OEUVRES

POSTHUMES

DE

Mr. ROHAULT.

TOME PREMIER.

Suivant la Copie de Paris.

A LA HAYE,
Chez HENRY van BULDEREN, Marchand
Libraire, dans le Pooten, à l'Enſeigne
de MEZERAY.

M. DC. XC.

A MONSEIGNEUR
D'ESTRÉES,
EVESQUE ET DUC DE LAON,
PAIR DE FRANCE,
COMTE D'ANISY.

MONSEIGNEUR,

Entre toutes les connoiſſances auxquelles l'Eſprit humain ſe peut appliquer, il n'y en a point qui ayent plus de rapport à la Religion que les Mathématiques. Toutes les Sciences ſe propoſent également la recherche de la Verité, mais il n'y a qu'elles ſeules qui ſe puiſſent vanter inconteſtablement de l'avoir atteinte. En effet, ſi la Religion, par les lumieres ſurnaturelles de la Foi, nous fait jour à ce qui eſt au-deſſus de la portée de nos Eſprits: Les Mathématiques, par le moyen de ce Flambeau interieur & naturel que Dieu a allumé en nous, & à la faveur des premieres veritez generales qui ſautent d'abord aux yeux de tout le monde, nous introduiſent dans *une longue suite de plusieurs autres veritez, qui en dépendent, & qui ne sont pas moins certaines que leurs principes. Cette raison seule doit suffire, MONSEIGNEUR, pour satisfaire le Public, sur le choix que j'ai fait d'un des plus Illustres Princes de l'Eglise, pour Lui consacrer un Ouvrage tout consacré lui-même à la Verité; & qui appliquant nôtre Esprit à des objets qui n'ont rien qui flate les Sens, mais que nous ne laissons pas de trouver infiniment agreables, à cause des veritez qu'on y découvre, peut mêmes contribuer en quelque façon au réglement de nos mœurs, en nous détachant des choses sensibles, qui sont les causes les plus ordinaires de leur corruption. Dés cette premiere ouverture que je donne de ma pensée, chacun sans doute y applaudit, & enchérissant même pardessus, me prévient déja sur tout ce que je puis avoir à dire à Vôtre gloire. Vôtre Illustre Nom, MONSEIGNEUR, comme un nouveau Flambeau qui surprend & qui brille, fait voir tout d'un coup les nobles convenances qui se rencontrent en mon dessein, de mettre cêt Ouvrage sous une si glorieuse protection. Le passage est aisé du Rang à la Personne; & l'on n'a pas plutôt approuvé de voir les veritez Mathématiques sous l'azile favorable d'un des plus sacrez Dépositaires de celles de la Foi, qu'on les felicite, & moi avec elles, d'être à l'abry d'un si beau Nom, où tout est également grand & solide, majestueux & eclatant. Une Ambassade dans la premiere Cour du Monde Chrêtien, prolongée pour la quatriéme fois au delà des termes ordinaires, fait voir à tout l'Univers, en la Personne de Monseigneur Vôtre Pere, une fidelité sans reproche, une sagesse consommée, une capacité sans bornes. Ces Negotiations reiterées de Monseigneur le Cardinal d'Estrées, Vôtre Oncle, à Rome, par ordre de Sa Majesté, dans les conjonctures les plus délicates, où la Politique, aussi bien que la Nature, demande deux yeux, non pour voir plus clair, mais pour voir plus seurement, & avec plus d'étenduë, ne marquent-elles pas une distinction particuliere de merite, & une confiance entiere en la force &*

en

en la prudence de son génie. Et ne diroit-on pas, que le Monarque le plus éclairé que la France ait jamais eu, pleinement content & satisfait des services de ces deux Illustres Freres, semble au milieu de tant de grands Sujets, n'en trouver pas-un digne de leur succeder, jusques à ce qu'associé à la Pourpre de l'un, & remplissant le merite de tous-les-deux, Vous alliez Vous-même continuer à soûtenir la gloire de la France, & celle de Vos Ancestres, sur cét auguste Théatre, uniquement destiné, ce semble, à ceux de Vôtre Nom. D'ailleurs ces grands & fameux Exploits, par où Monseigneur le Maréchal, Vôtre Oncle, commença à se signaler, aussitôt que Sa Majesté l'eût honoré de la Charge de Vice-Amiral, & que le bruit de ses Canons a fait retentir partout; Et sur tout ce prodige de valeur & de prudence qu'il fit paroître à Tabako, (où tout ce qui sembloit devoir concourir à sa perte, la disposition des lieux, le grand nombre des Ennemis, celui de leurs Vaisseaux, la difficulté de les aborder, le Canon pointé pour leur deffense, toute une Isle en un mot armée contre luy, ses blessures même & ses naufrages, n'ont servy qu'à rendre sa vie plus illustre, & sa victoire plus glorieuse) font voir en sa Personne tant de courage & d'intrépidité, de conduite & de bonne fortune tout ensemble, que ce Monde-ci semble ne pas suffire aux grands & vastes desseins, & à toutes les genereuses & hardies entreprises de Ceux de Vôtre Maison. Pardonnez, MONSEIGNEUR, cette double saillie de mon zéle, qui ne sçauroit déplaire qu'à Vôtre modestie; mais qui agréera sans doute à ces premieres Têtes de tous les Ordres de l'Etat, qui Vous ont veu soûtenir & présider avec tant d'éclat, dans la plus celebre Ecole du monde; où vous avez commencé à jetter les premiers fondemens, & faire concevoir les premieres esperances de cette Grandeur & Dignité que Vous possedez, & de toutes les autres qui Vous attendent, & auxquelles Vous pouvez si legitimement aspirer. J'ose même dire, que l'on a déja veu briller en Vous par avance, toutes les marques & tous les caracteres de cette future Grandeur, dans ces premiers *essais de generosité, de justice, & de graces, que vous avez fait paroître, dés l'entrée de Vôtre Episcopat. Il est bon, MONSEIGNEUR, qu'il en reste quelque marque à la Posterité; & que ceux qui honoreront dans les siecles à venir la memoire de feu Monsieur Rohault, (que Messieurs Vos Freres, les Marquis de Cœuvres & de Témines, avec les plus Grands de la Cour, n'ont pas autrefois dédaigné d'avoir pour Maitre,) sçachent, qu'elle a été assez chere à un Prelat de Vôtre rang, non seulement pour agréer que ses Ouvrages posthumes parussent sous son Nom; mais pour donner aussi accez à ses plus Proches, pour se justifier devant Vous, & pour Vous obliger à marquer de la joye de leur innocence. J'en avois entrepris la deffense, comme Beau-Pere du Deffunt, & j'en devrois partager la réconnoissance avec les Vivans, si Vos bontez ne m'engageoient à être entierement & sans partage, & avec une vénération trés-profonde,*

MONSEIGNEUR,

De Vôtre Grandeur

Le trés humble & trés-obeïssant
Serviteur,

CLERSELIER.

PRE-

PREFACE.

JE ne doute point qu'il n'y ait bien des gens qui trouveront à redire au Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre, *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, & à qui ce frontispice ne plaira pas. Et si par hazard vous, qui lisez ceci, étiez de ce nombre, comme cela pourroit bien être : je veux bien vous avertir ici dés l'entrée, que ni vous, ni tous ceux qui pourroient vous ressembler ; ne serez pas les premiers qui y auront trouvé à redire, puis que moi-même je l'ai condamné, & qu'il ne m'a pas plû.

Mais aussi à dire le vrai, ce n'est pas une chose si facile que l'on pourroit peut-être s'imaginer, que de donner à un Livre, un Titre qui lui convienne, & qui lui convienne justement. Et même j'ose dire, qu'aprés s'être bien donné de la peine pour en chercher un, il est presque impossible de pouvoir jamais rencontrer au gré de tout le monde.

C'est donc comme une necessité, que le Titre d'un Livre soit contrôllé : mais qu'il le soit, à la bonne heure ; pourveu que d'ailleurs le corps en soit bon, & ne contienne rien que de vray & de raisonnable, l'on ne doit pas s'en mettre fort en peine, ni chicaner beaucoup là-dessus.

Or je puis assurer qu'en prés de cent feüilles que ce Livre contient, & par consequent en prés de huit cens pages, il n'y a rien qui ne soit entierement conforme à la Raison, & qui la puisse choquer le moins du monde. Chaque page, chaque ligne, chaque mot, sont autant de veritez, dont nous sommes convaincus par la Lumiere naturelle, comme étant les réponses vives & nettes de cette Lumiere interieure, qui ne manque jamais de nous éclairer & de nous instruire, toutes les fois que nous la consultons, par l'attention que nous sommes obligez de prêter aux choses que nous voulons bien concevoir, & que nous ne sommes point honteux d'apprendre. Aussi, n'est-ce que faute de cette attention, (comme l'a fort bien dit un celebre Auteur de ce temps,) que nous tombons tous les jours en de lourdes fautes, soit en approuvant ce que nous n'entendons point, soit en contredisant les veritez les plus certaines, mais que nous ne voulons pas sçavoir, & auxquelles nous ne donnons pas toute l'application qu'il faut pour les comprendre; parce qu'elles sont contraires à d'anciens préjugez dont nous ne voulons pas nous défaire, & dans la possession desquels nous sommes bien aises de nous maintenir, pour joüir paisiblement de nôtre maîtrise, & couvrir par ce moyen nôtre ignorance.

Ce n'est pas que je ne sceusse fort bien quel Titre il auroit fallu mettre à ce Livre, pour qu'il luy convint justement; mais ce Titre n'auroit pas été au gré du Libraire. Et comme, pour l'ordinaire, il arrive de la contestation entre les Libraires & les Auteurs sur la disposition du Titre; ceux-cy n'ayant en veuë que la conformité qu'il doit avoir avec le Texte, afin que l'un ne démente pas l'autre; & ceux-là au contraire ne se souciant pas beaucoup de cette conformité, mais voulant quelque chose de specieux, qui puisse exciter la curiosité des Lecteurs, & leur en attirer plusieurs: il ne faut pas s'étonner si l'un est quelquefois obligé de ceder à l'autre, pour s'ajuster ensemble, & accorder leurs differens.

Or personne ne peut douter que tout l'interêt que peut avoir un Libraire dans l'impression d'un Livre, ne soit son interêt propre & particulier; qui est, que le Livre dont il entreprend l'impression, ait du débit, qu'il ait cours dans le monde, & qu'il ne lui demeure pas sur les bras, renfermé dans un Magazin, pour être rongé des vers, & mangé par la poussiere, plûtôt que dévoré par l'avidité d'un grand nombre de Curieux; comme sans doute il se le promet quand il commence une Impression. C'est pourquoi il a été juste de le contenter ici; & c'est ce que j'ay prétendu faire par le Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre.

Mais

Mais quelqu'un tournant là-dessus ici le feüillet, pour voir donc ce Titre specieux que je dis avoir mis à la tête de ce Livre, (ne se ressouvenant plus quel il est,) & ne trouvant que trois ou quatre mots fort simples & fort communs, croira peut-être que je me suis oublié de mon dessein, ou que j'ai retenu, comme un secret que je n'ai pas voulu divulguer, ce Titre specieux dont je parle ; ou bien peut-être qu'aprés lui avoir ingenûment confessé que je n'en sçai point d'autre que celui qu'il porte, il ne pourra pas s'empêcher de s'emporter contre moi, en m'accusant de mauvaise foy & d'ignorance. De mauvaise foy, en ce que sçachant, comme j'ai dit, le juste Titre que l'on devoit mettre à ce Livre, je ne l'y ai pas voulu mettre; & dignorance, en ce qu'il n'est pas possible que tout autre Titre que l'on y auroit pû mettre, ne fût pour le moins aussi specieux que celui que j'y ai mis, & peut-être mêmes plus au goût de toute le monde. Où enfin, peut-être qu'aprés être un peu revenu de son emportement, pour m'en faire une espece d'excuse, & me rendre quelque justice, ayant appris par le bruit commun, que je ne passe pas dans le monde pour un homme de mauvaise foi, ni tout à fait ignorant, il me priera de bonne grace que je lui dévelope donc le mystere qu'il juge devoir être renfermé dans ce Titre, pour meriter, sous des termes si simples, le nom de specieux. Et en cela je confesse qu'il aura quelque raison; & c'est aussi ce que je vais tâcher de faire dans la suite, pour le retirer de la peine où cela l'aura mis.

La réputation que Monsieur Rohault s'étoit acquise de son vivant, étoit devenuë si grande, & son nom si celebre, qu'il étoit connu non seulement dans tout ce Royaume, mais mêmes dans toute l'Europe. Et quoi que depuis sa mort jusqu'aujourd'hui, il se soit écoulé prés de dix années, pendant lesquelles il semble que sa memoire auroit dû se perdre, n'ayant rien parû de lui depuis ce temps-là: neanmoins comme l'estime qu'il avoit laissée de lui en mourant, faisoit aisément croire à tout le monde, qu'il n'étoit pas possible qu'un homme comme lui se fût tenu sans rien faire, ensorte qu'il ne fût rien resté, & qu'on eût, pour ainsi dire, tout enseveli & enterré avec lui en le mettant dans le tombeau; cela a fait que les plus curieux & les plus vigilans se sont aussi-tôt soigneusement informez s'il n'avoit point laissé quelques Ecrits aprés sa mort. Et le bruit s'étant répandu partout qu'il en avoit laissé quelques-uns: j'ai depuis ce temps là été si souvent & si puissamment sollicité par les instantes prieres d'une infinité de personnes de toutes sortes de conditions,& par les lettres frequentes que j'ai receuës de toutes parts, d'en vouloir faire part au Public, que je n'ai pû m'en deffendre, ni me délivrer mémes de leurs pressantes sollicitations & importunitez, qu'en satisfaisant à leur desir.

C'est donc ce Livre, ou plûtôt ce Recüeil de plusieurs divers petits Traitez de Mathématique, qui paroît aujourd'hui. Mais si j'avois mis à sa tête, ce Titre qu'il devroit porter, cela lui auroit fait perdre une bonne partie de l'estime qu'on en avoit conçûë auparavant sans le voir, & auroit de beaucoup refroidi l'ardeur & la curiosité de plusieurs.Car il y a partout un si grand nombre de Livres de Mathématique, & où tout ce que l'on sçauroit dire touchant cette matiere,est si bien & si amplement déduit, qu'il ne semble pas possible qu'on puisse là-dessus rien desirer davantage. C'est pourquoi pour ne pas tant se découvrir d'abord, & laisser à deviner aux Curieux quels peuvent être ces Ouvrages de Monsieur Rohault, il a fallu déguiser un peu le Titre; & au lieu de nommer chaque Traité par son nom, on a été obligé de les comprendre tous ensemble sous ce Titre general & specieux,d'*Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*. Or ces termes generaux d'*Oeuvres posthumes*, emportent avec soi, & font concevoir quelque chose de grand, quand celui qui en est l'Auteur, est d'un grand nom, comme est sans doute celui de Monsieur Rohault; particulierement chez les Etrangers, où la jalousie ne regne point, & qui pour cela en ont toûjours fait beaucoup d'estime. Et ce sont eux qu'un Libraire a principalement à ménager, à cause que le plus souvent c'est d'eux qu'il tire son plus grand profit.

Au reste,ce n'est pas sans peine & sans travail,que Monsieur Rohault s'étoit acquis cette grande réputation. Il est vrai que la Nature, par un avantage tout singulier, lui avoit donné un Esprit tout à fait Méchanique, fort propre à inventer & à imaginer toutes sortes de Machines; & avec cela des mains artistes & adroites, pour executer tout ce que son Imagination lui pouvoit representer. Aussi se faisoit-il un plaisir d'aller dans les boutiques de toutes sortes d'Ouvriers, pour les voir travailler chacun de leur Métier, & pour y considerer avec attention les divers Outils dont ils se servoient pour l'exécution de leurs Ouvrages. Et c'étoit une des choses qu'il admiroit le plus, & en quoi l'industrie de l'Esprit humain lui paroissoit plus merveilleuse, d'avoir pû inventer tant de sortes d'Instrumens, qui rendent le travail aisé, & sans quoi il seroit impossible de venir à bout d'aucun ouvrage. Mais comme son genie surpassoit de beaucoup en invention & & en adresse celui de la plus-part des Ouvriers, aussi leur donnoit-il souvent de bons avis, soit pour la construction de leurs Outils, soit pour faciliter leur travail & diminuer leur peine; & il ne leur disoit rien de particulier, qu'il ne mît aussi-tôt la main à l'œuvre, pour leur apprendre lui-même à le mettre en pratique.

Ce Naturel ingenieux & pénétrant, dont la Nature l'avoit doüé, lui rendoit si facile tout ce à quoi il s'appliquoit, qu'il n'avoit presque trouvé aucune difficulté à apprendre les Mathématiques; & pour cela il ne lui avoit point fallu de Maître. C'est pourquoi les ayant, pour ainsi dire, comme inventées de lui-même, il les possedoit parfaitement. Aussi est-ce ce qui lui donnoit un grand avantage pardessus tous ceux qui comme lui faisoient profession de les enseigner, & qui faisoit qu'on le préferoit aux autres, à cause de la netteté & facilité que cela lui donnoit pour s'expliquer. Je le pourrois ici certifier moi-même, ayant été son Disciple comme les autres, si je ne craignois que mon témoignage ne passât pour suspect. Mais il en a eu tant d'autres de toutes conditions, & des plus qualifiez du Royaume, soit de la Robe, soit de l'Epée, soit de la Cour, qui ne feroient pas de difficulté de le certifier comme moi, s'il en falloit venir à cette preuve de fait, que je ne feins point de dire ici hardiment, que l'Usage & l'Exercice lui avoient ouvert l'Esprit à une maniere d'enseigner, si aisée, si claire, & avec cela si particuliere, qu'il n'y en avoit point qui approchât de lui, & qui lui fût en cela comparable.

Aussi, s'il m'est ici permis de faire entrer dans ses loüanges une chose qui n'a été qu'en projet, & n'a point eu d'execution : Si la mort ne nous l'eût pas si-tôt ravi, il étoit sur le point de recevoir le plus grand honneur qu'il pouvoit jamais avoir en sa vie, puisqu'on le destinoit à être le Précepteur de Monseigneur le Dauphin, pour lui enseigner les Mathématiques & la Philosophie, aussi-tôt que le cours de ses Etudes l'auroit conduit jusques-là. Et ce que je dis ici à sa gloire, & que j'avance sans autre preuve que ma bonne foi, n'est pourtant pas une chose si difficile à croire. L'exemple de Messieurs les Princes de Conti, qu'on lui avoit mis entre les mains dés leur bas âge, pour leur former l'Esprit de bonne-heure, & fortifier leur Raison, avant qu'elle se pût corrompre par les fausses idées d'une vaine Philosophie, & qui donnoient à la Cour de si belles marques de cette ouverture d'Esprit, & du progrés qu'ils faisoient tous les jours sous sa conduite, pouvoit bien être un motif capable de faire venir cette pensée à ceux qui avoient alors la direction sur les Etudes de Monseigneur.

Mais quand bien mêmes ce que dis n'auroit été qu'une vaine présomption de Monsieur Rohault, & une fausse imagination dont il se seroit laissé flater sur de trop légeres conjectures, il me suffit pour moi que je n'avance ici rien de moi-même, & que je n'aye appris de fort bonne part. Et à l'égard de Monsieur Rohault, quand il se seroit trompé dans sa pensée, cela ne pourroit rien faire contre lui, ni porter aucun préjudice à sa réputation ; puis que cela même en supposeroit une en lui assez bien établie, pour que l'on pût jetter les yeux sur lui, comme sur une personne capable de remplir un

poste

poste si honorable. Et de vrai, quoi que cela n'ait point eu d'effet, soit parce que la mort l'a prévenu, soit parce que cela ne devoit point être : cela neanmoins n'a pas empêché que sa réputation ne se soit étenduë fort loin, & n'a rien diminué de l'estime qu'on en avoit.

Mais aprés tout, il n'est pas mal-aisé de deviner d'où lui est venuë cette grande estime ; les causes en sont trop publiques pour pouvoir être ignorées. Chacun sçait qu'il avoit l'honneur d'enseigner la plus grande partie des jeunes gens de la premiere qualité ; ce qui le faisoit connoître à la Cour. Et comme les Esprits y sont beaucoup plus raffinez qu'ailleurs, que l'on y épargne moins les gens, & que les défauts y sont plus relevez : si sa Méthode d'enseigner n'en avoit été tout à fait exempte, il seroit bien-tôt devenu la fable & la risée de la Cour, & n'auroit pas manqué d'être bafoüé & méprisé de tout le monde. Mais quand on a vû que les plus grands, à l'envi les uns des autres, lui confioient l'instruction de leurs Enfans, cela a fait que chacun à leur exemple l'a voulu avoir pour Maître ; jusques-là même, que plusieurs qui portoient le bonnet, & qui professoient publiquement dans les Colleges, n'ont point eu honte de devenir ses Disciples. Bien plus, sa réputation ayant passé les limites de ce Royaume, & s'étant répanduë dans les païs étrangers, il lui en venoit de toutes parts, & en si grand nombre, qu'il ne pouvoit plus suffire à tous.

Toutefois ce n'est pas encore de là qu'il a tiré sa plus grande gloire. Les Conferences publiques qu'il faisoit une fois toutes les semaines, où se trouvoient des personnes de toutes sortes de qualitez & conditions, Prélats, Abbez, Courtisans, Docteurs, Médecins, Philosophes, Geometres, Regens, Ecoliers, Provinciaux, Etrangers, Artisans, en un mot des personnes de tout âge, de tout sexe, & de toute profession, & où il prononçoit presqu'autant d'oracles, qu'il faisoit de réponses aux difficultez qui lui étoient proposées indifferemment par toutes sortes de personnes, l'avoient mis dans une si grande réputation, qu'il s'en est trouvé plusieurs, les uns par curiosité, pour se donner la satisfaction de l'entendre, les autres par jalousie, pour juger de sa doctrine & tâcher de la combattre, qui ont quitté leur païs, & entrepris de grands voyages.

La Méthode que Monsieur Rohault gardoit dans ses Conferences, étoit d'y expliquer l'une aprés l'autre toutes les questions de Physique, en commençant par l'établissement de ses principes, & descendant ensuite à la preuve de ses effets les plus particuliers & les plus rares. Pour cela il faisoit d'abord un discours d'environ une heure, lequel n'étoit point étudié, & où il disoit simplement ce que son sujet lui fournissoit sur le champ. C'est pourquoi il permettoit à un chacun de l'interrompre, quand il arrivoit que ce qu'il avoit dit, ou n'avoit pas été assez bien compris, ou que quelqu'un trouvoit quelque objection à y faire. Et alors avec une patience & moderation que j'ai cent fois admirée, & dont lui seul étoit capable, il écoutoit paisiblement tout ce qu'on lui vouloit objecter, pour extravagant qu'il pût être, sans jamais interrompre celui qui parloit; & aprés avoir satisfait à ses objections, il reprenoit le fil de son discours où il l'avoit quitté, & continuoit à expliquer le reste de la matiere qu'il avoit entreprise. Aprés quoi la dispute étoit ouverte à tout le monde; non pas une dispute tumultueuse, qui se passât simplement en bruit, mais une dispute paisible & honnête, où chacun proposoit modestement & nettement les difficultez qu'il avoit remarquées sur la matiere qui avoit été agitée ce jour-là, afin de s'en instruire, & de remporter du fruit de ces Conferences. Et pour l'ordinaire la dispute finissoit dés la premiere réponse qu'il y faisoit; car aprés avoir reconnu par les difficultez qu'on lui avoit proposées, ce qui avoit manqué à sa premiere explication, il résumoit si bien, & dans un si bel ordre, tout ce qu'on lui avoit objecté, & y répondoit avec tant de netteté & de lumiere, que ceux qui les lui avoient proposées, & tous les autres spectateurs de la dispute, n'ayant rien à repliquer, s'en retournoient si satisfaits de ses réponses, qu'il s'attiroit l'admiration de

tout

tout le monde. J'en appelle ici à témoin des milliers de personnes qui ont assisté plusieurs fois à ses Conferences, & qui ayant alors été charmez de la justesse & de la beauté de ses réponses, & n'en ayant pas encore perdu le souvenir, le regrettent encore tous les jours.

Mais ce qui a rendu son nom plus recommandable & plus celebre, est cette Méthode simple & facile dont il se servoit pour expliquer les plus difficiles & plus curieuses questions de Physique; comme la Lumiere, les Couleurs, l'Arc-en-ciel, les Lunettes, le Flux & Reflux de la Mer, les proprietez de l'Ayman, la pesanteur de l'Air, les questions du Vuide, & quantité d'autres. Car à l'entendre parler là-dessus, vous eussiez dit qu'il étoit de concert avec la Nature, & qu'elle prenoit plaisir à lui découvrir ses secrets; qu'elle lui avoit fait voir les differentes parties dont les Corps sont composez, & lui avoit appris quels effets devoient suivre de la communication de leurs mouvemens; car il faisoit comme toucher au doigt tout ce qu'il disoit sur ces matieres. Et afin qu'il n'en pût rester aucun doute, il y joignoit pour preuves quantité de belles experiences, qu'il faisoit devant tout le monde, & dont le plus souvent il faisoit prévoir les effets à chacun, (ensuite des principes qu'il avoit auparavant établis,) avant même que d'en venir à l'épreuve.

C'est ainsi qu'aprés avoir prouvé & établi pour principe la pesanteur de l'Air, il faisoit voir que tous ces effets que l'on a coûtume d'attribuer à la crainte du Vuide, n'en sont que de simples dépendances, dont les consequences se tirent d'elles-mêmes, & sans beaucoup de raisonnement. Et pour le faire comprendre, & toucher, pour ainsi dire, au doigt & à l'œil, il avoit fait faire tout exprés quantité de Tuyaux de verre, de toutes sortes de façons, qu'il remplissoit de diverses liqueurs, selon les differens effets qu'il vouloit prouver; mais celle dont il se servoit le plus, & qui lui étoit la plus commode pour ses experiences, étoit le Vif-argent. Car comme une fort petite quantité contrepése à beaucoup d'eau, & à une bien plus grande quantité d'Air, il pouvoit commodément, & avec des

Tuyaux d'une médiocre grandeur, faire voir par experience la plus grande partie des effets qui résultent de cette pesanteur.

Or entre tous ces Tuyaux, il en avoit inventé un d'une construction tout-à-fait ingenieuse & particuliere, semblable à peu prés à la figure dont les Anatomistes se servent pour representer la grande Artere ascendante & descendante; par le moyen duquel il faisoit voir en même temps deux effets tout contraires, & pour cela même fort surprenans, de la pesanteur de l'Air. Car aprés avoir rempli ce Tuyau de Vif-argent, & fait toutes les ceremonies requises pour faire qu'en se vuidant d'une partie dans un vaisseau, il en restât dedans la hauteur de deux pieds trois pouces, comme il arrive d'ordinaire: on avoit le plaisir de voir en même temps monter le Vif-argent dans un petit tuyau renfermé dans la branche d'enhaut, & descendre celui qui étoit resté dans la branche d'embas, aussi-tôt que par une fort petite ouverture, faite seulement avec la pointe d'une épingle, on avoit donné moyen à l'Air grossier d'entrer dans ce tuyau. Or cette seule experience est une preuve si manifeste de la pesanteur de l'Air, & prouve en même temps si manifestement que c'est cette pesanteur qui produit tous ces effets merveilleux qu'on attribuë ordinairement à la crainte du Vuide, qu'il faut se boucher les yeux, on n'en avoir point, pour en douter.

Sa maniere d'expliquer la Lumiere & les Couleurs étoit aussi admirable; & si ceux qui veulent que les Couleurs soient des Accidens Réels, & qui voudroient même en faire un article de nôtre Foi, lui avoient fait l'honneur d'assister eux-mêmes à ses explications, & veu les experiences dont il se servoit pour en découvrir la nature, & fait voir que ce ne sont que des modifications differentes de la Lumiere, selon qu'elle tombe sur des Corps dont les parties ont diverses figures & differens mouvemens, & que de là elle rejaillit vers nos yeux avec les diverses modifications qu'elle a receuës des Corps sur lesquels elle est tombée: je doute fort qu'ils eussent voulu aprés cela traiter

traiter d'hérétiques, ceux qui ne les regardent du côté des objets, que comme des differentes modifications de la Matiere ; & du côté de celui qui les apperçoit, que comme des ſentimens en lui, qu'il rapporte aux objets qui les ont excitez.

Ce principe ſuppoſé, il ne rendoit pas ſeulement raiſon, mais des preuves ſenſibles, de tout ce qu'il y a de plus ſingulier & de plus merveilleux dans l'Arc-en-ciel, & que Mr. Deſ-cartes, avant lui, a expliqué ſi admirablement dans ſes Méteores. Car par le moyen de certaines phioles ou bouteilles de verre, pleines d'eau, il faiſoit remarquer les endroits par où les rayons de lumiere, qui ſe changent en couleur, entrent dans le verre ; les lieux où ils ſe réfléchiſſent ; & ceux par où ils ſortent, pour venir de là fraper nos yeux, avec les modifications qu'ils ont receuës de ces diverſes réfléxions & réfractions, d'où réſulte en nous le ſentiment des Couleurs. Quelquefois même il avoit l'induſtrie de faire paroître dans ſa chambre un Arc-en-ciel artificiel, par le moyen d'une pluye qu'il avoit l'addreſſe de répandre aux lieux où il devoit paroître, ſelon l'endroit où le Soleil étoit alors ; & de le recevoir ſur une toile bien blanche & bien unie ; où ſes Couleurs ſe peignant fort exactement, donnoient le moyen aux ſpectateurs de les pouvoir conſiderer avec ſoin & exactitude.

Je n'aurois jamais fait, ſi je voulois parcourir toutes les diverſes experiences dont il ſe ſervoit pour juſtifier ſes raiſonnemens. Mais entre toutes celles qu'il communiquoit au Public, il n'y en avoit point qui ſurprît avec plus d'étonnement l'Eſprit des ſpectateurs, qui leur donnât davantage d'admiration, & qui excitât plus vivement leur curioſité, que celle de l'Ayman. Auſſi quand on ſçavoit qu'il en devoit expliquer les proprietez, & en faire les experiences, il y accouroit tant de monde, que non ſeulement la ſalle où il les faiſoit, mais toute ſa maiſon, n'étoit pas capable de le contenir.

Il avoit pour cela une boîte, où étoit renfermé tout ce qui lui étoit neceſſaire pour faire ſes experiences ; d'où il

tiroit

tiroit chaque piece l'une aprés l'autre, selon l'effet ou la proprieté qu'il vouloit prouver, & l'experience que pour cela il avoit à faire. Et quoi qu'il ne dît rien en cela que ce qu'il avoit appris de Monsieur Des-cartes : neanmoins, comme il rendoit les choses sensibles par le moyen de ses experiences, & que sa Méthode de les expliquer étoit differente de la sienne, cela faisoit que l'on eût dit qu'il en eût été l'Inventeur. Car Monsieur Des cartes s'est simplement contenté de rendre raison de toutes les proprietez de l'Aiman qui lui étoient connuës, & que les Curieux, avant lui, avoient observées ; mais il ne s'est pas mis en peine de les mettre dans un ordre qui en fît connoître la liaison & la dépendance. Or c'est ce que Monsieur Rohault faisoit dans ses explications publiques ; où aprés avoir rendu raison de trois ou quatre proprietez les plus communes de l'Ayman, il en déduisoit toutes les autres par une suite si necessaire, qu'il n'y avoit personne dans l'Assemblée qui ne les remarquât aussi bien que lui, & qui n'en prévît l'effet, avant que d'en venir à l'experience.

Ces sortes de preuves si claires, si convainquantes, & si sensibles, fort differentes de ces vertus & qualitez occultes dont les autres Philosophes ont coûtume de se servir, pour rendre raison de ce qu'ils ignorent, justifient ce me semble bien clairement la verité des Principes dont elles dépendent ; car le moyen de pouvoir tirer un si grand nombre de consequences justes, & que les effets verifient, d'un si petit nombre de Principes, si ces Principes n'étoient veritables ? Et n'est-ce pas une chose bien étrange, que ces Principes étant clairs à l'Esprit, que la Raison en étant convaincuë, & que personne n'ayant pû découvrir le moindre effet de la Nature auquel ils contrarient, depuis tant de temps qu'on les examine : il y ait cependant aujourd'hui des gens assez imprudens pour se servir du plus auguste & du plus incomprehensible de nos Mysteres, pour les combattre, & pour tâcher d'en déduire, s'ils pouvoient, la fausseté. Ces personnes ne prennent pas garde sans doute aux inconveniens qui s'en ensui-
vent ;

vent; puis que contre leur dessein, ce qu'ils font ne sert qu'à fournir des armes à nos Adversaires; & peut même être capable d'ébranler la foi des Fidéles, & de faire chanceler ceux qui ne sont pas encore bien affermis dans leur croyance. Car comme nous sommes tous Hommes, c'est à dire Raisonnables, avant que d'être Chrêtiens: ce qui persuade la Raison, entre plûtôt dans l'Esprit, que ce qui nous est enseigné par la Foi. Outre que tout ce qu'ils disent, n'étant fondé que sur des suppositions fausses, il n'y a rien de plus injuste & de plus dangereux, que de faire combattre la Verité contre la Verité, c'est à dire la Foi contre la Raison bien éclairée; puis que l'une n'est jamais, & ne peut même jamais être contraire à l'autre. C'est pourquoi il suffiroit pour toute réponse, de leur dire en un mot; qu'ils n'entendent point ce qu'ils combattent; & que tout ce qu'ils disent n'a aucun fondement de verité. Mais nous verrons tantôt ce que nous aurons à leur objecter, & peut-être aussi à leur répondre.

Monsieur Rohault voyant donc sa réputation suffisamment établie, & que dans la profession qu'il faisoit, il n'avoit plus rien à ménager pour l'établissement de sa fortune, crut ne devoir plus refuser au Public la satisfaction qu'il desiroit de lui, de mettre au jour son Traité de Physique; afin qu'on n'eût plus la peine de copier ses Ecrits, ni de faire des Remarques particulieres sur ce qu'il avoit traité dans ses Conferences publiques; comme le faisoient la plus-part de ses Auditeurs au sortir de ces Conferences, pour ne pas laisser échaper de leur memoire ce qu'ils lui avoient entendu dire, & profiter par ce moyen de ses Leçons.

Ce desir mêmes si naturel à l'Homme, d'acquerir de la gloire, desir qui n'est point blâmable, quand les moyens en sont loüables & honnêtes, le fit aussi résoudre à contenter là-dessus le Public. Bien plus, il jugea mêmes qu'il y alloit alors de son honneur, de ne pas differer davantage. Car voyant que ses Ecrits étoient entre les mains d'une infinité de personnes, & qu'étant ainsi passez de main

main en main, ils étoient devenus méconnoissables, par les fautes que chaque Copiste avoit ajoûtées à celles qui s'étoient rencontrées dans son Original; outre que n'ayant mis lui-même dans ces Ecrits, qu'autant qu'il en falloit pour donner à ses Disciples l'envie d'apprendre; mais ne s'y étant pas assez expliqué & étendu, pour pouvoir d'eux-mêmes en tirer une parfaite connoissance, sans avoir besoin de l'explication du Maître: il prit enfin la résolution de faire imprimer ce Traité, & d y mettre la derniere main.

Or comme l'on met toûjours une grande difference, entre ce que l'on ne fait que pour soy, & pour le cabinet, & ce que l'on fait pour être vû par le Public: aussi ceux qui avoient vû ces Ecrits particuliers qui couroient de lui dans le monde, ont bien sçeu remarquer qu'il y avoit bien de la difference entre son Livre & ces Ecrits. Mais il ne s'en faut pas beaucoup étonner; car ceux-ci n'étoient que comme le projet & le broüillon de l'Ouvrage parfait qu'il méditoit de faire un jour, & qu'enfin l'on a veu paroître; où comme il avoit deux sortes de personnes à contenter, les Curieux & les Difficiles: il a tâché de travailler de telle sorte, que les uns n'y pussent trouver rien à reprendre, & les autres rien à desirer.

C'est pourquoi, pour satisfaire au desir & à la curiosité des premiers, il a traité dans son Livre toutes les questions les plus curieuses de la Physique; & en les examinant chacune à part, il s'est donné la peine de descendre jusques aux circonstances les plus particulieres, n'ayant rien oublié en chacune qui pût meriter sa réfléxion, & lui ayant donné tout le jour dont elle est capable. Ce qui fait que tout le monde s'étonne comment il a pû en si peu de mots expliquer un si grand nombre de choses, traiter en si peu de pages un si grand nombre de Questions, & faire de chaque Article presqu'autant de Résolutions.

Mais comme le nombre des Fâcheux l'emporte de beaucoup pardessus l'autre, qu'ils sont plus pointilleux & plus à craindre, & qu'il est trés difficile de les pou-

voir

voir contenter tous, chacun ayant des veuës particulieres touchant l'examen qu'il fait d'un Livre; car les uns s'attachent à la diction, les autres à l'ornement du discours, quelques-uns vont au fond de la matiere, d'autres examinent la verité des Principes, d'autres considerent l'enchaînement qu'ils ont & qu'ils doivent avoir avec les sujets auxquels on les applique, d'autres par des veuës d'interêt ne remarquent que les endroits les plus foibles & les plus négligez, pour avoir dequoi le faire mépriser, & d'autres enfin, par jalousie, ou par un faux zéle, y cherchent dequoi faire décrier & rendre suspect l'Auteur & sa doctrine: Aussi ce sont eux que Monsieur Rohault a eu principalement en veuë dans la composition de ce Traité-là; afin de tâcher, sinon de les contenter tous, au moins de se mettre hors de prise, & de pouvoir se rendre ce témoignage à soi-même, d'y avoir fait tout son possible; & heureusement il est arrivé que le succez a surpassé son attente.

Car premierement pour ce qui est de la diction, tout le monde demeure d'accord que les termes en sont propres, bien choisis, & en usage; ensorte qu'il n'y en a point qui blessent l'oreille, ni qui laissent l'Esprit du Lecteur en suspens sur le sens & la signification qu'ils renferment. Et pour ce qui regarde la politesse & l'ornement du discours, la matiere qu'il y traite n'en demande point d'autre, qu'une énonciation pure, nette, & qui ne soit point embarassée. Et c'est ce qu'il est aisé d'y remarquer, chaque chose y étant en sa vraye place; où ce qui précede n'attend pas sa clarté & son intelligence de ce qui suit; & où ce qui suit est compris & contenu dans ce qui précede, comme dans son Principe; & ainsi chaque chose y étant en son rang, & dans son ordre, tout y paroît avec une grace & une beauté tout-à-fait naturelle.

Quant à ceux qui sont capables de juger du fond de la matiere, d'examiner les Principes dont elle dépend & qui la soûtiennent, & de comprendre l'enchaînement & les consequences qui la prouvent: ce sont eux principalement que Monsieur Rohault a toûjours souhaité d'avoir pour Juges ou pour Arbitres. Car comme il étoit à présumer que des personnes d'Esprit n'auroient pas voulu agir autrement que de bonne foi, il ne lui pouvoit arriver à leur égard que l'une de ces deux choses: ou de les avoir pour ses Approbateurs, ou de les avoir pour des Censeurs; & l'une ou l'autre ne lui pouvoit être que trés-avantageuse. Car s'il arrivoit qu'il les eût pour Approbateurs, c'étoit se rendre eux-mêmes les Paranymphes de son Livre; c'étoit ouvertement, & par leur exemple, persuader les autres des veritez qu'il contient; c'étoit enfin leur en faire concevoir bonne opinion, & le confirmer lui-même dans la sienne. Et au contraire, s'il arrivoit qu'il deût les avoir pour Censeurs, c'étoit ajoûter un nouveau moyen de s'instruire, à ceux dont il avoit coûtume de se servir. Et à dire la verité, il auroit fort souhaité d'en rencontrer plusieurs qui eussent bien voulu avoir cette bonté ou cette complaisance pour lui, que de lui faire connoître ses fautes, lui montrer en quoi il se seroit mépris, & lui marquer ce qu'il auroit dû mettre dans son Livre pour le rendre plus parfait qu'il n'est.

Mais personne n'a jamais voulu lui rendre ce bon office. Tant s'en faut, tout le monde l'a receu avec tant d'applaudissement & d'approbation, que de son vivant une infinité de personnes de qualité & de merite lui en sont venus faire leurs complimens & conjoüissances. Et depuis sa mort, j'ai receu moi-même de toutes parts tant de témoignages de l'estime que chacun en fait, & en reçois encore tous les jours, qu'on peut dire qu'il n'y a gueres de Livre de ce genre, qui soit si universellement approuvé.

Au reste, on ne sçauroit gueres apporter de meilleur témoignage de cette estime generale que chacun en fait, que de voir qu'il a déja été ici imprimé pour la quatriéme fois; que nos Libraires tâchent partout de le contrefaire; que dans les païs étrangers il s'imprime publiquement; & que déja on l'a traduit en plusieurs Langues. Nos Professeurs même ne font point de scrupule d'en tirer ter une partie de leurs plus belles démonstrations; de l'indiquer à leurs Ecoliers comme un des meilleurs Livres qui ait paru depuis long-temps sur une semblable matiere; & d'en faire un des principaux ornemens de leur Cabinet & Bibliotheque.

Cependant, nonobstant cette generale & universelle approbation, comme la Science & la Vertu engendrent souvent l'Envie & la jalousie, il s'est trouvé des personnes assez indiscrettes, ou plûtôt assez malicieuses, pour faire courir de mauvais bruits, & de l'Auteur & de son Livre. De celui-ci, ayant eu l'effronterie & l'impudence d'écrire contre la verité, que la doctrine qu'il contient avoit été trouvée si dangereuse & si mauvaise, qu'on l'avoit fait brûler par la main d'un Bourreau; Et à l'égard de l'Auteur, certains Esprits mal faits & emportez, ont eu pour lui si peu de respect & de retenuë, qu'ils n'ont pas feint, en presence de Monsieur de Blampignon Docteur de Sorbonne, Curé de saint Mederic son Pasteur, de rendre sa Foi suspecte, & de le traiter d'Hérétique, au sujet du plus saint & du plus auguste de nos Mysteres, l'accusant de ne pas croire la Transsubstantiation. Ce qui fit que Monsieur de Blampignon, qui d'ailleurs étoit assuré de la Foi de Monsieur Rohault, pour s'être plusieurs fois entretenu avec lui sur ce Mystere, se crut obligé, lorsqu'il lui porta le saint Viatique, pour avoir des Témoins qui pussent comme lui répondre de sa Foi, de l'interroger en presence de toute la Compagnie qui assista à cette pieuse & triste ceremonie, sur les principaux Articles de nôtre Croyance, & entr'autres sur celui de la Transsubstantiation; lui demandant publiquement, s'il ne croyoit pas cette conversion miraculeuse qui se fait en ce Sacrement, de toute la substance du pain en la substance du Corps, & de toute celle du vin en la substance du Sang de Nôtre Seigneur Jesus-Christ, que l'Eglise appelle Transsubstantiation. Aquoi Monsieur Rohault répondit: qu'à la verité il étoit un trés-grand pécheur, mais qu'il n'avoit jamais douté de tout ce que la Foi nous enseigne, & particuliere-

ment

ment touchant ce Mystere; qu'il pouvoit se ressouvenir des entretiens qu'ils avoient eus autrefois là-dessus ensemble; & qu'il n'ignoroit pas quelle étoit sur cela sa Foi: mais qu'il voyoit bien que la demande qu'il lui faisoit, ne venoit que des mauvais discours qu'on lui avoit tenus de lui sur ce point. Dequoi il s'étonnoit d'autant plus, que si ce reproche, de ne pas croire la Transsubstantiation, pouvoit tomber sur quelqu'un, c'étoit moins sur lui que sur beaucoup d'autres; puis que selon ses Principes mêmes, la Transsubstantiation étoit tellement renfermée dans ce Mystere, que s'il n'y en avoit point, il seroit impossible que le Corps de JESUS-CHRIST y fût, ni par consequent JESUS-CHRIST même: Mais qu'il confessoit avec toute l'Eglise, qu'il y avoit en ce Mystere une veritable Transsubstantiation du pain au Corps, & du vin au Sang de Nôtre Seigneur JESUS-CHRIST; & que cét Article de nôtre Foi, faisoit un des Articles de sa Croyance. Cette réponse de Monsieur Rohault, ou plûtôt cette profession publique de sa Foi, contenta fort Monsieur de Blampignon; tant parce que le salut de son Parroissien lui étoit cher, que parce qu'il étoit bien aise d'avoir des Témoins qui, comme lui, eussent dequoi pouvoir confondre ou détromper ceux qu'ils pourroient encore à l'avenir entendre mal parler de lui touchant ce Mystere. Et ce qu'il avoit préveu lui arriva ainsi qu'il l'avoit pensé; car dés le même jour, il rencontra un de ces Médisans, ou du moins un de ceux que d'autres avoient séduit par leurs calomnies; lequel ayant appris qu'il avoit porté le saint Viatique à Monsieur Rohault, ne manqua pas de lui en faire reproche, & de lui dire, qu'il s'étonnoit fort, qu'un homme éclairé comme lui, se fût tellement laissé surprendre & abuser, que d'avoir administré ce Sacrement à une personne qui ne croyoit pas la présence réelle du Corps de JESUS-CHRIST au saint Sacrement, puis qu'il ne croyoit pas la Transsubstantiation. A quoi il fut aisé à Monsieur de Blampignon de répondre, qu'il auroit fort souhaité de l'avoir eu lui-même, il n'y avoit qu'un moment,

ment, pour Témoin de la Foi de Monsieur Rohault touchant ce Mystere; qu'il ne doutoit point qu'il n'eût été bien joyeux, & mêmes fort édifié, de lui entendre faire là-dessus sa confession de Foi, laquelle il lui avoit fait faire publiquement, avant que de lui administrer le saint Viatique. Que sans doute cela l'auroit détrompé, & l'auroit obligé en même temps de détromper ceux qui pouvoient lui avoir inspiré ces mauvais sentimens. Au reste, ce que je dis ici, n'est pas un conte fait à plaisir; c'est une verité, dont il est aisé à un chacun de s'éclaircir; puis que Monsieur de Blampignon est encore vivant; lequel ne refusera pas de le certifier, si l'on veut se donner la peine de s'en aller informer à lui.

Puis donc que Monsieur Rohault n'a trouvé jusques-ici que des Approbateurs de ses Ouvrages; & que ceux qui ont osé mal parler de lui & de son Livre, ont été reconnus pour des injustes Calomniateurs: ce n'est pas sans raison ni fondement, que j'ai dit au commencement de cette Préface, qu'un Livre qui porte son nom, ne peut que donner la pensée de quelque grand Ouvrage, quand d'ailleurs on ne s'en explique point. C'est pourquoi j'ai mis pour Titre à ce Recueil, *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, pour exciter par-là la curiosité de plusieurs, les attirer chez le Libraire, & les obliger par ce moyen de le feüilleter d'un bout à l'autre, pour voir ce qu'il contient, la maniere dont les choses y sont traitées, & la difference qu'il y a entre ce Livre & les autres qui traitent de semblables matieres; car je m'assure qu'il y en aura peu, qui aprés l'avoir veu, s'en retournent les mains vuides.

Comme Monsieur Rohault n'est pas le seul de qui l'on a tenu de mauvais discours, & rendu la Foi suspecte; mais qu'il y en a eu d'assez imprudens & indiscrets, que de condamner hardiment, & par des Livres publics, la doctrine de Monsieur Des-cartes, comme contraire à la Foi, & conforme aux Erreurs de Calvin: l'on ne doit pas trouver mauvais, si ayant été mis au rang & à la tête des Cartesiens, pour lever le scandale & les mauvais ſoupçons que cela a pû faire naître dans l'Eſprit de quelques-uns, touchant leur Foi & leur doctrine, je dis ici:

Premierement, pour ce qui regarde leur Religion, Que graces à Dieu ils ſont fort bons Catholiques; qu'ils ne chancelent point dans leur Foi; qu'ils ont pour l'Egliſe, & pour les Déciſions des Conciles, toute la ſoûmiſſion que l'on ſçauroit deſirer des Fidéles les plus zélez & les plus ſimples; qu'ils n'examinent jamais les veritez de la Foi par leurs Principes, comme pour juger ce qu'ils doivent croire ou ne pas croire; mais qu'au contraire, ils s'aſſurent & ſe confirment dans leurs Principes, parce qu'ils voyent qu'ils ſont plus conformes aux Articles de nôtre Foi, aux Déciſions des Conciles, au ſentiment des Peres, à la Tradition, & à la veritable Théologie, que ne le ſont ceux qui ſont communément receus; ce qu'il ne leur ſeroit pas fort difficile de verifier, ſi on vouloit leur permettre d'en faire la preuve.

Et pour ce qui regarde leur doctrine, je croi pouvoir dire que ceux qui l'ont publiquement décriée, ne l'ont jamais bien entenduë; qu'ils leur attribuent cent abſurditez dont ils ne demeurent pas d'accord, & qu'ils les font parler tout autrement qu'ils ne penſent. Car s'ils en avoient le moins du monde de connoiſſance, bien loin de les blâmer, & d'invectiver, comme ils font, contr'eux, ils ſe rendroient peut-être à leur ſentiment, & ſeroient les premiers à approuver la maniere avec laquelle ils s'expliquent ſur le Myſtere dont il s'agit, & dont ils veulent leur faire un crime; laquelle maniere n'eſt nullement celle qu'ils combattent, & qu'ils revêtent de cent extravagances, qui la rendent ſans doute fort ridicule. Mais en verité, il me ſemble que ceux qu'ils attaquent ainſi, ont donné d'aſſez bonnes marques de la juſteſſe de leur Eſprit, pour ne leur pas attribuer des viſions & des chimeres ſi hors de ſens & de compréhenſion.

Auſſi, bien loin de cela, l'explication que Monſieur Deſ-cartes donne lui-même à ce Myſtere, eſt ſi naturelle

& ſi

& si simple, & avec cela si conforme à ce que la Foi nous enseigne, au sentiment des Peres, & aux Décisions des Conciles; & résout si clairement les plus grandes difficultez qui s'y rencontrent: que tout Mystere de Foi qu'il est, la Raison n'en est point choquée, & ne trouve rien qui l'effarouche. Ensorte qu'il seroit peut-être du bien de l'Eglise, qu'elle fût serieusement examinée par ceux qui ont l'authorité en main, & qui ont droit d'en juger. Car si une fois elle étoit receuë, il seroit impossible que toutes les Hérésies ne tombassent par terre; & qu'il pût y avoir d'autre Croyance touchant ce Mystere, que celle de l'Eglise Catholique, Apostolique & Romaine. Desorte que ni l'Impanation des Lutheriens, ni la Figure des Calvinistes, ni toute autre Hérésie que ce puisse être, ne pourroit résister à la force & à la clarté de cette explication.

Cependant pour faire voir par quelque exemple, que ce n'est pas temerairement qu'ils avancent ces choses; & que des Principes dont ils se servent, l'on en peut tirer des consequences fort justes pour nous fortifier dans la Foi, & pour la conduite & le réglement de nos mœurs; & qu'au contraire, de ceux de ces faiseurs de Livres, on en peut tirer de tout opposées; prenons pour exemple ce ce qui les effarouche le plus, & qui les fait tant crier contre Monsieur Des-cartes & sa doctrine

S'il est vrai, comme Monsieur Des-cartes le prétend, que l'essence de la Matiere, ou du Corps, consiste dans l'étenduë en longeur, largeur & profondeur: il n'est pas difficile de comprendre que l'Ame de l'Homme, ou ce Principe interieur qui est en lui capable de penser, est une Substance distincte du Corps. Car il est visible que l'Etenduë, de quelque maniere qu'on la conçoive taillée & remuée, ne peut jamais ni raisonner, ni vouloir, ni même sentir. Ainsi, ce qui est en nous qui pense, est necessairement une Substance distinguée du Corps.

Les connoissances, les volontez, les sentimens actuels, sont actuellement des manieres d'être de quelque Substance. Or toutes les divisions qui arrivent à la Matiere,

 ou

ou à l'Etenduë, ne produisent en elle que des figures; & tous ses mouvemens, ne produisent autre chose que des rapports de distance; l'Etenduë n'est pas capable d'autres modifications. Donc nôtre pensée, nôtre desir, nos sentimens de plaisir & de douleur, sont des manieres d'être d'une Substance qui n'est point Corps. Donc l'Ame de l'Homme est distinguée du Corps. Et cela posé, voici de quelle maniere l'on peut démontrer qu'elle est immortelle.

Jamais aucune Substance ne s'aneantit par les forces ordinaires de la Nature; car comme la Nature ne peut faire quelque chose de rien, aussi ne peut-elle réduire quelque chose à rien.

Les manieres des Estres peuvent s'aneantir; par exemple, la rondeur d'un Corps se peut détruire; car ce qui est rond peut devenir quarré. Mais cette rondeur n'est pas un Estre, une Chose, une Substance; ce n'est qu'un rapport d'égalité, dans la distance qui est entre les parties qui terminent ce Corps, & celle qui en est le Centre. Ainsi ce rapport changeant, la rondeur n'est plus; mais la Substance ne peut être réduite à rien.

Or par les raisons que je viens de dire, l'Ame n'est point une maniere d'être du Corps; Donc elle est immortelle. Et quoi que nôtre Corps se dissolve en une infinité de parties de differente nature, & que la construction de ses organes se rompe: l'Ame ne consistant point dans cette construction, ni dans aucune autre modification de la Matiere, il est évident que la dissolution, ni mêmes l'anéantissement de la Substance du Corps humain (supposé que cét anéantissement fût veritable) ne peut anéantir la Substance de nôtre Ame.

Voici encore une autre preuve de l'immortalité de l'Ame fondée sur le même Principe.

Quoi que le Corps humain ne puisse être réduit à rien, à cause que c'est une Substance, il peut neanmoins mourir, & toutes ses parties se peuvent dissoudre, parce que l'Etenduë se peut diviser. Or l'Ame étant une Substance distinguée de l'Etenduë, elle ne peut être divisée; car on ne sçauroit diviser une pensée, un desir, un sentiment de douleur & de plaisir, de même que l'on peut diviser un Quarré en deux ou en quatre Triangles. Donc la Substance de l'Ame est indissoluble, incorruptible, & par consequent immortelle; parce qu'elle n'a point d'étenduë.

Voilà de veritables démonstrations, qui convainquent l'Esprit de tout homme qui veut être attentif; & auxquelles il faut se rendre, ou renoncer à la Raison.

Mais si, comme le prétendent ces Auteurs inconnus, l'essence du Corps consiste dans quelqu'autre chose que dans l'Etenduë: comment convaincront-ils les libertins, que nôtre Ame n'est ni materielle ni mortelle? Ils leur soûtiendront, que ce quelqu'autre chose, en quoi ils disent que consiste l'essence du Corps, est capable de penser; & que la Substance qui pense, est la même que celle qui est étenduë. Que s'ils leur nient, ils leur feront voir que c'est sans raison; puis que selon leur Principe, le Corps étant autre chose que de l'Etenduë, ils n'ont point d'idée distincte de ce que ce peut être; & qu'ainsi ils ne peuvent sçavoir, si cette chose inconnuë n'est point capable de penser. Ceux qui ont tant soit peu de discernement, peuvent voir aisément les dangereuses consequences qui se peuvent tirer de là.

C'est pourquoi ceux qui font un crime à nos Philosophes, de ce qu'ils démontrent que l'Etenduë n'est point une maniere d'être, mais l'essence même du Corps, ou de la Matiere, devroient penser aux fâcheuses consequences qu'on peut tirer de leurs Principes; & ne pas renverser la principale, ou mêmes la seule démonstration que l'on peut avoir de la distinction qui est entre l'Ame & le Corps. Car enfin la distinction de ces deux Parties de nous-mêmes, prouvée par des idées claires & distinctes, comme l'ont fait nos Philosophes en plusieurs endroits, est de toutes les Veritez celle qui est la plus féconde & la plus necessaire, soit pour la Philosophie, soit pour la Théologie, soit aussi pour la Morale Chrêtienne.

Il est donc bien important, lors qu'il s'agit de l'établiſſement de quelque Principe, de prendre garde de ne rien admettre qui ne ſoit clair à l'Eſprit; c'eſt la clarté qui nous perſuade, qui nous convainc, & qui nous aſſure de la Verité; ſans cela l'on ne peut s'aſſurer de rien. Mais quand un Principe eſt clair, toutes les conſequences le ſont auſſi; l'on en voit aiſément la ſuite & la liaiſon. Et comme les Veritez s'entretiennent toutes, & qu'elles ne ſont point contraires les unes aux autres: l'on ne ſçauroit tirer de conſequence contraire à la Religion, d'un Principe qui eſt évident. Mais lors qu'un Principe n'eſt pas évident, qu'il eſt obſcur, qu'il ne porte aucune idée de ſoy à l'Eſprit, & qu'il a par conſequent la vraye marque de la fauſſeté: il n'y a rien de plus facile à ceux qui ſçavent tant ſoit peu l'Art de raiſonner, que d'en tirer des conſequences contraires à la Foi. Deſorte que s'il étoit permis de rendre ſuſpecte la Foi des autres hommes, par des conſequences tirées des Principes dont ils ſont perſuadez: comme il n'y a point d'homme qui ne ſe trompe en quelque choſe, & qui ne prenne pour vrai ce qui ne l'eſt pas, il n'y en a point auſſi que l'on ne pût traiter d'Hérétique. Et ainſi, c'eſt ouvrir la porte à une infinité de querelles & de diſputes, que de laiſſer aux hommes la liberté de rendre ſuſpecte la Foi de ceux qui en matiere de Philoſophie ne ſont pas de leur ſentiment. Auſſi je ne puis comprendre, comment ſur des conſequences que l'on deſavoüe, on ſe plaît de faire paſſer pour Hérétiques, des perſonnes qui ſont trés-ſoûmiſes à l'Egliſe, & à toutes ſes Déciſions.

Chacun ſçait que l'on doit diſtinguer la Théologi d'avec la Philoſophie; les Articles de nôtre Foi, d'avc les Opinions des hommes; les Veritez que Dieu appren à tous les Chrêtiens par une authorité viſible, de celle qu'il ne découvre qu'à quelques perſonnes en récompe ſe de leur attention & de leur travail. Des choſes qui d pendent de Principes ſi differens, ne doivent pas ſa doute être confonduës. L'on ne doute point auſſi qu ne faille faire ſervir les Sciences humaines à la Religio chacun en demeure d'accord; mais cela ſe doit faire da un Esprit de paix & de charité, sans se condamner les uns les autres, tant que l'on convient des Veritez que l'Eglise a décidées; car c'est ainsi que la Verité se découvrira, & qu'ajoûtant de nouvelles découvertes à celles des Anciens, toutes les Sciences se perfectionneront de plus en plus.

Mais l'Imagination de la plus-part des hommes ne s'accommode pas des nouvelles découvertes. La nouveauté des sentimens, même les plus avantageux à la Religion, les effraye; & ils se familiarisent facilement avec les Principes les plus faux, & les plus obscurs, pourveu que quelque Ancien les ait avancez. Et lors qu'ils se sont ainsi familiarisez avec ces Principes, quelqu'obscurs qu'ils soient, ils les trouvent évidens, & les regardent comme trés-utiles, quoi qu'ils soient trés-dangereux. Ils s'accoûtument même si bien, à dire & à écouter ce qu'ils ne conçoivent point, & à se défaire d'une difficulté réelle par une distinction imaginaire, qu'ils demeurent toûjours trés-satisfaits de leurs fausses idées, & ne sçauroient même souffrir qu'on leur parle un langage qui soit clair & distinct: Semblables en cela à ces personnes qui sortant d'un lieu obscur, apprehendent la Lumiere, & ne peuvent la supporter, s'imaginant qu'on les aveugle, lors même que l'on tâche de dissiper les tenebres qui les environnent.

Ainsi, quoi que Monsieur Rohault ait fait voir plusieurs fois dans ses Conferences publiques, par plusieurs justes raisonnemens & consequences, qu'il est dangereux de soûtenir, par exemple, que les bestes ont une Ame plus noble que le Corps: cependant, comme cette opinion est ancienne, & que la plus-part des hommes sont accoûtumez à la croire; & que celle qui lui est contraire, & qui ne les fait considerer que comme des Machines, a le caractere de la nouveauté: ceux qui jugent de la dureté des opinions, plûtôt par la frayeur & la surprise qu'elles produisent dans l'Imagination, que par l'évidence & la lumiere qu'elles répandent dans l'Esprit, ne manqueront pas de regarder cette opinion des Cartesiens, comme dangereuse; & ils condamneront bien plûtôt ces Philosophes comme temeraires, qu'ils ne feront ceux-là mêmes qui soûtiennent que les bestes sont capables de raisonner.

Delà vient, que si dans une Compagnie, quelque personne un peu grave vient à dire d'un ton serieux, ou plûtôt avec cét air que répand sur le visage, l'Imagination, lors quelle est surprise & affrayée par quelque chose d'extraordinaire: *En verité les Cartesiens sont d'étranges gens; ils soûtiennent que les bestes n'ont point d'Ame: I'apprehende fort que bien-tôt ils n'en disent autant de l'Homme.* Cela seul sera suffisant pour persuader plusieurs personnes que cette opinion est dangereuse; il n'y a point de raisons qui puissent empécher l'effet de ce discours sur les Imaginations foibles. Et si par hazard il ne se trouve dans la Compagnie quelque Esprit vif & enjoüé, qui en fasse voir le ridicule, & qui par un air fier & resolu, ne rassure la Compagnie de la peur qu'on lui aura faite: les Cartesiens auront beau se tourmenter, ils n'effaceront jamais par leurs raisonnemens, l'impression qu'on aura donnée d'eux & de leur doctrine.

Cependant il n'y auroit rien de plus facile que de faire voir l'extravagance de ce discours; il n'y auroit simplement qu'à mettre la Définition à la place du Défini. Car si par exemple, quelqu'un disoit serieusement: *Les Cartesiens sont d'étranges gens; ils disent que les bestes ne pensent ny ne sentent point: l'apprehende fort que bientôt ils n'en disent autant de nous;* Certainement on se mocqueroit d'une personne qui avanceroit un tel discours; & chacun jugeroit aisément que son apprehension seroit fort impertinente, & fort mal-fondée. Car que les bestes soient tout ce que l'on voudra, qu'elles pensent ou qu'elles ne pensent point, qu'elles sentent ou qu'elles ne sentent point: cela ne prouve & ne conclud rien à nôtre égard, & n'empéche pas que nous ne soyons ce que nous sommes, & que chacun ne soit convaincu de sa propre pensée, & de son propre sentiment.

Ma-

Mais la plus-part des hommes ne sont pas capables de démêler les moindres équivoques ; principalement lors que leur Imagination est effrayée par l'idée de quelque nouveauté qu'on represente comme dangereuse. Outre que l'air, & les manieres avec lesquelles on dit les choses, nous persuadent sans peine, & souvent même avec plaisir ; mais la Verité ne se découvre point sans quelque application d'Esprit, dont plus de la moitié du monde n'est pas capable.

Mais je ne m'apperçois pas que cette Préface est déja si longue, que je crains mêmes qu'elle ne soit ennuyeuse ; & cependant je n'ai encore rien dit de mon sujet, n'ayant jusques ici parlé que du Titre qu'il porte. Cela pourtant ne s'est pas fait sans raison ; car voyant que je n'avois que fort peu de choses à dire touchant le corps de ce Livre, qui neanmoins est assez gros, j'ai cru qu'il ne lui falloit pas mettre une tête qui lui fût tout à fait disproportionnée. Et pour avoir de la matiere, je me suis un peu étendu sur les loüanges de l'Auteur ; soit pour laisser à la Posterité ce petit monument de sa gloire, soit pour deffendre sa personne & sa doctrine des insultes de ses Envieux.

Je viens maintenant à mon sujet, dont je n'ai que deux mots à dire.

Ce Livre n'est autre chose qu'un Recueil de plusieurs differens Traitez de Mathématique, que Monsieur Rohault avoit coûtume d'enseigner à ceux qui lui faisoient l'honneur de vouloir bien l'avoir pour Maître. Il n'est pas necessaire que je les désigne tous ici par leur nom, puis que cela se verra ci-aprés par la Table. Je puis dire seulement, que bien que ces Traitez soient trés communs, les choses y sont touchées d'une maniere qui n'est pas commune. Car Monsieur Rohault avoit cela de particulier, que ne s'étant jamais appliqué à beaucoup approfondir ces parties de Mathématiques, qui étant d'une trop grande & trop profonde spéculation, & abstraction, sont de peu d'usage parmi le monde, (quoi que sans doute ce soient pourtant celles qui font davantage paroître la grandeur de l'Esprit humain, & jusques où peut aller sa capacité & son étenduë,) mais s'étant uniquement attaché à celles qui entrent plus dans le commerce des hommes, & dont il est presque impossible de se pouvoir passer: aussi s'étoit il étudié à les bien comprendre, & particulierement à trouver des manieres propres à les faire bien concevoir aux autres.

C'est ce que je me promets que l'on reconnoîtra facilement ici, par les expressions simples & propres dont il se servoit pour les donner à entendre à ses Auditeurs. Aussi, quoi que les divers Traitez qui sont contenus dans ce Livre, soient dans les mains de plusieurs : neanmoins l'on trouvera bien de la difference entre ces mêmes Traitez tels qu'ils sont ici, & leurs copies, ou pour mieux dire leurs premiers crayons. Car on ne les donne pas ici simplement comme il les donnoit lui-même à ses Disciples mais comme il les leur expliquoit dans ses Leçons particulieres. Si bien que ceux qui voudront se rendre tant soit peu attentifs, pourront aisément d'eux-mêmes, & sans autre Maître que l'Esprit de Monsieur Rohault qui regne partout, entendre tout ce qui est conteuu dans c gros Livre.

J'espere aprés cela, que chacun trouvera que ce Livr ne sera pas d'une mediocre utilité pour le Public ; pu que toutes sortes de personnes y pourront trouver dequo s'instruire. Les jeunes Gentils-hommes y pourront ap prendre les premiers Elemens de la Géometrie ; pu passer de là aux *Fortifications* ; *où ils verront les diff* rentes Manieres de fortifier les Places, tant regulier qu'irregulieres ; les avantages qu'il y faut ménager, l égards qu'il faut avoir à toutes les choses du dedans & d dehors ; ils verront, entre ces differentes Manieres quelles sont les plus parfaites, en quoi elles le sont, pou quoi elles ne le sont pas toûjours, & quand l'une doit êt préferée à l'autre. Mais ils y apprendront aussi, que maniere d'attaquer d'aujourd'huy : les grandes ruin que font les Bombes, les Carcasses, & le Canon : & s tout que la vigueur, & la generosité extraordinaire nos Generaux, de nos Capitaines, & de nos Soldats: font qu'il n'y a plus de Places imprenables.

Ceux qui voudront se donner au Negoce ou aux Affaires, & y agir en gens de bien & d'honneur, y pourront apprendre à bien tenir leurs Livres, & dresser leurs Comptes; à ne se point laisser tromper, & à ne point aussi tromper les autres, par quelque erreur de calcul, ou imprévueë, ou malicieuse. Car ce n'est pas d'aujourd'hui que l'on sçait, que pour faire une grande fortune, & s'enrichir aux dépens d'autrui, il ne faut voir les choses qu'à demi, & non pas voir si clair. Une Conscience bien *éclairée*, est un obstacle invincible & impénétrable au Mal.

Les Artisans pourront aussi par le moyen des Méchaniques, se former eux-mêmes l'Esprit, & se rendre capables de bien exercer leurs Arts; & s'ils ont un peu de genie & d'industrie, cela leur ouvrira l'Esprit pour inventer de nouvelles Machines, fabriquer de nouveaux Instrumens, & faciliter ainsi les moyens d'executer leurs Ouvrages.

Je n'ai plus qu'une chose à faire observer, qui est, qu'ayant tâché de mettre chaque Traité dans l'ordre & dans le rang où il doit être, il est arrivé neanmoins que celui qui devroit être le premier, est ici le dernier. Dequoi je n'ai point d'autre raison à rendre, sinon que comme c'étoit celui où Monsieur Rohault s'étoit le moins étendu & expliqué, & par consequent où il avoit laissé plus de choses au soin de celui qui pourroit un jour travailler à le mettre en état de paroître au jour, je l'ai reservé pour le dernier, afin de me donner le loisir d'y pouvoir bien penser, tandis qu'on imprimeroit les autres Traitez. Mais il n'y a rien de plus facile, que de passer pardessus les autres, & de lire ce Traité-là le premier.

Si je ne m'étois point déja trop étendu, je pourrois ici faire remarquer les grands avantages que l'on peut tirer des Mathématiques, & particulierement de la Géometrie; C'étoit mêmes le premier dessein que je m'étois pro-

proposé, afin de donner quelque étenduë à cette Préface, & me fournir de la matiere dequoi pouvoir proportionner la tête de ce Livre avec le reste du corps. Mais ayant depuis consideré qu'il étoit important de disculper Monsieur Rohault, & moi avec lui, des reproches qui nous étoient faits par ceux qui se donnoient la liberté de rendre publiquement suspecte la Foi du Maître & des Disciples, par les mauvaises consequences qu'ils tiroient de leurs Principes: cela m'a fait changer de dessein, & m'a déterminé à celui que j'ai pris. Si j'y ai bien ou mal reüssi, je laisse à chacun à en juger. Mais au moins je puis assurer avec sincerité, que ce n'est que le desir de deffendre la Verité, & de repousser la Calomnie, en faisant connoître la pureté de leur Foi & de leur Doctrine, qui me l'a fait entreprendre.

AVERTISSEMENT

Sur cette

Nouvelle Edition.

ON pourroit se dispenser de rendre compte ici des changemens que l'on a apportez dans cette Nouvelle Edition, & il suffiroit de n'avoir rien changé que bien à propos. Car il n'en est pas des Mathéma-
iques, comme des Matieres de Morale: dans celles-ci,
es droits d'un Autheur sont inviolables, & l'on n'ose
oucher ni à ses pensées, ni à ses expressions; au lieu
ue dans celles-là, l'évidence qui les accompagne toû-
ours, & l'interest de la Verité, ne permettent pas de
opier des fautes. D'ailleurs, comme le principal but
ue doit avoir un Auteur en traitant des Sciences, &
urtout des Mathématiques, est de les illustrer autant
u'il luy est possible, & d'en faciliter l'usage, puis qu'il
t si universel dans tous les Arts: il doit prendre en bon-
e part la censure de ceux qui se proposent la même fin.
'est aussi par ce seul motif, de rendre cét Ouvrage plus
tile au Public, qu'on en a éclairci & corrigé plusieurs
ndroits, qui étoient un peu negligez; en quoi l'on n'a
en fait qu'avec l'approbation d'un Mathématicien du
remier ordre, & qui n'est pas moins connu en France
u'en Hollande. On reconnoît cependant, avec tout le
onde, le merite distingué de feu Mr. Rohault, & l'on
a garde de refuser à sa memoire la justice qui lui est
uë. Ainsi l'on considere ses Oeuvres Posthumes, com-
e plusieurs Traitez détachez, qu'il n'avoit composez
ue pour son usage particulier, & auxquels il n'avoit
s mis la derniere main.

Mais pour satisfaire en partie la curiosité de ceux qui
n'au-

n'auront pas la premiere Edition de ce Livre, & qui souhaiteroient pourtant de voir les endroits qu'on a retouchez, en voici quelques-uns des plus considerables.

Tome I. Pag. 355. *l.* 13. Or il est à remarquer &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: Or il est à remarquer, que quand ce qui reste, excede 50000, on ajoûte une unité dans les Tables. *C'est une faute; car pour sçavoir si l'on doit ajoûter l'Unité, il ne faut pas comparer ce qui reste, à* 50000, *mais seulement à la Racine trouvée. On a corrigé la même faute dans le Calcul du Côté du Decagone, pag.* 367.

Tome II. pag. 109. *l.* 24. en multipliant &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: en multipliant MC par MK, & le Produit par le tiers de la profondeur du Fossé. *Ce Calcul suppose faussement que les deux Pyramides ont pour Bases les Triangles CMK, CLK; au lieu que ce sont les Rectangles de CM & CL par la profondeur du Fossé; ce qu'il est important de remarquer. On a corrigé la même faute dans le Toisé du Talus du Rempart, pag.* 114. *lig.* 9. *&* 10.

Pag. 125. *l.* 6. A quoi l'on peut encore &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: A quoi l'on peut encore ajoûter le Plan incliné, & la Superficie plane, ou le Traisneau. *On a ôté cette* Superficie plane (*l'Auteur a voulu dire*, Superficie Horizontale) *& ce* Traisneau, *parce que ce n'est pas une Machine simple.*

Pag. 454. *l.* 16. il ne faut que diviser &c. *Dans la premiere Edition, il y a*: il ne faut que diviser le Numerateur de la Fraction à diviser, ou du Dividende, par le Numerateur de l'autre; & donner au Quotient le Dénominateur commun. Ainsi pour diviser $\frac{8}{9}$ par $\frac{2}{9}$, il ne faut que diviser 8 par 2, le Quotient

tient sera 4, & donner au Quotient le Dénominateur commun, ce qui fera $\frac{4}{9}$. *A quoi bon ce* Dénominateur commun? *c'est une faute; le Quotient est* 4, *&* *non pas* $\frac{4}{9}$.

Enfin on donne avis, que le Profil qui se trouve dans les pages 69 & 70 du II. Tome, n'est pas exact. Car premierement la largeur CD de l'Esplanade ne répond pas à la construction, ayant 10 *Toises, au lieu de* 8. De *plus, la lettre* R *sert à marquer deux points differens, qui sont si proches l'un de l'autre, qu'ils se confondent en un: pour corriger ce défaut, il auroit fallu aggrandir tellement la Figure, qu'elle n'auroit pû tenir dans la Page; on prie le Lecteur de suppléer à cela.*

Fautes à corriger.

Page 167. ligne 23. par la 24. *lisez*, par la 23.
Pag. 242. l. 11. multiple CD, *lis.* multiple de CD,
Pag. 262. l. penult. sera AC, *lis.* sera à AC,
Pag. 305. l. 16. que à AF *lis.* que AF
Pag. 327. l. 15. à CF. *lis.* à CE.
Pag. 336. l. 3. aussi au *lis.* aussi semblable au

TABLE

TABLE
DES
TRAITEZ

Contenus dans le

PREMIER TOME.

PREMIER TRAITE'.

SECOND TRAITE'.

TROISIE'ME TRAITE'.

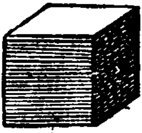
LES

LES SIX PREMIERS LIVRES DES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

ON ne peut pas douter qu'il n'y ait des Estres étendus en longueur, largeur, & profondeur ; Et c'est ce qu'on appelle *Corps* ou *Solide*.

En examinant en particulier un de ces Corps, comme celui qui est ici representé, qui ressemble à un dé à joüer, il est certain que l'on y reconnoît un Dessus, un Dessous, un Devant, un Derriere, & des Côtez.



Puis ne considerant que le Dessus

de ce Corps, on peut assurer, sans craindre de se tromper, qu'il a de la longueur & de la largeur, & point du tout de profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *Superficie* ou *Surface*.

Ensuite, considerant l'une des extremitez de cette superficie, l'on n'y remarque que de la longueur, sans largeur ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *une Ligne*.

Enfin, considerant l'extremité de l'une de ces lignes, on reconnoît que c'est une chose qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *un Point*.

Ainsi, il est indubitable qu'il y a des Superficies, des Lignes, & des Points; mais il est certain aussi que c'est seulement par la pensée que les Points sont separez des Lignes, les Lignes des Superficies, & les Superficies des Corps, ou Solides; Ce qu'il suffit de remarquer ici pour établir le fondement & la verité des definitions suivantes.

Mais auparavant, comme dans les Sciences dont nous avons à traiter, on ne doit rien avancer qui ne soit clair à l'Esprit, & qui ne soit fondé en preuves, & que souvent pour la preuve des Propositions qu'on examine, on se sert de Definitions, de Demandes, d'Axiomes, de Theoremes, de Problemes, de Lemmes, & de Corollaires; il est bon d'expliquer ici ce que l'on entend par ces termes.

Definition, est une explication claire & précise de la signification des mots, ou des choses que les mots signifient.

Demande, est une proposition, qui étant claire & certaine, est supposée vraye, pour n'être pas obligé de la démontrer.

Axiome, est une proposition si évidente d'elle-même, que l'Esprit n'en peut douter, & qui pour cela n'a pas besoin de preuve.

Theoreme, est une proposition qui contient quelque proprieté à démontrer.

Pro-

Probleme, est une proposition qui contient la preuve de quelque chose qui étoit à faire, ou à trouver.

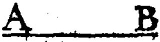
Lemme, est une proposition qui n'est mise au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corollaire, est une proposition qui suit d'une autre qu'on vient de prouver.

DEFINITIONS.

1. Un Point, est ce qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; & qui par consequent n'a ni étenduë, ni parties.
2. Une Ligne, est une Etenduë en longueur, sans largeur ni profondeur.
3. Les extremitez d'une Ligne, sont les points qui la terminent.
4. Une Ligne droite, est une Ligne qui a toutes ses parties également posées entre ses extremitez; en sorte que l'une ne s'éléve & ne s'abaisse point plus que l'autre.

Par exemple, la Ligne AB est une Ligne droite, parce qu'elle a toutes ses parties tellement posées entre ses extremitez A, & B, que pas une n'est plus élevée, ny plus abaissée que l'autre.

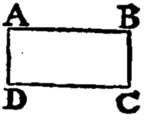


5. Une Ligne courbe, est une Ligne qui n'a pas toutes ses parties également posées entre ses extremitez.

Par exemple, la Ligne CD est une Ligne courbe; parce qu'elle a quelques-unes de ses parties, comme E, & F, qui ne sont pas également posées entre ses extremitez, & dont l'une s'éléve ou s'abaisse plus que l'autre.

6. Une Superficie, ou Surface, est une Etenduë en longueur & largeur, sans profondeur.

Par exemple, l'Etenduë qui eſt renfermée entre les Lignes AB, BC, CD, & DA, eſt une Superficie, parce qu'elle a de la longueur & de la largeur, & qu'elle n'a point de profondeur.



7. Les extremitez d'une Superficie, ſont les lignes dont elle eſt bornée.

8. Une Superficie plane, ou un Plan, eſt une Superficie qui a toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez; en ſorte que l'une ne s'éléve & ne s'abaiſſe point plus que l'autre, comme ici ABCD.

9. Une Superficie courbe, eſt une Superficie qui n'a pas toutes ſes parties également poſées entre ſes extremitez; & dont l'une s'éléve ou s'abaiſſe plus que l'autre.

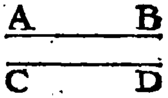
10. Une Superficie convexe, eſt une Superficie courbe, conſiderée du côté qu'elle s'éléve.

11. Une Superficie concave, eſt une Superficie courbe, conſiderée du côté qu'elle s'enfonce ou s'abaiſſe.

Ainſi, la Superficie d'un Globe eſt une Superficie courbe; laquelle conſiderée par le dehors eſt convexe, & conſiderée par le dedans eſt concave.

12. Des Lignes paralleles, ſont des lignes droites qui ſont ſur un même plan, & qui étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, ne ſe rencontrent jamais, & ſont toûjours également diſtantes.

Par exemple, les lignes AB, CD, ſont paralleles; parce qu'elles ſont ſur un même plan, & qu'étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, elles ne ſe rencontreront jamais, & ſeront toûjours également diſtantes.



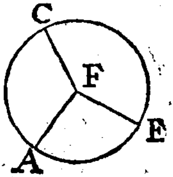
13. Le Terme, eſt l'extremité de quelque Grandeur.

14. Une

14. Une Figure, eſt ce qui eſt environné de termes.

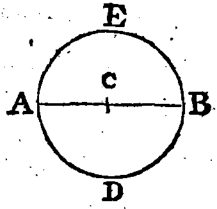
15. Un Cercle, eſt une figure plane, bornée d'une ſeule ligne courbe, qu'on nomme Circonference, au dedans de laquelle il y a un point, qu'on nomme Centre, duquel toutes les lignes droites menées à la circonference ſont égales entr'elles.

Par exemple, la Figure ACE eſt un Cercle; parce que c'eſt une Figure plane, qui eſt bornée d'une ſeule ligne courbe, à ſçavoir AEC, & qu'au dedans il y a un point, à ſçavoir F, duquel toutes les lignes droites, comme FA, FC, FE, qui ſont menées à la circonference, ſont égales entr'elles.



16. Le Diametre d'un Cercle, eſt une ligne droite qui paſſe par le centre, & qui ſe termine de part & d'autre à la circonference.

Par exemple, au Cercle ADBE, la ligne droite AB, eſt un diametre; parce qu'elle paſſe par le centre C, & que ſes extremitez A, & B, ſe terminent de part & d'autre à la circonference.



17. Un Arc de Cercle, eſt une partie de la circonference d'un Cercle, comme BE.

Si la circonference d'un Cercle eſt diviſée en 360 parties égales, chacune de ces parties s'appelle Degré, dont la 60e. partie s'appelle Minute, &c.

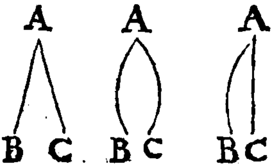
18. Un Demi-Cercle, eſt une figure compriſe du diametre du Cercle, & de la moitié de la circonference, comme AEB.

19. Un Angle, eſt l'inclinaiſon de deux lignes qui

se rencontrent en un point non directement ; ou pour mieux dire, c'est l'espace qui est compris entre deux lignes ainsi inclinées.

Ainsi, les lignes BA, CA, qui sont inclinées l'une vers l'autre, & qui se rencontrent non directement au point A, forment ce qu'on appelle un Angle.

20. Les Côtez d'un Angle, sont les lignes qui forment l'Angle.



21. La Pointe, ou le Sommet d'un Angle, est le point où se rencontrent les deux Côtez de l'Angle.

L'on désigne quelquefois un Angle par une seule lettre, que l'on met au sommet ; & quelquefois par trois, & alors celle qui marque le sommet se doit mettre au milieu. Ainsi pour désigner par trois lettres l'Angle A, l'on dit l'Angle BAC, ou bien l'Angle CAB.

22. Un Angle rectiligne, est un Angle compris de deux lignes droites.

23. Un Angle curviligne, est un Angle compris de deux lignes courbes.

24. Un Angle mixte, est un Angle compris d'une ligne droite & d'une ligne courbe ; comme on peut voir en la figure precedente.

Comme l'Angle rectiligne est d'un plus grand usage que les deux autres, c'est de lui que l'on entendra parler ci-aprés, lors qu'on parlera simplement d'un Angle, sans en désigner l'espece.

25. La Quantité ou la Grandeur d'un Angle, est le nombre des degrez que contient l'arc que ses côtez comprennent, d'un Cercle qui a son sommet pour centre.

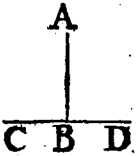
Et ainsi, pour déterminer la quantité ou la grandeur

deur d'un Angle, il ne faut que décrire un Cercle dont le sommet de l'Angle soit le centre; puis il faut sçavoir combien de degrez contient l'arc de ce Cercle compris entre ses deux Côtez, & le nombre de ces degrez en determinera la grandeur.

D'où il suit qu'un Angle est d'autant plus grand, que cet arc comprend un plus grand nombre de degrez.

26. Une Ligne perpendiculaire, est une ligne droite, qui tombant sur une autre ligne droite, fait de part & d'autre des Angles égaux.

Ainsi, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD; parce qu'elle tombe de telle sorte sur cette ligne, qu'elle fait les Angles ABC, & ABD, égaux entr'eux.

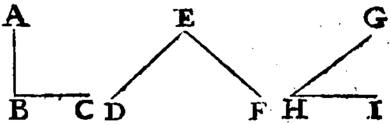


Quand une ligne droite tombe à l'extremité d'une autre ligne droite, elle ne laisse pas de lui être perpendiculaire, si cette autre ligne étant prolongée, elle fait avec elle des angles de part & d'autre égaux entr'eux.

Si une ligne est perpendiculaire à une autre, cette autre reciproquement lui est aussi perpendiculaire; ainsi les deux lignes AB, CD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

27. Un Angle droit, est un Angle compris de deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre; comme l'Angle ABC.

28. Un Angle obtus, est un Angle plus grand qu'un droit, comme l'Angle DEF.



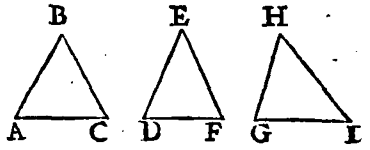
29. Un Angle aigu, est un Angle plus petit qu'un droit, comme l'Angle GHI.

30. Une Figure rectiligne, est une Figure com-

prise ou bornée de plusieurs lignes droites ; Et c'est de celle-là seule, & du Cercle, dont il est parlé dans ces Elemens.

31. Les Côtez d'une Figure rectiligne, sont les lignes droites dont elle est bornée.

32. Un Triangle, est une Figure comprise de trois lignes droites, comme ABC.



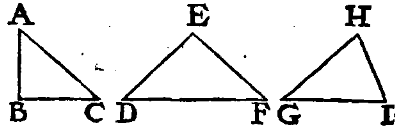
Le Triangle consideré selon ses côtez, se divise en trois especes, sçavoir, en Triangle Equilateral, en Isoscéle, & en Scaléne.

33. Un Triangle Equilateral, est un Triangle qui a ses trois côtez égaux, comme ABC.

34. Un Triangle Isoscéle, est un Triangle qui a deux de ses côtez égaux, comme DEF.

35. Un Triangle Scaléne, est un Triangle qui a ses trois côtez inégaux, comme GHI.

Le Triangle consideré selon ses Angles, se divise aussi en trois especes ; sçavoir, en Triangle Rectangle, en Amblygone, & en Oxygone.



36. Un Triangle Rectangle, est un Triangle qui a un angle droit, comme ABC.

37. Un Triangle Amblygone, ou Obtus-angle, est un Triangle qui a un angle obtus, comme DEF.

38. Un Triangle Oxygone, ou Aigu-angle, est un Triangle qui a ses trois angles aigus, comme GHI.

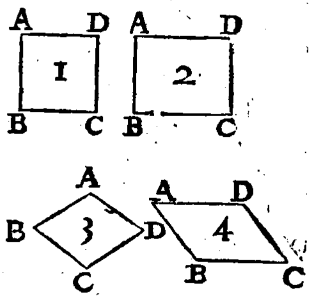
39. La Baze d'un Triangle, est un de ses trois Côtez indifferemment, que l'on nomme ainsi suivant le besoin qu'on en a.

Ainsi

Ainsi en tout Triangle chaque Côté peut servir de Baze; & mêmes l'Hypotenuse d'un Triangle Rectangle (c'est à dire le Côté opposé à l'Angle droit.) peut être considerée comme Baze de ce Triangle.

40. Un Parallelogramme, est une Figure comprise ou bornée de quatre lignes droites, dont les opposées sont paralleles.

Ainsi, les Figures qui sont ici marquées ABCD, sont des Parallelogrammes; par ce que chacune est comprise de quatre lignes droites, dont les opposées, comme AB, CD, sont paralleles.



Il y a quatre sortes de Parallelogrammes, sçavoir, le Quarré, le Rectangle, (ou le Quarré-long,) le Rhombe, & le Rhomboïde.

41. Un Quarré, est un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les quatre angles droits, comme ABCD. 1.

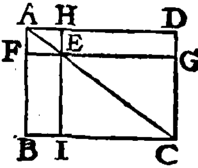
42. Un Rectangle, ou un Quarré-long, est un Parallelogramme, qui a les quatre angles droits, & les côtez opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 2.

43. Un Rhombe, est un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 3.

44. Un Rhomboïde, est un Parallelogramme, qui a les côtez & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 4.

45. La Diagonale, ou le Diametre, d'un Parallelo-

lelogramme, eſt une Ligne droite, tirée de l'un des Angles de ce Parallelogramme, à celui qui lui eſt oppoſé.



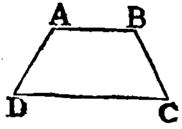
Ainſi la Ligne AC, eſt la Diagonale ou le Diametre du Parallelogramme ABCD.

46. Les Parallelogrammes à l'entour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce ſont deux Parallelogrammes, dont les Diagonales, priſes chacune à part, ſont partie de ce Diametre; & priſes enſemble, font le Diametre total.

Ainſi les Parallelogrammes AFEH, & EICG, ſont des Parallelogrammes qui ſont alentour du Diametre du Parallelogramme ABCD; parce que leurs Diagonales AE, EC, priſes chacune à part, ſont partie du Diametre AC; & priſes enſemble font ce Diametre total.

47. Les Supplémens des Parallelogrammes qui ſont alentour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce ſont deux Parallelogrammes, par leſquels ce Diametre ne paſſe point, & qui avec les deux autres qui ſont alentour du Diametre, compoſent cét autre Parallelogramme total; comme ſont ici les Parallelogrammes FBIE, EHDG, leſquels avec ceux qui ſont alentour du Diametre font le Parallelogramme total ABCD.

48. Un Trapéze, eſt une Figure compriſe de quatre Lignes droites, dont les côtez oppoſez, ou pour le moins deux de ces côtez, ne ſont point paralleles; Comme ABCD eſt un Trapéze; parce que ſes deux côtez oppoſez AD, BC, ne ſont point paralleles.



Et ainſi un Trapéze eſt une Figure de quatre côtez

tez, qui n'eſt point Parallelogramme.

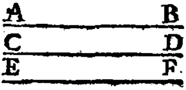
DEMANDES.

1. Que d'un Point donné à un autre Point donné l'on puiſſe mener une Ligne droite.
2. Que l'on puiſſe prolonger tant que l'on voudra une Ligne droite donnée & terminée.
3. Que l'on puiſſe décrire un Cercle de quelque centre & de quelque intervalle que ce ſoit.
4. Que toute Grandeur donnée puiſſe être augmentée ou diminuée.

AXIOMES.

1. Les Grandeurs égales à une même Grandeur ſont égales entr'elles.

Ainſi les Lignes AB, EF, qui ſont chacune égales à la Ligne CD, ſont égales entr'elles.



2. Si à des Grandeurs égales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts ſeront égaux.
3. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, les reſtes ſeront égaux.
4. Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, les Touts ſeront inégaux.
5. Si de Grandeurs inégales on retranche des Grandeurs égales, les reſtes ſeront inégaux.
6. Les Grandeurs qui ſont doubles, ou triples, ou quadruples &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, ſont égales entr elles.
7. Les Grandeurs qui ſont moitié, ou tiers, ou quart &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, ſont égales entr'elles.
8. Les Grandeurs qui conviennent enſemble, ſont égales entr'elles.

C'eſt à dire, par exemple, que ſi deux Grandeurs étant miſes l'une ſur l'autre, ſe peuvent tellement ajuſter, que l'une n'excede point l'autre, mais la couvre préciſement: ces deux Grandeurs ſont égales entr'elles.

9. Le Tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

10. Le Tout eſt plus grand qu'une de ſes parties.

11. Les Angles droits ſont égaux entr'eux.

12. Deux Lignes droites n'enferment point un eſpace.

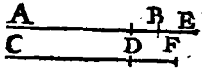
13. Si deux Lignes droites ſe coupent l'une l'autre, elles ſe couperont en un Point.

14. Si deux Lignes droites ſe rencontrent non directement en un Point, étant prolongées, elles ſe couperont l'une l'autre en ce même Point.

15. Si à des Grandeurs égales, on ajoûte des Grandeurs inégales, l'excez des toutes ſera le même que l'excez des ajoûtées.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont égales, & qu'on leur ajoûte les Lignes inégales BE, DF: l'excez dont la toute AE ſurpaſſera la toute CF, ſera égal à l'excez dont l'ajoûtée BE ſurpaſſe l'ajoûtée DF.

16. Si à des Grandeurs inégales on ajoûte des Grandeurs égales, l'excez des toutes ſera le même que l'excez des premieres.

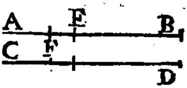


Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont inégales, & qu'on leur ajoûte les Lignes égales BE, DF: l'excez dont la toute AE ſurpaſſera la toute CF, ſera le même que celui dont AB ſurpaſſe CD.

17. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs inégales, l'excez des Grandeurs qui reſtent, ſera égal à l'excez des Grandeurs retranchées.

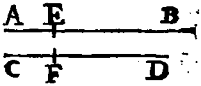
Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont égales, & qu'on en retranche les parties in-

inégales AE, CF : l'excez dont le reſte FD ſurpaſſera le reſte EB, ſera égal à l'excez dont AE ſurpaſſe CF.



18. Si de Grandeurs inégales, on retranche des Grandeurs égales, l'excez des reſtes ſera le même que l'excez des toutes.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que les Lignes AB, CD, ſont inégales, & qu'on en retranche les parties égales AE, CF : l'excez dont le reſte EB ſurpaſſera le reſte FD, ſera le même que celui dont la toute AB ſurpaſſe la toute CD.

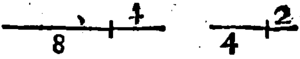


19. Si une Grandeur eſt double d'une autre, & l'ajoûtée de l'ajoûtée : le Tout ſera double du Tout.

Ainſi, ſi à une Ligne de 8 pieds, qui eſt double d'une Ligne de 4 pieds, l'on ajoûte une Ligne de 4 pieds, qui eſt double d'une Ligne de 2 pieds : le Tout 12 pieds ſera double du Tout 6 pieds.

20. Si une Grandeur eſt double d'une autre, & la retranchée de la retranchée : le reſte ſera double du reſte.

Ainſi, une Ligne de 12 pieds étant double d'une Ligne de 6 pieds, ſi l'on retranche 4 pieds de la plus grande, & 2 pieds de la plus petite, les 8 pieds qui reſteront en l'une, ſeront doubles des 4 qui reſteront en l'autre.



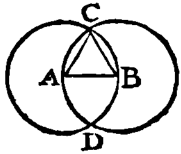
PROPOSITION I.

PROBLEME I.

Sur une Ligne droite donnée & terminée, décrire un Triangle Equilateral.

JE suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée; & je propose de décrire sur cette Ligne un Triangle Equilateral. Pour le faire,

Décrivez du centre A, & de l'intervalle AB, le Cercle CBD; décrivez aussi du Centre B, & de l'intervalle BA, le Cercle DAC; ce Cercle coupera l'autre aux deux points C, & D; de l'un de ces points, par exemple de C, menez les deux Lignes droites CA, CB. Ces deux Lignes avec la Ligne AB, feront un Triangle; & je dis que ce Triangle sera Equilateral. Pour le prouver,

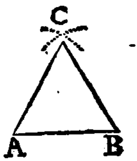


La Ligne AB, & la Ligne AC, sont les rayons du Cercle CBD, donc elles sont égales entr'elles. De même, la Ligne BA, & la Ligne BC, sont les rayons du Cercle DAC, donc elles sont aussi égales entr'elles. Par consequent la Ligne AC, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à sçavoir AB, sont égales entr'elles, par le premier Axiome. Ainsi le Triangle ABC, qui est décrit sur la Ligne droite donnée AB, est Equilateral; ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Ouvrez le Compas

pas de l'intervalle AB ; puis des points A, & B, comme centres, décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent au point C ; & menez du Point C les Lignes droites CA, CB ; & le Triangle ABC sera Equilateral.

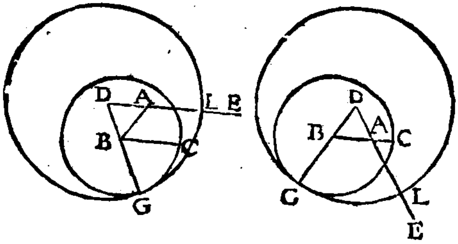


PROPOSITION II.

PROBLEME II.

D'un Point donné mener une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée.

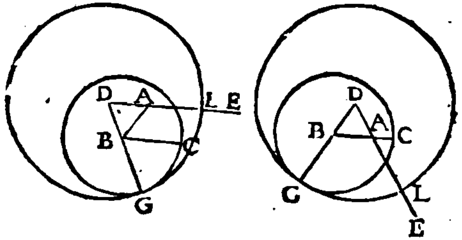
JE suppose que l'on donne le point A, & la Ligne droite BC ; & je propose de tirer du Point A une Ligne droite égale à la Ligne BC. Pour le faire,



De l'une des extremitez de la Ligne BC, par exemple, du point B, comme centre, & de l'intervalle BC, décrivez le Cercle CG ; puis du Point A au point B menez la Ligne droite AB ; décrivez ensuite sur cette Ligne, par la Proposition précedente, le Triangle Equilateral ABD ; prolongez aprés cela le côté DB, jusqu'à ce qu'il rencontre

la

la circonference du Cercle CG en quelque point, comme G; prolongez auſſi la Ligne DA indefiniment vers E; enfin du centre D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle GL; ce Cercle coupera la Ligne indefinie DE en quelque point, comme L. Cela étant, je dis que la Ligne AL, qui part du Point donné A, eſt égale à la Ligne droite donnée BC. Pour le prouver,



La Ligne DL, & la Ligne DG, ſont les rayons du Cercle GL; donc elles ſont égales entr'elles. Maintenant ſi de ces deux Lignes on retranche les parties DA, DB, qui ſont égales, parce que ce ſont les côtez d'un Triangle Equilateral: les reſtes AL, & BG, ſeront égaux entr'eux, par le 3[e]. Ax. D'ailleurs, la Ligne BC, & la Ligne BG, ſont les rayons du Cercle CG; donc elles ſont auſſi égales entr'elles. Par conſequent la Ligne AL, & la Ligne BC, qui ſont égales à une même, à ſçavoir BG, ſont égales entr'elles, par le 1[er]. Ax. Nous avons donc d'un Point donné mené une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Propoſition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la Ligne donnée, puis le tranſportant au point donné, y mener une Ligne égale à ſon ouverture.

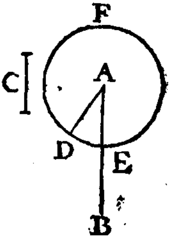
PROPOSITION III.

PROBLEME III.

Deux Lignes droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une partie égale à la plus petite.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, & C, soient données, & que AB soit la plus grande; & je propose de retrancher de AB une partie égale à C. Pour le faire,

De l'une des extremitez de la Ligne AB, par exemple du Point A, menez, par la Proposition precedente, la Ligne droite AD, qui soit égale à C; puis du centre A, & de l'intervalle AD, décrivez le Cercle DEF; ce Cercle coupera la Ligne AB au Point E. Cela étant, je dis que la partie AE, qui est retranchée de AB, est égale à C. Pour le prouver,



La Ligne AE, & la Ligne AD, sont les rayons du Cercle DEF; donc elles sont égales entr'elles; mais la Ligne AD, par la construction, est égale à la Ligne C; donc la Ligne AE, qui est égale à la Ligne AD, est aussi égale à la Ligne C, par le premier Axiome; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

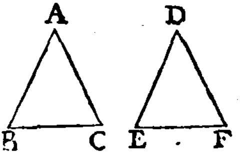
Pratique de cette Proposition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la plus petite, & la retrancher de la plus grande. *PRO-*

PROPOSITION IV.

THEOREME I.

Si deux Triangles ont deux Cotez égaux à deux Cotez, chacun au sien, & l'Angle compris de ces deux Cotez égal à l'Angle: la Baze sera égale à la Baze; les deux autres Angles seront égaux aux deux autres Angles, chacun au sien; & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE, le Côté AC au Côté DF, & que l'Angle A, compris des deux Côtez AB, AC, soit égal à l'Angle D, compris des deux Côtez DE, DF. Cela



étant, je dis que la Baze BC est égale à la Baze EF; que l'Angle B est égal à l'Angle E; l'Angle C à l'Angle F; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF. Pour le prouver,

Transportez par pensée le Triangle DEF sur le Triangle ABC, en sorte que vous fassiez tomber le Côté DE sur le Côté AB, & les extremitez D & E sur les extremitez A & B; ce qui se peut faire, puisque ces deux Lignes sont supposées égales. Ensui-

te

te dequoi, puis que l'Angle D est égal à l'Angle A, par supposition, il s'ensuit que le Côté DF tombera sur le côté AC; & puis que la Ligne DF est supposée égale à la Ligne AC, il s'ensuit que l'extremité F tombera sur l'extremité C; ainsi les Points E & F, qui sont les extremitez de la Baze EF, tombant sur les points B & C, qui sont les extremitez de la Baze BC, il s'ensuit que la Baze EF tombera sur la Baze BC, par la 4^{e} Défin. & par consequent ces deux Lignes, qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles, par le 8^{e}. Ax. D'ailleurs, puis que l'Angle E convient avec l'Angle B, il s'ensuit qu'il lui est égal; & puis que l'Angle F convient avec l'Angle C, il s'ensuit aussi qu'il lui est égal; & enfin puis que le Triangle DEF convient avec le Triangle ABC, il s'ensuit que ces deux Triangles sont aussi égaux entr'eux, par le huitiéme Axiome; Qui est tout ce qu'il falloit demontrer.

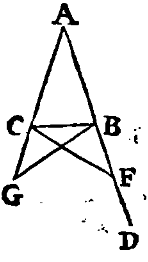
PRO-

PROPOSITION V.

THEOREME II.

Si un Triangle est Isoscele, les Angles sur la Baze sont égaux entr'eux; & ses Côtez étant prolongez, les Angles sous la Baze seront aussi égaux entr'eux.

JE suppose que le Triangle ABC soit Isoscele, & que ses Côtez AB, AC, soient égaux; cela étant, je dis premierement que les Angles ABC, & ACB, qui sont sur la Baze BC, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Prolongez le côté AC autant qu'il vous plaira, par exemple, jusqu'au Point G; puis prolongez le côté AB indefiniment; en suite retranchez, par la troisiéme Proposition, du Côté AB prolongé, la partie AF, égale à AG; menez aprés cela une Ligne droite du point C au Point F, & une autre du Point B au Point G.

Cette construction supposée, comparez le Triangle BAG avec le Triangle CAF. Le Côté AB du premier Triangle est égal au Côté AC du second, par supposition; le Côté AG du même premier Triangle est égal au côté AF du second, par la construction. Voilà donc deux Côtez, sçavoir AB, AG, égaux à deux Côtez, AC, AF; deplus l'Angle compris des deux Côtez AB, AG, est égal à l'Angle compris des deux autres Côtez AC,

AF,

AF, parce que c'eſt l'Angle A qui eſt commun aux deux Triangles. Partant il ſuit par la Propoſition precedente, que la Baze BG eſt égale à la Baze CF: que l'Angle G eſt égal à l'Angle F; & que l'Angle ABG eſt égal à l'Angle ACF. Maintenant, puis que les Lignes AG, AF, ont été faites égales, ſi on en retranche les parties AC, AB, qui ſont ſuppoſées égales: les reſtes CG, BF, ſeront égaux entr'eux. Comparez maintenant le Triangle CGB avec le Triangle BFC. Le Côté CG du premier Triangle eſt égal au Côté BF du ſecond, puis que ce ſont les reſtes de grandeurs égales; le Côté GB eſt égal au Côté FC, cela a déja été prouvé; l'Angle G, compris des deux Côtez CG, GB, eſt égal à l'Angle F, compris des deux Côtez BF, FC; cela a auſſi été prouvé; D'où il ſuit, par la même Propoſition precedente, que l'Angle GCB eſt égal à l'Angle FBC, & l'Angle GBC égal à l'Angle FCB. Si donc nous ôtons ces deux Angles égaux GBC, & FCB, des deux Angles ABG, ACF, qui ont été prouvez égaux: les Angles reſtans ABC, & ACB, ſeront égaux entr'eux, par le troiſiéme Axiome. Or ces Angles ABC, ACB, ſont les Angles ſur la Baze BC du Triangle Iſoſcele ABC. Partant, ſi un Triangle eſt Iſoſcele, les Angles ſur la Baze ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

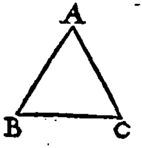
Je dis en ſecond lieu, que les Côtez égaux AB, AC, du Triangle Iſoſcele ABC, étant prolongez, les Angles ſous la Baze BC ſeront auſſi égaux entr'eux. Car ces Angles ne ſont autres que les Angles GCB, & FBC, qui ont déja été prouvez égaux. Ainſi en tout Triangle Iſoſcele les Angles ſur la Baze, & les Angles ſous la Baze, ſont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition qu'un Triangle Equilateral,

lateral, tel que je suppose ici le Triangle ABC, est aussi Equiangle, c'est à dire qu'il a ses trois Angles égaux.

Car puis que les Côtez AB, AC, sont égaux : il s'ensuit, par cette 5ᵉ. Proposition, que les Angles B & C sont égaux entr eux. De même, puisque les Côtez BA, BC, sont égaux : il s'ensuit aussi que les Angles A & C sont égaux entr'eux. Ainsi les Angles A & B étant égaux au troisiéme C, il s'ensuit qu'ils sont tous-trois égaux entr'eux ; & partant que le Triangle Equilateral ABC est Equiangle.

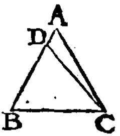


PROPOSITION VI.

THEOREME III.

Si un Triangle a deux Angles égaux entr'eux, les Côtez qui les soûtiennent sont aussi égaux entr'eux.

JE suppose que dans le Triangle ABC les Angles ABC, & ACB, soient égaux entr'eux ; Cela étant, je dis que les Côtez AB, AC, qui soûtiennent ces deux Angles, sont aussi égaux.



Car si ces deux Côtez AB, AC, n'étoient pas égaux entr'eux, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre ; posons que ce soit AB. Retranchez donc, par la troisiéme Proposition, du Côté AB, la partie BD, égale AC, & menez la Ligne CD. Comparez ensuite le Triangle

DBC

DBC avec le Triangle ACB. Le côté DB du premier Triangle, est égal au Côté AC du second, par la construction; le Côté BC est commun aux deux Triangles; de plus l'Angle B, compris des deux Côtez DB, BC, est égal à l'Angle ACB, compris des deux autres Côtez AC, CB, par supposition. Donc par la quatriéme Proposition, le Triangle DBC seroit égal au Triangle ABC, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Côté AB soit plus grand que le Côté AC. On prouvera de même que le Côté AC ne sçauroit être plus grand que le Côté AB; & ainsi les deux Côtez AB, AC, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que tout Triangle Equiangle, c'est à dire qui à ses trois angles égaux, comme nous supposons ici le Triangle ABC, est aussi Equilateral.

Car de ce que les Angles B & C sont égaux, les deux côtez AB, AC, qui les soûtiennent, s'ensuivent égaux. De même, de ce que les Angles A & B sont égaux, les deux Côtez AC, BC, qui les soûtiennent, s'ensuivent aussi égaux. D'où il suit que les deux côtez AB, BC, qui sont égaux au troisiéme AC, sont égaux entr'eux, par le premier Axiome; & partant que le Triangle ABC est Equilateral.

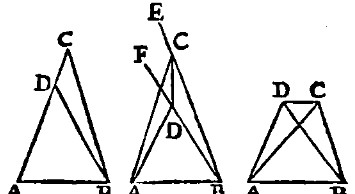
PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME IV.

Si des extremitez d'une Ligne droite, on méne deux Lignes droites, qui se rencontrent en un Point: on ne pourra pas des mêmes extremitez, & de même part, mener deux autres Lignes droites égales aux deux premieres, chacune à la sienne, qui se rencontrent en un autre Point.

JE suppose que des extremitez de la Ligne droite AB on méne les deux Lignes droites AC, BC, qui se rencontrent au Point C; & je dis que des mêmes extremitez A, & B, l'on ne sçauroit mener de même part, à sçavoir vers C,



deux autres lignes droites égales aux deux premieres AC, BC, chacune à la sienne, (c'est à dire, en sorte que celle qui part du Point A soit égale à AC, & celle qui part du Point B soit égale à BC,) qui se rencontrent en un autre Point qu'au Point C.

Car si elles se pouvoient rencontrer ailleurs qu'au Point C, il faudroit que le Point de leur ren-

rencontre fût ou sur l'un des Côtez AC, BC, du Triangle ABC : ou dans ce Triangle : ou hors ce Triangle.

Premierement, ce Point de rencontre ne peut être sur l'un des Côtez AC, BC, par exemple en D; autrement il s'ensuivroit que AD seroit égale à AC, c'est à dire la partie au tout, ce qui est absurde & impossible.

Secondement, ce Point de rencontre ne peut aussi être dans le Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce Point D les Lignes AD, BD ; puis du Point D au Point C menez la Ligne DC ; enfin prolongez BC, BD, vers E, & vers F. Cette construction supposée : puis que dans le Triangle ACD les Côtez AC, AD, sont supposez égaux, il s'ensuit, par la cinquiéme Proposition, que les deux Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle ECD est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie ; il est donc aussi plus grand que son égal ADC, & à plus forte raison que l'Angle FDC, qui n'est encore que partie de ADC. Maintenant puis que les Côtez BC, BD, du Triangle BCD, sont supposez égaux, & qu'ils sont prolongez vers E, & vers F : il s'ensuit, par la cinquiéme Proposition, que les Angles ECD, FDC, qui sont sous la Baze, sont égaux entr'eux. Mais nous avons déja prouvé que l'Angle ECD étoit plus grand que l'Angle FDC. Ainsi il s'ensuivroit que deux Angles seroient égaux & inégaux, ce qui est impossible. Il est dont impossible que ce point de rencontre puisse être dans le Triangle ABC.

Enfin ce point de rencontre ne peut être hors du Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce point D les Lignes AD, BD ; puis du Point D au Point C menez la ligne DC. Cette construction supposée : puis que les Côtez AC, AD, du Triangle ACD, sont supposez égaux, il s'ensuit par la cinquiéme Proposition, que les Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle BCD est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que son égal ADC, & à plus forte raison que sa partie BDC. Maintenant, puis que dans le Triangle BDC les Côtez BC, BD, sont supposez égaux: il s'ensuit (par la cinquiéme Proposition) que les Angles BCD, & BDC, qui sont sur la Baze, sont égaux entr'eux. Mais nous venons de prouver que l'Angle BCD étoit plus grand que l'Angle BDC. Donc il s'ensuivroit que l'Angle BCD, & l'Angle BDC, seroient tout-ensemble égaux & inégaux; ce qui est absurde & impossible. Il est donc impossible que ce Point de rencontre puisse être hors du Triangle ABC. Mais nous avons aussi prouvé qu'il ne peut être ni dans le Triangle, ni sur ses Côtez, excepté au Point C; il s'ensuit donc que le Point de rencontre de ces deux Lignes ne peut être ailleurs qu'au point C; Ce qu'il falloit démontrer.

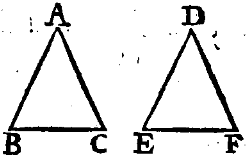
PROPOSITION VIII.

THEOREME V.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & la Baze égale à la Baze: l'Angle compris de ces Côtez égaux sera aussi égal à l'Angle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE, le Cô-

Côté AC au Côté DF, & la Baze BC à la Baze EF ; cela étant, je dis que l'Angle A, compris des deux Côtez AB, AC, est égal à l'Angle D, compris des deux Côtez DE, DF. Pour le prouver,



Transportez par pensée le Triangle ABC sur le Triangle DEF, en sorte que vous fassiez tomber la Baze BC sur la Baze EF, & les extremitez B, & C, sur les extremitez E, & F ; ce qui se peut faire, puisque BC, & EF, sont supposées égales. Cela étant, considerez que des extremitez de la Ligne EF partent deux Lignes droites ED, FD, qui se rencontrent au Point D ; & que des mêmes extremitez partent deux autres Lignes droites BA, & CA, qui leur sont égales, chacune à la sienne, par supposition, & qui se rencontrent aussi en un Point. Partant, par la Proposition precedente, ces deux Lignes ne peuvent pas se rencontrer en un autre Point qu'au Point D. D'où il suit que le Point A tombera sur le Point D ; que la Ligne AB tombera sur DE ; la Ligne AC tombera sur DF ; & qu'ainsi l'Angle A conviendra avec l'Angle D ; & partant qu'il lui est égal ; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

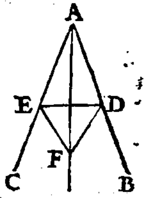
Puis que par la démonstration precedente il a été prouvé que le Triangle ABC convenoit avec le Triangle DEF : outre que nous avons conclu que les Angles A, & D, étoient égaux entr'eux, nous pouvons encore conclure que les deux Angles B, & C, sont égaux aux deux Angles E, & F, chacun au sien ; & que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

PROPOSITION IX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Angle rectiligne donné.

JE suppose que l'Angle rectiligne BAC soit donné, & je propose de le couper en deux également. Pour le faire,



Prenez sur les Côtez AB, AC, deux parties égales AD, AE; menez du Point D au Point E la Ligne droite DE; décrivez sur la Ligne DE, par la premiere Proposition, le Triangle Equilateral DEF; menez du point A au Point F la Ligne droite AF; Cela étant je dis que cette Ligne AF coupe l'Angle BAC en deux également. Pour le prouver,

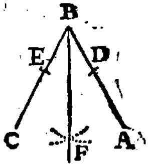
Comparez le Triangle DAF avec le Triangle EAF. Le Côté AD est égal au Côté AE, par la construction; le Côté AF leur est commun; la Baze DF est égale à la Baze EF, puis que ces deux Lignes sont les Côtez d'un Triangle Equilateral. Partant, par la Proposition precedente, l'Angle DAF est egal à l'Angle EAF; Et par consequent l'Angle BAC est coupé en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper un Angle rectiligne donné en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite en doublant toûjours: Car aprés l'avoir divisé en deux également, il n'y a qu'à diviser cha-

chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

REMARQUE.



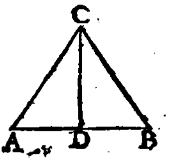
Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas au Point B; & l'ayant ouvert à discretion, marquez les Points E, & D; puis avec la même ou autre ouverture, mettez vôtre Compas au Point E, & décrivez vers F, un arc de Cercle; & sans changer d'ouverture transportez vôtre Compas au Point D, & décrivez un autre arc qui coupe le premier au Point F; Enfin menez par le Point B & le Point F une Ligne droite; & cette Ligne coupera l'Angle donné en deux également.

PROPOSITION X.

PROBLEME V.

Couper en deux également une Ligne droite donnée, & terminée.

JE suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée, & je propose de la couper en deux parties égales. Pour le faire,



Décrivez sur la Ligne AB le Triangle Equilateral ACB, par la 1. Prop. puis, par la Proposition précedente, coupez l'Angle ACB en deux également par la Ligne droite CD; cette Ligne coupera la Ligne

AB au Point D; Cela étant, je dis qu'elle sera coupée en deux parties égales. Pour le prouver,

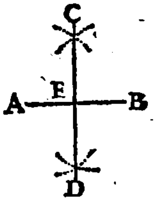
Comparez le Triangle ACD, avec le Triangle BCD. Le Côté AC est égal au Côté BC, parce que ce sont les Côtez d'un Triangle Equilateral; le Côté CD est commun aux deux Triangles. Voilà donc les deux Côtez AC, CD, égaux aux deux Côtez BC, CD, chacun au sien. De plus l'Angle ACD, compris de ces deux Côtez, est égal à l'Angle BCD, compris des deux autres, par la construction. Donc par la 4ᵉ. Prop. la Baze AD est égale à la Baze BD; Et ainsi la Ligne donnée AB est coupée en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper une Ligne droite donnée en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite, en doublant toûjours; car aprés l'avoir coupée en deux également, il ne faut que couper derechef chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas à l'une des extremitez de la Ligne donnée; & le tenant ouvert plus que de la moitié de cette Ligne, décrivez deux Arcs de Cercle vers C, & vers D. Transportez vôtre Compas à l'autre extremité, & avec la même ouverture decrivez deux autres Arcs qui coupent les



deux premiers aux Points C, & D. Puis du point C au point D menez une Ligne droite; cette Ligne

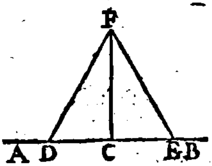
gne coupera la Ligne AB en deux parties égales au Point E.

PROPOSITION XI.

PROBLEME VI.

D'un point donné dans une Ligne droite élever une Ligne perpendiculaire.

JE ſuppoſe que la Ligne AB ſoit donnée, & le Point C dans cette Ligne; Et je propoſe d'élever du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,



Prenez ſur la Ligne AB, de part & d'autre du Point C, deux parties égales CD, CE. Décrivez ſur la Ligne DE (par la 1re. Prop.) le Triangle Equilateral DFE. Menez du Point C au Point F la Ligne droite CF. Cela étant, je dis que cette Ligne CF, qui part du Point donné C, eſt perpendiculaire à la Ligne donnée AB. Pour le prouver,

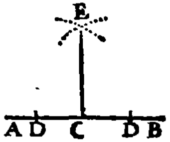
Comparez le Triangle DCF avec le Triangle ECF. Le Côté CD eſt égal au Côté CE, par la conſtruction; le Côté CF eſt commun aux deux Triangles. Voilà donc deux Côtez CD, CF, égaux à deux Côtez EC, CF, chacun au ſien. Deplus, la Baze DF eſt égale à la Baze EF, parce que ce ſont les Côtez d'un Triangle Equilateral. Partant (par la 8e Prop.) l'Angle DCF, compris des deux Côtez du premier Triangle, eſt égal à l'Angle ECF, compris des deux Côtez de l'autre Triangle; Et ainſi la Ligne CF, qui tombe ſur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre

 égaux.

égaux entr'eux, est perpendiculaire. Nous avons donc d'un Point donné dans une Ligne droite, elevé une Perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vôtre Compas au Point C, & le tenant ouvert comme il vous plaira, marquez de part & d'autre de la Ligne donnée les deux Points D & D. Ouvrez aprés cela un peu davantage



vôtre Compas, & le mettant successivement aux Points D & D, décrivez avec cette ouverture deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent au Point E; puis du Point C au Point E menez la Ligne droite CE; Et cette Ligne sera perpendiculaire à la Ligne donnée.

Si le Point donné étoit à l'extremité de la Ligne, il la faudroit prolonger, & pratiquer ensuite ce qui vient d'être dit. Il y a encore une autre maniere d'élever une Perpendiculaire à l'extremité d'une Ligne droite, qui sera enseignée ci-aprés.

PRO-

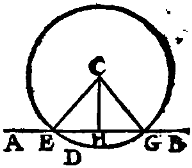
PROPOSITION XII.

PROBLEME VII.

D'un Point donné hors d'une Ligne droite indeterminée, abaisser sur cette Ligne, une Ligne perpendiculaire.

JE suppose qu'on donne la Ligne droite AB, qui est indeterminée, & le Point C hors de cette Ligne; & je propose d'abaisser du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,

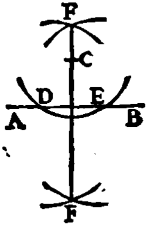
Prenez au delà de la Ligne AB un Point tel qu'il vous plaira, comme D; puis du Centre C, & de l'intervalle CD, décrivez un Cercle. Ce Cercle coupera la Ligne AB aux Points E, & G. Coupez aprés cela (par la 10. Prop.) la partie EG en deux également au Point H. Menez du Point C au Point H la Ligne droite CH. Cela étant, je dis que cette Ligne CH, qui tombe du Point donné C sur la Ligne AB, lui est perpendiculaire. Pour le prouver,



Menez les Lignes droites CE, CG, & comparez le Triangle EHC avec le Triangle GHC. Le Côté EH est égal au Côté GH, parce que la Ligne EG a été coupée en deux également; le Côté HC est commun aux deux Triangles; Voilà donc les deux Côtez EH, HC, égaux aux deux GH, HC. De plus, la Baze CE est égale à la Baze CG, parce que ce sont les rayons d'un même Cercle. Partant (par la 8. Prop.) l'Angle CHE, compris des deux premiers Côtez, est égal à l'Angle CHG, compris des deux autres. D'où il ſuit que la Ligne CH, qui tombe ſur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre égaux entr'eux, eſt perpendiculaire à AB. Ainſi nous avons d'un Point donné hors d'une Ligne droite indeterminée, abaiſſé ſur cette Ligne une Ligne perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Propoſition. Appliquez vôtre Compas au Point donné C, & décrivez un Cercle de tel intervalle qu'il coupe la Ligne AB aux deux Points D, & E; puis ouvrant tant ſoit peu le Compas, & l'appliquant ſucceſſivement aux deux Points D, & E: décrivez d'une part ou d'autre de la Ligne AB deux arcs qui s'entrecoupent au Point F. Enfin



par le Point F, & par le Point C, menez une Ligne droite qui rencontre la Ligne AB; & cette Ligne ſera perpendiculaire à la Ligne donnée.

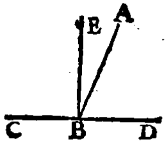
PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME VI.

Quand une Ligne droite tombe sur une autre Ligne droite, ou elle fait deux Angles droits, ou deux Angles égaux à deux droits.

JE suppose que la Ligne droite AB tombe sur la Ligne droite CD. Cela étant, je dis que les deux Angles ABC ABD, sont droits, ou égaux à deux droits.



Car, ou la Ligne droite AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire: en ce cas, il est évident que les deux Angles ABC, & ABD, sont deux Angles droits. Si AB n'est pas perpendiculaire à CD, élevez (par la 11e. Prop.) la Ligne BE, qui lui soit perpendiculaire. Cela étant, les Angles EBC, EBD, sont deux Angles droits. Mais les deux Angles ABC, ABD, pris ensemble, sont égaux aux deux Angles EBC, EBD, avec lesquels ils conviennent; donc ils sont égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si la quantité de l'un des deux Angles que fait une Ligne droite en tombant sur une autre, est connuë, on connoîtra facilement la quantité de l'autre. Car il n'y aura qu'à ôter la quantité connuë de la valeur de deux Angles droits, & le reste sera la quantité de l'autre. Comme par exemple, si l'Angle ABC étoit connu de 110 degrez: en ôtant cette quantité de 180 degrez, le reste 70 degrez seroit la quantité de l'Angle ABD.

II. COROLLAIRE.

Il suit encore de cette Proposition, que si deux Lignes droites s'entrecoupent, les quatre Angles qu'elles feront vaudront quatre Angles droits. Car deux de ces Angles pris ensemble, & à côté l'un de l'autre, valent deux droits par cette Proposition; & les deux restans valent aussi deux droits, par la même raison.

III. COROLLAIRE.

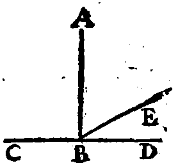
Il suit derechef, que si d'un Point pris dans un Plan, on tiroit tant de Lignes droites que l'on voudra sur le Plan: tous les Angles que feroient toutes ces Lignes, pris ensemble, vaudroient quatre Angles droits; étant certain qu'ils convien-droient tous avec les quatre Angles que feroient deux Lignes droites qui s'entrecouperoient en ce même Point.

PRO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME VII.

Si à un Point de quelque Ligne droite se rencontrent deux autres Lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux Angles égaux à deux droits: ces deux Lignes se rencontreront directement.



JE suppose que les deux Lignes droites CB, DB, se rencontrent au Point B de la Ligne droite AB, & qu'elles font de part & d'autre de cette Ligne les deux Angles ABC, & ABD, égaux à deux droits. Cela étant, je dis que ces deux Lignes se rencontrent directement; c'est à dire, qu'elles ne font ensemble qu'une seule Ligne droite.

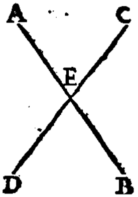
Car si CB ne concouroit pas directement avec DB, il s'ensuivroit que CB étant prolongée vers D, passeroit au dessus ou au dessous de DB. Supposons, si vous voulez, qu'elle passe au dessus, vers E. Cela étant, la Ligne CBE étant droite, & la Ligne AB tombant dessus: il s'ensuivroit, par la precedente Proposition, que les deux Angles ABC, & ABE, vaudroient deux Angles droits. Mais, par la supposition, les deux Angles ABC, & ABD, valent aussi deux droits; donc les Angles ABC, & ABE, seroient égaux aux deux Angles ABC, & ABD, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la

Ligne CB étant prolongée, passe au dessus de DB. On prouvera qu'il s'ensuivroit la même absurdité, si on prétendoit que CB étant prolongée, dût passer au dessous de DB. Et partant les Lignes CB, DB, se rencontrent directement, ou ne font qu'une Ligne droite; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME VIII.

Si deux Lignes droites s'entrecoupent, les Angles opposez au sommet seront égaux entr'eux.



JE suppose que les deux Lignes droites AB, CD, s'entrecoupent au Point E, autour duquel elles font quatre Angles. Cela étant, je dis que les Angles AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux.

Car puis que la Ligne AE tombe sur CD, il s'ensuit, (par la 13e. Prop.) que les Angles AEC, AED, sont égaux à deux droits. De même, DE tombant sur AB, les deux Angles AED, DEB, sont égaux à deux droits. Partant les deux Angles AEC, AED, sont égaux aux deux Angles AED, DEB. Ostant donc l'Angle AED qui leur est commun, les Angles restans AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, s'ensuivent égaux. On prouvera par un semblable raisonnement que les Angles AED, & CEB, qui sont aussi opposez au sommet, sont égaux entr'eux. Donc si deux Lignes s'entrecoupent, les Angles

qu'elqu'elles sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Nous pouvons ici établir une Proposition, qui peut en quelque façon passer pour la Converse de la precedente, à sçavoir; que si deux Lignes droites, venant de part & d'autre d'une autre Ligne droite, se rencontrent à un même Point de cette Ligne, & font avec elle les Angles opposez au sommet égaux: ces deux Lignes se rencontrent directement. Par exemple,

Posons que les deux Lignes droites CE, DE, viennent de part & d'autre de la Ligne droite AB se rencontrer au Point E, en sorte qu'elles fassent les Angles AEC, DEB, opposez au sommet, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que ces deux Lignes concourent directement.

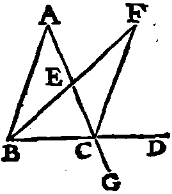
Car puisque les Angles AEC, DEB, sont supposez égaux: en leur ajoûtant l'Angle commun AED, il s'ensuivra que les deux Angles AEC, AED, pris ensemble, seront égaux aux deux autres BED, AED, aussi pris ensemble. Or puis que la Ligne DE tombe sur la Ligne droite AB, les deux Angles BED, AED, valent deux droits, (par la 13ᵉ. Prop.) Partant les deux Angles AEC, AED, valent aussi deux droits. Et par consequent, par la Proposition precedente, les deux Lignes CE, DE, concourent directement.

PRO-

PROPOSITION XVI.

THEOREME IX.

Si le Côté d'un Triangle est prolongé, l'Angle exterieur sera plus grand que chacun des deux opposez interieurs.



Je suppose qu'au Triangle ABC le Côté BC soit prolongé vers D. Cela étant, je dis premierement que l'Angle exterieur ACD est plus grand que l'Angle interieur CAB, qui lui est opposé alternativement. Pour le prouver,

Coupez la Ligne AC en deux parties égales au Point E. Menez par le Point B & par le Point E la Ligne droite indeterminée BF. Retranchez de cette Ligne la partie EF, égale à EB; & du Point C au Point F menez la Ligne droite CF. Cela posé:

Comparez le Triangle CEF avec le Triangle AEB. Le Côté EC du premier Triangle, est égal au Côté EA du second, puis que la Ligne AC a été coupée en deux également. Le Côté EF a été fait égal au Côté EB. Voilà donc les deux Côtez CE, EF, égaux aux deux Côtez AE, EB, chacun au sien. De plus, l'Angle CEF, compris des deux Côtez CE, EF, est égal à l'Angle AEB, compris des deux autres Côtez; parce que ces deux Angles sont opposez au sommet. Partant (par la 4 Prop.) la Baze sera égale à la Baze, & les autres Angles égaux aux autres Angles, chacun au sien; c'est à dire

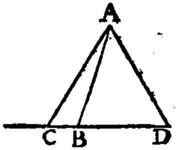
dire que l'Angle ECF, ou ACF, sera égal à l'Angle EAB, ou CAB. Or l'Angle ACD est plus grand que l'Angle ACF, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que l Angle CAB; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que le même Angle exterieur ACD est plus grand que l'autre Angle interieur ABC, qui lui est simplement opposé. Pour le prouver,

Continuez la Ligne AC vers G. L'Angle BCG est exterieur, & son opposé alternativement est ABC. Donc par ce qui vient d'être dit dans la premiere partie de cette Proposition, l'Angle BCG est plus grand que l'Angle ABC. Or par la Proposition precedente, l'Angle ACD est égal à l'Angle BCG, qui lui est opposé au sommet. Partant l'Angle ACD est aussi plus grand que l'Angle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que d'un même Point comme A, pris où l'on voudra hors d'une Ligne droite, par exemple CD, on ne peut mener vers cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles. Car si on prétendoit qu'on en pût mener trois, comme AC, AB, AD: de ce que les deux Lignes AB, AD, seroient égales, il s'ensuivroit (par la 5. Prop.) que l'Angle ABD seroit égal à l'Angle D.



Mais puis que les Lignes AC, & AD, seroient aussi égales, il s'ensuivroit aussi que l'Angle ACD seroit égal au même Angle D. Partant les deux Angles ACD, ABD, qui seroient égaux à l'Angle D, seroient égaux entr'eux; c'est à dire qu'un Angle exterieur seroit égal à son opposé interieur, ce qui est

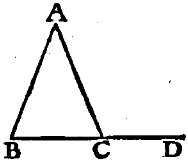
est impossible, par la Proposition precedente. Il est donc impossible que d'un Point pris hors d'une ligne droite, on puisse mener sur cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

PROPOSITION XVII.

THEOREME X.

En tout Triangle, deux Angles tels que l'on voudra, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits.

JE suppose le Triangle ABC, & je dis que deux Angles de ce Triangle tels que l'on voudra, comme ABC, & ACB, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits. Pour le prouver,

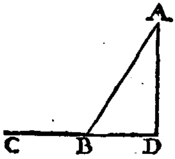


Prolongez la Ligne BC (aux extremitez de laquelle sont ces deux Angles,) vers tel côté qu'il vous plaira, comme vers D. L'Angle ACD est exterieur, & l'Angle ABC est son opposé interieur. Donc, par la Proposition precedente, l'Angle ABC est plus petit que l'Angle ACD. Et partant les deux Angles ABC, & ACB, pris ensemble, seront moindres que les deux Angles ACD, & ACB, pris aussi ensemble. Or (par la 13°. Prop.) les deux Angles ACD, & ACB, valent deux droits. Donc les deux autres ABC, & ACB, valent moins que deux droits. On prouvera de même que ACB, & BAC; ou bien ABC, & BAC; valent moins que deux droits. Et partant deux Angles d'un Triangle pris comme l'on voudra, valent en-

ensemble moins que deux droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

I. Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que d'un même Point comme A, on ne peut faire tomber sur une Ligne droite, par exemple sur CD, qu'une seule Perpendiculaire. Car s'il en pouvoit tomber deux, comme par exemple AD, AB, il s'ensuivroit



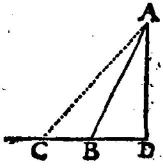
que chacun des deux Angles ABD, & ADB, seroient droits, & qu'ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux droits ; Ce qui est contre la Proposition precedente.

II. Corollaire.

Il suit encore, que si un Angle d'un Triangle est droit, ou obtus, chacun des deux autres sera aigu. Car chacun de ceux-ci étant pris avec celui qui est déja droit, ou obtus, il s'en doit faire un Tout moindre que deux Angles droits. Partant, si l'on en ôte celui qui est droit, ou obtus, le restant sera moindre qu'un droit, c'est à dire aigu.

III. Corollaire.

Il suit en troisiéme lieu, que si une Ligne droite, comme AB, tombant sur une autre Ligne droite, comme CD, fait d'une part un Angle obtus, comme ABC, & de l'autre part un Angle aigu, comme ABD : en prenant quelque Point dans la Ligne AB, par exemple A, d'où l'on fasse tomber une Per-



pen-

pendiculaire sur CD, cette Perpendiculaire tombera de la part de l'Angle aigu, comme vous voyez ici que tombe la Ligne AD. Car si l'on prétendoit que cette Perpendiculaire pût tomber de la part de l'Angle obtus, comme tombe AC: l'Angle ACB s'ensuivroit droit. Et d'ailleurs l'Angle ABC étant supposé obtus, il s'ensuivroit que deux Angles d'un même Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est contre la precédente Proposition.

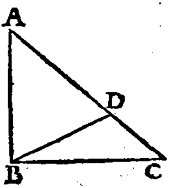
IV. Corollaire.

Il est enfin évident que les trois Angles d'un Triangle Equilateral, ou les deux Angles égaux d'un Triangle Isoscele, sont aigus. Car ces Angles étant égaux, si l'un d'eux étoit droit ou obtus, les autres le seroient aussi. Et ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est impossible, comme il vient d'être démontré.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XI.

En tout Triangle, le plus grand Côté soûtient le plus grand Angle.



JE suppose que dans le Triangle ABC le Côté AC soit plus grand que le Côté AB. Cela étant, je dis que l'Angle ABC est plus grand que l'Angle C. Pour le prouver,

Retranchez de AC la partie AD, égale à AB, & menez la Ligne

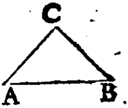
gne droite BD. Le Côté CD, du Triangle BCD, est prolongé vers A ; donc (par la 16. Prop.) l'Angle exterieur ADB est plus grand que son opposé interieur C. D'ailleurs, puis que AD est égale à AB, les Angles ABD, ADB, sont égaux, par la 5. Prop. Or l'Angle ABC est plus grand que l'Angle ABD, qui n'est que sa partie ; il sera donc aussi plus grand que l'Angle ADB, & à plus forte raison que l'Angle C, qui a été prouvé moindre que ADB ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XII.

En tout Triangle, le plus grand Angle est soûtenu par le plus grand Côté.

JE suppose que dans le Triangle ABC l'Angle C soit plus grand que l'Angle B. Cela étant, je dis que le Côté AB, qui soûtient le plus grand Angle, est plus grand que AC, qui soûtient le plus petit.

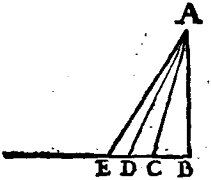


Car si AB n'étoit pas plus grand que AC, il s'ensuivroit qu'il lui seroit égal, ou moindre ; s'il lui étoit égal, les Angles B, & C, seroient égaux, (par la 5. Prop.) ce qui est contre la supposition. S'il étoit plus petit, le Côté AC seroit plus grand, & (par la Proposition precedente) l'Angle B seroit plus grand que l'Angle C ; ce qui est encore contre la supposition. Et partant le Côté AB ne pouvant être ni égal, ni plus petit que AC, il s'ensuit qu'il est plus grand ; Ce qu'il falloit démontrer.

COROL-

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si d'un Point hors d'une Ligne droite, on fait tomber sur cette Ligne tant de Lignes droites que l'on voudra, comme AB, AC, AD, AE, l'une desquelles, sçavoir AB, soit perpendiculaire : cette Perpendiculaire sera la plus petite de toutes; car elle soûtiendra necessairement un Angle aigu, comme sont C, D, E; au lieu que les autres soûtiendront un Angle droit, comme est B.

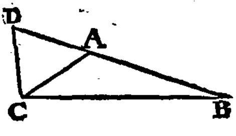


PROPOSITION XX.

THEOREME XIII.

En tout Triangle, deux Côtez tels que l'on voudra, pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme.

JE suppose le Triangle ABC, & je dis que deux de ses Côtez, tels que l'on voudra, comme AB, AC, pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme BC. Pour le prouver,



Prolongez le Côté AB vers D; puis ayant fait AD égal à AC, menez la Ligne droite DC. Cela posé: Au Triangle ADC les Côtez AC, AD, sont

ſont égaux, par la conſtruction. Donc (par la 5^e. Prop.) l'Angle ACD eſt égal à l'Angle D. Or l'Angle BCD eſt plus grand que ACD, qui n'eſt que ſa partie; donc il eſt auſſi plus grand que l'Angle D, ſon égal.

Maintenant, puiſque dans le Triangle BDC l'Angle BCD eſt plus grand que l'Angle D: il s'enſuit par la Propoſition precedente, que le Côté BD eſt plus grand que le Côté BC. Or les deux Côtez BA, AC, du Triangle ABC, ſont égaux à BD, par la conſtruction. Donc les deux Côtez BA, AC, pris enſemble, ſont plus grands que BC; Ce qu'il falloit démontrer.

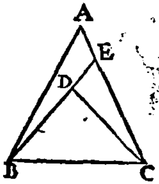
PROPOSITION XXI.

THEOREME XIV.

Si des extremitez d'un Côté de quelque Triangle, on méne deux Lignes droites qui ſe rencontrent au dedans d'icelui, ces deux Lignes ſeront plus petites que les deux autres Côtez de ce Triangle; mais elles feront un plus grand Angle.

JE ſuppoſe le Triangle ABC; & ayant pris un de ſes Côtez à diſcretion, comme BC, je méne les deux Lignes droites BD, CD, qui ſe rencontrent en dedans au Point D. Cela étant, je dis, 1°. que ces deux Lignes BD, CD, ſont plus petites que les deux Côtez BA, AC. Pour le prouver,

Prolongez BD juſques en E. Cela poſé: Dans le Triangle BAE les deux Côtez BA, AE, ſont plus grands



grands que le troisiéme BE, par la Proposition precedente; donc en leur ajoûtant EC commun, il s'ensuit que BA, AE, EC, (c'est à dire BA, AC,) sont plus grands que BE, EC. De même au Triangle CED les deux Côtez CE, ED, sont plus grands que le troisiéme CD; donc en leur ajoûtant DB, commun, il s'ensuit que CE, ED, DB, (c'est à dire BE, EC,) sont plus grands que BD, CD. Mais il a déja été prouvé que BA, AC, sont plus grands que BE, EC. Donc à plus forte raison BA, AC, sont plus grands que BD, CD; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC. Pour le prouver,

Le Côté ED, du Triangle CED, est prolongé vers B, & l'Angle BDC est exterieur; donc par la 16. Prop. il sera plus grand que son opposé interieur DEC, ou BEC. De même, le Côté AE, du Triangle BAE, est prolongé vers C; partant l'Angle exterieur BEC est plus grand que son opposé interieur BAE, ou BAC. Mais il a déja été prouvé que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BEC. Donc à plus forte raison l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC; Ce qu'il falloit démontrer.

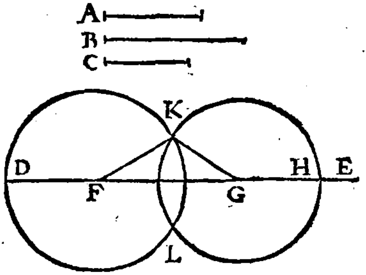
PRO-

PROPOSITION XXII.

PROBLEME VIII.

Décrire un Triangle qui ait les trois Côtez égaux à trois Lignes droites données, qui soient telles que deux d'entr'elles, prises ensemble, soient plus grandes que la troisiéme.

JE suppose qu'on donne les trois Lignes droites A, B, C, deux desquelles, telles que l'on voudra, comme A, & C, prises ensemble, sont plus grandes que la troisiéme B. Cela étant, je propose de décrire un Triangle qui ait les trois Côtez égaux à ces trois Lignes données, chacun à la sienne. Pour le faire,



Menez la Ligne droite indeterminée DE. Prenez sur cette Ligne la partie DF, égale à l'une de ces trois Lignes droites données, par exemple à A. Prenez ensuite la partie FG égale à l'une des deux restantes, par exemple à B. Prenez enfin la partie GH égale à la troisiéme C. Décrivez un Cercle du centre F,

& de l'intervalle FD. Décrivez un autre Cercle du centre G, & de l'intervalle GH. Ce second Cercle coupera le premier aux deux Points K, & L. Prenez l'un de ces deux Points, par exemple K, duquel menez deux Lignes droites aux Points F, & G. Cela étant, je dis que le Triangle FGK a les trois Côtez égaux aux trois Lignes droites données A, B, C. Pour le prouver,

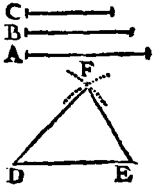
1°. Les Lignes FK, FD, sont égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais FD a été faite égale à la Ligne A; donc FK lui est aussi égale.

2°. Le Côté FG, par la construction, est égal à la Ligne B.

3°. Les Lignes GK, GH, sont aussi égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais GH a été faite égale à la Ligne C; donc la Ligne GK est aussi égale à la Ligne C. Et partant le Triangle FGK a les trois Côtez égaux aux trois Lignes droites données A, B, C; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Supposons qu'on donne les trois Lignes A, B, C; deux desquelles prises comme l'on voudra sont plus grandes que la troisiéme.

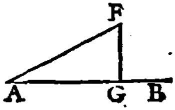


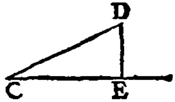
Prenez avec le Compas la grandeur de la Ligne A, & la transportez en DE. Prenez en suite la grandeur de la Ligne B, & appliquant le Compas au Point D, décrivez un Arc de Cercle vers F. Prenez aussi la grandeur de la Ligne C, & transportant le Compas au Point E, décrivez encore un Arc de Cercle qui coupe le premier au Point F. Enfin tirez les Lignes FD, FE; & le Triangle DEF aura ses trois Côtez égaux aux trois Lignes données. *PRO-*

PROPOSITION XXIIII.

PROBLEME IX.

Une Ligne droite étant donnée, & un Point en icelle, tirer de ce Point une Ligne, qui fasse avec la Ligne donnée un Angle égal à un Angle rectiligne donné.





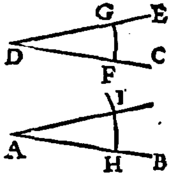
Je suppose que la Ligne donnée soit AB ; que le Point donné en icelle soit A ; & que l'Angle donné soit C. Et je propose de tirer du Point A une Ligne droite qui fasse avec AB un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,

Prenez sur les Lignes CD, CE, tels Points qu'il vous plaira, comme D, & E, & menez la Ligne droite DE. Puis ayant pris AG, égale à CE, achevez par la Proposition precedente de décrire le Triangle AGF, qui ait les trois Côtez égaux aux trois Côtez du Triangle CDE ; sçavoir les deux Côtez AG, AF, égaux aux deux Côtez CE, CD ; & la Baze FG égale à la Baze DE. D'où il suit, (par la 8. Prop.) que l'Angle A est égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit faire.

REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Supposons que l'on donne le Point A dans la Ligne droite AB, avec l'Angle D. Appliquez le pied du Compas au

Point D, & de tel intervalle qu'il vous plaira décrivez l'Arc FG. Puis transportant le Compas ainsi ouvert au Point A, décrivez l'Arc HI. Cela fait, prenez avec le Compas la distance FG, & la transportez de H en I. Tirez enfin par le Point A & par le Point I, la Ligne droite AI; & alors l'Angle A sera égal à l'Angle D.



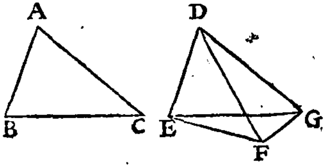
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XV.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & que l'un d'iceux ait l'Angle compris de ces Côtez égaux plus grand que l'autre; la Baze sera aussi plus grande que la Baze.

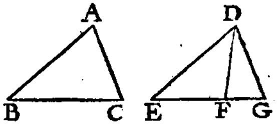
Je suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; mais que l'Angle A soit plus grand que l'Angle EDF. Cela étant, je dis que la Baze BC sera plus grande que la Baze EF. Pour le prouver,

Tirez (par la Proposition precedente) la Ligne DG, qui fasse avec DE l'Angle EDG égal à l'Angle



A. Cet-

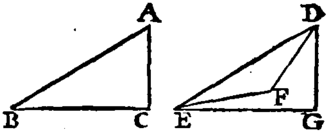
A. Cette Ligne DG tombera hors le Triangle DEF, puis que l'Angle EDF est ſuppoſé plus petit que l'Angle A. Faites enſuite DG égale à DF, ou à AC ſon égale, & menez la Ligne droite EG. Cette Ligne paſſera neceſſairement ou au deſſus du Point F, ou par le Point F, ou au-deſſous. Penſons qu'elle paſſe au deſſus, comme ici; & tirons la Ligne FG. Maintenant en comparant les Triangles DEG, & ABC, les deux Côtez ED, DG, ſont égaux aux deux Côtez BA, AC, chacun au ſien; & l'Angle EDG égal à l'Angle A, par la conſtruction. Partant la Baze EG eſt égale à la Baze BC, par la 4. Prop. Deplus, au Triangle DFG les deux Côtez DF, DG, ſont égaux, par la conſtruction. Donc (par la 5. Prop.) les Angles DFG, DGF, ſur la Baze, s'enſuivent égaux. Or l'Angle EFG eſt plus grand que l'Angle DFG, qui n'eſt que ſa partie; il eſt donc auſſi plus grand que l'Angle DGF, & à plus forte raiſon que l'Angle EGF, qui n'eſt que partie de DGF. Cela étant: puis qu'au Triangle EFG, l'Angle EFG eſt plus grand que l'Angle EGF, il s'enſuit (par la 19. Prop.) que le Côté EG, qui ſoûtient le plus grand Angle, eſt plus grand que le Côté EF, qui ſoûtient le plus petit. Mais BC eſt égale à EG, comme il a été prouvé. Partant BC eſt plus grande que EF.



Penſons maintenant que la Ligne EG paſſe par le Point F, comme dans cette Figure; auquel cas on monſtrera, comme ci-deſſus, que EG eſt égale à BC. Or EG eſt plus grande que EF, qui n'eſt que ſa partie; donc BC ſera auſſi plus grande que la Ligne EF.

Penſons en troiſiéme lieu que la Ligne EG paſſe au deſſous du Point F, comme ici; auquel cas la Ligne EG ſera toûjours prouvée égale à BC. Or les

les Lignes DF, FE, qui sont menées dans le Triangle DEG, sont plus petites que les deux



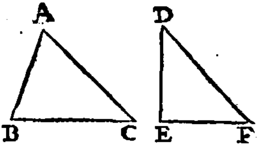
DG, GE, par la 21. Prop. Donc si de ces deux Touts inégaux on ôte les parties DF, DG, qui sont égales, par la construction : le reste EF s'ensuivra moindre que le reste EG ; & partant moindre que son égale BC. Ainsi de quelque façon que tombe la Ligne EG, cette Ligne, ou son égale BC, sera toûjours plus grande que EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XVI.

Si deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & la Baze plus grande que la Baze : ils auront aussi l'Angle compris de ces Côtez égaux plus grand que l'Angle.

Je suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE, le Côté AC au Côté DF, & que la Baze BC soit



plus grande que la Baze EF. Cela étant, je dis que l'Angle A est plus grand que l'Angle D.

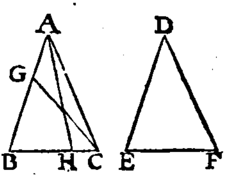
Car

Car si cela n'étoit, il lui seroit égal, ou plus petit. Mais il ne peut lui être égal ; parce qu'il s'ensuivroit que la Baze BC seroit égale à la Baze EF, par la 4. Prop. ce qui est contre la supposition. Il ne peut non plus être plus petit ; car il s'ensuivroit que la Baze EF seroit plus grande que la Baze BC, par la Proposition precedente ; ce qui est aussi contre la supposition. Donc l'Angle A est plus grand que l'Angle D ; Ce qu'il falloit démoutrer.

PROPOSITION XXVI.

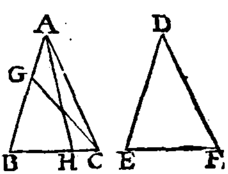
THEOREME XVII.

Si deux Triangles ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & un Côté égal à un Côté, sçavoir, ou celui aux extremitez duquel sont les Angles égaux, ou celui qui soûtient l'un de ces Angles : ils auront aussi les deux autres Côtez égaux, chacun au sien, & l'autre Angle égal à l'autre Angle, & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle E, l'Angle ACB à l'Angle F, & que le Côté BC soit égal au Côté EF, aux extremitez desquels sont les Angles égaux. Cela étant, je dis que le Côté A B est égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

Car si AB n'étoit pas égal à DE, il s'ensuivroit que l'un de ces deux Côtez seroit plus grand que l'autre; pensons, si vous voulez, que ce soit AB. En ce cas retranchez de AB la partie BG égale ED; puis tirez la Ligne CG. Maintenant comparant le Triangle GBC au Triangle DEF: le Côté GB sera égal au Côté ED par la construction; le Côté BC est égal au Côté EF, & l'Angle B égal à l'Angle E, par supposition. Donc (par la 4. Prop.) la Baze sera égale à la Baze, & l'Angle GCB égal à l'Angle F. Mais l'Angle ACB est supposé égal à l'Angle F; ainsi il s'ensuivroit que l'Angle GCB, & l'Angle ACB, seroient égaux entr'eux, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Côté AB soit plus grand que le Côté DE. On prouvera de même que DE nesçauroit être plus grand que AB. Donc ces deux Côtez AB, DE, sont égaux. Ensuite dequoi, puis que, par la supposition, le Côté BC est égal à EF, & l'Angle B égal à l'Angle E: il s'ensuit (par la 4. Prop.) que la Baze AC est égale à la Baze DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF; Ce qu'il falloit démontrer.



Supposons maintenant que le Côté AB, qui soûtient l'Angle ACB, & le Côté DE, qui soûtient l'Angle F, sont égaux entr'eux. Cela étant, je dis que le Côté BC est égal à EF; le Côté AC égal à DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF.

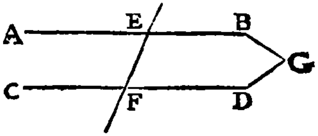
Car ſi BC n'étoit pas égal à EF, il s'enſuivroit que l'un de ces deux Côtez ſeroit plus grand que l'autre. Penſons que ce ſoit BC; auquel cas retranchez de BC la partie BH égale à EF, & tirez la Ligne AH. Maintenant, comparant le Triangle ABH au Triangle DEF: le Côté BH ſera égal au Côté EF, par la conſtruction; le Côté AB eſt égal au Côté DE, & l Angle B égal à l'Angle E, par ſuppoſition. Partant (par la 4. Prop.) la Baze ſera égale à la Baze, & l'Angle AHB ſera égal à l'Angle F. Or l'angle ACB eſt ſuppoſé égal à l'Angle F. Donc l'Angle AHB ſeroit égal à l Angle ACB, c'eſt à dire l'Angle exterieur à ſon oppoſé interieur; ce qui eſt impoſſible, par la 16. Prop. Il n'eſt donc pas vrai que le Côté BC ſoit plus grand que EF. On prouvera de même que EF n'eſt pas plus grand que BC. Partant ces deux Côtez BC, EF, ſont égaux. Mais le Côté AB étant ſuppoſé égal à DE, & l'Angle ABC égal à l'Angle E: il s'enſuit (par la 4. Prop.) que la Baze AC eſt égale à la Baze DF; que l'Angle BAC eſt égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC eſt égal à tout le Triangle DEF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XVIII.

Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les Angles opposez alternativement, égaux entr'eux : ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites ; & que la Ligne EF tombant dessus fait les deux Angles CFE, & FEB, qui sont alternativement opposez, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.



Car si elles ne sont pas paralleles, ces deux Lignes étant prolongées d'une part ou d'autre se pourront rencontrer ; pensons que ce soit vers G. En ce cas, les deux Lignes EG, FG, avec la Ligne EF, formeront le Triangle EFG, dont le Côté GF se trouve prolongé vers C. Partant (par la 16. Prop.) l'Angle exterieur CFE sera plus grand que son opposé alternativement FEB ; ce qui est contre la supposition. Donc les deux Lignes AB, CD, sont paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

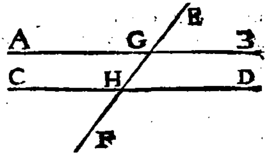
PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XIX.

Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait l'Angle exterieur égal à son opposé interieur de même part, ou bien les deux interieurs de même part égaux à deux droits: ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites, & que la Ligne EF tombant dessus, & les coupant aux Points G, & H, fasse l'un des Angles exterieurs, comme EGA, égal à l'Angle GHC, qui est son opposé interieur de même part. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car (par la 15. Prop.) l'Angle HGB est égal à l'Angle EGA. Mais l'Angle EGA est égal à l'Angle GHC, par supposition. Partant l'Angle HGB est égal à l'Angle GHC, qui est son opposé alternativement. D'où il suit, par la Proposition precedente, que les Lignes AB, CD, sont parallelles; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les deux Angles AGH, & GHC, qui sont les deux opposez interieurs de même part, soient égaux à deux droits.

Cela étant, je dis encore que les deux Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car puis que les deux Angles AGH, & GHC, sont égaux à deux droits, il s'ensuit qu'ils sont égaux aux deux Angles AGH, & HGB, qui valent aussi deux droits, par la 13. Prop. Donc, si de ces deux Touts, qui sont égaux, l'on ôte l'Angle AGH, qui leur est commun: les Angles restans GHC, & HGB, qui sont opposez alternativement, seront égaux; & partant, par la Proposition precedente, les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

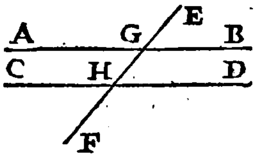
Si on supposoit que la Ligne AB inclinât tant soit peu par l'extremité A, vers la Ligne CD, & qu'ainsi l'Angle AGH devenant un peu plus petit, les deux Angles AGH, & GHC, pris ensemble, valussent moins que deux droits: en ce cas il est évident que les Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles; mais qu'étant prolongées elles se rencontreroient du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits. Et partant nous pouvons établir ici cette verité: Que si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les deux Angles interieurs de même part moindres que deux droits, ces deux Lignes ne sont point paralleles; & qu'étant prolongées elles se rencontreront du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits.

PRO-

PROPOSITION XXIX.

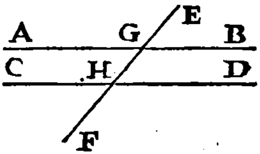
THEOREME XX.

Si une Ligne droite tombe ſur deux Lignes droites paralleles : elle fera les Angles oppoſez alternativement, égaux entr'eux ; l'Angle exterieur égal à ſon oppoſé interieur de même part ; & les deux interieurs de même part égaux à deux droits.



JE ſuppoſe que les deux Lignes droites AB, CD, ſoient paralleles, & que la Ligne droite EF tombe deſſus, & les coupe aux Points G, & H. Cela étant, je dis premierement que les Angles oppoſez alternativement, tels que ſont AGH, & GHD, ſont égaux entr'eux.

Autrement il faudroit que l'un de ces deux Angles fût plus petit que l'autre. Penſons que ce ſoit AGH ; auquel cas AGH pris avec GHC, vaudroit moins que GHD pris avec le même GHC. Mais GHD, & GHC, valent deux droits, par la 13. Prop. Partant AGH, & GHC, vaudront moins que deux droits. Et ainſi il s'enſuivroit, par la remarque precedente, que ces Lignes AB, CD, ne ſeroient point paralleles ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'Angle AGH ne peut donc pas être plus petit que l'Angle GHD. On prouvera de même que l'Angle GHD ne peut pas être plus petit que l'Angle AGH. Donc ces deux Angles sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je dis en second lieu, que l'Angle exterieur EGB est égal à son opposé interieur de même part, sçavoir GHD.

Car (par la 15. Prop.) EGB est égal à AGH, qui lui est opposé au sommet. Or, par ce qui vient d'être prouvé, AGH est égal à GHD. Partant EGB est aussi égal à GHD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis enfin que les deux Angles interieurs de même part, comme BGH, & GHD, sont égaux à deux droits.

Car, par ce qui vient d'être prouvé, l'Angle GHD est égal à l'Angle AGH. Et partant GHD pris avec HGB, vaudra autant que AGH pris avec HGB. Or, par la 13. Prop. AGH, & HGB, valent deux droits. Donc GHD, & HGB, valent aussi deux droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

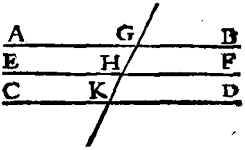
THEOREME XXI.

Les Lignes droites paralleles à une même, sont paralleles entr'elles.

JE suppose que les Lignes AB, CD, sont paralleles à la Ligne EF. Cela étant, je dis que ces Lignes sont paralleles entr'elles. Pour le prouver,

Tirez

Tirez la Ligne droite GK, qui coupe ces trois Lignes aux Points G, H, K. Ensuite dequoi, puis que les Lignes AB, EF, sont paralleles, par supposition, & que GK tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les Angles AGH, & GHF, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux. De même, puis que les Lignes EF, CD, sont aussi supposées paralleles, & que la même Ligne GK tombe dessus: il s'ensuit (par la même



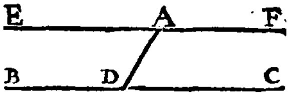
Prop.) que l'Angle exterieur GHF est égal à son opposé interieur HKD. Ainsi les deux Angles AGH, & HKD, qui sont égaux à un même, sont égaux entr'eux. Or ces Angles sont opposez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME X.

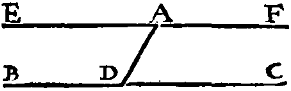
Par un Point donné mener une Ligne droite parallele à une Ligne droite donnée.

JE suppose que le Point donné soit A, & la Ligne droite donnée, BC; & je propose de



mener par le Point A une Ligne, qui soit parallele à BC. Pour le faire,

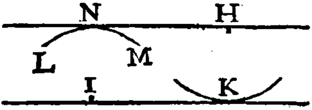
Tirez du Point A à tel Point qu'il vous plaira de la la Ligne BC, la Ligne droite AD, qui fasse avec BC un Angle tel qu'il vous plaira, comme ADC. Menez ensuite par le Point A la Ligne droite EAF, qui fasse avec AD l'Angle EAD égal à l'Angle ADC. Cela étant*, je dis que la Ligne EF est parallele à BC.



Car les Angles EAD, ADC, qui sont opposez alternativement, sont égaux, par la construction. Partant (par la 27. Prop.) les Lignes EF, BC, sont paralleles; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Posons que la Ligne IK soit donnée, & que le Point donné soit H. Mettez le pied du Compas au Point H, & l'ouvrez de telle sorte, qu'en décrivant un Arc de Cercle, il raze la Ligne IK. Cela fait, transportez le Compas ainsi ouvert à un Point de la Ligne IK, comme I, & décrivez de la part du Point H, l'Arc LNM; puis tirez par le Point H une Ligne droite qui raze l'Arc LNM; & alors cette Ligne NH sera parallele à la Ligne IK.

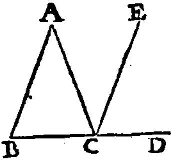


PRO-

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

En tout Triangle, un des Côtez étant prolongé, l'Angle exterieur est égal aux deux opposez interieurs; & les trois Angles d'un Triangle sont égaux à deux droits.



JE suppose que du Triangle ABC le Côté BC soit prolongé vers D. Cela étant, je dis premierement que l'Angle exterieur ACD est égal aux deux opposez interieurs A, & B, pris ensemble. Pour le prouver,

Menez par le Point C, la Ligne droite CE parallele à AB, par la Prop. precedente. Cela posé: puis que les Lignes AB, CE, sont paralleles, & que la Ligne AC tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que l'Angle ACE est égal à l'Angle A, qui lui est opposé alternativement.

De même, puis que les Lignes AB, CE, sont paralleles, & que la Ligne BD tombe dessus: il s'ensuit (par la même 29. Prop.) que l'Angle exterieur ECD est égal à son opposé interieur B. Et partant l'Angle total ACD est égal aux deux Angles A, & B; Ce qu il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les trois Angles du Triangle ABC sont égaux à deux droits.

Car il vient d'être prouvé que les deux Angles A, & B,

& B, sont égaux à l'Angle ACD. Or l'Angle ACD, avec l'Angle ACB, sont égaux à deux droits, (par la 13. Prop.) Donc les deux Angles A, & B, avec l'Angle ACB, sont aussi égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

I. Corollaire.

Il suit premierement de cette Proposition, que les trois Angles d'un Triangle pris ensemble sont égaux aux trois Angles d'un autre Triangle, pris aussi ensemble. Car les trois Angles de l'un valent deux droits, de même que les trois Angles de l'autre.

II. Corollaire.

Il suit en second lieu, que si deux Angles d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle, le troisiéme sera aussi égal au troisiéme.

III. Corollaire.

Il suit en troisiéme lieu, que si l'un des Angles d'un Triangle est droit, les deux autres valent autant qu'un droit.

IV. Corollaire.

Il suit enfin, que si deux Angles d'un Triangle sont connus, le troisiéme sera aussi connu; car ce troisiéme est le reste de deux droits.

Remarque.

Par cette Proposition nous pouvons déterminer à combien d'Angles droits sont égaux tous les Angles d'une Figure rectiligne. Car si de l'un des Angles
de

de cette Figure l'on tire à tous les autres Angles autant de Lignes droites qu'il eſt poſſible de former de Triangles : cette Figure ſera diviſée en pluſieurs Triangles, les Angles de chacun deſquels valant deux droits, l'on ſçaura la valeur des Angles de cette Figure, puis qu'ils ſont les mêmes que ceux de tous ces Triangles. Ainſi parce qu'une Figure de quatre Côtez ſe peut reſoudre en deux Triangles : il s'enſuit que ſes quatre Angles valent quatre Angles droits. Et parce qu'une Figure de cinq Côtez ſe peut reſoudre en trois Triangles, ſes cinq Angles valent ſix Angles droits &c. Et d'autant que toute Figure de pluſieurs Côtez ſe peut reſoudre en autant de Triangles qu'elle a de Côtez, moins deux : nous devons conclure que tous les Angles d'une Figure rectiligne ſont égaux à deux fois autant d'Angles droits qu'elle a de Côtez, moins deux. Ainſi les Angles d'un Decagone valent 16 Angles droits ; ceux d'un Dodecagone valent vingt Angles droits ; & ceux d'un Chiliagone, ou d'une Figure de mille Côtez, valent 1996 Angles droits.

PROPOSITION XXXIII.

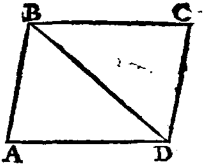
THEOREME XXIII.

Si deux Lignes droites ſont égales & paralleles, les Lignes droites qui joignent leurs extremitez de même part, ſont auſſi égales & paralleles.

JE ſuppoſe que les Lignes AD, BC, ſont égales & paralleles, & que leurs extremitez ſont jointes de même part par les Lignes droites AB, DC. Cela étant, je dis que ces Lignes AB, DC, ſont auſſi

auſſi égales & paralleles. Pour le prouver,

Du Point B au Point D tirez la Ligne droite BD. Cela poſé, puis que les Lignes droites A D, B C, ſont paralleles, & que la Ligne BD tombe deſſus : il s'enſuit (par la 29. Prop.) que les Angles ADB, & CBD, qui ſont oppoſez alternativement, ſont égaux entr'eux. Comparant enſuite les Triangles ABD, & CBD, le Côté AD eſt égal au Côté BC, par ſuppoſition ; le Côté BD eſt commun ; l'Angle ADB eſt égal à l'Angle CBD, comme il vient d'être prouvé. Partant la Baze AB eſt égale à la Baze CD, & l'Angle ABD égal à l'Angle CDB par la 4. Prop. Or ces deux Angles ABD, & CDB, ſont oppoſez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les Lignes AB, DC, ſont auſſi paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.

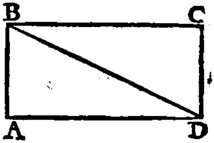


PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXIV.

En tout Parallelogramme les Côtez & les Angles oppoſez ſont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux également.

JE ſuppoſe que AC eſt un Parallelogramme, & que BD eſt la Diagonale. Cela étant, je dis que le Côté AB eſt égal à ſon oppoſé CD ; le Côté AD égal à ſon oppoſé BC ; que l'Angle A eſt égal à ſon oppoſé C ; & que l'Angle ABC eſt égal à ſon à son opposé ADC ; & enfin que le Triangle ADB est égal au Triangle CDB, & qu'ainsi la Diagonale coupe le Parallelogramme en deux également.



Car puis que les Lignes AB, CD, sont les Côtez opposez d'un même Parallelogramme, il s'ensuit qu'elles sont paralleles. Et par consequent la Ligne BD tombant dessus ; les Angles ABD, & BDC, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux, par la 29. Prop. Par la même raison, les deux Angles ADB, & CBD, qui sont opposez alternativement, sont aussi égaux entr'eux. Ainsi les deux Triangles ABD, BDC, out deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & le Côté BD, aux extremitez duquel sont les Angles égaux, est commun. Partant (par la 26. Prop.) les deux autres Côtez AB, AD, sont égaux aux deux autres Côtez CD, CB, chacun au sien, sçavoir AB à CD, & AD à CB ; l'Angle A est égal à l'Angle C ; & tout le Triangle ABD est égal à tout le Triangle CBD. Enfin puis que les deux Angles ABD, & CBD, ont été separément prouvez égaux aux deux Angles CDB, & ADB : il est évident que l'Angle total ABC est égal à l'Angle total ADC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

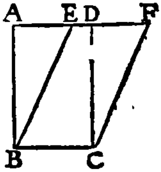
Il suit de cette Proposition, qu'en tout Parallelogramme, si un Angle est droit, les trois autres le sont aussi. Car puis que les deux Angles sur un même Côté sont égaux à deux droits : si l'un est droit, l'autre l'est aussi ; & par consequent aussi leurs opposez.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXV.

Les Parallelogrammes constituez sur une même Baze, & entre mêmes paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Parallelogrammes AC, BF, sont sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AF, BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

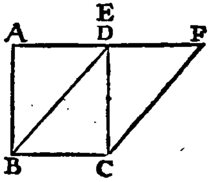


Cette supposition peut avoir trois cas. Car ou le Point E tombera entre A, & D; où il tombera sur le Point D; ou au delà du Point D.

Au premier cas, le Côté AD est égal au Côté BC, qui est son opposé dans le Parallelogramme AC. De même, le Côté EF est égal au même Côté BC, qui est aussi son opposé dans le Parallelogramme BF. Donc AD, & EF, sont égaux. Et si l'on en ôte la partie ED, qui leur est commune: les restes AE, DF, seront égaux entr'eux. De plus, dans le même Parallelogramme AC, le Côté AB est égal au Côté DC, qui est son opposé. Mais puis qu'ils sont paralleles, & que la Ligne AF tombe dessus: l'Angle exterieur CDF est égal à son opposé interieur BAE, par la 29. Prop. D'où il suit que les deux Triangles BAE, CDF, ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & l'Angle compris de ces Côtez égal à l'Angle; & partant

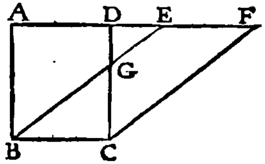
(par

(par la 4. Prop.) ces deux Triangles BAE, CDF, ſont égaux entr'eux. C'eſt pourquoi ſi on leur ajoûte à chacun le Trapéze EBCD : il s'enſuivra que le Triangle BAE avec ce Trapéze, ſera égal au Triangle CDF avec ce même Trapéze ; c'eſt à dire le Parallelogramme AC au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.



Au ſecond cas, où le Point E tombe ſur le Point D, on prouvera de même que le Côté AD eſt égal au Côté EF ; le Côté AB au Côté DC ; que l'Angle exterieur CDF eſt égal à ſon oppoſé interieur BAE ; & que le Triangle BAE eſt égal au Triangle CDF. C'eſt pourquoi ſi on leur ajoûte une choſe commune, à ſçavoir le Triangle EBC : il s'enſuivra que le Parallelogramme AC ſera égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

Au troiſiéme cas, on prouvera de même que AD eſt égal à EF ; & en leur ajoûtant la partie commune DE, la toute AE ſera égale à la toute DF. On prouvera auſſi que le Côté AB eſt égal au Côté DC ; que l'Angle exterieur CDF eſt égal à ſon oppoſé interieur A ; & que le Triangle BAE eſt égal au Triangle CDF. Donc ſi on ôte de ces deux Triangles, le Triangle commun DGE : le Trapéze ABGD reſtera égal au Trapéze EGCF. A quoi ſi l'on ajoûte le Triangle GBC, il s'enſuivra que le Trapéze ABGD avec ce Triangle, ſera égal au Trapéze EGCF avec ce même Triangle ; c'eſt à dire que le Parallelogramme AC ſera



égal

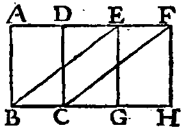
égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXVI.

Les Parallelogrammes constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Parallelogrammes AC, EH, sont constituez sur Bazés égales, sçavoir BC, GH, & entre mêmes Paralleles AF, BH. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

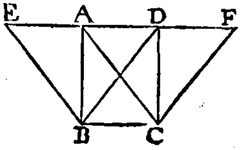


Menez du Point B au Point E la Ligne BE, & du Point C au Point F la Ligne CF. Cela posé, BC est égal à GH, par supposition ; EF est aussi égal à GH, étant les Côtez opposez d'un même Parallelogramme. Donc BC est égal à EF. D'ailleurs BC, EF, sont supposées paralleles. Donc (par la 33. Prop.) les Lignes droites BE, CF, qui joignent leurs extremitez, sont aussi égales & paralleles. Et par consequent la Figure BF est un Parallelogramme. Or ce Parallelogramme est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles, que le Parallelogramme AC. Donc (par la Prop. precedente) les deux Parallelogrammes AC, BF, sont égaux entr'eux. Mais ce même Parallelogramme BF, & le Parallelogramme EH, étant sur une même Baze, à sçavoir EF, & entre mêmes Paralleles, sont aussi égaux entr'eux. Et partant les Parallelogrammes AC, AC, EH, qui ſont égaux au Parallelogramme BF, ſont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXVII.

Les Triangles conſtituez ſur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, ſont égaux entr'eux.



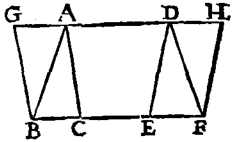
JE ſuppoſe que les Triangles ABC, DBC, ſont ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC. Cela étant, je dis que ces deux Triangles ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Menez par le Point B la Ligne droite BE parallele à AC, & par le Point C la Ligne droite CF parallele à BD, par la 31. Prop. Cela poſé, il s'enſuit que les Figures AB, DC, ſont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DC, ſont les Diagonales. Et partant (par la 34. Prop.) les Triangles ABC, DBC, en ſont les moitiez. Or les Parallelogrammes AB, DC, étant ſur une même Baze, à ſçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC, ſont égaux entr'eux, par la 35. Prop. Donc les Triangles ABC, DBC, qui en ſont les moitiez, ſont auſſi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME XXVIII.

Les Triangles constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.



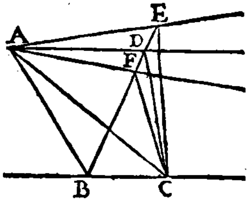
JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont sur Bazes égales, sçavoir BC, EF, & entre mêmes Paralleles, GH, BF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Menez par le point B la Ligne droite BG parallele à AC, & par le Point F la Ligne droite FH parallele à ED, par la 31. Prop. Cela posé, il s'ensuit que les Figures AB, DF, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DF, sont les Diagonales. Et partant (par la 34. Prop.) les Triangles ABC, DEF, en sont les moitiez. Or les Parallelogrammes AB, DF, étant sur des Bazes égales BC, EF, & entre mêmes Paralleles BF, GH, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. Donc les Triangles ABC, DEF, qui sont leurs moitiez, sont aussi égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIX.

THEOREME XXIX.

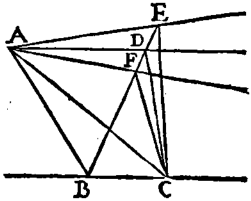
Les Triangles égaux constituez sur une même Baze & de même part, sont entre mêmes Paralleles.



JE suppose que les Triangles ABC, DBC, sont égaux ; qu'ils sont constituez sur une même Baze, à sçavoir BC ; & qu'ils sont de même part. Cela étant, je dis que ces Triangles sont entre mêmes Paralleles ; c'est à dire que si par le Point A, & le Point D, on méne la Ligne droite AD, cette Ligne sera parallele à BC. En voici la preuve :

Car si elle n'étoit pas parallele, on pourroit par le Point A mener une autre Ligne parallele à BC, par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de AD. Pensons donc premierement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait ici AE. Puis prolongez la Ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AE au Point E, & tirez la Ligne CE. Cela posé, les deux Triangles ABC, EBC, étant sur une même Baze & entre mêmes Paralleles, seroient égaux entr'eux, par la 37. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DBC est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle EBC seroit égal au Triangle DBC, qui n'est que sa partie ; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'une Ligne menée par le Point A parallele à la Ligne BC, passe au dessus de la Ligne AD.

Pensons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait ici AF, & menez la Ligne droite CF. Cela posé, le Triangle FBC seroit égal au Triangle ABC, par la 37. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DBC est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle FBC seroit égal au Triangle DBC, c'est à dire, la parpie au Tout; ce qui est impossible. Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD; ni au dessus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD est parallele à BC; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XL.

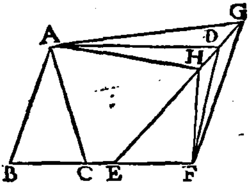
THEOREME XXX.

Les Triangles égaux constituez sur Bazes égales, & de même part, sont entre mêmes paralleles.

JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont égaux; qu'ils sont constituez sur Bazes égales, à sçavoir BC, EF; & qu'ils sont de même part. Cela étant, je dis qu'ils sont entre mêmes paralleles; c'est à dire que si par le Point A, & par le Point D, on méne la Ligne droite AD, cette Ligne sera parallele à BF. En voici la preuve:

Car

Car ſi elle n'étoit parallele, on pourroit par le Point A mener une autre Ligne parallele à BF, par la 31. Prop. & cette Ligne paſſeroit ou au deſſus ou au deſſous de AD. Penſons donc premierement qu'elle paſſe au deſſus, s'il eſt poſſible, comme fait ici AG. Puis prolongez la Ligne ED, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AG au Point G, & menez la Ligne FG. Cela poſé, les deux Triangles ABC, GEF, étant ſur Bazes égales BC, EF, & entre mêmes Paralleles, ſeroient égaux entr'eux, par la 38. Prop. Mais par la ſuppoſition, le Triangle DEF eſt égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle GEF



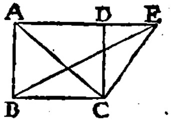
ſeroit égal au Triangle DEF, qui n'eſt que ſa partie; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible qu'une Ligne menée par le Point A parallele à BF, paſſe au deſſus de AD.

Penſons maintenant que cette Parallele paſſe au deſſous de AD, comme fait ici AH, & menez la Ligne droite FH. Cela poſé, le Triangle HEF ſeroit égal au Triangle ABC, par la 38. Prop. Mais par la ſuppoſition, le Triangle DEF eſt égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle HEF ſeroit égal au Triangle DEF, c'eſt à dire la partie au Tout; ce qui eſt impoſſible. Cette Parallele ne peut donc pas paſſer au deſſous de AD; ni au deſſus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD eſt parallele à BF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLI.

THEOREME XXXI.

Si un Parallelogramme & un Triangle sont constituez sur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme sera double du Triangle.



JE suppose que le Parallelogramme AC, & le Triangle EBC, soient constituez sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC. Cela étant, je dis que le Parallelogramme est double du Triangle. Pour le prouver,

Menez la Diagonale AC. Cela posé, puis que les Triangles ABC, EBC, sont sur la même Baze BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC, ils sont égaux, par la 37. Prop. Or le Triangle ABC est moitié du Parallelogramme AC, d'autant que la Diagonale AC le coupe en deux également, par la 34. Prop. Donc le Triangle EBC est aussi moitié du Parallelogramme AC. Et par consequent le Parallelogramme AC est double du Triangle EBC; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

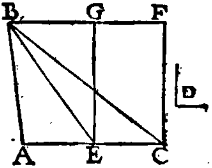
Par là il est aussi évident que si un Parallelogramme & un Triangle étoient constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme seroit double du Triangle.

PRO-

PROPOSITION XLII.

PROBLEME XI.

Décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE ſuppoſe que l'on donne le Triangle ABC, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propoſe de décrire un Parallelogramme égal au Triangle ABC, & qui ait un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Coupez l'un des Côtez de ce Triangle, par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point tirez (par la 23. Prop.) la Ligne EG, qui faſſe avec EC l'Angle CEG égal à l'Angle donné D. Tirez auſſi (par la 31. Prop.) du Point G la Ligne CF parallele à EG. Enfin menez par le Point B la Ligne BF parallele à AC. Cela poſé, je dis que la Figure EF eſt un Parallelogramme; que ce Parallelogramme eſt égal au Triangle ABC; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,

Puis que CF eſt parallele à EG, & que GF eſt parallele à EC, il eſt évident que la Figure EF eſt un Parallelogramme, qui a l'Angle CEG égal à l'Angle donné D, par la conſtruction; ſi bien qu'il reſte ſeulement à prouver qu'il eſt égal au Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point B au Point E menez la Ligne droite BE. Cela poſé: puis que les Triangles BAE, BEC, sont sur des Bazes égales, AE, EC, & entre mêmes Paralleles, BF, AC, ils sont égaux entr'eux, par la 38. Prop. Par consequent le Triangle ABC, qui est composé de ces deux Triangles, est double du Triangle BEC. Mais le Parallelogramme EF est aussi double de ce même Triangle BEC, par la Prop. précedente, puis qu'il est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles. Donc le Triangle ABC, & le Parallelogramme EF, qui sont doubles d'une même chose, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

REMARQUE.

La pratique de cette Proposition consiste seulement à faire un Parallelogramme sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles. C'est pourquoi nous pouvons établir comme une verité Geometrique, que tout Parallelogramme constitué sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles, est égal à ce Triangle,

PROPOSITION XLIII.

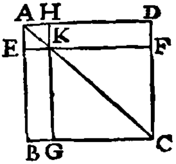
THEOREME XXXII.

En tout Parallelogramme, les Supplemens des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre sont égaux entr'eux.

JE suppose que la Figure AC est un Parallelogramme, dont le Diametre est AC, alentour duquel sont les Parallelogrammes AK, KC. Cela étant, je dis que les Supplemens KB, KD, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Puis

Puis que (par la 34. Prop.) le Diametre AC coupe le Parallelogramme AC en deux également, le Triangle ABC est égal au Triangle ACD. De même, les Parallelogrammes AK, KC, étant coupez en deux également par leurs Diametres AK, KC, le Triangle AEK est égal au Triangle AKH, & le Triangle KGC égal au Triangle KCF. Si donc des Triangles ABC, ACD, qui sont égaux, nous ôtons choses égales, sçavoir, du Triangle ABC les deux Triangles AEK, KGC, & du Triangle ACD les deux Triangles AKH, KCF: les restes, qui sont les Supplemens KB, KD, seront égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

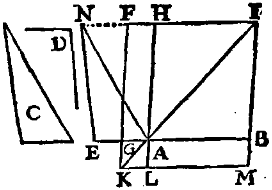


PROPOSITION XLIV.

PROBLEME XII.

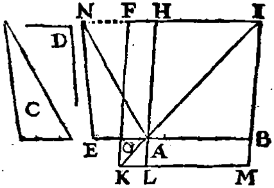
Sur une Ligne droite donnée décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.

JE suppose qu'on donne la Ligne droite AB, le Triangle C, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propose de décrire sur AB un Parallelogramme égal au Triangle C, & qui ait un An-



Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Prolongez AB vers E ; & aprés avoir fait AE égale à un des Côtez du Triangle C, achevez (par la 22. Prop.) de décrire le Triangle AEN égal au Triangle C. Puis (par la 42. Prop.) décrivez le Parallelogramme AF égal au Triangle AEN, & qui ait l'Angle HAG égal à l'Angle D. Prolongez aprés cela FG, & HA, indefiniment vers K, & vers L. Prolongez de même FH indefiniment vers I ; & ayant mené par le Point B la Ligne IBM parallele à FG, (par la 31. Prop.) tirez du Point I, où les Lignes IBM, & FHI, se rencontrent, la Ligne droite IAK, si longue, qu'elle rencontre la Ligne FGK au Point K. Enfin menez par le Point K la Ligne droite KLM parallele à AB, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure AM, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Parallelogramme ; que ce Parallelogramme est égal au Triangle donné C ; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,



Puis que les Lignes AB, LM, & les Lignes AL, BM, sont paralleles, par la construction : il s'ensuit que AM est un Parallelogramme. Et puis que FI, KM, sont paralleles à AB, elles sont paralleles entr'elles par la 30. Prop. De plus, les Lignes IBM, FGK, ayant aussi été faites paralleles, il est évident que la Figure FM est un Parallelogramme ; dans lequel les Parallelogrammes AM, AF, étant les Supplemens des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, il s'ensuit qu'ils sont égaux entr'eux, par la 43. Prop. Or, par la construction, AF est égal au Triangle AEN. Donc AM est aussi égal au Triangle AEN. Mais ce Triangle a été fait

égal

égal au Triangle C. D'où il suit que le Parallelogramme AM est aussi égal au Triangle C. D'ailleurs, (par la 15. Prop.) l'Angle LAB est égal à l'Angle HAG, qui a été fait égal à l'Angle D. Et partant l'Angle LAB est aussi égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

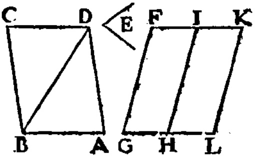
PROPOSITION XLV.

PROBLEME XIII.

Décrire un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.

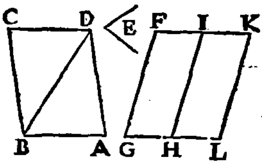
JE suppose qu'on donne la Figure rectiligne ABCD, & l'Angle rectiligne E. Cela étant, je propose de décrire un Parallelogramme égal à la Figure ABCD, qui ait un Angle égal à l'Angle E. Pour le faire,

Menez la Ligne droite BD, afin de resoudre la Figure ABCD en deux Triangles. Puis, (par la 42. Prop.) décrivez le Parallelogramme IG égal à l'un des Triangles, par exemple à ABD, & qui ait



l'Angle FGH égal à l'Angle E. Ensuite (par la 44. Prop.) décrivez sur la Ligne HI le Parallelogramme IL égal au second Triangle BCD, & qui ait aussi l'Angle IHL égal à l'Angle E. Cela posé, je dis que la Figure FL, composée de ces deux Parallelogrammes, est un Parallelogramme égal à la Figure ABCD; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné E. Pour le prouver, Les Parallelogrammes qui ſont les parties de la Figure FL, étant égaux aux Triangles qui ſont les parties de la Figure ABCD, il eſt évident que la Figure FL eſt égale la Figure ABCD. Deplus, la Figure FL a l'Angle FGL égal à l'Angle donné E. Il ne reſte donc plus qu'à prouver que les deux Parallelogrammes IG, IL, compoſent enſemble un ſeul Parallelogramme. Pour le prouver,

Les deux Côtez FG, KL, ſont égaux & paralleles, étant égaux & paralleles à IH. Suppoſé donc que FK, & GL, ſcient des Lignes droites, elles ſeront auſſi égales & paralleles entr'elles, par la 33. Prop. puis qu'elles joignent des Lignes droites égales & paralleles. Or je prouve que les Lignes FK, & GL, ſont des Lignes droites. Premierement, l'Angle G, & l'Angle IHL, ſont égaux entr'eux, par la conſtruction. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun GHI, les deux Angles G, & GHI, ſeront



égaux aux deux Angles qui ont le Point H pour ſommet. Mais les deux Angles G, & GHI, ſont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Donc les deux Angles qui ont le Point H pour ſommet, ſont égaux à deux droits. Et partant les Lignes GH, & LH, qui concourent à un même Point, font une Ligne droite. De même, l'Angle K, & l'Angle FIH, ſont égaux entr'eux, puis qu'ils ſont oppoſez aux Angles IHL, & G, qui ſont égaux entr'eux. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun HIK, les deux Angles K, & HIK, ſeront égaux aux deux Angles qui ont le Point I pour ſommet. Mais les deux Angles K, & HIK, ſont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Par conſequent les deux Angles qui ont le Point I pour ſommet, ſont égaux à deux droits; & partant les Lignes FI, &

KI,

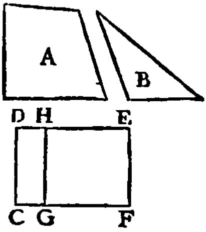
KI, qui concourent à un même Point, font une Ligne droite. D'où il ſuit que FL eſt un Parallelogramme; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. Remarque.

Si la Figure donnée eût eu plus de quatre Côtez, il auroit fallu la diviſer en tous les Triangles dont elle auroit pû être compoſée. Puis, aprés avoir fait (comme il vient d'être dit) le Parallelogramme FGLK égal à deux de ces Triangles: il auroit encore fallu décrire ſur LK un Parallelogramme égal à un autre Triangle, & ayant un Angle au Point K égal à l'Angle donné E; & ainſi continuer autant de fois de ſuite qu'il y auroit eu de Triangles.

II. Remarque.

Enſuite de la Propoſition précedente, ſi deux Figures rectilignes inégales ſont données, l'on pourra trouver l'excez de la plus grande pardeſſus la plus petite. Par exemple, ſi les Figures A, & B, ſont données, entre leſquelles A eſt plus grande que B: il n'y aura qu'à décrire le Parallelogramme CE égal à la Figure A; puis décrire ſur le Côté CD le Parallelogramme CH égal à la Figure B. Car alors il eſt évident que le Parallelogramme GE ſera l'excez de la Figure A pardeſſus la Figure B.



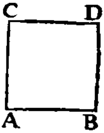
PROPOSITION XLVI.

PROBLEME XIV.

Sur une Ligne droite donnée décrire un Quarré.

JE suppose que la Ligne droite donnée soit AB, & je propose de décrire sur cette Ligne un Quarré. Pour le faire,

Elevez au Point A la Ligne droite AC perpendiculaire à AB, par la 11. Prop. & faites AC égale à AB. Puis menez par le Point C la Ligne CD parallele à AB, & par le Point B la Ligne BD parallele à AC, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure ACDB, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Quarré. Pour le prouver,



Puis que ACDB est une Figure de quatre Côtez, dont les opposez ont été faits paralleles, il s'ensuit que c'est un Parallelogramme. Et par consequent ses Côtez opposez sont égaux, par la 34. Prop. Ainsi CD est égal à AB. Mais AC est aussi égal à AB, par la construction. Donc CD est aussi égal à AC. De même, BD est égal à AC; & partant BD est aussi égal aux deux autres Côtez AB, CD. D'où il suit que le Parallelogramme AD a ses quatre Côtez égaux. D'ailleurs, puis que les Lignes AB, CD, sont paralleles, & que AC tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les deux Angles interieurs A, & C, sont égaux à deux droits. Or l'Angle A est droit, par la construction. Donc l'Angle C est aussi droit. Et parce qu'en tout Parallelogramme les Angles opposez sont égaux, les Angles B, & D, qui sont opposez à des Angles droits,

droits, ſont auſſi droits. Et par conſequent le Parallelogramme AD eſt un Quarré ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. REMARQUE.

Il s'enſuit de là, que tout Parallelogramme, qui a deux Côtez égaux alentour d'un Angle droit, eſt un Quarré.

II. REMARQUE.

Il ſuit auſſi de là, qu'en tout Parallelogramme, un Angle étant droit, les trois autres le ſont auſſi.

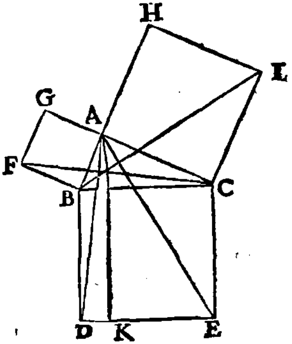
III. REMARQUE.

Comme les Grandeurs qui conviennent ſont égales entr'elles, il ſuit auſſi aſſez évidemment, que ſi deux Lignes ſont égales, leurs Quarrez ſeront auſſi égaux ; & que ſi deux Quarrez ſont égaux, les Lignes ſur leſquelles ils ſont décrits, ſeront auſſi égales.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME XXXIII.

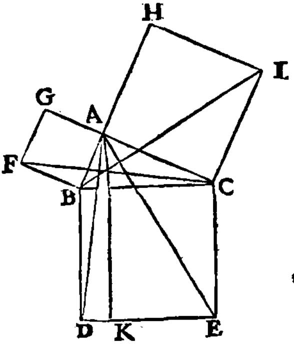
Aux Triangles Rectangles, le Quarré du Côté qui soûtient l'Angle droit, est égal aux Quarrez des deux autres Côtez.



JE suppose que le Triangle ABC est Rectangle; que l'Angle BAC est droit; & que sur ses trois Côtez on ait décrit les trois Quarrez BE, FA, AI. Cela étant, je dis que le Quarré BE, décrit sur le Côté BC qui soûtient l'Angle droit BAC, est égal aux deux autres Quarrez FA, AI, décrits sur les deux autres Côtez AB, AC. Pour le prouver,

Menez par le Point A la Ligne droite AK parallele à BD, ou à CE; & menez les Lignes droites AD, AE, CF, BI. Cela posé: puis que l'Angle BAC est droit, par supposition, & que l'Angle BAG, qui est un des Angles du Quarré FA, est aussi droit: il s'ensuit (par la 14. Prop.) que les Lignes GA, AC, concourent directement. De même, puis que l'Angle CAB est droit, & que l'Angle CAH du Quarré AI, est aussi droit: il s'ensuit s'ensuit aussi que les Lignes BA, AH, concourent directement. Maintenant, puis que les Lignes BF, GC, qui sont les Côtez opposez du Parallelogramme ou du Quatré FA, sont paralleles, il s'ensuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme FA est double du Triangle FBC, puis qu'ils sont constituez sur une même Baze FB, & entre mêmes Paralleles FB, GC. De même, puis que les Lignes AK, BD, sont paralleles, par la construction, il s'ensuit que le Parallelogramme BK est double du Triangle ABD, étant tous-deux constituez sur la même Baze BD, & entre mêmes Paralleles BD, AK. Comparant maintenant le Triangle CBF avec le Triangle ABD, le Côté CB du premier, est égal au Côté BD du second, puis que ce sont les Côtez d'un même Quarré BE. Par la même raison, le Côté BF du premier, est égal au Côté AB du second. Si bien que ces deux Triangles ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien. De plus, l'Angle CBF, composé d'un Angle droit & de l'Angle ABC, est égal à l'Angle ABD, qui est aussi composé d'un Angle droit & du même Angle ABC. Donc (par la 4. Prop.) le Triangle CBF est égal au Triangle ABD. Et ainsi le Parallelogramme BK, & le Quarré FA, qui sont doubles de choses égales, sont égaux entr'eux, par le 6. Ax. De même, puis que les Lignes IC, HB, qui sont les Côtez opposez du Parallelogramme ou du Quarré AI, sont paralleles: il s'ensuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme AI est double du Triangle ICB. De même, puis que les Lignes AK, CE, sont paralleles, par la construction: il s'ensuit que le Parallelogramme CK est double du Triangle ACE, puis qu'ils sont constituez sur une même Baze CE, & entre mêmes Paralleles CE, AK. Comparant maintenant le Triangle BCI avec le Triangle ACE, le Côté CI du premier, est égal au Côté AC du second,

ſecond, puis que ce ſont les Côtez d'un même Quarré AI. Par la même raiſon, le Côté CB du premier, eſt égal au Côté CE du ſecond. Deplus, l'Angle ICB, compris des deux Côtez du premier Triangle, eſt égal à l'Angle ACE, compris des deux Côtez du ſecond, chacun de ces Angles étant compoſé d'un Angle droit & de l'Angle ACB. Donc (par la 4. Prop.) le Triangle ICB eſt égal au Triangle ACE. Et par conſequent le Parallelogramme CK, & le Quarré AI, qui ſont doubles de choſes égales, ſont égaux entr'eux.

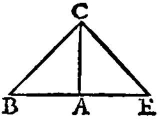


Mais il a déja été prouvé auparavant, que le Parallelogramme BK eſt égal au Quarré FA. Donc le Quarré BE, qui convient avec les deux Parallelogrammes BK, CK, ou plûtôt qui eſt la même choſe, eſt égal aux deux Quarrez FA, AI, pris enſemble; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME XXXIV.

Si le Quarré de l'un des Côtez d'un Triangle est égal aux Quarrez des deux autres Côtez, l'Angle compris de ces deux autres Côtez est droit.



JE suppose qu'au Triangle ABC le Quarré du Côté BC soit égal aux Quarrez des deux autres Côtez AB, AC. Cela étant, je dis que l'Angle CAB, compris des deux Côtez AB, AC, est droit. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AC, & faites cette Ligne AE égale à AB; puis tirez la Ligne droite CE. Cela posé:

Puis que le Triangle ACE est Rectangle, il s'ensuit, par la Proposition precedente, que le Quarré du Côté CE, qui soûtient l'Angle droit CAE, est égal aux deux Quarrez de CA, & de AE, ou de AB son égal. Mais par la supposition, le Quarré du Côté BC est aussi égal aux deux Quarrez de CA, & de AB. Donc le Quarré de BC & le Quarré de CE sont égaux entr'eux, par le premier Ax. Et partant les Lignes BC, CE, qui sont leurs Côtez, sont égales entr'elles, par la troisiéme Remarque de la 46. Prop. Comparant maintenant le Triangle ABC avec le Triangle ACE: le Côté AB est égal au Côté AE; le Côté AC est commun aux deux Triangles; de plus, la Baze BC vient d'être prouvée égale à la Baze CE. Donc (par la 8. Prop.)

Prop.) l'Angle CAB est égal à l'Angle CAE. Mais l'Angle CAE est droit, par la construction. Donc l'Angle CAB, est aussi droit; Ce qu'il falloit démontrer.

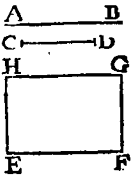
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

DEFINITIONS.

I. Le Rectangle de deux Lignes droites, est un Parallelogramme, dont les deux Côtez alentour de l'un de ses Angles, sont égaux à ces deux Lignes droites.

Ainsi le Rectangle des deux Lignes droites AB, CD, est le Rectangle EG, qui a l'un de ses Côtez, sçavoir EF, égal à AB; & l'autre, sçavoir EH, égal à CD.



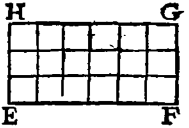
Et ainsi, tout Parallelogramme Rectangle est compris de deux Lignes droites, qui font l'Angle droit.

REMARQUE.

Pour mesurer la quantité de la surface d'un Rectangle, il faut se servir d'une petite mesure connuë, telle qu'on voudra ; par exemple, d'une Toise quarrée, d'un Pied quarré, d'un Pouce quarré ; & voir combien de ces Toises, de ces Pieds, ou de ces Pouces quarrez, contient ce Rectangle.

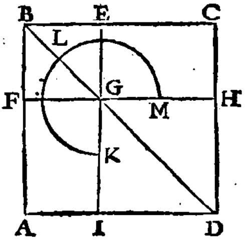
Ainsi, pour trouver la mesure ou la quantité de la surface du Rectangle EG, il faut diviser chacun de ses Côtez en Toises, en Pieds, ou en Pouces, & multiplier l'un par l'autre ; & le produit vous donnera ce que vous cherchez.

Par exemple, posé que le Côté EF contienne six Toises, & le Côté EH en contienne trois : multipliant l'un par l'autre, cela fait 18 Toises quarrées, qui est la mesure de la surface de ce Rectangle.



Et si le Rectangle dont on veut sçavoir la mesure, est un Quarré : il faut sçavoir combien un de ses Côtez contient de Toises, de Pieds, ou de Pouces, & le multiplier par lui-même ; & le produit vous en donnera la mesure

II. Un Gnomon, est une partie d'un Parallelogramme composée d'un des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & des deux Supplemens.



Ainsi dans le Quarré ABCD, le Quarré FE, avec les deux Supplemens AG, GC, est un Gnomon.

Et

Et pour le désigner, on décrit une portion de Cercle, semblable à KLM, que l'on fait passer par ce Quarré, & par ces deux Supplemens, & que l'on marque avec trois lettres, comme est ici marqué le Gnomon KLM.

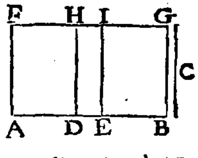
PROPOSITION I.

THEOREME I.

Si de deux Lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra: les Rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au Rectangle des deux toutes.

JE suppose que des deux Lignes AB, & C, la premiere AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple, aux points D, & E. Cela étant, je dis, que les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des parties de la coupée, sçavoir AD, DE, EB, pris ensemble, sont égaux au Rectangle des deux toutes AB, & C. Pour le prouver,

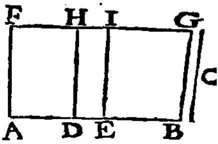
Elevez au Point A la Ligne droite AF perpendiculaire à AB, par la 11. du 1. & égale à C, par la 2. du 1. Puis, par les Points F, & B, menez les Lignes FG, BG, paralleles à AB, & à AF, par la 31. du 1. Elevez aux Points D, & E,



les Lignes droites DH, EI, perpendiculaires à AB, qui

qui seront aussi paralleles à AF. Cela posé :

Puisque AF est égale à C, il est évident que Parallelogramme AG est le Rectangle des de toutes AB, & C. Il est d'ailleurs évident que Rectangle AH est compris de la non-coupée C ou de son égale AF, & de AD, qui est la premie re partie de la coupée AB. De plus, les Lignes DH, & EI, étant égales à AF, par la 34. du 1. ou à C son égale : les Parallelogrammes DI, EG, sont les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des autres parties de la coupée AB. Or tous ces Rectangles AH, DI, EG, conviennent avec le Rectangle AG. Donc ils lui sont égaux, par le 8. Axiome ; Ce qu'il falloit démontrer.



REMARQUE.

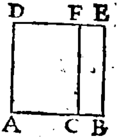
Pour verifier cecy en nombres: Prenez par exemple les deux nombres 10 & 6. Divisez 10 en trois parties, telles qu'il vous plaira, comme 5, 3, & 2. Multipliez 10 par 6: il viendra 60, qui sera le Rectangle des deux nombres entiers. Aprés cela multipliez aussi 5, 3, & 2, par 6: & il viendra 30, 18, & 12, qui seront les Rectangles du nombre entier 6, & de chacune des parties du nombre 10. Enfin ajoûtez les trois Rectangles 30, 18, & 12: & la somme sera 60, qui est égale au Rectangle compris des deux nombres entiers 10 & 6.

PRO-

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : les Rectangles compris de la toute & de chacune de ses parties, sont égaux au Quarré de la toute.



Je suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple, au Point C. Et je dis que les Rectangles compris de la toute AB, & de chacune de ses parties AC, CB, pris ensemble, sont égaux au Quarré de AB. Pour le prouver,

Décrivez sur AB le Quarré AE, par la 46. du 1. & élevez au Point C la Ligne CF perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AD, ou à BE. Cela posé :

Puisque AD est égale à AB, le Parallelogramme AF est le Rectangle compris de la toute AB, & de la partie AC. De même, CF étant égale à AD, ou à son égale AB, le Parallelogramme CE est le Rectangle compris de la toute AB, & de son autre partie CB. Or les Rectangles AF, CE, conviennent avec le Quarré AE, qui a été fait sur la toute AB. Donc ces Rectangles sont égaux à ce Quarré ; Ce qu il falloit démontrer.

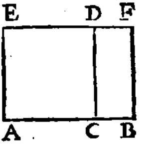
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 10, & le divisez en deux parties, comme 7, & 3. Cela étant: le Rectangle du nombre entier 10 & de sa partie 7, est 70. Le Rectangle du même nombre 10 & de son autre partie 3, est 30; ajoûtez ces deux nombres, cela fait 100. Lequel nombre est égal au Quarré de 10.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra: le Rectangle de la toute, & de l'une de ses parties, est égal au Rectangle des deux parties, & au Quarré de la partie premierement prise.



Je suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point C. Cela étant, je dis que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ses parties, par exemple AC, est égal au Rectangle des deux parties AC, CB, & au Quarré de la partie AC, qui avoit été premierement prise. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez par le Point E la Ligne EF parallele à AB; & par le Point B la Ligne BF parallele à AE; & au Point C élevez la Ligne CD perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AE, ou à BF. Cela posé:

Puisque AE est égale à AC, il s'ensuit que AD est le Quarré de AC, par la 1. Remarque de la 46. du du 1. Et puisque CD est égale à AE, ou à AC, son égale, il s'ensuit que CF est le Rectangle des deux parties AC, CB. Or le Quarré AD, & le Rectangle CF, conviennent avec AF, qui est le Rectangle de la toute AB, & de la partie AC. Donc le Rectangle AF est égal au Rectangle CF, & au Quarré AD; Ce qu'il falloit démontrer.

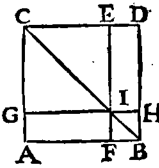
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10; divisez-le en deux parties, comme 7 & 3. Cela étant, le Rectangle des deux parties 7 & 3, est 21. Le Quarré de la premiere partie 7, est 49. Ajoûtez ces deux nombres, cela fait 70. Lequel nombre est égal au Rectangle du nombre entier 10, & de sa premiere partie 7.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

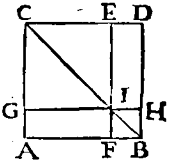
Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra: le Quarré de la toute est égal aux deux Quarrez des parties, & à deux Rectangles faits des deux parties.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB est égal aux deux Quarrez des parties AF, FB, & à deux Rectangles faits de ces deux

 par-

parties. Pour le prouver,



Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AD. Menez la Diagonale CB. Elevez au Point F la Ligne FE perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AC, & à BD. Et par le Point I, où la Ligne FE coupe la Diagonale CB, menez la Ligne droite GIH parallele à AB. Cela posé:

Puisque les Lignes AC, AB, qui sont les Côtez du Quarré AD, sont égales, il s'ensuit (par la 5. Prop. du 1.) que le Triangle ABC a les Angles ABC & ACB, sur la Baze BC, égaux entr'eux. D'ailleurs, les Lignes GH & AB étant paralleles, & la Ligne CIB tombant dessus, l'Angle exterieur GIC est égal à son opposé interieur ABC, par la 29. du 1. Or l'Angle ACB est égal à l'Angle ABC. Donc l'Angle ACB, ou GCI, est égal à l'Angle GIC. Et par consequent dans le Triangle CGI les Côtez CG, GI, qui soûtiennent ces deux Angles, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1.

D'ailleurs, puisque dans le Parallelogramme GE, l'Angle GCE est droit, étant un des Angles du Quarré AD: il s'ensuit (par la 2. Remarque de la 46. Prop. du 1.) que ce Parallelogramme GE a ses quatre Angles droits. Et puisque les deux Côtez CG, GI, qui sont alentour d'un de ces Angles droits, sont égaux entr'eux: il s'ensuit (par la 1. Remarque de la même Prop.) que ce Parallelogramme GE est le Quarré de GI, ou de son égale AF. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BIC tombe dessus: l'Angle exterieur FIB est égal à son opposé interieur ACB. Mais l'Angle ABC est égal à ACB. Donc l'Angle ABC, ou FBI, est égal à l'Angle FIB. Et par consequent dans le Triangle BFI les deux Côtez FI, FB, qui les soûtiennent, sont aussi

égaux

égaux entr'eux. D'où il ſuit que le Parallelogramme FH, qui a deux Côtez égaux alentour de l'Angle droit IFB, eſt le Quarré de la partie FB. Deplus, AI, ID, ſont deux Parallelogrammes Rectangles, puiſque leurs Côtez oppoſez ſont paralleles, & que les Angles A, & D, étant droits, tous les autres le ſont auſſi. Or AI eſt le Rectangle de AF, FI, ou bien de AF, FB; & ID eſt le Rectangle de DH, HI, ou de leurs égales AF, FB. Mais ces deux Rectangles AI, ID, avec les deux Quarrez GE, FH, conviennent avec le Quarré AD. Donc ce Quarré leur eſt égal; Ce qu'il falloit démontrer.

I. REMARQUE.

Il ſuit de cette Propoſition, que quand deux Lignes droites paralleles aux Côtez d'un Quarré, coupent la Diagonale de ce Quarré en un même Point: les Parallelogrammes qui ſe font alentour du Diametre ſont des Quarrez.

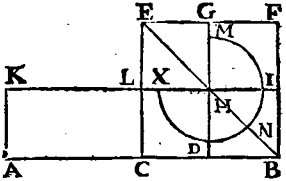
II. REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10, & le diviſez en deux parties comme 7 & 3. Cela étant, le Quarré de 7 eſt 49; le Quarré de 3 eſt 9; le Rectangle des deux parties 7 & 3, eſt 21. Ce même Rectangle pris encore une fois eſt encore 21. Ajoûtez ces deux Quarrez & ces deux Rectangles, cela fait 100. Lequel nombre eſt égal au Quarré du nombre entier 10.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales: le Rectangle compris des deux parties inégales, avec le Quarré de la partie du milieu, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute.



JE suppose que la Ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D. Cela étant, je dis que le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB, avec le Quarré de la partie du milieu CD, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute CB. Pour le prouver,

Décrivez sur CB le Quarré CF; tirez la Diagonale BE; élevez au Point D la Ligne DG perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à BF, & à CE. Puis par le Point H, où la Ligne DG coupe la Diagonale, menez la Ligne droite IHK parallele à BA. Enfin menez par le Point A la Ligne AK parallele à CE. Cela posé:

Il suit de la 1. Remarque sur la Proposition précedente, que LG est un Quarré, à sçavoir, celui de LH, ou de son égale CD. Par la même me raiſon, DI eſt auſſi un Quarré; & partant DH eſt égale à DB. Par conſequent le Rectangle AH eſt le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB. De ſorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Rectangle AH avec le Quarré LG, ſont égaux au Quarré CF. Pour le prouver,

Les Rectangles CH, HF, ſont égaux entr'eux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoûte le Quarré DI, les Rectangles CI, DF, ſeront auſſi égaux entr'eux. Mais le Rectangle AL eſt égal à CI, par la 36. Prop. du 1. Donc il eſt auſſi égal à DF. Maintenant, ſi à ces deux choſes égales on ajoûte le Rectangle CH: le Rectangle AH ſera égal au Gnomon MNX. Et ſi l'on ajoûte à ce Rectangle & à ce Gnomon le Quarré LG: le Rectangle AH & le Quarré LG, pris enſemble, ſeront égaux au Gnomon MNX & au Quarré LG, pris auſſi enſemble. Or ce Gnomon & ce Quarré compoſent le Quarré CF. Donc le Rectangle AH, avec le Quarré LG, ſont égaux au Quarré CF; Ce qu'il falloit démontrer.

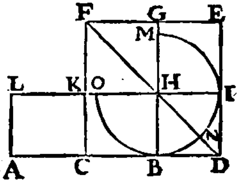
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 20. Diviſez ce nombre en deux parties égales 10 & 10; & en deux inégales 17 & 3. Cela étant, le nombre du milieu ſera 7. Multipliez maintenant 17 par 3; le Produit eſt 51. Quarrez le nombre 7, vous aurez 49. Ces deux nombres joints enſemble font 100; qui eſt le Quarré de 10, ou de la moitié de 20.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoûte directement une autre Ligne droite: le Rectangle compris de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une seule Ligne, & de l'ajoûtée, avec le Quarré de la moitié de la toute, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une seule Ligne.



Je suppose que la Ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & qu'on lui ajoûte directement la Ligne BD. Cela étant, je dis que le Rectangle compris de AD, BD, avec le Quarré de CB, sont égaux au Quarré de CD. Pour le prouver,

Décrivez sur la Ligne CD le Quarré CE; tirez la Diagonale DF; élevez au Point B la Ligne BG perpendiculaire à AD, qui sera aussi parallele à DE, & à CF. Puis, par le Point H, où la Ligne BG coupe la Diagonale, menez la Ligne IHL parallele à AD. Enfin menez par le Point A la Ligne AL parallele à CF. Cela posé:

Puisque

Puisque, par la premiere Remarque de la 4. Prop. BI est un Quarré: DI est égale à BD, & ainsi le Rectangle AI est le Rectangle compris de AD, BD.

Par la même Remarque, KG est aussi un Quarré, & le Quarré de KH, ou de son égale CB. Desorte qu'il ne s'agit plus que de montrer que le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sont égaux au Quarré CE. Pour le prouver,

Les Rectangles AK & CH, qui sont constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr eux, par la 36. Prop. du 1. Mais les Rectangles HE & CH sont aussi égaux entr'eux, par la 43. Prop. du 1. Et ainsi le Rectangle AK & le Rectangle EH, qui sont égaux à un même Rectangle, sont égaux entr'eux. Si donc on leur ajoûte le Rectangle CI: le Rectangle AI sera égal au Gnomon MNO. Maintenant, si on ajoûte à ce Rectangle & à ce Gnomon le Quarré KG: le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sera égal au Gnomon MNO, avec ce même Quarré KG. Or ce Gnomon & ce Quarré composent le Quarré CE. Donc le Rectangle AI & le Quarré KG sont égaux au Quarré CE; Ce qu'il falloit démontrer.

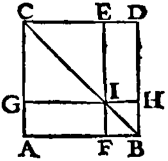
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10. Divisez ce nombre en deux parties égales 5 & 5. Ajoûtez 3 à 10, cela fera 13. Cela étant, le Rectangle de 13 & de 3, est 39. Le Quarré de la moitié 5 est 25. Or 39 & 25 font 64; qui est aussi la valeur du Quarré du nombre 8, composé de la moitié 5, & du nombre ajoûté 3.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra: le Quarré de la toute, & le Quarré de l'une de ses parties, sont égaux au Quarré de l'autre partie, & à deux Rectangles faits de la toute & de la partie premierement prise.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB, & le Quarré de l'une de ses parties, par exemple de AF, sont égaux au Quarré de l'autre partie FB, & à deux Rectangles faits de la toute AB & de la partie AF, qui avoit été premierement prise. Pour le prouver,

Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AD; menez la Diagonale BC; élevez au Point F la Ligne FE perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AC & à BD. Puis, par le Point I, où la Ligne FE coupe la Diagonale, menez la Ligne GIH parallele à AB. Cela posé:

Puisque AD est un Quarré, AC est égale à AB; & par consequent le Rectangle AE est compris de la toute AB, & de sa partie AF. D'ailleurs, puisque FH & GE sont des Quarrez, par la premiere Remarque de la 4. Prop. le Rectangle GD compris de CD, qui est égale à AB, & de CG, qui est égale

égale à GI, ou à AF, est aussi compris de AB, & de AF. De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Quarré AD, & le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD. Pour le prouver,

Le Quarré AD est déja égal au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, ID, pris ensemble, par le 8. Ax. Si donc on leur ajoûte le Quarré commun GE: il s'ensuivra que le Quarré AD, & le Quarré GE, seront égaux au Quarré FH, au Rectangle AE, au Rectangle ID, & au Quarré GE. Mais le Rectangle ID, & le Quarré GE, composent ensemble le Rectangle GD. Et partant le Quarré AD, &le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

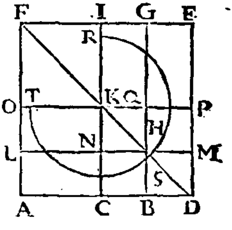
Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10; & le divisez en 7 & 3. Cela étant, le Quarré du nombre entier 10 est 100. Le Quarré de la partie 7 est 49. Ces deux Quarrez font ensemble 149. D'ailleurs le Quarré de l'autre partie 3, est 9; le Rectangle compris du nombre entier 10 & de la partie premierement prise 7, est 70. Le même Rectangle pris une seconde fois est encore 70. Or 9, 70, & 70, font aussi 149.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : quatre-fois le Rectangle compris de la toute & de l'une de ses parties, avec le Quarré de l'autre partie, sont égaux au Quarré de la toute & de la partie premierement prise, comme d'une seule Ligne.

JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra au Point C. Cela étant, je dis que quatre-fois le Rectangle de AB, CB, avec le Quarré de l'autre partie AC, sont égaux au Quarré de la toute AB, & de la partie premierement prise CB, comme d une seule Ligne. Pour le prouver,



Continuez AB vers D, & faites BD égale à BC. Puis ayant décrit sur la Li- AD le Quarré AE, menez la Diagonale DF. Elevez aux Points B & C les Perpendiculaires BG & CI, qui seront aussi paralleles à AF & à DE; & par les Points H & K, où BG & CI coupent la Diagonale DF, menez les Lignes LHM & OKP paralleles à AD. Cela posé:

Premierement (par la premiere Remarque de la 4. Prop.) BM & LG sont des Quarrez. Ensuite de quoi NQ & OI ſont auſſi des Quarrez. Or puiſque BM eſt un Quarré, la Ligne BH eſt egale à BD; laquelle ayant été faite égale à BC, il s'enſuit que la Ligne BH eſt égale à BC, & ainſi que le Rectangle CH eſt un Quarré. Et d'autant que les Quarrez BM & CH ont le Côté BH commun, il s'enſuit que ces deux Quarrez ſont égaux entr'eux. Et par la même raiſon, les Quarrez CH & NQ ſont auſſi égaux, puis qu'ils ont le Côté NH commun. D'où il ſuit que les Quarrez BM, NQ, ſoit égaux entr'eux, puis qu'ils ſont tous-deux égaux à CH. Cela étant, HM eſt égal à HQ, puiſque ce ſont les Côtez de Quarrez égaux. Et partant HP eſt encore un Quarré égal aux trois autres. Enſuite de quoi il eſt évident que les Rectangles AH & LQ ſont compris de la toute AB & de ſa partie BC. Et puiſque (par la 43. Prop. du 1.) le Rectangle HE eſt égal au Rectangle AH, il s'enſuit que le Rectangle HE eſt auſſi compris de AB & de BC. D'ailleurs les Rectangles IQ & GP étant ſur des Bazes égales KQ, QP, & entre mêmes Paralleles IE & KP, ſont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Si donc on leur ajoûte les Quarrez égaux BM & QM, il s'enſuivra que QI, pris avec BM, ſera équivalent à GP, pris avec QM, c'eſt à dire au ſeul Rectangle GM, ou HE. Et ainſi le Gnomon RST eſt égal à quatre-fois le Rectangle compris de AB, BC. Maintenant ſi à ces deux choſes égales on ajoûte le Quarré OI, qui eſt le Quarré de OK, ou de AC ſon égale: il s'enſuivra que quatre-fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, ſont égaux au Gnomon RST, avec le Quarré OI. Or ce Gnomon & ce Quarré compoſent enſemble le Quarré AE. Donc quatre-fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, ſont égaux au Quarré AE; Ce qu'il falloit démontrer.

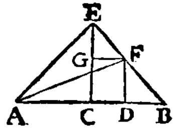
REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 8; & le divisez en 6 & 2. Cela étant, le Rectangle du nombre entier 8, & de sa partie 2, est 16; & quatre-fois ce Rectangle est 64. D'ailleurs le Quarré de l'autre partie 6, est 36. Or 64 & 36 font 100. Ce que vaut aussi le Quarré du nombre 10, qui est composé du premier nombre 8, & de sa partie premierement prise, à sçavoir 2.

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Si une Ligne droite est coupée, en deux parties égales, & en deux inégales, les Quarrez des deux parties inégales sont doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la partie du milieu.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D; & que la partie du milieu soit CD. Cela étant, je dis que les Quarrez des deux parties inégales AD, DB, sont doubles du Quarré de la moitié AC, & du Quarré de la partie du milieu CD. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez au Point E les Lignes droites

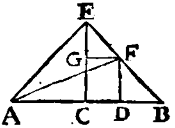
droites AE, BE. Elevez auſſi au Point D la Ligne DF perpendiculaire à AB; & du Point F, où la Ligne DE coupe BE, abaiſſez la Ligne FG perpendiculaire à CE, qui ſera auſſi parallele à CD. Enfin du Point A au Point F menez la Ligne droite AF. Cela poſé:

Puiſque par la conſtruction le Triangle ACE eſt Iſoſcele, les Angles AEC & EAC, ſur la Baze AE, ſont égaux entr'eux. Et puiſque l'Angle ACE eſt droit, les deux Angles AEC, EAC, qui ſont égaux, valent chacun un demi-droit. Et par la même raiſon les Angles CEB, CBE, valent auſſi chacun un demi-droit. Par conſequent l'Angle AEB, ou AEF, qui eſt compoſé de deux de ces Angles, eſt droit. Deplus, puiſque dans le Triangle EGF l'Angle EGF eſt droit, & que l'Angle GEF vaut un demi-droit, l'Angle EFG vaut auſſi un demi-droit. D'où il ſuit que les deux Côtez GE, GF, qui les ſoûtiennent, ſont égaux entr'eux, par la 6. Prop. du 1. De même, puiſque dans le Triangle FDB l'Angle FDB eſt droit, & que l'Angle B vaut un demi-droit, l'Angle DFB vaut auſſi un demi-droit. Par conſequent les Côtez DF, DB, qui les ſoûtiennent, ſont égaux entr'eux.

Enſuite de quoi, puiſque le Côté AE ſoûtient l'Angle droit ACE, ſon Quarré eſt égal aux Quarrez de AC & de CE, par la 47. Prop. du 1. Et puiſque ces deux Quarrez ſont égaux, il s'enſuit que le Quarré de AE eſt double du Quarré de AC. De même, puiſque le Côté EF ſoûtient l'Angle droit EGF, ſon Quarré eſt égal aux Quarrez de EG & de GF. Et puiſque ces deux Quarrez ſont égaux, il s'enſuit que le Quarré de EF eſt double du Quarré de GF, ou de ſon égale CD. Et ainſi les deux Quarrez de AE & de EF ſont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Or le Quarré de AF, qui ſoûtient l'Angle droit AEF, eſt égal aux deux Quarrez de AE & de EF. Donc le Quarré de

AF

AF est double des deux Quarrez de AC & de CD. Mais les deux Quarrez de AD & de DF, qui comprennent l'Angle droit ADF, sont égaux au Quarré de AF.



Donc les deux Quarrez de AD & de DF, ou de BD son égale, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

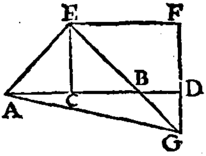
Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 12. Divisez ce nombre en deux parties égales 6 & 6; & en deux inégales 10 & 2. Cela étant, le nombre du milieu sera 4. Maintenant les Quarrez des deux parties inégales sont 100 & 4, qui ensemble font 104. D'ailleurs le Quarré de la moitié 6 est 36; le Quarré de la partie du milieu 4 est 16; 16 & 36 font 52, qui n'est que la moitié de 104, où dont 104 est le double.

PRO-

PROPOSITION X.

THEOREME X.

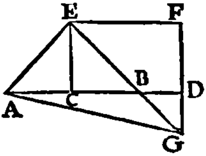
Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoûte directement une autre Ligne droite: le Quarré de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une seule Ligne, avec le Quarré de l'ajoûtée, sont doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la moitié de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une seule Ligne.



JE suppose que la Ligne AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & qu'on lui ajoûte directement la Ligne BD. Cela étant, je dis que le Quarré de AD & le Quarré de BD, pris ensemble, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC, ou à CB. Du Point A au Point E menez la Ligne droite AE. Puis par le Point D menez la Ligne FDG parallele à EC, ou perpendiculaire à AD; & par le Point E la Ligne EF parallele à CD. Tirez du Point E, par le Point B, la Ligne droite EBG, si longue, qu'elle rencontre la Ligne FDG au Point G. Enfin du Point A au Point G me-

G menez la Ligne droite AG. Cela posé,



Puisque les Lignes AC, CE, sont égales, les Angles CAE, CEA, sur la Baze, sont égaux entr'eux. Or l'Angle ACE est droit. Donc les Angles CAE, CEA, valent chacun un demi-droit. De même, puisque dans le Triangle ECB les Côtez CE, CB, sont égaux, & que l'Angle ECB est droit, chacun des Angles CEB & CBE, vaut un demi-droit. Et par consequent l'Angle AEB est droit. Maintenant les Angles CBE & DBG, qui sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux. Mais l'Angle CBE vaut un demi-droit. Donc l'Angle DBG vaut aussi un demi-droit. De-plus, dans le Triangle BDG l'Angle D est droit; donc l'Angle DGB vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez DB, DG, qui soûtiennent les Angles DGB, DBG, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1. De même, dans le Triangle EFG l'Angle F est droit, puis qu'il est opposé à l'Angle C. Mais l'Angle EGF vaut un demi-droit. Donc l'Angle GEF vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez FE, FG, qui les soûtiennent, sont aussi égaux entr'eux, par la 6. du 1.

Ensuite de quoi, puisque du Triangle ACE l'Angle ACE est droit, le Quarré de AE est égal aux deux Quarrez de AC & de CE, par la 47. du 1. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de AE est double du Quarré de AC. De même, puisque du Triangle EFG l'Angle EFG est droit, le Quarré de EG est égal aux deux Quarrez de EF & de FG. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de EG est double du Quarré de EF, ou de son égale CD. De sorte que les deux Quarrez de AE & de EG, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Or le Quarré de AG, qui soûtient l'Angle

droit

droit AEG, est égal aux deux Quarrez de AE & de EG. Donc le Quarré de AG est double des Quarrez de AC & de CD. Mais les Quarrez de AD & de DG, qui comprennent l'Angle droit ADG, sont égaux au Quarré de AG. Donc les Quarrez de AD & de DG, ou de BD son égale, sont doubles des Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10. Divisez ce nombre en deux parties égales 5 & 5. Ajoûtez 2 à 10; cela fera 12. Cela étant, le Quarré de 12 est 144; le Quarré de 2 est 4; ces deux nombres font ensemble 148. D'ailleurs le Quarré de 5 est 25; le Quarré de 7 est 49. Ces deux nombres font ensemble 74, qui est la moitié de 148, ou dont 148 est le double.

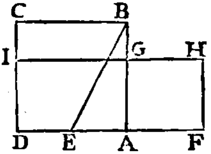
PROPOSITION XI.

PROBLEME I.

Couper une Ligne droite donnée, de telle sorte, que le Rectangle de la toute, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie.

JE suppose que la Ligne droite donnée soit AB; & je propose de la couper de telle sorte, que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie. Pour le faire,

Décrivez sur AB le Quarré AC. Coupez le Côté té AD en deux également au Point E. Du Point E au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez EA vers F, & faites EF égale à EB. Décrivez sur AF le Quarré AH; & prolongez le Côté HG jusqu'en I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G comme il a été proposé; c'est à dire de telle sorte, que le Rectangle de la toute AB, & de sa partie BG, est égal au Quarré de l'autre partie AG. Pour le prouver,



Puisque la Ligne DA est coupée en deux parties égales au Point E, & que la Ligne AF lui est ajoûtée: le Rectangle de DF, & de FA, ou de FH son égale, (c'est à dire le Rectangle DH,) avec le Quarré de la moitié EA, sont égaux au Quarré de EF, ou de son égale EB, par la 6. Prop. Or les Quarrez de AB & de EA sont égaux au Quarré de EB, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle DH, & le Quarré de EA, sont égaux aux Quarrez de AB & de EA. Ostant donc le Quarré de EA de ces deux Touts égaux, ausquels il est commun, il restera le Rectangle DH égal au Quarré de AB, c'est à dire au Quarré AC. Que si maintenant de ce Rectangle & de ce Quarré, qui sont égaux, l'on ôte le Rectangle DG, qui leur est commun, il restera le Quarré AH égal au Rectangle IB. Or le Quarré AH est le Quarré de AG, & le Rectangle IB est le Rectangle compris de CB, ou de AB son égale, & de BG. Il est donc vrai de dire, que la Ligne AB a été coupée comme il a été proposé; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

REMARQUE.

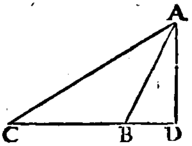
Il est impossible d'exprimer en nombre la quantité des parties AG, GB, de la Ligne AB coupée sui-

ſuivant la Prop. précedente; parce que quelque nombre de parties qu'on puiſſe attribuer à la Ligne AB, il eſt impoſſible que AG, ou GB, contienne un nombre déterminé de ces parties.

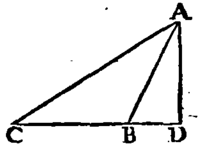
PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Aux Triangles Amblygones, le Quarré du Côté qui ſoûtient l'Angle obtus eſt plus grand que les Quarrez des deux autres Côtez, de la quantité de deux Rectangles, chacun deſquels eſt compris de l'un des Côtez alentour de l'Angle obtus, à ſçavoir de celui ſur lequel étant prolongé tombe la Perpendiculaire de l'Angle opposé, & de la partie compriſe entre cette Perpendiculaire & l'Angle obtus.



JE ſuppoſe qu'au Triangle ABC l'Angle ABC ſoit obtus. Cela étant, aprés avoir prolongé l'un des Côtez alentour de l'Angle obtus, comme CB, vers D, & avoir abaiſſé de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à CD: Je dis que le Quarré de AC eſt plus grand que les deux Quarrez de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles, chacun deſquels ſera compris de CB, & de BD. Pour le prouver, La Ligne CD étant coupée au Point B, il s'ensuit (par la 4. Prop.) que le Quarré de la toute CD est égal aux deux Quarrez des deux parties CB, BD, & à deux Rectangles compris de ces deux mêmes parties. Donc si à ces deux Touts égaux l'on ajoûte le Quarré de DA, il s'ensuivra que les Quarrez de CD & de DA seront égaux aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Mais le Quarré de AC



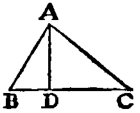
(par la 47. Prop. du 1.) est égal aux deux Quarrez de CD & de DA. Donc le Quarré de AC est égal aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. D'ailleurs le Quarré de BA est égal aux deux Quarrez de BD & de DA. Prenant donc le Quarré de BA, au lieu de ces deux Quarrez : il s'ensuivra que le Quarré de AC sera égal aux deux Quarrez de CB & de BA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Et ainsi le Quarré de AC est plus grand que les deux Quarrez de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles compris de CB & de BD ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

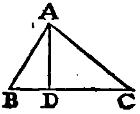
Aux Triangles Oxygones, le Quarré du Côté qui soûtient l'Angle aigu est plus petit que les Quarrez des deux autres Côtez, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Côtez alentour de l'Angle aigu, à sçavoir de celui sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire, & de la partie comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu.



JE suppose qu'au Triangle ABC l'Angle C soit aigu, & qu'ayant fait tomber de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à la Ligne BC, qui est l'un des Côtez qui comprend l'Angle aigu, cette Perpendiculaire tombe entre B & C. Cela étant, je dis que le Quarré du Côté AB, qui soûtient l'Angle aigu C, est plus petit que les deux Quarrez des deux autres Côtez AC, BC, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris du Côté BC, qui est alentour de l'Angle aigu C, & sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire AD, & de la partie DC comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu. Pour le prouver,

La

La Ligne BC étant coupée au Point D, il s'en-s'ensuit (par la 7. Prop.) que le Quarré de la toute BC, & le Quarré de l'une de ses parties, à sçavoir DC, sont égaux au Quarré de l'autre partie BD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Si donc à ces deux Touts égaux l'on ajoûte le Quarré de AD: il s'ensuivra que les trois Quarrez de BC, de DC, & de AD, seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Donc si nous prenons le Quarré de AC, au lieu des deux Quarrez de DC & de AD, auxquels il est égal, par la 47. Prop. du 1. il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'ailleurs, le Quarré de AB est égal aux deux Quarrez de BD & de AD. Prenant donc ce seul Quarré au lieu des deux autres, il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux au Quarré de AB, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'où il suit que les deux Quarrez de BC & de AC sont plus grands que le seul Quarré de AB, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC; ou, ce qui est la même chose, que le Quarré de AB est moindre que les deux Quarrez de AC & de BC, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC; Ce qu'il falloit démontrer.



PRO-

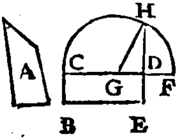
PROPOSITION XIV.

PROBLEME II.

Décrire un Quarré égal à une Figure rectiligne donnée.

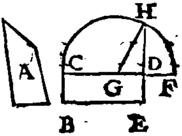
JE suppose que la Figure rectiligne A soit donnée ; & je propose de décrire un Quarré égal à cette Figure. Pour le faire,

Décrivez premierement (par la 45. Prop. du 1.) le Parallelogramme Rectangle BD égal à la Figure donnée A. Prolongez le Côté CD vers F, & faites DF égale à DE. Coupez la Ligne CF en deux également au Point G. Décrivez un demi-Cercle du Centre G, & de l'intervalle GC ; ou GF. Enfin prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Circonference du Cercle au Point H. Cela étant, je dis que le Quarré de la Ligne DH est égal à la Figure rectiligne A. Pour le prouver,



Du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela posé :

Puisque la Ligne CF est coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point D : il s'ensuit (par la 5. Prop.) que le Rectangle compris des deux parties inégales CD, DF, c'est à dire le Rectangle BD, & le Quarré de la partie du milieu GD, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute GF, ou de son égale GH. Mais ce Quarré de GH est égal aux Quarrez de GD & de DH, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle BD, & le Quarré de GD, sont égaux aux deux Quarrez de



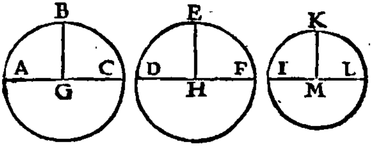
GD & de DH. Et partant, si de ces deux Touts égaux l'on ôte le Quarré de GD, qui leur est commun, les restes, à sçavoir le Rectangle BD, & le Quarré de DH, seront égaux. Mais le Rectangle BD a été fait égal à la Figure rectiligne donnée A. Donc le Quarré de DH est aussi égal à cette Figure; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

ELEMENS
D'EUCLIDE.
LIVRE TROISIE'ME.

DEFINITIONS.

1. LEs Cercles égaux, ſont des Cercles dont les Diametres ſont égaux, ou dont les Lignes droites menées du Centre à leurs Circonferences, ſont égales.

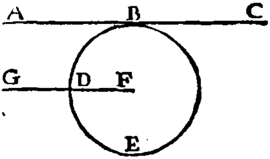
Ainſi les Cercles ABC, DEF, ſont égaux, parce que leurs Diametres AC, DF, ſont égaux; ou parce que les Lignes droites GB, HE, qui ſont



menées du Centre à leurs Circonferences, ſont égales. Mais les Cercles DEF, IKL, sont inégaux; parce que leurs Diametres DF, IL, sont inégaux, ou parce que les Lignes droites HE, MK, qui sont menées du Centre à leurs Circonferences, sont inégales.

2. La Tangente d'un Cercle, ou la Ligne qui le touche, est une Ligne droite qui touche sa Circonference de telle sorte, qu'étant prolongée, elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.

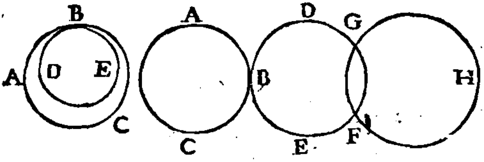
Ainsi la Ligne AB est la Tangente du Cercle BDE, parce qu'elle touche sa Circonference de telle sorte au Point B, qu'étant prolongée elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.



3. La Secante d'un Cercle, ou la Ligne qui le coupe, est une Ligne droite qui touche tellement sa Circonference, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

Ainsi la Ligne GD est la Secante du Cercle BDE, parce qu'elle touche tellement sa Circonference au Point D, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

4. Des Cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand leurs Circonferences se touchent sans se couper.



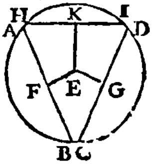
Ainsi les Cercles ABC, DBE, sont dits se toucher l'un l'autre, parce que leurs Circonferences se ſe touchent tellement au Point B, qu'elles ne ſe coupent point.

5. Deux Cercles ſont dits ſe couper l'un l'autre, lorſque leurs Circonferences ne ſe touchent pas ſimplement, mais qu'ils entrent reciproquement l'un dans l'autre.

Ainſi les Cercles FGD, FGH, ſont dits ſe couper l'un l'autre, parce que leurs Circonferences ne ſe touchent pas ſimplem.nt, mais que ces Cercles entrent reciproquement l'un dans l'autre.

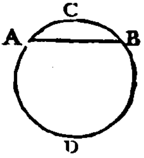
6. La diſtance d'une Ligne droite au Centre d'un Cercle, eſt la Ligne droite qui part du Centre de ce Cercle, & qui tombe perpendiculairement ſur cette Ligne.

Ainſi la diſtance de la Ligne AB au Centre du Cercle ABD, eſt la Ligne EF, qui part du Centre E, & qui tombe perpendiculairement ſur AB. D'où il ſuit que les deux Lignes droites AB, CD, ſont également diſtantes du Centre E, parce que leurs diſtances EF, EG, ſont égales. Mais que la Ligne HI eſt plus éloignée de ce même Centre, parce que ſa diſtance EK eſt plus grande que celle des autres.



7. La Soûtendante, ou la Corde d'un Arc de Cercle, eſt la Ligne droite bornée des deux extremitez de cét Arc.

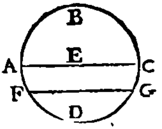
Ainſi la Ligne droite AB eſt la Soûtendante ou la Corde de l'Arc ACB, parce qu'elle eſt bornée de ſes deux extremitez A & B.



Il eſt évident que la même Ligne AB eſt auſſi la Soûtendante de l'Arc ADB. Si bien que la Ligne droite qui eſt la Soûtendante d'un Arc, eſt auſſi la Soûtendante du Complement de cét Arc à la Circonference entiere.

 8. Un

8. Un Segment, ou une portion de Cercle, eſt une Figure compriſe d'un Arc de Cercle & de ſa Soûtendante.



Ainſi les Figures ABC, FBG, FDG, ſont des Segmens ou des portions de Cercles, parce chacune de ces Figures eſt compriſe d'un Arc de Cercle & de ſa Soûtendante.

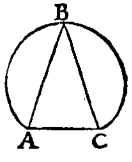
9. La Baze d'un Segment de Cercle, eſt la Ligne droite qui ſoûtient ce Segment, & qui le borne.

Ainſi la Ligne FG eſt la Baze du Segment FBG, & du Segment FDG, parce qu'elle les ſoûtient & les borne.

10. L'Angle du Segment, eſt l'Angle mixte compris de l'Arc du Segment & de ſa Baze.

Ainſi l'Angle mixte compris de l'Arc FD, & de la Ligne FG, eſt l'Angle du Segment FDG.

11. l'Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment eſt capable, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de l'Arc du Segment, & qui aboutiſſent aux deux extremitez de ſa Baze.

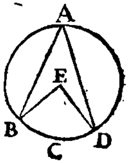


Ainſi l'Angle ABC eſt un Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment ABC eſt capable; parce qu'il eſt compris des deux Lignes droites BA, BC, qui partent du Point B de l'Arc du Segment, & aboutiſſent aux deux extremitez de ſa Baze A & C.

12. Un Angle au Centre d'un Cercle, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle, comme l'Angle BED.

13. Un Angle à la Circonference d'un Cercle, eſt un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de la Circonference du Cercle, comme l'Angle BAD.

14. Quand



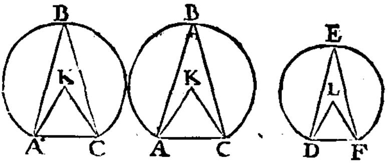
14. Quand l'Angle que font deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle, ou d'un même Point de la Circonference, a pour Baze un Arc de ce Cercle, cét Angle est dit s'appuyer sur cét Arc.

Ainsi l'Angle BED, ou l'Angle BAD, est dit s'appuyer sur l'Arc BCD.

15. L'Arc sur lequel s'appuye un Angle, ou qui lui sert de Baze, est l'Arc compris entre les deux Côtez de l'Angle.

Ainsi l'Arc BCD est l'Arc sur lequel s'appuyent les Angles BAD, BED, ou bien est la Baze de ces Angles, parce que cét Arc est compris entre leurs Côtez.

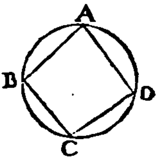
16. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux Lignes droites qui font un Angle au Centre, & de la partie de la Circonference que ces deux Lignes embrassent, comme ci-dessus la Figure EBCD est un Secteur de Cercle.



17. Des Segmens semblables, sont des Segmens qui sont capables d'Angles égaux.

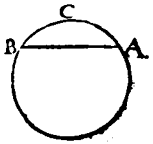
Ainsi les Segmens marquez ABC, & DEF, sont des Segmens qui s'appellent semblables, parce que les Angles ABC, & DEF, dont ils sont capables, sont égaux. Mais ces mêmes Segmens ne laissent pas d'être inégaux, parce que l'un est plus grand que l'autre. Au lieu que les deux Segmens marquez ABC, sont semblables, & égaux; parce que non seulement ils sont capables d'Angles égaux, mais aussi parce que l'un n'est pas plus grand que l'autre.

18. Une Figure rectiligne est dite inscrite dans un Cercle, lorsque le Sommet de chacun de ses Angles est dans la Circonference du Cercle.



Ainsi la Figure ABCD est inscrite dans le Cercle ABCD, parce que tous les Sommets de ses Angles A, B, C, D, sont dans la Circonference de ce Cercle.

19. Une Ligne droite est dite être dans un Cercle, lorsque ses extremitez se terminent à la Circonference.



Ainsi la Ligne AB est dite être dans le Cercle ABC.

PRO-

PROPOSITION I.

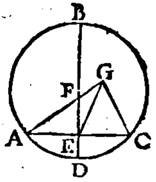
PROBLEME I.

Trouver le Centre d'un Cercle donné.

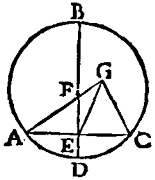
JE suppose que l'on donne le Cercle ABC, & je propose d'en trouver le Centre. Pour le trouver,

Menez dans ce Cercle la Ligne droite AC, qui coupe la Circonference où il vous plaira, comme aux Points A & C. Divisez la Ligne AC en deux également au Point E, par la 10. du 1. Et par ce Point menez la Ligne BED perpendiculaire à AC, par la 11. du premier. Enfin coupez la Ligne BD en deux également au Point F. Cela étant, je dis que le Point F est le Centre du Cercle ABC. Pour le prouver,

Premierement il est évident que tout autre Point que F, pris dans la Ligne BD, ne peut être le Centre, puisque cét autre Point ne diviseroit pas la Ligne BD en deux également. C'est pourquoi si le Centre n'étoit pas au Point F, il faudroit qu'il fût en quelque Point hors de la Ligne BD. Pensons, si vous voulez, qu'il soit au Point G. Menez donc les Lignes droites GA, GE, GC. Cela posé:



Comparez le Triangle AEG avec le Triangle CEG. Le Côté AE du premier est égal au Côté EC du second, par la construction; le Côté EG est commun aux deux Triangles; & la Baze GA seroit égale à la Baze GC, puis qu'elles seroient tirées du Centre à la Circonference. Ainsi (par la

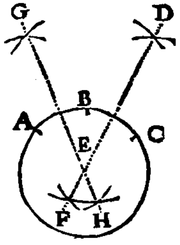


8. du 1.) l'Angle AEG seroit égal à l'Angle CEG, & la Ligne GE seroit perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Et partant les Angles GEA, GEC, seroient droits. Mais, par la construction, l'Angle AEB est droit. Donc il s'ensuivroit que l'Angle AEB & l'Angle AEG seroient égaux, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle ABC soit hors la Ligne BD. Et partant le Point F est le Centre du Cercle ABC; Ce qu'il falloit trouver.

I. REMARQUE.

Il suit de-là, que si dans un Cercle une Ligne droite en coupe une autre qui se termine à sa Circonference, en deux également & perpendiculairement, cette Ligne droite passera par le Centre du Cercle.

II. REMARQUE.



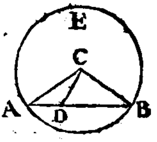
Pratique de cette Proposition. Prenez dans la Circonference du Cercle ABC trois Points, tels qu'il vous plaira, A, B, C. Mettez successivement vôtre Compas à deux de ces Points A & B; & de même intervalle décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points G & H. Puis par ces Points menez la Ligne droite GH. Cela fait, mettez derechef successivement le pied du Compas aux Points B & C; & de même

même intervalle décrivez encore deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points D & F. Enfin menez par ces deux Points la Ligne DF, si longue, qu'elle rencontre la Ligne GH au Point E. Alors le Point E sera le Centre qu'il falloit trouver.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

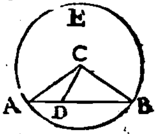
Si ayant pris deux Points dans la Circonference d'un Cercle, on méne de l'un à l'autre une Ligne droite, elle tombera dans le Cercle.



JE suppose que dans la Circonference du Cercle ABE l'on prenne deux Points tels qu'on voudra, comme A & B; & que du Point A au Point B on méne la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que cette Ligne tombera dans ce Cercle. Pour le prouver,

Menez du Centre C aux extremitez de la Ligne AB les Lignes droites CA, CB. Puis ayant pris à discretion dans la Ligne AB un Point entre A & B, comme par exemple D, menez la Ligne droite CD. Cela posé:

Les Lignes CA, CB, qui partent du Centre C, & vont se borner à sa Circonference, sont égales. Ainsi les Angles CAB, CBA, sont égaux entr'eux, par la 5. du 1. Mais l'Angle CDB est exterieur au respect du Triangle ADC. Donc (par la 16. du 1.) il est plus grand que son opposé interieur CAD, & par consequent aussi que son égal CBD. D'où il suit (par la 19. du 1.) que le Côté CD est plus petit que le Côté CB, qui soûtient un plus grand Angle. Et puis qu'il est plus petit, son extremité D est dans le Cercle. Mais d'autant que le Point D a été pris à discretion dans la Ligne AB, & que la même chose se peut prouver de tout autre Point de cette Ligne, il suit que cette Ligne toute entiere est dans le Cercle; Ce qu'il falloit démontrer.

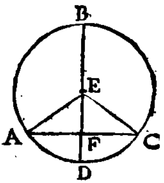


PROPOSITION III.

THEOREME II.

Si dans un Cercle, une Ligne droite passe par le Centre, & coupe en deux également une autre Ligne droite qui n'y passe point, elle la coupera perpendiculairement; Et si elle la coupe perpendiculairement, elle la coupera en deux également.

JE suppose premierement que la Ligne droite BD, qui est dans le Cercle ABC, passe par le Centre E, & qu'elle coupe en deux également au Point F la Ligne AC, qui n'y passe point. Cela étant, je dis que la Ligne BD coupe la Ligne AC perpendiculairement. Pour le prouver, Menez les Lignes droites AE, EC. Cela posé:



Dans

Dans les Triangles AFE & CFE, le Côté AF est égal au Côté FC, par supposition. Le Côté FE est commun à ces deux Triangles. Deplus, la Baze EA est égale à la Baze EC, par la definition du Cercle. Donc (par la 8. du 1.) l'Angle AFE est égal à l'Angle CFE, & la Ligne BD est perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que la Ligne BD qui passe par le Centre du Cercle, coupe la Ligne AC perpendiculairement. Cela étant, je dis qu'elle la coupe aussi en deux également. Pour le prouver,

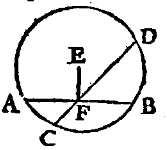
Puisque les Lignes EA, EC, sont égales, par la definition du Cercle: les Angles EAC & ECA, sont égaux, par la 5. du 1. D'ailleurs puisque la Ligne BF est perpendiculaire à la Ligne AC, les deux Angles EFA, EFC, sont aussi égaux. Si bien que les deux Triangles EFA, EFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien; & le Côté EF, qui est commun aux deux, soûtient des Angles égaux. Partant (par la 26. du 1.) le Côté AF est égal au Côté FC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

Si dans un Cercle, deux Lignes droites qui ne passent pas par le Centre, s'entre-coupent, elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.

JE suppose que dans le Cercle ABD les deux Lignes droites AB, CD, qui ne passent point par le Centre, se coupent l'une l'autre au Point F. Cela étant, je dis qu'elles ne se coupent pas toutes-deux en deux parties égales. Pour le prouver,



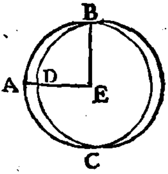
S'il étoit possible que chacune de ces deux Lignes fût coupée en deux parties égales: il s'ensuivroit, par la Proposition precedente, qu'en menant du Centre E au Point F la Ligne droite EF, cette Ligne seroit perpendiculaire à chacune des deux autres AB, CD; & par consequent que les Angles AFE & CFE seroient droits, & égaux entr'eux, & qu'ainsi la partie seroit égale au Tout, ce qui est impossible. Il est donc impossible que les Lignes AB, CD, se coupent toutes-deux en deux parties égales; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION V.

THEOREME IV.

Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas un même Centre.



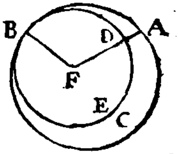
JE suppose que les deux Cercles ABC, BDC, se coupent l'un l'autre aux Points B & C. Cela étant, je dis qu'ils n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,

S'il étoit possible qu'ils eussent tous-deux un même Centre, à sçavoir E: en menant de ce Point une Ligne droite à l'un des Points où ces deux Cercles s'entrecoupent, par exemple au Point B, & une autre Ligne droite en quelqu'autre Point, comme A, qui les coupât tous-deux: De ce que le Point E seroit Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes EA, EB, seroient égales. D'ailleurs, de ce que ce même Point seroit aussi le Centre du Cercle BDC, il s'ensuivroit que les Lignes ED, EB, seroient aussi égales. Si bien que les deux Lignes EA, ED, qui seroient égales à une même, à sçavoir à EB, seroient égales entr'elles. C'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDC, ayent un même Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

THEOREME V.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre en dedans, ils n'auront pas un même Centre.



JE suppose que le Cercle BDE touche le Cercle ABC en dedans au Point B. Cela étant, je dis que ces deux Cercles n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,

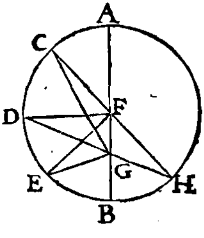
S'il étoit possible qu'ils eussent tous-deux un même Centre, à sçavoir F : menant de ce Centre au Point de leur attouchement la Ligne droite FB, puis une autre Ligne droite à quelqu'autre Point de la Circonference du Cercle ABC, par exemple au Point A : De ce que le Point F seroit le Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes FA, FB, seroient égales. Et parce que ce même Point seroit aussi le Centre du Cercle BDE, il s'ensuivroit que les Lignes FD, FB, seroient aussi égales. Et ainsi les Lignes droites FA, FD, qui seroient égales à la même FB, seroient égales entr'elles, c'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa partie ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDE, ayent un même Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME VI.

Si ayant pris un Point, autre que le Centre, dans un Cercle, on méne de ce Point tant de Lignes droites que l'on voudra, jusqu'à la Circonference; la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre; & la plus petite est le reste du Diametre. Quant aux autres Lignes, la plus proche de celle qui passe par le Centre est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

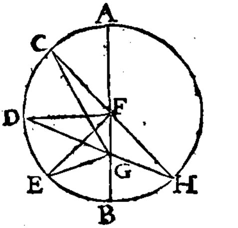


JE suppose que dans le Cercle ADB, dont le Centre est F, on ait pris à discretion le Point G, different du Centre F; & que de ce Point on ait mené à la Circonference plusieurs Lignes droites, comme GA, GC, GD, GE, GB, entre lesquelles GA passe par le Centre F, & GB

GB achéve le Diametre AB. Cela étant, je dis premierement que la Ligne GA est la plus grande de toutes. Pour le prouver,

Menez du Centre F aux Points C, D, E, les Lignes droites FC, FD, FE. Cela posé:

Au Triangle GFC les deux Côtez GF, FC, sont plus grands que le troisiéme GE, par la 20. du 1. Donc si au lieu de FC on prend FA, qui lui est égale par la definition du Cercle, les deux Lignes GF, FA, ou la toute GA, sera plus grande que GC. On prouvera de même, que la Ligne GA est plus grande que les Lignes GD, GE. Mais GA est aussi plus grande que GB, puisque GA est plus grande que le demi-Diametre du Cercle, & que GB est plus petite. Et partant la Ligne GA est la plus grande de toutes.



Je dis en second lieu, que la Ligne GB est la plus petite de toutes. Pour le prouver,

Au Triangle EGF, les deux Côtez FG, GE, sont plus grands que le troisiéme FE, par la 20. du 1. Ils sont donc aussi plus grands que la Ligne FB, qui lui est égale. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie FG, qui leur est commune: il s'ensuivra que le reste GE sera plus grand que le reste GB, & ainsi que GB est plus petite que GE. On prouvera de même, que GB est plus petite que GD, ou GC. Et partant la Ligne GB est la plus petite de toutes.

Je dis en troisiéme lieu, que la Ligne GC, qui est la plus proche de la Ligne GA qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que GD, ou GE. Pour le prouver,

Comparez les deux Triangles CFG, & DFG.

Le Côté CF du premier Triangle est égal au Côté FD du second, par la definition du Cercle; le Côté FG est commun à ces deux Triangles. Deplus, l'Angle CFG, compris des deux Côtez du premier Triangle, est plus grand que l'Angle DFG, compris des deux Côtez du second, puis qu'il n'est que sa partie. Ainsi (par la 24. du 1.) la Baze GC est plus grande que la Baze GD. On prouvera de même, que GD est plus grande que GE. Et ainsi la Ligne GC, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en quatriéme lieu, qu'on ne sçauroit mener du Point G, de part & d'autre de la Ligne GB, plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisiéme égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Point F la Ligne FH, qui fasse avec FB l'Angle BFH égal à l'Angle BFE; & du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela posé:

Les Triangles GFH & GFE ont les deux Côtez GF, FH, égaux aux deux Côtez GF, FE; & l'Angle GFH, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle GFE, compris des deux autres, par la construction. Donc la Baze GH est égale à la Baze GE, par la 4. du 1. Ainsi voilà deux Lignes droites égales menées du Point G de part & d'autre de la Ligne GB. Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisiéme égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déja été prouvé. Car cette Ligne ou approchera plus prés du Point B, & ainsi elle sera plus petite que GH: ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

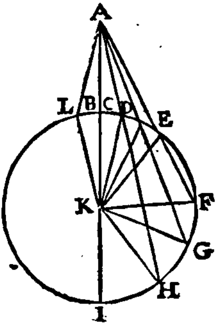
PROPOSITION VIII.

THEOREME VII.

Si d'un Point pris hors d'un Cercle on méne tant de Lignes droites que l'on voudra, qui se terminent à la Circonference concave du Cercle : la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre ; & celle qui en est plus proche est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Tout au contraire : de celles qui tombent sur la Circonference convexe, celle qui étant prolongée passe par le Centre, est la plus petite de toutes ; & celle qui en est plus proche est plus petite qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

JE suppose que du Point A, pris à discretion, hors du Cercle BCD, on ait mené plusieurs Lignes droites AF, AG, AH, AI, qui se vont terminer à sa Circonference concave ; & que la Ligne AI passe par le Centre K. Cela étant, je dis pre-

premierement que la Ligne AI eſt la plus grande de toutes. Pour le prouver,



Menez du Centre K les Lignes droites KF, KG, KH. Cela poſé:

Au Triangle AKH les deux Côtez AK, KH, ſont plus grands que le troiſiéme AH, par la 20. du 1. Or AK & KH ſont égaux à AK & à KI, ou à la toute AI. Ainſi la Ligne AI eſt plus grande que la Ligne AH. On prouvera de même, que la Ligne AI eſt plus grande que la Ligne AG, & que la Ligne AF. Donc la Ligne AI eſt la plus grande de toutes.

Je dis en ſecond lieu, que la Ligne AH, qui eſt la plus proche de la Ligne AI qui paſſe par le Centre, eſt plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que AG, ou AF. Pour le prouver,

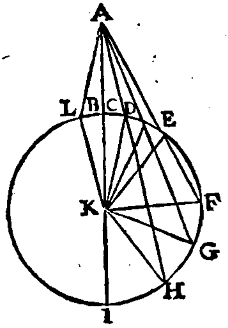
Aux Triangles AKH & AKG, les deux Côtez AK, KH, ſont égaux aux deux Côtez AK, KG, chacun au ſien. Mais l'Angle AKH eſt plus grand que l'Angle AKG, qui n'eſt que ſa partie. Donc (par la 24. du 1.) la Baze AH eſt plus grande que la Baze AG. On prouvera de même, que la Ligne AG eſt plus grande que la Ligne AF. Et ainſi la Ligne AH, qui approche le plus de la Ligne qui paſſe par le Centre, eſt plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en troiſiéme lieu, qu'entre les Lignes AB, AC, AD, AE, qui partent du Point A, & qui tombent ſur la Circonference convexe du Cercle BCD, la plus petite de toutes eſt la Ligne AB, qui étant prolongée paſſe par le Centre K. Pour le prouver,

Menez

Menez du Centre K les Lignes droites KC, KD, KE. Cela posé;

Au Triangle AKC le Côté AK est moindre que les deux Côtez KC, AC, par la 20. du 1. Donc si de ces deux Touts inégaux on ôte des parties égales, à sçavoir KB & KC: le reste AB sera plus petit que le reste AC. On prouvera de même, que la Ligne AB est plus petite que AD, ou AE. Et partant elle est la plus petite de toutes.



Je dis en quatriéme lieu, qu'entre les Lignes AC, AD, AE, celle qui approche de plus prés de la Ligne AB, est plus petite qu'une autre plus éloignée. Pour le prouver,

Les Lignes AC, KC, sont menées des extremitez de la Ligne AK, qui est un des Côtez du Triangle AKD, & se rencontrent dans ce Triangle. Donc (par la 21. du 1.) les Lignes AC, KC, sont plus petites que les Lignes AD, KD. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte les parties égales KC, KD: le reste AC sera plus petit que le reste AD. On prouvera de même, que AD est plus petite que AE. Et ainsi de toutes ces Lignes, celle qui est la plus proche de la Ligne AB est plus petite qu'une autre plus éloignée.

Je dis enfin qu'on ne sçauroit mener du Point A de part & d'autre de la Ligne AB plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisiéme égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Centre K la Ligne KL, qui fasse avec KA l'Angle AKL égal à l'Angle AKC; & du Point L au Point A menez la Ligne droite LA. Cela posé:

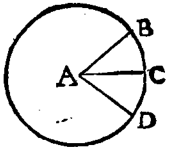
Les

Les deux Triangles AKL, AKC, ont les deux Côtez AK, KL, égaux aux deux Côtez AK, KC, chacun au sien ; & l'Angle AKL, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle AKC compris des deux autres Côtez, par la construction. Donc la Baze AL est égale à la Baze AC, par la 4. du 1. Ainsi voilà deux Lignes droites égales menées du Point A de part & d'autre de la Ligne AB. Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisiéme égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déja été prouvé. Car cette Ligne ou aprochera plus prés de la Ligne AB, & ainsi elle sera plus petite : ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

THEOREME VIII.

Si ayant pris un Point dans un Cercle, l'on peut mener de ce Point à la Circonference du Cercle plus de deux Lignes droites égales entr'elles, ce Point-là est le Centre du Cercle.



JE suppose que dans le Cercle BCD l'on ait pris le Point A ; & qu'ayant mené de ce Point à la Circonference les trois Lignes droites AB, AC, AD, ces trois Lignes se trouvent égales. Cela étant, je dis que le Point A est le Centre de ce Cercle.

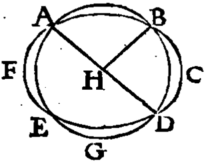
Car si cela n'étoit, il s'ensuivroit que d'un Point pris

pris dans un Cercle, lequel Point ne seroit pas le Centre, on pourroit mener à la Circonference plus de deux Lignes droites égales entr'elles ; ce qui est impossible par la 7. Prop. Par consequent le Point A est le Centre de ce Cercle ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

THEOREME IX.

Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils ne se couperont pas en plus de deux Points.



JE suppose que les deux Cercles ABDGE & ABCDEF se coupent l'un l'autre. Cela étant, je dis qu'ils ne se coupent pas en plus de deux Points. Pour le prouver, Supposons, s'il est possible, qu'ils se coupent l'un l'autre aux trois Points A, B, D. Cela posé :

Trouvez (par la premiere Proposition) le Centre du Cercle ABDGE, & que le Centre soit H ; puis de ce Centre menez à ces trois Points A, B, D, les Lignes droites HA, HB, HD. Cela posé :

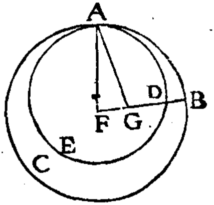
Puisque le Point H est le Centre du Cercle ABDGE, les Lignes HA, HB, HD, qui partent de ce Centre, & se vont terminer à sa Circonference, sont égales entr'elles. Et puisque ces trois mémes Lignes partent aussi d'un Point pris dans le Cercle

Cercle ABCDEF, & qu'elles vont se terminer à sa Circonference, le Point H est aussi le Centre du Cercle ABCDEF. Et ainsi il s'ensuivroit que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, auroient un même Centre; ce qui est impossible, par la 5. Prop. Il est donc impossible que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, se puissent couper en plus de deux Points; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

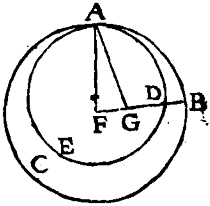
THEOREME X.

Si un Cercle en touche un autre en dedans, la Ligne droite menée par leurs Centres étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement.



JE suppose que le Cercle ADE touche le Cercle ABC en dedans au Point A. Cela étant, je dis que si on méne par leurs Centres une Ligne droite, cette Ligne étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement; ou, ce qui est la même chose, que si on méne du Point F, Centre du Cercle ABC, au Point A, qui est le Point de leur attouchement, la Ligne droite FA: le Centre du Cercle ADE se rencontrera dans cette Ligne.

Car si cela n'étoit, le Centre du Cercle ADE seroit en quelque Point hors de la Ligne FA. Qu'il soit donc au Point G, s'il est possible. En ce cas, ſi l'on méne par le Point F, & par le Point G, la Ligne droite FGDB, elle coupera la Circonference des deux Cercles ailleurs qu'au Point de leur attouchement. Puis menant du Point G au Point A la Ligne droite GA, cette Ligne avec les deux autres FG, FA, composera le Triangle FGA, dont les deux Côtez FG, GA, seront plus grands que le troiſiéme FA, par la 20. du 1. Ils ſeront donc auſſi plus grands que ſon égale FB. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie commune FG, le reſte GA ſera plus grand que le reſte GB. Mais puiſque le Point G eſt le Centre du Cercle ADE, la Ligne GD eſt égale à GA. Et ainſi la Ligne GD ſera auſſi plus grande que la Ligne GB, c'eſt à dire la partie que le Tout; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que le Centre du Cercle ADE ſoit hors de la Ligne FA; Ce qu'il falloit démontrer.

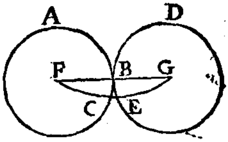


P R O-

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre par dehors, la Ligne droite menée d'un Centre à l'autre passera par le Point de leur attouchement.



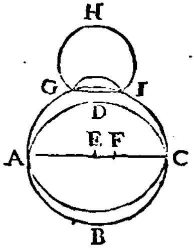
JE suppose que les Cercles ABC, DBE, se touchent l'un l'autre par dehors au Point B, & que du Centre de l'un au Centre de l'autre on ait mené la Ligne droite FG. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Point de leur attouchement.

Car si cela n'étoit, elle passeroit par ailleurs. Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les Points C & E, & qu'ainsi la Ligne FCEG soit une Ligne droite. Cela étant, les deux Lignes BF, BG, ne concourront pas directement, & ainsi feront un Angle au Point B, & avec la troisiéme FCEG feront un Triangle, dont les deux Côtez BF, BG, seront ensemble plus grands que le troisiéme FCEG, par la 20. du 1. Mais les Lignes FC, GE, sont égales à BF, BG, par la definition du Cercle. Donc ces mêmes Lignes FC, GE, seroient aussi plus grandes que la Ligne entiere FCEG, c'est à dire la partie que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne qui est menée par les Centres F & G, passe par un autre Point que B; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

Si un Cercle en touche un autre, soit en dedans, soit en dehors, il ne le touchera pas à plus d'un Point.



JE suppose premierement que le Cercle ADC touche le Cercle ABC en dedans. Cela étant, je dis qu'il ne le touche pas à plus d'un Point.

Car si cela étoit, posons, s'il est possible, qu'il le touche aux deux Points A, & C. Si cela est: puisque (par la 6. Prop.) deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, n'ont pas un même Centre, les deux Cercles ABC, ADC, auront chacun leur Centre particulier, par exemple E & F. Et puisque (par la 11. Prop.) la Ligne menée par les Centres de deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, étant prolongée, passe par le Point de leur attouchement, il s'ensuivra que la Ligne EF étant prolongée de part & d'autre, passera par les Points A & C. Ensuite dequoy, puisque le Point E est le Centre du Cercle ABC, la Ligne EA, & la Ligne EC, sont égales. Mais la Ligne FA est plus grande que EA, qui n'est que sa partie. Donc elle est aussi plus grande que la Ligne EC, & à plus forte raison que la Ligne FC. D'ailleurs, puisque le Point F est le Centre du Cercle ADC, la Ligne FA, & la Ligne FC, sont aussi égales. Si bien

bien que les deux Lignes FA, FC, sont ensemble égales, & inégales; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'un Cercle qui en touche un autre en dedans, le touche à plus d'un Point.

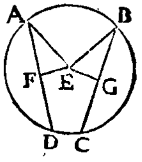
Je suppose en second lieu que le Cercle GHI touche le Cercle ABC par dehors. Cela étant, je dis qu'il ne le sçauroit toucher à plus d'un Point.

Car par exemple, s'il le pouvoit toucher aux deux Points G & I : puisque ces deux Points seroient dans la Circonference de ces deux Cercles; en menant du Point G au Point I la Ligne droite GI, elle devroit (par la 2. Prop.) tomber dans l'un & dans l'autre de ces deux Cercles; ce qui est impossible, puisque l'un est supposé hors de l'autre. Il est donc impossible que le Cercle GHI touche le Cercle ABC à plus d'un Point; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIII.

Dans un Cercle, les Lignes droites égales sont également distantes du Centre; Et celles qui sont également distantes du Centre sont égales entr'elles.

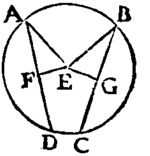


JE suppose que dans le Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, sont égales entr'elles. Cela étant, je dis que ces deux Lignes sont également distantes du Centre E. C'est à dire, que si du Centre E l'on abaisse sur ces Lignes les Perpendiculaires EF, EG, par la

12. du 1. ces Perpendiculaires sont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela posé :

Puisque les Lignes EF, EG, partent du Centre E, & qu'elles tombent perpendiculairement sur AD & sur BC, il s'ensuit qu'elles les coupent en deux également, par la 3. Prop. & partant AF est la moitié de AD, & BG la moitié de BC : d'où il suit que les deux Lignes AF, & BG, sont égales, par le 7. Ax. du 1. D'ailleurs, puisque le Triangle AFE est Rectangle, les deux Quarrez de AF & de FE sont égaux au Quarré de AE, ou de son égale EB, par la 47. du 1. Mais puisque le Triangle EGB est aussi Rectangle, les deux Quarrez de BG & de EG sont aussi égaux au Quarré de EB. Et partant les deux Quarrez de AF & de FE sont égaux aux deux Quarrez de BG & de EG. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de AF & de BG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont égales, les restes, à sçavoir le Quarré de EF & le Quarré de EG, seront égaux entr'eux. D'où il suit que les deux Lignes EF, EG, sont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1.



Je suppose en second lieu, que dans le même Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, sont également distantes du Centre E ; c'est à dire que les Perpendiculaires EF, EG, qu'on a abaissées du Centre E sur ces deux Lignes, sont égales. Cela étant, je dis que ces deux Lignes AD, BC, sont égales entr'elles. Pour le prouver,

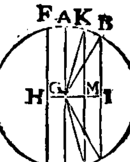
Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela posé :

Puisque le Triangle AEF est Rectangle, les deux Quarrez de EF & de FA sont égaux au Quarré de EA, EA, ou de son égale EB. Mais les deux Quarrez de EG & de GB sont aussi égaux au Quarré de EB. Donc les deux Quarrez de EF & de FA sont égaux aux deux Quarrez de EG & de GB. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de EF & de EG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont supposées égales, les restes, à sçavoir le Quarré de FA & le Quarré de GB, seront égaux entr'eux. D'où il suit que les deux Lignes FA, GB, sont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1. Mais (par la 3. Prop.) les Lignes AD & BC sont doubles de FA & de GB. Donc ces deux Lignes AD & BC sont égales entr'elles; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

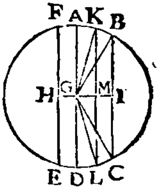
THEOREME XIV.

Si on méne plusieurs Lignes droites dans un Cercle, la plus grande de toutes est le Diametre, & celle qui approche le plus prés du Centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.



JE suppose que dans le Cercle ABCD on ait mené plusieurs Lignes droites, comme AD, BC, FE; que AD soit le Diametre, & que FE soit plus prés du Centre G que n'est la Ligne BC. Cela étant, je dis premierement que AD est la plus grande de toutes. Pour le prouver, Abaissez du Centre G sur FE & sur BC les Perpendiculaires GH, GI. Cela posé :

Puisque BC est supposée plus éloignée du Centre G que n'est pas FE, la Ligne GI est plus grande que GH, par la 6. Definition. Retranchez donc de GI la partie GM, égale à GH, & menez par le Point M la Ligne droite KML, perpendiculaire à GI. Enfin tirez les Lignes droites GK, GB, GL, GC. Cela posé :



Au Triangle KGL, les deux Côtez KG, GL, sont plus grands que le troisiéme KL, par la 20. du 1. Or KG & GL sont égaux à GA & à GD, ou au Diametre AD. Donc le Diametre AD est plus grand que la Ligne KL. Mais, par la Prop. precedente, KL est égale à FE, puisqu'elle est autant éloignée du Centre G que la Ligne FE. Partant le Diametre AD est plus grand que la Ligne FE. On prouvera de même, que AD est plus grand que BC. Et ainsi le Diametre du Cercle est la plus grande de toutes les Lignes qu'on peut mener dans un Cercle.

Je dis en second lieu, que la Ligne FE, ou son égale KL, qui est plus prés du Centre G que n'est pas BC, est plus grande que BC. Pour le prouver,

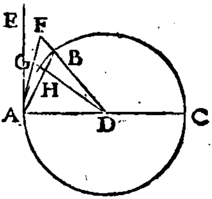
Aux deux Triangles KGL, & BGC, les deux Côtez KG, GL, sont égaux aux deux Côtez BG, GC, chacun au sien. Mais l'Angle KGL est plus grand que l'Angle BGC, qui n'est que sa partie. Donc (par la 24. du 1.) la Baze KL est plus grande que la Baze BC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XV.

Si on éléve une Perpendiculaire à l'extremité du Diametre d'un Cercle, elle touchera le Cercle ſans le couper. Et de l'extremité du Diametre on ne pourra pas mener une Ligne droite qui ſoit entre la Perpendiculaire & la Circonference. Deplus, l'Angle mixte, compris de la Circonference & du Diametre, eſt plus grand que tout Angle rectiligne aigu; & l'Angle mixte, compris de la Circonference & de la Perpendiculaire, eſt plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

JE ſuppoſe qu'à l'extremité A du Diametre AC du Cercle ABC, on a élevé la perpendiculaire AE. Cela étant, je dis premierement que cette Perpendiculaire touche le Cercle ſans le couper.

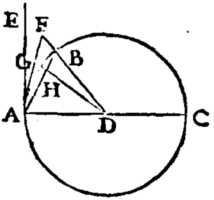


Car ſi cette Perpendiculaire coupoit le Cercle, comme fait ici la Ligne AB: en menant du Centre D au Point où cette Perpendiculaire couperoit le Cercle, par exemple au Point B, la Ligne droite DB; les Angles DAB, DBA, ſeroient égaux, par la 5. du 1. Mais l'Angle DAB eſt

 droit,

droit, par la construction. Par consequent l'Angle DBA seroit aussi droit; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible qu'une Ligne droite élevée perpendiculairement à l'extremité du Diametre d'un Cercle, coupe ce Cercle. Et par consequent il est vrai qu'elle le touche sans le couper; & ainsi qu'elle est hors le Cercle.

Je dis en second lieu, que de l'extremité A on ne peut pas mener une Ligne droite qui soit entre la Perpendiculaire AE & la Circonference AB.



Car si l'on prétendoit qu'on en pût mener une, par exemple AF: comme cette Ligne ne seroit pas perpendiculaire au Diametre AC, ce Diametre ne lui seroit pas non plus perpendiculaire. Donc en tirant du Centre D une Ligne perpendiculaire à AF, cette Ligne tombera en quelque Point de la Ligne AF, par exemple au Point G; & ce Point sera different du Point A, & par consequent hors le Cercle. D'où il s'ensuivra que la Ligne DG, qui passera au delà de la Circonference, sera plus grande que DA. Si bien que dans le Triangle DAG, l'Angle DAG, qui est soûtenu du Côté DG, sera plus grand que l'Angle DGA, qui est soûtenu du Côté DA, qui est plus petit. Or l'Angle DGA est droit, par la construction. Donc l'Angle DAG sera plus grand qu'un droit. Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible de pouvoir mener du Point A une Ligne droite qui se trouve entre la Perpendiculaire AE & la Circonference AB.

Je dis en troisiéme lieu, que l'Angle BAD, compris de la Circonference AB & du Diametre AD, est plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

Car

Car si on méne du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus prés qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus grand Angle rectiligne aigu qu'il est possible: il s'ensuivra, par ce qui vient d'être prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec le Diametre AC un Angle plus petit que l'Angle mixte BAD; lequel par consequent est plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

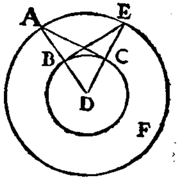
Je dis enfin, que l'Angle de contingence BAE, compris de la Circonference du Cercle & de la Perpendiculaire AE, est plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

Car si on méne du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus prés qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus petit Angle rectiligne aigu qu'il est possible: il s'ensuivra de même, par ce qui a été déja prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec la Ligne AE un Angle plus grand que l'Angle de contingence BAE; lequel par consequent est plus petit que tout Angle rectiligne aigu; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME II.

D'un Point donné hors d'un Cercle, mener une Ligne droite qui touche le Cercle.



JE suppose qu'on donne le Point A, hors le Cercle BC; & je propose de mener du Point A une Ligne droite qui touche le Cercle BC. Pour le faire,

Du Point A au Centre D menez la Ligne droite AD; & du Centre D, & de l'intervalle DA, décrivez le Cercle AEF. Puis du Point B, où la Ligne droite AD coupe le Cercle BC, élevez la Ligne droite BE perpendiculaire à AD. De même, du Point E, où la Ligne BE coupe le Cercle AEF, au Centre D, menez la Ligne droite ED. Enfin du Point A au Point C, où la Ligne DE coupe la Circonference du Cercle BC, menez la Ligne droite AC. Cela étant, je dis que la Ligne AC, qui part du Point donné A, touche le Cercle BC. Pour le prouver,

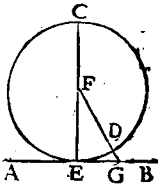
Les Triangles ADC, EDB, ont les deux Côtez AD, DC, égaux aux deux Côtez ED, DB, chacun au sien; & l'Angle D, compris de ces Côtez égaux, est commun. Donc (par la 4. du 1.) la Baze est égale à la Baze, & l'Angle ACD est égal à l'Angle EBD. Or l'Angle EBD est droit, par la construction. Donc l'Angle ACD est aussi droit. Et partant (par la Proposition précedente) la Ligne AC, qui est élevée perpendiculairement à l'extremité

tremité du Diametre DC, touche le Cercle BC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Centre à l'attouchement on méne une autre Ligne droite, cette Ligne sera perpendiculaire à la Touchante.



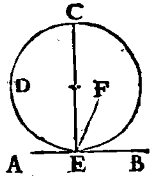
JE suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle EDC au Point E, & que du Centre F on méne au Point de l'attouchement E la Ligne droite FE. Cela étant, je dis que la Ligne FE est perpendiculaire à la Touchante AB.

Car si FE n'étoit pas perpendiculaire à AB, on pourroit (par la 12. du 1.) du Point F abaisser sur AB une Perpendiculaire, comme FG; laquelle allant rencontrer la Ligne AB en un autre Point que celui de l'attouchement, passera au delà de la Circonference du Cercle, & par consequent sera plus grande que FD, qui est bornée à cette Circonference, ou que son égale FE. Si bien que dans le Triangle FEG, l'Angle FEG, qui est soûtenu du Côté FG, sera plus grand que l'Angle FGE, qui est soûtenu du Côté FE, qui est plus petit. Or l'Angle FGE est droit, par cette fausse construction. Donc l'Angle FEG sera plus grand qu'un droit. Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible que la Ligne FE ne soit pas perpendiculaire à AB ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XVII.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on éléve une Perpendiculaire, elle passera par le Centre.



Je suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle CDE, au Point E; & que de ce Point on éléve la Ligne droite EC perpendiculaire à AB. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Centre, ou ce qui est la même chose, que le Centre du Cercle se rencontre dans la Ligne EC.

Car si cela n'étoit, le Centre de ce Cercle seroit en quelque Point hors de cette Ligne, par exemple, au Point F. Tirant donc de ce Point à celui de l'attouchement, la Ligne droite FE : cette Ligne, par la Proposition precedente, sera perpendiculaire à AB. Et partant l'Angle AEF sera droit. Mais l'Angle AEC est déja droit, par supposition. Ainsi l'Angle AEF seroit égal à l'Angle AEC, c'est à dire le Tout à sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle CDE soit hors de la Ligne EC, laquelle par consequent passe par le Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

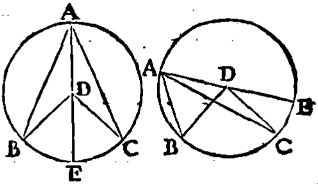
PRO-

PROPOSITION XX.

THEOREME XVIII.

Au Cercle, l'Angle du Centre est double de l'Angle de la Circonference, quand ils s'appuyent tous-deux sur un même Arc, où qu'ils ont une même portion de Circonference pour Baze.

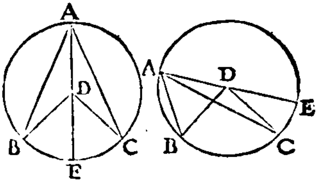
JE suppose que dans le Cercle ABC, l'Angle BDC, qui est au Centre D, & l'Angle BAC, qui est à la Circonference, s'appuyent tous-deux sur un méme Arc, & ont la même portion de Circonference pour Baze, à sçavoir BC. Cela étant, je dis que l'Angle BDC est double de l'Angle BAC. Pour le prouver,



Menez par les Points A & D la Ligne droite ADE. Cela posé :

Au Triangle ADB les deux Côtez DA, DB, sont égaux, par la definition du Cercle. Donc (par la 5. du 1.) les deux Angles DAB & DBA sont égaux entr'eux. Or l'Angle exterieur BDE est égal aux deux Angles DAB & DBA, par la 32. du 1. Donc l'Angle BDE est double de l'Angle BAD. De même, au Triangle ADC les deux Côtez DA, DC, sont égaux ; par consequent les deux Angles DAC & DCA sont aussi égaux. Or l'Angle EDC est aussi égal

égal aux deux Angles DAC & DCA ; donc il eſt double de l'Angle DAC. Si donc à l'Angle BDE on ajoûte l'Angle EDC, & à l'Angle BAD on ajoûte l'Angle DAC ; l'Angle BDC ſera double de l'Angle BAC, par le 19. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.



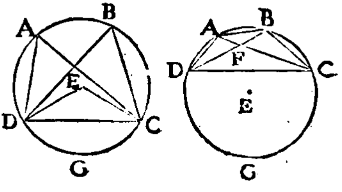
Que ſi le Point A avoit été pris comme dans cette ſeconde Figure, on auroit prouvé de même, que l'Angle BDE eſt double de l Angle BAD, & que l'Angle CDE eſt double de l'Angle CAD. Enſuite de quoi, ôtant l'Angle CAD de l'Angle BAD, & l'Angle CDE de l'Angle BDE ; l'Angle reſtant BDC ſera double de l'Angle reſtant BAC, par le 20. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIX.

Au Cercle, les Angles qui ſont dans un même Segment, ou qui s'appuyent ſur un même Arc, ſont égaux entr'eux.

JE ſuppoſe que dans le Cercle ABCD les deux Angles DAC, DBC, ſoient dans le même Seg-



ment

ment DABC, ou, (ce qui eſt la même choſe) qu'ils s'appuyent tous-deux ſur le même Arc DGC. Cela étant, je dis que ces deux Angles DAC, DBC, ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Comme tout Segment de Cercle eſt plus ou moins grand qu'un demi-Cercle; ſuppoſons premierement que le Segment DABC ſoit plus grand que le Demi-cercle. Cela ſuppoſé, menez du Centre E aux extremitez D & C de la Baze du Segment, les Lignes droites ED, EC. Cela poſé:

L'Angle DEC, qui eſt au Centre, eſt double de l'Angle DAC, qui eſt à la Circonference, par la Prop. precedente; & par la même raiſon il eſt auſſi double de l'Angle DBC. Et partant les deux Angles DAC & DBC, qui ſont chacun moitié d'un même Angle, ſont égaux entr'eux.

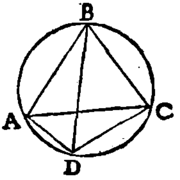
Suppoſons en ſecond lieu, que le Segment DABC ſoit plus petit que le demi-Cercle. Cela ſuppoſé, du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela poſé:

Puiſque le Segment DABC eſt plus petit que le demi-Cercle, il s'enſuit que le Segment DGC eſt plus grand que le demi-Cercle, & à plus forte raiſon le Segment AGB. D'où il ſuit que les Angles ADB, ACB, qui ſont dans le Segment AGB, ſont égaux entr'eux, par ce qui vient d'être prouvé. D'ailleurs, les Angles AFD, BFC, ſont auſſi égaux entr'eux, par la 15. du 1. Par conſequent les deux Triangles AFD, BFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au ſien. Et partant le troiſiéme DAF, ou DAC, eſt égal au troiſiéme FBC, ou DBC, par le 2. Corollaire de la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEORÈME XX.

Les Figures de quatre Côtez inscrites au Cercle, ont les Angles opposez égaux à deux droits.



JE suppose que la Figure ABCD soit inscrite dans le Cerle ABCD. Cela étant, je dis que les Angles opposez, comme BAD & BCD, sont égaux à deux droits. Pour le prouver,

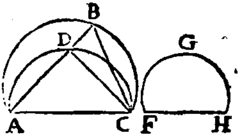
Menez les deux Lignes droites AC & BD. Cela posé:

L'Angle BAC & l'Angle BDC s'appuyent sur le même Arc BC; donc ils sont égaux, par la Proposition precedente. L'Angle CAD & l'Angle CBD s'appuyent aussi sur un même Arc, à sçavoir DC; donc ils sont aussi égaux. Partant les deux Angles BAC & CAD, qui font l'Angle total BAD, sont égaux aux deux Angles DBC & BDC. Mais ces deux-ci pris avec le troisiéme BCD, valent deux droits, par la 32. du 1. Donc l'Angle BAD, pris avec le même Angle BCD, valent aussi deux droits. On prouvera, par la même raison, que les deux Angles ABC & ADC sont égaux à deux droits; Qui est ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXI.

Si deux portions de Cercles sont semblables & inégales, leurs Bazes ne seront pas égales.



JE suppose que les deux portions de Cercles ABC, FGH, soient semblables & inégales. Cela étant, je dis que leurs Bazes AC, FH, ne sont pas égales.

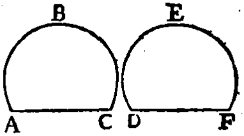
Car si ces Bazes étoient égales : en transportant par pensée le Segment ou portion de Cercle FGH sur le Segment ABC, on pourroit faire convenir la Baze FH avec la Baze AC. Et d'autant que le Segment FGH est supposé inégal au Segment ABC, l'Arc FGH ne conviendroit pas avec l'Arc ABC. C'est pourquoi l'Arc FGH tomberoit en quelqu'autre endroit, comme par exemple à l'endroit ADC. Tirant donc la Ligne droite ADB, qui coupe ces Arcs aux Points D & B, & menant les Lignes droites CB, CD ; il s'ensuivra que puisque les Segmens ADC, ABC, sont supposez semblables, les Angles ADC, ABC, qui sont dans ces Segmens, seront égaux entr'eux, par la definition des Segmens semblables. Et ainsi l'Angle ADC, qui est exterieur au respect du Triangle DBC, seroit égal à son opposé interieur DBC; ce qui est impossible, par la 16. du 1. Donc si deux portions de Cercles sont semblables & inégales, leurs Bazes ne seront pas égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

P R O-

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXII.

Si deux Segmens, ou deux portions de Cercles, ſemblables, ont pour Bazes des Lignes droites égales, ils ſeront égaux entr'eux.



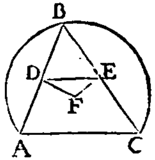
JE ſuppoſe que les deux Segmens ABC, DEF, ſoient ſemblables, & que leurs Bazes AC, DF, ſoient égales. Cela étant, je dis que ces deux Segmens ſont égaux entr'eux.

Car s'ils étoient inégaux, il s'enſuivroit que deux Segmens ſemblables & inégaux auroient des Bazes égales; ce qui eſt impoſſible, par la Prop. precedente. Donc ces deux Segmens ſont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME III.

Une portion de Cercle étant donnée, décrire le Cercle duquel elle est portion.



Je suppose que la portion de Cercle ABC soit donnée, & je propose de décrire le Cercle entier duquel elle est portion ; c'est à dire que je propose de trouver le Centre du Cercle, duquel la portion ABC est donnée. Pour le faire,

Prenez à discretion dans la Circonference ABC trois Points, par exemple A, B, C. Menez les deux Lignes droites AB, BC. Coupez chacune de ces Lignes en deux également aux Points D & E. De chacun de ces Points élevez une Perpendiculaire, sçavoir DF, EF. Cela étant, je dis que ces deux Perpendiculaires se rencontreront ; & que le Point de leur rencontre, à sçavoir F, est le Centre du Cercle dont ABC est une portion. Pour le prouver,

Du Point D au Point E menez la Ligne droite DE. Cela posé :

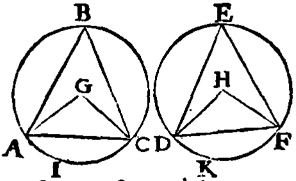
Puisque les Angles BDF & BEF sont droits, par la construction, les Angles EDF & DEF, qui n'en sont que les parties, sont moindres que deux droits. Et partant les deux Lignes DF, EF, se doivent rencontrer, par la Remarque de la 28. du 1. Ensuite de quoi, il s'ensuit, par la 1. Remarque de la premiere Prop. de ce Livre, que le Point F est le Centre cherché ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles égaux, les Angles égaux s'appuyent sur Circonferences égales; soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonference.



JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez au Centre, ou les Angles ABC, DEF, qui sont constituez à la Circonference, soient aussi égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Arcs AIC, DKF, sur lesquels ces Angles s'appuyent, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites AC, DF. Cela posé:

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux, il s'ensuit que les Côtez AG, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez DH, HF, du Triangle DHF. Deplus, l'Angle AGC est supposé égal à l'Angle DHF. Partant la Baze AC est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ainsi nous avons deux Segmens de Cercles ABC, DEF, qui sont semblables, puis qu'ils sont supposez capables d Angles égaux; & qui d'ailleurs ont pour Bazes des Lignes droites égales, sçavoir AC, DF. Et partant ces deux Segmens sont égaux, par la 24. Prop. D'où il suit, que si on les ôte des deux Cercles

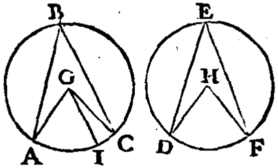
Cercles entiers, qui sont supposez égaux, les Arcs restans AIC, DKF, seront égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXIV.

Aux Cercles égaux, les Angles qui s'appuyent sur Circonferences égales sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonference.

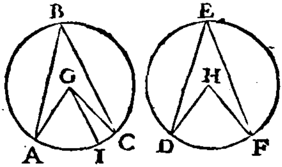
JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Arcs AC, DF soient aussi égaux. Cela étant, je dis premierement que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez aux Centres G & H, & qui s'appuyent sur ces deux Arcs, sont égaux entr'eux.



Car s'ils n'étoient pas égaux, il faudroit que l'un de ces Angles fût plus grand que l'autre. Posons donc que ce soit l'Angle AGC Si cela est, par la 24. du 1. on pourra en retrancher une partie, comme AGI, égale à DHF. Ensuite de quoi, par la Prop. precedente, l'Arc AI sera égal à l'Arc DF. Mais l'Arc AC est déja supposé égal à l'Arc DF. Ainsi l'Arc AI & l'Arc AC seroient égaux entr'eux, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que l'Angle AGC soit plus grand que l'Angle DHF. On prouvera de même, que l'Angle DHF n'est pas plus grand que l'Angle AGC;

AGC ; & partant ces deux Angles sont égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les Angles ABC, DEF, qui sont à la Circonference, & qui s'appuyent sur ces mêmes Arcs, sont égaux entr'eux.



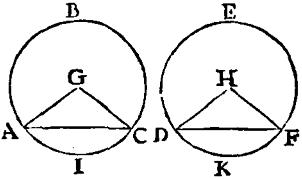
Car (par la 20. Prop.) ces deux Angles ABC, DEF, sont moitié des Angles AGC, DHF, qui viennent d'être prouvez égaux. Et partant les deux Angles ABC, DEF, sont égaux entr'eux, par le 7. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXV.

Aux Cercles égaux, les Lignes droites égales soûtiennent Circonferences égales.

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Lignes AC, DF, qui sont les Soûtendantes des Arcs AIC & DKF, soient égales. Cela étant, je dis que les Arcs AIC & DKF sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC ; HD, HF. Cela posé :

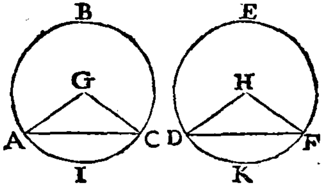
Les

Les Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux Côtez HD, HF, du Triangle DHF, par la definition des Cercles égaux. Deplus, la Baze AC est égale à la Baze DF, par supposition. Donc l'Angle AGC est égal à l'Angle DHF, par la 8. du 1. D'où il suit (par la 26. Prop.) que les Arcs AIC & DKF, sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXVI.

Aux Cercles égaux, les Circonferences égales ont leurs Soûtendantes égales.



JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Circonferences ou les Arcs AIC, DKF, soient aussi égales. Cela étant, je dis que les Lignes AC & DF, qui en sont les Soûtendantes, sont égales entr'elles. Pour le prouver,

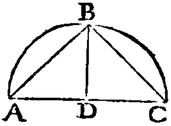
Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC; HD, HF. Cela posé:

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux: les deux Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez HD, HF, du Triangle DHF. D'ailleurs l'Angle AGC, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle DHF, compris des deux Côtez du second; puisque les Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux par supposition. Et partant la Baze AC est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Arc de Cercle donné.



JE suppose que l'Arc de Cercle ABC, soit donné ; & je propose de le couper en deux parties égales. Pour le faire,

Du Point A au Point C menez la Ligne droite AC ; coupez cette Ligne en deux également au Point D ; élevez au Point D la Perpendiculaire DB, qui rencontre l'Arc au Point B. Cela étant, je dis que cét Arc est coupé en deux également ; c'est à dire que l'Arc AB est égal à l'Arc BC. Pour le prouver,

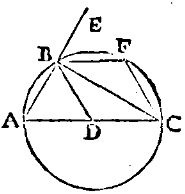
Menez les Lignes droites AB, BC. Cela posé :

Le Côté AD, du Triangle ABD, est égal au Côté DC, du Triangle CDB, par la construction. Le Côté BD est commun à ces deux Triangles. Deplus, l'Angle ADB est égal à l'Angle CDB, par la construction. Donc la Baze AB est égale à la Baze BC, par la 4. du 1. Et par consequent les Arcs AB, BC, que ces deux Bazes soûtiennent, sont égaux entr'eux, par la 28. Prop. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXVII.

Au Cercle, l'Angle qui est au demi-Cercle est droit; celui qui est au plus grand Segment est plus petit qu'un droit; & celui qui est au plus petit Segment est plus grand qu'un droit. Deplus, l'Angle du plus grand Segment est plus grand qu'un droit; & l'Angle du plus petit Segment est plus petit qu'un droit.

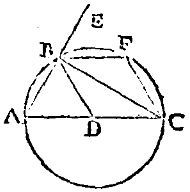


JE suppose qu'au Cercle ABC, D soit le Centre, & ADC le Diametre, & qu'ayant pris dans la Circonference le Point B à discretion, on ait mené de ce Point aux extrémitez du Diametre les deux Lignes droites BA, BC, qui font l'Angle au demi-Cercle ABC. Cela étant, je dis premierement que l'Angle ABC est droit. Pour le prouver,

Menez du Point D au Point B la Ligne droite DB, & continuez la Ligne AB vers E. Cela posé:

Au Triangle ABD, les Côtez DA, DB, sont égaux, par la definition du Cercle. Donc l'Angle ABD est égal à l'Angle BAD, par la 5. du 1. De même, au Triangle DBC, les Côtez DB, DC, étant égaux, l'Angle DBC est égal à l'Angle BCD. Et ainsi l'Angle total ABC est égal aux deux Angles BAD, BCD. D'ailleurs, l'Angle exterieur EBC est égal à ces deux mêmes Angles BAC, BCD, par la 32. du 1. Partant l'Angle ABC & l'Angle EBC sont égaux entr'eux. Et par conséquent la Ligne BC est perpendiculaire à AE, & l'Angle ABC est droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BAC, qui est au plus grand Segment CAB, est plus petit qu'un droit. Pour le prouver,



Au Triangle ABC, les deux Angles ABC & BAC sont plus petits que deux droits, par la 17. du 1. Or il vient d'être prouvé que l'Angle ABC est droit. Donc l'Angle BAC est moindre qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en troisiéme lieu, que l'Angle BFC, qui est au plus petit Segment CFB, est plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez ABFC est inscrite au Cercle; & ainsi les deux Angles opposez BAC & BFC sont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais il vient d'être prouvé que l'Angle BAC est moindre qu'un droit. Donc l'Angle BFC est plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en quatriéme lieu, que l'Angle du plus grand Segment, c'est à dire l'Angle mixte CBA, qui est compris de la Ligne droite BC, & de la Circonference BA, est plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

L'Angle mixte CBA est plus grand que l'Angle rectiligne ABC, qui n'est que sa partie. Or l'Angle ABC est droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBA est plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je

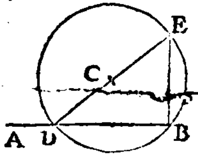
Je dis enfin que l'Angle du plus petit Segment, c'est à dire l'Angle mixte CBF, qui est compris de la Ligne droite CB, & de la Circonference BF, est plus petit qu'un droit. Pour le prouver,

L'Angle mixte CBF est plus petit que l'Angle rectiligne CBE, dont il n'est que partie. Or l'Angle CBE est droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBF est plus petit qu'un droit; Ce qui restoit à démontrer.

REMARQUE.

Cette Proposition nous donne un moyen facile pour élever une Perpendiculaire à l'extremité d'une Ligne droite donnée.

Supposons que la Ligne droite donnée soit AB, & qu'à son extremité B il faille élever une Perpendiculaire. Pour le faire,

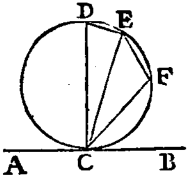


Prenez quelque Point, comme C, au dessus de la Ligne AB. Puis du Point C, comme Centre, & de l'intervalle CB, décrivez le Cercle EBD. Ce Cercle coupera la Ligne AB en quelqu'autre Point, comme D. Par ce Point D & par le Centre C menez la Ligne droite DCE. Enfin du Point E au Point B menez la Ligne droite EB; & cette Ligne sera perpendiculaire à AB. Car puisque l'Angle B est au demi-Cercle, il est droit.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXVIII.

Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on méne une Ligne droite qui le coupe : l'Angle que fait de part & d'autre la Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne est capable.



JE suppose que la Ligne AB touche le Cercle CDE au Point C, & que de ce Point on a méne la [redacted] qui coupe le Cercle en deux Segmens, sçavoir CDE, & CFE. Cela étant, je dis premierement que l'Angle BCE, que la Coupante fait d'une part avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CDE est capable. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CD perpendiculaire à AB ; & du Point D au Point E menez la Ligne droite DE, laquelle fera avec CD l'Angle CDE, dont le Segment CDE est capable. Si bien qu'il s'agit de montrer que l'Angle CDE est égal à l'Angle BCE. Pour le prouver.

Puisque la Ligne AB touche le Cercle, & que CD a été élevée perpendiculairement au Point de l'attoul'attouchement, il s'ensuit (par la 19. Prop.) qu'elle passe par le Centre, & par consequent qu'elle en est le Diametre, & que le Segment CFED est un demi-Cercle. D'où il suit que l'Angle CED, qui est au demi-Cercle, est droit, par la 31. Prop. Et d'autant que les trois Angles du Triangle CDE sont égaux à deux droits, par la 32. du 1. il s'ensuit que les deux Angles CDE & DCE sont égaux à un droit, c'est à dire à l'Angle BCD. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte l'Angle DCE, qui leur est commun, il restera l'Angle BCE égal à l'Angle CDE; Ce qu'il falloit démontrer.

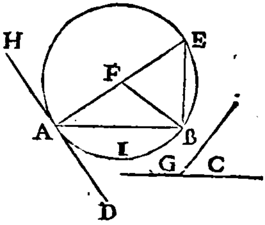
Je dis en second lieu, que l'Angle ACE, que la Coupante CE fait avec la Touchante AB, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CFE est capable; c'est à dire, que si dans l'Arc CFE on prend à discretion quelque Point, comme F, d'où l'on méne les Lignes droites FC, FE, l'Angle ACE sera égal à l'Angle CFE. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez CDEF étant inscrite au Cercle, les deux Angles opposez CDE, CFE, sont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais les Angles ACE, BCE, sont aussi égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles CDE, CFE, sont égaux aux deux Angles BCE, ACE. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles CDE & BCE, qui viennent d'être prouvez égaux, l'Angle restant CFE sera égal à l'Angle restant ACE; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME V.

Sur une Ligne droite donnée, décrire une portion de Cercle capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée, & que l'Angle rectiligne C soit aussi donné; & je propose de décrire sur AB une portion de Cercle capable d'un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,

Menez la Ligne droite HAD, qui fasse avec AB l'Angle BAD egal à l'Angle C. Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à HD. Puis tirez du Point B la Ligne droite BF, qui fasse avec AB l'Angle ABF égal à l'Angle FAB. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que la Circonference de ce Cercle passera par le Point B, & que le Segment AEB sera capable d'un Angle égal à l'Angle C; c'est à dire, qu'ayant mené la Ligne BE, l'Angle AEB sera égal à l'Angle C. Pour le prouver,

Puisque les Angles FAB, FBA, sont égaux, par la construction: les deux Côtez FA, FB, qui les soûtiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. D'où il suit, que la Circonference du Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par le le Point B. D'ailleurs, puisque la Ligne AFE passe par le Centre F du Cercle AEB, il s'ensuit qu'elle en est le Diametre; & puisque la Ligne HAD lui est perpendiculaire, il s'ensuit que cette Ligne HAD touche ce Cercle, par la 16. Prop. Or la Ligne AB part du Point de l'attouchement, & coupe le même Cercle. Donc (par la Proposition precedente) l'Angle BAD, qu'elle fait avec la Touchante, est égal à l'Angle AEB, dont le Segment alterne AEB est capable. Mais l'Angle BAD a été fait égal à l'Angle C. Donc l'Angle AEB est aussi égal à l'Angle C; Ce qu'il falloit démontrer.

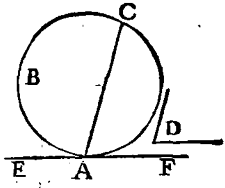
Si l'Angle donné eût été obtus, comme l'Angle G, il auroit toûjours fallu faire la même construction que ci-dessus. Mais au lieu de prendre la portion AEB, il auroit fallu prendre la portion AIB, comme étant celle qui est capable d'un Angle égal à l'Angle donné G.

Si l'Angle donné eût été droit, il n'auroit fallu que décrire un demi-Cercle sur la Ligne donnée AB. Car le demi-Cercle est capable d'un Angle droit, par la 31. Prop. Ainsi dans tous les cas possibles, nous avons sur une Ligne droite donnée décrit un Segment, ou une portion de Cercle, capable d'un Angle rectiligne donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME VI.

D'un Cercle donné, retrancher un Segment capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.



JE suppose que le Cercle ABC soit donné, & que l'Angle rectiligne D soit aussi donné; & je propose de retrancher du Cercle ABC un Segment capable d'un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Menez la Ligne droite EAF, qui touche le Cercle au Point A. Puis (par la 23. du 1.) tirez du Point A dans le Cercle la Ligne droite AC, qui fasse avec AF l'Angle FAC égal à l'Angle D. Cela étant, je dis que le Segment ABC est capable d'un Angle égal à l'Angle rectiligne donné D. Pour le prouver,

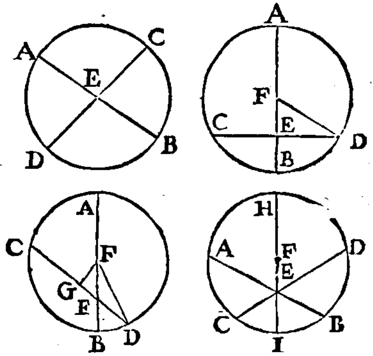
Par la 32. Prop. l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle FAC. Or, par la construction, l'Angle FAC est égal à l'Angle D. Partant l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXV.

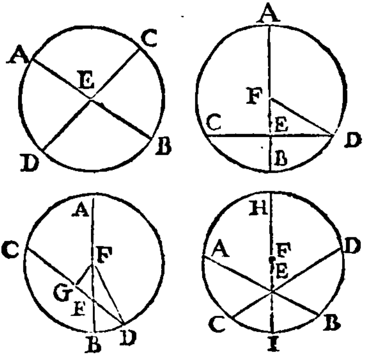
THEOREME XXIX.

Si dans un Cercle deux Lignes droites se coupent l'une l'autre; le Rectangle compris des deux parties de l'une, est égal au Rectangle compris des deux parties de l'autre.



JE suppose que dans le Cercle ACBD les deux Lignes droites AB, CD, se coupent l'une l'autre au Point E. Cela étant, je dis que le Rectangle compris des deux parties AE, EB, de la Ligne AB, est égal au Rectangle compris des deux parties CE, ED, de la Ligne CD.

Cette Prop. peut avoir quatre cas. Car premierement il se peut faire que les deux Lignes qui s'entrecoupent passent par le Centre. Secondement il se peut faire qu'il n'y en ait qu'une qui y passe, & qu'elle coupe l'autre en deux parties égales. Troisiémement il se peut faire que celle qui passe par le Centre, coupe l'autre en deux parties inégales. Enfin il se peut faire que ni l'une ni l'autre ne passe par le Centre.



Supposons donc 1. que les deux Lignes AB, CD, passent par le Centre. Cela posé: comme les deux parties AE, EB, sont égales aux deux parties CE, ED, par la definition du Cercle; il est évident que le Rectangle compris des deux premieres, est égal au Rectangle compris des deux autres.

Supposons en second lieu, que la Ligne AB passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui n'y passe point, en deux parties égales. Cela étant, je dis que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Menez du Centre F au Point D la Ligne droite FD. Cela posé :

Puisque la Ligne AB est coupée en deux également au Point F, & en deux inégalement au Point E, il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal au Quarré de FB, ou de son égale FD. Mais puisque FE, qui passe par le Centre, coupe CD en deux également, elle la coupe aussi perpendiculairement, par la 3. Proposition. Donc l'Angle FED est droit. Par consequent (par la

47. du

47. du 1.) les deux Quarrez de FE & de ED sont égaux au Quarré de FD. Et ainsi le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal aux deux Quarrez de FE & de ED. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de FE, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AE, EB, égal au Quarré de ED. Mais puisque les Lignes CE, ED, sont égales, le Quarré de ED n'est autre chose que le Rectangle compris de CE, ED. Et partant le Rectangle compris de AE, EB, est égal au Rectangle compris de CE, ED.

Supposons en troisiéme lieu, que la Ligne AB passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui n'y passe point, en deux parties inégales. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Abaissez du Centre F la Ligne FG, perpendiculaire à CD; au moyen de quoi, la Ligne CD sera divisée en deux également, par la 3. Prop. Puis du Point F au Point D menez la Ligne droite FD. Cela posé:

Puisque AB est coupée en deux parties égales au Point F, & en deux inégales au Point E; il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal au Quarré de FB, ou de son égale FD. Mais (par la 47. du 1.) le Quarré de FE est égal aux deux Quarrez de FG & de GE. De même, le Quarré de FD est égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Si donc au lieu du Quarré de FE on prend les deux Quarrez de FG & de GE, & au lieu du Quarré de FD on prend les deux Quarrez de FG & de GD: il s'ensuivra que le Rectangle de AE, EB, avec les deux Quarrez de FG & de GE, sera égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Et partant, ôtant de ces deux Touts, qui sont égaux, le Quarré de FG, qui leur est commun; il restera le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de GE, qui sera égal au Quarré de GD. D'ailleurs, puisque CD est coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point E; le Rectangle de CE, ED, avec le Quarre de GE, est égal au Quarré de GD, par la 5. Prop. du 2. Et ainsi le Rectangle de AE, EB, avec le Quarré de GE, est égal au Rectangle de CE, ED, avec le Quarré de GE. Otant donc le Quarré de GE, qui leur est commun, il s'ensuivra que le Rectangle de AE, EB, sera égal au Rectangle de CE, ED.

Supposons enfin que ni l'un ni l'autre de ces deux Lignes AB, CD, ne passe par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Menez par le Centre F & par le Point E la Ligne droite HFEI. Cela posé:

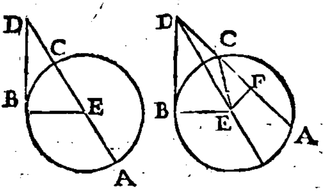
De quelque façon que la Ligne HI coupe AB, il s'ensuit, par ce qui vient d'être démontré, que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de HE, EI. De même aussi, de quelque façon que HI coupe CD, il s'ensuit que le Rectangle de DE, EC, est égal au même Rectangle de HE, EI. Et ainsi le Rectangle de AE, EB, & le Rectangle de DE, EC, qui sont égaux à un même Rectangle, sont égaux entr'eux; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXX.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on tire deux Lignes droites, dont l'une le touche, & l'autre le coupe, & se va terminer à sa Circonference concave: le Rectangle compris de toute la Coupante & de sa partie hors du Cercle, sera égal au Quarré de la Touchante.



JE suppose qu'on ait pris à discretion le Point D, hors du Cercle ABC, & que de ce Point on ait tiré la Ligne droite DB, qui touche le Cercle au Point B, & la Ligne droite DA, qui le coupe, & va se terminer à sa Circonference concave. Cela étant, je dis que le Rectangle compris de AD, DC, est égal au Quarré de DB.

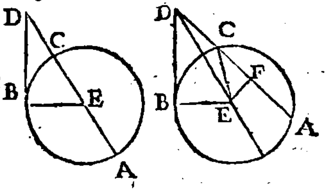
Cette Proposition peut avoir deux cas. Car ou la Ligne DA passe par le Centre, ou elle n'y passe point.

Supposons donc 1. qu'elle passe par le Centre. Cela supposé:

Menez

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB. Cette Ligne (par la 18. Prop.) sera perpendiculaire à la Touchante DB ; d'où il suit que l'Angle EBD sera droit. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux également au Point E, & que la Ligne CD lui est ajoûtée : il s'ensuit que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EC, ou de son égale EB, est égal au Quarré de ED, par la 6. Prop. du 2. Mais le Quarré de ED est egal aux deux Quarrez de EB & de DB, par la 47. du 1. Par consequent le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, est égal aux deux Quarrez de EB & de DB. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AD, DC, qui sera égal au Quarré de DB ; Ce qu'il falloit démontrer.



Supposons maintenant que la Ligne DA ne passe point par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AD, DC, est égal au Quarré de DB. Pour le prouver,

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB ; cette Ligne (par la 18. Prop.) sera perpendiculaire à DB. De ce même Centre abaissez la Ligne EF perpendiculaire à AD ; cette Ligne EF (par la 3. Prop.) coupera la partie AC, qui est dans le Cercle, en deux également. Enfin de ce même Point menez les deux Lignes droites EC, ED. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux parties égales au Point F, & que la Ligne CD lui est ajoûtée : il s'ensuit (par la 6. Prop. du 2.) que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de CF, est égal au Quarré de DF. Si donc à ces deux Touts, qui

qui ſont égaux, on ajoûte le Quarré de FE; il s'enſuivra que le Rectangle de AD, DC, & les deux Quarrez de CF & de FE, ſeront égaux aux deux Quarrez de DF & de FE. Or les deux Quarrez de CF & de FE ſont égaux au Quarré de EC, ou de ſon égale EB, par la 47. du 1. Et de même, les deux Quarrez de DF & de FE ſont égaux au Quarré de ED. Si donc au lieu des deux Quarrez de CF & de FE, on prend le Quarré de EB; & au lieu des deux Quarrez de DF & de FE, on prend le Quarré de ED: il s'enſuivra que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, ſera égal au Quarré de ED. Mais les deux Quarrez de DB & de EB ſont auſſi égaux au Quarré de ED, par la 47. du 1. Donc le Rectangle de DA, DC, & le Quarré de EB, ſont enſemble égaux aux deux Quarrez de DB & de EB. Si donc de ces deux Touts, qui ſont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur eſt commun; il reſtera le Rectangle de DA, DC, égal au Quarré de DB; Ce qu'il falloit démontrer.

I. COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que ſi d'un Point pris à diſcretion hors d'un Cercle, on méne tant de Lignes droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent ſe terminer à ſa Circonference concave; le Rectangle compris d'une de ces Coupantes, telle que l'on voudra, & de ſa partie hors du Cercle, ſera égal au Rectangle compris de telle autre Coupante que l'on voudra, de ſa partie hors du Cercle. Car chacun de ces Rectangles eſt égal au Quarré de la Touchante, qui ſeroit menée de ce même Point.

II. COROLLAIRE.

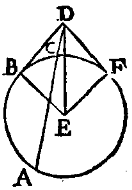
Il ſuit encore, que ſi d'un Point pris à diſcretion hors

hors d'un Cercle, en méne deux Lignes droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles. Car le Quarré de chacune de ces Lignes est égal au Rectangle d'une Coupante & de sa partie hors du Cercle. Et ainsi chacun de ces Quarrez est égal à l'autre; d'où il suit que les Lignes qui en sont les Côtez, sont égales, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXXI.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on méne deux Lignes droites, dont l'une coupe le Cercle, & va se terminer à sa Circonference concave, & l'autre atteint le Cercle: & que le Rectangle compris de toute la Coupante, & de sa partie hors du Cercle, soit égal au Quarré de celle qui atteint le Cercle; celle-ci touchera le Cercle.



JE suppose que du Point D, pris à discretion hors du Cercle ABC, on ait mené les deux Lignes droites DA, DB; dont l'une, à sçavoir DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonference concave; & l'autre, à sçavoir DB, atteint le Cercle: & que le Rectangle compris de DA, DC, soit égal au Quarré de DB. Cela étant, je dis que cette Ligne

Ligne DB touche le Cercle. Pour le prouver,

Menez du Point D la Ligne droite DF, qui touche le Cercle. Puis du Centre E menez les Lignes droites EB, ED, EF. Cela posé:

Puisque du Point D partent les deux Lignes droites DA, DF; que DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonference concave; & que DF le touche; il s'ensuit (par la Proposition precedente) que le Quarré de DF est égal au Rectangle de DA, DC. Mais le Quarré de DB est supposé égal au même Rectangle. Partant le Quarré de DB, & le Quarré de DF, sont égaux entr'eux. Et par consequent ces deux Lignes, qui en sont les Côtez, sont aussi égales entr'elles. D'ailleurs, la Ligne BE est égale à la Ligne FE, par la definition du Cercle. Si bien que les deux Triangles DBE, DFE, ont deux Côtez égaux à deux Côtez, chacun au sien, & la Baze DE commune. Partant (par la 8. du 1.) l'Angle DBE est égal à l'Angle DFE. Mais l'Angle DFE est droit, par la 18. Prop. Donc l'Angle DBE est aussi droit. D'où il suit (par la 16. Prop.) que la Ligne DB touche le Cercle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

ELE-

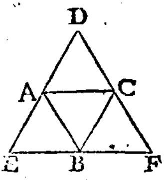
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DEFINITIONS.

1. UNE Figure rectiligne est dite être inscrite dans une autre Figure rectiligne, quand le Sommet de chacun de ses Angles touche un des Côtez de la Figure dans laquelle elle est inscrite.

Ainsi le Triangle ABC est dit être inscrit dans le Triangle DEF, parce que le Sommet de chacun de ses Angles A, B, C, touche un des Côtez du Triangle DEF.



2. Une Figure rectiligne est dite être circonscrite à une autre Figure rectiligne, quand chacun de ses Côtez passe par

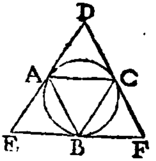
par le Sommet d'un des Angles de la Figure à laquelle elle eſt circonſcrite.

Ainſi le Triangle DEF eſt dit être circonſcrit au Triangle ABC, parce que chacun des Côtez du Triangle DEF paſſe par le Sommet d'un des Angles du Triangle ABC.

3. Une Figure rectiligne eſt dite être inſcrite au Cercle, quand le Sommet de chacun de ſes Angles touche la Circonference du Cercle auquel elle eſt inſcrite.

Ainſi le Triangle ABC eſt inſcrit dans le Cercle ABC.

4. Une Figure rectiligne eſt dite être circonſcrite à un Cercle, quand chacun de ſes Côtez touche le Cercle auquel elle eſt circonſcrite.



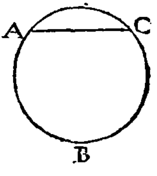
Ainſi le Triangle DEF eſt circonſcrit au Cercle ABC, parce que chacun des Côtez du Triangle DEF touche le Cercle ABC.

5. Un Cercle eſt dit être inſcrit dans une Figure rectiligne, quand ſa Circonference touche chacun des Côtez de la Figure dans laquelle il eſt inſcrit.

Ainſi le Cercle ABC eſt inſcrit dans le Triangle DEF.

6. Un Cercle eſt dit être circonſcrit à un Figure rectiligne, quand ſa Circonference paſſe par le Sommet de chaque Angle de la Figure à laquelle il eſt circonſcrit.

Ainſi le Cercle ABC eſt circonſcrit au Triangle ABC.



7. Une Ligne droite eſt dite être appliquée à un Cercle, quand ſes extremitez ſont dans la Circonference du Cercle.

Ainſi la Ligne AC eſt appliquée au Cercle ABC.

8. Un Polygone, eſt une Fi-

gure

gure comprise de plusieurs Lignes droites.

9. Un Pentagone, est une Figure comprise de cinq Lignes droites.

10. Un Hexagone, est une Figure comprise de six Lignes droites.

11. Un Heptagone, de sept.

12. Un Octogone, de huit.

13. Un Enneagone, de neuf.

14. Un Decagone, de dix.

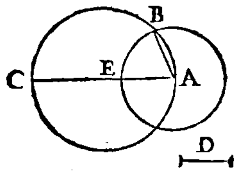
15. Un Endecagone, de onze.

16. Un Dodecagone, de douze, &c.

PROPOSITION I.

PROBLEME I.

A un Cercle donné, appliquer une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le Diametre du Cercle.



JE suppose que le Cercle ABC soit donné, & que la Ligne D, qui n'est pas plus grande que le Diametre du Cercle, soit aussi donnée; & je propose d'appliquer au Cercle ABC, une Ligne droite égale à la Ligne D. Pour le faire,

Menez dans ce Cercle le Diametre AC, lequel par la supposition est ou égal, ou plus grand que la Ligne donnée D. Cela posé :

S'il est égal, la chose est faite, & la Ligne appliquée,

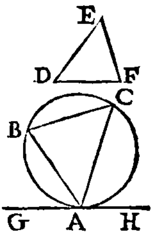
quée, puisque le Diametre AC est supposé égal à la Ligne donnée D. S'il est plus grand, retranchez-en la partie AE égale à la Ligne D. Puis du Centre A, & de l'intervalle AE, décrivez le Cercle EB, lequel coupera la Circonference de l'autre Cercle au Point B. Enfin du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que la Ligne AB, qui est appliquée au Cercle ABC, est égale à la Ligne donnée D. Pour le prouver,

La Ligne AB, & la Ligne AE, partent toutes-deux du Point A, qui est le Centre du Cercle EB, & vont se terminer à sa Circonference; par consequent elles sont égales entr'elles. Or la Ligne AE est égale à la Ligne donnée D, par la construction. Donc la Ligne AB est aussi égale à la Ligne D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION II.

PROBLEME II.

Dans un Cercle donné, inscrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.

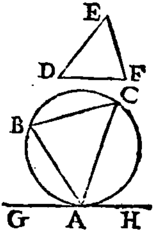


JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnez; & je propose d'inscrire dans ce Cercle un Triangle, qui soit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,

Menez (par la 17. du 3.) la Ligne droite GAH, qui touche le Cercle au Point A. Puis du Point A menez la Ligne droite AB, qui fasse avec AG l'Angle BAG égal à l'Angle D du Triangle DEF. De ce même Point menez la Ligne droite

droite AC, qui fasse avec AH l'Angle HAC égal à l'Angle F. Enfin du Point B au Point C menez la Ligne droite BC. Cela posé, je dis que le Triangle ABC, inscrit au Cercle ABC, est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puisque la Ligne GAH touche le Cercle au Point A, & que la Ligne AB, qui part du Point de l'attouchement, le coupe: l'Angle GAB, que la Coupante fait avec la Touchante, sera égal à l'Angle ACB, qui est au Segment alterne, par la 32. Prop. du 3. Mais l'Angle GAB est égal à l'Angle D, par la construction. Donc l'Angle ACB est aussi égal à l'Angle D. De même, la Ligne AC coupant le Cercle, l'Angle HAC, qu'elle fait avec la Touchante, est égal à l'Angle ABC, qui est dans le Segment alterne. Mais l'Angle HAC est égal à l'Angle F, par la construction. Donc l'Angle ABC est aussi égal à l'Angle F. Et ainsi le Triangle ABC a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF. Par consequent le troisieme BAC est égal au troisiéme E, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

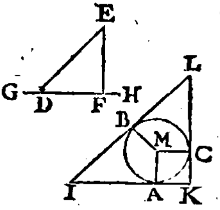


PRO-

PROPOSITION III.

PROBLEME III.

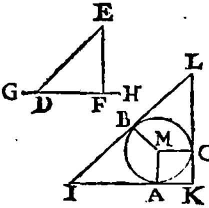
Alentour d'un Cercle donné, décrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.



JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnez; & je propose de décrire alentour du Cercle ABC un Triangle qui soit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,

Prolongez de part & d'autre l'un des Côtez du Triangle, par exemple DF, vers G, & vers H. Puis du Centre M tirez à discretion à quelque Point de la Circonference la Ligne droite MA. De ce même Centre menez la Ligne droite MB, qui fasse avec MA l'Angle AMB égal à l'Angle EDG, par la 23. du 1. De ce même Point menez la Ligne MC, qui fasse avec MA l'Angle AMC égal à l'Angle EFH. Cela fait, tirez par les Points A, B, C, trois Lignes droites IAK, IBL, KCL, perpendiculaires aux Lignes MA, MB, MC. Ces trois Lignes formeront un Triangle, que je dis être circonscrit au Cercle ABC, & être équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puisque chacune de ces Lignes IK, IL, KL, est perpendiculaire à l'extremité du Diametre du Cercle, ces Lignes touchent le Cercle, par la 16. du 3. Et ainsi le Triangle IKL est circonscrit à ce Cercle. Si bien qu'il ne reste plus qu'à prouver qu'il est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver, Les quatre Angles de la Figure AMBI valent quatre droits, par la Remarque de la 32. du 1. Or les deux Angles MAI, MBI, sont droits, par la construction. Donc les deux Angles AMB, AIB, sont aussi égaux à deux droits. D'ailleurs, les Angles EDG, EDF, sont égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles AMB, AIB, sont égaux aux deux Angles EDG, EDF. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMB, & EDG, qui sont égaux par la construction: l'Angle AIB restera égal à



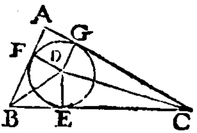
l'Angle EDF. De même, les quatre Angles de la Figure AMCK valent quatre droits. Or les deux Angles MAK, MCK, sont droits, par la construction. Donc les deux restans AMC, AKC, valent ensemble deux droits. Mais les Angles EFH, EFD, valent aussi deux droits. Ainsi les deux Angles AMC, AKC, sont égaux aux deux Angles EFH, EFD. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMC, & EFH, qui sont égaux par la construction: l'Angle AKC restera égal à l'Angle EFD. Et ainsi le Triangle ILK a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF, Par consequent le troisiéme ILK est égal au troisiéme DEF, par la 32. du 1. D'où il suit que le Triangle ILK, que nous avons circonscrit au Cercle ABC, est équiangle au Triangle DEF; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION IV.

PROBLEME IV.

Dans un Triangle donné, décrire un Cercle.

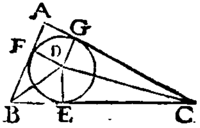


JE suppose que le Triangle ABC soit donné ; & je propose d'y inscrire un Cercle. Pour le faire,

Coupez (par la 9. du 1.) l'un des Angles de ce Triangle, par exemple ABC, en deux également par la Ligne droite BD. Coupez de même un autre Angle, comme ACB, en deux également par la Ligne droite CD. Du Point D, où les deux Lignes BD, CD, se rencontrent, abaissez sur l'un des Côtez de ce Triangle, par exemple sur BC, la Perpendiculaire DE. Enfin du Centre D, & de l'intervalle DE, décrivez un Cercle ; & je dis qu'il sera inscrit au Triangle ABC. Pour le prouver,

Abaissez du Point D les Lignes droites DF, DG, perpendiculaires aux deux autres Côtez AB, AC. Cela posé :

Aux Triangles BDE, & BDF, l'Angle EBD est égal à l'Angle FBD, par la construction ; l'Angle DEB est égal à l'Angle DFB, étant tous-deux droits, par la construction ; de plus, le Côté BD est commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DF est égal au Côté DE, par la 26. du 1. De même, aux Triangles CGD, & CED, l'Angle GCD est égal à l'Angle ECD, par la construction ; l'Angle DGC est égal à l'Angle DEC, ces deux Angles étant droits, par la construction ; deplus, le Côté DC est commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DG est égal au Côté DE, par la 26. du 1. Et ainsi les trois Lignes DE, DF, DG, sont égales entr'elles. Par consequent le Cercle EFG, qui est décrit du Centre D, & de l'intervalle DE, passe aussi par les extremitez des Lignes FD, DG. Or



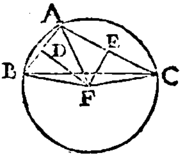
puisque les Côtez AB, BC, CA, du Triangle ABC, sont perpendiculaires aux extremitez des trois demi-Diametres DF, DE, DG, il s'ensuit par la 16. du 3. qu'ils touchent le Cercle EFG, & par consequent que ce Cercle est inscrit dans le Triangle ABC, par la 5. Definition; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION V.

PROBLEME V.

Alentour d'un Triangle donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Triangle ABC soit donné; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Triangle. Pour le faire,



Coupez (par la 10. du 1.) un des Côtez de ce Triangle, par exemple AB, en deux également au Point D; & de ce Point élevez la Perpendiculaire DF, par la 11. du 1. Coupez de même un autre Côté, comme par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point élevez aussi la Perpendiculaire EF. Mainte-

Maintenant du Point F, où les Lignes DF, EF, se rencontrent, menez la Ligne droite FA, au Sommet de l'un des Angles de ce Triangle. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentout du Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point F aux Sommets des deux autres Angles B & C, menez les deux Lignes droites FB, FC. Cela posé:

Aux Triangles BDF, & ADF, le Côté BD est égal au Côté AD, par la construction; le Côté DF, leur est commun; deplus, l'Angle BDF est égal à l'Angle ADF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Et partant la Baze FB est égale à la Baze FA, par la 4. du 1. De même, aux Triangles CEF, & AEF, le Côté CE est égal au Côté AE, par la construction; le Côté EF leur est commun; & l'Angle CEF est égal à l'Angle AEF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Partant la Baze FC est égale à la Baze FA. Et ainsi les trois Lignes FB, FA, FC, sont égales entr'elles. Par consequent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extremitez des Lignes FB, FC. Or les extremitez des Lignes FA, FB, FC, sont les Sommets des Angles du Triangle ABC. Et par consequent ce Cercle est décrit alentour du Triangle ABC, par la 6. Definition; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

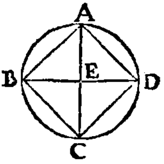
PROPOSITION VI.

PROBLEME VI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quarré.

JE ſuppoſe que le Cercle ABC ſoit donné ; & je propoſe d'y inſcrire un Quarré. Pour le faire,

Par le Centre E menez le Diametre AEC ; coupez ce Diametre à Angles droits par un autre Diametre, comme BED ; puis menez les Lignes AB, BC, CD, & DA. Ces quatre Lignes formeront une Figure de quatre Côtez inſcrite au Cercle. Cela étant, je dis que cette Figure eſt un Quarré. Pour le prouver,



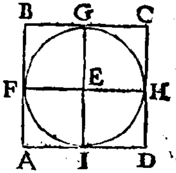
Puiſque les quatre Angles qui ſont autour du Centre E, ſont droits par la conſtruction, les quatre Arcs ſur leſquels ils s'appuyent ſont égaux entr'eux, par la 26. du 3. Et par conſequent les quatre Soûtendantes AB, BC, CD, DA, ſont égales entr'elles, par la 29. du 3. D'ailleurs, chacun des Angles de la Figure ABCD, étant au demi-Cercle, eſt droit, par la 31. du 3. Et par conſequent cette Figure ABCD, qui eſt compriſe de quatre Côtez égaux, & qui a ſes quatre Angles droits, eſt un Quarré ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION VII.

PROBLEME VII.

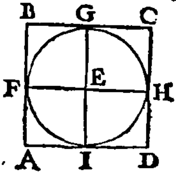
Alentour d'un Cercle donné, décrire un Quarré.



JE suppose que le Cercle FGHI soit donné; & je propose de décrire un Quarré alentour de ce Cercle. Pour le faire,

Menez tel Diametre qu'il vous plaira, par exemple FEH. Coupez ce Diametre à Angles droits par un autre Diametre, comme GEI. Puis (par la 31. du 1.) menez pas les Points F, & H, les Lignes droites AFB, DHC, paralleles à GI, ou perpendiculaires à FH; & par les Points G, & I, les Lignes droites BGC, AID, paralleles à FH, ou perpendiculaires à GI. Ces quatre Lignes AB, BC, CD, DA, formeront une Figure de quatre Côtez. Cela étant, je dis que cette Figure est un Quarré, qui est décrit alentour du Cercle FGHI. Pour le prouver,

Puisque les Lignes AB, CD, sont paralleles à GI, elles sont paralleles entr'elles. De mesme, puisque les Lignes BC, AD, sont paralleles à FH, elles sont aussi paralleles entr'elles. Et par consequent les Figures ABCD, ABGI, GCDI, BCHF, & AFHD, sont des Parallelogrammes. Et partant les Lignes BC, AD, sont égales au Diametre FH, ou à son égale GI, par la 34. du 1. Et de mesme, les Lignes AB, CD, sont aussi égales à GI. D'où il suit que les quatre Côtez du Parallelogramme ABCD sont égaux entr'eux. Deplus, puisque la Figure AFEI est un Parallelogramme, par la construction, & que l'Angle FEI a été fait droit; il s'ensuit que son opposé FAI est aussi droit, par la 34. du 1. On prouvera de même, que les Angles FBG, GCH, & HDI, sont aussi droits. Et partant la Figure ABCD est un Quarré; qui touche le Cercle donné, puisque par la 16. du 3. chaque Côté est perpendiculairement élevé à l'extremité du Diametre; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

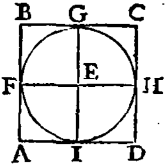


PROPOSITION VIII.

PROBLEME VIII.

Dans un Quarré, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD soit donné; & je propose d'inscrire un Cercle dans ce Quarré. Pour le faire,



Coupez les Côtez du Quarré ABCD en deux également, aux Points F, G, H, I. Menez les Lignes droites FH, GI. Puis du Point E, où ces deux Lignes se coupent, & de l'intervalle EF, décrivez le Cercle FGHI. Cela étant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD. Pour le prouver,

Puisque les Lignes AD, BC, sont égales & paralleles, leurs moitiez AI, BG, sont aussi égales & paralleles. D'où il suit (par la 33. du 1.) que les Lignes AB, IG, sont aussi égales & paralleles.

De

De même,puisque AB,DC,sont égales & paralleles, leurs moitiez AF, DH, sont aussi égales & paralleles. D'où il suit que les Lignes AD, FH, sont aussi égales & paralleles. Et par consequent les Figures EA, EB,EC,ED, sont des Parallelogrammes. D'où il suit que la Ligne EI est égale à AF;que EF est égale à BG; que EG est égale à CH; & que EH est égale à DI. Ainsi ces quatre Lignes EI, EF, EG, EH, qui sont égales à des choses égales, sçavoir aux moitiez des Côtez d'un Quarré, sont égales entr'elles. Et le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'intervalle EI, passe aussi par les Points F, G, H. D'ailleurs, puisque l'Angle BGI est égal à son opposé A, par la 34. du 1; que l'Angle CHF est égal à son opposé B; que l'Angle DIG est égal à son opposé C; & enfin que l'Angle AFH est égal à son opposé D: ces quatre Angles sont droits, leurs opposez étant droits, par supposition. D'où il suit que les Lignes AB, BC, CD, DA, touchent le Cercle FGHI, par la 16. du 3. Et partant ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

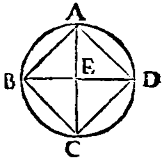
PROPOSITION IX.

PROBLEME IX.

Alentour d'un Quarré donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD soit donné; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Quarré. Pour le faire,

Menez les deux Diagonales AC, BD. Puis du Point E, où elles se coupent, & de l'intervalle EA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle eſt décrit alentour du Quarré ABCD. Pour le prouver,



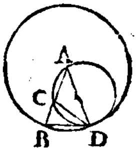
Puiſqu'au Triangle ABD les deux Côtez BA, AD, ſont égaux par ſuppoſition: les Angles ABD, ADB, ſont auſſi égaux, par la 5. du 1. Et puiſque l'Angle BAD eſt ſuppoſé droit, les deux Angles ABD, ADB, valent chacun un demi-droit. On prouvera de même, que chacun des autres Angles qui ſont autour des Points A, B, C, D, eſt demi-droit. Enſuite dequoi, puiſqu'au Triangle AEB les deux Angles EAB, EBA, ſont égaux: les deux Côtez EA, EB, qui les ſoûtiennent, ſont auſſi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que EC eſt égal à EB, & que ED eſt égal à EC; & partant ces quatre Lignes EA, EB, EC, ED, ſont égales entr'elles. D'où il ſuit que le Cercle qui eſt décrit du Centre E, & de l'intervalle EA, paſſe par les extremitez des Lignes EB, EC, ED; & par conſequent qu'il eſt décrit alentour du Quarré ABCD, par la Definition 6. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION X.

PROBLEME X.

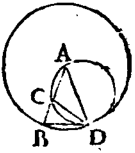
Décrire un Triangle Isoscele qui ait chacun des Angles sur la Baze double de l'autre.



POur le faire, menez une Ligne droite de telle longueur qu'il vous plaira, comme par exemple AB. Coupez cette Ligne au Point C, de telle sorte, que le Rectangle de AB, BC, soit égal au Quarré de AC, par la 11. du 2. Décrivez un Cercle du Centre A, & de l'intervalle AB. Puis appliquez à la Circonference de ce Cercle la Ligne droite BD égale à AC, par la 1. Prop. Enfin menez la Ligne droite AD. Cela étant, je dis que le Triangle ABD est Isoscele, & que chacun de ses Angles ABD, ADB, qui sont sur la Baze BD, est double de l'Angle BAD. Pour le prouver,

Du Point C au Point D menez la Ligne droite CD; & (par la 5. Prop.) alentour du Triangle ACD décrivez un Cercle. Cela posé:

Puisque les Lignes AB, AD, sont égales, par la definition du Cercle: le Triangle ABD est Isoscele. D'ailleurs, puisque par la construction le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Quarré de AC: ce même Rectangle sera aussi égal au Quarré de BD, qui a été faite égale à AC. Ainsi nous avons le Point B, hors du Cercle ACD, d'où partent les deux Lignes droites BA, BD; l'une desquelles, à sçavoir BA, coupe le Cercle; & l'autre, à sçavoir BD, l'atteint; ensorte que le Rectangle compris de BA, & de sa partie BC qui est hors du Cercle, est égal au Quarré de BD, qui l'atteint. Par consequent (par la 37. du 3.) la Ligne BD touche le Cercle ACD. Et d'autant que la Ligne droite DC part du Point de l'attouchement D, & coupe le Cercle: il s'ensuit que l'Angle CDB, que fait cette Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle CAD, qui est au Segment alterne, par la 32. du 3. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun ADC; il s'ensuivra que l'Angle total ADB sera égal aux deux Angles ADC, CAD. Mais (par la 32. du 1.) l'Angle BCD est égal aux deux Angles ADC & CAD. Partant l'Angle BCD est égal à l'Angle ADB. Maintenant, le Triangle ABD étant Isoscele, l'Angle ABD est égal à l'Angle ADB, par la 5. du 1. Partant l'Angle ABD, ou CBD qui est le même, est aussi égal à l'Angle BCD. D'où il suit (par la 6. du 1.) que le Côté CD est égal au Côté BD. Mais BD a été fait égal à AC. Partant les deux Lignes AC, CD, sont égales entr'elles. D'où il suit (par la 5. du 1.) que l'Angle CDA est égal à l'Angle CAD, ou BAD. Mais il a déja été prouvé que l'Angle CDB étoit égal à l'Angle CAD. Partant l'Angle total ADB, ou son égal ABD, est double de l'Angle BAD; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



REMARQUE.

Ensuite de cette Proposition, il est aisé de montrer, que si l'on divise le Rayon du Cercle en moyenne & extréme raison, c'est à dire, ensorte que le Rectangle compris de tout le Rayon & de la moindre partie, soit égal au Quarré de la plus grande partie: le Côté du Decagone inscrit dans le Cercle

Cercle, sera égal à cette plus grande partie.

Car, puisque les trois Angles d'un Triangle valent autant que deux droits ; il est évident que si on divise deux Angles droits en cinq parties égales, deux de ces parties seront la quantité de l'Angle ABD, du Triangle ABD de la Proposition precedente ; que deux autres parties seront la quantité de l'Angle ADB, & que la cinquiéme partie qui reste, sera la quantité de l'Angle BAD, lequel par consequent sera la dixiéme partie des quatre Angles droits que valent tous les Angles qu'on peut faire autour du Point A. D'où il suit que l'Arc BD est aussi la dixiéme partie de la Circonference du Cercle. Or la Ligne droite BD est la Soûtendante de cét Arc, & elle a été faite égale à AC, qui est la plus grande partie du Rayon AB coupé ensorte que le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Quarré de AC. Donc il est vray de dire, que la Soûtendante de la dixiéme partie de la Circonference du Cercle, ou ce qui est la même chose, le Côté du Decagone inscrit au Cercle, est égal à la plus grande partie du Rayon divisé en moyenne & extréme raison.

PROPOSITION XI.

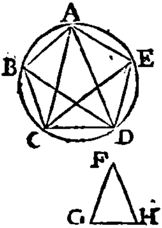
PROBLEME XI.

Dans un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.

JE suppose que le Cercle ABCDE soit donné ; & je propose d'y inscrire un Pentagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez (par la Proposition précedente) le Triangle Isoscele FGH, qui ait chacun des Angles sur la Baze double du troisiéme. Puis (par la 2. Prop.)

décrivez dans le Cercle ABCDE le Triangle ACD équiangle au Triangle FGH. Coupez les Angles ACD, ADC, en deux également par les Lignes droites CE, DB; & menez les Lignes droites CB, BA, AE, ED. Celà étant, je dis que le Pentagone ABCDE, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,



Puisque le Triangle FGH est Isoscele, & qu'il a les Angles G & H, sur la Baze, doubles de l'Angle F; & que le Triangle ACD lui est équiangle: ce Triangle ACD a aussi les Angles ACD, ADC, sur la Baze, doubles de l'Angle CAD. Or chacun de ces Angles ACD, ADC, ayant été coupé en deux également; les Angles DCE, ECA, ADB, BDC, qui en sont les moitiez, sont égaux entr'eux, & égaux aussi à l'Angle CAD. D'où il suit (par la 26. du 3.) que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont égaux; & par la 29. du 3. que les cinq Lignes droites AB, BC, CD, DE, EA, sont égales. Et par consequent, que le Pentagone ABCDE est Equilateral.

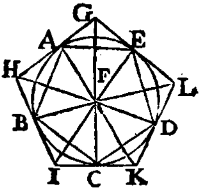
Mais ce Pentagone est aussi Equiangle; puisque (par la 27. du 3.) chacun de ses Angles s'appuye sur des Arcs égaux, sçavoir, sur trois fois la cinquiéme partie de la Circonference du Cercle. Nous avons donc dans un Cercle donné, décrit un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XII.

PROBLEME XII.

Alentour d'un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.



JE supppose que le Cercle ABCDE soit donné ; & je propose de décrire alentour de ce Cercle un Pentagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire ;

Décrivez premierement dans ce Cercle (par la Proposition precedente) le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle. Menez du Centre F aux Points A, B, C, D, E, les Lignes droites FA, FB, FC, FD, FE ; & par les extremitez de ces Lignes menez les Lignes droites GH, HI, IK, KL, LG, qui leur soient perpendiculaires. Cela étant, je dis que ces Lignes se rencontreront ; que le Pentagone qu'elles formeront sera circonscrit au Cercle donné ; & qu'il sera Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,

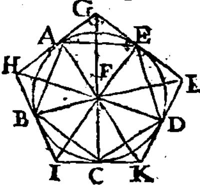
Premierement, puisque les Angles GAE, & GEA, sont partie des Angles droits GAF, GEF, ils seront moindres que deux droits. Et partant (par la Remarque de la 28. du 1.) les Lignes AG, EG, se rencontreront ; & ainsi des autres.

Deplus, puisque les Lignes GH, HI, IK, KL, LG, sont perpendiculaires aux extremitez du Diametre du Cercle ; il s'ensuit (par la 16. Prop. du 3.) qu'elles touchent le Cercle, & qu'ainsi le Pentagone GHIKL est circonscrit au Cercle donné.

Main-

Maintenant, pour prouver que ce Pentagone GHIKL est Equilateral, menez les Lignes droites FG, FH, FI, FK, FL. Cela posé:

Puisque le Pentagone ABCDE est Equilateral, par la construction; il s'ensuit que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, que ces Côtez égaux soûtiennent, sont égaux entr'eux; & que les cinq Angles AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, qui s'appuyent sur ces Arcs, sont aussi égaux entr'eux, par la 27. du 3. D'ailleurs, puisque l'Angle FAG est droit, par la construction: les deux Quarrez de FA & de AG sont égaux au Quarré de FG, par la 47. du 1. Mais l'Angle FEG étant aussi droit, les deux Quarrez de FE & de EG sont égaux au même Quarré de FG. Partant les deux Quarrez de FA & de AG sont égaux aux deux Quarrez de FE & de EG. Ostant donc de ces deux Touts, qui sont égaux, les Quarrez de FA & de FE, qui sont égaux, (parce que ce sont les Quarrez de deux demi-Diametres du Cercle:) le Quarré de AG sera égal au Quarré de EG. Et partant les Lignes AG, EG, sont égales entr'elles. On prouvera de même, que la Ligne AH est égale à HB; la Ligne BI, à IC; la Ligne CK, à KD; & la Ligne DL, à LE. Or comparant le Triangle AFG avec le Triangle EFG, les deux Côtez AF, FG, sont égaux aux deux Côtez EF, FG; & la Baze AG égale à la Baze EG. Partant (par la 8. du 1.) l'Angle AFG est égal à l'Angle EFG; & l'Angle AGF égal à l'Angle EGF. Desorte que chacun des Angles AFE, & AGE, est coupé en deux également. On prouvera de même, que les Angles AFB, BFC, CFD, DFE, & les Angles AHB, BIC, CKD, DLE, sont coupez en deux également. D'où il suit, que tous les An-



Angles qui sont autour du Point F, qui sont tous moitié de chosez égales, sont égaux entr'eux. Comparant maintenant les Triangles FAG & FAH: les Angles AFG & FAG sont égaux aux Angles AFH & FAH, chacun au sien; & le Côté AF, aux extremitez duquel sont ces Angles, leur est commun. Partant (par la 26. du 1.) l'Angle AGF est égal à l'Angle AHF, & le Côté AG au Côte AH. On prouvera de même, que l'Angle BHF est égal à l'Angle BIF; l'Angle CIF, à l'Angle CKF; l'Angle DKF, à l'Angle DLF; l Angle ELF, à l'Angle EGF. Comme aussi que la Ligne HB est égale à IB; la Ligne IC, à CK; la Ligne KD, à DL; & la Ligne LE, à EG. Ensuite dequoy, GH & GL sont égales, étant doubles de AG & de GE, qui ont été prouvées égales; GH & HI sont égales, étant doubles de AH & de HB, qui ont été prouvées égales; HI & IK sont égales, étant doubles de BI & de IC, qui ont été prouvées égales; IK & KL sont égales, étant doubles de CK & de KD, qui ont été prouvées égales; & enfin KL & LG sont égales, étant doubles de DL & de LE, qui ont été prouvées égales. Si bien que le Pentagone GHIKL est Equilateral.

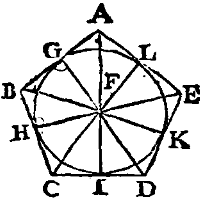
D'ailleurs, puisque les Angles HGL & GHI sont doubles des Angles AGF & AHF, qui ont été prouvez égaux, ils sont aussi égaux entr'eux. On montrera de même, que l'Angle GHI est égal à l'Angle HIK; l'Angle HIK, à l'Angle IKL; & l'Angle IKL, à l'Angle KLG. Et partant le Pentagone GHIKL est Equiangle. Nous avons donc décrit alentour d'un Cercle donné un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIII.

PROBLEME XIII.

Dans un Pentagone donné, qui est Equiangle & Equilateral, décrire un Cercle.



JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, soit donné; & je propose d'y inscrire un Cercle. Pour le faire,

Coupez (par la 9. du 1.) les deux Angles BAE & ABC, qui se suivent, en deux également, par les Lignes droites AF, BF. Et du Point F, où ces Lignes se rencontrent, abaissez sur un des Côtez la Perpendiculaire FG. Puis du Centre F, & de l'intervalle FG, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné. Pour le prouver,

Abaissez du Point F les Lignes FH, FI, FK, FL, perpendiculairement sur les Côtez BC, CD, DE, EA. Cela posé:

Puisque le Pentagone ABCDE est supposé Equilateral, le Côté AB, du Triangle AFB, est égal au Côté BC, du Triangle CBF; le Côté FB est commun à ces deux Triangles; & l'Angle ABF est égal à l'Angle CBF, par la construction. Donc l'Angle BAF est égal à l'Angle BCF. Or l'Angle BAF est moitié de l'Angle BAE, qui est égal à BCD, puisque le Pentagone est supposé Equiangle. Partant l'Angle BCF est aussi moitié de l'Angle BCD. Et par consequent les deux Angles BCF & DCF

DCF sont égaux entr'eux. On prouvera de même, que l'Angle CDF est égal à l'Angle FDE, & l'Angle DEF à l'Angle FEA. Maintenant, comparant les Triangles FBG & FBH : l'Angle FBG vient d'être prouvé égal à l'Angle FBH, & l'Angle FGB est égal à l'Angle FHB, étant tous-deux droits, par la construction; & le Côté FB est commun à ces deux Triangles. Partant FH est égale à FG, par la 26. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FI est égale à FH; la Ligne FK à FI; & la Ligne FL, à FK. Par consequent les cinq Lignes FG, FH, FI, FK, & FL, sont toutes égales; & le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FG, passe aussi par les extremitez de toutes les autres: & chacune de ces Lignes est un demi-Diametre du Cercle. Or les Côtez du Pentagone ABCDE sont élevez perpendiculairement aux extremitez de ces demi-Diametres. Partant (par la 16. du 3.) ces Côtez touchent le Cercle. Et par consequent ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

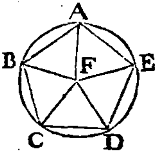
PROPOSITION XIV.

PROBLEME XIV.

Alentour d'un Pentagone donné, qui est Equilateral & Equiangle, décrire un Cercle.

JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, soit donné; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Pentagone. Pour le faire,

Coupez les deux Angles BAE & ABC qui se suivent, en deux également, par les Lignes droites AF, AF, BF. Puis du Point F, où ces deux Lignes se rencontrent, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentour du Pentagone ABCDE.



Pour le prouver,

Menez les Lignes droites FC, FD, FE. Cela posé:

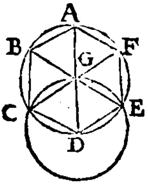
Par un raisonnement semblable à celui de la Proposition précedente, on prouvera que les Angles BCD, CDE, & DEA, sont coupez en deux également. Les Angles BAE & ABC le sont aussi, par la construction. Or les cinq Angles du Pentagone étant égaux, les dix Angles, qui en sont les moitiez, sont aussi égaux. D'où il suit, que puisqu'au Triangle ABF les Angles FAB, FBA, sont égaux; les deux Côtez FA, FB, qui les soûtiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FC est égale à FB; la Ligne FD, à FC; la Ligne FE, à FD. De sorte que les cinq Lignes FA, FB, FC, FD, FE, sont égales entr'elles. Par consequent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extremitez des Lignes FB, FC, FD, FE, c'est à dire par les Sommets des Angles du Pentagone. Et partant ce Cercle est décrit alentour du Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XV.

PROBLEME XV.

Dans un Cercle donné, décrire un Hexagone Equilateral & Equiangle.



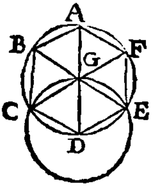
JE suppose que le Cercle ACE soit donné; & je propose d'y inscrire un Hexagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Menez un Diametre tel qu'il vous plaira, par exemple AGD. Puis du Point D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle CGE. Ce Cercle coupera le premier aux Points C & E. Menez par ces Points les Diametres CGF & EGB. Puis menez les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA. Cela étant, je dis que l'Hexagone ABCDEF, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,

Par le raisonnement de la première Prop. du 1. on prouvera que les deux Triangles DGC, DGE, sont Equilateraux; & par la 5. du 1. on prouvera qu'ils sont Equiangles. Et partant (par la 32. du 1.) chacun de leurs Angles vaut le tiers de deux droits. Or (par la 13. du 1.) les deux Angles CGE, & EGF, valent deux droits. Partant si on ôte l'Angle CGE, l'Angle restant EGF vaudra aussi le tiers de deux droits. Et ainsi les trois Angles CGD, DGE, EGF, sont égaux entr'eux. Mais les Angles AGF, AGB, BGC, qui leur sont opposez au Sommet, leur sont égaux, par la 15. du 1. Donc les six Angles qui sont autour du Centre G, sont tous égaux.

D'où

D'où il suit (par la 26. du 3.) que les six Arcs sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux; & (par la 29. du 3.) que les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA, qui les soûtiennent, sont égales. Par consequent l'Hexagone ABCDEF est Equilateral.



Maintenant, qu'il soit Equiangle, cela suit de la 27. du 3. Car chacun de ces six Angles s'appuye sur un Arc qui contient quatre-fois la 6. partie de la Circonference du Cercle. Ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Hexagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que le Côté de l'Hexagone est égal au Rayon du Cercle auquel il est inscrit; puisque chaque Côté a été prouvé égal au demi-Diametre.

PRO-

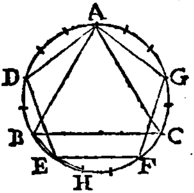
PROPOSITION XVI.

PROBLEME XVI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle.

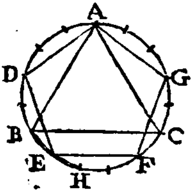
JE suppose que le Cercle ADBC soit donné; & je propose d'y inscrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez premierement un Triangle Equilateral. Puis (par la 2. Prop.) décrivez dans le Cercle donné le Triangle ABC, équiangle à ce Triangle Equilateral. Décrivez ensuite (par la 11. Prop.) dans ce même Cercle le Pentagone ADEFG, Equilateral & Equiangle, & menez du Point B au Point E la Ligne droite BE. Cela étant, je dis que cette Ligne BE est le Côté du Quindecagone demandé. Pour le prouver,



Puisque par la construction, le Triangle ABC est équiangle à un Triangle Equilateral, il est aussi Equilateral, par les 5. & 6. du 1. Et partant les trois Arcs ADB, BEC, & CGA, que ses Côtez soûtiennent, sont égaux, par la 28. du 3. & chacun d'eux est la 3. partie de la Circonference du Cercle. D'ailleurs, puisque le Pentagone ADEFG est Equilateral, par la construction: les cinq Arcs que ses Côtez soûtiennent, sont aussi égaux, & chacun d'eux est la cinquiéme partie de la Circonference du Cercle. Or puisque l'Arc ADB est la 3. partie de la Circonference, on peut lui appliquer cinq Côtez du Quindecagone. Et puisque l'Arc AD en est la cinquié-

cinquiéme partie, on lui en peut appliquer trois. Par consequent on peut en appliquer six aux deux Arcs AD, DE. Mais nous avons montré qu'on en peut appliquer cinq à l'Arc ADB. Par consequent on en peut appliquer un à l'Arc BE. Et ainsi la Ligne droite BE, qui lui est appliquée, est le Côté du Quindecagone. D'où il suit, qu'en appliquant quinze Lignes égales à BE, à toute la Circonference du Cercle, on a le Quindecagone demandé. Et ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Quindecagone Equilateral.



Deplus, puisque chacun des Angles de ce Quindecagone, comme BEH, s'appuye sur un Arc qui soûtient treize fois la 15. partie de la Circonference du Cercle; tous ces Angles s'ensuivent égaux, par la 27. du 3. Et par consequent ce Quindecagone est aussi Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

ELE-

ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DEFINITIONS.

1. UNE Grandeur eſt dite en meſurer une autre, lors qu'étant priſe un certain nombre de fois, elle l'égale, & la meſure préciſement.

Ainſi une Ligne de quatre pieds, eſt dite meſurer une Ligne de 20 pieds, parce que la Ligne de 4 pieds étant priſe cinq fois, égale juſtement celle de 20 pieds; mais une Ligne de 6 pieds n'eſt pas dite meſurer une Ligne de 20 pieds; parce que la Ligne de 6 pieds, étant priſe tant de fois que l'on voudra, ne la meſure pas préciſément.

2. Une partie *aliquote* d'une Grandeur, eſt une partie de cette Grandeur qui la meſure préciſément.

Ainsi une Ligne de 4 pieds, est une partie aliquote d'une Ligne de 20 pieds.

La partie aliquote prend son nom & sa dénomination, du nombre de fois qu'elle mesure la Grandeur dont elle est partie; ou bien du nombre des parties égales dans lesquelles elle divise cette Grandeur.

Ainsi, une partie qui mesure une Grandeur deux fois, s'appelle un Demy, & s'écrit ainsi $\frac{1}{2}$. Une partie qui mesure une Grandeur trois fois, s'appelle un Tiers, & s'écrit ainsi $\frac{1}{3}$. Une partie qui mesure une Grandeur quatre fois, s'appelle un Quart, & s'écrit ainsi $\frac{1}{4}$. &c.

3. Une partie *aliquante* d'une Grandeur, est une partie de cette Grandeur qui ne la mesure pas précisément.

Ainsi une Ligne de six pieds est une partie aliquante d'une Ligne de vingt pieds.

Quelquefois une partie aliquante d'une Grandeur a des parties aliquotes qui mesurent la Grandeur dont elle est partie, comme par exemple 8, qui est une partie aliquante de 12, a pour partie aliquote 4, qui est le tiers de 12; dont 8 par conséquent fait les deux-tiers, puisqu'il contient deux fois 4, que l'on écrit ainsi $\frac{2}{3}$.

Les parties, soit aliquotes, soit aliquantes, s'appellent Fractions du Tout dont elles sont parties. Et en les marquant comme nous venons de faire, le Caractere de dessus s'appelle le Numerateur de la Fraction, & celui de dessous s'appelle le Dénominateur.

4. Des parties pareilles, ou semblables, de deux Grandeurs, ce sont des parties, dont l'une est en comparaison de sa Grandeur, ou de son Tout, ce que l'autre est en comparaison du sien.

Ainsi 3 & 5, sont des parties semblables de 12 & de 20; parce que comme 3 est le quart de 12, de même 5 est le quart de 20.

Il eſt bon de remarquer ici, que ſi on ôte des parties ſemblables de deux Grandeurs, les reſtes en ſeront des parties ſemblables.

Ainſi 3, qui eſt le quart de 12, étant ôté de 12; & 5, qui eſt le quart de 20, étant ôté de 20: les reſtes 9 & 15 ſont des parties ſemblables de 12 & de 20, à ſçavoir les trois-quarts.

5. Une Grandeur eſt dite multiple d'une autre Grandeur, lorſqu'elle la contient un certain nombre de fois préciſément; & celle qui eſt contenuë s'appelle ſous-multiple; laquelle ſert de meſure à l'autre.

Ainſi une Ligne de 20 pieds eſt multiple d'une Ligne de 4 pieds; & une Ligne de 4 pieds eſt ſous-multiple d'une Ligne de 20 pieds; parce que comme l'une contient, l'autre eſt contenuë, juſtement 5 fois; & ainſi l'une ſert de meſure à l'autre.

6. Des Equimultiples de pluſieurs Grandeurs, ce ſont des Grandeurs qui contiennent également celles dont elles ſont dites Equimultiples, ou qui ſont également meſurées par ces Grandeurs.

Ainſi deux Lignes, dont l'une eſt de 20 pieds, & l'autre de 15 pieds, ſont équimultiples de deux autres Lignes, dont l'une eſt de 4 pieds & l'autre de 3 pieds: parce que comme 20 eſt meſuré 5 fois par 4; auſſi 15 eſt meſuré 5 fois par 3.

Il eſt évident que ſi à des Equimultiples de deux Grandeurs, on ajoûte d'autres Equimultiples de ces Grandeurs, les Touts ſeront encore Equimultiples de ces mêmes Grandeurs.

De même, ſi des Equimultiples de deux Grandeurs l'on ôte des Equimultiples de ces Grandeurs, les reſtes ſeront encore équimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou leur ſeront égaux.

7. Raiſon, c'eſt le rapport qui eſt entre deux Grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre ſelon leur quantité.

Les Grandeurs de même genre, comme ſont

deux Lignes, deux Surfaces, deux Corps, s'appellent Homogenes.

Les grandeurs de divers genre, comme une Ligne & une Surface, une Surface & un Corps, s'appellent Heterogenes.

Or le rapport qui est entre deux Grandeurs de même genre, lorsqu'on les compare l'une à l'autre, pour sçavoir comment & combien de fois l'une contient l'autre, ou l'autre est contenuë, s'appelle *Raison*.

Et d'autant qu'on ne peut pas dire comment & combien de fois une Grandeur est contenuë dans une autre qui n'est pas de même genre; cela fait qu'il n'y a point de Raison entre des Grandeurs de divers genre.

De même, d'autant que c'est une proprieté particuliere aux Grandeurs finies, de pouvoir servir de mesure, & de pouvoir être mesurées, & qu'on ne peut pas dire qu'une Grandeur infinie contienne tant de fois une grandeur finie, ni qu'une Grandeur finie soit contenuë tant de fois dans une Grandeur infinie: De là vient aussi qu'il n'y a point de Raison entre une Grandeur finie & une infinie, encore qu'on les suppose toutes-deux de même genre.

8. Les Termes d'une Raison, sont les deux Grandeurs que l'on compare ensemble.

9. L'Antecedent d'une Raison, est le premier Terme des deux que l'on compare l'un à l'autre.

10. Le Consequent d'une Raison, est le second Terme des deux que l'on compare.

Ainsi comparant 15 à 10: l'Antecedent est 15, & le Consequent est 10.

11. La Raison d'égalité, est une Raison où l'Antecedent est égal au Consequent.

12. La Raison d'inégalité, est une Raison où l'Antecedent n'est pas égal au Consequent.

13. La Raison d'inegalité majeure, est une Raison où l'Antecedent est plus grand que le Consequent.

14. La

14. La Raiſon d'inégalité mineure, eſt une Raiſon où l'Antecedent eſt plus petit que le Conſequent.

15. La Raiſon Rationnelle, ou la Raiſon de nombre à nombre, eſt celle où l'on peut exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent, ou combien de fois il eſt contenu dans le Conſequent. Telle eſt la Raiſon qui eſt entre une Ligne de 6 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent contient le Conſequent une fois & demye; ou celle qui eſt entre une Ligne de 2 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent eſt contenu deux fois dans le Conſequent.

16. La Raiſon Irrationnelle, ou Sourde, eſt celle où il eſt impoſſible d'exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent, où combien de fois il eſt contenu dans le Conſequent; comme la Raiſon qui eſt entre le Côté d'un Quarré & ſa Diagonale; qui eſt telle, qu'encore que chaque Ligne à part ait pluſieurs parties aliquotes, il n'y en a pourtant pas une de celles qui meſurent l'une, qui puiſſe meſurer l'autre; & ainſi on ne ſçauroit exprimer par nombre le rapport qui eſt entre ces deux Lignes.

17. La quantité d'une Raiſon d'inégalité majeure, eſt le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent contient le Conſequent.

Ainſi comparant une Grandeur de 12 pieds avec une Grandeur de 6 pieds, la quantité de cette Raiſon eſt 2, d'autant que 12 pieds contiennent 6 pieds deux fois; & cette Raiſon s'appelle Double. De même, comparant 12 à 4, la quantité de cette Raiſon eſt 3, d'autant que 12 contient 4 trois fois; & cette raiſon s'appelle Triple. De même encore, comparant 12 à 8, la quantité de cette Raiſon eſt un & demi, d'autant que 12 contient 8 une fois & demye; & cette Raiſon s'appelle Seſquialtere. &c.

18. La quantité d'une Raison d'inégalité mineure est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent est contenu dans le Consequent, ou quelle partie il est du Consequent.

Ainsi comparant une Grandeur de 6 pieds, avec une de 12 pieds, la quantité de cette Raison est un demi, parce que 6 pieds sont la moitié de 12 pieds; & cette Raison s'appelle Sous-double. De même, comparant 4 à 12, la quantité de cette Raison est un tiers, d'autant que 4 est le tiers de 12; & cette Raison s'appelle Sous-triple. Et de même encore, comparant 8 à 12, la quantité de cette Raison est deux-tiers, d'autant que 8 sont les deux-tiers de 12; & cette Raison s'appelle Sous-sesquialtere.

Par là, il paroît que deux Raisons sont égales, lorsque l'Antecedent de l'une contient son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre contient le sien; ou bien lorsque l'Antecedent de l'une est contenu dans son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre est contenu dans le sien.

Ainsi la Raison de 15 à 10 est égale à la Raison de 12 à 8; parce que comme 15 contient 10 une fois & demye, de même 12 contient 8 une fois & demye.

Mais une Raison est plus grande qu'une autre, lorsque l'Antecedent de la premiere contient plus de fois son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne contient le sien; ou bien lorsque l'Antecedent de la premiere est une plus grande partie de son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne l'est du sien.

Ainsi la Raison de 15 à 5 est plus grande que la Raison de 12 à 6; parce que l'Antecedent 15 contient son Consequent 5, trois fois; au lieu que l'Antecedent 12 ne contient son Consequent 6 que deux fois. Tout au contraire, la Raison de 6 à 12 est plus grande que la Raison de 5 à 15; parce que l'Antecedent 6 est la moitié de son Consequent 12;

au

au lieu que l'Antecedent 5 n'est que le tiers de son Consequent 15.

19. *Proportion*, *c'est la ressemblance ou l'égalité de deux Raisons.*

Ainsi il y a proportion entre ces quatre Grandeurs,

15 — 10 — 12 — 8;

parce que la Raison de 15 à 10 est la même, ou est égale à la Raison, de 12 à 8; ou comme l'on dit communément, parce que 15 est à 10, comme 12 est à 8.

20. *Des Grandeurs proportionelles, sont celles entre lesquelles il y a proportion.*

Ainsi les Grandeurs 15 — 10 — 12 — 8, sont proportionnelles; car comme 15 contient 10 une fois & demye, ainsi 12 contient 8 une fois & demye.

21. *La Proportion continuë, est celle où le Consequent de la premiere Raison sert d Antecedent à la seconde.*

Ainsi il y a proportion continuë entre ces trois Grandeurs, 18 — 12 — 8; parce que 18 est à 12, comme 12 est à 8: où l'on voit que 12, qui est le Consequent de la premiere Raison, est l'Antecedent de la seconde.

22. *La Proportion non continuë, est celle où l'Antecedent de la seconde Raison est different du Consequent de la premiere.*

Telle est la Proportion qui est entre ces quatre Grandeurs, 15 — 10 — 12 — 8. Parce que 12, qui est l'Antecedent de la seconde Raison, est different de 10, qui est le Consequent de la premiere.

23. *Les Termes homologues d'une Proportion, sont ceux qui tiennent le même rang, ou qui sont de même nom, dans une Proportion.*

Ainsi dans la Proportion précedente, les deux Antecedens 15 & 12, & les deux Consequents 10 & 8, sont des Termes homologues; parce qu'ils tiennent le même rang, & ont un même nom, dans cette Proportion.

Remarquez que la Proportion dont il a été parlé jusques-ici, s'appelle Geometrique; pour la distinguer d'une autre, qu'on nomme Arithmetique, laquelle se rencontre entre trois Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont cette seconde surpasse la troisiéme, ou en est surpassée; ou bien entre quatre Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont la troisiéme surpasse la quatriéme, ou en est surpassée.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces trois Grandeurs, 16 —— 12 —— 8, est une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 4, de même aussi la seconde surpasse la troisiéme de 4.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces quatre Grandeurs, 15 —— 10 —— 7 —— 2, est encore une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 5, de même aussi la troisiéme surpasse la quatriéme de 5.

Comme la Proportion Geometrique est la principale, & d'un plus grand usage que la Proportion Arithmetique, c'est aussi de celle-là dont nous entendrons parler, quand nous parlerons simplement de Proportion.

24. Conclure en Raison Inverse, ou en changeant les Termes, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que le Consequent de la premiere Raison est à son Antecedent, comme le Consequent de la seconde est au sien. Ou, ce qui est la même chose, c'est changer les Termes des Raisons, & faire que le Consequent devienne l'Antecedent, & l'Antecedent le Consequent.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8: si l'on vient à dire, donc 10 est à 15, comme

comme 8 est à 12 : cela s'appelle conclure en Raison inverse.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles sont encore proportionnelles en Raison inverse. Car s'il est vrai que l'Antecedent de la premiere Raison contienne son Consequent, de même que l'Antecedent de la seconde contient le sien : il est vrai aussi que le Consequent de la premiere est contenu dans son Antecedent, de même que le Consequent de la seconde est contenu dans le sien.

Ou bien au contraire, si l'Antecedent de la premiere Raison est contenu dans son Consequent, de même que l'Antecedent de la seconde est contenu dans le sien : il est vrai aussi que le Consequent de la premiere Raison contient son Antecedent, de même que le Consequent de la seconde contient le sien. Car contenir & être contenu sont termes relatifs, qui s'entendent & qui s'expliquent l'un par l'autre.

25. Conclure en Raison Alterne, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raison est à l'Antecedent de la seconde, comme le Consequent de la premiere est au Consequent de la seconde.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 15 est à 12, comme 10 est à 8 : cela s'appelle conclure en Raison alterne.

Quelques-uns estiment que supposé que quatre Grandeurs soient proportionnelles, il est évident qu'on peut conclure qu'elles sont proportionelles en Raison alterne.

Neanmoins, il faut remarquer qu'on ne peut valablement conclure en Raison alterne, à moins que les quatre Grandeurs ne soient de même genre. Car par exemple, si on supposoit qu'une Ligne fût à une autre Ligne, comme une Superficie est à une autre Superficie : on ne pourroit pas pour cela conclure que la premiere Ligne seroit à la premiere Superficie, comme la seconde Ligne est à la seconde Superficie ; étant évident, par ce qui a été dit ci-dessus, qu'il n'y a point de raison d'une Ligne à une Superficie.

26. Conclure en composant, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que la somme de l'Antecedent & du Consequent de la premiere Raison, est au seul Consequent de cette premiere Raison, comme la somme de l'Antecedent & du Consequent de la seconde Raison, est au seul Consequent de cette seconde Raison.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 25 est à 10, comme 20 est à 8 : cela s'appelle conclure en composant.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionelles, on peut conclure en composant, qu'elles sont aussi proportionnelles. Car conclure en composant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Consequens une fois plus que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la supposition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Consequens. D'où il suit, que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également ; & ainsi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

27. Conclure en divisant, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'excez du premier Antecedent par-dessus son Consequent, est à son Consequent, comme l'excez du second Antecedent par-dessus son Consequent, est aussi à son Consequent.

Ainsi, aprés avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 5 est à 10, comme 4 est à 8 : cela s'appelle conclure en divisant.

Il

Il eſt encore évident que ſi quatre Grandeurs ſont proportionelles, on peut conclure en diviſant, qu'elles ſont auſſi proportionnelles. Car conclure en diviſant, n'eſt autre choſe que compoſer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Conſequens une fois moins que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la ſuppoſition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Conſequens. D'où il ſuit que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également; & ainſi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

28. Conclure par converſion de Raiſon, c'eſt de quatre Grandeurs qui ſont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raiſon eſt à ſon excez par-deſſus ſon Conſequent, comme l'Antecedent de la ſeconde eſt à ſon excez par-deſſus le ſien.

Ainſi, aprés avoir montré que 15 eſt à 10, comme 12 eſt à 8; ſi l'on vient à dire, donc 15 eſt à 5, comme 12 eſt à 4: cela s'appelle conclure par converſion de Raiſon.

Il eſt encore évident que ſi quatre Grandeurs ſont proportionelles, on peut conclure par converſion de Raiſon, qu'elles ſont auſſi proportionnelles. Car puiſque, par ſuppoſition, les Antecedens contiennent également les Conſequens, c'eſt une neceſſité que les Conſequens ſoient des parties ſemblables des Antecedens. Si donc on ôte les Conſequens des Antecedens, les reſtes ſeront encore des parties ſemblables des mêmes Antecedens; & par conſequent les Antecedens les contiendront également; & la Raiſon qui ſera entr'eux ſera ſemblable.

29. Raiſon compoſée, c'eſt une Raiſon dont la quantité reſulte de la multiplication de la quantité de pluſieurs autres Raiſons.

Pour bien entendre cette Definition, conſiderez par exemple ces trois Grandeurs, 24. 6. 2: & remarquez que la premiere étant quadruple de la seconde, & la seconde étant triple de la troisiéme, & par consequent la quantité de la Raison de la premiere à la seconde étant 4, & celle de la seconde à la troisiéme étant 3: il est vrai de dire, que la premiere Grandeur, comparée à la troisiéme, en est le quadruple du triple, ou la contient quatre-fois trois-fois, c'est à dire douze-fois. Si bien que la quantité de la Raison de la premiere Grandeur à la troisiéme est 12. Or cette Raison dodecuple, qui resulte de la multiplication des quantitez des deux Raisons particulieres, 4 & 3, est dite composée de ces deux Raisons.

Il suit de là, que si on dispose à discretion tant de Grandeurs que l'on voudra: la Raison de la premiere à la derniere sera composée de toutes les Raisons moiennes & particulieres, qu'ont entr'elles toutes ces Grandeurs, étant comparées de suite l'une à l'autre. Ainsi, ayant disposé à discretion ces quatre Grandeurs, 24. 6. 3. 12: la Raison de 24 à 12, (qui est une Raison double,) est composée de celles de 24 à 6, de 6 à 3, & de 3 à 12. Et de fait, multipliant l'un par l'autre 4, 2, & $\frac{1}{4}$, (qui sont les quantitez de ces Raisons,) le produit, qui est 2, est la quantité de la Raison de 24 à 12.

Remarquez, que comme le même produit qui resulte de la multiplication de deux nombres, peut resulter de la multiplication de deux autres: aussi une même Raison peut être composée de plusieurs Raisons differentes. Ainsi, par exemple, la Raison dodecuple, que nous avons veu ci-dessus être composée de la quadruple & de la triple, peut aussi être composée de la sextuple & de la double.

Maintenant, si les Raisons qui se trouvent entre plusieurs Grandeurs d'une part, sont égales ou semblables à celles qui se rencontrent entre plusieurs autres Grandeurs d'une autre part, chacune à la sienne: il est évident que la Raison composée des

des premieres Raiſons, doit être égale à la Raiſon compoſée des autres ſemblables; étant neceſſaire que les mêmes quantités ou les mêmes nombres multipliés deux fois, produiſent le même nombre ou la même quantité.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe d'une part ces trois Grandeurs, 24. 6. 2. & d'autre part ces trois autres Grandeurs, 36. 9. 3; entre leſquelles les mêmes Raiſons, ſçavoir la quadruple & triple, ſe rencontrent: c'eſt une neceſſité que la Raiſon de 24 à 2, ſoit ſemblable à la Raiſon de 36 à 3; puiſque la quantité de chacune de ces Raiſons reſulte de la multiplication de 4 par 3.

30. Raiſon doublée, c'eſt une Raiſon compoſée de deux Raiſons ſemblables.

Ainſi ſuppoſant trois Grandeurs continuëment proportionnelles, telles que ſont celles-ci, 64. 16. 4; puis comparant la premiere à la troiſiéme: la Raiſon qui ſe trouve entre ces deux Grandeurs, 64 & 4, (laquelle eſt compoſée des deux Raiſons ſemblables de 64 à 16, & de 16 à 4,) s'appelle Raiſon doublée de 64 à 16.

31. Raiſon triplée, c'eſt une Raiſon compoſée de trois Raiſons ſemblables.

Ainſi, ſuppoſant quatre Grandeurs continuëment proportionnelles, comme ſont les ſuivantes 64. 16. 4. 1; puis comparant la premiere à la quatriéme: la Raiſon qui ſe trouve entre ces deux Grandeurs, 64 & 1, (laquelle eſt compoſée des trois Raiſons ſemblables de 64 à 16, de 16 à 4, & de 4 à 1,) s'appelle Raiſon triplée de 64 à 16.

32. Proportion ordonnée, c'eſt l'arrangement de pluſieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, diſpoſées de telle ſorte, que la premiere du premier ordre ſoit à la ſeconde, comme la premiere du ſecond ordre eſt à la ſeconde; puis la ſeconde du premier ordre à la troiſiéme, comme la ſeconde du ſecond ordre à la

troisiéme; & la troisiéme du premier ordre à la quatriéme, comme la troisiéme du second est à la quatriéme, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les quatre Grandeurs suivantes, 12. 4 2. 8. & d'autre part ces quatre autres, 30. 10. 5. 20. qui sont disposées de telle sorte, que la premiere 12 est à la seconde 4, comme la premiere 30 est à la seconde 10; que la seconde 4 est à la troisiéme 2, comme la seconde 10 est à la troisiéme 5; & que la troisiéme 2 est à la quatriéme 8, comme la troisiéme 5 est à la quatriéme 20: cét arrangement s'appelle Proportion ordonnée.

33. Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte, que la premiere du premier ordre soit à la seconde, comme la penultiéme du second ordre est à la derniere; puis la seconde du premier ordre à la troisiéme, comme l'antepenultiéme du second ordre à la penultiéme, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les trois Grandeurs 12. 4. 2. & d'autre part ces trois autres, 18. 9. 3. qui sont disposées de telle sorte, que la premiere 12 est à la seconde 4, comme la penultiéme 9 est à la derniere 3; & que la seconde 4 est à la troisiéme 2, comme l'antepenultiéme 18 à la penultiéme 9: cét arrangement s'appelle Proportion troublée.

34. Conclure en Raison égale, c'est (aprés avoir supposé que quelques Grandeurs d'une part, & autant d'autres d'une autre part, sont proportionnelles, soit en Proportion ordonnée, soit en Proportion troublée,) conclure que la premiere d'une part est à la derniere, comme la premiere de l'autre part est à la derniere.

Ainsi, dans l'exemple qui a été ci-dessus rapporté de la Proportion ordonnée, conclure que la premiere Grandeur 12 est à la derniere 8, comme la premiere 30 est à la derniere 20; Ou bien, dans l'exeml'exemple de la Proportion troublée, conclure que la premiere Grandeur 12 est à la derniere 2, comme la premiere 18 est à la derniere 3 : cela s'appelle conclure en Raison égale.

Il est certain qu'on peut fort bien conclure en Raison égale ; c'est à dire qu'on peut fort bien conclure, que la Raison de la premiere Grandeur à la derniere d'une part, est semblable à la Raison de la premiere Grandeur à la derniere de l'autre part. Car chacune de ces Raisons est composée des Raisons moyennes & particulieres qu'il y a entre ces Grandeurs ; lesquelles Raisons sont supposées égales, ou les mêmes, & qui par consequent doivent produire une même quantité.

Ainsi dans cét exemple de la Proportion ordonnée, 12. 4. 2. 8 ; 30. 10. 5. 20 ; la Raison de 12 à 8 est composée de la Raison triple, de la double, & de la sous-quadruple ; & de même la Raison de 30 à 20 est composée de la Raison triple, de la double, & de la sous-quadruple, qui sont les mêmes.

De même aussi, dans cét exemple de la Proportion troublée, 12. 4. 2 ; 18. 9. 3 ; la Raison de 12 à 2 est composée de la Raison triple, & de la double ; ou resulte de la multiplication de 3 par 2 : & de même la Raison de 18 à 3 est composée de la Raison double & de la triple ; ou resulte de la multiplication de 2 par 3, qui sont les mêmes, & doivent par consequent produire une même quantité.

Encore que toutes les manieres de conclure, dont il a été parlé ci-dessus, paroissent fort justes & convainquantes à tous ceux qui les examinent avec un peu d'attention ; neanmoins Euclide a jugé à propos de les démontrer, aussi bien que quelques autres veritez aussi faciles ; & c'est à quoi il employe le cinquiéme Livre de ces Elemens. Mais il présuppose les trois Axiomes suivans, qui à dire le vrai ne sont pas plus évidens que les choses à la preuve desquelle il les employe.

AXIO-

AXIOMES.

1. Si de quatre Grandeurs proportionnelles, l'on prend à discretion des Equimultiples des deux Antecedens, comme aussi des deux Consequens: les Equimultiples des deux Antecedens seront toûjours, ou plus grands, ou plus petits, ou égaux à ceux des Consequens.

Ainsi, de ces quatre Grandeurs, qui sont proportionnelles, 15. 10. 12. 8. prenant à discretion des Equimultiples de 15 & de 12; comme aussi de 10 & de 8: si l'Equimultiple de 15 surpasse l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 surpassera l'Equimultiple de 8: ou bien si l'Equimultiple de 15 est égal à l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi égal à l'Equimultiple de 8: ou enfin, si l'Equimultiple de 15 est moindre que l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi moindre que l'Equimultiple de 8.

2. Tout au contraire, si quatre Grandeurs sont telles, qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisiéme, c'est à dire des deux Antecedens; & de la seconde, & de la quatriéme, c'est à dire des deux Consequens: il arrive que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être égal à l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne soit aussi égal à l'Equimultiple de la quatriéme: Ou que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais surpasser l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne surpasse celui de la quatriéme: Ou enfin, que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être moindre que l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme ne soit aussi moindre que celui de la quatriéme: alors ces quatre Grandeurs sont porportionnelles. Ainsi, parce que ces circonstances arrivent toû-

toûjours en ces quatre Grandeurs 15. 10. : 12. 8. elles ſont proportionnelles.

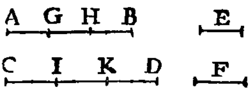
3. Enfin, ſi quatre Grandeurs ſont telles, qu'en prenant à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, comme auſſi de la ſeconde & de la quatriéme, il puiſſe quelquefois arriver que l'Equimultiple de la premiere ſurpaſſera l'Equimultiple de la ſeconde, ſans que l'Equimultiple de la troiſiéme ſurpaſſe celui de la quatriéme : alors ces quatre Grandeurs ne ſont pas proportionnelles; & il y a plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme. Ainſi ces quatre Grandeurs, 12. 6. : 7. 5. ne ſont pas proportionnelles; & il y a plus grande Raiſon de 12 à 6, que de 7 à 5. Car prenant à diſcretion des Equimultiples de 12 & de 7, par exemple 24 & 14, comme auſſi de 6 & de 5, par exemple 18 & 15: il arrive que l'Equimultiple de 12, ſçavoir 24, ſurpaſſe 18, Equimultiple de 6; ſans que l'Equimultiple de 7, ſçavoir 14, ſurpaſſe 15, l'Equimultiple de 5.

PRO-

PROPOSITION I.

THEOREME I.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra équimultiples d'autant d'autres Grandeurs, chacune à la sienne : comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes.



JE suppose qu'il y ait d'une part deux Grandeurs, sçavoir AB, CD ; & d'autre part deux autres Grandeurs, sçavoir E & F ; & que AB soit autant multiple de E, que CD est multiple de F. Cela étant, je dis que comme AB est multiple de E, ou CD multiple de F ; de même AB & CD, prises ensemble, sont multiples de E, & de F, prises aussi ensemble. Pour le prouver,

Concevez que AB soit divisée en trois parties égales à E, sçavoir AG, GH, HB ; & CD en trois parties égales à F, sçavoir CI, IK, KD : ce qui est possible, puisque AB & CD sont supposées équimultiples de E & de F. Cela posé :

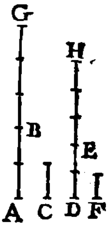
Puisque AG est égale à E, & que CI est égale à F ; il s'ensuit que AG & CI, prises ensemble, seront égales à E & à F, prises aussi ensemble. De même, GH & IK, prises ensemble, seront aussi égales à E & à F, prises ensemble ; & ainsi de suite. Et parce que AB & CD sont supposées équimultiples de E & de F, & qu'ainsi le nombre des parties de AB égales à E, est égal au nombre des parties de CD égales à F : autant de fois que l'on pourra pren-

prendre dans AB une partie égale à E, autant de fois on pourra prendre dans AB & CD des parties égales à E & à F. Et par conſequent, comme AB eſt triple de E, ainſi AB & CD, priſes enſemble, ſont triples de E & de F, priſes auſſi enſemble; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si la premiere Grandeur eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſiéme l'eſt de la quatriéme; & la cinquiéme encore autant multiple de la ſeconde, que la ſixiéme l'eſt auſſi de la quatriéme: la Grandeur compoſée de la premiere & de la cinquiéme, ſera autant multiple de la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, le ſera de la quatriéme.

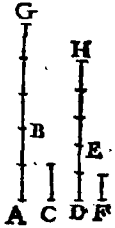


JE ſuppoſe ces ſix Grandeurs, AB, C, DE, F, BG, EH; & que la premiere AB ſoit autant multiple de la ſeconde C, que la troiſiéme DE l'eſt de la quatriéme F; & que la cinquiéme BG ſoit encore autant multiple de la ſeconde C, que la ſixiéme EH l'eſt auſſi de la quatriéme F. Cela étant, je dis que la Grandeur compoſée de la premiere & de la cinquiéme,

ſçavoir

ſçavoir AG, eſt autant multiple de la ſeconde C, que la Grandeur DH, compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, l'eſt de la quatriéme F. Pour le prouver,

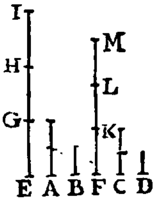
Puiſque AB & DE ſont équimultiples de C & de F, le nombre des parties que AB contient égales à C, eſt égal au nombre des parties que DE contient égales à F. De même, puiſque BG & EH ſont encore équimultiples de C & de F, le nombre des parties que BG contient égales à C, eſt auſſi égal au nombre des parties que EH contient égales à F. Si donc aux nombres égaux des parties de AB & de DE, on ajoûte les nombres égaux des parties de BG & de EH; il s'enſuivra que le nombre des parties que la toute AG contiendra égales à C, ſera égal au nombre des parties que la toute DH contiendra égales à F: c'eſt à dire que AG ſera autant multiple de C, que DH le ſera de F; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si la premiere Grandeur est autant multiple de la seconde, que la troisiéme l'est de la quatriéme, & qu'on prenne des Equimultiples de la premiere & de la troisiéme : l'Equimultiple de la premiere sera autant multiple de la seconde, que l'Equimultiple de la troisiéme le sera de la quatriéme.



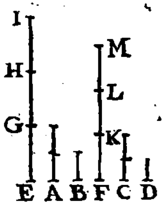
Je suppose ces quatre Grandeurs, A, B, C, D; dont la premiere, à sçavoir A, est autant multiple de la seconde B, que la troisiéme C l'est de la quatriéme D. Je suppose deplus, qu'on ait pris les Grandeurs EI & FM, équimultiples de la premiere A & de la troisiéme C. Cela étant, je dis que EI est autant multiple de la seconde B, que FM l'est de la quatriéme D. Pour le prouver,

Concevez que EI soit divisée en trois parties égales à A, sçavoir, EG, GH, HI; & FM en trois parties égales à C, sçavoir FK, KL, LM. Cela posé :

Puisque EG est égale à A, & FK égale à C, il s'ensuit que EG & FK contiennent autant de fois B & D, que A & C les contiennent. Il en est de

même

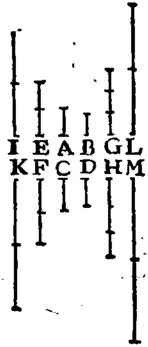
même des parties GH & KL, & ainſi de ſuite. Or puiſque la premiere Grandeur EG eſt autant multiple de la ſeconde B, que la troiſiéme FK l'eſt de la quatriéme D; & que la cinquiéme GH eſt encore autant multiple de la ſeconde B, que la ſixiéme KL l'eſt de la quatriéme D: il s'enſuit, par la Propoſition precedente, que la Grandeur EH, compoſée de la premiere & de la cinquiéme, eſt autant multiple de la ſeconde B, que la Grandeur FL, compoſée de la troiſiéme & de la ſixiéme, l'eſt de la quatriéme D. Enſuite de quoi, prenant EH & FL pour la premiere & la troiſiéme Grandeur, & HI & LM pour la cinquiéme & la ſixiéme: on conclura de même, que EI eſt autant multiple de B, que FM l'eſt de D; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

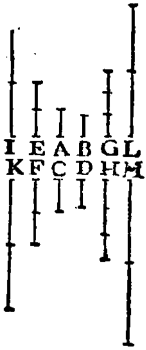
Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, & qu'on prenne à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, comme auſſi des Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il y aura même Raiſon de l'Equimultiple de la premiere à l'Equimultiple de la ſeconde, que de l'Equimultiple de la troiſiéme à l'Equimultiple de la quatriéme.



JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D ; & qu'on ait pris à diſcretion E & F, équimultiples de la premiere A, & de la troiſiéme C ; comme auſſi G & H, équimultiples de la ſeconde B, & de la quatriéme D. Cela étant, je dis qu'il y a même Raiſon de E, Equimultiple de la premiere, à G, Equimultiple de la ſeconde ; que de F, Equimultiple de la troiſiéme, à H, Equimultiple de la quatriéme. Pour le prouver,

Prenez I & K, équimultiples de E & de F. Prenez auſſi L & M, équimultiples de G & de H. Cela poſé :

Puiſque



Puisque E, considerée comme premiere Grandeur, est autant multiple de A, considerée comme seconde, que F, troisiéme, l'est de C, quatriéme; & qu'on a pris les Grandeurs I & K, équimultiples de E & de F: il s'ensuit, par la Proposition precedente, que I & K sont aussi équimultiples de A & de C, c'est à dire de la premiere & de la troisiéme des quatre que nous avons supposées proportionnelles. De même, G & H étant équimultiples de B & de D; & L & M ayant été prises équimultiples de G & H: il s'ensuit que L & M sont équimultiples de B & de D, c'est à dire de la seconde & de la quatriéme des quatre que nous avons supposées proportionnelles. Par consequent, par le premier Axiome de ce Livre, si l'Equimultiple I surpasse l'Equimultiple L, l'Equimultiple K surpassera l'Equimultiple M; s'il est égal, l'autre sera égal; s'il est moindre, l'autre sera aussi moindre. Cela étant, puisque I & K ont été prises équimultiples de E & de F, premiere & troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & que L & M ont été prises équimultiples de G & de H, seconde & quatriéme de ces quatre Grandeurs: il s'ensuit, par le second Axiome, qu'elles sont en effet proportionnelles; & qu'ainsi il y a même Raison de E à G, que de F à H; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Par cette méme methode, on peut aisément prouver, que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles

elles seront encore proportionnelles en Raison inverse. Par exemple, si A est à B, comme C est à D: on prouvera aisément que B sera à A, comme D est à C. Car aprés avoir pris E & F, équimultiples de A & de C, premiere & troisiéme Grandeurs des quatre qui sont supposées proportionnelles; puis G & H, équimultiples de B & D, seconde & quatriéme: on conclura, par le premier Axiome de ce Livre, que si E est égale à G, F sera égale à H; si E surpasse G, F surpassera H; & si E est moindre que G, F sera moindre que H. Or si cela est vrai, il est donc vrai aussi, que si G est égale à E, H sera égale à F; si G est moindre que E, H sera moindre que F; & si G surpasse E, H surpassera aussi F. Considerant donc maintenant B comme premiere Grandeur, A comme seconde, D comme troisiéme, & C comme quatriéme; on conclura, par le second Axiome, que ces quatre Grandeurs sont proportionnelles en Raison inverse, c'est à dire que B est à A, comme D est à C; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une Grandeur est autant multiple d'une autre Grandeur, que la retranchée l'est de la retranchée: le reste sera autant multiple du reste, que la toute l'est de la toute.

JE suppose que AB est autant multiple de CD, que la retranchée AE l'est de la retranchée CF. Cela

 étant,

étant, je dis que le reste EB est autant multiple du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD. Pour le prouver,

Posons que GA soit autant multiple de FD, que AE l'est de CF, ou que AB l'est de CD. Il s'ensuivra, par la 1. Prop. de ce Livre, que GE sera autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Or AB est supposée autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Donc GE est autant multiple CD, que AB l'est aussi de CD. Et par consequent les Grandeurs GE & AB, qui sont équimultiples d'une même Grandeur, sont égales entr'elles. Si donc on ôte la partie AE, qui leur est commune, le reste GA sera égal à EB. Or GA a été posée autant multiple de FD, que AB l'est de CD. Et partant EB est autant multiple de FD, que AB l'est de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

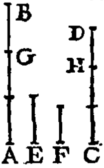
PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si deux Grandeurs sont équimultiples de deux autres Grandeurs, & qu'on en retranche des équimultiples : les restes seront équimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou ils leur seront égaux.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, CD, soient équimultiples des deux autres Grandeurs E & F, & qu'on en ait retranché AG & CH, équimultiples des mêmes Grandeurs E & F. Cela posé,

posé, je dis que les restes GB & HD sont équimultiples de E & de F, ou qu'ils leur sont égaux. Pour le prouver,

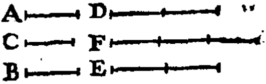


Puisque AB & CD sont équimultiples de E & de F, il y a dans AB autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CD d'égales à F. Et puisque AG & CH sont aussi équimultiples de E & de F, il y a aussi dans AG autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CH d'égales à F. Si donc des deux nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AB & dans CD, on ôte les nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AG & dans CH, il s'ensuit qu'il restera dans GB autant de parties égales à E, qu'il en restera dans HD d'égales à F. Et par consequent, s'il en reste plusieurs dans GB & dans HD, ces restes seront équimultiples de E & de F; que s'il n'en reste qu'une, ces restes leur seront égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

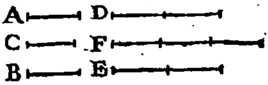
PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Les Grandeurs égales ont même Raison à une même Grandeur; & une même Grandeur a même Raison à des Grandeurs égales.



JE suppose que les deux Grandeurs A & B sont égales. Cela étant, je dis premierement que la Raison de A à C est la même me que celle de B à C. Pour le prouver,



Prenez à discretion les Grandeurs D & E, équimultiples de la premiere Grandeur A, & de la troisiéme B. Prenez encore à discretion la Grandeur F, équimultiple de la seconde & quatriéme C. Cela posé :

Puisque les Grandeurs D & E sont équimultiples des deux Grandeurs égales A & B, elles sont aussi égales entr'elles. Et par consequent, si D est égale à F, E lui est aussi égale ; si D est plus grande que F, E est aussi plus grande que F ; enfin si D est moindre que F, E est aussi moindre que F. D'où il suit que A est à C, comme B est à C, par le 2. Ax. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

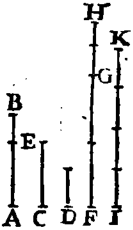
Je dis en second lieu, qu'il y a même Raison de C à A, que de C à B. Car puisque A est à C, comme B est à C : en Raison inverse, (par le Corollaire de la 4 Prop. de ce Livre,) C est à A, comme C est à B ; Ce qu'il falloit aussi démontrer.

PRO-

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si deux Grandeurs ſont inégales, la plus grande aura plus grande Raiſon à une même Grandeur, que la plus petite; & au contraire, cette même Grandeur aura plus grande Raiſon à la plus petite, qu'à la plus grande.



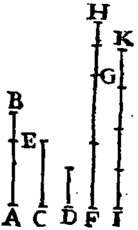
JE ſuppoſe que les deux Grandeurs AB & C ſoient inégales, & que AB ſoit la plus grande. Cela étant, je dis premierement que AB a plus grande Raiſon à D, que C n'a à D. Pour le prouver,

Retranchez de AB la partie AE, égale à C. Puis prenez FG & GH, équimultiples de AE & de EB; de telle ſorte que chacune des deux Grandeurs FG & GH ſurpaſſe la Grandeur D. Prenez encore la Grandeur IK tellement multiple de D, qu'elle ſoit plus grande que FG, mais plus petite que FH. Or cela ſe peut faire aiſément; car puiſque FG ſurpaſſe D, il eſt aiſé de multiplier D enſorte qu'elle ſurpaſſe FG, ſans qu'elle ſurpaſſe FH. Cela poſé:

Puiſque FG & GH ſont équimultiples de AE & de EB, il s'enſuit (par la 1. Prop.) que FH eſt autant multiple de la toute AB, que FG l'eſt de AE, ou de ſon égale C.

Conſiderant donc ici ces quatre Grandeurs, AB premiere, D ſeconde, C troiſiéme, & derechef

D quatriéme ; & que les Grandeurs FH, FG, sont équimultiples de la premiere AB & de la troisiéme C ; & que IK est équimultiple de la seconde & de la quatriéme D : Puisque FH multiple de la premiere AB, surpasse IK multiple de la seconde D, sans que FG multiple de la troisiéme C, surpasse IK multiple de la quatriéme, qui est la même D : il s'ensuit (par le 3. Ax.) que la premiere Grandeur AB, a plus grande Raison à la seconde D, que la troisiéme C n'a à la quatriéme, c'est à dire à la même Grandeur D ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je dis en second lieu, que la Grandeur D a plus grande Raison à la plus petite C, qu'elle n'a à la plus grande AB. Pour le prouver,

Considerant maintenant D comme premiere & troisiéme Grandeur, C comme seconde, & AB comme quatriéme : Puisque IK multiple de la premiere D, surpasse FG multiple de la seconde C, sans que IK multiple de la troisiéme D, surpasse FH multiple de la quatriéme AB : il s'ensuit (par le 3. Ax.) que D a plus grande Raison à la plus petite C, que la même D n'a à la plus grande AB ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Les Grandeurs qui ont même Raiſon à une même Grandeur, ſont égales entr'elles; & celles auxquelles une même Grandeur a même Raiſon, ſont auſſi égales entr'elles.

JE ſuppoſe premierement, que les deux Grandeurs A & B ayent même Raiſon à la même Grandeur C. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B ſont égales entr'elles.

Car ſi cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus grande que l'autre. Et cela étant, il s'enſuivroit, par la Propoſition précedente, que la plus grande auroit plus grande Raiſon à la Grandeur C, que n'auroit la plus petite; ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'une n'eſt donc pas plus grande que l'autre; & par conſequent elles ſont égales.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, qu'une même Grandeur, comme C, ait même Raiſon à deux Grandeurs, comme A & B. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B ſont auſſi égales entr'elles.

Car ſi cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus petite que l'autre. Et cela étant, il s'enſuivroit, par la Propoſition précedente, que la Grandeur C auroit plus grande Raiſon à celle qui ſeroit plus petite, qu'elle n'auroit à la plus grande; ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'une n'eſt donc pas plus petite que l'autre; & par conſequent elles ſont égales; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

De deux Grandeurs, celle qui a plus grande Raiſon à une même, eſt la plus grande; & au contraire, celle à laquelle une même a plus grande Raiſon, eſt la plus petite.

JE ſuppoſe premierement, que des deux Grandeurs A & B, A a plus grande Raiſon à C, que B n'a à C. Cela étant, je dis que A eſt plus grande que B. Pour le prouver,

Si A n'étoit pas plus grande que B, il faudroit qu'elle lui fût égale, ou qu'elle fût plus petite que B. Si elle lui étoit égale, il s'enſuivroit (par la 7. Prop.) que A & B auroient même Raiſon à C; ce qui eſt contre la ſuppoſition. A n'eſt donc pas égale à B. Que ſi A étoit plus petite que B, il s'enſuivroit, (par la 8. Prop.) que A auroit moindre Raiſon à C, que B n'a à C; ce qui eſt auſſi contre la ſuppoſition. A n'eſt donc pas auſſi plus petite que B. Par conſequent A eſt plus grande que B; Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que C a plus grande Raiſon à B, que C n'a à A. Cela étant, je dis que B eſt plus petite que A.

Car ſi cela n'étoit, il faudroit que B fût égale à A, où qu'elle fût plus grande. Si elle étoit égale, il s'enſuivroit (par la 7. Prop.) qu'il y auroit même Raiſon de C à B, que de C à A; ce qui eſt contre

tre

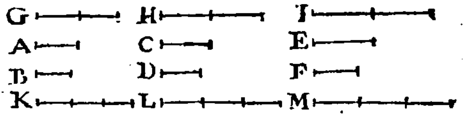
tre la ſuppoſition. B n'eſt donc pas égale à A. Que ſi B étoit plus grande que A, il s'enſuivroit (par la 8. Prop.) qu'il y auroit plus grande Raiſon de C à A, que de C à B; ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. B n'eſt donc pas auſſi plus grande que A. Par conſequent B eſt plus petite que A; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

THEOREME XI.

Les Raiſons qui ſont ſemblables à une même, ſont ſemblables entr'elles.

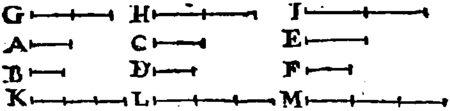
JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D; & de plus, que comme C eſt à D, ainſi E ſoit à F. Cela étant, je dis que comme A eſt à B, ainſi E eſt à F. Pour le prouver,



Prenez à diſcretion G, H, I, équimultiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à diſcretion K, L, M, équimultiples des Conſequens B, D, F. Cela poſé:

Puiſque les quatre Grandeurs A, B, C, D, ſont proportionnelles, & que G & H ſont les Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, & que K & L ſont les Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme: il s'enſuit (par le 1. Ax.) que G ne pourra être égal à K, que H ne ſoit égal à L; ou que G ne pourra ſurpaſſer K, que H ne ſurpaſſe L; ou enfin que G ne pourra être moindre que K, que

H ne soit aussi moindre que L. Mais puisque les quatre Grandeurs C, D, E, F, sont aussi proportionnelles, & que H & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme Grandeur, & que L & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme : il s'ensuit aussi (par le 1. Ax.) que H



ne sçauroit être égal à L, que I ne soit égal à M ; ou que H ne sçauroit être plus grand que L, que I ne soit plus grand que M ; ou enfin que H ne sçauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Et partant G ne pourra être égal à K, que I ne soit égal à M ; ou bien G ne pourra être plus grand que K, que I ne soit plus grand que M ; ou bien enfin G ne pourra être moindre que K, que I ne soit aussi moindre que M.

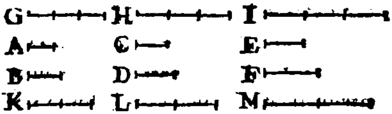
Mais G & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & K & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. D'où il suit (par le 2. Ax.) que ces quatre Grandeurs A, B, E, F, sont proportionnelles ; c'est à dire, que A est à B, comme E est à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

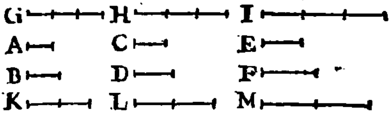
Si tant de Grandeurs que l'on voudra sont proportionnelles : comme l'un des Antecedens sera à son Consequent, ainsi tous les Antecedens pris ensemble seront à tous les Consequens pris ensemble.

JE suppose que A soit à B, comme C est à D, & E à F. Cela étant, je dis que comme l'un des Antecedens A est à son Consequent B, ainsi tous les Antecedens A, C, E, pris ensemble, sont à tous les Consequens B, D, F, pris aussi ensemble. Pour le prouver,



Prenez à discretion G, H, I, équimultiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à discretion K, L, M, équimultiples des Consequens B, D, F. Cela posé:

Il s'ensuit (par la 1. Prop.) qu'autant que la Grandeur G est multiple de la Grandeur A, autant aussi les Grandeurs G, H, I, prises ensemble, sont multiples des Grandeurs A, C, E, prises aussi ensemble; & qu'autant que la Grandeur K est multiple de la Grandeur B, autant les Grandeurs K, L, M, prises ensemble, sont multiples des Grandeurs B, D, F, prises aussi ensemble. D'ailleurs, puisque A est à B, comme C est à D; & que G & H sont équimultiples de la premiere & troisiéme, & K & L équimultiples de la seconde & quatriéme : il suit (par le 1. Ax.) que si G est égale à K, H sera égale à L ; ou que si G surpasse K, H surpassera L; ou enfin que si G est moindre que K, H sera aussi moindre que L. Mais puisque C est à D, comme E est à F ; & que H & I sont équimultiples de la premiere



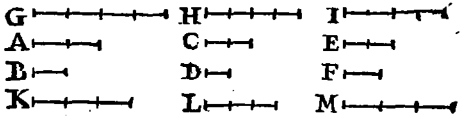
& de la troisiéme de ces Grandeurs, & L & M équimultiples de la seconde & de la quatriéme : H ne sçauroit aussi être égale à L, que I ne soit égale à M ; ou bien H ne sçauroit surpasser L, que I ne surpasse M ; ou enfin H ne sçauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Par consequent G ne sçauroit être égale à K, que G, H, I, prises ensemble, ne soient aussi égales à K, L, M, prises aussi ensemble ; ou bien G ne sçauroit surpasser K, que G, H, I, ne surpassent K, L, M ; ou enfin G ne sçauroit être moindre que K, que G, H, I, ne soient moindres que K, L, M. Mais G d'une part, & G, H, I, d'autre part, sont équimultiples de la premiere A, & de la troisiéme A, C, E, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; comme aussi K d'une part, & K, L, M, d'autre part, sont équimultiples de la seconde B, & de la quatriéme B, D, F, de ces quatre Grandeurs. D'où il suit (par le 2. Ax.) qu'elles sont proportionnelles ; & ainsi, que comme A est à B, ainsi A, C, E, prises ensemble, sont à B, D, F, prises aussi ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

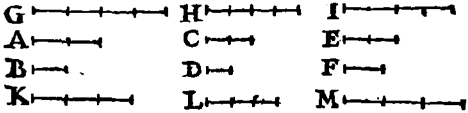
THEOREME XIII.

Si la premiere Grandeur est à la seconde, comme la troisiéme est à la quatriéme; mais que la troisiéme ait plus grande Raison à la quatriéme, que la cinquiéme à la sixiéme: il y aura aussi plus grande Raison de la premiere à la seconde, que de la cinquiéme à la sixiéme.

JE suppose les six Grandeurs A, B, C, D, E, F, & que la premiere A soit à la seconde B, comme la troisiéme C est à la quatriéme D; mais que la Raison de C à D soit plus grande que celle de la cinquiéme E à la sixiéme F. Cela étant, je dis que A a plus grande Raison à B, que E n'a à F. Pour le prouver,



Puisque A est à B, comme C est à D; il s'ensuit (par le 1. Ax.) qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & troisiéme Grandeur, & des Equimultiples de la seconde & de la quatriéme: jamais l'Equimultiple de C ne surpassera l'Equimultiple de D, que l'Equimultiple de A ne surpasse aussi l'Equimultiple de B. Mais puisqu'il y a plus grande Raiſon de C à D, que de E à F ; ſi l'on prend à diſcretion des Equimultiples de la premiere & de la troiſiéme, & des Equimultiples de la ſeconde & de la quatriéme : il ſe pourra faire que l'Equimultiple de C ſurpaſſera l'Equimultiple de D, ſans que l'Equimultiple de E ſurpaſſe l'Equimultiple de F. Partant il ſe pourra faire auſſi qu'ayant pris à diſcretion des Equimulti-



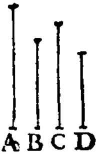
ples de A & de E, (qui ſont la premiere & la troiſiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver n'être pas proportionnelles,) & de même des Equimultiples de B & de F, qui ſont la ſeconde & la quatriéme : il ſe pourra, dis je, faire que l'Equimultiple de la premiere A ſurpaſſera l'Equimultiple de la ſeconde B, ſans que l'Equimultiple de la troiſiéme E ſurpaſſe l'Equimultiple de la quatriéme F. D'où *il ſuit* (*par le* 3. *Ax.*) qu'il y a plus grande Raiſon de A à B, que de E à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIV.

Si de quatre Grandeurs proportionnelles, la premiere est plus grande que la troisiéme: la seconde sera aussi plus grande que la quatriéme; si égale, égale; si moindre, moindre.



JE suppose que les quatre Grandeurs A, B, C, D, soient proportionnelles, & premierement que la premiere A soit plus grande que la troisiéme C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi plus grande que la quatriéme D. Pour le prouver,

Puisque A est plus grande que C, il y a plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D, par supposition. Il y a donc aussi plus grande Raison de C à D, que de C à B. Et partant (par la 10. Prop.) D sera plus petite que B, ou B plus grande que D; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que de ces quatre Grandeurs proportionnelles A, B, C, D, la premiere A soit égale à la troisiéme C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi égale à la quatriéme D. Pour le prouver,

Puisque A est égale à C, il y a même Raison de A à B, que de C à B, par la 7. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D. Il y a donc aussi même Raison de C à D, que

de

de C à B. Et partant (par la 9. Prop.) les Grandeurs B & D sont égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose enfin que de ces quatre Grandeurs proportionelles A, B, C, D, la premiere A soit moindre que la troisiéme C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi moindre que la quatriéme D. Pour le prouver,

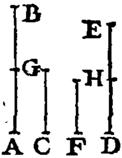
Puisque A est moindre que C, il y aura moindre Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D. Il y aura donc aussi moindre Raison de C à D, que de C à B. Et partant (par la 10. Prop.) B sera moindre que D ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XV.

Si deux Grandeurs sont équimultiples de deux autres Grandeurs, elles seront entr'elles comme les Grandeurs dont elles sont équimultiples.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, DE, soient équimultiples des deux autres Grandeurs C & F; sçavoir AB autant multiple de C, que DE l'est de F. Cela étant, je dis que AB est à DE, comme C est à F. Pour le prouver,



Puisque AB & DE sont équimultiples de C & de F : il y a dans AB autant de parties égales à C, qu'il y en a dans DE d'égales à F. Donc (par

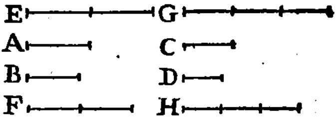
(par la 7. Prop.) la premiere des parties de AB a même Raison à la premiere de DE, que la seconde de AB à la seconde de DE, & que la troisiéme à la troisiéme, & ainsi de suite, s'il y en a ; & cette Raison est la même que celle de C à F. Deplus, puisque nous avons dans AB plusieurs Grandeurs qui sont toutes en même Raison à autant d'autres dans DE : il s'ensuit (par la 12. Prop.) que toutes les parties de AB prises ensemble, sont à toutes les parties de DE prises aussi ensemble, (ce qui est la même chose que la toute AB est à la toute DE,) comme une seule partie de AB est à une seule partie de DE. Or une seule partie de AB a été montrée être à une seule partie de DE, comme C est à F. Partant AB est à DE, comme C est à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XVI.

Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles le seront encore en Raison alterne.

JE suppose que A soit à B, comme C est à D. Cela étant, je

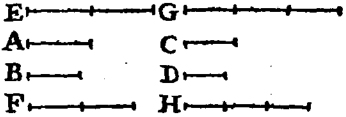


dis que ces Grandeurs sont encore proportionnelles en Raison alterne ; c'est à dire que A est à C, comme B est à D. Pour le prouver,

Prenez des Equimultiples tels qu'il vous plaira de A & de B, comme par exemple E & F. Prenez encore des Equimultiples tels aussi qu'il vous plaira de C & de D, comme G & H. Cela posé :

Il

Il s'ensuit (par la Prop. précedente) que E est à F, comme A est à B ; & que G est à H, comme C est à D. Or par la supposition, A est à B, comme C est à D.



Partant (par la 11. Prop.) E est à F, comme G est à H. D'où il suit (par la 14. Prop.) que si E est plus grande que G, F sera plus grande que H ; si égale, égale ; si moindre, moindre. Or est-il que E & F sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & que G & H sont les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même Raison de A à C, que de B à D ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

THEOREME XVII.

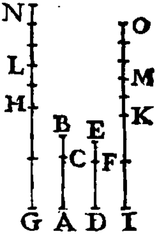
Si des Grandeurs composées sont proportionnelles, en divisant elles seront aussi proportionnelles.

JE suppose que AB est à BC, comme DE est à EF. Cela étant, je dis qu'en divisant elles seront encore proportionnelles ; c'est à dire qu'il y aura même Raison de AC à CB, que de DF à FE. Pour le prouver,

Prenez à discretion les Grandeurs GH & IK, équimultiples de AC & de DF. Puis prenez HL & KM, équimultiples de CB & de FE, & autant mul-

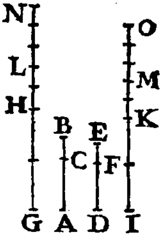
multiples de ces Grandeurs, que GH & IK le sont de AC & de DF. Prenez derechef à discretion LN & MO, équimultiples de CB & de FE. Cela posé :

Puisque GH & HL sont équimultiples de AC & de CB : il s'ensuit (par la 1. Prop.) que GL sera autant multiple de AB, que GH l'est de AC. Or GH est autant multiple de AC, que IK l'est de DF. Donc GL est autant multiple de AB, que IK l'est de DF. D'ailleurs, IK & KM sont équimultiples de DF & de FE.



Donc (par la 1. Prop.) autant que IK est multiple de DF, autant IM est multiple de DE. Et par consequent GL & IM s'ensuivent équimultiples de AB & de DE, qui sont la premiere & la troisiéme des quatre Grandeurs qui sont supposées proportionnelles. Deplus HL, considerée comme premiere Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que KM troisiéme l'est de FE quatriéme ; & LN, cinquiéme Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que MO, sixiéme Grandeur, l'est de FE quatriéme. Partant (par la 2. Prop.) HN sera autant multiple de CB, que KO l'est de FE ; c'est à dire que HN & KO sont encore équimultiples de la seconde & de la quatriéme Grandeur des quatre que nous avons supposées être proportionnelles. Ainsi (par le 1. Ax.) si GL est égale à HN, IM sera égale à KO ; si GL surpasse HN, IM surpassera KO ; & si GL est moindre que HN, IM sera moindre que KO. C'est pourquoi en retranchant des deux Grandeurs GL & HN, la partie HL, qui leur est commune ; & des deux Grandeurs IM, & KO, la partie KM, qui leur est aussi commune : il sera encore vrai de dire, que si GH est égale à LN, IK sera égale à MO ; si GH surpasse LN, IK surpassera MO ; & si GH est moindre que LN, IK

sera

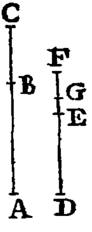


sera moindre que MO. Mais GH & IK sont les Equimultiples de la premiere AC, & de la troisiéme DF, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & LN & MO sont aussi les Equimultiples de la seconde CB, & de la quatriéme FE. Donc (par le 2. Axiome) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même raison de AC à CB, que de DF à FE ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVIII.

Si des Grandeurs divisées sont proportionnelles, en composant elles seront encore proportionnelles.



JE suppose que la Grandeur AB soit à la Grandeur BC, comme la Grandeur DE est à la Grandeur EF. Cela étant, je dis qu'en composant, ces Grandeurs seront encore proportionnelles ; c'est à dire, que comme AC sera à BC, ainsi DF sera à EF.

Car si cela n'étoit, il faudroit que AC fût à BC, comme DF est à une autre Grandeur que EF. Posons, si vous voulez, que cette autre Grandeur soit GF ; auquel cas (par la Prop. précedente) il s'ensuivroit, en divisant, que comme AB est à BC, ainsi DG seroit à GF. Mais comme AB est à BC,

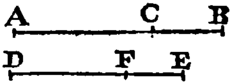
ainsi

ainsi DE est à EF, par supposition. Partant (par la 11. Prop.) DG seroit à GF, comme DE est à EF. Or DG, qui est la premiere de ces quatre Grandeurs, est plus grande que la troisiéme DE. Donc (par la 14. Prop.) la seconde GF seroit plus grande que la quatriéme EF; & ainsi la partie seroit plus grande que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que comme AC est à BC, ainsi DF soit à une autre que EF. Et partant AC est à BC, comme DF est à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIX.

Si le Tout est au Tout, comme le retranché au retranché: le reste sera aussi au reste, comme le Tout est au Tout.

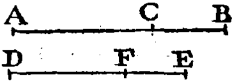


JE suppose que le Tout AB soit au Tout DE, comme le retranché AC est au retranché DF. Cela étant, je dis que le reste CB est au reste FE, comme le Tout AB est au Tout DE. Pour le prouver,

Puisque AB est à DE, comme AC est à DF: en Raison alterne, AB sera à AC, comme DE est à DF, par la 16. Prop. Et en divisant, CB sera à AC, comme FE est à DF, par la 17. Prop. Et derechef en Raison alterne, CB sera à FE, comme AC est à DF. Or AC est à DF, comme AB est à DE, par supposition. Donc CB est à FE, comme AB est à DE. Et ainsi, si le Tout &c. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

On démontre ici la verité de cette maniere de conclure, que nous avons ci-devant appellée *par converſion de Raiſon*. Suppoſons par exemple, que AB eſt à CB, comme DE eſt à FE. Cela étant, je dis, par converſion de Raiſon, que AB ſera à AC, comme DE eſt à DF. Car puiſque AB eſt

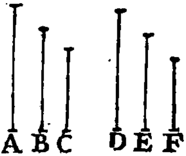


à CB, comme DE eſt à FE : en diviſant, AC ſera à CB, comme DF eſt à FE. Et en Raiſon inverſe, CB ſera à AC, comme FE eſt à DF. Et derechef en compoſant, AB ſera AC, comme DE eſt à DF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XX.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la premiere d'une part soit plus grande que la troisiéme: la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisiéme; si égale, égale; si moindre, moindre.

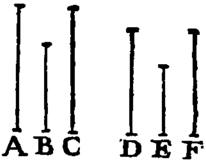


JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion ordonnée; c'est à dire, que A soit à B, comme D est à E; & que B soit à C, comme E est à F. Cela étant, je dis premierement que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,

Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de D à E est la même que celle de A à B. Il y aura donc plus grande Raison de D à E, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme E est à F: en Raison inverse, la Raison de C à B est la même que celle de F à E. Il y a donc plus grande Raison de D à E, que de F à E. Et partant (par

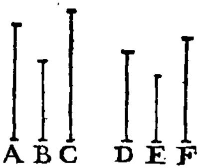
(par la 10. Prop.) D sera plus grande que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que A soit égale à C. Cela étant, je dis que D sera égale à F.



Car puisque A est égale à C, il y aura même Raison de A à B, que de C à B. Or la Raison de A à B est la même que de D à E. Donc il y aura même Raison de D à E, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme E est à F : en Raison inverse, C est aussi à B, comme F est à E. Il y a donc même Raison de D à E, que de F à E. Et partant (par la 9. Prop.) D sera égale à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose enfin, que A soit moindre que C. Cela étant, je dis que D sera moindre que F.

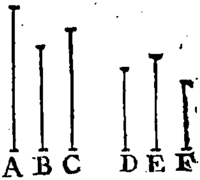


Car puisque A est moindre que C, il y aura une moindre Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de D à E. Il y a donc une moindre Raison de D à E, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme E est à F : en Raison inverse, il y aura même Raison de C à B, que de F à E. Il y a donc une moindre Raison de D à E, que de F à E. Et partant (par la 10. Prop.) D sera moindre que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XXI.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la premiere d'une part soit plus grande que la troisiéme: la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisiéme; si égale, égale; si moindre, moindre.



JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée; c'est à dire, que A soit à B, comme E est à F; & que B soit à C, comme D est à E. Cela étant, je dis premierement, que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,

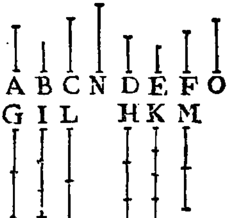
Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B. Or la Raison de A à B est la même que celle de E à F. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme D est à E: en Raison inverse, E est à D, comme C est à B. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de E à D. Et partant (par la 10. Prop.) D sera plus grande que F; Ce qu'il falloit démontrer.

Par un ſemblable raiſonnement on montrera que ſi A eſt égale à C, D ſera égale à F; & que ſi A eſt moindre que C, D ſera auſſi moindre que F. Si donc trois Grandeurs d'une part, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XXII.

Si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, priſes deux à deux en Proportion ordonnée, ſont en même Raiſon: en Raiſon égale, elles ſeront proportionnelles.



Je ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F, tellement diſpoſées, que A ſoit à B, comme D eſt à E; & B à C, comme E à F. Cela étant, je dis qu'en Raiſon égale il y aura même Raiſon de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Prenez à diſcretion G & H, équimultiples de A & de D; puis I & K, équimultiples de B & de E; & enfin L & M, équimultiples de C & de F. Cela poſé:

Puiſque A eſt à B, comme D eſt à E; & que G & H ſont équimultiples de la premiere & de la troiſiéme;

siéme ; & I & K équimultiples de la seconde & de la quatriéme : il s'ensuit (par la 4. Prop.) que G est à I, comme H est à K. De même, puisque B est à C, comme E est à F ; & que I & K sont équimultiples de la premiere & de la troisiéme ; & L & M équimultiples de la seconde & de la quatriéme : il s'ensuit aussi (par la 4. Prop.) que I est à L, comme K est à M. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, I, L, & d'autre part trois autres Grandeurs H, K, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont proportionnelles. Partant (par la 20. Prop.) si G est plus grande que L, H sera aussi plus grande que M ; si G est égale à L, H sera aussi égale à M ; & si G est moindre que L, H sera aussi moindre que M. Mais G & H sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & L & M sont aussi les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles ; & ainsi il y a même Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, s'il y avoit plus de trois Grandeurs de chaque côté, & que par exemple, il y en eût quatre d'une part, & quatre d'une autre, ensorte que C fût à N, comme F est à O : on prouveroit aisément, ensuite de ce qui vient d'être démontré de trois Grandeurs, que A seroit à N, comme D seroit à O. Car ne considerant point la seconde Grandeur de part ni d'autre, & supposant, comme il vient d'être prouvé, que A est à C, comme D est à F ; & que C est à N, comme F est à O : comme il n'y auroit plus alors que trois Grandeurs de chaque côté, il s'ensuivroit que A seroit à N, comme D seroit à O. Donc si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, prises deux à deux, sont en même Raison ; en Raison

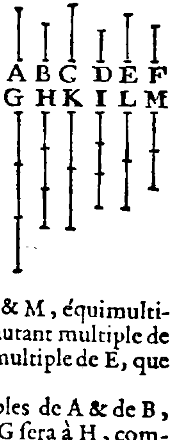
 son

son égale, elles seront proportionnelles ; Ce qu'il falloit demontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXIII.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison : en Raison égale, elles seront proportionnelles.



JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée ; c'est à dire que A soit à B, comme E est à F ; & que B soit à C, comme D est à E. Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y aura même Raison de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

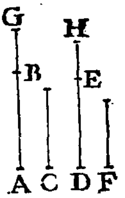
Prenez à discretion G & I, équimultiples de A & de D ; & K & M, équimultiples de C & de F. Puis prenez H autant multiple de B, que G l'est de A ; & L autant multiple de E, que M l'est de F. Cela posé :

Puisque G & H sont équimultiples de A & de B, il s'ensuit (par la 15. Prop.) que G sera à H, comme A est à B. Or A est à B, comme E est à F. Donc G sera à H, comme E est à F. Mais puisque L & M sont équimultiples de E & de F, E est à F, comme me L est à M. Partant G sera à H, comme L est à M. D'ailleurs, puisque B est à C, comme D est à E, & que H & I ont été prises équimultiples de la premiere & de la troisiéme de ces quatre Grandeurs, & que K & L ont été prises équimultiples de la seconde & de la quatriéme: il s'ensuit (par la 4. Prop.) que H est à K, comme I est à L. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, H, K, & d'autre part trois autres Grandeurs I, L, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion troublée, sont proportionnelles. Partant (par la 21. Prop.) si G est plus grande que K, I sera plus grande que M; si G est égale à K, I sera égale à M; ou enfin, si G est moindre que K, I sera moindre que M. Mais G & I sont les Equimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & K & M sont aussi les Equimultiples de la seconde & de la quatriéme. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXIV.

Si la premiere Grandeur est à la seconde, comme la troisiéme est à la quatriéme; & la cinquiéme à la seconde, comme la sixiéme à la quatriéme: la composée de la premiere & de la cinquiéme sera à la seconde, comme la composée de la troisiéme & de la sixiéme sera à la quatriéme.



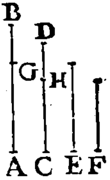
JE suppose que la premiere Grandeur AB soit à la seconde C, comme la troisiéme DE est à la quatriéme F; & que la cinquiéme BG soit encore à la seconde C, comme la sixiéme EH est à la quatriéme F. Cela étant, je dis que la Grandeur AG, composée de la premiere & de la cinquiéme, est à la seconde C, comme la Grandeur DH, composée de la troisiéme & de la sixiéme, est à la quatriéme F. Pour le prouver,

Puisque BG est à C, comme EH est à F; en Raison inverse, C est à BG, comme F est à EH. Maintenant, AB est à C, comme DE est à F, par supposition; C est à BG, comme F est à EH, comme il vient d'être prouvé. Donc (par la 22. Prop.) en Raison égale, AB est à BG, comme DE est à EH. Deplus, en composant, AG est à BG, comme DH est à EH; BG est à C, comme EH est à F, à F, par ſuppoſition. Partant, en Raiſon égale, AG eſt à C, comme DH eſt à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

THEOREME XXV.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite priſes enſemble, ſont plus grandes que les deux autres priſes auſſi enſemble.



JE ſuppoſe que AB ſoit à CD, comme E eſt à F; & que AB ſoit la plus grande, & par conſequent F la plus petite. Cela étant, je dis que les Grandeurs AB & F priſes enſemble, ſont plus grandes que CD & E priſes auſſi enſemble. Pour le prouver,

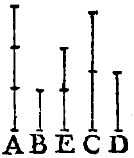
Retranchez de AB la partie AG égale à E; & de CD la partie CH égale à F. Cela poſé:

La toute AB ſera à la toute CD, comme la retranchée AG eſt à la retranchée CH. Donc (par la 19. Prop.) le reſte GB ſera au reſte HD, comme la toute eſt à la toute. Or la toute AB eſt ſupposée plus grande que CD. Partant le reſte GB ſera auſſi plus grand que le reſte HD. Si donc aux deux Grandeurs égales AG & E, on ajoûte les Grandeurs égales F & CH: il s'enſuivra que le Tout compoſé de AG & de F, ſera égal au Tout compoſé de E & de CH. Que ſi maintenant on ajoûte à ces deux Touts des Grandeurs inégales, ſçavoir GB d'un côté, & HD de l'autre: il s'enſuivra que le Tout composé de AB & de F, sera plus grand que le Tout composé de CD & de E; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXVI.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisiéme à la quatriéme: en Raison inverse, tout au contraire, la seconde aura moindre Raison à la premiere, que la quatriéme à la troisiéme.



Je suppose qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de C à D. Cela étant, je dis qu'en Raison inverse, tout au contraire, la Raison de B à A est moindre que celle de D à C. Pour le prouver,

Supposons qu'il y ait même Raison de E à B, que de C à D. Cela posé:

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à B, que de C à D, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison de A à B, que de E à B; par consequent A est plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il suit que la Raison de B à A est moindre que celle de B à E, par la 8. Prop. Mais puisque par la supposition E est à B, comme C est à D: en Raison inverse, B est à E, comme D à C. Donc la Raison de B à A est aussi moindre que celle de D à C; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXVII.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme: en Raiſon alterne, la premiere aura auſſi plus grande Raiſon à la troiſiéme, que la ſeconde à la quatriéme.

JE ſuppoſe qu'il y ait plus grande Raiſon de A à B, que de C à D. Cela étant, je dis qu'en Raiſon alterne il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de B à D. Pour le prouver,

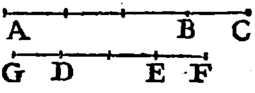
Suppoſons qu'il y ait même Raiſon de E à B, que de C à D. Cela poſé:

Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de A à B, que de C à D, par ſuppoſition: il y a donc auſſi plus grande Raiſon de A à B, que de E à B. Et par conſequent A eſt plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il ſuit qu'il y a plus grande Raiſon de A à C, que de E à C, par la 8. Prop. Mais puiſque par la ſuppoſition E eſt à B, comme C eſt à D: en Raiſon alterne, E eſt à C, comme B eſt à D. Donc il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de B à D; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXVIII.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme: en compoſant, la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande Raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'aura à la quatriéme.



JE ſuppoſe qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere Grandeur AB à la ſeconde BC, que de la troiſiéme DE à la quatriéme EF. Cela étant, je dis qu'en compoſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de la toute AC à BC, que de la toute DF à EF. Pour le prouver,

Suppoſons que AB ſoit à BC, comme GE eſt à EF. Cela poſé:

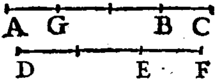
Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF, par ſuppoſition: il y a donc auſſi plus grande Raiſon de GE à EF, que de DE à EF; & par conſequent GE eſt plus grande que DE. Mais puiſque par la ſuppoſition AB eſt à BC, comme GE eſt à EF: en compoſant, AC eſt à BC, comme GF eſt à EF. Mais puiſque GF eſt plus grande que DF, il y a plus grande Raiſon de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. Prop. Donc il y a auſſi plus gran-

grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXIX.

Si la compoſée de la premiere & de la ſeconde a plus grande Raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme n'a à la quatriéme: en diviſant, la premiere aura auſſi plus grande Raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme.



JE ſuppoſe ces quatre Grandeurs, AB premiere, BC ſeconde; DE troiſiéme, EF quatriéme; & qu'il y ait plus grande Raiſon de la compoſée de la premiere & de la ſeconde, ſçavoir AC, à la ſeconde BC, que de la compoſée de la troiſiéme & de la quatriéme, ſçavoir DF, à la quatriéme EF. Cela étant, je dis qu'en diviſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF. Pour le prouver,

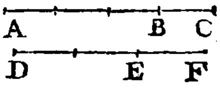
Suppoſons que GC ſoit à BC, comme DF eſt à EF. Cela poſé:

Puiſqu'il y a plus grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF, par ſuppoſition; il y a donc auſſi plus grande Raiſon de AC à BC, que de GC à BC; & par conſequent AC eſt plus grande que GC, par la 10. Prop. Oſtant donc de ces deux Grandeurs inégales, BC, qui leur eſt commune, le reſte AB ſera plus grand que le reſte GB. Et par conſequent il y a plus grande Raison de AB à BC que de GB à BC, par la 8. Prop. Mais puisque par supposition GC est à BC, comme DF est à EF : en divisant, GB est à BC, comme DE est à EF. Donc il y a aussi plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

THEOREME XXX.

Si la composée de la premiere & de la seconde a plus grande Raison à la seconde, que la composée de la troisiéme & de la quatriéme n'a à la quatriéme : Par conversion de Raison, tout au contraire, la composée de la premiere & de la seconde aura moindre Raison à la premiere, que la composée de la troisiéme & de la quatriéme n'aura à la troisiéme.



JE suppose ces quatre Grandeurs, AB premiere, BC seconde, DE troisiéme, EF quatriéme ; & qu'il y ait plus grande Raison de la composée de la premiere & de la seconde, sçavoir AC, à la seconde BC, que de la composée de la troisiéme & de la quatriéme, sçavoir DF, à la quatriéme EF. Cela étant, je dis que par conversion de Raison, AC aura moindre Raison à AB, que

que DF n'aura à DE. Pour le prouver,

Puiſque par ſuppoſition, il y a plus grande Raiſon de AC à BC, que de DF à EF: en diviſant, il y a auſſi plus grande Raiſon de AB à BC, que de DE à EF, par la 29. Prop. Par conſequent, en Raiſon inverſe, il y a moindre Raiſon de BC à AB, que de EF à DE, par la 26. Prop. Et partant, en compoſant, il y a auſſi moindre Raiſon de AC à AB, que de DF à DE; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXXI.

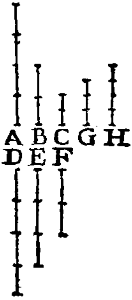
S'il y a trois Grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſiéme, d'une part, que de la premiere à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſiéme, de l'autre part: en Raiſon égale, il y aura auſſi plus grande Raiſon de la premiere à la troiſiéme d'une part, que de la premiere à la troiſiéme de l'autre part.

JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raiſon de A à B, que de D à E; & de B à C, que de E à F. Cela étant, je dis qu'en Raiſon égale, il y a auſſi plus grande Raiſon de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

 Sup-

Supposons que G soit à C, comme E est à F. Cela posé :

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de E à F, par supposition : il y a donc aussi plus grande Raison de B à C, que de G à C. Et par consequent B est plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B. Mais par la supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de D à E. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de D à E.



Supposons maintenant que H soit à G, comme D est à E. Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G ; & par consequent A est plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puisque par supposition, D est à E, comme H est à G ; & que E est à F, comme G est à C : en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 22. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXXII.

S'il y a trois Grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raison de la premiere à la seconde, & de la seconde à la troisiéme, d'une part, que de la seconde à la troisiéme, & de la premiere à la seconde, de l'autre part: en Raison égale, il y aura aussi plus grande Raison de la premiere à la troisiéme d'une part, que de la premiere à la troisiéme de l'autre part.

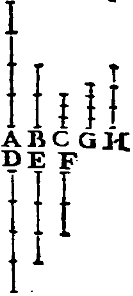
JE suppose d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de E à F; & de B à C, que de D à E. Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Supposons que G soit à C, comme D est à E. Cela posé:

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de D à E, par supposition: il y a donc aussi plus grande

Raison

Raison de B à C, que de G à C; & par consequent B est plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B. Mais par la supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de E à F. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de E à F.



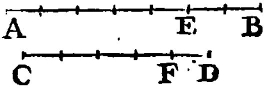
Supposons maintenant que H soit à G, comme E est à F. Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G; & par consequent A est plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puis que par supposition D est à E, comme G est à C; & que E est à F, comme H est à G: en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 23. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXXIII.

S'il y a plus grande Raison du Tout au Tout, que du retranché au retranché: il y aura aussi plus grande Raison du reste au reste, que du Tout au Tout.



JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de la toute AB à la toute CD, que de la retranchée AE à la retranchée CF. Cela étant, je dis qu'il y a aussi plus grande Raison du reste EB au reste FD, que de la toute AB à la toute CD. Pour le prouver,

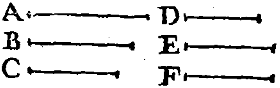
Puisqu'il y a plus grande Raison de AB à CD, que de AE à CF, par supposition: donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de AB à AE, que de CD à CF, par la 27. Prop. Et par conversion de Raison, tout au contraire, il y a moindre Raison de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. Prop. Donc en Raison alterne, il y a aussi moindre Raison de AB, à CD, que de EB à FD; ou pour parler en d'autres termes, il y a plus grande Raison de EB à FD, c'est à dire du reste au reste, que de AB à CD, c'est à dire du Tout au Tout; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXXIV.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra d'un côté, & autant d'un autre; & qu'il y ait plus grande Raiſon de la premiere d'une part à la premiere de l'autre part, que de la ſeconde à la ſeconde; & auſſi plus grande Raiſon de la ſeconde à la ſeconde, que de la troiſiéme à la troiſiéme, & ainſi de ſuite: La composée de toutes les Grandeurs d'un côté, aura plus grande Raiſon à la composée de toutes les Grandeurs de l'autre, que (la premiere étant retranchée de part & d'autre) le reſte n'aura au reſte; mais elle aura moindre Raiſon, que la premiere à la premiere; & plus grande Raiſon, que la derniere à la derniere.

JE ſuppoſe d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raiſon de A à D, que de B à E; & encore plus grande Raiſon de B à E, que de



de C à F. Cela étant, je dis que la composée de A, B, C, a plus grande Raison à la composée de D, E, F, que le reste B, C, n'a au reste E, F; mais qu'el- a moindre Raison, que A n'a à D; & plus grande Raison, que C n'a à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de A à D, que de B à E, par supposition: donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de A à B, que de D à E, par la 27. Prop. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de A, B, prises ensemble, à B, que de D, E, prises ensemble, à E, par la 28. Prop. Et derechef en Raison alterne, il y a encore plus grande Raison de la toute A, B, à la toute D, E, que de B à E. Et puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A,B, à la toute D,E, que de la retranchée B à la retranchée E: il y a par consequent aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, à la toute D,E, par la Proposition précedente. Par la même raison, il y a aussi plus grande Raison de B à E, que de la toute B,C, à la toute E,F. Donc à plus forte raison, il y a aussi plus grande Raison de A à D, que de la toute B,C, à la toute E,F. Et en Raison alterne, il y a plus grande Raison de A à la toute B, C, que de D à la toute E, F. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de la toute A,B,C, au reste B,C, que de la toute D,E,F, au reste E,F, par la 28 Prop. Enfin en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la toute A,B,C, à la toute D,E,F, que du reste B,C, au reste E, F; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, qu'il y a moindre Raison de la toute A,B, C, à la toute D,E,F, que de A à D. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D,E,F, que de la retranchée B,C, à la retranchée E,F: par consequent, il y a aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, par la Prop. précedente;

cedente ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisiéme lieu, qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de C à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de B à E, que de C à F, par supposition : donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de B à C, que de E à F, par la 27. Prop. Et en composant, il y a plus grande Raison de la toute B, C, à C, que de la toute E, F, à F, par la 28. Prop. Donc derechef en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la toute B, C, à la toute E, F, que de C à F. Mais il a été prouvé qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de B, C, à E, F. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de C à F ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Que s'il y avoit quatre Grandeurs, ou plus ; de part & d'autre, on prouveroit aisément la même chose en suivant la même voye.

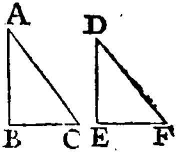
ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIE'ME.

DEFINITIONS.

1. LES Figures Semblables, ſont celles qui ont les Angles égaux, chacun au ſien ; & les Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux.

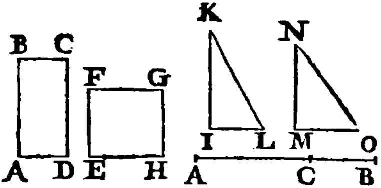
Ainſi, ſuppoſé que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A ſoit égal à l'Angle D, l'Angle B à l'Angle E, & l'Angle C à l'Angle F; & d'ailleurs, que AB ſoit à AC, comme DE à DF; que AC ſoit à CB, comme DF à FE; & que AB ſoit à BC, comme DE eſt à EF: ces deux Triangles ſeront ſemblables.



2. Les Figures Reciproques, ſont celles qui ont les

les Côtez alentour des Angles égaux, tellement proportionnaux, que le premier & le quatriéme terme de la Proportion ſe trouvent dans l'une, & le ſecond & le troiſiéme ſe trouvent dans l'autre.

Ainſi, les Parallelogrammes ABCD, EFGH, ſeront des Figures Reciproques,



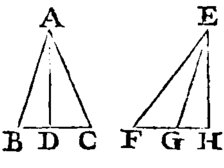
ſi comme AB eſt à EF, ainſi FG eſt à BC. De même, les deux Triangles IKL, MNO, ſeront des Figures Reciproques, ſi comme IK eſt à MN, ainſi MO eſt à IL.

3. Une Ligne droite eſt dite être diviſée en moyenne & extréme Raiſon, quand la toute eſt à la plus grande partie, comme la plus grande partie eſt à la plus petite.

Ainſi, la Ligne AB ſera dite être diviſée en moyenne & extréme Raiſon, ſi elle eſt tellement diviſée au Point C, que la toute AB ſoit à la partie AC, comme AC eſt à CB.

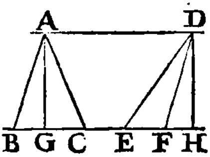
4. La hauteur d'une Figure eſt la Perpendiculaire tirée du ſommet ſur la Baze.

Ainſi, la hauteur du Triangle ABC eſt la Perpendiculaire AD, qui eſt tirée du ſommet A ſur la Baze BC. De même, la hauteur du Triangle EFG eſt la Perpendiculaire EH,



qui tombe du ſommet E ſur la Baze FG, prolongée.

Il eſt important pour la ſuite, de remarquer ici, que ſi deux Figures qui ont leurs Bazes dans une même Ligne droite, & de même part, ſont de même hauteur, elles sont entre mêmes Paralleles. Et que si elles sont entre mêmes Paralleles, elles sont de même hauteur.



Je suppose que les Triangles ABC, DEF, qui ont leurs Bazes BC, EF, dans la même Ligne droite BH, & de même part, soient de même hauteur; c'est à dire que les Lignes AG, DH, qui sont abaissées des Points A & D perpendiculairement sur BH, soient égales. Cela étant, je dis que ces Triangles ABC, DEF, sont entre mêmes paralleles; c'est à dire qu'en tirant par les Points A & D la Ligne droite AD, cette Ligne est parallele à la Ligne BH.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont perpendiculaires à BH, les Angles AGH & DHG sont droits. Et partant (par la 28. du 1.) les Lignes AG, DH, sont paralleles. D'ailleurs elles sont supposées égales; donc (par la 33. du 1.) les Lignes droites AD, GH, qui joignent leurs extremitez, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Lignes AD, BH, entre lesquelles sont les deux Triangles ABC, DEF, sont paralleles. Cela étant, je dis que les deux Lignes AG, DH, qui marquent la hauteur de ces deux Triangles, sont égales entr'elles.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont perpendiculaires à BH, elles sont paralleles. D'ailleurs, les Lignes AD, GH, sont supposées paralleles: ainsi la Figure AGHD est un Parallelogramme; & par la 34. du 1. les Côtez opposez AG, DH, sont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

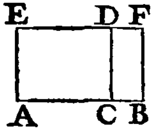
5. Un Parallelogramme est dit être appliqué à une Ligne droite, quand il a pour Baze, ou pour l'un de ses Côtez, cette Ligne droite proposée.

Ainsi

Ainsi le Parallelogramme AD, qui a pour Baze la Ligne droite proposée AC, est dit être appliqué à cette Ligne.

6. Un Parallelogramme *défaillant*, est un Parallelogramme, dont la Baze est plus petite que la Ligne proposée, sur laquelle il est dit être appliqué.

Ainsi, le Parallelogramme AD, est un Parallelogramme *défaillant*; à cause que sa Baze AC est plus petite que la Ligne proposée AB, à laquelle il est dit être appliqué, du reste CB.



7. Le défaut d'un Parallelogramme défaillant, est un Parallelogramme qui a pour Baze le reste de la Ligne proposée, & qui avec le défaillant fait un Parallelogramme total.

Ainsi, dans cette Figure, le Parallelogramme CF est le défaut du Parallelogramme AD; à cause qu'il a pour Baze le reste CB, & qu'il compose avec AD le Parallelogramme total AF.

8. Un Parallelogramme *excedant*, est un Parallelogramme total, dont la Baze est plus grande que la Ligne proposée, à laquelle il est dit être appliqué.

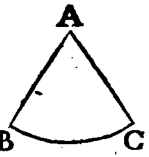
Ainsi, le Parallelogramme AF est un Parallelogramme *excedant*; à cause que sa Baze AB est plus grande que la Ligne proposée AC, à laquelle il est dit être appliqué, de la partie CB.

9. L'excez d'un Parallelogramme excedant, est un Parallelogramme qui a pour Baze la partie dont il excede, & qui étant retranché du Parallelogramme total, le reste est un Parellelogramme justement appliqué à la Ligne proposée.

Ainsi, le Parallelogramme CF est cét excez; à cause qu'il a pour Baze la partie excedante CB, & qu'étant retranché du Parallelogramme total AF, il reste le Parallelogramme AD, qui est justement

ment appliqué à la Ligne proposée AC.

10. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux demi-Diametres qui font un Angle au Centre, & d'une partie de la Circonference.



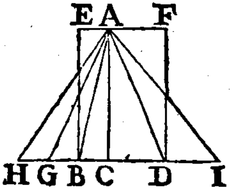
Ainsi, la Figure ABC est un Secteur de Cercle, parce qu'elle est comprise des deux demi-Diametres AB, AC, qui forment l'Angle A au Centre, & d'une partie de la Circonference, BC.

PROPOSITION I.

THEOREME I.

Les Triangles & les Parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux en même Raison que leurs Bazes.

Je suppose 1°. que les deux Triangles ABC, ACD, soient de même hauteur. Cela étant, je dis que comme la Baze BC, est à la Baze CD, ainsi le Triangle ABC est au Triangle ACD. Pour le prouver,

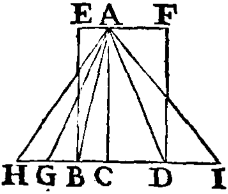


Prolongez la Ligne BD, qui est composée des deux Bazes, indefiniment vers H, & vers I. Puis ayant pris d'une part plusieurs parties égales à BC, comme BG, GH; & d'autre part plusieurs parties égales à CD, ou une seulement, comme DI; menez les Lignes droites AG, AH, AI. Cela posé:

Puisque les Triangles ABC, ABG, AGH,

 font

sont sur Bazes égales, sçavoir CB, BG, GH, & entre mêmes Paralleles, comme il a été prouvé ci-devant, ils sont égaux entr'eux, par la 38. du 1. Et par consequent, autant de fois que la Ligne HC contient la Ligne BC, autant de fois le Triangle ACH contient le Triangle ABC. Et ainsi la Ligne HC, & le Triangle ACH, sont équimultiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs que je dis être proportionnelles. De même, puisque les Triangles ACD, ADI, sont sur Bazes égales, sçavoir CD, DI, & entre-mêmes Paralleles, ils sont aussi égaux entr'eux. Et par consequent, autant de fois que la Ligne CI contient CD, autant de fois le Triangle ACI contient le Triangle ACD. Et ainsi la Ligne CI, & le Triangle ACI, sont équimultiples de la seconde & de la quatriéme des quatre Grandeurs que je dis être proportionnelles. Or si la Ligne HC est égale à CI, le Triangle ACH est égal au Triangle ACI, par la 38. du 1; & si la Ligne HC est plus grande que CI, le Triangle ACH est plus grand que le Triangle ACI; & si la Ligne HC est plus petite que CI, le Triangle ACH est aussi plus petit que le Triangle ACI. D'où il suit (par le 2. Axiome du 5.) que comme la premiere Grandeur BC est à la seconde CD, ainsi la troisiéme ABC est à la quatriéme ACD; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes AEBC, & ACDF, soient de même hauteur. Cela étant, je dis que comme la Baze BC est à la Baze CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF. Pour le prouver,

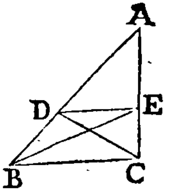
Par ce qui vient d'être démontré, la Baze BC est à la Baze CD, comme le Triangle ABC est au Trian-

Triangle ACD. Mais ces Triangles sont les moitiez de ces Parallelogrammes, par la 41. du 1. Donc le Triangle ABC est au Triangle ACD, comme le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF, par la 15. Prop. du 5. Et partant, comme la Baze BC est à la Baze CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

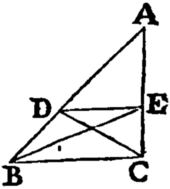
Si une Ligne droite menée dans un Trian- est parallele à l'un de ses Côtez, & coupe les deux autres, elle les coupera proportionnellement : & si elle coupe deux de ses Côtez proportionnellement, elle sera parallele au troisiéme.



JE suppose 1°. que dans le Triangle ABC, la Ligne droite DE soit menée parallele au Côté BC, & qu'elle coupe les deux autres Côtez AB, AC. Cela étant, je dis que ces deux Côtez sont coupez proportionnellement ; c'est à dire, que comme AD est à DB, ainsi AE est à EC. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites BE, DC. Cela posé :

Puisque les Triangles DBE, DCE, sont sur une même Baze, à sçavoir DE, & entre mêmes Paralleles BC, DE : ils sont égaux entr'eux, par la 37. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE, BDE, sont de même hauteur: il s'ensuit (par la Proposition précedente) que la Baze AD est à la Baze DB, comme le Triangle ADE est au Triangle BDE, ou à son égal CED. Mais les Triangles ADE, CED, étant de même hauteur, il s'ensuit aussi que le Triangle ADE est au Triangle CED, comme la Baze AE est à la Baze EC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AD est à DB, comme AE est à EC; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que la Ligne DE coupe de telle sorte les deux Côtez AB, AC, que AD soit à DB, comme AE est à EC. Cela étant, je dis que la Ligne DE est parallele à BC. Pour le prouver,

Puisque les Triangles ADE, BDE, sont de même hauteur: ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. Donc le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme AD est à DB. Mais, par la supposition, AD est à DB, comme AE est à EC. Donc le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme AE est à EC. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE, CED, sont de même hauteur: la Baze AE est à la Baze EC, comme le Triangle ADE est au Triangle CED. Partant le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme le même Triangle ADE est au Triangle CED. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Triangles BDE, & CED, sont égaux. Mais ils sont sur une même Baze, à sçavoir DE. Donc (par la 39. du 1.) les Lignes DE, BC, entre lesquelles ils sont, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

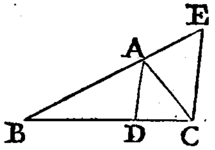
De ce que AD est à DB, comme AE est à EC, il s'ensuit en Raison inverse, que DB est à DA, comme

comme EC est à EA. Et en Raison alterne, que DB est à EC, comme DA est à EA. Et en composant, que AB est à AD, comme AC est à AE.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si un Angle d'un Triangle est coupé en deux également par une Ligne droite qui coupe aussi la Baze; elle la coupera proportionnellement aux deux autres Côtez: & si elle coupe la Baze proportionnellement aux deux autres Côtez, elle divisera l'Angle en deux également.

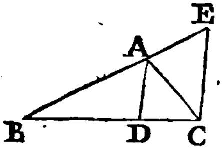


JE suppose 1°. que l'Angle BAC, du Triangle ABC, soit coupé en deux également par la Ligne droite AD, qui coupe la Baze BC au Point D. Cela étant, je dis qu'elle la coupe proportionnellement aux deux autres Côtez; c'est à dire, que BD est à DC, comme BA est à AC. Pour le prouver,

Prolongez la Ligne BA vers E, & menez par le Point C la Ligne CE parallele à AD. Cela posé:

Puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne AC tombe dessus: l'Angle ACE est égal à son opposé alternativement DAC, par la 29. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne BAE tombe dessus:

l'Angle interieur AEC est égal à son opposé exterieur BAD, par la 29. du 1. Mais, par la supposition, les deux Angles BAD, DAC, sont égaux. Donc les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux. D'où il suit (par la 6. du 1.) que les deux Côtez AE, AC, qui les soûtiennent, sont aussi égaux entr'eux. D'ailleurs, puisque la Ligne AD, qui est menée dans le Triangle BEC, est parallele au Côté EC : il s'ensuit (par la Prop. précedente) que comme BD est à DC, ainsi BA est à AE, ou à AC, son égale; Ce qu'il falloit premierement démontrer.



Je suppose en second lieu, que la Ligne AD, qui coupe l'Angle BAC, coupe la Baze BC proportionnellement aux deux autres Côtez; c'est à dire, que BD est à DC, comme BA est à AC. Cela étant, je dis que l'Angle BAC est coupé en deux également. Pour le prouver,

Puisque dans le Triangle BEC, la Ligne AD est menée parallele au Côté EC : BA est à AE, comme BD est à DC, par la Prop. précedente. Mais, par la supposition, BD est à DC, comme BA est à AC. Partant BA est à AE, comme BA est à AC, par la 11. Prop. du 5. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Lignes AE, AC, sont égales. Et par consequent (par la 5. Prop. du 1.) les Angles ACE & AEC sont égaux entr'eux. Or puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne AC tombe dessus : l'Angle DAC est égal à son alterne ACE, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne BAE tombe dessus : l'Angle exterieur BAD est égal à son opposé interieur AEC. Mais les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux, comme il a été prouvé. Donc les deux Angles BAD, DAC,

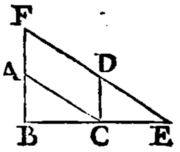
sont

ſont auſſi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Les Triangles équiangles ont les Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux.



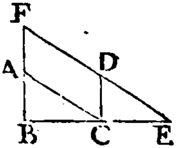
JE ſuppoſe que les Triangles ABC, & DCE, ſoient équiangles ; c'eſt à dire, que l'Angle ACB ſoit égal à l'Angle DEC ; que l'Angle CBA ſoit égal à l'Angle ECD ; & que l'Angle BAC ſoit égal à l'Angle CDE. Cela étant, je dis que les Côtez de ces Triangles qui ſont autour des Angles égaux, ſont proportionnaux ; c'eſt à dire, que DE eſt à EC, comme AC eſt à CB ; que EC eſt à CD, comme CB eſt à BA ; & que CD eſt à DE, comme BA eſt à AC. Pour le prouver,

Diſpoſez ces deux Triangles ABC, DCE, en ſorte que les deux Lignes BC, CE, ſe rencontrent directement. Puis continuez les Côtez ED, BA, vers F. Cela poſé :

Puiſque, par la ſuppoſition, l'Angle DEC eſt égal à l'Angle ACB, les deux Angles B & E ſont égaux aux deux Angles B & ACB. Or ceux-ci enſemble valent moins que deux droits, par la 17. du 1. Donc les deux Angles B & E enſemble valent auſſi moins que deux droits. Et partant les deux Lignes ED, BA, étant prolongées vers F, ſe rencontreront. D'ailleurs, puiſque la Ligne droite BCE tombe ſur les deux Lignes droites EF, CA,

 &

& que l'Angle exterieur ACB est égal à son opposé interieur E, par supposition : ces deux Lignes EF, CA, sont paralleles, par la 28. du 1. De même, puisque la Ligne droite BCE tombe sur les deux Lignes droites CD, BF, & que l'Angle exterieur DCE est égal à son opposé interieur B, par supposition : ces deux Lignes CD, BF, sont aussi paralleles. Et par consequent la Figure ACDF est un Parallelogramme. D'où il suit que DF est égale à CA, & CD égale à AF, par la 34. du 1. Maintenant, puisque CD est parallele à BF, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que comme ED est à DF, ou à CA son égale, ainsi EC est à CB. Et en Raison alterne, comme ED est à EC, ainsi CA est à CB. De même, puisque CA est parallele à EF, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que comme EC est à CB, ainsi FA, ou CD son égale, est à BA. Et en Raison alterne, comme EC est à CD, ainsi CB est à BA. Nous avons donc d'une part trois Grandeurs DE, EC, CD, & d'autre part trois autres Grandeurs AC, CB, BA, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Partant en Raison égale, comme la premiere DE est à la derniere DC, ainsi la premiere AC est à la derniere AB. Et ainsi dans les Triangles équiangles, les Côtez qui sont alentour des Angles égaux sont proportionnaux ; Ce qu'il falloit démontrer.



I. COROLLAIRE.

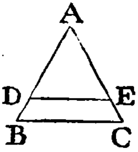
Il suit de là, que les Triangles équiangles sont semblables.

II. COROLLAIRE.

Il suit encore de là, que si on méne dans un Triangle

gle une Ligne droite parallele à l'un des Côtez, elle retranchera un Triangle semblable au total.

Ainsi, si dans le Triangle ABC, on méne la Ligne DE parallele à BC, le Triangle ADE sera semblable au total ABC. Car (par la 29. du 1.) l'Angle ADE est égal à l'Angle B; & l'Angle AED est égal à l'Angle C; & l'Angle A est commun à ces deux Triangles : donc ils sont équiangles, & par consequent semblables.

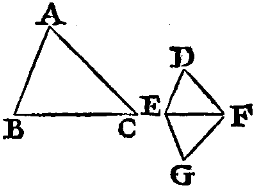


PROPOSITION V.

THEOREME V.

Les Triangles qui ont leurs Côtez proportionnaux, sont équiangles.

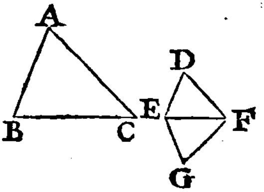
JE suppose que dans les Triangles ABC, DEF, AB soit à BC, comme DE est à EF; que BC soit à CA, comme EF est à FD; & enfin que AB soit à AC, comme DE est à DF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles ABC, DEF, sont équiangles. Pour le prouver,



Faites au Point E l'Angle FEG égal à l'Angle B, & au Point F l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. du 1. & les deux Triangles ABC, & EFG, seront équiangles. Cela posé :

Puisque ces deux Triangles sont équiangles : par la Proposition précedente, EF est à EG, comme

BC eſt à BA. Mais BC eſt à BA, comme EF eſt à ED, par ſuppoſition. Partant (par la 11. Prop. du 5.) EF eſt à EG, comme EF eſt à ED. Et par conſequent les Lignes EG, ED, ſont égales, par la 9. Prop. du 5. De même, EF eſt à FG, comme BC eſt à CA. Mais BC eſt à CA, comme EF eſt à FD. Partant EF eſt à FG, comme EF eſt à FD. Et par conſequent les Lignes FG, FD, ſont égales, par la 9. Prop. du 5. Maintenant, puis qu'aux Triangles EFD, EFG,

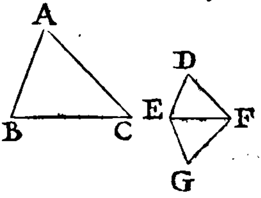


les deux Côtez EF, ED, ſont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au ſien, & la Baze FD égale à la Baze FG: le Triangle EFD eſt en tout égal au Triangle EFG, par la 8. Prop. du 1. Mais le Triangle EFG eſt équiangle au Triangle ABC, par la conſtruction. Donc le Triangle EFD eſt auſſi équiangle au Triangle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez d'alentour proportionnaux, ils seront équiangles.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle DEF, & que comme BC est à BA, ainsi EF soit à ED. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Faites l'Angle FEG égal à l'Angle B, & l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. Prop. du 1. & les deux Triangles ABC, EFG, seront équiangles. Cela posé:

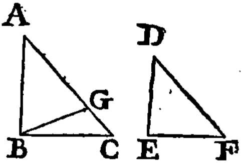
Puisque ces deux Triangles sont équiangles: EF est à EG, comme BC est à BA, par la 4. Prop. Or BC est à BA, comme EF est à ED, par supposition. Donc EF est à EG, comme EF est à ED. Et partant (par la 9. Prop. du 5.) les Côtez ED & EG sont égaux. Maintenant, aux Triangles EFD, EFG, les deux Côtez EF, ED, sont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au sien; & l'Angle FED égal à l'Angle FEG, puisqu'ils sont tous-deux égaux à l'Angle B. Partant (par la 4. du 1.) le Triangle EFD est égal en tout au Triangle EFG. Mais le Triangle EFG est équiangle au Triangle

ABC, par la construction. Donc le Triangle EFD est aussi équiangle au Triangle ABC; Ce qu il falloit démontrer.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez qui sont alentour d'un autre Angle, proportionnaux, le troisiéme Angle de l'un étant de même espece que celui de l'autre: ces deux Triangles seront équiangles.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D; que le Côté AB soit au Côté BC, comme le Côté DE est au Côté EF; & deplus, que l'Angle C soit de même espece que l'Angle F, c'est à dire, que si l'Angle F est droit, obtus, ou aigu, comme ici, l'Angle C le soit aussi. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF. Et premierement, je dis que l'Angle ABC est égal à l'Angle E. Pour le prouver,

Si l'Angle ABC n'étoit pas égal à l'Angle E, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre; supposons que ce soit ABC. Cela posé:

Retranchez de cét Angle, l'Angle ABG égal à l'Angle E, par la 23. du 1. Et puisque l'Angle A est

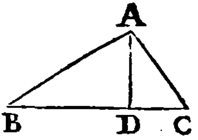
eſt égal à l'Angle D, par ſuppoſition : le troiſiéme BGA ſera égal au troiſiéme F, & ainſi les deux Triangles ABG & DEF ſeront équiangles. Deſorte que ſi l'Angle F eſt aigu, comme ici, l'Angle BGA ſera auſſi aigu, & par conſequent ſon Complement à deux droits BGC ſera obtus. D'ailleurs, puiſque les deux Triangles ABG & DEF ſont équiangles : le Côté AB ſera à BG, comme DE eſt à EF, par la 4. Prop. Mais DE eſt à EF, comme AB eſt à BC, par ſuppoſition. Donc AB eſt à BG, comme AB eſt à BC. D'où il ſuit (par la 9. Prop. du 5.) que les deux Côtez BG, BC, ſont égaux, & (par la 5. Prop. du 1.) que l'Angle BGC eſt égal à l'Angle C. Mais l'Angle C a été ſuppoſé aigu : donc l'Angle BGC ſera auſſi aigu. Mais cét Angle BGC a déja été prouvé obtus : & ainſi l'Angle BGC ſeroit enſemble obtus & aigu ; ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc impoſſible que les Angles C & F étant aigus, l'Angle ABC ſoit plus grand que l'Angle E.

Que ſi l'on eût ſuppoſé au commencement, que les Angles C & F euſſent été obtus : on auroit prouvé de même, que l'Angle BGA auroit été obtus ; & par conſequent que ſon Complement à deux droits BGC auroit été aigu. Puis montrant que cét Angle BGC ſeroit auſſi égal à l'Angle obtus C, il ſeroit arrivé que l'Angle BGC auroit dû être aigu & obtus tout enſemble ; ce qui eſt impoſſible. Si bien qu'il eſt abſolument impoſſible que l'Angle ABC ſoit plus grand que l'Angle E. Et comme l'on peut prouver de même, que l'Angle E ne ſçauroit être plus grand que l'Angle ABC, il s'enſuit que ces deux Angles ſont égaux. Mais l'Angle A eſt égal à l'Angle D, par ſuppoſition. Par conſequent les deux Angles C & F ſont auſſi égaux, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Baze, elle le divisera en deux autres Triangles, qui seront semblables entr'eux, & au total.



JE suppose que le Triangle ABC soit Rectangle, & que de l'Angle droit BAC on abaisse la Ligne droite AD perpendiculaire à la Baze BC. Cela étant, je dis premierement que les deux Triangles ABD, ADC, dans lesquels le Triangle ABC est divisé, lui sont semblables. Pour le prouver,

Au Triangle ABD, l'Angle BDA est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle B est commun aux deux Triangles ABD & ABC. Par consequent le troisiéme BAD est égal au troisiéme BCA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables, par la 4. Prop. & par la 1. Définition.

De même, au Triangle ADC, l'Angle ADC est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle C est commun aux deux Triangles ADC & ABC. Et par consequent le troisiéme DAC est égal au troisiéme CBA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que les deux Triangles ABD, & ADC, ſont ſemblables entr'eux. Pour le prouver,

L'Angle ADB eſt égal à l'Angle ADC, étant droits, par la conſtruction. L'Angle ABD a été prouvé égal à l'Angle DAC, & l'Angle BAD à l'Angle ACD. Et partant, ces deux Triangles ſont équiangles & ſemblables; Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette Propoſition, que ſi de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaiſſe une Perpendiculaire ſur la Baze, elle ſera moyenne proportionnelle enrre les deux parties de la Baze; c'eſt à dire que comme une des parties de la Baze ſera à cette Perpendiculaire, ainſi cette Perpendiculaire ſera à l'autre partie. Car puiſque les deux Triangles ADB, ADC, ſont ſemblables: les Côtez alentour de leurs Angles droits doivent être proportionnaux, par la 4. Prop. Et partant, comme BD eſt à DA, ainſi DA eſt à DC.

PROPOSITION IX.

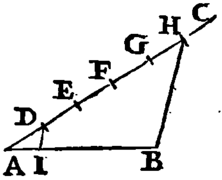
PROBLEME I.

Une Ligne droite étant donnée, en retrancher une partie demandée.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB ſoit donnée, & je propoſe d'en retrancher une partie demandée, comme par exemple la cinquiéme partie. Pour le faire,

Tirez du Point A la Ligne droite indeterminée AC, qui faſſe avec AB tel Angle qu'il vous plaira. Puis ayant

ayant pris la partie AD, à discretion, prenez de suite quatre autres parties, sçavoir, DE, EF, FG, GH, égales à AD, ensorte que la Ligne AD soit la cinquiéme partie de AH. Menez aprés cela du Point H au Point B la Ligne droite HB; & par le Point D menez la Ligne droite DI, parallele à HB. Cela étant, je dis que la Ligne AI est la partie demandée; c'est à dire qu'elle est la cinquiéme partie de AB. Pour le prouver,



Puisque DI est parallele à HB, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que AI est à IB, comme AD est à DH; & en composant, AB est à AI, comme AH est à AD. Et en Raison inverse, AI est à AB, comme AD est à AH. Or AD est la cinquiéme partie de AH, par la construction. Donc AI sera aussi la cinquiéme partie de AB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION X.

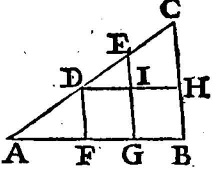
PROBLEME II.

Une Ligne droite étant donnée, la couper semblablement à une autre Ligne droite donnée & coupée.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, AC, soient données, & que AC soit coupée en trois parties, sçavoir, AD, DE, EC. Et je propose de couper la Ligne AB semblablement à la Ligne AC; c'est à dire, ensorte que ses parties soient entr'elles en même Raison que les parties AD, DE, EC. Pour le faire,

Dispo-

Diſpoſez ces deux Lignes enſorte qu'elles ſe rencontrent au Point A, & faſſent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC. Et aprés avoir mené du Point C au Point B la Ligne droite CB, tirez par les Points D & E les Lignes droites DF, EG, paralleles à CB & entr'elles; & par le même Point D menez auſſi la Ligne droite DH parallele à AB. Cela étant, je dis que la Ligne droite AB eſt coupée ſemblablement à la Ligne AC, aux Points F & G; Pour le prouver,

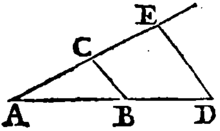


Puiſque dans le Triangle AEG la Ligne droite DF eſt menée parallele à EG: il s'enſuit (par la 2. Prop.) que à AF eſt à FG, comme AD eſt à DE. Et puiſque la Ligne DH eſt parallele à FB, il s'enſuit que les Figures FI, GH, ſont des Parallelogrammes; & qu'ainſi les Côtez FG, GB, ſont égaux aux Côtez oppoſez DI, IH; & partant que FG eſt à GB, comme DI eſt à IH. Or puiſque dans le Triangle DCH, la Ligne EI eſt menée parallele à CH: DI eſt à IH, comme DE eſt à EC, par la 2. Prop. Et partant FG eſt à GB, comme DE eſt à EC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XI.

PROBLEME III.

Deux Lignes droites étant données, en trouver une troisiéme qui leur soit proportionnelle.



JE suppose que les deux Lignes droites AB, AC, soient données, & je propose de trouver une troisiéme Ligne qui leur soit proportionnelle. Pour le faire,

Disposez les deux Lignes droites AB, AC, en sorte qu'elles se rencontrent au Point A, & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC. Prolongez ces mêmes Lignes indefiniment vers D & vers E; & aprés avoir pris BD égale à AC, & tiré du Point B au Point C la Ligne droite BC, menez par le Point D la Ligne droite DE parallele à BC, qui coupe la Ligne AE au Point E. Cela étant, je dis que la Ligne CE est la troisiéme proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

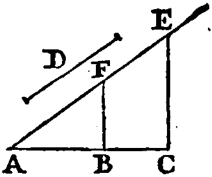
Puisque dans le Triangle DAE, la Ligne droite BC est menée parallele à DE, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que AB est à BD, ou à son égale AC, comme AC est à CE. Et partant CE est troisiéme proportionnelle aux deux Lignes droites données AB, AC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XII.

PROBLEME IV.

Trois Lignes droites étant données, en trouver une quatriéme qui leur soit proportionnelle.



JE suppose que les trois Lignes droites AB, BC, & D, soient données; & je propose de trouver une quatriéme Ligne qui leur soit proportionnelle. Pour le faire,

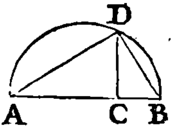
Disposez la premiere Ligne AB, & la seconde BC, ensorte qu'elles se rencontrent directement au Point B. Tirez du Point A la Ligne indefinie AE, qui fasse avec AC un Angle tel qu'il vous plaira, comme CAE. Puis ayant pris AF égale à la Ligne droite donnée D, & mené la Ligne droite FB: tirez par le Point C la Ligne CE parallele à FB, qui coupe la Ligne AE au Point E. Cela étant, je dis que la Ligne FE est la quatriéme proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

Puisque dans le Triangle CAE, la Ligne FB est menée parallele à EC, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que AB est à BC, comme AF, ou D son égale, est à FE. Et partant FE est cette quatriéme Ligne qu'il falloit trouver, proportionnelle aux trois Lignes droites données; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME V.

Deux Lignes droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux Lignes.



JE suppose que les deux Lignes droites AC, CB, soient données, & je propose de leur trouver une moyenne proportionnelle; c'est à dire, je propose de trouver une Ligne qui ait cette proportion avec les deux autres, que comme AC sera à cette Ligne, ainsi cette Ligne soit à CB. Pour le faire,

Disposez les deux Lignes droites AC, CB, en telle sorte, qu'elles se rencontrent directement. Puis décrivez sur AB le demi-Cercle ADB; & élevez du Point C la Ligne CD perpendiculaire sur AB, & qui rencontre la Circonference au Point D. Cela étant, je dis que la Ligne CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. Pour le prouver,

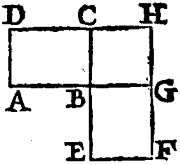
Menez les Lignes droites AD, DB. Cela posé:

Puisque l'Angle ADB est au demi-Cercle, il est droit, par la 31. Prop. du 3. Et partant (par le Corollaire de la 8. Prop.) CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. C'est à dire que comme AC est à CD, ainsi CD est à CB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME IX.

Si deux Parallelogrammes égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtez alentour des Angles égaux seront reciproquement proportionnaux: Et si deux Parallelogrammes ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez alentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, ils seront égaux.

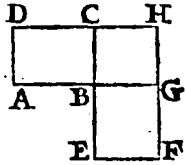


JE suppose premierement que les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, soient égaux, & que les Angles ABC, EBG, soient aussi égaux. Cela étant, je dis que les Côtez alentour de ces Angles sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire, que comme AB est à BG, ainsi EB est à BC. Pour le prouver,

Disposez les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, en sorte, que leurs Côtez AB, BG, se rencontrent directement au Point B; & prolongez les Côtez DC, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H. Cela posé:

Puisque les Angles ABC & EBG sont égaux, par supposition; les Lignes CB, & EB, se rencontrent directement, par la Remarque de la 15. du 1. D'ailleurs, puisque les Lignes DH, AG, sont paralleles, & que CE, HF, sont aussi paralleles; CG

CG est un Parallelogramme. Maintenant, puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bazes; par la 1. Prop. C'est à dire que AB est à BG, comme le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG. Si donc au lieu du Parallelogramme DB on prend le Parallelogramme BF, qui lui est égal, par supposition: il s'ensuivra que AB sera à BG, comme le Parallelogramme BF est au Parallelogramme CG. Or ces deux Parallelogrammes étant de même hauteur, BF est à CG, comme EB est à BC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AB est à BG, comme EB est à BC; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes ABCD, & BEFG, ayent l'Angle ABC égal à l'Angle EBG, & que le Côté AB soit au Côté BG, comme le Côté EB est au Côté BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

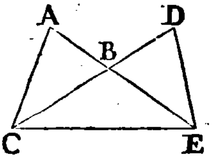
La même préparation que dessus étant supposée: puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur; le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG, comme AB est à BG, par la 1. Prop. Or AB est à BG, comme EB est à BC, par supposition. Partant DB est à CG, comme EB est à BC. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes BF, CG, sont aussi de même hauteur: comme EB est à BC, ainsi BF est à CG. Partant comme DB est à CG, ainsi BF est encore à CG. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Parallelogrammes DB, BF, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION XV.

THEOREME X.

Si deux Triangles égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtez alentour des Angles égaux seront reciproquement proportionnaux: Et si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez alentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, ils seront égaux.

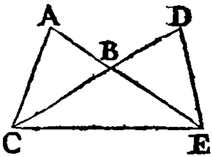


JE suppose 1°. que les deux Triangles ABC, DBE, soient égaux, & que les Angles ABC, DBE, soient aussi égaux. Cela étant, je dis que les Côtez alentour de ces Angles sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire que comme AB est à BE, ainsi DB est à BC. Pour le prouver,

Disposez les deux Triangles ABC, DBE, ensorte, que leurs Côtez AB & BE se rencontrent directement au Point B; & du Point C au Point E menez la Ligne droite CE. Cela posé:

Puisque les Angles ABC & DBE sont égaux, par supposition; les Côtez CB & DB concourent directement, par la Remarque de la 15 du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ABC & BCE sont de même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bazes,

zes, par la 1. Prop. Et partant AB est à BE, comme le Triangle ABC est au Triangle BCE. Mais le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme son égal DBE est au même Triangle BCE. Partant AB est à BE, comme le Triangle DBE est au Triangle BCE. Mais ces deux Triangles sont de même hauteur; & par consequent le Triangle DBE est au Triangle BCE, comme la Baze DB est à la Baze BC, par la 1. Prop. D'où il suit que AB est à BE, comme DB est à BC, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.



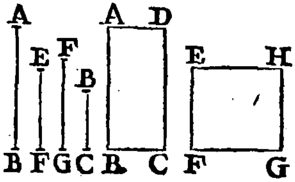
Je suppose en second lieu, que les Triangles ABC & DBE ayent l'Angle ABC égal à l'Angle DBE, & que AB soit à BE, comme DB est à BC. Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

La même préparation que dessus étant supposée: puis que les Triangles ABC & BCE sont de même hauteur, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme AB est à BE, par la 1. Prop. Or AB est à BE, comme DB est à BC, par supposition. Donc le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme DB est à BC, par la 11. du 5. D'ailleurs, parce que les Triangles DBE & BCE sont de même hauteur: comme DB est à BC, ainsi le Triangle DBE est au Triangle BCE. Partant, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme le Triangle DBE est au même Triangle BCE. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Triangles ABC, & DBE, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XI.

Si quatre Lignes droites ſont proportionnelles, le Rectangle des extrémes ſera égal au Rectangle des moyennes: Et ſi le Rectangle des extrémes eſt égal au Rectangle des moyennes, les quatre Lignes droites ſeront proportionnelles.



JE ſuppoſe; 1°. que les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, ſoient proportionnelles, enſorte que AB & BC ſoient les extrémes, & que EF & FG ſoient les moyennes. D'ailleurs, je ſuppoſe que le Rectangle ABCD ſoit fait des extrémes AB, BC; & que le Rectangle EFGH ſoit fait des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces deux Rectangles ſont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Puiſque tous les Angles de ces Rectangles ſont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. Et deplus, il eſt ſuppoſé que AB, Côté du premier Rectangle, eſt à EF, Côté du ſecond, comme FG Côté du ſecond, eſt à BC, Côté du premier. Et partant ces deux Rectangles ſont égaux, par la 14. Prop. Ce qu'il falloit démontrer.

Je ſuppoſe en ſecond lieu les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC; & que le Rectangle ABCD, compris des extrémes AB, BC, soit égal au Rectangle EFGH, compris des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes sont proportionnelles. C'est à dire que AB est à EF, comme FG est à BC. Pour le prouver,

Puisque les deux Rectangles ABCD, EFGH, sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que les Côtez alentour des Angles égaux sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du même second, est à BC, Côté du premier; & qu'ainsi ces quatre Lignes sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

THEOREME XII.

Si trois Lignes droites sont proportionnelles, le Rectangle des deux extrémes sera égal au Quarré de la moyenne: Et si le Rectangle des extrémes est égal au Quarré de la moyenne, les trois Lignes droites seront proportionnelles.

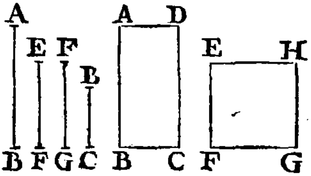
JE suppose 1°. que les trois Lignes droites AB, EF, BC, soient proportionnelles; que le Rectangle ABCD soit compris des deux extrémes AB, BC; & que le Quarré EFGH soit celui de la moyenne EF. Cela étant, je dis que le Rectangle ABCD est égal au Quarré EFGH. Pour le prouver,

Fai-

Faites la Ligne FG égale à EF. Cela posé :

Puisque la Ligne FG est égale à EF, les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, sont proportionnelles, par supposition. Et partant (par la Prop. précedente) le Rectangle ABCD, qui est fait des deux extrémes, sera égal au Rectangle EFGH, qui est fait des deux moyennes. Mais puisque les moyennes EF, FG, sont égales, leur Rectangle est le même que le Quarré de la moyenne EF, sçavoir EFGH. Et partant le Rectangle des extrémes est égal au Quarré de la moyenne ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que le Rectangle ABCD, compris des deux extrémes AB, BC, soit égal au Quarré EFGH de la moyenne EF. Cela étant, je dis que les trois Lignes AB, EF, BC, sont proportionnelles. Pour le prouver,

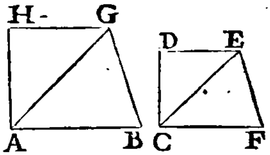


Puisque les deux Rectangles ABCD & EFGH sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que leurs Côtez sont reciproquement proportionnaux ; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du second, ou son égal EF, est à BC, Côté du premier. Et ainsi ces trois Lignes sont proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME VI.

Sur une Ligne droite donnée, décrire une Figure rectiligne semblable & semblablement posée à une Figure rectiligne donnée.



JE suppose que la Ligne AB, & la Figure rectiligne CDEF, soient données; & je propose de décrire sur la Ligne AB une Figure semblable à CDEF, & semblablement posée; c'est à dire qui soit telle, que dans la Figure qui est à décrire, la Ligne AB soit un Côté homologue à un Côté de la Figure donnée, comme par exemple à CF. Pour le faire,

Prenez un des Angles de la Figure donnée tel qu'il vous plaira, comme par exemple C; & du Point C menez aux autres Angles autant de Lignes droites que vous pourrez, telle qu'est CE, pour resoudre toute la Figure en Triangles. Cela fait, menez des Points A & B les Lignes droites AG, BG, qui fassent avec AB les Angles GAB, & GBA, égaux aux Angles ECF, & EFC, chacun au sien. Puis menez des Points A & G les Lignes droites AH, GH, qui fassent avec AG les Angles HAG, & HGA, égaux aux Angles DCE, & DEC, & ainsi de suite, s'il y avoit encore d'autres Triangles dans la Figure CDEF. Cela étant, je dis que la Figure

gure ABGH, décrite sur la Ligne donnée AB, est semblable & semblablement posée à la Figure CDEF. Pour le prouver,

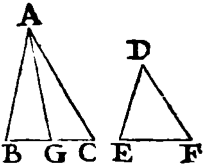
Premierement, de ce que par la construction chaque Triangle de l'une des Figures a deux Angles égaux à deux Angles d'un Triangle de l'autre Figure, le troisiéme Angle de chaque Triangle d'une Figure s'ensuit égal au troisiéme Angle de chaque Triangle de l'autre Figure; & partant tous les Angles des deux Figures étant égaux, chacun au sien, les deux Figures sont équiangles.

Deplus, puisque les Triangles ABG & CFE sont équiangles, il s'ensuit (par la 4. Prop.) que GB est à BA, comme EF est à FC; & de même, que AB est à AG, comme CF est à CE. Mais puisque les Triangles AGH & CED sont aussi équiangles: AG est à AH, comme CE est à CD. Et partant en Raison égale, AB est à AH, comme CF est à CD. De même, AH est à HG, comme CD est à DE. Donc enfin en Raison égale, GB est à GH, comme EF est à ED. Et ainsi les deux Figures ABGH & CDEF, qui sont équiangles, & qui ont leurs Côtez autour des Angles égaux proportionnaux, sont semblables, & semblablement posées; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIII.

Les Triangles semblables sont entr'eux en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison.



JE suppose que les Triangles ABC & DEF, soient semblables ; que l'Angle BAC soit égal à l'Angle D ; l'Angle B à l'Angle E ; & l'Angle C à l'Angle F. Cela étant, je dis que les Triangles ABC & DEF sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison ; c'est à dire, qu'ayant trouvé une troisiéme proportionnelle aux deux Côtez BC, EF : le Triangle ABC sera au Triangle DEF, comme BC sera à cette troisiéme proportionnelle, par exemple à BG. Pour le prouver,

Menez du Point A au Point G la Ligne droite AG. Cela posé :

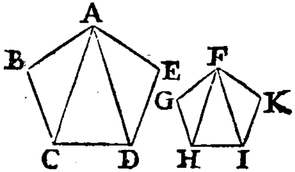
Puisque les Triangles ABC & DEF sont semblables, AB est à BC, comme DE est à EF. Et partant en Raison alterne, AB est à DE, comme BC est à EF. Mais BC est à EF, comme EF est à BG, par la construction. Donc AB est à DE, comme EF est à BG. Et ainsi les deux Triangles ABG & DEF ont un Angle égal à un Angle, sçavoir B égal à E, & les Côtez alentour de ces Angles reciproquement proportionnaux : d'où il suit qu'ils sont égaux, par la 15. Prop. Et partant le Triangle ABC

ABC sera au Triangle DEF, comme le même Triangle ABC est au Triangle ABG. Or ces deux derniers Triangles étant de même hauteur, le Triangle ABC est au Triangle ABG, comme BC est à BG, par la 1. Prop. Par conséquent le Triangle ABC est aussi au Triangle DEF, comme BC est à BG, c'est à dire en Raison doublée de BC à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XIV.

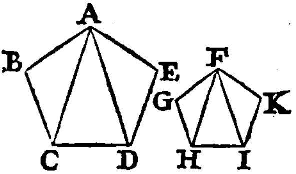
Les Polygones semblables peuvent être divisez dans un nombre égal de Triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leurs Touts: Et ces Polygones sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison.



JE suppose que les Polygones ABCDE & FGHIK soient semblables; ensorte que l'Angle A soit égal à l'Angle F; l'Angle B à l'Angle G; l'Angle C à l'Angle H; l'Angle D à l'Angle I; & l'Angle E à l'Angle K. Et deplus, que AB soit à BC, comme FG à GH; que BC soit à CD, comme GH à HI; que CD soit à DE, comme HI à IK; & enfin que DE soit à EA, comme IK est à KF. Ou bien en Raison alterne, que AB soit à FG, comme BC est à GH; que BC soit

ſoit à GH, comme CD eſt à HI; que CD ſoit à HI, comme DE eſt à IK; & enfin que DE ſoit à IK, comme EA eſt à KF. Cela étant, je dis premierement qu'on peut diviſer le Polygone ABCDE en autant de Triangles que le Pólygone FGHIK. Pour le prouver,

Prenez dans les deux Polygones deux Angles égaux, comme l'Angle A, & l'Angle F; & tirez des Points A & F aux autres Angles, autant de Lignes droites que vous pourrez, comme AC, AD, FH, FI. Cela poſé:



Puiſque le nombre des Angles du Polygone ABCDE eſt égal au nombre des Angles du Polygone FGHIK: il eſt évident qu'il n'y aura ni plus ni moins de Triangles dans l'un que dans l'autre.

Je dis en ſecond lieu, que chaque Triangle du Polygone ABCDE eſt ſemblable à un Triangle du Polygone FGHIK; par exemple, que le Triangle ABC eſt ſemblable au Triangle FGH; le Triangle ACD au Triangle FHI; & le Triangle ADE au Triangle FIK. Pour le prouver,

Puiſque l'Angle B eſt égal à l'Angle G, & que le Côté AB eſt au Côté BC, comme FG à GH, par ſuppoſition: il s'enſuit (par la 6. Prop.) que les deux Triangles ABC & FGH ſont ſemblables, & équiangles. On prouvera de même, que les deux Triangles ADE & FIK ſont auſſi ſemblables, & équiangles. Et quant aux Triangles ACD & FHI: puiſque les Angles BCD & GHI ſont égaux, par ſuppoſition; ſi on en retranche les Angles BCA & GHF, qui ont été prouvez égaux, les Angles reſtans ACD & FHI ſeront auſſi égaux entr'eux. De même, ſi des Angles CDE & HIK, qui ſont égaux par ſuppoſition, on retranche les Angles

ADE

ADE & FIK, qui ont été prouvez égaux, les Angles restans ADC & FIH seront aussi égaux entr'eux; & ainsi les deux Triangles ACD & FHI sont équiangles, par la 32. du 1. & par consequent semblables. Et partant chaque Triangle d'un des Polygones, est semblable à un Triangle de l'autre Polygone; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisiéme lieu, que les Triangles des deux Polygones sont proportionnaux à leurs Touts; c'est à dire, que comme un Triangle est à son semblable, ainsi un des Polygones est à l'autre. Pour le prouver,

Puisque les Triangles ABC & FGH sont semblables, le premier est au second, en Raison doublée du Côté BC au Côté GH, par la Proposition précedente. Or puisque BC est à GH, comme CD est à HI, par supposition: la Raison doublée de BC à GH, est la même que la Raison doublée de CD à HI. Donc le Triangle ABC est au Triangle FGH, en Raison doublée de CD à HI. Mais le Triangle ACD étant semblable au Triangle FHI, l'un est aussi à l'autre en Raison doublée de CD à HI. Et partant le Triangle ABC est au Triangle FGH, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI. De même, le Triangle ADE étant semblable au Triangle FIK, l'un est à l'autre en Raison doublée de DE à IK: ou bien parce que DE est à IK, comme CD est à HI; le Triangle ADE est au Triangle FIK, en Raison doublée de CD à HI, c'est à dire, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI, ou comme le Triangle ABC au Triangle FGH, puisque ces Triangles sont aussi entr'eux en Raison doublée de CD à HI, comme il a été prouvé. Puis donc que nous avons d'une part plusieurs Triangles, & autant d'autres d'une autre part, qui sont entr'eux en même Raison: il suit (par la 12. du 5.) que comme chaque Triangle d'une part est à son semblable de l'autre part, ainsi tous les Triangles d'une part sont à tous les Triangles de l'autre, c'est à dire, ainsi l'un des Polygones est à l'autre Polygone; Ce qu'il falloit encore démontrer.

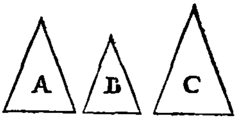
Je dis en dernier lieu, que le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison; par exemple, en Raison doublée de CD à HI. Pour le prouver,

Le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, comme chaque Triangle est à son semblable, comme il vient d'être prouvé. Or chaque Triangle est à son semblable en Raison doublée de CD à HI, comme il a aussi été prouvé. Donc le Polygone ABCDE est au Polygone FGHIK, en Raison doublée de CD à HI; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XV.

Les Figures rectilignes semblables à une même, sont semblables entr'elles.



Je suppose que la Figure rectiligne A soit semblable à la Figure rectiligne B; & que la Figure rectiligne C soit aussi semblable à la Figure rectiligne B. Cela étant, je dis que les deux Figures A & C sont semblables entr'elles. Pour le prouver,

Puisque les deux Figures A & B sont semblables, les Angles de la Figure A sont égaux aux Angles de la Figure B, par la 1. Definition. Et puisque la Figure C est semblable à la Figure B, les Angles de la Figure C sont aussi égaux aux Angles de la même Figure

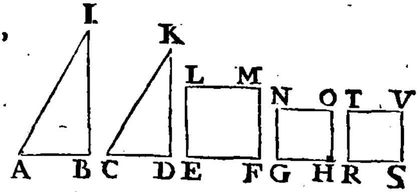
Figure B. Et partant les Angles de la Figure A sont égaux aux Angles de la Figure C. D'ailleurs, puisque les Figures A & B sont semblables : les Côtez qui sont alentour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Côtez qui sont alentour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure B, par la 1. Definition. Et de même, puisque les Figures B & C sont semblables : les Côtez qui sont autour des Angles de la même Figure B, sont aussi proportionnaux aux Côtez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C. D'où il suit ; que les Côtez qui sont autour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Côtez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C. Et partant les Figures A & C sont semblables ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XVI.

Si quatre Lignes droites ſont proportionnelles, les Figures ſemblables & ſemblablement poſées ſur ces Lignes, ſeront auſſi proportionnelles: Et ſi quatre Figures ſemblables & ſemblablement poſées ſur quatre Lignes droites, ſont proportionnelles, ces quatre Lignes droites ſeront auſſi proportionnelles.

JE ſuppoſe premierement que les quatre Lignes AB, CD, EF, GH, ſoient proportionnelles; & que les Figures ABI, CDK, & les Figures EM, GO, ſoient ſemblables & ſemblablement poſées



ſur ces quatre Lignes. Cela étant, je dis que ces quatre Figures ſont proportionnelles; c'eſt à dire que ABI eſt à CDK, comme EM eſt à GO. Pour le prouver.

Puiſque les Figures ABI & CDK ſont ſemblables: ABI eſt à CDK, en Raiſon doublée de AB à CD, par

par la 20. Prop. Et puisque AB est à CD, comme EF est à GH, par supposition : la Raison doublée de AB à CD est la même que la Raison doublée de EF à GH. De même, puisque les Figures EM & GO sont semblables : EM est à GO, en Raison doublée de EF à GH. Partant la Figure ABI est à la Figure CDK, comme la Figure EM est à la Figure GO, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les quatre Figures ABI, CDK, EM, GO, qui sont semblables & semblablement posées sur les quatre Lignes droites AB, CD, EF, GH, soient proportionnelles. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes sont aussi proportionnelles. Pour le prouver,

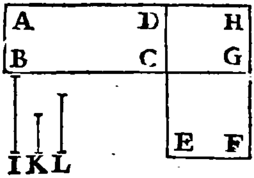
Supposons que RS soit une quatriéme proportionnelle aux trois Lignes droites AB, CD, EF, par la 12. Prop. & que la Figure RSVT décrite sur cette Ligne, soit semblable & semblablement posée à la Figure EM, ou à GO, par la 18. Prop. Cela posé :

Par ce qui vient d'être démontré, comme ABI sera à CDK, ainsi EM sera à RV. Mais ABI est aussi à CDK, comme EM est à GO, par supposition. Donc EM est à RV, comme à GO. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Figures GO & RV sont égales. Mais elles sont aussi semblables, par la construction ; partant les Lignes GH, RS, sur lesquelles elles sont décrites, sont égales. Comme donc la Ligne RS est une quatriéme Proportionnelle aux trois Lignes AB, CD, EF : la Ligne GH sera aussi une quatriéme proportionnelle aux mêmes Lignes ; c'est à dire, que AB sera à CD, comme EF à GH ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XVII.

Les Parallelogrammes équiangles sont entr'eux en Raison composée de celles de leurs Côtez.



JE suppose que les Parallelogrammes AC & CF soient équiangles, & que l'Angle BCD soit égal à l'Angle ECG. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE. Pour le prouver,

Disposez ces deux Parallelogrammes ensorte que leurs Côtez BC, CG, se rencontrent directement au Point C; par même moyen les deux autres Côtez DC, CE, concourront aussi directement, par la Remarque de la 15. du 1. Prolongez les Côtez AD, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H. Puis ayant pris à discretion la Ligne I, faites (par la 12. Prop.) que comme BC est à CG, ainsi la Ligne I soit à la Ligne K; & comme DC est à CE, ainsi la Ligne K soit à la Ligne L. Cela posé:

Puisque les Lignes AH, BG, sont paralleles, & que les Lignes ED, FH, sont aussi paralleles: la Figure DG est un Parallelogramme. Et puisque les Parallelogrammes AC, DG, sont de même hauteur: AC est à DG, comme BC à CG, par la 1. Prop. Mais comme BC est à CG, ainsi I est à K, par la construction. Donc AC est à DG, comme me I est à K. De même, puisque les Parallelogrammes DG, CF, sont de même hauteur: DG est à CF, comme DC est à CE. Or DC est à CE, comme K est à L, par la construction. Partant DG est à CF, comme K est à L. Nous avons donc trois Grandeurs AC, DG, & CF, d'une part, & trois Grandeurs I, K, L, d'autre part, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Partant en Raison égale elles seront encore proportionnelles, par la 22. Prop. du 5. Et ainsi le Parallelogramme AC sera au Parallelogramme CF, comme I est à L. Mais la Raison de I à L est composée des Raisons de I à K, & de K à L, qui sont les mêmes que les Raisons de BC à CG, & de DC à CF. Donc le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

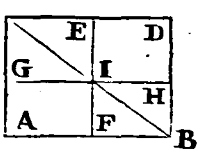
THEOREME XVIII.

En tout Parallelogramme, les Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & qui ont un Angle commun avec lui, lui sont semblables, & semblables entr'eux.

JE suppose le Parallelogramme ABDC, & que les Parallelogrammes GE, FH, soient alentour de son Diametre BC, & deplus, qu'ils ayent les Angles B & C communs avec lui. Cela étant, je dis premierement que les deux Parallelogrammes GE, FH, sont semblables au Parallelogramme AD. Pour le prouver,

Les

Les Angles GCE & FBH, qui sont les opposez dans le Parallelogramme AD, sont égaux entr'eux, par la 34. Prop. du 1. Or les Angles GIE & FIH sont egaux à ces premiers Angles, puis qu'ils leur sont aussi opposez dans les Parallelogrammes GE & FH. Et partant ces quatre Angles sont égaux entr'eux. De sorte que les trois Parallelogrammes AD, GE, FH, ont déja chacun deux Angles égaux à deux Angles. D'ailleurs,



puisque les Lignes AB, GH, sont paralleles, par supposition, & que la Ligne droite CGA tombe dessus : l'Angle exterieur CGI est égal à son opposé interieur A, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BA tombe dessus : l'Angle exterieur IFB est encore égal à son opposé interieur A. Et ainsi les trois Angles G, A, F, sont égaux entr'eux. Et parce que l'Angle E est égal à son opposée G ; que l'Angle D est égal à son opposé A ; & que l'Angle H est égal à son opposé F, par la 34. Prop. du 1 : ces trois Angles E, D, H, sont aussi égaux entr'eux. Voilà donc encore les deux Angles restans d'un de ces Parallelogrammes, égaux aux deux Angles restans de chacun des deux autres. Et par consequent ces trois Parallelogrammes sont équiangles. Deplus, les Triangles CGI & CAB, qui ont déja les Angles G & A égaux, ayant encore l'Angle GCI commun, sont équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant (par la 4. Prop.) CG est à GI, comme CA est à AB. Si bien que les Parallelogrammes GE & AD étant équiangles, & leurs Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux : l'un est semblable à l'autre. De même, les Triangles IFB & CAB, qui ont déja les Angles F & A égaux, ayant encore l'Angle FBI com-

commun, sont aussi équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant (par la 4. Prop.) IF est à FB, comme CA est à AB. Si bien que les Parallelogrammes FH & AD étant aussi équiangles, & leurs Côtez alentour des Angles égaux, proportionnaux: l'un est aussi semblable à l'autre; Ce qu'il falloit démontrer.

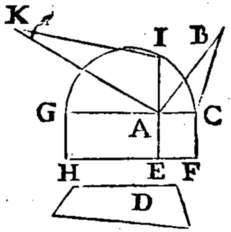
Je dis en second lieu, que les Parallelogrammes GE & FH sont semblables entr'eux.

Car puis qu'ils sont tous-deux semblables au Parallelogramme AD, il s'ensuit (par la 21. Prop.) qu'ils sont aussi semblables entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME VII.

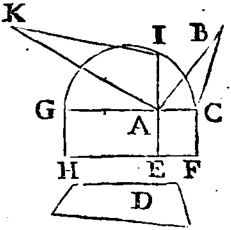
Deux Figures rectilignes étant données, en décrire une troisiéme, semblable à l'une, & égale à l'autre.



Je suppose que les deux Figures ABC, & D, soient données; & je propose d'en décrire une troisiéme, semblable à la Figure ABC, & égale à la Figure D. Pour le faire,

Décrivez (par la 44. Prop. du 1.) sur la Ligne AC le Parallelogramme Rectangle AF, égal à la Figure ABC. Puis (par la 45. Prop. du 1.) décrivez sur AE le Parallelogramme AH, égal à la Figure donnée D. Aprés cela décrivez sur GC le demi-Cer-

Cercle GIC; & aprés avoir élevé au Point A la Perpendiculaire AI, si longue, qu'elle rencontre la Circonference au Point I: décrivez (par la 18. Prop.) sur AI la Figure AIK, semblable à la Figure donnée ABC. Et alors je dis que cette Figure AIK sera égale à la Figure donnée D. Pour le prouver,



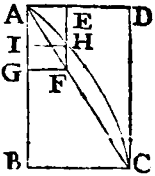
La Ligne AI est moyenne proportionnelle entre AC, & AG, par la 13. Prop. c'est à dire, que AC est à AI, comme AI est à AG. Et par consequent AC est à AG, en Raison doublée de AC à AI. Or les Figures ABC & AIK étant semblables, l'une est à l'autre en Raison doublée de AC à AI, par la 19. & 20. Prop. Donc la Figure ABC est à la Figure AIK, comme AC est à AG. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes AF, AH, sont de même hauteur: comme AC est à AG, ainsi AF est à AH. Partant la Figure ABC est à la Figure AIK, comme le Parallelogramme AF est au Parallelogramme AH. Et en Raison alterne, la Figure ABC est au Parallelogramme AF, comme la Figure AIK est au Parallelogramme AH. Or la Figure ABC est égale au Parallelogramme AF, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale au Parallelogramme AH. Mais le Parallelogramme AH est égal à la Figure donnée D, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale à la Figure donnée D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XIX.

Si d'un Parallelogramme on retranche un Parallelogramme semblable & semblablement posé au total, & ayant un Angle commun avec lui : le Parallelogramme retranché sera alentour du Diametre du Parallelogramme total.



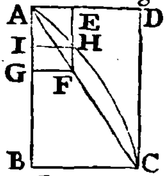
JE suppose que du Parallelogramme ABCD l'on ait retranché le Parallelogramme GE, qui lui est semblable & semblablement posé, & qui a l'Angle GAE commun avec lui. Cela étant, je dis que le Parallelogramme GE est alentour du Diametre du Parallelograme total BD ; c'est à dire, qu'en menant une Ligne droite du Point A au Point C, elle passera par l'Angle F. Pour le prouver,

Si cela n'étoit, il faudroit que cette Ligne passât par quelqu'autre Point que par le Point F. Supposons donc, s'il est possible, que ce soit par le Point H, comme fait ici AHC. Cela posé :

En tirant la Ligne HI parallele à AE, il s'ensuivroit que le Parallelogramme IE seroit alentour du Diametre du Parallelogramme BD. Or ces deux Parallelogrammes ont l'Angle IAE commun. Et partant (par la 24. Prop.) le Parallelogramme IE seroit semblable au total BD. Mais le Parallelogramme GE est supposé semblable au total BD.

Par

Par consequent le Parallelogramme IE, & le Parallelogramme GE, seroient semblables, par la 21. Prop. Et partant le Côté IH seroit au Côté IA, comme le Côté GF est au Côté GA. Or IH est égal à GF, puis qu'ils sont les Côtez opposez du Parallelogramme GH. Et partant IA seroit aussi égal à GA, par la 14. Prop. du 5; c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne droite menée du Point A au Point C, passe par ailleurs que par le Point F. Et par consequent, le Parallelogramme GE est alentour du Diametre du Parallelogramme BD; Ce qu'il falloit démontrer.



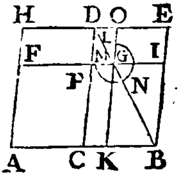
PROPOSITION XXVII.

THEOREME XX.

Si on applique à une Ligne droite tant de Parallelogrammes que l'on voudra, chacun desquels défaille d'un Parallelogramme semblable à un autre qui est déja décrit sur la moitié de cette Ligne: le plus grand de tous sera celui qui sera décrit sur l'autre moitié, lequel sera égal & semblable au Défaut.

JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée; qu'elle ait été coupée en deux également au Point C; & que sur la moitié CB l'on ait décrit le Paral-

Parallelogramme CE ; & qu'aprés cela l'on ait achevé de décrire ſur la Ligne AB le Parallelogramme AE. Par ce moyen, il ſera vrai de dire, que le Parallelogramme AD ſera appliqué à la moitié de la Ligne droite AB, & défaudra du Parallelogramme CE, décrit ſur l'autre moitié, & auquel il eſt égal, par la 36. Prop. du 1. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AD eſt le plus grand de tous ceux qui peuvent être appliquez ſur la Ligne AB, & défaillans d'un Parallelogramme ſemblable au Parallelogramme CE, qui avoit été auparavant décrit ſur la moitié CB. Pour le prouver,



Tirez le Diametre DB ; & ayant pris à diſcretion dans ce Diametre le Point G, menez par le Point G la Ligne FGI parallele à AB, & la Ligne KGO parallele à CD. Cela poſé :

Le Parallelogramme AG ſera appliqué à la Ligne AB, & défaudra du Parallelogramme KI, lequel (par la 24. Prop.) ſera ſemblable au Parallelogramme CE. Il s'agit donc de montrer que le Parallelogramme AD eſt plus grand que le Parallelogramme AG. Pour le prouver.

Les Supplémens GE & CG ſont égaux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoûte le Parallelogramme KI, le Parallelogramme KE ſera égal au Parallelogramme CI. Or le Parallelogramme AP eſt auſſi égal au Parallelogramme CI, par la 36. Prop. du 1. puiſqu'ils ſont ſur Bazes égales & entre mêmes Paralleles. Partant le Parallelogramme KE eſt égal au Parallelogramme AP. Donc en leur ajoûtant le Parallelogramme commun CG, il s'enſuivra que le Gnomon LNM ſera égal au Parallelogramme AG. Or le Parallelogramme CE eſt plus grand que le Gnomon LNM, qui n'eſt que ſa partie ; & par con-

conſequent, il eſt plus grand que le Parallelogramme AG. D'où il ſuit, que le Parallelogramme AD, qui eſt égal au Parallelogramme CE, eſt auſſi plus grand que le Parallelogramme AG; Ce qu'il falloit démontrer.

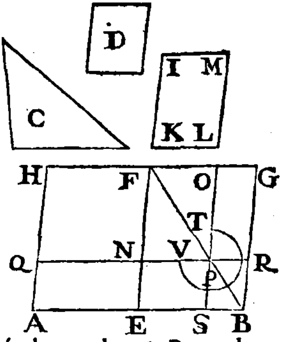
PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME VIII.

Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & défaillant d'un Parallelogramme ſemblable à un Parallelogramme donné: Mais il faut que la Figure donnée ne ſoit pas plus grande qu'un Parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la Ligne donnée, ſeroit ſemblable au Parallelogramme donné.

JE ſuppoſe que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, ſoient donnez; & que cette Figure ne ſoit pas plus grande que le Parallelogramme AF, qui eſt décrit ſur la moitié de la Ligne AB, & qui eſt ſemblable au Parallelogramme donné D. Et je propoſe d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & défaillant d'un Parallelogramme ſemblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,

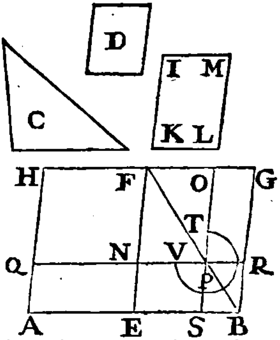
Décrivez ſur EB, moitié de la Ligne donnée, le Parallelogramme EG, ſemblable au Parallelogramgramme donné D. Puis achevez de décrire ſur la Ligne AB le Parallelogramme AG. Par ce moyen AF ſera un Parallelogramme appliqué à la Ligne AB, & défaillant du Parallelogramme EG ſemblable au Parallelogramme donné D. Or ce Parallelogramme AF, qui eſt décrit ſur la moitié de la Ligne AB, ou il eſt égal à la Figure donnnée C, ou il eſt plus grand; car il ne doit pas être plus petit, par la ſuppoſition. S'il eſt égal, on aura fait ce qu'il falloit faire; s'il eſt plus grand, trouvez (par la 2. Remarque de la 45. Prop. du 1.) l'excez dont cette Figure C eſt ſurpaſſée par le Parallelogramme AF, ou par EG, qui lui eſt égal, par la 36. Prop. du 1.



Puis (par la 25. Prop.) décrivez le Parallelogramme KM, égal à cét excez, & qui ſoit ſemblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant pris FO égale à IM, & FN égale à IK: menez par le Point O la Ligne OS parallele à FE, & par le Point N la Ligne QR parallele à AB. Alors je dis que le Parallelogramme AP, qui eſt appliqué à la Ligne donnée AB, eſt égal à la Figure donnée C; & que le Parallelogramme SR, dont il eſt défaillant, eſt ſemblable au Parallelogramme donné D. Pour le prouver,

Puiſque les Parallelogrammes EG & KM ont été faits ſemblables au Parallelogramme donné D, ils ſont ſemblables entr'eux, par la 21. Prop. & l'Angle NFO eſt égal à l'Angle KIM. D'ailleurs, les Lignes FO, FN, ayant été priſes égales aux Lignes

gnes IM, IK : le Parallelogramme NO est égal & semblable au Parallelogramme KM, & par consequent aussi au Parallelogramme EG ; avec lequel ayant l'Angle NFO commun, il s'ensuit (par la 26. Prop.) que ces deux Parallelogrammes sont alentour du même Diametre. Et partant, tirant la Ligne droite FB, elle passera par le Point P. D'ailleurs, le Parallelogramme NO étant égal au Parallelogramme KM, qui est l'excez dont le Parallelogramme EG surpasse la Figure donnée C : il s'ensuit que le Gnomon TV est égal à la Figure donnée C. Maintenant, les Supplémens EP & PG sont égaux, par la 43. du 1. Donc en leur ajoûtant le Parallelogramme commun SR, le Parallelogramme ER sera égal au Parallelogramme SG. Or le Parallelogramme AN est égal au Parallelogramme ER, par la 36. du 1. Donc le Parallelogramme AN est aussi égal au Parallelogramme SG. Si donc on ajoûte à ces deux Touts le Parallelogramme EP ; il s'ensuivra que le Parallelogramme AP sera égal au Gnomon TV. Mais le Gnomon TV a été prouvé égal à la Figure donnée C. Donc le Parallelogramme AP est aussi égal à la Figure donnée C. Deplus, le Parallelogramme SR étant alentour du Diametre du Parallelogramme EG, lui est semblable, par la 24. Prop. Il est donc aussi semblable au Parallelogramme donné D, par la 21. Prop. Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.



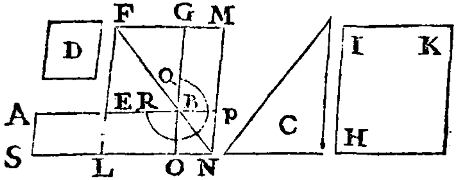
PRO-

PROPOSITION XXIX.

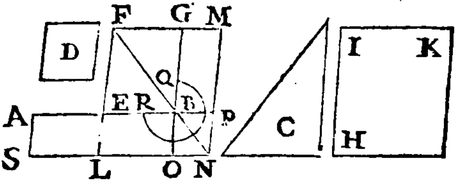
PROBLEME IX.

Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & excedant d'un Parallelogramme semblable à un Parallelogramme donné.

JE suppose que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, soient donnez; & je propose d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & excedant d'un Parallelogramme semblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,



Coupez la Ligne AB en deux également au Point E; & sur la moitié EB décrivez (par la 18. Prop.) le Parallelogramme EG, semblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant décrit (par la 45. Prop. du 1. & par la 25. Prop. de ce Livre) le Parallelogramme HIK, égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG, pris ensemble, & semblable au Parallelogramme donné D: prolongez le Côté FG vers M, & FE vers L, ensorte que FM soit égal à IK, & FL à IH. Cela fait, menez par le Point M la Ligne MN parallele à FL; par le Point L la Ligne LN parallele à AB; & par le Point A, la Ligne AS parallele à FL: & prolongez la Ligne AB jusqu'en P, & la Ligne LN jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AS au Point S. Cela étant, je dis que le Parallelogramme SP, qui



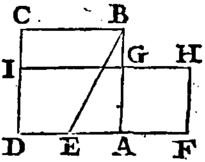
est appliqué à la Ligne donnée AB, est égal à la Figure C; & que le Parallelogramme OP, dont il est excedant, est semblable au Parallelogramme donné D. Pour le prouver,

Puisque les Parallelogrammes EG & HK ont été faits semblables au Parallelogramme donné D, ils sont semblables entr'eux, par la 21. Prop. & l'Angle HIK est égal à l'Angle EFG. Et d'autant que les Côtez FL, FM, du Parallelogramme LM, ont été pris égaux aux Côtez HI, IK, du Parallelogramme HK: le Parallelogramme LM est égal & semblable au Parallelogramme HK, & par consequent aussi semblable au Parallelogramme donné D, & au Parallelogramme EG. Deplus, les Parallelogrammes LM & EG étant semblables, & ayant l'Angle F commun, ils sont alentour du même Diametre FBN, par la 26. Prop. D'ailleurs, le Parallelogramme LM étant égal au Parallelogramme HK, qui a été fait égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG: il s'ensuit que le Parallelogramme LM est aussi égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG; & par consequent que le Gnomon QR est égal à la à la Figure donnée C. Maintenant, d'autant que (par la 43. du 1.) le Supplément GP est égal au Supplément EO, & que le Parallelogramme AL est égal à EO, par la 36. du 1: il s'ensuit que le Parallelogramme AL est aussi égal au Supplément GP. Et partant en leur ajoûtant le Parallelogramme commum LP, le Parallelogramme SP sera égal au Gnomon QR. Or ce Gnomon a été prouvé égal à la Figure donnée C. Partant le Parallelogramme SP, qui est appliqué à la Ligne droite donnée AB, est égal à la Figure donnée C. Et d'autant que le Parallelogramme OP, dont le Parallelogramme SP excede, est semblable au Parallelogramme LM, par la 24. Prop: il est aussi semblable au Parallelogramme donné D; Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME X.

Couper une Ligne droite donnée, selon la moyenne & extréme Raison.



JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée; & je propose de la couper selon la moyenne & extréme Raison. Pour le faire,

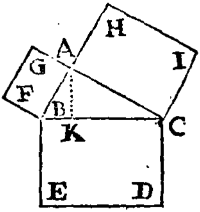
Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AC. Coupez le Côté AD en deux également au Point E. Du Point E au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez la Ligne EA vers F, & prenez EF égale à EB. Ensuite, décrivez sur AF le Quarré AH, & prolongez HG vers I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G selon la moyenne & extrême Raison, c'est à dire que AB est à AG, comme AG est à GB. Pour le prouver,

Par cette construction, & par le raisonnement de la 11. Prop. du 2. il est évident que le Rectangle IB est égal au Quarré AH. D'où il suit, par la 14. Prop. de ce Livre, que comme CB, ou AB son égale, est à AG, ainsi GH, ou AG son égale, est à GB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXI.

Si sur les trois Côtez d'un Triangle Rectangle sont décrites trois Figures semblables & semblablement posées: celle qui est décrite sur le Côté qui soûtient l'Angle droit, est égale aux deux autres.



JE suppose que le Triangle ABC soit Rectangle; que l'Angle BAC soit droit; & que sur les trois Côtez AB, AC, BC, soient décrites les trois Figures FA, AI, EC, qui soient semblables & semblablement posées: Cela étant, je dis que la Figure EC, décrite sur le Côté BC, qui soûtient l'Angle droit BAC, est égale aux

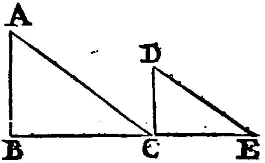
aux deux autres FA & AI. Pour le prouver,

Abaissez du Point A la Ligne droite AK, perpendiculaire à la Ligne BC. Cette Ligne AK (par la 8. Prop.) divisera le Triangle ABC en deux Triangles semblables entr'eux, & au total; & les Côtez AB, BC, CA, qui soûtiennent chacun un Angle droit, seront homologues, ou de même Raison. Ensuite dequoi (par la 19. Prop.) le Triangle AKB est au Triangle ABC, en Raison doublée de AB à BC. Or les Figures FA, EC, qui sont supposées semblables, sont aussi l'une à l'autre en Raison doublée de AB à BC, par la 20. Prop. de ce Livre. Et partant le Triangle AKB est au Triangle ABC, comme la Figure FA est à la Figure EC. D'ailleurs, le Triangle AKC est au Triangle ABC, en Raison doublée de AC à BC, par la 19. Prop. Mais (par la 20. Prop.) la Figure AI est aussi à la Figure EC, en Raison doublée de AC à BC. Partant le Triangle AKC est au Triangle ABC, comme la Figure AI est à la Figure EC. Nous avons donc le Triangle AKB, premiere Grandeur, qui est au Triangle ABC, seconde Grandeur, comme la Figure FA, troisiéme Grandeur, est à la Figure EC, quatriéme. Deplus, nous avons le Triangle AKC, cinquiéme Grandeur, qui est à la seconde ABC, comme la Figure AI, sixiéme Grandeur, est à la quatriéme EC. Partant (par la 24. Prop. du 5.) comme la premiere Grandeur AKB, & la cinquiéme AKC, prises ensemble, sont à la seconde ABC; ainsi la troisiéme FA, & la sixiéme AI, prises ensemble, sont à la quatriéme EC. Or la premiere AKB, & la cinquiéme AKC, prises ensemble, sont égales à la seconde ABC, puisqu'elles conviennent. Donc la troisiéme FA, & la sixiéme AI, prises ensemble, sont aussi égales à la quatriéme EC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

Si deux Triangles, qui ont deux Côtez proportionnaux à deux Côtez, sont disposez de telle sorte qu'ils fassent un Angle, & que leurs Côtez homologues soient paralleles : les deux autres Côtez se rencontreront directement.



JE suppose que dans les deux Triangles ABC, & DCE, le Côté AB soit au Côté AC, comme le Côté DC est au Côté DE ; & que ces deux Triangles soient disposez de telle sorte qu'ils fassent l'Angle ACD ; & que leurs Gôtez homologues soient paralleles, c'est à dire que le Côté AB soit parallele au Côté DC, & le Côté AC au Côté DE. Cela étant, je dis que les deux autres Côtez BC, CE, se rencontreront directement. Pour le prouver,

Puisque la Ligne droite AC tombe sur les Lignes AB, DC, qui sont paralleles par supposition : l'Angle ACD est égal à l'Angle A, qui lui est opposé alternativement, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque la Ligne droite CD tombe sur les deux Paralleles AC, DE : l'Angle D est égal à son opposé alternativement ACD. Et partant les deux Angles A & D sont égaux entr'eux. Et puisque les Côtez

Côtez qui ſont alentour de ces Angles, ſont proportionnaux, par ſuppoſition : les deux Triangles ABC & DCE ſont équiangles, par la 6. Prop. Par conſequent l'Angle B eſt égal à l'Angle DCE ; & l'Angle ACB égal à l'Angle E. Maintenant, puiſque l'Angle DCE eſt égal à l'Angle B : ſi l'on ajoûte à l'un l'Angle ACD, & à l'autre l'Angle A, qui ſont égaux : les deux Angles DCE & ACD, ou bien l'Angle ſeul ACE, ſeront égaux aux deux Angles B & A ; & en leur ajoûtant derechef l'Angle commun ACB, il s'enſuivra que les deux Angles ACE & ACB ſeront égaux aux trois Angles du Triangle ABC, c'eſt à dire à deux droits, par la 32. du 1. D'où il ſuit (par la 14. Prop. du 1.) que les deux Lignes BC, CE, ſe rencontrent directement ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXIII.

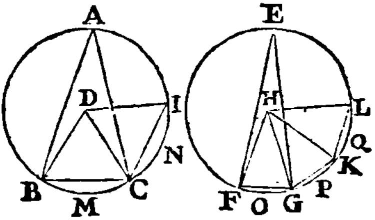
Aux Cercles égaux, les Angles conſtituez au Centre, ou à la Circonference, ſont entr'eux comme les Arcs qui les ſoûtiennent ; & les Secteurs ſont auſſi entr'eux comme ces Arcs.

JE ſuppoſe que les deux Cercles ABC, & EFG, ſoient égaux ; & que les Angles BDC & FHG ſoient conſtituez aux Centres de ces deux Cercles. Cela étant, je dis que l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG. Pour le prouver,

Menez une Ligne droite du Point B au Point C,

& une autre Ligne droite du Point F au Point G. Puis appliquez à la Circonference du Cercle ABC autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à BC, telle qu'est par exemple la Ligne CI. De même, appliquez à la Circonference du Cercle EFG autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à FG, telles que sont GK, KL; & tirez les Lignes droites DI, HK, KL. Cela posé:

Puisque les Lignes droites BC, CI, sont égales: les Arcs BC, CI, dont elles sont les Soûtendantes,



sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite dequoi, les Angles BDC & CDI sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle BDI est autant multiple de l'Angle BDC, qui est la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc BCI est multiple de l'Arc BC, qui est la troisiéme de ces mêmes Grandeurs. D'ailleurs, puisque les Lignes droites FG, GK, KL, sont égales: les Arcs FG, GK, KL, dont elles sont les Soûtendantes, sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite de quoi, les Angles FHG, GHK, KHL, sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle FHL est autant multiple de l'Angle FHG, qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatriéme de ces mêmes Grandeurs. Or si l'Angle BDI est égal à l'Angle FHL, l'Arc BCI s'ensuit égal à l'Arc FGKL, par la 26. Prop. du 3. Et si l'Angle BDI

est

eſt plus grand que l'Angle FHL, l'Arc BCI eſt auſſi plus grand que l'Arc FGKL. Et enfin ſi l'Angle BDI eſt moindre que l'Angle FHL, l'Arc BCI eſt auſſi moindre que l'Arc FGKL. Et partant (par le 2. Axiome du 5.) ces quatre Grandeurs ſont proportionnelles; c'eſt à dire, que l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en ſecond lieu, que les Angles BAC & FEG, qui ſont conſtituez aux Circonferences de ces Cercles ſont encore entr'eux comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG. Pour le prouver,

Les Angles BAC & FEG ſont les moitiez des Angles BDC & FHG, par la 20. Prop. du 3. Et par conſequent (par la 15. Prop. du 5.) l'Angle BAC eſt à l'Angle FEG, comme l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG. Or l'Angle BDC eſt à l'Angle FHG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG, comme il a été prouvé. Et partant, l'Angle BAC eſt à l'Angle FEG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troiſiéme lieu, que le Secteur DBMC eſt au Secteur HFOG, comme l'Arc BC eſt à l'Arc FG. Pour le prouver,

Puiſque les Lignes BC, CI, ſont égales, & que les Arcs BC, CI, qu'elles ſoûtiennent, ſont égaux: il s'enſuit que les Segmens BMC, & CNI, ſont auſſi égaux entr'eux. A quoy ſi on ajoûte les Triangles BDC & CDI, qui ſont égaux, par la 4. Prop. du 1. les Secteurs DBMC & DCNI ſeront auſſi égaux entr'eux. De ſorte que le Secteur DBCI eſt autant multiple du Secteur DBMC, qui eſt la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles; que l'Arc BCI eſt multiple de l'Arc BC, qui eſt la troiſiéme de ces mêmes Grandeurs. On prouvera de même, que le Secteur HFGKL eſt autant multiple du Secteur HFOG, qui eſt la ſeconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatriéme de ces mêmes Grandeurs. Or si le Secteur DBCI est égal au Secteur HFGKL, l'Arc BCI est aussi égal à l'Arc FGKL; Si le Secteur est plus grand que le Secteur, l'Arc est plus grand que l'Arc; Et si le Secteur est moindre que le Secteur, l'Arc est aussi moindre que l'Arc. Donc (par le 2. Axiome du 5.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; c'est à dire que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG; Ce qui restoit à démontrer.

I. Corollaire.

Puisque l'Angle d'un Secteur est à l'Angle d'un autre Secteur, comme l'Arc de l'un est à l'Arc de l'autre; & que l'Arc est à l'Arc, comme le Secteur est au Secteur: il s'ensuit que comme l'Angle est à l'Angle, ainsi le Secteur est au Secteur.

II. Corollaire.

Deplus, puisque le Cercle est composé de tous les Secteurs qui peuvent être autour de son Centre: il est évident que comme la quantité des quatre Angles droits qui peuvent être autour du Centre, est à la quantité de l'Angle du Secteur, ainsi la quantité de tout le Cercle est à la quantité du Secteur.

Fin des Elemens d'Euclide.