avec AF l'Angle FAC égal à l'Angle D. Cela étant, je dis que le Segment ABC est capable d'un Angle égal à l'Angle rectiligne donné D. Pour le prouver,

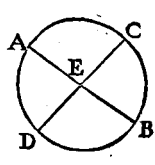
Par la 32. Prop. l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle FAC. Or, par la construction, l'Angle FAC est égal à l'Angle D. Partant l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

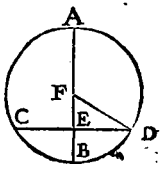
PRO-

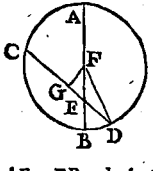
PROPOSITION XXXV.

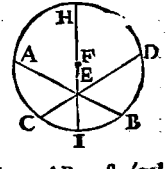
THEOREME XXIX.

Si dans un Cercle deux Lignes droites ſe coupent l'une l'autre; le Rectangle compris des deux parties de l'une, eſt égal au Rectangle compris des deux parties de l'autre.





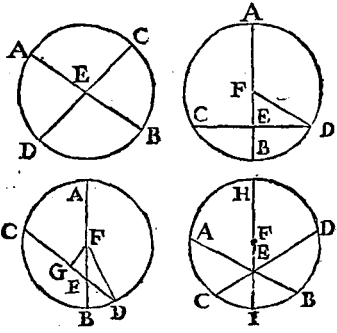




JE ſuppoſe que dans le Cercle ACBD les deux Lignes droites AB, CD, ſe coupent l'une l'autre au Point E. Cela étant, je dis que le Rectangle compris des deux parties AE, EB, de la Ligne AB, eſt égal au Rectangle compris des deux parties CE, ED, de la Ligne CD.

Cette Prop. peut avoir quatre cas. Car premierement il ſe peut faire que les deux Lignes qui s'entrecoupent paſſent par le Centre. Secondement il ſe peut faire qu'il n'y en ait qu'une qui y paſſe, & qu'elle coupe l'autre en deux parties égales. Troiſiéme-

fiément il se peut faire que celle qui passe par le Centre, coupe l'autre en deux parties inégales. En fin il se peut faire que ni l'une ni l'autre ne passe par le Centre.



Supposons donc 1. que les deux Lignes AB, CD, passent par le Centre. Cela posé: comme les deux parties AE, EB, sont égales aux deux parties CE, ED, par la definition du Cercle; il est évident que le Rectangle compris des deux premieres, est égal au Rectangle compris des deux autres.

Supposons en second lieu, que la Ligne AB passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui n'y passe point, en deux parties égales. Cela étant, je dis que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Menez du Centre F au Point D la Ligne droite FD. Cela posé:

Puisque la Ligne AB est coupée en deux également au Point F, & en deux inégalement au Point E, il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal au Quarré de FB, ou de son égale FD. Mais puisque FE, qui passe par le Centre, coupe CD en deux également, elle la coupe aussi perpendiculairement, par la 3. Proposition. Donc l'Angle FED est droit. Par conséquent (par la

47. du

47. du 1.) les deux Quarrez de FE & de ED sont égaux au Quarré de FD. Et ainsi le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal aux deux Quarrez de FE & de ED. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de FE, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AE, EB, égal au Quarré de ED. Mais puisque les Lignes CE, ED, sont égales, le Quarré de ED n'est autre chose que le Rectangle compris de CE, ED. Et partant le Rectangle compris de AE, EB, est égal au Rectangle compris de CE, ED.

Supposons en troisiéme lieu, que la Ligne AB passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui n'y passe point, en deux parties inégales. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Abaissez du Centre F la Ligne FG, perpendiculaire à CD; au moyen de quoi, la Ligne CD sera divisée en deux également, par la 3. Prop. Puis du Point F au Point D menez la Ligne droite FD. Cela posé:

Puisque AB est coupée en deux parties égales au Point F, & en deux inégales au Point E; il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal au Quarré de FB, ou de son égale FD. Mais (par la 47. du 1.) le Quarré de FE est égal aux deux Quarrez de FG & de GE. De même, le Quarré de FD est égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Si donc au lieu du Quarré de FE on prend les deux Quarrez de FG & de GE, & au lieu du Quarré de FD on prend les deux Quarrez de FG & de GD: il s'ensuivra que le Rectangle de AE, EB, avec les deux Quarrez de FG & de GE, sera égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Et partant, ôtant de ces deux Touts, qui sont égaux, le Quarré de FG, qui leur est commun; il restera le Rectangle compris de AE, EB,

avec le Quarré de GE, qui ſera égal au Quarré de GD. D'ailleurs, puiſque CD eſt coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point E; le Rectangle de CE, ED, avec le Quarre de GE, eſt égal au Quarré de GD, par la 5. Prop. du 2. Et ainſi le Rectangle de AE, EB, avec le Quarré de GE, eſt égal au Rectangle de CE, ED, avec le Quarré de GE. Otant donc le Quarré de GE, qui leur eſt commun, il s'enſuivra que le Rectangle de AE, EB, ſera égal au Rectangle de CE, ED.

Suppoſons enfin que ni l'un ni l'autre de ces deux Lignes AB, CD, ne paſſe par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, eſt égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

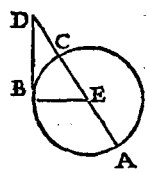
Menez par le Centre F & par le Point E la Ligne droite HFEI. Cela poſé:

De quelque façon que la Ligne HI coupe AB, il s'enſuit, par ce qui vient d'être démontré, que le Rectangle de AE, EB, eſt égal au Rectangle de HE, EI. De même auſſi, de quelque façon que HI coupe CD, il s'enſuit que le Rectangle de DE, EC, eſt égal au même Rectangle de HE, EI. Et ainſi le Rectangle de AE, EB, & le Rectangle de DE, EC, qui ſont égaux à un même Rectangle, ſont égaux entr'eux; Qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXX.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on tire deux Lignes droites, dont l'une le touche, & l'autre le coupe, & se va terminer à sa Circonference concave: le Rectangle compris de toute la Coupante & de sa partie hors du Cercle, sera égal au Quarré de la Touchante.



JE suppose qu'on ait pris à discretion le Point D, hors du Cercle ABC, & que de ce Point on ait tiré la Ligne droite DB, qui touche le Cercle au Point B, & la Ligne droite DA, qui le coupe, & va se terminer à sa Circonference concave. Cela étant, je dis que le Rectangle compris de AD, DC, est égal au Quarré de DB.

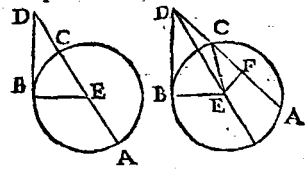
Cette Proposition peut avoir deux cas. Car ou la Ligne DA passe par le Centre, ou elle n'y passe point.

Supposons donc 1. qu'elle passe par le Centre. Cela supposé:

Menez

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB. Cette Ligne (par la 18. Prop.) sera perpendiculaire à la Touchante DB ; d'où il suit que l'Angle EBD sera droit. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux également au Point E, & que la Ligne CD lui est ajoûtée : il s'ensuit que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EC, ou de son égale EB, est égal au Quarré de ED, par la 6. Prop. du 2. Mais le Quarré de ED est egal aux deux Quarrez de EB & de DB, par la 47. du 1. Par consequent le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, est égal aux deux Quarrez de EB & de DB. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AD, DC, qui sera égal au Quarré de DB ; Ce qu'il falloit démontrer.



Supposons maintenant que la Ligne DA ne passe point par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AD, DC, est égal au Quarré de DB. Pour le prouver,

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB ; cette Ligne (par la 18. Prop.) sera perpendiculaire à DB. De ce même Centre abaissez la Ligne EF perpendiculaire à AD ; cette Ligne EF (par la 3. Prop.) coupera la partie AC, qui est dans le Cercle, en deux également. Enfin de ce même Point menez les deux Lignes droites EC, ED. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux parties égales au Point F, & que la Ligne CD lui est ajoûtée : il s'ensuit (par la 6. Prop. du 2.) que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de CF, est égal au Quarré de DF. Si donc à ces deux Touts,

qui

qui ſont égaux, on ajoûte le Quarré de FE; il s'enſuivra que le Rectangle de AD, DC, & les deux Quarrez de CF & de FE, ſeront égaux aux deux Quarrez de DF & de FE. Or les deux Quarrez de CF & de FE ſont égaux au Quarré de EC, ou de ſon égale EB, par la 47. du 1. Et de même, les deux Quarrez de DF & de FE ſont égaux au Quarré de ED. Si donc au lieu des deux Quarrez de CF & de FE, on prend le Quarré de EB; & au lieu des deux Quarrez de DF & de FE, on prend le Quarré de ED: il s'enſuivra que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, ſera égal au Quarré de ED. Mais les deux Quarrez de DB & de EB ſont auſſi égaux au Quarré de ED, par la 47. du 1. Donc le Rectangle de DA, DC, & le Quarré de EB, ſont enſemble égaux aux deux Quarrez de DB & de EB. Si donc de ces deux Touts, qui ſont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur eſt commun; il reſtera le Rectangle de DA, DC, égal au Quarré de DB; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que ſi d'un Point pris à diſcretion hors d'un Cercle, on méne tant de Lignes droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent ſe terminer à ſa Circonference concave; le Rectangle compris d'une de ces Coupantes, telle que l'on voudra, & de ſa partie hors du Cercle, ſera égal au Rectangle compris de telle autre Coupante que l'on voudra, de ſa partie hors du Cercle. Car chacun de ces Rectangles eſt égal au Quarré de la Touchante, qui ſeroit menée de ce même Point.

II. COROLLAIRE.

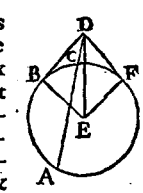
Il ſuit encore, que ſi d'un Point pris à diſcretion hors

hors d'un Cercle, en méne deux Lignes droites qui le touchent, elles ſeront égales entr'elles. Car le Quarré de chacune de ces Lignes eſt égal au Rectangle d'une Coupante & de ſa partie hors du Cercle. Et ainſi chacun de ces Quarrez eſt égal à l'autre; d'où il ſuit que les Lignes qui en ſont les Côtez, ſont égales, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXXI.

Si d'un Point pris à diſcretion hors d'un Cercle, on méne deux Lignes droites, dont l'une coupe le Cercle, & va ſe terminer à ſa Circonference concave, & l'autre atteint le Cercle: & que le Rectangle compris de toute la Coupante, & de ſa partie hors du Cercle, ſoit égal au Quarré de celle qui atteint le Cercle; celle-ci touchera le Cercle.



JE ſuppoſe que du Point D, pris à diſcretion hors du Cercle ABC, on ait mené les deux Lignes droites DA, DB; dont l'une, à ſçavoir DA, coupe le Cercle, & ſe termine à ſa Circonference concave; & l'autre, à ſçavoir DB, atteint le Cercle: & que le Rectangle compris de DA, DC, ſoit égal au Quarré de DB. Cela étant, je dis que cette

Ligne

Ligne DB touche le Cercle. Pour le prouver,

Menez du Point D la Ligne droite DF, qui touche le Cercle. Puis du Centre E menez les Lignes droites EB, ED, EF. Cela posé:

Puisque du Point D partent les deux Lignes droites DA, DF; que DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonference concave; & que DF le touche: il s'ensuit (par la Proposition precedente) que le Quarré de DF est égal au Rectangle de DA, DC. Mais le Quarré de DB est supposé égal au même Rectangle. Partant le Quarré de DB, & le Quarré de DF, sont égaux entr'eux. Et par consequent ces deux Lignes, qui en sont les Côtez, sont aussi égales entr'elles. D'ailleurs, la Ligne BE est égale à la Ligne FE, par la definition du Cercle. Si bien que les deux Triangles DBE, DFE, ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & la Baze DE commune. Partant (par la 8. du 1.) l'Angle DBE est égal à l'Angle DFE. Mais l'Angle DFE est droit, par la 18. Prop. Donc l'Angle DBE est aussi droit. D'où il suit (par la 16. Prop.) que la Ligne DB touche le Cercle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

ELE-

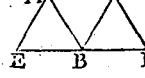
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DEFINITIONS.

1. UNE Figure rectiligne eſt dite être inſcrite dans une autre Figure rectiligne, quand le Sommet de chacun de ſes Angles touche un des Côtez de la Figure dans laquelle elle eſt inſcrite.

Ainſi le Triangle ABC eſt dit être inſcrit dans le Triangle DEF, parce que le Sommet de chacun de ſes Angles A, B, C, touche un des Côtez du Triangle DEF.



2. Une Figure rectiligne eſt dite être circonſcrite à une autre Figure rectiligne, quand chacun de ſes Côtez paſſe par

par le Sommet d'un des Angles de la Figure à laquelle elle eſt circonſcrite.

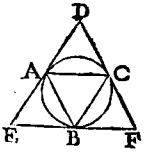
Ainſi le Triangle DEF eſt dit être circonſcrit au Triangle ABC, parce que chacun des Côtez du Triangle DEF paſſe par le Sommet d'un des Angles du Triangle ABC.

3. Une Figure rectiligne eſt dite être inſcrite au Cercle, quand le Sommet de chacun de ſes Angles touche la Circonference du Cercle auquel elle eſt inſcrite.

Ainſi le Triangle ABC eſt inſcrit dans le Cercle ABC.

4. Une Figure rectiligne eſt dite être circonſcrite à un Cercle, quand chacun de ſes Côtez touche le Cercle auquel elle eſt circonſcrite.

Ainſi le Triangle DEF eſt circonſcrit au Cercle ABC, parce que chacun des Côtez du Triangle DEF touche le Cercle ABC.



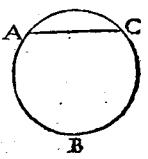
5. Un Cercle eſt dit être inſcrit dans une Figure rectiligne, quand ſa Circonference touche chacun des Côtez de la Figure dans laquelle il eſt inſcrit.

Ainſi le Cercle ABC eſt inſcrit dans le Triangle DEF.

6. Un Cercle eſt dit être circonſcrit à un Figure rectiligne, quand ſa Circonference paſſe par le Sommet de chaque Angle de la Figure à laquelle il eſt circonſcrit.

Ainſi le Cercle ABC eſt circonſcrit au Triangle ABC.

7. Une Ligne droite eſt dite être appliquée à un Cercle, quand ſes extremitez ſont dans la Circonference du Cercle.



Ainſi la Ligne AC eſt appliquée au Cercle ABC.

8. Un Polygone, eſt une Fi-

gure

gure compriſe de pluſieurs Lignes droites.

9. Un Pentagone, eſt une Figure compriſe de cinq Lignes droites.

10. Un Hexagone, eſt une Figure compriſe de ſix Lignes droites.

11. Un Heptagone, de ſept.

12. Un Octogone, de huit.

13. Un Enneagone, de neuf.

14. Un Decagone, de dix.

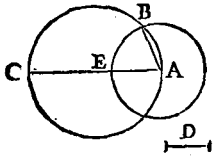
15. Un Endecagone, de onze.

16. Un Dodecagone, de douze, &c.

PROPOSITION I.

PROBLEME I.

A un Cercle donné, appliquer une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée, laquelle ne ſoit pas plus grande que le Diametre du Cercle.



JE ſuppoſe que le Cercle ABC ſoit donné, & que la Ligne D, qui n'eſt pas plus grande que le Diametre du Cercle, ſoit auſſi donnée; & je propoſe d'appliquer au Cercle ABC, une Ligne droite égale à la Ligne D. Pour le faire,

Menez dans ce Cercle le Diametre AC, lequel par la ſuppoſition eſt ou égal, ou plus grand que la Ligne donnée D. Cela poſé:

S'il eſt égal, la choſe eſt faite, & la Ligne appliquée,

quée, puisque le Diametre AC est supposé égal à la Ligne donnée D. S'il est plus grand, retranchez-en la partie AE égale à la Ligne D. Puis du Centre A, & de l'intervalle AE, décrivez le Cercle EB, lequel coupera la Circonference de l'autre Cercle au Point B. Enfin du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que la Ligne AB, qui est appliquée au Cercle ABC, est égale à la Ligne donnée D. Pour le prouver,

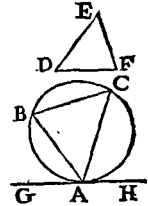
La Ligne AB, & la Ligne AE, partent toutes deux du Point A, qui est le Centre du Cercle EB, & vont se terminer à sa Circonference; par consequent elles sont égales entr'elles. Or la Ligne AE est égale à la Ligne donnée D, par la construction. Donc la Ligne AB est aussi égale à la Ligne D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION II.

PROBLEME II.

Dans un Cercle donné, inscrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.

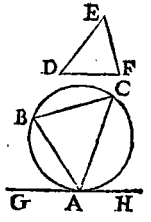
JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnez; & je propose d'inscrire dans ce Cercle un Triangle, qui soit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,



Menez (par la 17. du 3.) la Ligne droite GAH, qui touche le Cercle au Point A. Puis du Point A menez la Ligne droite AB, qui fasse avec AG l'Angle BAG égal à l'Angle D du Triangle DEF. De ce même Point menez la Ligne droite

droite AC, qui faſſe avec AH l'Angle HAC égal à l'Angle F. Enfin du Point B au Point C menez la Ligne droite BC. Cela poſé, je dis que le Triangle ABC, inſcrit au Cercle ABC, eſt équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puiſque la Ligne GAH touche le Cercle au Point A, & que la Ligne AB, qui part du Point de l'attouchement, le coupe: l'Angle GAB, que la Coupante fait avec la Touchante, ſera égal à l'Angle ACB, qui eſt au Segment alterne, par la 32. Prop. du 3. Mais l'Angle GAB eſt égal à l'Angle D, par la conſtruction. Donc l'Angle ACB eſt auſſi égal à l'Angle D. De même, la Ligne AC coupant le Cercle, l'Angle HAC, qu'elle fait avec la Touchante, eſt égal à l'Angle ABC, qui eſt dans le Segment alterne. Mais l'Angle HAC eſt égal à l'Angle F, par la conſtruction. Donc l'Angle ABC eſt auſſi égal à l'Angle F. Et ainſi le Triangle ABC a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF. Par conſequent le troiſiéme BAC eſt égal au troiſiéme E, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

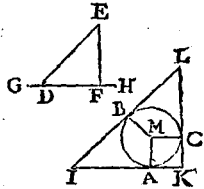


PRO-

PROPOSITION III.

PROBLEME III.

Alentour d'un Cercle donné, décrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.

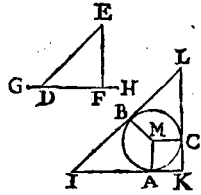


JE ſuppoſe que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, ſoient donnez; & je propoſe de décrire alentour du Cercle ABC un Triangle qui ſoit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,

Prolongez de part & d'autre l'un des Côtez du Triangle, par exemple DF, vers G, & vers H. Puis du Centre M tirez à diſcretion à quelque Point de la Circonference la Ligne droite MA. De ce même Centre menez la Ligne droite MB, qui faſſe avec MA l'Angle AMB égal à l'Angle EDG, par la 23. du 1. De ce même Point menez la Ligne MC, qui faſſe avec MA l'Angle AMC égal à l'Angle EFH. Cela fait, tirez par les Points A, B, C, trois Lignes droites IAK, IBL, KCL, perpendiculaires aux Lignes MA, MB, MC. Ces trois Lignes formeront un Triangle, que je dis être circonſcrit au Cercle ABC, & être équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puiſque chacune de ces Lignes IK, IL, KL, eſt perpendiculaire à l'extremité du Diametre du Cercle, ces Lignes touchent le Cercle, par la 16. du 3. Et ainſi le Triangle IKL eſt circonſcrit à ce Cercle. Si bien qu'il ne reſte plus qu'à prouver qu'il eſt équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Les quatre Angles de la Figure AMBI valent quatre droits, par la Remarque de la 32. du 1. Or les deux Angles MAI, MBI, sont droits, par la construction. Donc les deux Angles AMB, AIB, sont aussi égaux à deux droits. D'ailleurs, les Angles EDG, EDF, sont égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles AMB, AIB, sont égaux aux deux Angles EDG, EDF. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMB, & EDG, qui sont égaux par la construction: l'Angle AIB restera égal à l'Angle EDF. De même, les quatre Angles de la Figure AMCK valent quatre droits. Or les deux Angles MAK, MCK, sont droits, par la construction. Donc les deux restans AMC, AKC, valent ensemble deux droits. Mais les Angles EFH, EFD, valent aussi deux droits. Ainsi les deux Angles AMC, AKC, sont égaux aux deux Angles EFH, EFD. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMC, & EFH, qui sont égaux par la construction: l'Angle AKC restera égal à l'Angle EFD. Et ainsi le Triangle ILK a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF. Par conséquent le troisiéme ILK est égal au troisiéme DEF, par la 32. du 1. D'où il suit que le Triangle ILK, que nous avons circonscrit au Cercle ABC, est équiangle au Triangle DEF; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

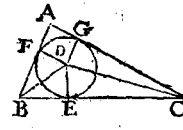


PRO-

PROPOSITION IV.

PROBLEME IV.

Dans un Triangle donné, décrire un Cercle.



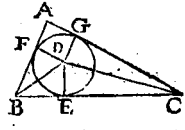
JE suppose que le Triangle ABC soit donné ; & je propose d'y inscrire un Cercle. Pour le faire,

Coupez (par la 9. du 1.) l'un des Angles de ce Triangle, par exemple ABC, en deux également par la Ligne droite BD. Coupez de même un autre Angle, comme ACB, en deux également par la Ligne droite CD. Du Point D, où les deux Lignes BD, CD, se rencontrent, abaissez sur l'un des Côtez de ce Triangle, par exemple sur BC, la Perpendiculaire DE. Enfin du Centre D, & de l'intervalle DE, décrivez un Cercle ; & je dis qu'il sera inscrit au Triangle ABC. Pour le prouver,

Abaissez du Point D les Lignes droites DF, DG, perpendiculaires aux deux autres Côtez AB, AG. Cela posé :

Aux Triangles BDE, & BDF, l'Angle EBD est égal à l'Angle FBD, par la construction ; l'Angle DEB est égal à l'Angle DFB, étant tous-deux droits, par la construction ; de plus, le Côté BD est commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DF est égal au Côté DE, par la 26. du 1. De même, aux Triangles CGD, & CED, l'Angle GCD est égal à l'Angle ECD, par la construction ; l'Angle DGC est égal à l'Angle DEC, ces deux Angles étant droits, par la construction ; de-

plus, le Côté DC eſt commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DG eſt égal au Côté DE, par la 26. du 1. Et ainſi les trois Lignes DE, DF, DG, ſont égales entr'elles.



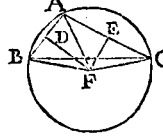
Par conſequent le Cercle EFG, qui eſt décrit du Centre D, & de l'intervalle DE, paſſe auſſi par les extremitez des Lignes FD, DG. Or puiſque les Côtez AB, BC, CA, du Triangle ABC, ſont perpendiculaires aux extremitez des trois demi-Diametres DF, DE, DG, il s'enſuit par la 16. du 3. qu'ils touchent le Cercle EFG, & par conſequent que ce Cercle eſt inſcrit dans le Triangle ABC, par la 5. Definition; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION V.

PROBLEME V.

Alentour d'un Triangle donné, décrire un Cercle.

JE ſuppoſe que le Triangle ABC ſoit donné; & je propoſe de décrire un Cercle alentour de ce Triangle. Pour le faire,



Coupez (par la 10. du 1.) un des Côtez de ce Triangle, par exemple AB, en deux également au Point D; & de ce Point élevez la Perpendiculaire DF, par la 11. du 1. Coupez de même un autre Côté, comme par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point élevez auſſi la Perpendiculaire EF.

Mainte-

Maintenant du Point F, où les Lignes DF, EF, se rencontrent, menez la Ligne droite FA, au Sommet de l'un des Angles de ce Triangle. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentour du Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point F aux Sommets des deux autres Angles B & C, menez les deux Lignes droites FB, FC. Cela posé:

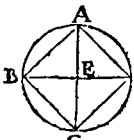
Aux Triangles BDF, & ADF, le Côté BD est égal au Côté AD, par la construction; le Côté DF, leur est commun; deplus, l'Angle BDF est égal à l'Angle ADF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Et partant la Baze FB est égale à la Baze FA, par la 4. du 1. De même, aux Triangles CEF, & AEF, le Côté CE est égal au Côté AE, par la construction; le Côté EF leur est commun; & l'Angle CEF est égal à l'Angle AEF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Partant la Baze FC est égale à la Baze FA. Et ainsi les trois Lignes FB, FA, FC, sont égales entr'elles. Par conséquent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extremitez des Lignes FB, FC. Or les extremitez des Lignes FA, FB, FC, sont les Sommets des Angles du Triangle ABC. Et par conséquent ce Cercle est décrit alentour du Triangle ABC, par la 6. Definition; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION VI.

PROBLEME VI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quarré.

JE suppose que le Cercle ABC soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quarré. Pour le faire, Par le Centre E menez le Diametre AEC ; coupez ce Diametre à Angles droits par un autre Diametre, comme BED ; puis menez les Lignes AB, BC, CD, & DA. Ces quatre Lignes formeront une Figure de quatre Côtez inscrite au Cercle. Cela étant, je dis que cette Figure est un Quarré. Pour le prouver,



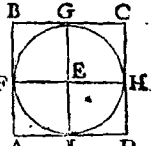
Puisque les quatre Angles qui sont autour du Centre E, sont droits par la construction, les quatre Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux entr'eux, par la 26. du 3. Et par consequent les quatre Soûtendantes AB ; BC, CD, DA, sont égales entr'elles, par la 29. du 3. D'ailleurs, chacun des Angles de la Figure ABCD, étant au demi-Cercle, est droit, par la 31. du 3. Et par consequent cette Figure ABCD, qui est comprise de quatre Côtez égaux, & qui a ses quatre Angles droits, est un Quarré ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION VII.

PROBLEME VII.

Alentour d'un Cercle donné, décrire un Quarré.

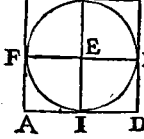


JE suppose que le Cercle FGHI soit donné; & je propose de décrire un Quarre alentour de ce Cercle. Pour le faire,

Menez tel Diametre qu'il vous plaira, par exemple FEH. Coupez ce Diametre à Angles droits par un autre Diametre, comme GEI. Puis (par la 31. du 1.) menez par les Points F, & H, les Lignes droites AFB, DHC, paralleles à GI, ou perpendiculaires à FH; & par les Points G, & I, les Lignes droites BGC, AID, paralleles à FH, ou perpendiculaires à GI. Ces quatre Lignes AB, BC, CD, DA, formeront une Figure de quatre Côtez. Cela étant, je dis que cette Figure est un Quarré, qui est décrit alentour du Cercle FGHI. Pour le prouver,

Puisque les Lignes AB, CD, sont paralleles à GI, elles sont paralleles entr'elles. De mesme, puisque les Lignes BC, AD, sont paralleles à FH, elles sont aussi paralleles entr'elles. Et par consequent les Figures ABCD, ABGI, GCDI, BCHF, & AFHD, sont des Parallelogrammes. Et partant les Lignes BC, AD, sont égales au Diametre FH, ou à son égale GI, par la 34. du 1. Et de mesme, les Lignes AB, CD, sont aussi égales à GI. D'où il suit que les quatre Côtez du Paralle-

rallelogramme ABCD sont égaux entr'eux. De plus, puisque la Figure AFEI est un Parallelogramme, par la construction, & que l'Angle FEI a été fait droit; il s'ensuit que son opposé FAI est aussi droit, par la 34. du 1. On prouvera de même, que les Angles FBG, GCH, & HDI, sont aussi droits. Et partant la Figure ABCD est un Quarré; qui touche le Cercle donné, puisque par la 16. du 3. chaque Côté est perpendiculairement élevé à l'extremité du Diametre; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

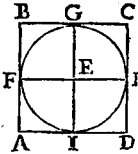


PROPOSITION VIII.

PROBLEME VIII.

Dans un Quarré, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD soit donné; & je propose d'inscrire un Cercle dans ce Quarré. Pour le faire,



Coupez les Côtez du Quarré ABCD en deux également, aux Points F, G, H, I. Menez les Lignes droites FH, GI. Puis du Point E, où les deux Lignes se coupent, & de l'intervalle EF, décrivez le Cercle FGHI. Cela étant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD. Pour le prouver,

Puisque les Lignes AD, BC, sont égales & paralleles, leurs moitiez AI, BG, sont aussi égales & paralleles. D'où il suit (par la 33. du 1.) que les Lignes AB, IG, sont aussi égales & paralleles.

De

De même, puisque AB, DC, sont égales & paralleles, leurs moitiez AF, DH, sont aussi égales & paralleles. D'où il suit que les Lignes AD, FH, sont aussi égales & paralleles. Et par conséquent les Figures EA, EB, EC, ED, sont des Parallelogrammes. D'où il suit que la Ligne EI est égale à AF; que EF est égale à BG; que EG est égale à CH; & que EH est égale à DI. Ainsi ces quatre Lignes EI, EF, EG, EH, qui sont égales à des choses égales, sçavoir aux moitiez des Côtez d'un Quarré, sont égales entr'elles. Et le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'intervalle EI, passe aussi par les Points F, G, H. D'ailleurs, puisque l'Angle BGI est égal à son opposé A, par la 34. du 1; que l'Angle CHF est égal à son opposé B; que l'Angle DIG est égal à son opposé C; & enfin que l'Angle AFH est égal à son opposé D: ces quatre Angles sont droits, leurs opposez étant droits, par supposition. D'où il suit que les Lignes AB, BC, CD, DA, touchent le Cercle FGHI, par la 16. du 3. Et partant ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION IX.

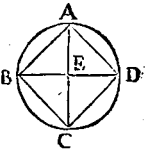
PROBLEME IX.

Alentour d'un Quarré donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD soit donné; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Quarré. Pour le faire,

Menez les deux Diagonales AC, BD. Puis du Point E, où elles se coupent, & de l'intervalle EA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle

cle est décrit alentour du Quarré ABCD. Pour le prouver,



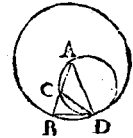
Puisqu'au Triangle ABD les deux Côtez BA, AD, sont égaux par supposition: les Angles ABD, ADB, sont aussi égaux, par la 5. du 1. Et puisque l'Angle BAD est supposé droit, les deux Angles ABD, ADB, valent chacun un demi-droit. On prouvera de même, que chacun des autres Angles qui sont autour des Points A, B, C, D, est demi-droit. Ensuite dequoi, puisqu'au Triangle AEB les deux Angles EAB, EBA, sont égaux: les deux Côtez EA, EB, qui les soûtiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que EC est égal à EB, & que ED est égal à EC; & partant ces quatre Lignes EA, EB, EC, ED, sont égales entr'elles. D'où il suit que le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'intervalle EA, passe par les extremitez des Lignes EB, EC, ED; & par consequent qu'il est décrit alentour du Quarré ABCD, par la Definition 6. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION X.

PROBLEME X.

Décrire un Triangle Iſoſcele qui ait chacun des Angles ſur la Baze double de l'autre.

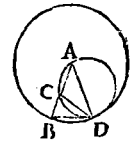


POur le faire, menez une Ligne droite de telle longueur qu'il vous plaira, comme par exemple AB. Coupez cette Ligne au Point C, de telle ſorte, que le Rectangle de AB, BC, ſoit égal au Quarré de AC, par la 11. du 2. Décrivez un Cercle du Centre A, & de l'intervalle AB. Puis appliquez à la Circonference de ce Cercle la Ligne droite BD égale à AC, par la 1. Prop. Enfin menez la Ligne droite AD. Cela étant, je dis que le Triangle ABD eſt Iſoſcele, & que chacun de ſes Angles ABD, ADB, qui ſont ſur la Baze BD, eſt double de l'Angle BAD. Pour le prouver,

Du Point C au Point D menez la Ligne droite CD; & (par la 5. Prop.) alentour du Triangle ACD décrivez un Cercle. Cela poſé:

Puiſque les Lignes AB, AD, ſont égales, par la definition du Cercle: le Triangle ABD eſt Iſoſcele. D'ailleurs, puiſque par la conſtruction le Rectangle compris de AB, BC, eſt égal au Quarré de AC: ce même Rectangle ſera auſſi égal au Quarré de BD, qui a été faite égale à AC. Ainſi nous avons le Point B, hors du Cercle ACD, d'où partent les deux Lignes droites BA, BD; l'une deſquelles, à ſçavoir BA, coupe le Cercle; & l'autre, à ſçavoir

voir BD, l'atteint ; enſorte que le Rectangle compris de BA, & de ſa partie BC qui eſt hors du Cercle, eſt égal au Quarré de BD, qui l'atteint. Par conſequent (par la 37. du 3.) la Ligne BD touche le Cercle ACD. Et d'autant que la Ligne droite DC part du Point de l'attouchement D, & coupe le Cercle : il s'enſuit que l'Angle CDB, que fait cette Coupante avec la Touchante, eſt égal à l'Angle CAD, qui eſt au Segment alterne, par la 32. du 3. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun ADC ; il s'enſuivra que l'Angle total ADB ſera égal aux deux Angles ADC, CAD. Mais (par la 32. du 1.) l'Angle BCD eſt égal aux deux Angles ADC & CAD. Partant l'Angle BCD eſt égal à l'Angle ADB. Maintenant, le Triangle ABD étant Iſoſcele, l'Angle ABD eſt égal à l'Angle ADB, par la 5. du 1. Partant l'Angle ABD, ou CBD qui eſt le même, eſt auſſi égal à l'Angle BCD. D'où il ſuit (par la 6. du 1.) que le Côté CD eſt égal au Côté BD. Mais BD a été fait égal à AC. Partant les deux Lignes AC, CD, ſont égales entr'elles. D'où il ſuit (par la 5. du 1.) que l'Angle CDA eſt égal à l'Angle CAD, ou BAD. Mais il a déja été prouvé que l'Angle CDB étoit égal à l'Angle CAD. Partant l'Angle total ADB, ou ſon égal ABD, eſt double de l'Angle BAD ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



REMARQUE.

Enſuite de cette Propoſition, il eſt aiſé de montrer, que ſi l'on diviſe le Rayon du Cercle en moyenne & extréme raiſon, c'eſt à dire, enſorte que le Rectangle compris de tout le Rayon & de la moindre partie, ſoit égal au Quarré de la plus grande partie : le Côté du Decagone inſcrit dans le Cercle

Cercle, sera égal à cette plus grande partie.

Car, puisque les trois Angles d'un Triangle valent autant que deux droits; il est évident que si on divise deux Angles droits en cinq parties égales, deux de ces parties seront la quantité de l'Angle ABD, du Triangle ABD de la Proposition precedente; que deux autres parties seront la quantité de l'Angle ADB, & que la cinquiéme partie qui reste, sera la quantité de l'Angle BAD, lequel par consequent sera la dixiéme partie des quatre Angles droits que valent tous les Angles qu'on peut faire autour du Point A. D'où il suit que l'Arc BD est aussi la dixiéme partie de la Circonference du Cercle. Or la Ligne droite BD est la Soûtendante de cét Arc, & elle a été faite égale à AC, qui est la plus grande partie du Rayon AB coupé ensorte que le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Quarré de AC. Donc il est vray de dire, que la Soûtendante de la dixiéme partie de la Circonference du Cercle, ou ce qui est la même chose, le Côté du Decagone inscrit au Cercle, est égal à la plus grande partie du Rayon divisé en moyenne & extréme raison.

PROPOSITION XI.

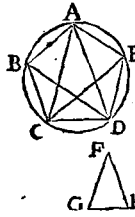
PROBLEME XI.

Dans un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.

JE suppose que le Cercle ABCDE soit donné; & je propose d'y inscrire un Pentagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez (par la Proposition precedente) le Triangle Isoscele FGH, qui ait chacun des Angles sur la Baze double du troisiéme. Puis (par la 2. Prop.)

décrivez dans le Cercle ABCDE le Triangle ACD équiangle au Triangle FGH. Coupez les Angles ACD, ADC, en deux également par les Lignes droites CE, DB; & menez les Lignes droites CB, BA, AE, ED. Cela étant, je dis que le Pentagone ABCDE, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,



Puisque le Triangle FGH est Isoscele, & qu'il a les Angles G & H, sur la Baze, doubles de l'Angle F; & que le Triangle ACD lui est équiangle: ce Triangle ACD a aussi les Angles ACD, ADC, sur la Baze, doubles de l'Angle CAD. Or chacun de ces Angles ACD, ADC, ayant été coupé en deux également; les Angles DCE, ECA, ADB, BDC, qui en sont les moitiez, sont égaux entr'eux, & égaux aussi à l'Angle CAD. D'où il suit (par la 26. du 3.) que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont égaux; & par la 29. du 3. que les cinq Lignes droites AB, BC, CD, DE, EA, sont égales. Et par consequent, que le Pentagone ABCDE est Equilateral.

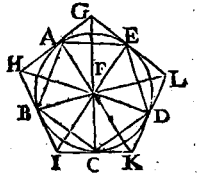
Mais ce Pentagone est aussi Equiangle; puisque (par la 27. du 3.) chacun de ses Angles s'appuye sur des Arcs égaux, sçavoir, sur trois fois la cinquiéme partie de la Circonference du Cercle. Nous avons donc dans un Cercle donné, décrit un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XII.

PROBLEME XII.

Alentour d'un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.



JE supppose que le Cercle ABCDE soit donné ; & je propose de décrire alentour de ce Cercle un Pentagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire ;

Décrivez premierement dans ce Cercle (par la Proposition precedente) le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle. Menez du Centre F aux Points A, B, C, D, E, les Lignes droites FA, FB, FC, FD, FE ; & par les extremitez de ces Lignes menez les Lignes droites GH, HI, IK, KL, LG, qui leur soient perpendiculaires. Cela étant, je dis que ces Lignes se rencontreront ; que le Pentagone qu'elles formeront sera circonscrit au Cercle donné ; & qu'il sera Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,

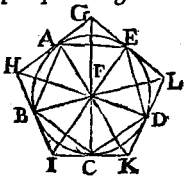
Premierement, puisque les Angles GAE, & GEA, sont partie des Angles droits GAF, GEF, ils seront moindres que deux droits. Et partant (par la Remarque de la 28. du 1.) les Lignes AG, EG, se rencontreront ; & ainsi des autres.

Deplus, puisque les Lignes GH, HI, IK, KL, LG, sont perpendiculaires aux extremitez du Diametre du Cercle ; il s'ensuit (par la 16. Prop. du 3.) qu'elles touchent le Cercle, & qu'ainsi le Pentagone GHIKL est circonscrit au Cercle donné.

Main-

Maintenant, pour prouver que ce Pentagone GHIKL est Equilateral, menez les Lignes droites FG, FH, FI, FK, FL. Cela posé:

Puisque le Pentagone ABCDE est Equilateral, par la construction; il s'ensuit que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, que ces Côtez égaux soûtiennent, sont égaux entr'eux; & que les cinq Angles AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, qui s'appuyent sur ces Arcs, sont aussi égaux entr'eux, par la 27. du 3. D'ailleurs, puisque l'Angle FAG est droit, par la construction: les deux Quarrez de FA & de AG sont égaux au Quarré de FG, par la 47. du 1. Mais l'Angle FEG étant aussi droit, les deux Quarrez de FE & de EG sont égaux au même Quarré de FG. Partant les deux Quarrez de FA & de AG sont égaux aux deux Quarrez de FE & de EG. Ostant donc de ces deux Touts, qui sont égaux, les Quarrez de FA & de FE, qui sont égaux, (parce que ce sont les Quarrez de deux demi-Diametres du Cercle:) le Quarré de AG sera égal au Quarré de EG. Et partant les Lignes AG, EG, sont égales entr'elles. On prouvera de même, que la Ligne AH est égale à HB; la Ligne BI, à IC; la Ligne CK, à KD; & la Ligne DL, à LE. Or comparant le Triangle AFG avec le Triangle EFG, les deux Côtez AF, FG, sont égaux aux deux Côtez EF, FG; & la Baze AG égale à la Baze EG. Partant (par la 8. du 1.) l'Angle AFG est égal à l'Angle EFG; & l'Angle AGF égal à l'Angle EGF. Desorte que chacun des Angles AFE, & AGE, est coupé en deux également. On prouvera de même, que les Angles AFB, BFC, CFD, DFE, & les Angles AHB, BIC, CKD, DLE, sont coupez en deux également. D'où il suit, que tous les



Ang-

Angles qui ſont autour du Point F, qui ſont tous moitié de choſez égales, ſont égaux entr'eux. Comparant maintenant les Triangles FAG & FAH: les Angles AFG & FAG ſont égaux aux Angles AFH & FAH, chacun au ſien; & le Côté AF, aux extremitez duquel ſont ces Angles, leur eſt commun. Partant (par la 26. du 1.) l'Angle AGF eſt égal à l'Angle AHF, & le Côté AG au Côte AH. On prouvera de même, que l'Angle BHF eſt égal à l'Angle BIF; l'Angle CIF, à l'Angle CKF; l'Angle DKF, à l'Angle DLF; l'Angle ELF, à l'Angle EGF. Comme auſſi que la Ligne HB eſt égale à IB; la Ligne IC, à CK; la Ligne KD, à DL; & la Ligne LE, à EG. Enſuite dequoy, GH & GL ſont égales, étant doubles de AG & de GE, qui ont été prouvées égales; GH & HI ſont égales, étant doubles de AH & de HB, qui ont été prouvées égales; HI & IK ſont égales, étant doubles de BI & de IC, qui ont été prouvées égales; IK & KL ſont égales, étant doubles de CK & de KD, qui ont été prouvées égales; & enfin KL & LG ſont égales, étant doubles de DL & de LE, qui ont été prouvées égales. Si bien que le Pentagone GHIKL eſt Equilateral.

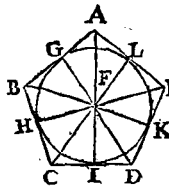
D'ailleurs, puiſque les Angles HGL & GHI ſont doubles des Angles AGF & AHF, qui ont été prouvez égaux, ils ſont auſſi égaux entr'eux. On montrera de même, que l'Angle GHI eſt égal à l'Angle HIK; l'Angle HIK, à l'Angle IKL; & l'Angle IKL, à l'Angle KLG. Et partant le Pentagone GHIKL eſt Equiangle. Nous avons donc décrit alentour d'un Cercle donné un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIII.

PROBLEME XIII.

Dans un Pentagone donné, qui eſt Equiangle & Equilateral, décrire un Cercle.



JE ſuppoſe que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, ſoit donné; & je propoſe d'y inſcrire un Cercle. Pour le faire,

Coupez (par la 9. du 1.) les deux Angles BAE & ABC, qui ſe ſuivent, en deux également, par les Lignes droites AF, BF. Et du Point F, où ces Lignes ſe rencontrent, abaiſſez ſur un des Côtez la Perpendiculaire FG. Puis du Centre F, & de l'intervalle FG, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle eſt inſcrit dans le Pentagone donné. Pour le prouver,

Abaiſſez du Point F les Lignes FH, FI, FK, FL, perpendiculairement ſur les Côtez BC, CD, DE, EA. Cela poſé:

Puiſque le Pentagone ABCDE eſt ſuppoſé Equilateral, le Côté AB, du Triangle AFB, eſt égal au Côté BC, du Triangle CBF; le Côté FB eſt commun à ces deux Triangles; & l'Angle ABF eſt égal à l'Angle CBF, par la conſtruction. Donc l'Angle BAF eſt égal à l'Angle BCF. Or l'Angle BAF eſt moitié de l'Angle BAE, qui eſt égal à BCD, puiſque le Pentagone eſt ſuppoſé Equiangle. Partant l'Angle BCF eſt auſſi moitié de l'Angle BCD. Et par conſequent les deux Angles BCF & DCF

DCF sont égaux entr'eux. On prouvera de même, que l'Angle CDF est égal à l'Angle FDE, & l'Angle DEF à l'Angle FEA. Maintenant, comparant les Triangles FBG & FBH : l'Angle FBG vient d'être prouvé égal à l'Angle FBH, & l'Angle FGB est égal à l'Angle FHB, étant tous-deux droits, par la construction ; & le Côté FB est commun à ces deux Triangles. Partant FH est égale à FG, par la 26. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FI est égale à FH ; la Ligne FK à FI ; & la Ligne FL, à FK. Par conséquent les cinq Lignes FG, FH, FI, FK, & FL, sont toutes égales ; & le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FG, passe aussi par les extremitez de toutes les autres : & chacune de ces Lignes est un demi-Diametre du Cercle. Or les Côtez du Pentagone ABCDE sont élevez perpendiculairement aux extremitez de ces demi-Diametres. Partant (par la 16. du 3.) ces Côtez touchent le Cercle. Et par conséquent ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIV.

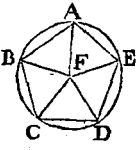
PROBLEME XIV.

Alentour d'un Pentagone donné, qui est Equilateral & Equiangle, décrire un Cercle.

JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, soit donné ; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Pentagone. Pour le faire,

Coupez les deux Angles BAE & ABC qui se suivent, en deux également, par les Lignes droites AF,

AF, BF. Puis du Point F, où ces deux Lignes se rencontrent, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentour du Pentagone ABCDE. Pour le prouver,



Menez les Lignes droites FC, FD, FE. Cela posé:

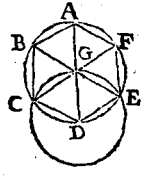
Par un raisonnement semblable à celui de la Proposition précedente, on prouvera que les Angles BCD, CDE, & DEA, sont coupez en deux également. Les Angles BAE & ABC le sont aussi, par la construction. Or les cinq Angles du Pentagone étant égaux, les dix Angles, qui en sont les moitiez, sont aussi égaux. D'où il suit, que puisqu'au Triangle ABF les Angles FAB, FBA, sont égaux; les deux Côtez FA, FB, qui les soûtiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FC est égale à FB; la Ligne FD, à FC; la Ligne FE, à FD. De sorte que les cinq Lignes FA, FB, FC, FD, FE, sont égales entr'elles. Par consequent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extremitez des Lignes FB, FC, FD, FE, c'est à dire par les Sommets des Angles du Pentagone. Et partant ce Cercle est décrit alentour du Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XV.

PROBLEME XV.

Dans un Cercle donné, décrire un Hexagone Equilateral & Equiangle.



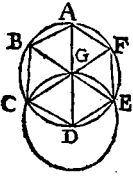
JE suppose que le Cercle ACE soit donné ; & je propose d'y inscrire un Hexagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Menez un Diametre tel qu'il vous plaira, par exemple AGD. Puis du Point D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle CGE. Ce Cercle coupera le premier aux Points C & E. Menez par ces Points les Diametres CGF & EGB. Puis menez les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA. Cela étant, je dis que l'Hexagone ABCDEF, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,

Par le raisonnement de la premiere Prop. du 1. on prouvera que les deux Triangles DGC, DGE, sont Equilateraux ; & par la 5. du 1. on prouvera qu'ils sont Equiangles. Et partant (par la 32. du 1.) chacun de leurs Angles vaut le tiers de deux droits. Or (par la 13. du 1.) les deux Angles CGE, & EGF, valent deux droits. Partant si on ôte l'Angle CGE, l'Angle restant EGF vaudra aussi le tiers de deux droits. Et ainsi les trois Angles CGD, DGE, EGF, sont égaux entr'eux. Mais les Angles AGF, AGB, BGC, qui leur sont opposez au Sommet, leur sont égaux, par la 15. du 1. Donc les six Angles qui sont autour du Centre G, sont tous égaux.

D'où

D'où il suit (par la 26. du 3.) que les six Arcs sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux; & (par la 29. du 3.) que les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA, qui les soûtiennent, sont égales. Par consequent l'Hexagone ABCDEF est Equilateral.



Maintenant, qu'il soit Equiangle, cela suit de la 27. du 3. Car chacun de ces six Angles s'appuye sur un Arc qui contient quatre-fois la 6. partie de la Circonference du Cercle. Ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Hexagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que le Côté de l'Hexagone est égal au Rayon du Cercle auquel il est inscrit; puisque chaque Côté a été prouvé égal au demi-Diametre.

PRO-

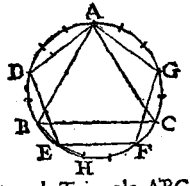
PROPOSITION XVI.

PROBLEME XVI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle.

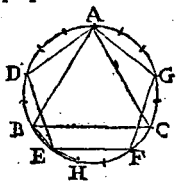
JE suppose que le Cercle ADBC soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez premierement un Triangle Equilateral. Puis (par la 2. Prop.) décrivez dans le Cercle donné le Triangle ABC, équiangle à ce Triangle Equilateral. Décrivez ensuite (par la 11. Prop.) dans ce même Cercle le Pentagone ADEFG, Equilateral & Equiangle, & menez du Point B au Point E la Ligne droite BE. Cela étant, je dis que cette Ligne BE est le Côté du Quindecagone demandé. Pour le prouver,



Puisque par la construction, le Triangle ABC est équiangle à un Triangle Equilateral, il est aussi Equilateral, par les 5. & 6. du 1. Et partant les trois Arcs ADB, BEC, & CGA, que ses Côtez soûtiennent, sont égaux, par la 28. du 3. & chacun d'eux est la 3. partie de la Circonference du Cercle. D'ailleurs, puisque le Pentagone ADEFG est Equilateral, par la construction : les cinq Arcs que ses Côtez soûtiennent, sont aussi égaux, & chacun d'eux est la cinquiéme partie de la Circonference du Cercle. Or puisque l'Arc ADB est la 3. partie de la Circonference, on peut lui appliquer cinq Côtez du Quindecagone. Et puisque l'Arc AD en est la cinquié-

cinquiéme partie, on lui en peut appliquer trois. Par conſequent on peut en appliquer ſix aux deux Arcs AD, DE. Mais nous avons montré qu'on en peut appliquer cinq à l'Arc ADB. Par conſequent on en peut appliquer un à l'Arc BE. Et ainſi la Ligne droite BE, qui lui eſt appliquée, eſt le Côté du Quindecagone. D'où il ſuit, qu'en appliquant quinze Lignes égales à BE, à toute la Circonference du Cercle, on a le Quindecagone demandé. Et ainſi nous avons dans un Cercle donné décrit un Quindecagone Equilateral.



Deplus, puiſque chacun des Angles de ce Quindecagone, comme BEH, s'appuye ſur un Arc qui ſoûtient treize fois la 15. partie de la Circonference du Cercle; tous ces Angles s'enſuivent égaux, par la 27. du 3. Et par conſequent ce Quindecagone eſt auſſi Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DEFINITIONS.

1. UNE Grandeur eſt dite en meſurer une autre, lors qu'étant priſe un certain nombre de fois, elle l'égale, & la meſure préciſément.

Ainſi une Ligne de quatre pieds, eſt dite meſurer une Ligne de 20 pieds, parce que la Ligne de 4 pieds étant priſe cinq fois, égale juſtement celle de 20 pieds; mais une Ligne de 6 pieds n'eſt pas dite meſurer une Ligne de 20 pieds; parce que la Ligne de 6 pieds, étant priſe tant de fois que l'on voudra, ne la meſure pas préciſément.

2. Une partie *aliquote* d'une Grandeur, eſt une partie de cette Grandeur qui la meſure préciſément.

Ainſi une Ligne de 4 pieds, eſt une partie aliquote d'une Ligne de 20 pieds.

La partie aliquote prend ſon nom & ſa dénomination, du nombre de fois qu'elle meſure la Grandeur dont elle eſt partie ; ou bien du nombre des parties égales dans leſquelles elle diviſe cette Grandeur.

Ainſi, une partie qui meſure une Grandeur deux fois, s'appelle un Demy, & s'écrit ainſi $\frac{1}{2}$. Une partie qui meſure une Grandeur trois fois, s'appelle un Tiers, & s'écrit ainſi $\frac{1}{3}$. Une partie qui meſure une Grandeur quatre fois, s'appelle un Quart, & s'écrit ainſi $\frac{1}{4}$. &c.

3. Une partie *aliquante* d'une Grandeur, eſt une partie de cette Grandeur qui ne la meſure pas préciſément.

Ainſi une Ligne de ſix pieds eſt une partie aliquante d'une Ligne de vingt pieds.

Quelquefois une partie aliquante d'une Grandeur a des parties aliquotes qui meſurent la Grandeur dont elle eſt partie, comme par exemple 8, qui eſt une partie aliquante de 12, a pour partie aliquote 4, qui eſt le tiers de 12 ; dont 8 par conſequent fait les deux-tiers, puiſqu'il contient deux fois 4, que l'on écrit ainſi $\frac{2}{3}$.

Les parties, ſoit aliquotes, ſoit aliquantes, s'appellent Fractions du Tout dont elles ſont parties. Et en les marquant comme nous venons de faire, le Caractere de deſſus s'appelle le Numerateur de la Fraction, & celui de deſſous s'appelle le Dénominateur.

4. Des parties pareilles, ou ſemblables, de deux Grandeurs, ce ſont des parties, dont l'une eſt en comparaiſon de ſa Grandeur, ou de ſon Tout, ce que l'autre eſt en comparaiſon du ſien.

Ainſi 3 & 5, ſont des parties ſemblables de 12 & de 20 ; parce que comme 3 eſt le quart de 12, de même 5 eſt le quart de 20.

Il

Il est bon de remarquer ici, que si on ôte des parties semblables de deux Grandeurs, les restes en seront des parties semblables.

Ainsi 3, qui est le quart de 12, étant ôté de 12; & 5, qui est le quart de 20, étant ôté de 20: les restes 9 & 15 sont des parties semblables de 12 & de 20, à sçavoir les trois-quarts.

5. Une Grandeur est dite multiple d'une autre Grandeur, lorsqu'elle la contient un certain nombre de fois précisément; & celle qui est contenuë s'appelle sous-multiple; laquelle sert de mesure à l'autre.

Ainsi une Ligne de 20 pieds est multiple d'une Ligne de 4 pieds; & une Ligne de 4 pieds est sous-multiple d'une Ligne de 20 pieds; parce que comme l'une contient, l'autre est contenuë, justement 5 fois; & ainsi l'une sert de mesure à l'autre.

6. Des Equimultiples de plusieurs Grandeurs, ce sont des Grandeurs qui contiennent également celles dont elles sont dites Equimultiples, ou qui sont également mesurées par ces Grandeurs.

Ainsi deux Lignes, dont l'une est de 20 pieds, & l'autre de 15 pieds, sont équimultiples de deux autres Lignes, dont l'une est de 4 pieds & l'autre de 3 pieds: parce que comme 20 est mesuré 5 fois par 4; aussi 15 est mesuré 5 fois par 3.

Il est évident que si à des Equimultiples de deux Grandeurs, on ajoûte d'autres Equimultiples de ces Grandeurs, les Touts seront encore Equimultiples de ces mêmes Grandeurs.

De même, si des Equimultiples de deux Grandeurs l'on ôte des Equimultiples de ces Grandeurs, les restes seront encore équimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou leur seront égaux.

7. Raison, c'est le rapport qui est entre deux Grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Les Grandeurs de même genre, comme sont

deux Lignes, deux Surfaces, deux Corps, s'appellent Homogenes.

Les grandeurs de divers genre, comme une Ligne & une Surface, une Surface & un Corps, s'appellent Heterogenes.

Or le rapport qui eſt entre deux Grandeurs de même genre, lorſqu'on les compare l'une à l'autre, pour ſçavoir comment & combien de fois l'une contient l'autre, ou l'autre eſt contenuë, s'appelle *Raiſon*.

Et d'autant qu'on ne peut pas dire comment & combien de fois une Grandeur eſt contenuë dans une autre qui n'eſt pas de même genre; cela fait qu'il n'y a point de Raiſon entre des Grandeurs de divers genre.

De même, d'autant que c'eſt une propriété particuliere aux Grandeurs finies, de pouvoir ſervir de meſure, & de pouvoir être meſurées, & qu'on ne peut pas dire qu'une Grandeur infinie contienne tant de fois une grandeur finie, ni qu'une Grandeur finie ſoit contenuë tant de fois dans une Grandeur infinie: De là vient auſſi qu'il n'y a point de Raiſon entre une Grandeur finie & une infinie, encore qu'on les ſuppoſe toutes-deux de même genre.

8. Les Termes d'une Raiſon, ſont les deux Grandeurs que l'on compare enſemble.

9. L'Antecedent d'une Raiſon, eſt le premier Terme des deux que l'on compare l'un à l'autre.

10. Le Conſequent d'une Raiſon, eſt le ſecond Terme des deux que l'on compare.

Ainſi comparant 15 à 10: l'Antecedent eſt 15, & le Conſequent eſt 10.

11. La Raiſon d'égalité, eſt une Raiſon où l'Antecedent eſt égal au Conſequent.

12. La Raiſon d'inégalité, eſt une Raiſon où l'Antecedent n'eſt pas égal au Conſequent.

13. La Raiſon d'inégalité majeure, eſt une Raiſon où l'Antecedent eſt plus grand que le Conſequent.

14. La

14. La Raiſon d'inégalité mineure, eſt une Raiſon où l'Antecedent eſt plus petit que le Conſequent.

15. La Raiſon Rationnelle, ou la Raiſon de nombre à nombre, eſt celle où l'on peut exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent, ou combien de fois il eſt contenu dans le Conſequent. Telle eſt la Raiſon qui eſt entre une Ligne de 6 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent contient le Conſequent une fois & demye; ou celle qui eſt entre une Ligne de 2 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent eſt contenu deux fois dans le Conſequent.

16. La Raiſon Irrationnelle, ou Sourde, eſt celle où il eſt impoſſible d'exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent, où combien de fois il eſt contenu dans le Conſequent; comme la Raiſon qui eſt entre le Côté d'un Quarré & ſa Diagonale; qui eſt telle, qu'encore que chaque Ligne à part ait pluſieurs parties aliquotes, il n'y en a pourtant pas une de celles qui meſurent l'une, qui puiſſe meſurer l'autre; & ainſi on ne ſçauroit exprimer par nombre le rapport qui eſt entre ces deux Lignes.

17. La quantité d'une Raiſon d'inégalité majeure, eſt le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent.

Ainſi comparant une Grandeur de 12 pieds avec une Grandeur de 6 pieds, la quantité de cette Raiſon eſt 2, d'autant que 12 pieds contiennent 6 pieds deux fois; & cette Raiſon s'appelle Double. De même, comparant 12 à 4, la quantité de cette Raiſon eſt 3, d'autant que 12 contient 4 trois fois; & cette raiſon s'appelle Triple. De même encore, comparant 12 à 8, la quantité de cette Raiſon eſt un & demi, d'autant que 12 contient 8 une fois & demye; & cette Raiſon s'appelle Seſquialtere. &c.

18. La quantité d'une Raiſon d'inégalité mineure eſt le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent eſt contenu dans le Conſequent, ou quelle partie il eſt du Conſequent.

Ainſi comparant une Grandeur de 6 pieds, avec une de 12 pieds, la quantité de cette Raiſon eſt un demi, parce que 6 pieds ſont la moitié de 12 pieds; & cette Raiſon s'appelle Sous-double. De même, comparant 4 à 12, la quantité de cette Raiſon eſt un tiers, d'autant que 4 eſt le tiers de 12; & cette Raiſon s'appelle Sous-triple. Et de même encore, comparant 8 à 12, la quantité de cette Raiſon eſt deux-tiers, d'autant que 8 ſont les deux-tiers de 12; & cette Raiſon s'appelle Sous-ſeſquialtere.

Par là, il paroît que deux Raiſons ſont égales, lorſque l'Antecedent de l'une contient ſon Conſequent, comme l'Antecedent de l'autre contient le ſien; ou bien lorſque l'Antecedent de l'une eſt contenu dans ſon Conſequent, comme l'Antecedent de l'autre eſt contenu dans le ſien.

Ainſi la Raiſon de 15 à 10 eſt égale à la Raiſon de 12 à 8; parce que comme 15 contient 10 une fois & demye, de même 12 contient 8 une fois & demye.

Mais une Raiſon eſt plus grande qu'une autre, lorſque l'Antecedent de la premiere contient plus de fois ſon Conſequent, que l'Antecedent de la ſeconde ne contient le ſien; ou bien lorſque l'Antecedent de la premiere eſt une plus grande partie de ſon Conſequent, que l'Antecedent de la ſeconde ne l'eſt du ſien.

Ainſi la Raiſon de 15 à 5 eſt plus grande que la Raiſon de 12 à 6; parce que l'Antecedent 15 contient ſon Conſequent 5, trois fois; au lieu que l'Antecedent 12 ne contient ſon Conſequent 6 que deux fois. *Tout au contraire*, la Raiſon de 6 à 12 eſt plus grande que la Raiſon de 5 à 15; parce que l'Antecedent 6 eſt la moitié de ſon Conſequent 12;

au

au lieu que l'Antecedent 5 n'eſt que le tiers de ſon Conſequent 15.

19. Proportion, c'eſt la reſſemblance ou l'égalité de deux Raiſons.

Ainſi il y a proportion entre ces quatre Grandeurs,

15 — 10 — 12 — 8;

parce que la Raiſon de 15 à 10 eſt la même, ou eſt égale à la Raiſon, de 12 à 8; ou comme l'on dit communément, parce que 15 eſt à 10, comme 12 eſt à 8.

20. Des Grandeurs proportionelles, ſont celles entre leſquelles il y a proportion.

Ainſi les Grandeurs 15 — 10 — 12 — 8, ſont proportionnelles; car comme 15 contient 10 une fois & demye, ainſi 12 contient 8 une fois & demye.

21. La Proportion continuë, eſt celle où le Conſequent de la premiere Raiſon ſert d Antecedent à la ſeconde.

Ainſi il y a proportion continuë entre ces trois Grandeurs, 18 — 12 — 8; parce que 18 eſt à 12, comme 12 eſt à 8: où l'on voit que 12, qui eſt le Conſequent de la premiere Raiſon, eſt l'Antecedent de la ſeconde.

22. La Proportion non-continuë, eſt celle où l'Antecedent de la ſeconde Raiſon [illegible]fferent du Conſequent de la premiere.

Telle eſt la Proportion qui eſt entre ces quatre Grandeurs, 15 — 10 — 12 — 8. Parce que 12, qui eſt l'Antecedent de la ſeconde Raiſon, eſt different de 10, qui eſt le Conſequent de la premiere.

23. Les Termes homologues d'une Proportion, ſont ceux qui tiennent le même rang, ou qui ſont de même nom, dans une Proportion.

Ainſi dans la Proportion précedente, les deux Antecedens 15 & 12, & les deux Conſequents 10 & 8, ſont des Termes homologues; parce qu'ils

tiennent le même rang, & ont un même nom, dans cette Proportion.

Remarquez que la Proportion dont il a été parlé jusques-ici, s'appelle Geometrique; pour la distinguer d'une autre, qu'on nomme Arithmetique, laquelle se rencontre entre trois Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont cette seconde surpasse la troisiéme, ou en est surpassée; ou bien entre quatre Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont la troisiéme surpasse la quatriéme, ou en est surpassée.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces trois Grandeurs, 16 — 12 — 8, est une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 4, de même aussi la seconde surpasse la troisiéme de 4.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces quatre Grandeurs, 15 — 10 — 7 — 2, est encore une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 5, de même aussi la troisiéme surpasse la quatriéme de 5.

Comme la Proportion Geometrique est la principale, & d'un plus grand usage que la Proportion Arithmetique, c'est aussi de celle-là dont nous entendrons parler, quand nous parlerons simplement de Proportion.

24. Conclure en Raison Inverse, ou en changeant les Termes, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que le Consequent de la premiere Raison est à son Antecedent, comme le Consequent de la seconde est au sien. Ou, ce qui est la même chose, c'est changer les Termes des Raisons, & faire que le Consequent devienne l'Antecedent, & l'Antecedent le Consequent.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8: si l'on vient à dire, donc 10 est à 15, comme

comme 8 eſt à 12 : cela s'appelle conclure en Raiſon inverſe.

Or il eſt évident que ſi quatre Grandeurs ſont proportionnelles, elles ſont encore proportionnelles en Raiſon inverſe. Car s'il eſt vrai que l'Antecedent de la premiere Raiſon contienne ſon Conſequent, de même que l'Antecedent de la ſeconde contient le ſien: il eſt vrai auſſi que le Conſequent de la premiere eſt contenu dans ſon Antecedent, de même que le Conſequent de la ſeconde eſt contenu dans le ſien.

Ou bien au contraire, ſi l'Antecedent de la premiere Raiſon eſt contenu dans ſon Conſequent, de même que l'Antecedent de la ſeconde eſt contenu dans le ſien: il eſt vrai auſſi que le Conſequent de la premiere Raiſon contient ſon Antecedent, de même que le Conſequent de la ſeconde contient le ſien. Car contenir & être contenu ſont termes relatifs, qui s'entendent & qui s'expliquent l'un par l'autre.

25. Conclure en Raiſon Alterne, c'eſt de quatre Grandeurs qui ſont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raiſon eſt à l'Antecedent de la ſeconde, comme le Conſequent de la premiere eſt au Conſequent de la ſeconde.

Ainſi, après avoir montré que 15 eſt à 10, comme 12 eſt à 8; ſi l'on vient à dire, donc 15 eſt à 12, comme 10 eſt à 8 : cela s'appelle conclure en Raiſon alterne.

Quelques uns eſtiment que ſuppoſé que quatre Grandeurs ſoient proportionnelles, il eſt évident qu'on peut conclure qu'elles ſont proportionelles en Raiſon alterne.

Neanmoins, il faut remarquer qu'on ne peut valablement conclure en Raiſon alterne, à moins que les quatre Grandeurs ne ſoient de même genre. Car par exemple, ſi on ſuppoſoit qu'une Ligne fût à une autre Ligne, comme une Superficie eſt à une

autre Superficie : on ne pourroit pas pour cela conclure que la premiere Ligne seroit à la premiere Superficie, comme la seconde Ligne est à la seconde Superficie ; étant évident, par ce qui a été dit ci-dessus, qu'il n'y a point de raison d'une Ligne à une Superficie.

26. Conclure en composant, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que la somme de l'Antecedent & du Consequent de la premiere Raison, est au seul Consequent de cette premiere Raison, comme la somme de l'Antecedent & du Consequent de la seconde Raison, est au seul Consequent de cette seconde Raison.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 25 est à 10, comme 20 est à 8 : cela s'appelle conclure en composant.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionelles, on peut conclure en composant, qu'elles sont aussi proportionnelles. Car conclure en composant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Consequens une fois plus que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la supposition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Consequens. D'où il suit, que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également ; & ainsi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

27. Conclure en divisant, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'excez du premier Antecedent par-dessus son Consequent, est à son Consequent, comme l'excez du second Antecedent par-dessus son Consequent, est aussi à son Consequent.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 5 est à 10, comme 4 est à 8 : cela s'appelle conclure en divisant.

Il eſt encore évident que ſi quatre Grandeurs ſont proportionelles, on peut conclure en diviſant, qu'elles ſont auſſi proportionnelles. Car conclure en diviſant, n'eſt autre choſe que compoſer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Conſequens une fois moins que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la ſuppoſition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Conſequens. D'où il ſuit que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également; & ainſi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

28. Conclure par converſion de Raiſon, c'eſt de quatre Grandeurs qui ſont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raiſon eſt à ſon excez par-deſſus ſon Conſequent, comme l'Antecedent de la ſeconde eſt à ſon excez par-deſſus le ſien.

Ainſi, aprés avoir montré que 15 eſt à 10, comme 12 eſt à 8; ſi l'on vient à dire, donc 15 eſt à 5, comme 12 eſt à 4: cela s'appelle conclure par converſion de Raiſon.

Il eſt encore évident que ſi quatre Grandeurs ſont proportionelles, on peut conclure par converſion de Raiſon, qu'elles ſont auſſi proportionnelles. Car puiſque, par ſuppoſition, les Antecedens contiennent également les Conſequens, c'eſt une neceſſité que les Conſequens ſoient des parties ſemblables des Antecedens. Si donc on ôte les Conſequens des Antecedens, les reſtes ſeront encore des parties ſemblables des mêmes Antecedens; & par conſequent les Antecedens les contiendront également, & la Raiſon qui ſera entr'eux ſera ſemblable.

29. Raiſon compoſée, c'eſt une Raiſon dont la quantité reſulte de la multiplication de la quantité de pluſieurs autres Raiſons.

Pour bien entendre cette Definition, conſiderez par exemple ces trois Grandeurs, 24. 6. 2: & re-

marquez que la premiere étant quadruple de la seconde, & la seconde étant triple de la troisiéme, & par consequent la quantité de la Raison de la premiere à la seconde étant 4, & celle de la seconde à la troisiéme étant 3: il est vrai de dire, que la premiere Grandeur, comparée à la troisiéme, en est le quadruple du triple, ou la contient quatre-fois trois-fois, c'est à dire douze-fois. Si bien que la quantité de la Raison de la premiere Grandeur à la troisiéme est 12. Or cette Raison dodecuple, qui resulte de la multiplication des quantitez des deux Raisons particulieres, 4 & 3, est dite composée de ces deux Raisons.

Il suit de là, que si on dispose à discretion tant de Grandeurs que l'on voudra: la Raison de la premiere à la derniere sera composée de toutes les Raisons moiennes & particulieres, qu'ont entr'elles toutes ces Grandeurs, étant comparées de suite l'une à l'autre. Ainsi, ayant disposé à discretion ces quatre Grandeurs, 24. 6. 3. 12: la Raison de 24 à 12, (qui est une Raison double,) est composée de celles de 24 à 6, de 6 à 3, & de 3 à 12. Et de fait, multipliant l'un par l'autre 4, 2, & $\frac{1}{4}$, (qui sont les quantitez de ces Raisons,) le produit, qui est 2, est la quantité de la Raison de 24 à 12.

Remarquez, que comme le même produit qui resulte de la multiplication de deux nombres, peut resulter de la multiplication de deux autres: aussi une même Raison peut être composée de plusieurs Raisons differentes. Ainsi, par exemple, la Raison dodecuple, que nous avons veu ci-dessus être composée de la quadruple & de la triple, peut aussi être composée de la sextuple & de la double.

Maintenant, si les Raisons qui se trouvent entre plusieurs Grandeurs d'une part, sont égales ou semblables à celles qui se rencontrent entre plusieurs autres Grandeurs d'une autre part, chacune à la sienne: il est évident que la Raison composée des

des premieres Raiſons, doit être égale à la Raiſon compoſée des autres ſemblables; étant neceſſaire que les mêmes quantités ou les mêmes nombres multipliés deux fois, produiſent le même nombre ou la même quantité.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe d'une part ces trois Grandeurs, 24. 6. 2. & d'autre part ces trois autres Grandeurs, 36. 9. 3; entre leſquelles les mêmes Raiſons, ſçavoir la quadruple & triple, ſe rencontrent: c'eſt une neceſſité que la Raiſon de 24 à 2, ſoit ſemblable à la Raiſon de 36 à 3; puiſque la quantité de chacune de ces Raiſons reſulte de la multiplication de 4 par 3.

30. Raiſon doublée, c'eſt une Raiſon compoſée de deux Raiſons ſemblables.

Ainſi ſuppoſant trois Grandeurs continuëment proportionnelles, telles que ſont celles-ci, 64. 16. 4; puis comparant la premiere à la troiſiéme: la Raiſon qui ſe trouve entre ces deux Grandeurs, 64 & 4, (laquelle eſt compoſée des deux Raiſons ſemblables de 64 à 16, & de 16 à 4,) s'appelle Raiſon doublée de 64 à 16.

31. Raiſon triplée, c'eſt une Raiſon compoſée de trois Raiſons ſemblables.

Ainſi, ſuppoſant quatre Grandeurs continuëment proportionnelles, comme ſont les ſuivantes 64. 16. 4. 1; puis comparant la premiere à la quatriéme: la Raiſon qui ſe trouve entre ces deux Grandeurs, 64 & 1, (laquelle eſt compoſée des trois Raiſons ſemblables de 64 à 16, de 16 à 4, & de 4 à 1,) s'appelle Raiſon triplée de 64 à 16.

32. Proportion ordonnée, c'eſt l'arrangement de pluſieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, diſpoſées de telle ſorte, que la premiere du premier ordre ſoit à la ſeconde, comme la premiere du ſecond ordre eſt à la ſeconde; puis la ſeconde du premier ordre à la troiſiéme, comme la ſeconde du ſecond ordre à la

troisiéme ; & la troisiéme du premier ordre à la quatriéme, comme la troisiéme du second est à la quatriéme, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les quatre Grandeurs suivantes, 12. 4 2. 8. & d'autre part ces quatre autres, 30. 10. 5. 20. qui sont disposées de telle sorte, que la premiere 12 est à la seconde 4, comme la premiere 30 est à la seconde 10 ; que la seconde 4 est à la troisiéme 2, comme la seconde 10 est à la troisiéme 5 ; & que la troisiéme 2 est à la quatriéme 8, comme la troisiéme 5 est à la quatriéme 20: cét arrangement s'appelle Proportion ordonnée.

33. Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte, que la premiere du premier ordre soit à la seconde, comme la penultiéme du second ordre est à la derniere ; puis la seconde du premier ordre à la troisiéme, comme l'antepenultiéme du second ordre à la penultiéme, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les trois Grandeurs 12. 4. 2. & d'autre part ces trois autres, 18. 9. 3. qui sont disposées de telle sorte, que la premiere 12 est à la seconde 4, comme la penultiéme 9 est à la derniere 3 ; & que la seconde 4 est à la troisiéme 2, comme l'antepenultiéme 18 à la penultiéme 9 : cét arrangement s'appelle Proportion troublée.

34. Conclure en Raison égale, c'est (aprés avoir supposé que quelques Grandeurs d'une part, & autant d'autres d'une autre part, sont proportionnelles, soit en Proportion ordonnée, soit en Proportion troublée,) conclure que la premiere d'une part est à la derniere, comme la premiere de l'autre part est à la derniere.

Ainsi, dans l'exemple qui a été ci-dessus rapporté de la Proportion ordonnée, conclure que la premiere Grandeur 12 est à la derniere 8, comme la premiere 30 est à la derniere 20 ; Ou bien, dans l'exem-

l'exemple de la Proportion troublée, conclure que la premiere Grandeur 12 eſt à la derniere 2, comme la premiere 18 eſt à la derniere 3 : cela s'appelle conclure en Raiſon égale.

Il eſt certain qu'on peut fort bien conclure en Raiſon égale ; c'eſt à dire qu'on peut fort bien conclure, que la Raiſon de la premiere Grandeur à la derniere d'une part, eſt ſemblable à la Raiſon de la premiere Grandeur à la derniere de l'autre part. Car chacune de ces Raiſons eſt compoſée des Raiſons moyennes & particulieres qu'il y a entre ces Grandeurs ; leſquelles Raiſons ſont ſuppoſées égales, ou les mêmes, & qui par conſequent doivent produire une même quantité.

Ainſi dans cét exemple de la Proportion ordonnée, 12. 4. 2. 8 ; 30. 10. 5. 20 ; la Raiſon de 12 à 8 eſt compoſée de la Raiſon triple, de la double, & de la ſous-quadruple ; & de même la Raiſon de 30 à 20 eſt compoſée de la Raiſon triple, de la double, & de la ſous-quadruple, qui ſont les mêmes.

De même auſſi, dans cét exemple de la Proportion troublée, 12. 4. 2 ; 18. 9. 3 ; la Raiſon de 12 à 2 eſt compoſée de la Raiſon triple, & de la double ; ou reſulte de la multiplication de 3 par 2 : & de même la Raiſon de 18 à 3 eſt compoſée de la Raiſon double & de la triple ; ou reſulte de la multiplication de 2 par 3, qui ſont les mêmes, & doivent par conſequent produire une même quantité.

Encore que toutes les manieres de conclure, dont il a été parlé ci-deſſus, paroiſſent fort juſtes & convainquantes à tous ceux qui les examinent avec un peu d'attention ; neanmoins Euclide a jugé à propos de les démontrer, auſſi bien que quelques autres veritez auſſi faciles ; & c'eſt à quoi il employe le cinquiéme Livre de ces Elemens. Mais il préſuppoſe les trois Axiomes ſuivans, qui à dire le vrai ne ſont pas plus évidens que les choſes à la preuve deſquelle il les employe.

AXIOMES.

1. Si de quatre Grandeurs proportionnelles, l'on prend à discretion des Equimultiples des deux Antecedens, comme aussi des deux Consequens: les Equimultiples des deux Antecedens seront toûjours, ou plus grands, ou plus petits, ou égaux à ceux des Consequens.

Ainsi, de ces quatre Grandeurs, qui sont proportionnelles, 15. 10. 12. 8. prenant à discretion des Equimultiples de 15 & de 12; comme aussi de 10 & de 8: si l'Equimultiple de 15 surpasse l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 surpassera l'Equimultiple de 8: ou bien si l'Equimultiple de 15 est égal à l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi égal à l'Equimultiple de 8: ou enfin, si l'Equimultiple de 15 est moindre que l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi moindre que l'Equimultiple de 8.

2. Tout au contraire, si quatre Grandeurs sont telles, qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisiéme, c'est à dire des deux Antecedens; & de la seconde, & de la quatriéme, c'est à dire des deux Consequens: il arrive que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être égal à l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne soit aussi égal à l'Equimultiple de la quatriéme: Ou que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais surpasser l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne surpasse celui de la quatriéme: Ou enfin, que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être moindre que l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne soit aussi moindre que celui de la quatriéme: alors ces quatre Grandeurs sont porportionnelles. Ainsi, parce que ces circonstances arrivent toû-

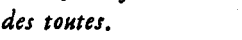
toûjours en ces quatre Grandeurs 15. 10. : 12. 8. elles ſont proportionnelles.

3. Enfin, ſi quatre Grandeurs ſont telles, qu'en prenant à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, comme auſſi de la ſeconde & de la quatriéme, il puiſſe quelquefois arriver que l'Equimultiple de la premiere ſurpaſſera l'Equimultiple de la ſeconde, ſans que l'Equimultiple de la troiſiéme ſurpaſſe celui de la quatriéme : alors ces quatre Grandeurs ne ſont pas proportionnelles ; & il y a plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme. Ainſi ces quatre Grandeurs, 12. 6. : 7. 5. ne ſont pas proportionnelles ; & il y a plus grande Raiſon de 12 à 6, que de 7 à 5. Car prenant à diſcretion des Equimultiples de 12 & de 7, par exemple 24 & 14, comme auſſi de 6 & de 5, par exemple 18 & 15 : il arrive que l'Equimultiple de 12, ſçavoir 24, ſurpaſſe 18, Equimultiple de 6 ; ſans que l'Equimultiple de 7, ſçavoir 14, ſurpaſſe 15, l'Equimultiple de 5.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra équimultiples d'autant d'autres Grandeurs, chacune à la sienne: comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes.



JE suppose qu'il y ait d'une part deux Grandeurs, sçavoir AB, CD; & d'autre part deux autres Grandeurs, sçavoir E & F; & que AB soit autant multiple de E, que CD est multiple de F. Cela étant, je dis que comme AB est multiple de E, ou CD multiple de F; de même AB & CD, prises ensemble, sont multiples de E, & de F, prises aussi ensemble. Pour le prouver,

Concevez que AB soit divisée en trois parties égales à E, sçavoir AG, GH, HB; & CD en trois parties égales à F, sçavoir CI, IK, KD: ce qui est possible, puisque AB & CD sont supposées équimultiples de E & de F. Cela posé:

Puisque AG est égale à E, & que CI est égale à F; il s'ensuit que AG & CI, prises ensemble, seront égales à E & à F, prises aussi ensemble. De même, GH & IK, prises ensemble, seront aussi égales à E & à F, prises ensemble; & ainsi de suite. Et parce que AB & CD sont supposées équimultiples de E & de F, & qu'ainsi le nombre des parties de AB égales à E, est égal au nombre des parties de CD égales à F: autant de fois que l'on pourra pren-

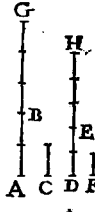
prendre dans AB une partie égale à E, autant de fois on pourra prendre dans AB & CD des parties égales à E & à F. Et par conſequent, comme AB eſt triple de E, ainſi AB & CD, priſes enſemble, ſont triples de E & de F, priſes auſſi enſemble; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si la premiere Grandeur eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſiéme l'eſt de la quatriéme; & la cinquiéme encore autant multiple de la ſeconde, que la ſixiéme l'eſt auſſi de la quatriéme: la Grandeur compoſée de la premiere & de la cinquiéme, ſera autant multiple de la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, le ſera de la quatriéme.

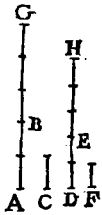
JE ſuppoſe ces ſix Grandeurs, AB, C, DE, F, BG, EH; & que la premiere AB ſoit autant multiple de la ſeconde C, que la troiſiéme DE l'eſt de la quatriéme F; & que la cinquiéme BG ſoit encore autant multiple de la ſeconde C, que la ſixiéme EH l'eſt auſſi de la quatriéme F. Cela étant, je dis que la Grandeur compoſée de la premiere & de la cinquiéme,



ſçavoir

ſçavoir AG, eſt autant multiple de la ſeconde C, que la Grandeur DH, compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, l'eſt de la quatriéme F. Pour le prouver,

Puiſque AB & DE ſont équimultiples de C & de F, le nombre des parties que AB contient égales à C, eſt égal au nombre des parties que DE contient égales à F. De même, puiſque BG & EH ſont encore équimultiples de C & de F, le nombre des parties que BG contient égales à C, eſt auſſi égal au nombre des parties que EH contient égales à F. Si donc aux nombres égaux des parties de AB & de DE, on ajoûte les nombres égaux des parties de BG & de EH; il s'enſuivra que le nombre des parties que la toute AG contiendra égales à C, ſera égal au nombre des parties que la toute DH contiendra égales à F: c'eſt à dire que AG ſera autant multiple de C, que DH le ſera de F; Ce qu'il falloit démontrer.



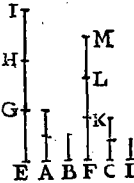
PRO-

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si la premiere Grandeur eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſiéme l'eſt de la quatriéme, & qu'on prenne des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme: l'Equimultiple de la premiere ſera autant multiple de la ſeconde, que l'Equimultiple de la troiſiéme le ſera de la quatriéme.

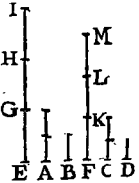
JE ſuppoſe ces quatre Grandeurs, A, B, C, D; dont la premiere, à ſçavoir A, eſt autant multiple de la ſeconde B, que la troiſiéme C l'eſt de la quatriéme D. Je ſuppoſe deplus, qu'on ait pris les Grandeurs EI & FM, équimultiples de la premiere A & de la troiſiéme C. Cela étant, je dis que EI eſt autant multiple de la ſeconde B, que FM l'eſt de la quatriéme D. Pour le prouver,



Concevez que EI ſoit diviſée en trois parties égales à A, ſçavoir, EG, GH, HI; & FM en trois parties égales à C, ſçavoir FK, KL, LM. Cela poſé:

Puiſque EG eſt égale à A, & FK égale à C, il s'enſuit que EG & FK contiennent autant de fois B & D, que A & C les contiennent. Il en eſt de même

même des parties GH & KL, & ainsi de suite. Or puisque la premiere Grandeur EG est autant multiple de la seconde B, que la troisiéme FK l'est de la quatriéme D; & que la cinquiéme GH est encore autant multiple de la seconde B, que la sixiéme KL l'est de la quatriéme D : il s'ensuit, par la Proposition precedente, que la Grandeur EH, composée de la premiere & de la cinquiéme, est autant multiple de la seconde B, que la Grandeur FL, composée de la troisiéme & de la sixiéme, l'est de la quatriéme D. Ensuite de quoi, prenant EH & FL pour la premiere & la troisiéme Grandeur, & HI & LM pour la cinquiéme & la sixiéme : on conclura de même, que EI est autant multiple de B, que FM l'est de D; Ce qu'il falloit démontrer.



PRO-

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, & qu'on prenne à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, comme auſſi des Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il y aura même Raiſon de l'Equimultiple de la premiere à l'Equimultiple de la ſeconde, que de l'Equimultiple de la troiſiéme à l'Equimultiple de la quatriéme.

JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D ; & qu'on ait pris à diſcrétion E & F, équimultiples de la premiere A, & de la troiſiéme C ; comme auſſi G & H, équimultiples de la ſeconde B, & de la quatriéme D. Cela étant, je dis qu'il y a même Raiſon de E, Equimultiple de la premiere, à G, Equimultiple de la ſeconde ; que de F, Equimultiple de la troiſiéme, à H, Equimultiple de la quatriéme. Pour le prouver,

Prenez I & K, équimultiples de E & de F. Prenez auſſi L & M, équimultiples de G & de H. Cela poſé :

Puiſque

Puiſque E, conſiderée comme premiere Grandeur, eſt autant multiple de A, conſiderée comme ſeconde, que F, troiſiéme, l'eſt de C, quatriéme; & qu'on a pris les Grandeurs I & K, équimultiples de E & de F: il s'enſuit, par la Propoſition precedente, que I & K ſont auſſi équimultiples de A & de C, c'eſt à dire de la premiere & de la troiſiéme des quatre que nous avons ſuppoſées proportionnelles. De même, G & H étant équimultiples de B & de D; & L & M ayant été priſes équimultiples de G & H: il s'enſuit que L & M ſont équimultiples de B & de D, c'eſt à dire de la ſeconde & de la quatriéme des quatre que nous avons ſuppoſées proportionnelles. Par conſequent, par le premier Axiome de ce Livre, ſi l'Equimultiple I ſurpaſſe l'Equimultiple L, l'Equimultiple K ſurpaſſera l'Equimultiple M; s'il eſt égal, l'autre ſera égal; s'il eſt moindre, l'autre ſera auſſi moindre. Cela étant, puiſque I & K ont été priſes équimultiples de E & de F, premiere & troiſiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & que L & M ont été priſes équimultiples de G & de H, ſeconde & quatriéme de ces quatre Grandeurs: il s'enſuit, par le ſecond Axiome, qu'elles ſont en effet proportionnelles; & qu'ainſi il y a même Raiſon de E à G, que de F à H; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Par cette même methode, on peut aiſément prouver, que ſi quatre Grandeurs ſont proportionnelles, elles

elles seront encore proportionnelles en Raison inverse. Par exemple, si A est à B, comme C est à D: on prouvera aisément que B sera à A, comme D est à C. Car aprés avoir pris E & F, équimultiples de A & de C, premiere & troisiéme Grandeurs des quatre qui sont supposées proportionnelles; puis G & H, équimultiples de B & D, seconde & quatriéme: on conclura, par le premier Axiome de ce Livre, que si E est égale à G, F sera égale à H; si E surpasse G, F surpassera H; & si E est moindre que G, F sera moindre que H. Or si cela est vrai, il est donc vrai aussi, que si G est égale à E, H sera égale à F; si G est moindre que E, H sera moindre que F; & si G surpasse E, H surpassera aussi F. Considerant donc maintenant B comme premiere Grandeur, A comme seconde, D comme troisiéme, & C comme quatriéme; on conclura, par le second Axiome, que ces quatre Grandeurs sont proportionnelles en Raison inverse, c'est à dire que B est à A, comme D est à C; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

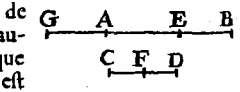
THEOREME V.

Si une Grandeur est autant multiple d'une autre Grandeur, que la retranchée l'est de la retranchée: le reste sera autant multiple du reste, que la toute l'est de la toute.

SI'E suppose que AB est autant multiple de CD, que la retranchée AE l'est de la retranchée CF. Cela

étant, je dis que le reste EB est autant multiple du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD. Pour le prouver,

Posons que GA soit autant multiple de FD, que AE l'est de CF, ou que AB l'est de CD. Il s'ensuivra, par la 1. Prop. de ce Livre, que GE sera autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Or AB est supposée autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Donc GE est autant multiple CD, que AB l'est aussi de CD. Et par consequent les Grandeurs GE & AB, qui sont équimultiples d'une même Grandeur, sont égales entr'elles. Si donc on ôte la partie AE, qui leur est commune, le reste GA sera égal à EB. Or GA a été posée autant multiple de FD, que AB l'est de CD. Et partant EB est autant multiple de FD, que AB l'est de CD; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si deux Grandeurs sont équimultiples de deux autres Grandeurs, & qu'on en retranche des équimultiples : les restes seront équimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou ils leur seront égaux.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, CD, soient équimultiples des deux autres Grandeurs E & F, & qu'on en ait retranché AG & CH, équimultiples des mêmes Grandeurs E & F. Cela posé,

posé, je dis que les restes GB & HD sont équimultiples de E & de F, ou qu'ils leur sont égaux. Pour le prouver,

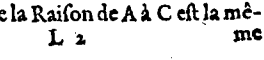
Puisque AB & CD sont équimultiples de E & de F, il y a dans AB autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CD d'égales à F. Et puisque AG & CH sont aussi équimultiples de E & de F, il y a aussi dans AG autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CH d'égales à F. Si donc des deux nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AB & dans CD, on ôte les nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AG & dans CH, il s'ensuit qu'il restera dans GB autant de parties égales à E, qu'il en restera dans HD d'égales à F. Et par conséquent, s'il en reste plusieurs dans GB & dans HD, ces restes seront équimultiples de E & de F; que s'il n'en reste qu'une, ces restes leur seront égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

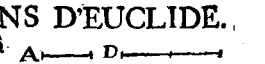
Les Grandeurs égales ont même Raison à une même Grandeur; & une même Grandeur a même Raison à des Grandeurs égales.

JE suppose que les deux Grandeurs A & B sont égales. Cela étant, je



dis premierement que la Raison de A à C est la même

me que celle de B à C. Pour le prouver, Prenez à discretion les Grandeurs D & E, équimultiples de la premiere Grandeur A, & de la troisiéme B. Prenez encore à discretion la Grandeur F, équimultiple de la seconde & quatriéme C. Cela posé :



Puisque les Grandeurs D & E sont équimultiples des deux Grandeurs égales A & B, elles sont aussi égales entr'elles. Et par consequent, si D est égale à F, E lui est aussi égale ; si D est plus grande que F, E est aussi plus grande que F ; enfin si D est moindre que F, E est aussi moindre que F. D'où il suit que A est à C, comme B est à C, par le 2. Ax. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

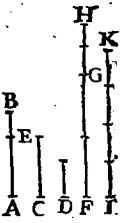
Je dis en second lieu, qu'il y a même Raison de C à A, que de C à B. Car puisque A est à C, comme B est à C : en Raison inverse, (par le Corollaire de la 4 Prop. de ce Livre,) C est à A, comme C est à B ; Ce qu'il falloit aussi démontrer.

PRO-

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si deux Grandeurs ſont inégales, la plus grande aura plus grande Raiſon à une même Grandeur, que la plus petite; & au contraire, cette même Grandeur aura plus grande Raiſon à la plus petite, qu'à la plus grande.



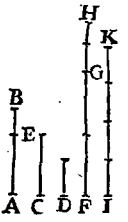
JE ſuppoſe que les deux Grandeurs AB & C ſoient inégales, & que AB ſoit la plus grande. Cela étant, je dis premierement que AB a plus grande Raiſon à D, que C n'a à D. Pour le prouver,

Retranchez de AB la partie AE, égale à C. Puis prenez FG & GH, équimultiples de AE & de EB; de telle ſorte que chacune des deux Grandeurs FG & GH ſurpaſſe la Grandeur D. Prenez encore la Grandeur IK tellement multiple de D, qu'elle ſoit plus grande que FG, mais plus petite que FH. Or cela ſe peut faire aiſément; car puiſque FG ſurpaſſe D, il eſt aiſé de multiplier D enſorte qu'elle ſurpaſſe FG, ſans qu'elle ſurpaſſe FH. Cela poſé:

Puiſque FG & GH ſont équimultiples de AE & de EB, il s'enſuit (par la 1. Prop.) que FH eſt autant multiple de la toute AB, que FG l'eſt de AE, ou de ſon égale C.

Conſiderant donc ici ces quatre Grandeurs, AB premiere, D ſeconde, C troiſiéme, & derechef

D quatriéme ; & que les Grandeurs FH, FG, ſont équimultiples de la premiere AB & de la troiſiéme C ; & que IK eſt équimultiple de la ſeconde & de la quatriéme D : Puiſque FH multiple de la premiere AB ; ſurpaſſe IK multiple de la ſeconde D, ſans que FG multiple de la troiſiéme C, ſurpaſſe IK multiple de la quatriéme, qui eſt la même D : il s'enſuit (par le 3. Ax.) que la premiere Grandeur AB, a plus grande Raiſon à la ſeconde D, que la troiſiéme C n'a à la quatriéme, c'eſt à dire à la même Grandeur D ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je dis en ſecond lieu, que la Grandeur D a plus grande Raiſon à la plus petite C, qu'elle n'a à la plus grande AB. Pour le prouver,

Conſiderant maintenant D comme premiere & troiſiéme Grandeur, C comme ſeconde, & AB comme quatriéme : Puiſque IK multiple de la premiere D, ſurpaſſe FG multiple de la ſeconde C, ſans que IK multiple de la troiſiéme D, ſurpaſſe FH multiple de la quatriéme AB : il s'enſuit (par le 3. Ax.) que D a plus grande Raiſon à la plus petite C, que la même D n'a à la plus grande AB ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Les Grandeurs qui ont même Raiſon à une même Grandeur, ſont égales entr'elles; & celles auxquelles une même Grandeur a même Raiſon, ſont auſſi égales entr'elles.

JE ſuppoſe premierement, que les deux Grandeurs A & B ayent même Raiſon à la même Grandeur C. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B ſont égales entr'elles.

Car ſi cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus grande que l'autre. Et cela étant, il s'enſuivroit, par la Propoſition précedente, que la plus grande auroit plus grande Raiſon à la Grandeur C, que n'auroit la plus petite; ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'une n'eſt donc pas plus grande que l'autre; & par conſequent elles ſont égales.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, qu'une même Grandeur, comme C, ait même Raiſon à deux Grandeurs, comme A & B. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B ſont auſſi égales entr'elles.

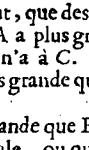
Car ſi cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus petite que l'autre. Et cela étant, il s'enſuivroit, par la Propoſition précedente, que la Grandeur C auroit plus grande Raiſon à celle qui ſeroit plus petite, qu'elle n'auroit à la plus grande; ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'une n'eſt donc pas plus petite que l'autre; & par conſequent elles ſont égales; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

De deux Grandeurs, celle qui a plus grande Raiſon à une même, eſt la plus grande ; & au contraire, celle à laquelle une même a plus grande Raiſon, eſt la plus petite.

JE ſuppoſe premierement, que des deux Grandeurs A & B, A a plus grande Raiſon à C, que B n'a à C. Cela étant, je dis que A eſt plus grande que B. Pour le prouver,



Si A n'étoit pas plus grande que B, il faudroit qu'elle lui fût égale, ou qu'elle fût plus petite que B. Si elle lui étoit égale, il s'enſuivroit (par la 7. Prop.) que A & B auroient même Raiſon à C ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. A n'eſt donc pas égale à B. Que ſi A étoit plus petite que B, il s'enſuivroit, (par la 8. Prop.) que A auroit moindre Raiſon à C, que B n'a à C ; ce qui eſt auſſi contre la ſuppoſition. A n'eſt donc pas auſſi plus petite que B. Par conſequent A eſt plus grande que B ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que C a plus grande Raiſon à B, que C n'a à A. Cela étant, je dis que B eſt plus petite que A.

Car ſi cela n'étoit, il faudroit que B fût égale à A, ou qu'elle fût plus grande. Si elle étoit égale, il s'enſuivroit (par la 7. Prop.) qu'il y auroit même Raiſon de C à B, que de C à A ; ce qui eſt contre

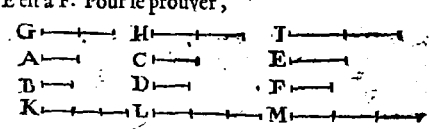
tre la supposition. B n'est donc pas égale à A. Que si B étoit plus grande que A, il s'ensuivroit (par la 8. Prop.) qu'il y auroit plus grande Raison de C à A, que de C à B; ce qui est encore contre la supposition. B n'est donc pas aussi plus grande que A. Par consequent B est plus petite que A; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

THEOREME XI.

Les Raisons qui sont semblables à une même, sont semblables entr'elles.

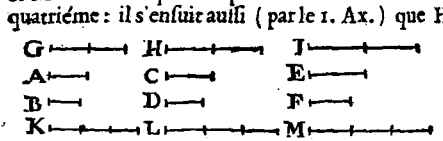
JE suppose que A soit à B, comme C est à D; & de plus, que comme C est à D, ainsi E soit à F. Cela étant, je dis que comme A est à B, ainsi E est à F. Pour le prouver,



Prenez à discretion G, H, I, équimultiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à discretion K, L, M, équimultiples des Consequens B, D, F. Cela posé:

Puisque les quatre Grandeurs A, B, C, D, sont proportionnelles, & que G & H sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme, & que K & L sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme: il s'ensuit (par le 1. Ax.) que G ne pourra être égal à K, que H ne soit égal à L; ou que G ne pourra surpasser K, que H ne surpasse L; ou enfin que G ne pourra être moindre que K, que

H ne soit aussi moindre que L. Mais puisque les quatre Grandeurs C, D, E, F, sont aussi proportionnelles, & que H & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme Grandeur, & que L & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme : il s'ensuit aussi (par le 1. Ax.) que H



ne sçauroit être égal à L, que I ne soit égal à M ; ou que H ne sçauroit être plus grand que L, que I ne soit plus grand que M ; ou enfin que H ne sçauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Et partant G ne pourra être égal à K, que I ne soit égal à M ; ou bien G ne pourra être plus grand que K, que I ne soit plus grand que M ; ou bien enfin G ne pourra être moindre que K, que I ne soit aussi moindre que M.

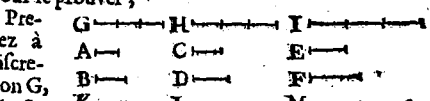
Mais G & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & K & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. D'où il suit (par le 2. Ax.) que ces quatre Grandeurs A, B, E, F, sont proportionnelles ; c'est à dire, que A est à B, comme E est à F. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

Si tant de Grandeurs que l'on voudra ſont proportionnelles : comme l'un des Antecedens ſera à ſon Conſequent, ainſi tous les Antecedens pris enſemble ſeront à tous les Conſequens pris enſemble.

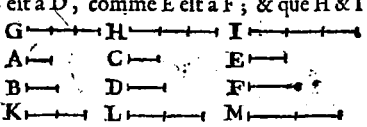
JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D, & E à F. Cela étant, je dis que comme l'un des Antecedens A eſt à ſon Conſequent B, ainſi tous les Antecedens A, C, E, pris enſemble, ſont à tous les Conſequens B, D, F, pris auſſi enſemble. Pour le prouver,



équimultiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à diſcretion K, L, M, équimultiples des Conſequens B, D, F. Cela poſé :

Il s'enſuit (par la 1. Prop.) qu'autant que la Grandeur G eſt multiple de la Grandeur A, autant auſſi les Grandeurs G, H, I, priſes enſemble, ſont multiples des Grandeurs A, C, E, priſes auſſi enſemble ; & qu'autant que la Grandeur K eſt multiple de la Grandeur B, autant les Grandeurs K, L, M, priſes enſemble, ſont multiples des Grandeurs B, D, F, priſes auſſi enſemble. D'ailleurs, puiſque A eſt à B, comme C eſt à D ; & que G & H ſont équimul-

tiples de la premiere & troisiéme, & K & L équimultiples de la seconde & quatriéme : il suit (par le 1. Ax.) que si G est égale à K, H sera égale à L ; ou que si G surpasse K, H surpassera L ; ou enfin que si G est moindre que K, H sera aussi moindre que L. Mais puisque C est à D, comme E est à F ; & que H & I sont équimultiples de la premiere



& de la troisiéme de ces Grandeurs, & L & M équimultiples de la seconde & de la quatriéme : H ne sçauroit aussi être égale à L, que I ne soit égale à M ; ou bien H ne sçauroit surpasser L, que I ne surpasse M ; ou enfin H ne sçauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Par consequent G ne sçauroit être égale à K, que G, H, I, prises ensemble, ne soient aussi égales à K, L, M, prises aussi ensemble ; ou bien G ne sçauroit surpasser K, que G, H, I, ne surpassent K, L, M ; ou enfin G ne sçauroit être moindre que K, que G, H, I, ne soient moindres que K, L, M. Mais G d'une part, & G, H, I, d'autre part, sont équimultiples de la premiere A, & de la troisiéme A, C, E, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; comme aussi K d'une part, & K, L, M, d'autre part, sont équimultiples de la seconde B, & de la quatriéme B, D, F, de ces quatre Grandeurs. D'où il suit (par le 2. Ax.) qu'elles sont proportionnelles ; & ainsi, que comme A est à B, ainsi A, C, E, prises ensemble, sont à B, D, F, prises aussi ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

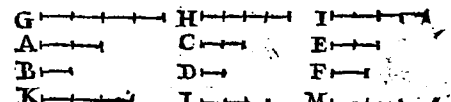
PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME XIII.

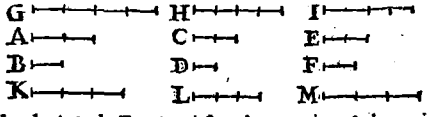
Si la premiere Grandeur eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme eſt à la quatriéme; mais que la troiſiéme ait plus grande Raiſon à la quatriéme, que la cinquiéme à la ſixiéme: il y aura auſſi plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la cinquiéme à la ſixiéme.

JE ſuppoſe les ſix Grandeurs A, B, C, D, E, F, & que la premiere A ſoit à la ſeconde B, comme la troiſiéme C eſt à la quatriéme D; mais que la Raiſon de C à D ſoit plus grande que celle de la cinquiéme E à la ſixiéme F. Cela étant, je dis que A a plus grande Raiſon à B, que E n'a à F. Pour le prouver,



Puiſque A eſt à B, comme C eſt à D; il s'enſuit (par le 1. Ax.) qu'en prenant à diſcrétion des Equimultiples de la premiere & troiſiéme Grandeur, & des Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme: jamais l'Equimultiple de C ne ſurpaſſera l'Equimultiple de D, que l'Equimultiple de A ne ſurpaſſe auſſi l'Equimultiple de B. Mais puiſqu'il

y a plus grande Raiſon de C à D, que de E à F; ſi l'on prend à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, & des Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il ſe pourra faire que l'Equimultiple de C ſurpaſſera l'Equimultiple de D, ſans que l'Equimultiple de E ſurpaſſe l'Equimultiple de F. Partant il ſe pourra faire auſſi qu'ayant pris à diſcretion des Equimulti-



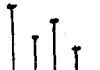
ples de A & de E, (qui ſont la premiere & la troiſiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver n'être pas proportionnelles,) & de même des Equimultiples de B & de F, qui ſont la ſeconde & la quatriéme : il ſe pourra, dis je, faire que l'Equimultiple de la premiere A ſurpaſſera l'Equimultiple de la ſeconde B, ſans que l'Equimultiple de la troiſiéme E ſurpaſſe l'Equimultiple de la quatriéme F. D'où il ſuit (par le 3. Ax.) qu'il y a plus grande Raiſon de A à B, que de E à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIV.

Si de quatre Grandeurs proportionnelles, la premiere eſt plus grande que la troiſiéme: la ſeconde ſera auſſi plus grande que la quatriéme ; ſi égale, égale ; ſi moindre, moindre.



JE ſuppoſe que les quatre Grandeurs A, B, C, D, ſoient proportionnelles, & premierement que la premiere A ſoit plus grande que la troiſiéme C. Cela étant, je dis que la ſeconde B eſt auſſi plus grande que la quatriéme D. Pour le prouver,

Puiſque A eſt plus grande que C, il y a plus grande Raiſon de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raiſon de A à B eſt la même que celle de C à D, par ſuppoſition. Il y a donc auſſi plus grande Raiſon de C à D, que de C à B. Et partant (par la 10. Prop.) D ſera plus petite que B, ou B plus grande que D ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que de ces quatre Grandeurs proportionnelles A, B, C, D, la premiere A ſoit égale à la troiſiéme C. Cela étant, je dis que la ſeconde B eſt auſſi égale à la quatriéme D. Pour le prouver,

Puiſque A eſt égale à C, il y a même Raiſon de A à B, que de C à B, par la 7. Prop. Or la Raiſon de A à B eſt la même que celle de C à D. Il y a donc auſſi même Raiſon de C à D, que de

de C à B. Et partant (par la 9. Prop.) les Grandeurs B & D sont égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose enfin que de ces quatre Grandeurs proportionelles A, B, C, D, la premiere A soit moindre que la troisiéme C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi moindre que la quatriéme D. Pour le prouver,

Puisque A est moindre que C, il y aura moindre Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D. Il y aura donc aussi moindre Raison de C à D, que de C à B. Et partant (par la 10. Prop.) B sera moindre que D ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XV.

Si deux Grandeurs sont équimultiples de deux autres Grandeurs, elles seront entr'elles comme les Grandeurs dont elles sont équimultiples.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, DE, soient équimultiples des deux autres Grandeurs C & F; sçavoir AB autant multiple de C, que DE l'est de F. Cela étant, je dis que AB est à DE, comme C est à F. Pour le prouver,

Puisque AB & DE sont équimultiples de C & de F : il y a dans AB autant de parties égales à C, qu'il y en a dans DE d'égales à F. Donc

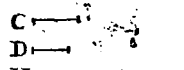
(par

(par la 7. Prop.) la premiere des parties de AB a même Raiſon à la premiere de DE, que la ſeconde de AB à la ſeconde de DE, & que la troiſiéme à la troiſiéme, & ainſi de ſuite, s'il y en a; & cette Raiſon eſt la même que celle de C à F. Deplus, puiſque nous avons dans AB pluſieurs Grandeurs qui ſont toutes en même Raiſon à autant d'autres dans DE: il s'enſuit (par la 12. Prop.) que toutes les parties de AB priſes enſemble, ſont à toutes les parties de DE priſes auſſi enſemble, (ce qui eſt la même choſe que la toute AB eſt à la toute DE,) comme une ſeule partie de AB eſt à une ſeule partie de DE. Or une ſeule partie de AB a été montrée être à une ſeule partie de DE, comme G eſt à F. Partant AB eſt à DE, comme C eſt à F. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XVI.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en Raiſon alterne.

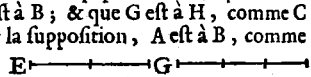


JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D. Cela étant, je dis que ces Grandeurs ſont encore proportionnelles en Raiſon alterne; c'eſt à dire que A eſt à C, comme B eſt à D. Pour le prouver,

Prenez des Equimultiples tels qu'il vous plaira de A & de B, comme par exemple E & F. Prenez encore des Equimultiples tels auſſi qu'il vous plaira de C & de D, comme G & H. Cela poſé:

Il

Il s'ensuit (par la Prop. précedente) que E est à F, comme A est à B; & que G est à H, comme C est à D. Or par la supposition, A est à B, comme C est à D.



Partant (par la 11. Prop.) E est à F, comme G est à H. D'où il suit (par la 14. Prop.) que si E est plus grande que G, F sera plus grande que H; si égale, égale; si moindre, moindre. Or est-il que E & F sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & que G & H sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même Raison de A à C, que de B à D; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

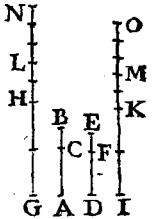
THEOREME XVII.

Si des Grandeurs composées sont proportionnelles, en divisant elles seront aussi proportionnelles.

JE suppose que AB est à BC, comme DE est à EF. Cela étant, je dis qu'en divisant elles seront encore proportionnelles; c'est à dire qu'il y aura même Raison de AC à CB, que de DF à FE. Pour le prouver,

Prenez à discretion les Grandeurs GH & IK' équimultiples de AC & de DF. Puis prenez HL & KM, équimultiples de CB & de FE, & autant mul-

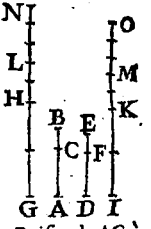
multiples de ces Grandeurs, que GH & IK le sont de AC & de DF. Prenez derechef à discretion LN & MO, équimultiples de CB & de FE. Cela posé :



Puisque GH & HL sont équimultiples de AC & de CB : il s'ensuit (par la 1. Prop.) que GL sera autant multiple de AB, que GH l'est de AC. Or GH est autant multiple de AC, que IK l'est de DF. Donc GL est autant multiple de AB, que IK l'est de DF. D'ailleurs, IK & KM sont équimultiples de DF & de FE. Donc (par la 1. Prop.) autant que IK est multiple de DF, autant IM est multiple de DE. Et par consequent GL & IM s'ensuivent équimultiples de AB & de DE, qui sont la premiere & la troisiéme des quatre Grandeurs qui sont supposées proportionnelles. Deplus HL, considerée comme premiere Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que KM troisiéme l'est de FE quatriéme ; & LN, cinquiéme Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que MO, sixiéme Grandeur, l'est de FE quatriéme. Partant (par la 2. Prop.) HN sera autant multiple de CB, que KO l'est de FE ; c'est à dire que HN & KO sont encore équimultiples de la seconde & de la quatriéme Grandeur des quatre que nous avons supposées être proportionnelles. Ainsi (par le 1. Ax.) si GL est égale à HN, IM sera égale à KO ; si GL surpasse HN, IM surpassera KO ; & si GL est moindre que HN, IM sera moindre que KO. C'est pourquoi en retranchant des deux Grandeurs GL & HN, la partie HL, qui leur est commune ; & des deux Grandeurs IM, & KO, la partie KM, qui leur est aussi commune : il sera encore vrai de dire, que si GH est égale à LN, IK sera égale à MO ; si GH surpasse LN, IK surpassera MO ; & si GH est moindre que LN, IK

sera

sera moindre que MO. Mais GH & IK sont les Equimultiples de la premiere AC, & de la troisiéme DF, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & LN & MO sont aussi les Equimultiples de la seconde CB, & de la quatriéme FE. Donc (par le 2. Axiome) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même Raison de AC à CB, que de DF à FE; Ce qu'il falloit démontrer.



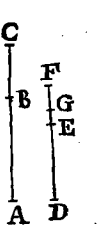
PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVIII.

Si des Grandeurs divisées sont proportionnelles, en composant elles seront encore proportionnelles.

JE suppose que la Grandeur AB soit à la Grandeur BC, comme la Grandeur DE est à la Grandeur EF. Cela étant, je dis qu'en composant, ces Grandeurs seront encore proportionnelles; c'est à dire, que comme AC sera à BC, ainsi DF sera à EF.

Car si cela n'étoit, il faudroit que AC fût à BC, comme DF est à une autre Grandeur que EF. Posons, si vous voulez, que cette autre Grandeur soit GF; auquel cas (par la Prop. précedente) il s'ensuivroit, en divisant, que comme AB est à BC, ainsi DG seroit à GF. Mais comme AB est à BC, ainsi



ainſi DE eſt à EF, par ſuppoſition. Partant (par la 11. Prop.) DG ſeroit à GF, comme DE eſt à EF. Or DG, qui eſt la premiere de ces quatre Grandeurs, eſt plus grande que la troiſiéme DE. Donc (par la 14. Prop.) la ſeconde GF ſeroit plus grande que la quatriéme EF; & ainſi la partie ſeroit plus grande que le Tout; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que comme AC eſt à BC, ainſi DF ſoit à une autre que EF. Et partant AC eſt à BC, comme DF eſt à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIX.

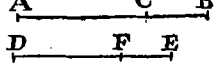
Si le Tout eſt au Tout, comme le retranché au retranché: le reſte ſera auſſi au reſte, comme le Tout eſt au Tout.

JE ſuppoſe que le Tout AB ſoit au Tout DE, comme le retranché AC eſt au retranché DF. Cela étant, je dis que le reſte CB eſt au reſte FE, comme le Tout AB eſt au Tout DE. Pour le prouver,

Puiſque AB eſt à DE, comme AC eſt à DF: en Raiſon alterne, AB ſera à AC, comme DE eſt à DF, par la 16. Prop. Et en diviſant, CB ſera à AC, comme FE eſt à DF, par la 17. Prop. Et derechef en Raiſon alterne, CB ſera à FE, comme AC eſt à DF. Or AC eſt à DF, comme AB eſt à DE, par ſuppoſition. Donc CB eſt à FE, comme AB eſt à DE. Et ainſi, ſi le Tout &c. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

On démontre ici la verité de cette maniere de conclure, que nous avons ci-devant appellée *par conversion de Raison*. Supposons par exemple, que AB est à CB, comme DE est à FE. Cela étant, je dis, par conversion de Raison, que AB sera à AC, comme DE est à DF. Car puisque AB est à CB, comme DE est à FE : en divisant, AC sera à CB, comme DF est à FE. Et en Raison inverse, CB sera à AC, comme FE est à DF. Et derechef en composant, AB sera AC, comme DE est à DF; Ce qu'il falloit démontrer.

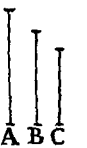


PROPOSITION XX.

THEOREME XX.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la premiere d'une part soit plus grande que la troisiéme: la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisiéme; si égale, égale; si moindre, moindre.

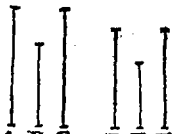
JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion ordonnée; c'est à dire, que A soit à B, comme D est à E; & que B soit à C, comme E est à F. Cela étant, je dis premierement que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,



Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de D à E est la même que celle de A à B. Il y aura donc plus grande Raison de D à E, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme E est à F: en Raison inverse, la Raison de C à B est la même que celle de F à E. Il y a donc plus grande Raison de D à E, que de F à E. Et partant (par

(par la 10. Prop.) D ſera plus grande que F; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que A ſoit égale à C. Cela étant, je dis que D ſera égale à F.



Car puiſque A eſt égale à C, il y aura même Raiſon de A à B, que de C à B. Or la Raiſon de A à B eſt la même que de D à E. Donc il y aura même Raiſon de D à E, que de C à B. Mais puiſque B eſt à C, comme E eſt à F: en Raiſon inverſe, C eſt auſſi à B, comme F eſt à E. Il y a donc même Raiſon de D à E, que de F à E. Et partant (par la 9. Prop.) D ſera égale à F; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe enfin, que A ſoit moindre que C. Cela étant, je dis que D ſera moindre que F.

Car puiſque A eſt moindre que C, il y aura une moindre Raiſon de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raiſon de A à B eſt la même que celle de D à E. Il y a donc une moindre Raiſon de D à E, que de C à B. Mais puiſque B eſt à C, comme E eſt à F: en Raiſon inverſe, il y aura même Raiſon de C à B, que de F à E. Il y a donc une moindre Raiſon de D à E, que de F à E. Et partant (par la 10. Prop.) D ſera moindre que F; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXI.

THEOREME XXI.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la premiere d'une part soit plus grande que la troisiéme: la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisiéme; si égale, égale; si moindre, moindre.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée; c'est à dire, que A soit à B, comme E est à F; & que B soit à C, comme D est à E. Cela étant, je dis premierement, que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,

Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B. Or la Raison de A à B est la même que celle de E à F. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme D est à E: en Raison inverse, E est à D, comme C est à B. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de E à D. Et partant (par la 10. Prop.) D sera plus

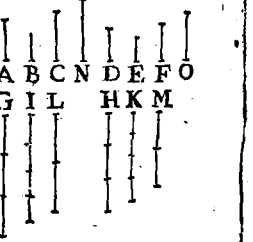
grande que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Par un ſemblable raiſonnement on montrera que ſi A eſt égale à C, D ſera égale à F ; & que ſi A eſt moindre que C, D ſera auſſi moindre que F. Si donc trois Grandeurs d'une part, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XXII.

Si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, priſes deux à deux en Proportion ordonnée, ſont en même Raiſon : en Raiſon égale, elles ſeront proportionnelles.



JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F, tellement diſpoſées, que A ſoit à B, comme D eſt à E ; & B à C, comme E à F. Cela étant, je dis qu'en Raiſon égale il y aura même Raiſon de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Prenez à diſcretion G & H, équimultiples de A & de D ; puis I & K, équimultiples de B & de E ; & enfin L & M, équimultiples de C & de F. Cela poſé :

Puiſque A eſt à B, comme D eſt à E ; & que G & H ſont équimultiples de la premiere & de la troiſiéme ;

ſiéme ; & I & K équimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il s'enſuit (par la 4. Prop.) que G eſt à I, comme H eſt à K. De même, puiſque B eſt à C, comme E eſt à F ; & que I & K ſont équimultiples de la premiere & de la troiſiéme ; & L & M équimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il s'enſuit auſſi (par la 4. Prop.) que I eſt à L, comme K eſt à M. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, I, L, & d'autre part trois autres Grandeurs H, K, M, leſquelles priſes deux à deux en Proportion ordonnée, ſont proportionnelles. Partant (par la 20. Prop.) ſi G eſt plus grande que L, H ſera auſſi plus grande que M ; ſi G eſt égale à L, H ſera auſſi égale à M ; & ſi G eſt moindre que L, H ſera auſſi moindre que M. Mais G & H ſont les Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & L & M ſont auſſi les Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs ſont proportionnelles ; & ainſi il y a même Raiſon de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, s'il y avoit plus de trois Grandeurs de chaque côté, & que par exemple, il y en eût quatre d'une part, & quatre d'une autre, enſorte que C fût à N, comme F eſt à O : on prouveroit aiſément, enſuite de ce qui vient d'être démontré de trois Grandeurs, que A ſeroit à N, comme D ſeroit à O. Car ne conſiderant point la ſeconde Grandeur de part ni d'autre, & ſuppoſant, comme il vient d'être prouvé, que A eſt à C, comme D eſt à F ; & que C eſt à N, comme F eſt à O : comme il n'y auroit plus alors que trois Grandeurs de chaque côté, il s'enſuivroit que A ſeroit à N, comme D ſeroit à O. Donc ſi tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, priſes deux à deux, ſont en même Raiſon ; en Rai-

son égale, elles seront proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXIII.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison : en Raison égale, elles seront proportionnelles.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée ; c'est à dire que A soit à B, comme E est à F ; & que B soit à C, comme D est à E. Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y aura même Raison de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Prenez à discretion G & I, équimultiples de A & de D ; & K & M, équimultiples de C & de F. Puis prenez H autant multiple de B, que G l'est de A ; & L autant multiple de E, que M l'est de F. Cela posé :

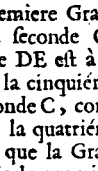
Puisque G & H sont équimultiples de A & de B, il s'ensuit (par la 15. Prop.) que G sera à H, comme A est à B. Or A est à B, comme E est à F. Donc G sera à H, comme E est à F. Mais puisque L & M sont équimultiples de E & de F, E est à F, comme

me L est à M. Partant G sera à H, comme L est à M. D'ailleurs, puisque B est à C, comme D est à E, & que H & I ont été prises équimultiples de la premiere & de la troisiéme de ces quatre Grandeurs, & que K & L ont été prises équimultiples de la seconde & de la quatriéme : il s'ensuit (par la 4. Prop.) que H est à K, comme I est à L. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, H, K, & d'autre part trois autres Grandeurs I, L, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion troublée, sont proportionnelles. Partant (par la 21. Prop.) si G est plus grande que K, I sera plus grande que M; si G est égale à K, I sera égale à M; ou enfin, si G est moindre que K, I sera moindre que M. Mais G & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & K & M sont aussi les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXIV.

Si la premiere Grandeur eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme eſt à la quatriéme; & la cinquiéme à la ſeconde, comme la ſixiéme à la quatriéme: la compoſée de la premiere & de la cinquiéme ſera à la ſeconde, comme la compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme ſera à la quatriéme.



JE ſuppoſe que la premiere Grandeur AB ſoit à la ſeconde C, comme la troiſiéme DE eſt à la quatriéme F; & que la cinquiéme BG ſoit encore à la ſeconde C, comme la ſixiéme EH eſt à la quatriéme F. Cela étant, je dis que la Grandeur AG, compoſée de la premiere & de la cinquiéme, eſt à la ſeconde C, comme la Grandeur DH, compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, eſt à la quatriéme F. Pour le prouver,

Puiſque BG eſt à C, comme EH eſt à F; en Raiſon inverſe, C eſt à BG, comme F eſt à EH. Maintenant, AB eſt à C, comme DE eſt à F, par ſuppoſition; C eſt à BG, comme F eſt à EH, comme il vient d'être prouvé. Donc (par la 22. Prop.) en Raiſon égale, AB eſt à BG, comme DE eſt à EH. Deplus, en compoſant, AG eſt à BG, comme DH eſt à EH; BG eſt à C, comme EH eſt à F,

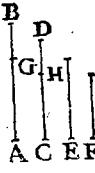
à F, par ſuppoſition. Partant, en Raiſon égale, AG eſt à C, comme DH eſt à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XXV.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite priſes enſemble, ſont plus grandes que les deux autres priſes auſſi enſemble.

JE ſuppoſe que AB ſoit à CD, comme E eſt à F; & que AB ſoit la plus grande, & par conſequent F la plus petite. Cela étant, je dis que les Grandeurs AB & F priſes enſemble, ſont plus grandes que CD & E priſes auſſi enſemble. Pour le prouver,



Retranchez de AB la partie AG égale à E; & de CD la partie CH égale à F. Cela poſé:

La toute AB ſera à la toute CD, comme la retranchée AG eſt à la retranchée CH. Donc (par la 19. Prop.) le reſte GB ſera au reſte HD, comme la toute eſt à la toute. Or la toute AB eſt ſuppoſée plus grande que CD. Partant le reſte GB ſera auſſi plus grand que le reſte HD. Si donc aux deux Grandeurs égales AG & E, on ajoûte les Grandeurs égales F & CH: il s'enſuivra que le Tout compoſé de AG & de F, ſera égal au Tout compoſé de E & de CH. Que ſi maintenant on ajoûte à ces deux Touts des Grandeurs inégales, ſçavoir GB d'un côté, & HD de l'autre: il s'enſuivra

vra que le Tout composé de AB & de F, sera plus grand que le Tout composé de CD & de E; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXVI.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisiéme à la quatriéme: en Raison inverse, tout au contraire, la seconde aura moindre Raison à la premiere, que la quatriéme à la troisiéme.

JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de C à D. Cela étant, je dis qu'en Raison inverse, tout au contraire, la Raison de B à A est moindre que celle de D à C. Pour le prouver,

Suppofons qu'il y ait même Raison de E à B, que de C à D. Cela posé:

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à B, que de C à D, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison de A à B, que de E à B; par consequent A est plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il suit que la Raison de B à A est moindre que celle de B à E, par la 8. Prop. Mais puisque par la supposition E est à B, comme C est à D: en Raison inverse, B est à E, comme D à C. Donc la Raison de B à A est aussi moindre que celle de D à C; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXVII.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme: en Raiſon alterne, la premiere aura auſſi plus grande Raiſon à la troiſiéme, que la ſeconde à la quatriéme.

JE ſuppoſe qu'il y ait plus grande Raiſon de A à B, que de C à D. Cela étant, je dis qu'en Raiſon alterne il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de B à D. Pour le prouver,

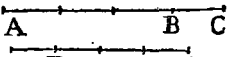
Suppoſons qu'il y ait même Raiſon de E à B, que de C à D. Cela poſé:

Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de A à B, que de C à D, par ſuppoſition: il y a donc auſſi plus grande Raiſon de A à B, que de E à B. Et par conſequent A eſt plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il ſuit qu'il y a plus grande Raiſon de A à C, que de E à C, par la 8. Prop. Mais puiſque par la ſuppoſition E eſt à B, comme C eſt à D: en Raiſon alterne, E eſt à C, comme B eſt à D. Donc il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de B à D; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXVIII.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme: en compoſant, la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande Raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'aura à la quatriéme.



JE ſuppoſe qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere Grandeur AB à la ſeconde BC, que de la troiſiéme DE à la quatriéme EF. Cela étant, je dis qu'en compoſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de la toute AC à BC, que de la toute DF à EF. Pour le prouver,

Suppoſons que AB ſoit à BC, comme GE eſt à EF. Cela poſé:

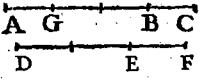
Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF, par ſuppoſition: il y a donc auſſi plus grande Raiſon de GE à EF, que de DE à EF; & par conſequent GE eſt plus grande que DE. Mais puiſque par la ſuppoſition AB eſt à BC, comme GE eſt à EF: en compoſant, AC eſt à BC, comme GF eſt à EF. Mais puiſque GF eſt plus grande que DF, il y a plus grande Raiſon de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. Prop. Donc il y a auſſi plus gran-

grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXIX.

Si la compoſée de la premiere & de la ſeconde a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'a à la quatriéme: en diviſant, la premiere aura auſſi plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme.



JE ſuppoſe ces quatre Grandeurs, AB premiere, BC ſeconde, DE troiſiéme, EF quatriéme; & qu'il y ait plus grande Raiſon de la compoſée de la premiere & de la ſeconde, ſçavoir AC, à la ſeconde BC, que de la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme, ſçavoir DF, à la quatriéme EF. Cela étant, je dis qu'en diviſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF. Pour le prouver,

Suppoſons que GC ſoit à BC, comme DF eſt à EF. Cela poſé:

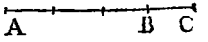
Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF, par ſuppoſition; il y a donc auſſi plus grande Raiſon de AC à BC, que de GC à BC; & par conſequent AC eſt plus grande que GC, par la 10. Prop. Oſtant donc de ces deux Grandeurs inégales, BC, qui leur eſt commune, le reſte AB ſera plus grand que le reſte GB. Et par conſequent

il y a plus grande Raiſon de AB à BC que de GB à BC, par la 8. Prop. Mais puiſque par ſuppoſition GC eſt à BC, comme DF eſt à EF : en diviſant, GB eſt à BC, comme DE eſt à EF. Donc il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

THEOREME XXX.

Si la compoſée de la premiere & de la ſeconde a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'a à la quatriéme : Par converſion de Raiſon, tout au contraire, la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura moindre Raiſon à la premiere, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'aura à la troiſiéme.



JE ſuppoſe ces quatre Grandeurs, AB premiere, BC ſeconde, DE troiſiéme, EF quatriéme ; & qu'il y ait plus grande Raiſon de la compoſée de la premiere & de la ſeconde, ſçavoir AC, à la ſeconde BC, que de la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme, ſçavoir DF, à la quatriéme EF. Cela étant, je dis que par converſion de Raiſon, AC aura moindre Raiſon à AB, que

que DF n'aura à DE. Pour le prouver,

Puiſque par ſuppoſition, il y a plus grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF: en diviſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF, par la 29. Prop. Par conſequent, en Raiſon inverſe, il y a moindre Raiſon de BC à AB, que de EF à DE, par la 26. Prop. Et partant, en compoſant, il y a auſſi moindre Raiſon de AC à AB, que de DF à DE; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXXI.

S'il y a trois Grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſiéme, d'une part, que de la premiere à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſiéme, de l'autre part: en Raiſon égale, il y aura auſſi plus grande Raiſon de la premiere à la troiſiéme d'une part, que de la premiere à la troiſiéme de l'autre part.

JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raiſon de A à B, que de D à E; & de B à C, que de E à F. Cela étant, je dis qu'en Raiſon égale, il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Supposons que G soit à C, comme B est à F. Cela posé :

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de E à F, par supposition : il y a donc aussi plus grande Raison de B à C, que de G à C. Et par consequent B est plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B. Mais par la supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de D à E. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de D à E.

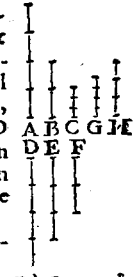
Supposons maintenant que H soit à G, comme D est à E. Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G. que de H à G ; & par consequent A est plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puisque par supposition, D est à E, comme H est à G ; & que E est à F, comme G est à C : en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 22. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXXII.

S'il y a trois Grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſiéme, d'une part, que de la ſeconde à la troiſiéme, & de la premiere à la ſeconde, de l'autre part: en Raiſon égale, il y aura auſſi plus grande Raiſon de la premiere à la troiſiéme d'une part, que de la premiere à la troiſiéme de l'autre part.

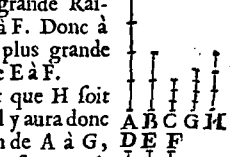


JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raiſon de A à B, que de E à F; & de B à C, que de D à E. Cela étant, je dis qu'en Raiſon égale, il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Suppoſons que G ſoit à C, comme D eſt à E. Cela poſé:

Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de B à C, que de D à E, par ſuppoſition: il y a donc auſſi plus grande Raiſon

Raiſon de B à C, que de G à C; & par conſequent B eſt plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raiſon de A à G, que de A à B. Mais par la ſuppoſition, il y a plus grande Raiſon de A à B, que de E à F. Donc à plus forte raiſon, il y a plus grande Raiſon de A à G, que de E à F.



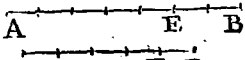
Suppoſons maintenant que H ſoit à G, comme E eſt à F. Il y aura donc auſſi plus grande Raiſon de A à G, que de H à G; & par conſequent A eſt plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il ſuit, qu'il y a plus grande Raiſon de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. *Mais puis que* par ſuppoſition D eſt à E, comme G eſt à C; & que E eſt à F, comme H eſt à G: en Raiſon égale, H eſt à C, comme D eſt à F, par la 23. Prop. Donc il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de D à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXXIII.

S'il y a plus grande Raiſon du Tout au Tout, que du retranché au retranché: il y aura auſſi plus grande Raiſon du reſte au reſte, que du Tout au Tout.



JE ſuppoſe qu'il y ait plus grande Raiſon de la toute AB à la toute CD, que de la retranchée AE à la retranchée CF. Cela étant, je dis qu'il y a auſſi plus grande Raiſon du reſte EB au reſte FD, que de la toute AB à la toute CD. Pour le prouver,

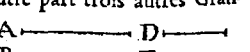
Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de AB à CD, que de AE à CF, par ſuppoſition: donc en Raiſon alterne, il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à AE, que de CD à CF, par la 27. Prop. Et par converſion de Raiſon, tout au contraire, il y a moindre Raiſon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. Prop. Donc en Raiſon alterne, il y a auſſi moindre Raiſon de AB, à CD, que de EB à FD; ou pour parler en d'autres termes, il y a plus grande Raiſon de EB à FD, c'eſt à dire du reſte au reſte, que de AB à CD, c'eſt à dire du Tout au Tout; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXXIV.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra d'un côté, & autant d'un autre; & qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere d'une part à la premiere de l'autre part, que de la ſeconde à la ſeconde; & auſſi plus grande Raiſon de la ſeconde à la ſeconde, que de la troiſiéme à la troiſiéme, & ainſi de ſuite : La compoſée de toutes les Grandeurs d'un côté, aura plus grande Raiſon à la compoſée de toutes les Grandeurs de l'autre, que (la premiere étant retranchée de part & d'autre) le reſte n'aura au reſte; mais elle aura moindre Raiſon, que la premiere à la premiere; & plus grande Raiſon, que la derniere à la derniere.

JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raiſon de A à D, que de B à E; & encore plus grande Raiſon de B à E, que de



de C à F. Cela étant, je dis que la composée de A, B, C, a plus grande Raison à la composée de D, E, F, que le reste B, C, n'a au reste E, F; mais qu'elle a moindre Raison, que A n'a à D; & plus grande Raison, que C n'a à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de A à D, que de B à E, par supposition: donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de A à B, que de D à E, par la 27. Prop. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de A, B, prises ensemble, à B, que de D, E, prises ensemble, à E, par la 28. Prop. Et derechef en Raison alterne, il y a encore plus grande Raison de la toute A, B, à la toute D, E, que de B à E. Et puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, à la toute D, E, que de la retranchée B à la retranchée E: il y a par consequent aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, à la toute D, E, par la Proposition précedente. Par la même raison, il y a aussi plus grande Raison de B à E, que de la toute B, C, à la toute E, F. Donc à plus forte raison, il y a aussi plus grande Raison de A à D, que de la toute B, C, à la toute E, F. Et en Raison alterne, il y a plus grande Raison de A à la toute B, C, que de D à la toute E, F. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de la toute A, B, C, au reste B, C, que de la toute D, E, F, au reste E, F, par la 28 Prop. Enfin en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que du reste B, C, au reste E, F; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, qu'il y a moindre Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de A à D. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de la retranchée B, C, à la retranchée E, F: par consequent, il y a aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, par la Prop. précedente;

cedente ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troiſiéme lieu, qu'il y a plus grande Raiſon de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de C à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raiſon de B à E, que de C à F, par ſuppoſition : donc en Raiſon alterne, il y a auſſi plus grande Raiſon de B à C, que de E à F, par la 27. Prop. Et en compoſant, il y a plus grande Raiſon de la toute B, C, à C, que de la toute E, F, à F, par la 28. Prop. Donc derechef en Raiſon alterne, il y a plus grande Raiſon de la toute B, C, à la toute E, F, que de C à F. Mais il a été prouvé qu'il y a plus grande Raiſon de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de B, C, à E, F. Donc à plus forte raiſon, il y a plus grande Raiſon de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de C à F ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Que s'il y avoit quatre Grandeurs, ou plus, de part & d'autre, on prouveroit aiſément la même choſe en ſuivant la même voye.

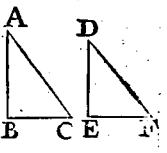
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIE'ME.

DEFINITIONS.

1. LES Figures Semblables, sont celles qui ont les Angles égaux, chacun au sien ; & les Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux.

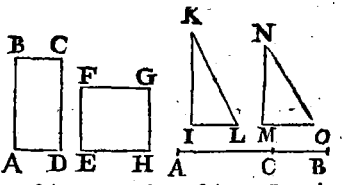
Ainsi, supposé que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D, l'Angle B à l'Angle E, & l'Angle C à l'Angle F; & d'ailleurs, que AB soit à AC, comme DE à DF; que AC soit à CB, comme DF à FE; & que AB soit à BC, comme DE est à EF: ces deux Triangles seront semblables.



2. Les Figures Reciproques, sont celles qui ont les

les Côtez alentour des Angles égaux, tellement proportionnaux, que le premier & le quatriéme terme de la Proportion se trouvent dans l'une, & le second & le troisiéme se trouvent dans l'autre.

Ainsi, les Parallelogrammes ABCD, EFGH, seront des Figures Reciproques,



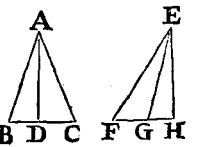
si comme AB est à EF, ainsi FG est à BC. De même, les deux Triangles IKL, MNO, seront des Figures Reciproques, si comme IK est à MN, ainsi MO est à IL.

3. Une Ligne droite est dite être divisée en moyenne & extréme Raison, quand la toute est à la plus grande partie, comme la plus grande partie est à la plus petite.

Ainsi, la Ligne AB sera dite être divisée en moyenne & extréme Raison, si elle est tellement divisée au Point C, que la toute AB soit à la partie AC, comme AC est à CB.

4. La hauteur d'une Figure est la Perpendiculaire tirée du sommet sur la Baze.

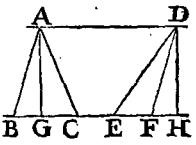
Ainsi, la hauteur du Triangle ABC est la Perpendiculaire AD, qui est tirée du sommet A sur la Baze BC. De même, la hauteur du Triangle EFG est la Perpendiculaire EH,



qui tombe du sommet E sur la Baze FG, prolongée.

Il est important pour la suite, de remarquer ici, que si deux Figures qui ont leurs Bazes dans une même Ligne droite, & de même part, sont de même

même hauteur, elles ſont entre mêmes Paralleles. Et que ſi elles ſont entre mêmes Paralleles, elles ſont de même hauteur.



Je ſuppoſe que les Triangles ABC, DEF, qui ont leurs Bazes BC, EF, dans la même Ligne droite BH, & de même part, ſoient de même hauteur; c'eſt à dire que les Lignes AG, DH, qui ſont abaiſſées des Points A & D perpendiculairement ſur BH, ſoient égales. Cela étant, je dis que ces Triangles ABC, DEF, ſont entre mêmes paralleles; c'eſt à dire qu'en tirant par les Points A & D la Ligne droite AD, cette Ligne eſt parallele à la Ligne BH.

Car puiſque les Lignes AG, DH, ſont perpendiculaires à BH, les Angles AGH & DHG ſont droits. Et partant (par la 28. du 1.) les Lignes AG, DH, ſont paralleles. D'ailleurs elles ſont ſuppoſées égales; donc (par la 33. du 1.) les Lignes droites AD, GH, qui joignent leurs extremitez, ſont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que les Lignes AD, BH, entre leſquelles ſont les deux Triangles ABC, DEF, ſont paralleles. Cela étant, je dis que les deux Lignes AG, DH, qui marquent la hauteur de ces deux Triangles, ſont égales entr'elles.

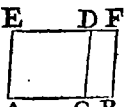
Car puiſque les Lignes AG, DH, ſont perpendiculaires à BH, elles ſont paralleles. D'ailleurs, les Lignes AD, GH, ſont ſuppoſées paralleles: ainſi la Figure AGHD eſt un Parallelogramme; & par la 34. du 1. les Côtez oppoſez AG, DH, ſont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

5. Un Parallelogramme eſt dit être appliqué à une Ligne droite, quand il a pour Baze, ou pour l'un de ſes Côtez, cette Ligne droite propoſée.

Ainſi

Ainſi le Parallelogramme AD, qui a pour Baze la Ligne droite propoſée AC, eſt dit être appliqué à cette Ligne.

6. Un Parallelogramme *défaillant*, eſt un Parallelogramme, dont la Baze eſt plus petite que la Ligne propoſée, ſur laquelle il eſt dit être appliqué.



Ainſi, le Parallelogramme AD, eſt un Parallelogramme *défaillant*; à cauſe que ſa Baze AC eſt plus petite que la Ligne propoſée AB, à laquelle il eſt dit être appliqué, du reſte CB.

7. Le défaut d'un Parallelogramme défaillant, eſt un Parallelogramme qui a pour Baze le reſte de la Ligne propoſée, & qui avec le défaillant fait un Parallelogramme total.

Ainſi, dans cette Figure, le Parallelogramme CF eſt le défaut du Parallelogramme AD; à cauſe qu'il a pour Baze le reſte CB, & qu'il compoſe avec AD le Parallelogramme total AF.

8. Un Parallelogramme *excedant*, eſt un Parallelogramme total, dont la Baze eſt plus grande que la Ligne propoſée, à laquelle il eſt dit être appliqué.

Ainſi, le Parallelogramme AF eſt un Parallelogramme *excedant*; à cauſe que ſa Baze AB eſt plus grande que la Ligne propoſée AC, à laquelle il eſt dit être appliqué, de la partie CB.

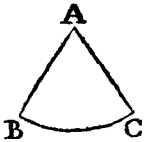
9. L'excez d'un Parallelogramme excedant, eſt un Parallelogramme qui a pour Baze la partie dont il excede, & qui étant retranché du Parallelogramme total, le reſte eſt un Parellelogramme juſtement appliqué à la Ligne propoſée.

Ainſi, le Parallelogramme CF eſt cét excez; à cauſe qu'il a pour Baze la partie excedante CB, & qu'étant retranché du Parallelogramme total AF, il reſte le Parallelogramme AD, qui eſt juſte-

ment

ment appliqué à la Ligne proposée AC.

10. Un Secteur de Cercle, est une Figure compriſe de deux demi-Diametres qui font un Angle au Centre, & d'une partie de la Circonference.



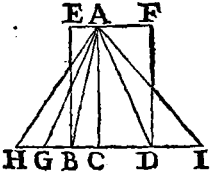
Ainſi, la Figure ABC eſt un Secteur de Cercle, parce qu'elle eſt compriſe des deux demi-Diametres AB, AC, qui forment l'Angle A au Centre, & d'une partie de la Circonference, BC.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Les Triangles & les Parallelogrammes de même hauteur, ſont entr'eux en même Raiſon que leurs Bazes.

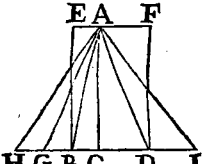
JE ſuppoſe 1°. que les deux Triangles ABC, ACD, ſoient de même hauteur. Cela étant, je dis que comme la Baze BC, eſt à la Baze CD, ainſi le Triangle ABC eſt au Triangle ACD. Pour le prouver,



Prolongez la Ligne BD, qui eſt compoſée des deux Bazes, indefiniment vers H, & vers I. Puis ayant pris d'une part pluſieurs parties égales à BC, comme BG, GH; & d'autre part pluſieurs parties égales à CD, ou une ſeulement, comme DI; menez les Lignes droites AG, AH, AI. Cela poſé:

Puiſque les Triangles ABC, ABG, AGH,

ſont ſur Bazes égales, ſçavoir CB, BG, GH, & entre mêmes Paralleles, comme il a été prouvé cidevant, ils ſont égaux entr'eux, par la 38. du 1. Et par conſequent, autant de fois que la Ligne HC contient la Ligne BC, autant de fois le Triangle ACH contient le Triangle ABC. Et ainſi la Ligne HC, & le Triangle ACH, ſont équimultiples de la premiere & de la troiſiéme des quatre Grandeurs que je dis être proportionnelles. De même, puiſque les Triangles ACD, ADI, ſont ſur Bazes égales, ſçavoir CD, DI, & entre-mêmes Paralleles, ils ſont auſſi égaux entr'eux. Et par conſequent, autant de fois que la Ligne CI contient CD, autant de fois le Triangle ACI contient le Triangle ACD. Et ainſi la Ligne CI, & le Triangle ACI, ſont équimultiples de la ſeconde & de la quatriéme des quatre Grandeurs que je dis être proportionnelles. Or ſi la Ligne HC eſt égale à CI, le Triangle ACH eſt égal au Triangle ACI, par la 38. du 1; & ſi la Ligne HC eſt plus grande que CI, le Triangle ACH eſt plus grand que le Triangle ACI; & ſi la Ligne HC eſt plus petite que CI, le Triangle ACH eſt auſſi plus petit que le Triangle ACI. D'où il ſuit (par le 2. Axiome du 5.) que comme la premiere Grandeur BC eſt à la ſeconde CD, ainſi la troiſiéme ABC eſt à la quatriéme ACD; Ce qu'il falloit démontrer.



Je ſuppoſe en ſecond lieu, que les Parallelogrammes AEBC, & ACDF, ſoient de même hauteur. Cela étant, je dis que comme la Baze BC eſt à la Baze CD, ainſi le Parallelogramme AEBC eſt au Parallelogramme ACDF. Pour le prouver,

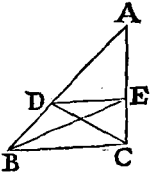
Par ce qui vient d'être démontré, la Baze BC eſt à la Baze CD, comme le Triangle ABC eſt au Trian-

Triangle ACD. Mais ces Triangles sont les moitiez de ces Parallelogrammes, par la 41. du 1. Donc le Triangle ABC est au Triangle ACD, comme le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF, par la 15. Prop. du 5. Et partant, comme la Baze BC est à la Baze CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si une Ligne droite menée dans un Trian- est parallele à l'un de ses Côtez, & coupe les deux autres, elle les coupera proportionnellement: & si elle coupe deux de ses Côtez proportionnellement, elle sera parallele au troisiéme.



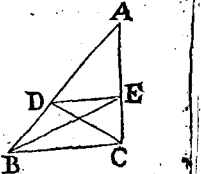
JE suppose 1°. que dans le Triangle ABC, la Ligne droite DE soit menée parallele au Côté BC, & qu'elle coupe les deux autres Côtez AB, AC. Cela étant, je dis que ces deux Côtez sont coupez proportionnellement; c'est à dire, que comme AD est à DB, ainsi AE est à EC. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites BE, DC. Cela posé:

Puisque les Triangles DBE, DCE, sont sur une même Baze, à sçavoir DE, & entre mêmes Paralleles BC, DE: ils sont égaux entr'eux, par la 37. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE,

BDE, ſont de même hauteur : il s'enſuit (par la Propoſition précedente) que la Baze AD eſt à la Baze DB, comme le Triangle ADE eſt au Triangle BDE, ou à ſon égal CED. Mais les Triangles ADE, CED, étant de même hauteur, il s'enſuit auſſi que le Triangle ADE eſt au Triangle CED, comme la Baze AE eſt à la Baze EC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AD eſt à DB, comme AE eſt à EC; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que la Ligne DE coupe de telle ſorte les deux Côtez AB, AC, que AD ſoit à DB, comme AE eſt à EC. Cela étant, je dis que la Ligne DE eſt parallele à BC. Pour le prouver,



Puiſque les Triangles ADE, BDE, ſont de même hauteur : ils ſont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. Donc le Triangle ADE eſt au Triangle BDE, comme AD eſt à DB. Mais, par la ſuppoſition, AD eſt à DB, comme AE eſt à EC. Donc le Triangle ADE eſt au Triangle BDE, comme AE eſt à EC. D'ailleurs, puiſque les Triangles ADE, CED, ſont de même hauteur : la Baze AE eſt à la Baze EC, comme le Triangle ADE eſt au Triangle CED. Partant le Triangle ADE eſt au Triangle BDE, comme le même Triangle ADE eſt au Triangle CED. D'où il ſuit (par la 9. Prop. du 5.) que les Triangles BDE, & CED, ſont égaux. Mais ils ſont ſur une même Baze, à ſçavoir DE. Donc (par la 39. du 1.) les Lignes DE, BC, entre leſquelles ils ſont, ſont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

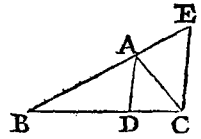
De ce que AD eſt à DB, comme AE eſt à EC, il s'enſuit en Raiſon inverſe, que DB eſt à DA, comme

comme EC eſt à EA. Et en Raiſon alterne, que DB eſt à EC, comme DA eſt à EA. Et en compoſant, que AB eſt à AD, comme AC eſt à AE.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si un Angle d'un Triangle eſt coupé en deux également par une Ligne droite qui coupe auſſi la Baze ; elle la coupera proportionnellement aux deux autres Côtez : & ſi elle coupe la Baze proportionnellement aux deux autres Côtez, elle diviſera l'Angle en deux également.

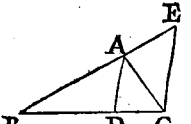


JE ſuppoſe 1°. que l'Angle BAC, du Triangle ABC, ſoit coupé en deux également par la Ligne droite AD, qui coupe la Baze BC au Point D. Cela étant, je dis qu'elle la coupe proportionnellement aux deux autres Côtez ; c'eſt à dire, que BD eſt à DC, comme BA eſt à AC. Pour le prouver,

Prolongez la Ligne BA vers E, & menez par le Point C la Ligne CE parallele à AD. Cela poſé :

Puiſque les Lignes AD, EC, ſont paralleles, & que la Ligne AC tombe deſſus : l'Angle ACE eſt égal à ſon oppoſé alternativement DAC, par la 29. du 1. De même, puiſque les Lignes AD, EC, ſont paralleles, & que la Ligne BAE tombe deſſus :

l'Angle interieur AEC est égal à son opposé exterieur BAD, par la 29. du 1. Mais, par la supposition, les deux Angles BAD, DAC, sont égaux. Donc les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux. D'où il suit (par la 6. du 1.) que les deux Côtez AE, AC, qui les soûtiennent, sont aussi égaux entr'eux. D'ailleurs, puisque la Ligne AD, qui est menée dans le Triangle BEC, est parallele au Côté EC : il s'ensuit (par la Prop. precedente) que comme BD est à DC, ainsi BA est à AE, ou à AC, son égale ; Ce qu'il falloit premierement démontrer.



Je suppose en second lieu, que la Ligne AD, qui coupe l'Angle BAC, coupe la Baze BC proportionnellement aux deux autres Côtez ; c'est à dire, que BD est à DC, comme BA est à AC. Cela étant, je dis que l'Angle BAC est coupé en deux également. Pour le prouver,

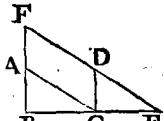
Puisque dans le Triangle BEC, la Ligne AD est menée parallele au Côté EC : BA est à AE, comme BD est à DC, par la Prop. precedente. Mais, par la supposition, BD est à DC, comme BA est à AC. Partant BA est à AE, comme BA est à AC, par la 11. Prop. du 5. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Lignes AE, AC, sont égales. Et par consequent (par la 5. Prop. du 1.) les Angles ACE & AEC sont égaux entr'eux. Or puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne AC tombe dessus : l'Angle DAC est égal à son alterne ACE, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne BAE tombe dessus : l'Angle exterieur BAD est égal à son opposé interieur AEC. Mais les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux, comme il a été prouvé. Donc les deux Angles BAD, DAC, sont

ſont auſſi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Les Triangles équiangles ont les Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux.

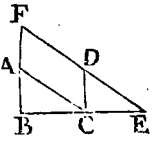


JE ſuppoſe que les Triangles ABC, & DCE, ſoient équiangles ; c'eſt à dire, que l'Angle ACB ſoit égal à l'Angle DEC ; que l'Angle CBA ſoit égal à l'Angle ECD ; & que l'Angle BAC ſoit égal à l'Angle CDE. Cela étant, je dis que les Côtez de ces Triangles qui ſont autour des Angles égaux, ſont proportionnaux ; c'eſt à dire, que DE eſt à EC, comme AC eſt à CB ; que EC eſt à CD, comme CB eſt à BA ; & que CD eſt à DE, comme BA eſt à AC. Pour le prouver,

Diſpoſez ces deux Triangles ABC, DCE, en ſorte que les deux Lignes BC, CE, ſe rencontrent directement. Puis continuez les Côtez ED, BA, vers F. Cela poſé :

Puiſque, par la ſuppoſition, l'Angle DEC eſt égal à l'Angle ACB, les deux Angles B & E ſont égaux aux deux Angles B & ACB. Or ceux-ci enſemble valent moins que deux droits, par la 17. du 1. Donc les deux Angles B & E enſemble valent auſſi moins que deux droits. Et partant les deux Lignes ED, BA, étant prolongées vers F, ſe rencontreront. D'ailleurs, puiſque la Ligne droite BCE tombe ſur les deux Lignes droites EF, CA,

& que l'Angle exterieur ACB est égal à son opposé interieur E, par supposition : ces deux Lignes EF, CA, sont paralleles, par la 28. du 1. De même, puisque la Ligne droite BCE tombe sur les deux Lignes droites CD, BF, & que l'Angle exterieur DCE est égal à son opposé interieur B, par supposition : ces deux Lignes CD, BF, sont aussi paralleles. Et par consequent la Figure ACDF est un Parallelogramme. D'où il suit que DF est égale à CA, & CD égale à AF, par la 34. du 1. Maintenant, puisque CD est parallele à BF, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que comme ED est à DF, ou à CA son égale, ainsi EC est à CB. Et en Raison alterne, comme ED est à EC, ainsi CA est à CB. De même, puisque CA est parallele à EF, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que comme EC est à CB, ainsi FA, ou CD son égale, est à BA. Et en Raison alterne, comme EC est à CD, ainsi CB est à BA. Nous avons donc d'une part trois Grandeurs DE, EC, CD, & d'autre part trois autres Grandeurs AC, CB, BA, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Partant en Raison égale, comme la premiere DE est à la derniere DC, ainsi la premiere AC est à la derniere AB. Et ainsi dans les Triangles équiangles, les Côtez qui sont alentour des Angles égaux sont proportionnaux ; Ce qu'il falloit démontrer.



I. Corollaire.

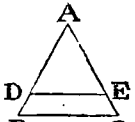
Il suit de là, que les Triangles équiangles sont semblables.

II. Corollaire.

Il suit encore de là, que si on méne dans un Triangle

gle une Ligne droite parallele à l'un des Côtez, elle retranchera un Triangle semblable au total.

Ainsi, si dans le Triangle ABC, on méne la Ligne DE parallele à BC, le Triangle ADE sera semblable au total ABC. Car (par la 29. du 1.) l'Angle ADE est égal à l'Angle B; & l'Angle AED est égal à l'Angle C; & l'Angle A est commun à ces deux Triangles : donc ils sont équiangles, & par consequent semblables.

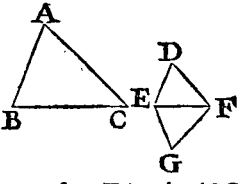


PROPOSITION V.

THEOREME V.

Les Triangles qui ont leurs Côtez proportionnaux, sont équiangles.

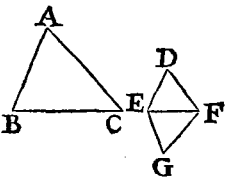
JE suppose que dans les Triangles ABC, DEF, AB soit à BC, comme DE est à EF; que BC soit à CA, comme EF est à FD; & enfin que AB soit à AC; comme DE est à DF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles ABC, DEF, sont équiangles. Pour le prouver,



Faites au Point E l'Angle FEG égal à l'Angle B, & au Point F l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. du 1. & les deux Triangles ABC, & EFG, seront équiangles. Cela posé :

Puisque ces deux Triangles sont équiangles : par la Proposition précedente, EF est à EG, comme

BC eſt à BA. Mais BC eſt à BA, comme EF eſt à ED, par ſuppoſition. Partant (par la 11. Prop. du 5.) EF eſt à EG, comme EF eſt à ED. Et par conſequent les Lignes EG, ED, ſont égales, par la 9. Prop. du 5. De même, EF eſt à FG, comme BC eſt à CA. Mais BC eſt à CA, comme EF eſt à FD. Partant EF eſt à FG, comme EF eſt à FD. Et par conſequent les Lignes FG, FD, ſont égales, par la 9. Prop. du 5. Maintenant, puis qu'aux Triangles EFD, EFG,



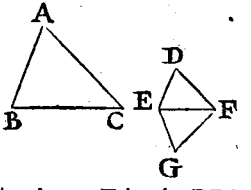
les deux Côtez EF, ED, ſont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au ſien, & la Baze FD égale à la Baze FG: le Triangle EFD eſt en tout égal au Triangle EFG, par la 8. Prop. du 1. Mais le Triangle EFG eſt équiangle au Triangle ABC, par la conſtruction. Donc le Triangle EFD eſt auſſi équiangle au Triangle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez d'alentour proportionnaux, ils seront équiangles.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle DEF, & que comme BC est à BA, ainsi EF soit à ED. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Faites l'Angle FEG égal à l'Angle B, & l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. Prop. du 1. & les deux Triangles ABC, EFG, seront équiangles. Cela posé:

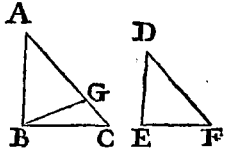
Puisque ces deux Triangles sont équiangles: EF est à EG, comme BC est à BA, par la 4. Prop. Or BC est à BA, comme EF est à ED, par supposition. Donc EF est à EG, comme EF est à ED. Et partant (par la 9. Prop. du 5.) les Côtez ED & EG sont égaux. Maintenant, aux Triangles EFD, EFG, les deux Côtez EF, ED, sont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au sien; & l'Angle FED égal à l'Angle FEG, puisqu'ils sont tous-deux égaux à l'Angle B. Partant (par la 4. du 1.) le Triangle EFD est égal en tout au Triangle EFG. Mais le Triangle EFG est équiangle au Triangle

ABC, par la construction. Donc le Triangle EFD est aussi équiangle au Triangle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez qui sont alentour d'un autre Angle, proportionnaux, le troisiéme Angle de l'un étant de même espece que celui de l'autre: ces deux Triangles seront équiangles.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D; que le Côté AB soit au Côté BC, comme le Côté DE est au Côté EF; & deplus, que l'Angle C soit de même espece que l'Angle F, c'est à dire, que si l'Angle F est droit, obtus, ou aigu, comme ici, l'Angle C le soit aussi. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF. Et premierement, je dis que l'Angle ABC est égal à l'Angle E. Pour le prouver,

Si l'Angle ABC n'étoit pas égal à l'Angle E, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre; supposons que ce soit ABC. Cela posé:

Retranchez de cét Angle, l'Angle ABG égal à l'Angle E, par la 23. du 1. Et puisque l'Angle A est

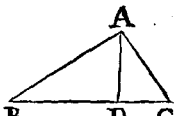
est égal à l'Angle D, par supposition : le troisiéme BGA sera égal au troisiéme F, & ainsi les deux Triangles ABG & DEF seront équiangles. Desorte que si l'Angle F est aigu, comme ici, l'Angle BGA sera aussi aigu, & par consequent son Complement à deux droits BGC sera obtus. D'ailleurs, puisque les deux Triangles ABG & DEF sont équiangles : le Côté AB sera à BG, comme DE est à EF, par la 4. Prop. Mais DE est à EF, comme AB est à BC, par supposition. Donc AB est à BG, comme AB est à BC. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les deux Côtez BG, BC, sont égaux; & (par la 5. Prop. du 1.) que l'Angle BGC est égal à l'Angle C. Mais l'Angle C a été supposé aigu : donc l'Angle BGC sera aussi aigu. Mais cét Angle BGC a déja été prouvé obtus : & ainsi l'Angle BGC seroit ensemble obtus & aigu ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les Angles C & F étant aigus, l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E.

Que si l'on eût supposé au commencement, que les Angles C & F eussent été obtus : on auroit prouvé de même, que l'Angle BGA auroit été obtus ; & par consequent que son Complement à deux droits BGC auroit été aigu. Puis montrant que cét Angle BGC seroit aussi égal à l'Angle obtus C, il seroit arrivé que l'Angle BGC auroit dû être aigu & obtus tout ensemble ; ce qui est impossible. Si bien qu'il est absolument impossible que l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E. Et comme l'on peut prouver de même, que l'Angle E ne sçauroit être plus grand que l'Angle ABC, il s'ensuit que ces deux Angles sont égaux. Mais l'Angle A est égal à l'Angle D, par supposition. Par consequent les deux Angles C & F sont aussi égaux, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Baze, elle le divisera en deux autres Triangles, qui seront semblables entr'eux, & au total.



JE suppose que le Triangle ABC soit Rectangle, & que de l'Angle droit BAC on abaisse la Ligne droite AD perpendiculaire à la Baze BC. Cela étant, je dis premierement que les deux Triangles ABD, ADC, dans lesquels le Triangle ABC est divisé, lui sont semblables. Pour le prouver,

Au Triangle ABD, l'Angle BDA est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle B est commun aux deux Triangles ABD & ABC. Par consequent le troisiéme BAD est égal au troisiéme BCA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables, par la 4. Prop. & par la 1. Définition.

De même, au Triangle ADC, l'Angle ADC est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle C est commun aux deux Triangles ADC & ABC. Et par consequent le troisiéme DAC est égal au troisiéme CBA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables; Ce qu'il falloit démontrer.

Je

Je dis en ſecond lieu, que les deux Triangles ABD, & ADC, ſont ſemblables entr'eux. Pour le prouver,

L'Angle ADB eſt égal à l'Angle ADC, étant droits, par la conſtruction. L'Angle ABD a été prouvé égal à l'Angle DAC, & l'Angle BAD à l'Angle ACD. Et partant, ces deux Triangles ſont équiangles & ſemblables; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que ſi de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaiſſe une Perpendiculaire ſur la Baze, elle ſera moyenne proportionnelle entre les deux parties de la Baze; c'eſt à dire que comme une des parties de la Baze ſera à cette Perpendiculaire, ainſi cette Perpendiculaire ſera à l'autre partie. Car puiſque les deux Triangles ADB, ADC, ſont ſemblables: les Côtez alentour de leurs Angles droits doivent être proportionnaux, par la 4. Prop. Et partant, comme BD eſt à DA, ainſi DA eſt à DC.

PROPOSITION IX.

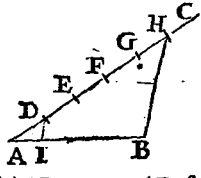
PROBLEME I.

Une Ligne droite étant donnée, en retrancher une partie demandée.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB ſoit donnée, & je propoſe d'en retrancher une partie demandée, comme par exemple la cinquiéme partie. Pour le faire,

Tirez du Point A la Ligne droite indeterminée AC, qui faſſe avec AB tel Angle qu'il vous plaira. Puis ayant

ayant pris la partie AD, à discretion, prenez de suite quatre autres parties, sçavoir, DE, EF, FG, GH, égales à AD, ensorte que la Ligne AD soit la cinquiéme partie de AH. Menez aprés cela du Point H au Point B la Ligne droite HB; & par le Point D menez la Ligne droite DI, parallele à HB. Cela étant, je dis que la Ligne AI est la partie demandée; c'est à dire qu'elle est la cinquiéme partie de AB. Pour le prouver,



Puisque DI est parallele à HB, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que AI est à IB, comme AD est à DH; & en componant, AB est à AI, comme AH est à AD. Et en Raison inverse, AI est à AB, comme AD est à AH. Or AD est la cinquiéme partie de AH, par la construction. Donc AI sera aussi la cinquiéme partie de AB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION X.

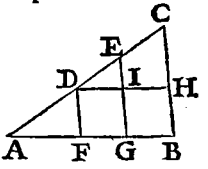
PROBLEME II.

Une Ligne droite étant donnée, la couper semblablement à une autre Ligne droite donnée & coupée.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, AC, soient données, & que AC soit coupée en trois parties, sçavoir, AD, DE, EC. Et je propose de couper la Ligne AB semblablement à la Ligne AC; c'est à dire, ensorte que ses parties soient entr'elles en même Raison que les parties AD, DE, EC. Pour le faire,

Dispo-

Disposez ces deux Lignes en sorte qu'elles se rencontrent au Point A, & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC. Et aprés avoir mené du Point C au Point B la Ligne droite CB, tirez par les Points D & E les Lignes droites DF, EG, paralleles à CB & entr'elles; & par le même Point D menez aussi la Ligne droite DH parallele à AB. Cela étant, je dis que la Ligne droite AB est coupée semblablement à la Ligne AC, aux Points F & G; Pour le prouver,

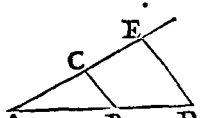


Puisque dans le Triangle AEG la Ligne droite DF est menée parallele à EG: il s'ensuit (par la 2. Prop.) que à AF est à FG, comme AD est à DE. Et puisque la Ligne DH est parallele à FB, il s'ensuit que les Figures FI, GH, sont des Parallelogrammes; & qu'ainsi les Côtez FG, GB, sont égaux aux Côtez opposez DI, IH; & partant que FG est à GB, comme DI est à IH. Or puisque dans le Triangle DCH, la Ligne EI est menée parallele à CH: DI est à IH, comme DE est à EC, par la 2. Prop. Et partant FG est à GB, comme DE est à EC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XI.

PROBLEME III.

Deux Lignes droites étant données, en trouver une troiſiéme qui leur ſoit proportionnelle.



JE ſuppoſe que les deux Lignes droites AB, AC, ſoient données, & je propoſe de trouver une troiſiéme Ligne qui leur ſoit proportionnelle. Pour le faire,

Diſpoſez les deux Lignes droites AB, AC, en ſorte qu'elles ſe rencontrent au Point A, & faſſent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC. Prolongez ces mêmes Lignes indefiniment vers D & vers E; & aprés avoir pris BD égale à AC, & tiré du Point B au Point C la Ligne droite BC, menez par le Point D la Ligne droite DE parallele à BC, qui coupe la Ligne AE au Point E. Cela étant, je dis que la Ligne CE eſt la troiſiéme proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

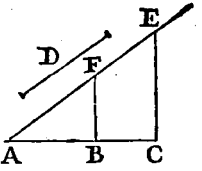
Puiſque dans le Triangle DAE, la Ligne droite BC eſt menée parallele à DE, il s enſuit (par la 2. Prop.) que AB eſt à BD, ou à ſon égale AC, comme AC eſt à CE. Et partant CE eſt troiſiéme proportionnelle aux deux Lignes droites données AB, AC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XII.

PROBLEME IV.

Trois Lignes droites étant données, en trouver une quatriéme qui leur ſoit proportionnelle.



JE ſuppoſe que les trois Lignes droites AB, BC, & D, ſoient données; & je propoſe de trouver une quatriéme Ligne qui leur ſoit proportionnelle. Pour le faire,

Diſpoſez la premiere Ligne AB, & la ſeconde BC, enſorte qu'elles ſe rencontrent directement au Point B. Tirez du Point A la Ligne indefinie AE, qui faſſe avec AC un Angle tel qu'il vous plaira, comme CAE. Puis ayant pris AF égale à la Ligne droite donnée D, & mené la Ligne droite FB: tirez par le Point C la Ligne CE parallele à FB, qui coupe la Ligne AE au Point E. Cela étant, je dis que la Ligne FE eſt la quatriéme proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

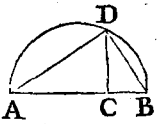
Puiſque dans le Triangle CAE, la Ligne FB eſt menée parallele à EC, il s'enſuit (par la 2. Prop.) que AB eſt à BC, comme AF, ou D ſon égale, eſt à FE. Et partant FE eſt cette quatriéme Ligne qu'il falloit trouver, proportionnelle aux trois Lignes droites données; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIII.

PROBLEME V.

Deux Lignes droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux Lignes.



JE suppose que les deux Lignes droites AC, CB, soient données, & je propose de leur trouver une moyenne proportionnelle; c'est à dire, je propose de trouver une Ligne qui ait cette proportion avec les deux autres, que comme AC sera à cette Ligne, ainsi cette Ligne soit à CB. Pour le faire,

Disposez les deux Lignes droites AC, CB, en telle sorte, qu'elles se rencontrent directement. Puis décrivez sur AB le demi-Cercle ADB; & élevez du Point C la Ligne CD perpendiculaire sur AB, & qui rencontre la Circonference au Point D. Cela étant, je dis que la Ligne CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. Pour le prouver,

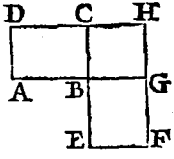
Menez les Lignes droites AD, DB. Cela posé:

Puisque l'Angle ADB est au demi-Cercle, il est droit, par la 31. Prop. du 3. Et partant (par le Corollaire de la 8. Prop.) CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. C'est à dire que comme AC est à CD, ainsi CD est à CB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME IX.

Si deux Parallelogrammes égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtez alentour des Angles égaux ſeront reciproquement proportionnaux : Et ſi deux Parallelogrammes ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez alentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, ils ſeront égaux.



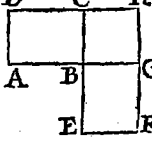
JE ſuppoſe premierement que les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, ſoient égaux, & que les Angles ABC, EBG, ſoient auſſi égaux. Cela étant, je dis que les Côtez alentour de ces Angles ſont reciproquement proportionnaux ; c'eſt à dire, que comme AB eſt à BG, ainſi EB eſt à BC. Pour le prouver,

Diſpoſez les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, en ſorte, que leurs Côtez AB, BG, ſe rencontrent directement au Point B ; & prolongez les Côtez DC, FG, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au Point H. Cela poſé :

Puiſque les Angles ABC & EBG ſont égaux, par ſuppoſition ; les Lignes CB, & EB, ſe rencontrent directement, par la Remarque de la 15. du 1. D'ailleurs, puiſque les Lignes DH, AG, ſont paralleles, & que CE, HF, ſont auſſi paralleles ;

CG

CG est un Parallelogramme. Maintenant, puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. C'est à dire que AB est à BG, comme le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG. Si donc au lieu du Parallelogramme DB on prend le Parallelogramme BF, qui lui est égal, par supposition: il s'ensuivra que AB sera à BG, comme le Parallelogramme BF est au Parallelogramme CG. Or ces deux Parallelogrammes étant de même hauteur, BF est à CG, comme EB est à BC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AB est à BG, comme EB est à BC; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes ABCD, & BEFG, ayent l'Angle ABC égal à l'Angle EBG, & que le Côté AB soit au Côté BG, comme le Côté EB est au Côté BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

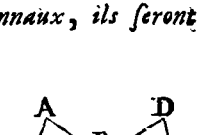
La même préparation que dessus étant supposée: puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur; le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG, comme AB est à BG, par la 1. Prop. Or AB est à BG, comme EB est à BC, par supposition. Partant DB est à CG, comme EB est à BC. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes BF, CG, sont aussi de même hauteur: comme EB est à BC, ainsi BF est à CG. Partant comme DB est à CG, ainsi BF est encore à CG. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Parallelogrammes DB, BF, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XV.

THEOREME X.

Si deux Triangles égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtez alentour des Angles égaux ſeront reciproquement proportionnaux: Et ſi deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez alentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, ils ſeront égaux.

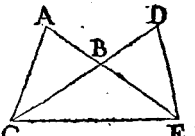


JE ſuppoſe 1°. que les deux Triangles ABC, DBE, ſoient égaux, & que les Angles ABC, DBE, ſoient auſſi égaux. Cela étant, je dis que les Côtez alentour de ces Angles ſont reciproquement proportionnaux; c'eſt à dire que comme AB eſt à BE, ainſi DB eſt à BC. Pour le prouver,

Diſpoſez les deux Triangles ABC, DBE, enſorte, que leurs Côtez AB & BE ſe rencontrent directement au Point B; & du Point C au Point E menez la Ligne droite CE. Cela poſé:

Puiſque les Angles ABC & DBE ſont égaux, par ſuppoſition; les Côtez CB & DB concourent directement, par la Remarque de la 15. du 1. D'ailleurs, puiſque les Triangles ABC & BCE ſont de même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs Bazes,

zes, par la 1. Prop. Et partant AB est à BE, comme le Triangle ABC est au Triangle BCE. Mais le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme son égal DBE est au même Triangle BCE. Partant AB est à BE, comme le Triangle DBE est au Triangle BCE. Mais ces deux Triangles sont de même hauteur; & par consequent le Triangle DBE est au Triangle BCE, comme la Baze DB est à la Baze BC, par la 1. Prop. D'où il suit que AB est à BE, comme DB est à BC, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Triangles ABC & DBE ayent l'Angle ABC égal à l'Angle DBE, & que AB soit à BE, comme DB est à BC. Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

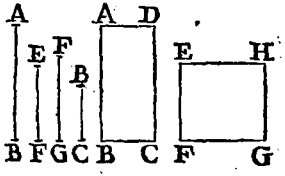
La même préparation que dessus étant supposée: puis que les Triangles ABC & BCE sont de même hauteur, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme AB est à BE, par la 1. Prop. Or AB est à BE, comme DB est à BC, par supposition. Donc le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme DB est à BC, par la 11. du 5. D'ailleurs, parce que les Triangles DBE & BCE sont de même hauteur: comme DB est à BC, ainsi le Triangle DBE est au Triangle BCE. Partant, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme le Triangle DBE est au même Triangle BCE. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Triangles ABC, & DBE, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XVI.

THEOREME XI.

Si quatre Lignes droites ſont proportionnelles, le Rectangle des extrémes ſera égal au Rectangle des moyennes: Et ſi le Rectangle des extrémes eſt égal au Rectangle des moyennes, les quatre Lignes droites ſeront proportionnelles.



JE ſuppoſe; 1°. que les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, ſoient proportionnelles, enſorte que AB & BC ſoient les extrémes, & que EF & FG ſoient les moyennes. D'ailleurs, je ſuppoſe que le Rectangle ABCD ſoit fait des extrémes AB, BC; & que le Rectangle EFGH ſoit fait des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces deux Rectangles ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Puiſque tous les Angles de ces Rectangles ſont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. Et de plus, il eſt ſuppoſé que AB, Côté du premier Rectangle, eſt à EF, Côté du ſecond, comme FG Côté du ſecond, eſt à BC, Côté du premier. Et partant ces deux Rectangles ſont égaux, par la 14. Prop. Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu les quatre Lignes droi-

tes AB, EF, FG, BC; & que le Rectangle ABCD, compris des extrémes AB, BC, soit égal au Rectangle EFGH, compris des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes sont proportionnelles. C'est à dire que AB est à EF, comme FG est à BC. Pour le prouver,

Puisque les deux Rectangles ABCD, EFGH, sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que les Côtez alentour des Angles égaux sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du même second, est à BC, Côté du premier; & qu'ainsi ces quatre Lignes sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITIÒN XVII.

THEOREME XII.

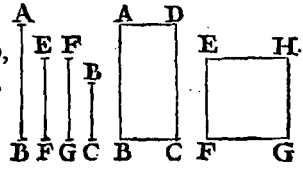
Si trois Lignes droites sont proportionnelles, le Rectangle des deux extrémes sera égal au Quarré de la moyenne: Et si le Rectangle des extrémes est égal au Quarré de la moyenne, les trois Lignes droites seront proportionnelles.

JE suppose 1°. que les trois Lignes droites AB, EF, BC, soient proportionnelles; que le Rectangle ABCD soit compris des deux extrémes AB, BC; & que le Quarré EFGH soit celui de la moyenne EF. Cela étant, je dis que le Rectangle ABCD est égal au Quarré EFGH. Pour le prouver,

Fai-

Faites la Ligne FG égale à EF. Cela posé:

Puisque la Ligne FG est égale à EF, les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, sont proportionnelles, par supposition. Et partant (par la Prop. précedente) le Rectangle ABCD, qui est fait des deux extrémes, sera égal au Rectangle EFGH, qui est fait des deux moyennes. Mais puisque les moyennes EF, FG, sont égales, leur Rectangle est le même que le Quarré de la moyenne EF, sçavoir EFGH. Et partant le Rectangle des extrémes est égal au Quarré de la moyenne; Ce qu'il falloit démontrer.



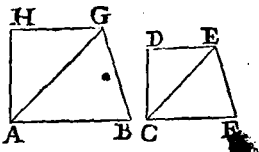
Je suppose en second lieu, que le Rectangle ABCD, compris des deux extrémes AB, BC, soit égal au Quarré EFGH de la moyenne EF. Cela étant, je dis que les trois Lignes AB, EF, BC, sont proportionnelles. Pour le prouver,

Puisque les deux Rectangles ABCD & EFGH sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que leurs Côtez sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du second, ou son égal EF, est à BC, Côté du premier. Et ainsi ces trois Lignes sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME VI.

Sur une Ligne droite donnée, décrire une Figure rectiligne semblable & semblablement posée à une Figure rectiligne donnée.



JE suppose que la Ligne AB, & la Figure rectiligne CDEF, soient données; & je propose de décrire sur la Ligne AB une Figure semblable à CDEF, & semblablement posée; c'est à dire qui soit telle, que dans la Figure qui est à décrire, la Ligne AB soit un Côté homologue à un Côté de la Figure donnée, comme par exemple à CF. Pour le faire,

Prenez un des Angles de la Figure donnée tel qu'il vous plaira, comme par exemple C; & du Point C menez aux autres Angles autant de Lignes droites que vous pourrez, telle qu'est CE, pour resoudre toute la Figure en Triangles. Cela fait, menez des Points A & B les Lignes droites AG, BG, qui fassent avec AB les Angles GAB, & GBA, égaux aux Angles EGF, & EFC, chacun au sien. Puis menez des Points A & G les Lignes droites AH, GH, qui fassent avec AG les Angles HAG, & HGA, égaux aux Angles DCE, & DEC, & ainsi de suite, s'il y avoit encore d'autres Triangles dans la Figure CDEF. Cela étant, je dis que la Figure

gure ABGH, décrite sur la Ligne donnée AB, est semblable & semblablement posée à la Figure CDEF. Pour le prouver,

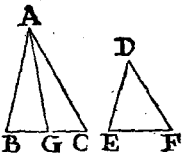
Premierement, de ce que par la construction chaque Triangle de l'une des Figures a deux Angles égaux à deux Angles d'un Triangle de l'autre Figure, le troisiéme Angle de chaque Triangle d'une Figure s'ensuit égal au troisiéme Angle de chaque Triangle de l'autre Figure; & partant tous les Angles des deux Figures étant égaux, chacun au sien, les deux Figures sont équiangles.

Deplus, puisque les Triangles ABG & CFE sont équiangles, il s'ensuit (par la 4. Prop.) que GB est à BA, comme EF est à FC; & de même, que AB est à AG, comme CF est à CE. Mais puisque les Triangles AGH & CED sont aussi équiangles: AG est à AH, comme CE est à CD. Et partant en Raison égale, AB est à AH, comme CF est à CD. De même, AH est à HG, comme CD est à DE. Donc enfin en Raison égale, GB est à GH, comme EF est à ED. Et ainsi les deux Figures ABGH & CDEF, qui sont équiangles, & qui ont leurs Côtez autour des Angles égaux proportionnaux, sont semblables, & semblablement posées; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIII.

Les Triangles ſemblables ſont entr'eux en Raiſon doublée de leurs Côtez de même Raiſon.



JE ſuppoſe que les Triangles ABC & DEF, ſoient ſemblables ; que l'Angle BAC ſoit égal à l'Angle D ; l'Angle B à l'Angle E ; & l'Angle C à l'Angle F. Cela étant, je dis que les Triangles ABC & DEF ſont l'un à l'autre en Raiſon doublée de leurs Côtez de même Raiſon ; c'eſt à dire, qu'ayant trouvé une troiſiéme proportionnelle aux deux Côtez BC, EF : le Triangle ABC ſera au Triangle DEF, comme BC ſera à cette troiſiéme proportionnelle, par exemple à BG. Pour le prouver,

Menez du Point A au Point G la Ligne droite AG. Cela poſé :

Puiſque les Triangles ABC & DEF ſont ſemblables, AB eſt à BC, comme DE eſt à EF. Et partant en Raiſon alterne, AB eſt à DE, comme BC eſt à EF. Mais BC eſt à EF, comme EF eſt à BG, par la conſtruction. Donc AB eſt à DE, comme EF eſt à BG. Et ainſi les deux Triangles ABG & DEF ont un Angle égal à un Angle, ſçavoir B égal à E, & les Côtez alentour de ces Angles reciproquement proportionnaux : d'où il ſuit qu'ils ſont égaux, par la 15. Prop. Et partant le Triangle

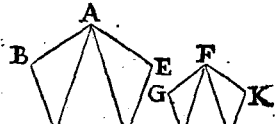
ABG

ABC sera au Triangle DEF, comme le même Triangle ABC est au Triangle ABG. Or ces deux derniers Triangles étant de même hauteur, le Triangle ABC est au Triangle ABG, comme BC est à BG, par la 1. Prop. Par consequent le Triangle ABC est aussi au Triangle DEF, comme BC est à BG, c'est à dire en Raison doublée de BC à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XIV.

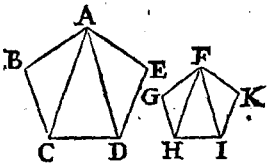
Les Polygones semblables peuvent être divisez dans un nombre égal de Triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leurs Touts: Et ces Polygones sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison.



JE suppose que les Polygones ABCDE & FGHIK soient semblables; ensorte que l'Angle A soit égal à l'Angle F; l'Angle B à l'Angle G; l'Angle C à l'Angle H; l'Angle D à l'Angle I; & l'Angle E à l'Angle K. Et de plus, que AB soit à BC, comme FG à GH; que BC soit à CD, comme GH à HI; que CD soit à DE, comme HI à IK; & enfin que DE soit à EA, comme IK est à KF. Ou bien en Raison alterne, que AB soit à FG, comme BC est à GH; que BC

soit à GH, comme CD est à HI; que CD soit à HI, comme DE est à IK; & enfin que DE soit à IK, comme EA est à KF. Cela étant, je dis premierement qu'on peut diviser le Polygone ABCDE en autant de Triangles que le Polygone FGHIK. Pour le prouver,

Prenez dans les deux Polygones deux Angles égaux, comme l'Angle A, & l'Angle F; & tirez des Points A & F aux autres Angles,



autant de Lignes droites que vous pourrez, comme AC, AD, FH, FI. Cela posé:

Puisque le nombre des Angles du Polygone ABCDE est égal au nombre des Angles du Polygone FGHIK: il est évident qu'il n'y aura ni plus ni moins de Triangles dans l'un que dans l'autre.

Je dis en second lieu, que chaque Triangle du Polygone ABCDE est semblable à un Triangle du Polygone FGHIK; par exemple, que le Triangle ABC est semblable au Triangle FGH; le Triangle ACD au Triangle FHI; & le Triangle ADE au Triangle FIK. Pour le prouver,

Puisque l'Angle B est égal à l'Angle G, & que le Côté AB est au Côté BC, comme FG à GH, par supposition: il s'ensuit (par la 6. Prop.) que les deux Triangles ABC & FGH sont semblables, & équiangles. On prouvera de même, que les deux Triangles ADE & FIK sont aussi semblables, & équiangles. Et quant aux Triangles ACD & FHI: puisque les Angles BCD & GHI sont égaux, par supposition; si on en retranche les Angles BCA & GHF, qui ont été prouvez égaux, les Angles restans ACD & FHI seront aussi égaux entr'eux. De même, si des Angles CDE & HIK, qui sont égaux par supposition, on retranche les Angles

ADE

ADE & FIK, qui ont été prouvez égaux, les Angles reſtans ADC & FIH ſeront auſſi égaux entr'eux; & ainſi les deux Triangles ACD & FHI ſont équiangles, par la 32. du 1. & par conſequent ſemblables. Et partant chaque Triangle d'un des Polygones, eſt ſemblable à un Triangle de l'autre Polygone; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troiſiéme lieu, que les Triangles des deux Polygones ſont proportionnaux à leurs Touts; c'eſt à dire, que comme un Triangle eſt à ſon ſemblable, ainſi un des Polygones eſt à l'autre. Pour le prouver,

Puiſque les Triangles ABC & FGH ſont ſemblables, le premier eſt au ſecond, en Raiſon doublée du Côté BC au Côté GH, par la Propoſition précedente. Or puiſque BC eſt à GH, comme CD eſt à HI, par ſuppoſition: la Raiſon doublée de BC à GH, eſt la même que la Raiſon doublée de CD à HI. Donc le Triangle ABC eſt au Triangle FGH, en Raiſon doublée de CD à HI. Mais le Triangle ACD étant ſemblable au Triangle FHI, l'un eſt auſſi à l'autre en Raiſon doublée de CD à HI. Et partant le Triangle ABC eſt au Triangle FGH, comme le Triangle ACD eſt au Triangle FHI. De même, le Triangle ADE étant ſemblable au Triangle FIK, l'un eſt à l'autre en Raiſon doublée de DE à IK: ou bien parce que DE eſt à IK, comme CD eſt à HI; le Triangle ADE eſt au Triangle FIK, en Raiſon doublée de CD à HI, c'eſt à dire, comme le Triangle ACD eſt au Triangle FHI, ou comme le Triangle ABC au Triangle FGH, puiſque ces Triangles ſont auſſi entr'eux en Raiſon doublée de CD à HI, comme il a été prouvé. Puis donc que nous avons d'une part pluſieurs Triangles, & autant d'autres d'une autre part, qui ſont entr'eux en même Raiſon: il ſuit (par la 12. du 5.) que comme chaque Triangle d'une part eſt à ſon ſemblable de l'autre part, ainſi tous les Triangles

d'une part sont à tous les Triangles de l'autre, c'est à dire, ainsi l'un des Polygones est à l'autre Polygone ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en dernier lieu, que le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison, par exemple, en Raison doublée de CD à HI. Pour le prouver,

Le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, comme chaque Triangle est à son semblable, comme il vient d'être prouvé. Or chaque Triangle est à son semblable en Raison doublée de CD à HI, comme il a aussi été prouvé. Donc le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, en Raison doublée de CD à HI ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XV.

Les Figures rectilignes semblables à une même, sont semblables entr'elles.

JE suppose que la Figure rectiligne A soit semblable à la Figure rectiligne B ; & que la Figure rectiligne C soit aussi semblable à la Figure rectiligne B. Cela étant, je dis que les deux Figures A & C sont semblables entr'elles. Pour le prouver,

Puisque les deux Figures A & B sont semblables, les Angles de la Figure A sont égaux aux Angles de la Figure B, par la 1. Definition. Et puisque la Figure C est semblable à la Figure B, les Angles de la Figure C sont aussi égaux aux Angles de la même

Figure

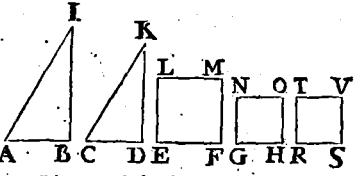
Figure B. Et partant les Angles de la Figure A ſont égaux aux Angles de la Figure C. D'ailleurs, puiſque les Figures A & B ſont ſemblables: les Côtez qui ſont alentour des Angles de la Figure A, ſont proportionnaux aux Côtez qui ſont alentour des Angles qui leur ſont égaux dans la Figure B, par la 1. Definition. Et de même, puiſque les Figures B & C ſont ſemblables: les Côtez qui ſont autour des Angles de la même Figure B, ſont auſſi proportionnaux aux Côtez qui ſont autour des Angles qui leur ſont égaux dans la Figure C. D'où il ſuit, que les Côtez qui ſont autour des Angles de la Figure A, ſont proportionnaux aux Côtez qui ſont autour des Angles qui leur ſont égaux dans la Figure C. Et partant les Figures A & C ſont ſemblables; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XVI.

Si quatre Lignes droites ſont proportionnelles, les Figures ſemblables & ſemblablement poſées ſur ces Lignes, ſeront auſſi proportionnelles: Et ſi quatre Figures ſemblables & ſemblablement poſées ſur quatre Lignes droites, ſont proportionnelles, ces quatre Lignes droites ſeront auſſi proportionnelles.

JE ſuppoſe premierement que les quatre Lignes AB, CD, EF, GH, ſoient proportionnelles; & que les Figures ABI, CDK, & les Figures EM, GO, ſoient ſemblables & ſemblablement poſées



ſur ces quatre Lignes. Cela étant, je dis que ces quatre Figures ſont proportionnelles; c'eſt à dire que ABI eſt à CDK, comme EM eſt à GO. Pour le prouver.

Puiſque les Figures ABI & CDK ſont ſemblables: ABI eſt à CDK, en Raiſon doublée de AB à CD, par

par la 20. Prop. Et puiſque AB eſt à CD, comme EF eſt à GH, par ſuppoſition : la Raiſon doublée de AB à CD eſt la même que la Raiſon doublée de EF à GH. De même, puiſque les Figures EM & GO ſont ſemblables : EM eſt à GO, en Raiſon doublée de EF à GH. Partant la Figure ABI eſt à la Figure CDK, comme la Figure EM eſt à la Figure GO, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que les quatre Figures ABI, CDK, EM, GO, qui ſont ſemblables & ſemblablement poſées ſur les quatre Lignes droites AB, CD, EF, GH, ſoient proportionnelles. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes ſont auſſi proportionnelles. Pour le prouver,

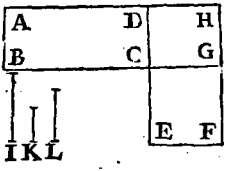
Suppoſons que RS ſoit une quatriéme proportionnelle aux trois Lignes droites AB, CD, EF, par la 12. Prop. & que la Figure RSVT décrite ſur cette Ligne, ſoit ſemblable & ſemblablement poſée à la Figure EM, ou à GO, par la 18. Prop. Cela poſé :

Par ce qui vient d'être démontré, comme ABI ſera à CDK, ainſi EM ſera à RV. Mais ABI eſt auſſi à CDK, comme EM eſt à GO, par ſuppoſition. Donc EM eſt à RV, comme à GO. D'où il ſuit (par la 9. Prop. du 5.) que les Figures GO & RV ſont égales. Mais elles ſont auſſi ſemblables, par la conſtruction ; partant les Lignes GH, RS, ſur leſquelles elles ſont décrites, ſont égales. Comme donc la Ligne RS eſt une quatriéme Proportionnelle aux trois Lignes AB, CD, EF : la Ligne GH ſera auſſi une quatriéme proportionnelle aux mêmes Lignes ; c'eſt à dire, que AB ſera à CD, comme EF à GH ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XVII.

Les Parallelogrammes équiangles ſont entr'eux en Raiſon compoſée de celles de leurs Côtez.



JE ſuppoſe que les Parallelogrammes AC & CF ſoient équiangles, & que l'Angle BCD ſoit égal à l'Angle ECG. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AC eſt au Parallelogramme CF, en Raiſon compoſée de BC à CG, & de DC à CE. Pour le prouver,

Diſpoſez ces deux Parallelogrammes enſorte que leurs Côtez BC, CG, ſe rencontrent directement au Point C; par même moyen les deux autres Côtez DC, CE, concourront auſſi directement, par la Remarque de la 15. du 1. Prolongez les Côtez AD, FG, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au Point H. Puis ayant pris à diſcretion la Ligne I, faites (par la 12. Prop.) que comme BC eſt à CG, ainſi la Ligne I ſoit à la Ligne K; & comme DC eſt à CE, ainſi la Ligne K ſoit à la Ligne L. Cela poſé:

Puiſque les Lignes AH, BG, ſont paralleles, & que les Lignes ED, FH, ſont auſſi paralleles: la Figure DG eſt un Parallelogramme. Et puiſque les Parallelogrammes AC, DG, ſont de même hauteur: AC eſt à DG, comme BC à CG, par la 1. Prop. Mais comme BC eſt à CG, ainſi I eſt à K, par la conſtruction. Donc AC eſt à DG, comme

me I est à K. De même, puisque les Parallelogrammes DG, CF, sont de même hauteur: DG est à CF, comme DC est à CE. Or DC est à CE, comme K est à L, par la construction. Partant DG est à CF, comme K est à L. Nous avons donc trois Grandeurs AC, DG, & CF, d'une part, & trois Grandeurs I, K, L, d'autre part, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Partant en Raison égale elles seront encore proportionnelles, par la 22. Prop. du 5. Et ainsi le Parallelogramme AC sera au Parallelogramme CF, comme I est à L. Mais la Raison de I à L est composée des Raisons de I à K, & de K à L, qui sont les mêmes que les Raisons de BC à CG, & de DC à CF. Donc le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE; Ce qu'il falloit démontrer.

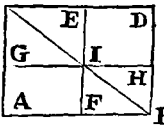
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XVIII.

En tout Parallelogramme, les Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & qui ont un Angle commun avec lui, lui sont semblables, & semblables entr'eux.

JE suppose le Parallelogramme ABDC, & que les Parallelogrammes GE, FH, soient alentour de son Diametre BC, & deplus, qu'ils ayent les Angles B & C communs avec lui. Cela étant, je dis premierement que les deux Parallelogrammes GE, FH, sont semblables au Parallelogramme AD. Pour le prouver, Les

Les Angles GCE & FBH, qui sont les opposez dans le Parallelogramme AD, sont égaux entr'eux, par la 34. Prop. du 1. Or les Angles GIE & FIH sont égaux à ces premiers Angles, puis qu'ils leur sont aussi opposez dans les Parallelogrammes GE & FH. Et partant ces quatre Angles sont égaux entr'eux. De sorte que les trois Parallelogrammes AD, GE, FH, ont déja chacun deux Angles égaux à deux Angles. D'ailleurs, puisque les Lignes AB, GH, sont paralleles, par supposition, & que la Ligne droite CGA tombe dessus: l'Angle exterieur CGI est égal à son opposé interieur A, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BA tombe dessus: l'Angle exterieur IFB est encore égal à son opposé interieur A. Et ainsi les trois Angles G, A, F, sont égaux entr'eux. Et parce que l'Angle E est égal à son opposée G; que l'Angle D est égal à son opposé A; & que l'Angle H est égal à son opposé F, par la 34. Prop. du 1: ces trois Angles E, D, H, sont aussi égaux entr'eux. Voilà donc encore les deux Angles restans d'un de ces Parallelogrammes, égaux aux deux Angles restans de chacun des deux autres. Et par consequent ces trois Parallelogrammes sont équiangles. Deplus, les Triangles CGI & CAB, qui ont déja les Angles G & A égaux, ayant encore l'Angle GCI commun, sont équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant (par la 4. Prop.) CG est à GI, comme CA est à AB. Si bien que les Parallelogrammes GE & AD étant équiangles, & leurs Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux: l'un est semblable à l'autre. De même, les Triangles IFB & CAB, qui ont déja les Angles F & A égaux, ayant encore l'Angle FBI com-



commun, ſont auſſi équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant (par la 4. Prop.) IF eſt à FB, comme CA eſt à AB. Si bien que les Parallelogrammes FH & AD étant auſſi équiangles, & leurs Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux: l'un eſt auſſi ſemblable à l'autre; Ce qu'il falloit démontrer.

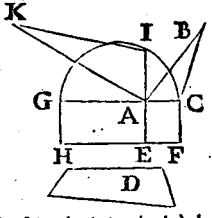
Je dis en ſecond lieu, que les Parallelogrammes GE & FH ſont ſemblables entr'eux.

Car puis qu'ils ſont tous-deux ſemblables au Parallelogramme AD, il s'enſuit (par la 21. Prop.) qu'ils ſont auſſi ſemblables entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME VII.

Deux Figures rectilignes étant données, en décrire une troiſiéme, ſemblable à l'une, & égale à l'autre.

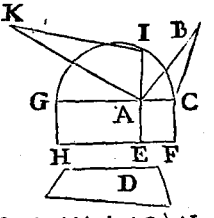


JE ſuppoſe que les deux Figures ABC, & D, ſoient données; & je propoſe d'en décrire une troiſiéme, ſemblable à la Figure ABC, & égale à la Figure D. Pour le faire,

Décrivez (par la 44. Prop. du 1.) ſur la Ligne AC le Parallelogramme Rectangle AF, égal à la Figure ABC. Puis (par la 45. Prop. du 1.) décrivez ſur AE le Parallelogramme AH, égal à la Figure donnée D. Aprés cela décrivez ſur GC le demi-

Cer-

Cercle GIC ; & aprés avoir élevé au Point A la Perpendiculaire AI, si longue, qu'elle rencontre la Circonference au Point I : décrivez (par la 18. Prop.) sur AI la Figure AIK, semblable à la Figure donnée ABC. Et alors je dis que cette Figure AIK sera égale à la Figure donnée D. Pour le prouver,



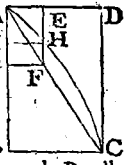
La Ligne AI est moyenne proportionnelle entre AC, & AG, par la 13. Prop. c'est à dire, que AC est à AI, comme AI est à AG. Et par consequent AC est à AG, en Raison doublée de AC à AI. Or les Figures ABC & AIK étant semblables, l'une est à l'autre en Raison doublée de AC à AI, par la 19. & 20. Prop. Donc la Figure ABC est à la Figure AIK, comme AC est à AG. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes AF, AH, sont de même hauteur : comme AC est à AG, ainsi AF est à AH. Partant la Figure ABC est à la Figure AIK, comme le Parallelogramme AF est au Parallelogramme AH. Et en Raison alterne, la Figure ABC est au Parallelogramme AF, comme la Figure AIK est au Parallelogramme AH. Or la Figure ABC est égale au Parallelogramme AF, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale au Parallelogramme AH. Mais le Parallelogramme AH est égal à la Figure donnée D, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale à la Figure donnée D ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XIX.

Si d'un Parallelogramme on retranche un Parallelogramme ſemblable & ſemblablement poſé au total, & ayant un Angle commun avec lui : le Parallelogramme retranché ſera alentour du Diametre du Parallelogramme total.



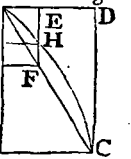
JE ſuppoſe que du Parallelogramme ABCD l'on ait retranché le Parallelogramme GE, qui lui eſt ſemblable & ſemblablement poſé, & qui a l'Angle GAE commun avec lui. Cela étant, je dis que le Parallelogramme GE eſt alentour du Diametre du Parallelograme total BD ; c'eſt à dire, qu'en ménant une Ligne droite du Point A au Point C, elle paſſera par l'Angle F. Pour le prouver,

Si cela n'étoit, il faudroit que cette Ligne paſſât par quelqu'autre Point que par le Point F. Suppoſons donc, s'il eſt poſſible, que ce ſoit par le Point H, comme fait ici AHC. Cela poſé :

En tirant la Ligne HI parallele à AE, il s'enſuivroit que le Parallelogramme IE ſeroit alentour du Diametre du Parallelogramme BD. Or ces deux Parallelogrammes ont l'Angle IAE commun. Et partant (par la 24. Prop.) le Parallelogramme IE ſeroit ſemblable au total BD. Mais le Parallelogramme GE eſt ſuppoſé ſemblable au total BD.

Par

Par conſequent le Parallelogramme IE, & le Parallelogramme GE, ſeroient ſemblables, par la 21. Prop. Et partant le Côté IH ſeroit au Côté IA, comme le Côté GF eſt au Côté GA. Or IH eſt égal à GF, puis qu'ils ſont les Côtez oppoſez du Parallelogramme GH. Et partant IA ſeroit auſſi égal à GA, par la 14. Prop. du 5; c'eſt à dire la partie au tout; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que la Ligne droite menée du Point A au Point C, paſſe par ailleurs que par le Point F. Et par conſequent, le Parallelogramme GE eſt alentour du Diametre du Parallelogramme BD; Ce qu'il falloit démontrer.



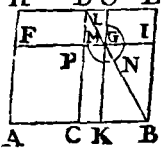
PROPOSITION XXVII.

THEOREME XX.

Si on applique à une Ligne droite tant de Parallelogrammes que l'on voudra, chacun deſquels défaille d'un Parallelogramme ſemblable à un autre qui eſt déja décrit ſur la moitié de cette Ligne: le plus grand de tous ſera celui qui ſera décrit ſur l'autre moitié, lequel ſera égal & ſemblable au Défaut.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB ſoit donnée; qu'elle ait été coupée en deux également au Point C; & que ſur la moitié CB l'on ait décrit le Paral-

Parallelogramme CE ; & qu'aprés cela l'on ait achevé de décrire sur la Ligne AB le Parallelogramme AE. Par ce moyen, il sera vrai de dire, que le Parallelogramme AD sera appliqué à la moitié de la Ligne droite AB, & défaudra du Parallelogramme CE, décrit sur l'autre moitié, & auquel il est égal, par la 36. Prop. du 1. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AD est le plus grand de tous ceux qui peuvent être appliquez sur la Ligne AB, & défaillans d'un Parallelogramme semblable au Parallelogramme CE, qui avoit été auparavant décrit sur la moitié CB. Pour le prouver,



Tirez le Diametre DB ; & ayant pris à discretion dans ce Diametre le Point G, menez par le Point G la Ligne FGI parallele à AB, & la Ligne KGO parallele à CD. Cela posé :

Le Parallelogramme AG sera appliqué à la Ligne AB, & défaudra du Parallelogramme KI, lequel (par la 24. Prop.) sera semblable au Parallelogramme CE. Il s'agit donc de montrer que le Parallelogramme AD est plus grand que le Parallelogramme AG. Pour le prouver.

Les Supplémens GE & CG sont égaux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoûte le Parallelogramme KI, le Parallelogramme KE sera égal au Parallelogramme CI. Or le Parallelogramme AP est aussi égal au Parallelogramme CI, par la 36. Prop. du 1. puisqu'ils sont sur Bazes égales & entre mêmes Paralleles. Partant le Parallelogramme KE est égal au Parallelogramme AP. Donc en leur ajoûtant le Parallelogramme commun CG, il s'ensuivra que le Gnomon LNM sera égal au Parallelogramme AG. Or le Parallelogramme CE est plus grand que le Gnomon LNM, qui n'est que sa partie ; & par con-

conſequent, il eſt plus grand que le Parallelogramme AG. D'où il ſuit, que le Parallelogramme AD, qui eſt égal au Parallelogramme CE, eſt auſſi plus grand que le Parallelogramme AG; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

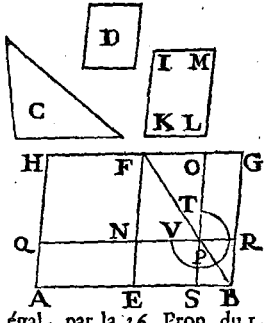
PROBLEME VIII.

Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & défaillant d'un Parallelogramme ſemblable à un Parallelogramme donné: Mais il faut que la Figure donnée ne ſoit pas plus grande qu'un Parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la Ligne donnée, ſeroit ſemblable au Parallelogramme donné.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, ſoient donnez; & que cette Figure ne ſoit pas plus grande que le Parallelogramme AF, qui eſt décrit ſur la moitié de la Ligne AB, & qui eſt ſemblable au Parallelogramme donné D. Et je propoſe d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & défaillant d'un Parallelogramme ſemblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,

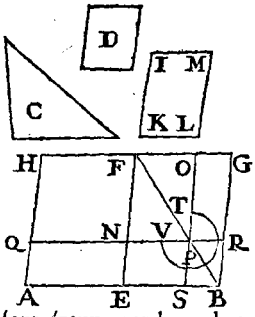
Décrivez ſur EB, moitié de la Ligne donnée, le Parallelogramme EG, ſemblable au Parallelogram-

gramme donné D. Puis achevez de décrire sur la Ligne AB le Parallelogramme AG. Par ce moyen AF sera un Parallelogramme appliqué à la Ligne AB, & défaillant du Parallelogramme EG semblable au Parallelogramme donné D. Or ce Parallelogramme AF, qui est décrit sur la moitié de la Ligne AB, ou il est égal à la Figure donnnée C, ou il est plus grand; car il ne doit pas être plus petit, par la supposition. S'il est égal, on aura fait ce qu'il falloit faire; s'il est plus grand, trouvez (par la 2. Remarque de la 45. Prop. du 1.) l'excez dont cette Figure C est surpassée par le Parallelogramme AF, ou par EG, qui lui est égal, par la 36. Prop. du 1. Puis (par la 25. Prop.) décrivez le Parallelogramme KM, égal à cét excez, & qui soit semblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant pris FO égale à IM, & FN égale à IK: menez par le Point O la Ligne OS parallele à FE, & par le Point N la Ligne QR parallele à AB. Alors je dis que le Parallelogramme AP, qui est appliqué à la Ligne donnée AB, est égal à la Figure donnée C; & que le Parallelogramme SR, dont il est défaillant, est semblable au Parallelogramme donné D. Pour le prouver,



Puisque les Parallelogrammes EG & KM ont été faits semblables au Parallelogramme donné D, ils sont semblables entr'eux, par la 21. Prop. & l'Angle NFO est égal à l'Angle KIM. D'ailleurs, les Lignes FO, FN, ayant été prises égales aux Lignes

gnes IM, IK : le Parallelogramme NO est égal & semblable au Parallelogramme KM, & par consequent aussi au Parallelogramme EG ; avec lequel ayant l'Angle NFO commun, il s'ensuit (par la 26. Prop.) que ces deux Parallelogrammes sont alentour du même Diametre. Et partant, tirant la Ligne droite FB, elle passera par le Point P. D'ailleurs, le Parallelogramme NO étant égal au Parallelogramme KM, qui est l'excez dont le Parallelogramme EG surpasse la Figure donnée C : il s'ensuit que le Gnomon TV est égal à la Figure donnée C. Maintenant, les Supplémens EP & PG sont égaux, par la 43. du 1. Donc en leur ajoûtant le Parallelogramme commun SR, le Parallelogramme ER sera égal au Parallelogramme SG. Or le Parallelogramme AN est égal au Parallelogramme ER, par la 36. du 1. Donc le Parallelogramme AN est aussi égal au Parallelogramme SG. Si donc on ajoûte à ces deux Tous le Parallelogramme EP ; il s'ensuivra que le Parallelogramme AP sera égal au Gnomon TV. Mais le Gnomon TV a été prouvé égal à la Figure donnée C. Donc le Parallelogramme AP est aussi égal à la Figure donnée C. De plus, le Parallelogramme SR étant alentour du Diametre du Parallelogramme EG, lui est semblable, par la 24. Prop. Il est donc aussi semblable au Parallelogramme donné D, par la 21. Prop. Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.



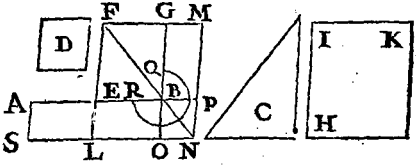
PRO-

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME IX.

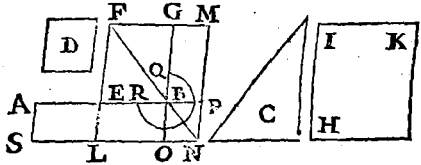
Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & excedant d'un Parallelogramme ſemblable à un Parallelogramme donné.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, ſoient donnez; & je propoſe d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & excedant d'un Parallelogramme ſemblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,



Coupez la Ligne AB en deux également au Point E; & ſur la moitié EB décrivez (par la 18. Prop.) le Parallelogramme EG, ſemblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant décrit (par la 45. Prop. du 1. & par la 25. Prop. de ce Livre) le Parallelogramme HIK, égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG, pris enſemble, & ſemblable au Parallelogramme donné D: prolongez le Côté FG vers M, & FE vers L, enſorte que FM

soit égal à IK, & FL à IH. Cela fait, menez par le Point M la Ligne MN parallele à FL; par le Point L la Ligne LN parallele à AB; & par le Point A, la Ligne AS parallele à FL: & prolongez la Ligne AB jusqu'en P, & la Ligne LN jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AS au Point S. Cela étant, je dis que le Parallélogramme SP, qui



est appliqué à la Ligne donnée AB, est égal à la Figure C; & que le Parallelogramme OP, dont il est excedant, est semblable au Parallelogramme donné D. Pour le prouver,

Puisque les Parallelogrammes EG & HK ont été faits semblables au Parallelogramme donné D, ils sont semblables entr'eux, par la 21. Prop. & l'Angle HIK est égal à l'Angle EFG. Et d'autant que les Côtez FL, FM, du Parallélogramme LM, ont été pris égaux aux Côtez HI, IK, du Parallelogramme HK: le Parallelogramme LM est égal & semblable au Parallelogramme HK, & par consequent aussi semblable au Parallelogramme donné D, & au Parallelogramme EG. Deplus, les Parallelogrammes LM & EG étant semblables, & ayant l'Angle F commun, ils sont alentour du même Diametre FBN, par la 26. Prop. D'ailleurs, le Parallelogramme LM étant égal au Parallelogramme HK, qui a été fait égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG: il s'ensuit que le Parallelogramme LM est aussi égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG; & par consequent que le Gnomon QR est égal

à la

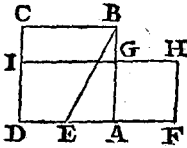
à la Figure donnée C. Maintenant, d'autant que (par la 43. du 1.) le Supplément GP est égal au Supplément EO, & que le Parallelogramme AL est égal à EO, par la 36. du 1: il s'ensuit que le Parallelogramme AL est aussi égal au Supplément GP. Et partant en leur ajoûtant le Parallelogramme commum LP, le Parallelogramme SP sera égal au Gnomon QR. Or ce Gnomon a été prouvé égal à la Figure donnée C. Partant le Parallelogramme SP, qui est appliqué à la Ligne droite donnée AB, est égal à la Figure donnée C. Et d'autant que le Parallelogramme OP, dont le Parallelogramme SP excede, est semblable au Parallelogramme LM, par la 24. Prop: il est aussi semblable au Parallelogramme donné D; Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME X.

Couper une Ligne droite donnée, selon la moyenne & extréme Raison.

JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée; & je propose de la couper selon la moyenne & extréme Raison. Pour le faire,



Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AC. Coupez le Côté AD en deux également au Point E. Du Point E au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez la Ligne EA vers F, & prenez EF égale à EB. Ensuite, décrivez sur AF le Quarré AH, & prolongez HG

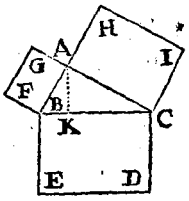
vers I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G selon la moyenne & extréme Raison, c'est à dire que AB est à AG, comme AG est à GB. Pour le prouver,

Par cette construction, & par le raisonnement de la 11. Prop. du 2. il est évident que le Rectangle IB est égal au Quarré AH. D'où il suit, par la 14. Prop. de ce Livre, que comme CB, ou AB son égale, est à AG, ainsi GH, ou AG son égale, est à GB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXI.

Si sur les trois Côtez d'un Triangle Rectangle sont décrites trois Figures semblables & semblablement posées: celle qui est décrite sur le Côté qui soûtient l'Angle droit, est égale aux deux autres.



JE suppose que le Triangle ABC soit Rectangle; que l'Angle BAC soit droit; & que sur les trois Côtez AB, AC, BC, soient décrites les trois Figures FA, AI, EC, qui soient semblables & semblablement posées: Cela étant, je dis que la Figure EC, décrite sur le Côté BC, qui soûtient l'Angle droit BAC, est égale

aux

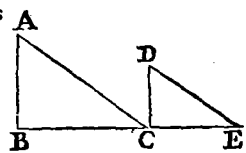
aux deux autres FA & AI. Pour le prouver,

Abaissez du Point A la Ligne droite AK, perpendiculaire à la Ligne BC. Cette Ligne AK (par la 8. Prop.) divisera le Triangle ABC en deux Triangles semblables entr'eux, & au total; & les Côtez AB, BC, CA, qui soûtiennent chacun un Angle droit, seront homologues, ou de même Raison. Ensuite de quoi (par la 19. Prop.) le Triangle AKB est au Triangle ABC, en Raison doublée de AB à BC. Or les Figures FA, EC, qui sont supposées semblables, sont aussi l'une à l'autre en Raison doublée de AB à BC, par la 20. Prop. de ce Livre. Et partant le Triangle AKB est au Triangle ABC, comme la Figure FA est à la Figure EC. D'ailleurs, le Triangle AKC est au Triangle ABC, en Raison doublée de AC à BC, par la 19. Prop. Mais (par la 20. Prop.) la Figure AI est aussi à la Figure EC, en Raison doublée de AC à BC. Partant le Triangle AKC est au Triangle ABC, comme la Figure AI est à la Figure EC. Nous avons donc le Triangle AKB, premiere Grandeur, qui est au Triangle ABC, seconde Grandeur, comme la Figure FA, troisiéme Grandeur, est à la Figure EC, quatriéme. Deplus, nous avons le Triangle AKC, cinquiéme Grandeur, qui est à la seconde ABC, comme la Figure AI, sixiéme Grandeur, est à la quatriéme EC. Partant (par la 24. Prop. du 5.) comme la premiere Grandeur AKB, & la cinquiéme AKC, prises ensemble, sont à la seconde ABC; ainsi la troisiéme FA, & la sixiéme AI, prises ensemble, sont à la quatriéme EC. Or la premiere AKB, & la cinquiéme AKC, prises ensemble, sont égales à la seconde ABC, puisqu'elles conviennent. Donc la troisiéme FA, & la sixiéme AI, prises ensemble, sont aussi égales à la quatriéme EC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

Si deux Triangles, qui ont deux Côtez proportionnaux à deux Côtez, ſont diſpoſez de telle ſorte qu'ils faſſent un Angle, & que leurs Côtez homologues ſoient paralleles : les deux autres Côtez ſe rencontreront directement.



JE ſuppoſe que dans les deux Triangles ABC, & DCE, le Côté AB ſoit au Côté AC, comme le Côté DC eſt au Côté DE; & que ces deux Triangles ſoient diſpoſez de telle ſorte qu'ils faſſent l'Angle ACD; & que leurs Côtez homologues ſoient paralleles, c'eſt à dire que le Côté AB ſoit parallele au Côté DC, & le Côté AC au Côté DE. Cela étant, je dis que les deux autres Côtez BC, CE, ſe rencontreront directement. Pour le prouver,

Puiſque la Ligne droite AC tombe ſur les Lignes AB, DC, qui ſont paralleles par ſuppoſition: l'Angle ACD eſt égal à l'Angle A, qui lui eſt oppoſé alternativement, par la 29. Prop. du 1. De même, puiſque la Ligne droite CD tombe ſur les deux Paralleles AC, DE: l'Angle D eſt égal à ſon oppoſé alternativement ACD. Et partant les deux Angles A & D ſont égaux entr'eux. Et puiſque les

Côtez

Côtez qui sont alentour de ces Angles, sont proportionnaux, par supposition : les deux Triangles ABC & DCE sont équiangles, par la 6. Prop. Par consequent l'Angle B est égal à l'Angle DCE ; & l'Angle ACB égal à l'Angle E. Maintenant, puisque l'Angle DCE est égal à l'Angle B : si l'on ajoûte à l'un l'Angle ACD, & à l'autre l'Angle A, qui sont égaux : les deux Angles DCE & ACD, ou bien l'Angle seul ACE, seront égaux aux deux Angles B & A ; & en leur ajoûtant derechef l'Angle commun ACB, il s'ensuivra que les deux Angles ACE & ACB seront égaux aux trois Angles du Triangle ABC, c'est à dire à deux droits, par la 32. du 1. D'où il suit (par la 14. Prop. du 1.) que les deux Lignes BC, CE, se rencontrent directement ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

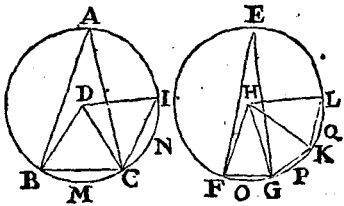
THEOREME XXIII.

Aux Cercles égaux, les Angles constituez au Centre, ou à la Circonference, sont entr'eux comme les Arcs qui les soûtiennent ; & les Secteurs sont aussi entr'eux comme ces Arcs.

JE suppose que les deux Cercles ABC, & EFG, soient égaux ; & que les Angles BDC & FHG soient constituez aux Centres de ces deux Cercles. Cela étant, je dis que l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG. Pour le prouver,

Menez une Ligne droite du Point B au Point C,

& une autre Ligne droite du Point F au Point G. Puis appliquez à la Circonference du Cercle ABC autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à BC; telle qu'est par exemple la Ligne CI. De même, appliquez à la Circonference du Cercle EFG autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à FG, telles que sont GK, KL; & tirez les Lignes droites DI, HK, KL. Cela posé:



Puisque les Lignes droites BC, CI, sont égales: les Arcs BC, CI, dont elles sont les Soûtendantes, sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite dequoi, les Angles BDC & CDI sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle BDI est autant multiple de l'Angle BDC, qui est la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc BCI est multiple de l'Arc BC, qui est la troisiéme de ces mêmes Grandeurs. D'ailleurs, puisque les Lignes droites FG, GK, KL, sont égales: les Arcs FG, GK, KL, dont elles sont les Soûtendantes, sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite de quoi, les Angles FHG, GHK, KHL, sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle FHL est autant multiple de l'Angle FHG, qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatriéme de ces mêmes Grandeurs. Or si l'Angle BDI est égal à l'Angle FHL, l'Arc BCI s'ensuit égal à l'Arc FGKL, par la 26. Prop. du 3. Et si l'Angle BDI est

eſt plus grand que l'Angle FHL, l'Arc BCI eſt auſſi plus grand que l'Arc FGKL. Et enfin ſi l'Angle BDI eſt moindre que l'Angle FHL, l'Arc BCI eſt auſſi moindre que l'Arc FGKL. Et partant (par le 2. Axiome du 5.) ces quatre Grandeurs ſont proportionnelles; c'eſt à dire, que l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que les Angles BAC & FEG, qui ſont conſtituez aux Circonferences de ces Cercles ſont encore entr'eux comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG. Pour le prouver,

Les Angles BAC & FEG ſont les moitiez des Angles BDC & FHG, par la 20. Prop. du 3. Et par conſequent (par la 15. Prop. du 5.) l'Angle BAC eſt à l'Angle FEG, comme l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG. Or l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG, comme il a été prouvé. Et partant, l'Angle BAC eſt à l'Angle FEG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troiſiéme lieu, que le Secteur DBMC eſt au Secteur HFOG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG. Pour le prouver,

Puiſque les Lignes BC, CI, ſont égales, & que les Arcs BC, CI, qu'elles ſoûtiennent, ſont égaux: il s'enſuit que les Segmens BMC, & CNI, ſont auſſi égaux entr'eux. Aquoy ſi on ajoûte les Triangles BDC & CDI, qui ſont égaux, par la 4. Prop. du 1. les Secteurs DBMC & DCNI ſeront auſſi égaux entr'eux. Deſorte que le Secteur DBCI eſt autant multiple du Secteur DBMC, qui eſt la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles; que l'Arc BCI eſt multiple de l'Arc BC, qui eſt la troiſiéme de ces mêmes Grandeurs. On prouvera de même, que le Secteur HFGKL eſt autant multiple du Secteur HFOG, qui eſt la ſeconde des quatre Grandeurs

qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatriéme de ces mêmes Grandeurs. Or si le Secteur DBCI est égal au Secteur HFGKL, l'Arc BCI est aussi égal à l'Arc FGKL; Si le Secteur est plus grand que le Secteur, l'Arc est plus grand que l'Arc; Et si le Secteur est moindre que le Secteur, l'Arc est aussi moindre que l'Arc. Donc (par le 2. Axiome du 5.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; c'est à dire que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG; Ce qui restoit à démontrer.

I. Corollaire.

Puisque l'Angle d'un Secteur est à l'Angle d'un autre Secteur, comme l'Arc de l'un est à l'Arc de l'autre; & que l'Arc est à l'Arc, comme le Secteur est au Secteur: il s'ensuit que comme l'Angle est à l'Angle, ainsi le Secteur est au Secteur.

II. Corollaire.

Deplus, puisque le Cercle est composé de tous les Secteurs qui peuvent être autour de son Centre: il est évident que comme la quantité des quatre Angles droits qui peuvent être autour du Centre, est à la quantité de l'Angle du Secteur, ainsi la quantité de tout le Cercle est à la quantité du Secteur.

Fin des Elemens d'Euclide.