

# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES  
Google Livres

# OEUVRES

POSTHUMES

DE

Mr. ROHAULT.

TOME PREMIER.



*Suivant la Copie de Paris.*



A LA HAYE,

Chez HENRY van BULDEREN, Marchand  
Libraire, dans le Pooten, à l'Enseigne  
de MEZERAY.

---

M. D C. X C.





A MONSEIGNEUR  
D'ESTRÉES,  
EVESQUE ET DUC DE LAON,  
PAIR DE FRANCE,  
COMTE D'ANISY.

**M**ONSEIGNEUR,

*Entre toutes les connoissances auxquelles l'Esprit humain se peut appliquer, il n'y en a point qui ayent plus de rapport à la Religion que les Mathématiques. Toutes les Sciences se proposent également la recherche de la Vérité, mais il n'y a qu'elles seules qui se puissent vanter incontestablement de l'avoir atteinte. En effet, si la Religion, par les lumières surnaturelles de la Foi, nous fait voir à ce qui est au-dessus de la portée de nos Esprits: Les Mathématiques, par le moyen de ce Flambeau intérieur & naturel que Dieu a allumé en nous, & à la faveur des premières vérités générales qui sautent d'abord aux yeux de tout le monde, nous introduisent dans*

## É P I T R E.

*une longue suite de plusieurs autres veritez, qui en dépendent, & qui ne sont pas moins certaines que leurs principes. Cette raison seule doit suffire, MONSIEUR, pour satisfaire le Public, sur le choix que j'ai fait d'un des plus illustres Princes de l'Eglise, pour Lui consacrer un Ouvrage tout consacré lui-même à la Vérité; & qui appliquant nôtre Esprit à des objets qui n'ont rien qui flate les Sens, mais que nous ne laissons pas de trouver infiniment agreables, à cause des veritez qu'on y découvre, peut mêmes contribuer en quelque façon au régleme[n]t de nos mœurs, en nous détachant des choses sensibles, qui sont les causes les plus ordinaires de leur corruption. Dès cette premiere ouverture que je donne de ma persée, chacun sans doute y applaudit, & enchérissant même par dessus, me prévient d'ja sur tout ce que je puis avoir à dire à Vôtre gloire. Vôtre illustre Nom, MONSIEUR, comme un nouveau Flambeau qui surprend & qui brille, fait voir tout d'un coup les nobles convenances qui se rencontrent en mon dessein, de mettre cet Ouvrage sous une si glorieuse protection. Le passage est aisé du Rang à la Personne; & l'on n'a pas plutôt approuvé de voir les veritez Mathématiques sous l'azile favorable d'un des plus sacrez Dépositaires de celles de la Foi, qu'on les felicite, & moi avec elles, d'être à l'abry d'un si beau Nom, où tout est également grand & solide, majestueux & éclatant. Une Ambassade dans la premiere Cour du Monde Chrétien, prolongée pour la quatrième fois au delà des termes ordinaires, fait voir à tout l'Univers, en la Personne de Monseigneur Vôtre Pere, une fidelité sans reproche, une sagesse consommée, une capacité sans bornes. Ces Négotiations reiterées de Monseigneur le Cardinal d'Estrées, Vôtre Oncle, à Rome, par ordre de Sa Majesté, dans les conjonctures les plus délicates, où la Politique, aussi bien que la Nature, demande deux yeux, non pour voir plus clair, mais pour voir plus seurement, & avec plus d'étendue, ne marquent-elles pas une distinction particulière de merite, & une confiance entiere en la force &*

## E P I T R E.

*en la prudence de son génie. Et ne droit-on pas, que le Monarque le plus éclairé que la France ait jamais eu, pleinement content & satisfait des services de ces deux Illustres Freres, semble au milieu de tant de grands Sujets, n'en trouver pas-un digne de leur succeder, jusques à ce qu'associé à la Pourpre de l'un, & remplissant le mérite de tous-les-deux, Vous alliez Vous-même continuer à soutenir la gloire de la France, & celle de Vos Ancestres, sur cet auguste Théâtre, uniquement destiné, ce semble, à ceux de Votre Nom. D'ailleurs ces grands & fameux Exploits, par où Monseigneur le Maréchal, Votre Oncle, commença à se signaler, aussitôt que Sa Majesté l'eût honoré de la Charge de Vice-Amiral, & que le bruit de ses Canons a fait retentir partout; Et sur tout ce prodige de valeur & de prudence qu'il fit paroître à Tabako, (où tout ce qui sembloit devoir concourir à sa perte, la disposition des lieux, le grand nombre des Ennemis, celui de leurs Vaisseaux, la difficulté de les aborder, le Canon pointé pour leur défense, toute une Isle en un mor armée contre luy, ses blessures même & ses naufrages, n'ont servy qu'à rendre sa vie plus illustre, & sa victoire plus glorieuse) font voir en sa Personne tant de courage & d'intrépidité, de conduite & de bonne fortune tout ensemble, que ce Monde-ci semble ne pas suffire aux grands & vastes desseins, & à toutes les genereuses & hardies entreprises de Ceux de Votre Maison. Pardonnez, MONSEIGNEUR, cette double saillie de mon zèle, qui ne scauroit déplaire qu'à Votre modestie; mais qui agréera sans doute à ces premieres Têtes de tous les Ordres de l'Etat, qui Vous ont veu soutenir & présider avec tant d'éclat, dans la plus celebre Ecole du monde; où vous avez commencé à jeter les premiers fondemens, & faire concevoir les premieres esperances de cette Grandeur & Dignité que Vous possédez, & de toutes les autres qui Vous attendent, & auxquelles Vous pouvez si legitimement aspirer. J'ose même dire, que l'on a déjà veu briller en Vous par avance, toutes les marques & tous les caracteres de cette future Grandeur, dans ces premieres*

# E P I T R E.

*essais de generosité, de justice, & de graces, que vous avez fait paroître, dès l'entrée de Votre Episcopat. Il est bon, MONSEIGNEUR, qu'il en reste quelque marque à la Posterité; & que ceux qui honoreront dans les siècles à venir la memoire de feu Monsieur Rohault, (que Messieurs Vos Freres, les Marquis de Cœuvres & de Têmines, avec les plus Grands de la Cour, n'ont pas autrefois dédaigné d'avoir pour Maître,) sçachent, qu'elle a été assez chere à un Prélat de Votre rang, non seulement pour agréer que ses Ouvrages posthumes parussent sous son Nom; mais pour donner aussi accez à ses plus Proches, pour se justifier devant Vous, & pour Vous obliger à marquer de la joye de leur innocence. J'en avois entrepris la deffense, comme Beau-Pere du Doffant, & j'en devrois partager la reconnoissance avec les Vivans, si Vos bontez ne m'engageoient à être entierement & sans partage, & avec une vénération très-profonde,*

MONSEIGNEUR,

*De Votre Grandeur*

Le très humble & très-obcissant  
Serviteur,

C L E R S E L I E R.

P R E-



## P R E F A C E.

**L**E ne doute point qu'il n'y ait bien des gens qui trouveront à redire au Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre, *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, & à qui ce frontispice ne plaira pas. Et si par hazard vous, qui lisez ceci, étiez de ce nombre, comme cela pourroit bien être: je veux bien vous avertir ici dès l'entrée, que ni vous, ni tous ceux qui pourroient vous ressembler, ne serez pas les premiers qui y auront trouvé à redire, puis que moi-même je l'ai condamné, & qu'il ne m'a pas plu.

Mais aussi à dire le vrai, ce n'est pas une chose si facile que l'on pourroit peut-être s'imaginer, que de donner à un Livre, un Titre qui lui convienne, & qui lui convienne justement. Et même j'ose dire, qu'après s'être bien donné de la peine pour en chercher un, il est presque impossible de pouvoir jamais rencontrer au gré de tout le monde.

C'est donc comme une nécessité, que le Titre d'un Livre soit contrôllé: mais qu'il le soit, à la bonne heure; pourveu que d'ailleurs le corps en soit bon, & ne contienne rien que de vrai & de raisonnable, l'on ne doit pas s'en mettre fort en peine, ni chicaner beaucoup là-dessus.

Or je puis assurer qu'en près de cent feuilles que ce Livre contient, & par conséquent en près de huit cents pages, il n'y a rien qui ne soit entierement conforme à la Raison, & qui la puisse choquer le moins du monde. Chaque page, chaque ligne, chaque mot, sont autant de veritez, dont nous sommes convaincus par la Lumiere naturelle, comme étant les réponses vives & nettes de cette Lumiere interieure, qui ne manque jamais de nous éclairer & de nous instruire, toutes les fois que nous la consultons, par l'attention que nous sommes obligez de prêter aux choses

## P R E F A C E.

que nous voulons bien concevoir, & que nous ne sommes point honteux d'apprendre. Aussi, n'est-ce que faute de cette attention, (comme l'a fort bien dit un celebre Auteur de ce temps,) que nous tombons tous les jours en de lourdes fautes, soit en approuvant ce que nous n'entendons point, soit en contredisant les veritez les plus certaines, mais que nous ne voulons pas sçavoir, & auxquelles nous ne donnons pas toute l'application qu'il faut pour les comprendre; parce qu'elles sont contraires à d'anciens préjugés dont nous ne voulons pas nous défaire, & dans la possession desquels nous sommes bien aises de nous maintenir, pour jouir paisiblement de nôtre maîtrise, & couvrir par ce moyen nôtre ignorance.

Ce n'est pas que je ne sceusse fort bien quel Titre il auroit fallu mettre à ce Livre, pour qu'il luy convint justement; mais ce Titre n'auroit pas été au gré du Libraire. Et comme, pour l'ordinaire, il arrive de la contestation entre les Libraires & les Auteurs sur la disposition du Titre; ceux-cy n'ayant en veuë que la conformité qu'il doit avoir avec le Texte, afin que l'un ne démente pas l'autre; & ceux-là au contraire ne se souciant pas beaucoup de cette conformité, mais voulant quelque chose de specieux, qui puisse exciter la curiosité des Lecteurs, & leur en attirer plusieurs: il ne faut pas s'étonner si l'un est quelquefois obligé de céder à l'autre, pour s'ajuster ensemble, & accorder leurs differens.

Or personne ne peut douter que tout l'interêt que peut avoir un Libraire dans l'impression d'un Livre, ne soit son interêt propre & particulier; qui est, que le Livre dont il entreprend l'impression, ait du débit, qu'il ait cours dans le monde, & qu'il ne lui demeure pas sur les bras, renfermé dans un Magazin, pour être rongé des vers, & mangé par la poussiere, plutôt que dévoré par l'avidité d'un grand nombre de Curieux; comme sans doute il se le promet quand il commence une Impression. C'est pourquoy il a été juste de le contenter ici; & c'est ce que j'ay prétendu faire par le Titre que j'ai mis à la tête de ce Livre.

Mais

P R E F A C E.

Mais quelqu'un tournant là-dessus ici le feüillet , pour voir donc ce Titre specieux que je dis avoir mis à la tête de ce Livre, (ne se ressouvénant plus quel il est,) & ne trouvant que trois ou quatre mots fort simples & fort communs, croira peut-être que je me suis oublié de mon dessein, ou que j'ai retenu, comme un secret que je n'ai pas voulu divulguer, ce Titre specieux dont je parle; ou bien peut-être qu'après lui avoir ingenuement confessé que je n'en sçai point d'autre que celui qu'il porte, il ne pourra pas s'empêcher de s'emporter contre moi, en m'accusant de mauvaise foy & d'ignorance. De mauvaise foy, en ce que sçachant, comme j'ai dit, le juste Titre que l'on devoit mettre à ce Livre, je ne l'y ai pas voulu mettre; & d'ignorance, en ce qu'il n'est pas possible que tout autre Titre que l'on y auroit pû mettre, ne fût pour le moins aussi specieux que celui que j'y ai mis, & peut-être mêmes plus au goût de toute le monde. Où enfin, peut-être qu'après être un peu revenu de son emportement, pour m'en faire une espece d'excuse, & me rendre quelque justice, ayant appris par le bruit commun, que je ne passe pas dans le monde pour un homme de mauvaise foi, ni tout à fait ignorant, il me priera de bonne grace que je lui développe donc le mystere qu'il juge devoir être renfermé dans ce Titre, pour meriter, sous des termes si simples, le nom de specieux. Et en cela je confesse qu'il aura quelque raison; & c'est aussi ce que je vais tâcher de faire dans la suite, pour le retirer de la peine où cela l'aura mis.

La réputation que Monsieur Rohault s'étoit acquise de son vivant, étoit devenuë si grande, & son nom si celebre, qu'il étoit connu non seulement dans tout ce Royaume, mais mêmes dans toute l'Europe. Et quoi que depuis sa mort jusqu'aujourd'hui, il se soit écoulé près de dix années, pendant lesquelles il semble que sa memoire auroit dû se perdre, n'ayant rien paru de lui depuis ce temps-là: néanmoins comme l'estime qu'il avoit laissée de lui en mourant, faisoit aisément croire à tout le monde, qu'il n'étoit pas possible qu'un homme comme lui se fût tenu sans rien faire, en sorte qu'il ne fût rien resté, & qu'on

## P R E F A C E.

eût, pour ainsi dire, tout enseveli & enterré avec lui en le mettant dans le tombeau ; cela a fait que les plus curieux & les plus vigilans se sont aussi-tôt soigneusement informez s'il n'avoit point laissé quelques Ecrits après sa mort. Et le bruit s'étant répandu partout qu'il en avoit laissé quelques-uns : j'ai depuis ce temps-là été si souvent & si puissamment sollicité par les instantes prieres d'une infinité de personnes de toutes sortes de conditions, & par les lettres frequentes que j'ai receuës de toutes parts, d'en vouloir faire part au Public, que je n'ai pû m'en deffendre, ni me délivrer mêmes de leurs pressantes sollicitations & importunitez, qu'en satisfaisant à leur desir.

C'est donc ce Livre, ou plutôt ce Recueil de plusieurs divers petits Traitez de Mathématique, qui paroît aujourd'hui. Mais si j'avois mis à sa tête, ce Titre qu'il devoit porter, cela lui auroit fait perdre une bonne partie de l'estime qu'on en avoit conçüe auparavant sans le voir, & auroit de beaucoup refroidi l'ardeur & la curiosité de plusieurs. Car il y a partout un si grand nombre de Livres de Mathématique, & où tout ce quel'on sçauroit dire touchant cette matiere, est si bien & si amplement déduit, qu'il ne semble pas possible qu'on puisse là dessus rien desirer davantage. C'est pourquoi pour ne pas tant se découvrir d'abord, & laisser à deviner aux Curieux quels peuvent être ces Ouvrages de Monsieur Rohault, il a fallu déguiser un peu le Titre ; & au lieu de nommer chaque Traité par son nom, on a été obligé de les comprendre tous ensemble sous ce Titre general & specieux, d'*Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*. Or ces termes generaux d'*Oeuvres posthumes*, emportent avec soi, & font concevoir quelque chose de grand, quand celui qui en est l'Auteur, est d'un grand nom, comme est sans doute celui de Monsieur Rohault ; particulièrement chez les Etrangers, où la jalousie ne regne point, & qui pour cela en ont toujours fait beaucoup d'estime. Et ce font eux qu'un Libraire a principalement à ménager, à cause que le plus souvent c'est d'eux qu'il tire son plus grand profit.

Au reste, ce n'est pas sans peine & sans travail, que Monsieur

P R E F A C E.

sieur Rohault s'étoit acquis cette grande réputation. Il est vrai que la Nature, par un avantage tout singulier, lui avoit donné un Esprit tout à fait Méchanique, fort propre à inventer & à imaginer toutes sortes de Machines; & avec cela des mains artistes & adroites, pour exécuter tout ce que son Imagination lui pouvoit représenter. Aussi se faisoit-il un plaisir d'aller dans les boutiques de toutes sortes d'Ouvriers, pour les voir travailler chacun de leur Métier, & pour y considérer avec attention les divers Outils dont ils se servoient pour l'exécution de leurs Ouvrages. Et c'étoit une des choses qu'il admiroit le plus, & en quoi l'industrie de l'Esprit humain lui paroissoit plus merveilleuse, d'avoir pû inventer tant de sortes d'Instrumens, qui rendent le travail aisé, & sans quoi il seroit impossible de venir à bout d'aucun ouvrage. Mais comme son genie surpassoit de beaucoup en invention & en adresse celui de la plus-part des Ouvriers, aussi leur donnoit-il souvent de bons avis, soit pour la construction de leurs Outils, soit pour faciliter leur travail & diminuer leur peine; & il ne leur disoit rien de particulier, qu'il ne mît aussi-tôt la main à l'œuvre, pour leur apprendre lui-même à le mettre en pratique.

Ce Naturel ingenieux & pénétrant, dont la Nature l'avoit doüé, lui rendoit si facile tout ce à quoi il s'appliquoit, qu'il n'avoit presque trouvé aucune difficulté à apprendre les Mathématiques; & pour cela il ne lui avoit point fallu de Maître. C'est pourquoi les ayant, pour ainsi dire, comme inventées de lui-même, il les possédoit parfaitement. Aussi est-ce ce qui lui donnoit un grand avantage pardessus tous ceux qui comme lui faisoient profession de les enseigner, & qui faisoit qu'on le préféroit aux autres, à cause de la netteté & facilité que cela lui donnoit pour s'expliquer. Je le pourrois ici certifier moi-même, ayant été son Disciple comme les autres, si je ne craignois que mon témoignage ne passât pour suspect. Mais il en a eu tant d'autres de toutes conditions, & des plus qualifiez du Royaume, soit de la Robe, soit de l'Epée, soit de la Cour, qui ne feroient pas de diffi-

## P R E F A C E.

culté de le certifier comme moi, s'il en falloit venir à cette preuve de fait, que je ne feins point de dire ici hardiment, que l'Usage & l'Exercice lui avoient ouvert l'Esprit à une maniere d'enseigner, si aisée, si claire, & avec cela si particuliere, qu'il n'y en avoit point qui approchât de lui, & qui lui fût en cela comparable.

Aussi, s'il m'est ici permis de faire entrer dans ses loiianges une chose qui n'a été qu'en projet, & n'a point eu d'execution : Si la mort ne nous l'eût pas si-tôt ravi, il étoit sur le point de recevoir le plus grand honneur qu'il pouvoit jamais avoir en sa vie, puisqu'on le destinoit à être le Précepteur de Monseigneur le Dauphin, pour lui enseigner les Mathématiques & la Philosophie, aussi-tôt que le cours de ses Etudes l'auroit conduit jusques-là. Et ce que je dis ici à sa gloire, & que j'avance sans autre preuve que ma bonne foi, n'est pourtant pas une chose si difficile à croire. L'exemple de Messieurs les Princes de Conti, qu'on lui avoit mis entre les mains dès leur bas âge, pour leur former l'Esprit de bonne heure, & fortifier leur Raison, avant qu'elle se pût corrompre par les fausses idées d'une vaine Philosophie, & qui donnoient à la Cour de si belles marques de cette ouverture d'Esprit, & du progrès qu'ils faisoient tous les jours sous sa conduite, pouvoit bien être un motif capable de faire venir cette pensée à ceux qui avoient alors la direction sur les Etudes de Monseigneur.

Mais quand bien mêmes ce que dis n'auroit été qu'une vaine présomption de Monsieur Rohault, & une fausse imagination dont il se seroit laissé flater sur de trop légères conjectures, il me suffit pour moi que je n'avance ici rien de moi-même, & que je n'aye appris de fort bonne part. Et à l'égard de Monsieur Rohault, quand il se seroit trompé dans sa pensée, cela ne pourroit rien faire contre lui, ni porter aucun préjudice à sa réputation; puis que cela même en supposeroit une en lui assez bien établie, pour que l'on pût jeter les yeux sur lui, comme sur une personne capable de remplir un poste

P R E F A C E.

poste si honorable. Et de vrai , quoi que cela n'ait point eu d'effet , soit parce que la mort l'a prévenu , soit parce que cela ne devoit point être : cela néanmoins n'a pas empêché que sa réputation ne se soit étendue fort loin , & n'a rien diminué de l'estime qu'on en avoit.

Mais après tout , il n'est pas mal-aisé de deviner d'où lui est venue cette grande estime ; les causes en sont trop publiques pour pouvoir être ignorées. Chacun sçait qu'il avoit l'honneur d'enseigner la plus grande partie des jeunes gens de la premiere qualité ; ce qui le faisoit connoître à la Cour. Et comme les Esprits y sont beaucoup plus raffinez qu'ailleurs , que l'on y épargne moins les gens , & que les défauts y sont plus relevez : si sa Méthode d'enseigner n'en avoit été tout à fait exempte , il seroit bientôt devenu la fable & la risée de la Cour , & n'auroit pas manqué d'être bassoué & méprisé de tout le monde. Mais quand on a vû que les plus grands , à l'envi les uns des autres , lui confioient l'instruction de leurs Enfans , cela a fait que chacun à leur exemple l'a voulu avoir pour Maître ; jusques-là même , que plusieurs qui portoient le bonnet , & qui professoient publiquement dans les Colleges , n'ont point eu honte de devenir ses Disciples. Bien plus , sa réputation ayant passé les limites de ce Royaume , & s'étant répandue dans les païs étrangers , il lui en venoit de toutes parts , & en si grand nombre , qu'il ne pouvoit plus suffire à tous.

Toutefois ce n'est pas encore de là qu'il a tiré sa plus grande gloire. Les Conférences publiques qu'il faisoit une fois toutes les semaines , où se trouvoient des personnes de toutes sortes de qualitez & conditions , Prélats , Abbez , Courtisans , Docteurs , Médecins , Philosophes , Geometres , Regens , Ecoliers , Provinciaux , Etrangers , Artisans , en un mot des personnes de tout âge , de tout sexe , & de toute profession , & où il prononçoit presque autant d'oracles , qu'il faisoit de réponses aux difficultez qui lui étoient proposées indifferemment par toutes sortes de personnes , l'avoient mis dans une si grande réputation , qu'il s'en est trouvé plusieurs , les uns par

P R E F A C E.

curiosité, pour se donner la satisfaction de l'entendre, les autres par jalousie, pour juger de sa doctrine & tâcher de la combattre, qui ont quitté leur país, & entrepris de grands voyages.

La Méthode que Monsieur Rohault gardoit dans ses Conférences, étoit d'y expliquer l'une après l'autre toutes les questions de Physique, en commençant par l'établissement de ses principes, & descendant ensuite à la preuve de ses effets les plus particuliers & les plus rares. Pour cela il faisoit d'abord un discours d'environ une heure, lequel n'étoit point étudié, & où il disoit simplement ce que son sujet lui fournissoit sur le champ. C'est pourquoi il permettoit à un chacun de l'interrompre, quand il arrivoit que ce qu'il avoit dit, ou n'avoit pas été assez bien compris, ou que quelqu'un trouvoit quelque objection à y faire. Et alors avec une patience & modération que j'ai cent fois admirée, & dont lui seul étoit capable, il écoutoit paisiblement tout ce qu'on lui vouloit objecter, pour extravagant qu'il pût être, sans jamais interrompre celui qui parloit; & après avoir satisfait à ses objections, il reprenoit le fil de son discours où il l'avoit quitté, & continuoit à expliquer le reste de la matière qu'il avoit entreprise. Après quoi la dispute étoit ouverte à tout le monde; non pas une dispute tumultueuse, qui se passât simplement en bruit, mais une dispute paisible & honnête, où chacun proposoit modestement & nettement les difficultés qu'il avoit remarquées sur la matière qui avoit été agitée ce jour-là, afin de s'en instruire, & de remporter du fruit de ces Conférences. Et pour l'ordinaire la dispute finissoit dès la première réponse qu'il y faisoit; car après avoir reconnu par les difficultés qu'on lui avoit proposées, ce qui avoit manqué à sa première explication, il résuinoit si bien, & dans un si bel ordre, tout ce qu'on lui avoit objecté, & y répondoit avec tant de netteté & de lumière, que ceux qui les lui avoient proposées, & tous les autres spectateurs de la dispute, n'ayant rien à repliquer, s'en retournoient si satisfaits de ses réponses, qu'il s'attiroit l'admiration de

tout

## P R E F A C E.

tout le monde. J'en appelle ici à témoin des milliers de personnes qui ont assisté plusieurs fois à ses Conférences, & qui ayant alors été charmez de la justesse & de la beauté de ses réponses, & n'en ayant pas encore perdu le souvenir, le regrettent encore tous les jours.

Mais ce qui a rendu son nom plus recommandable & plus celebre, est cette Méthode simple & facile dont il se servoit pour expliquer les plus difficiles & plus curieuses questions de Physique; comme la Lumiere, les Couleurs, l'Arc-en-ciel, les Lunettes, le Flux & Reflux de la Mer, les proprietétez de l'Air, la pesanteur de l'Air, les questions du Vuide, & quantité d'autres. Car à l'entendre parler là-dessus, vous eussiez dit qu'il étoit de concert avec la Nature, & qu'elle prenoit plaisir à lui découvrir ses secrets; qu'elle lui avoit fait voir les différentes parties dont les Corps sont composez, & lui avoit appris quels effets devoient suivre de la communication de leurs mouvemens; car il faisoit comme toucher au doigt tout ce qu'il disoit sur ces matieres. Et afin qu'il n'en pût rester aucun doute, il y joignoit pour preuves quantité de belles experiences, qu'il faisoit devant tout le monde, & dont le plus souvent il faisoit prévoir les effets à chacun, (ensuite des principes qu'il avoit auparavant établis,) avant même que d'en venir à l'épreuve.

C'est ainsi qu'après avoir prouvé & établi pour principe la pesanteur de l'Air, il faisoit voir que tous ces effets que l'on a coûtume d'attribuer à la crainte du Vuide, n'en sont que de simples dépendances, dont les conséquences se tirent d'elles-mêmes, & sans beaucoup de raisonnement. Et pour le faire comprendre, & toucher, pour ainsi dire, au doigt & à l'œil, il avoit fait faire tout exprés quantité de Tuyaux de verre, de toutes sortes de façons, qu'il remplissoit de diverses liqueurs, selon les differens effets qu'il vouloit prouver; mais celle dont il se servoit le plus, & qui lui étoit la plus commode pour ses experiences, étoit le Vif-argent. Car comme une fort petite quantité contrepèse à beaucoup d'eau, & à une bien plus grande quantité d'Air, il pouvoit commodément, & avec des  
Tuyaux

## P R E F A C E.

Tuyaux d'une médiocre grandeur , faire voir par expérience la plus grande partie des effets qui résultent de cette pesanteur.

Or entre tous ces Tuyaux , il en avoit inventé un d'une construction tout-à-fait ingénieuse & particulière , semblable à peu près à la figure dont les Anatomistes se servent pour représenter la grande Artere ascendante & descendante ; par le moyen duquel il faisoit voir en même temps deux effets tout contraires , & pour cela même fort surprenans , de la pesanteur de l'Air. Car après avoir rempli ce Tuyau de Vif-argent , & fait toutes les ceremonies requises pour faire qu'en se vidant d'une partie dans un vaisseau , il en restât dedans la hauteur de deux pieds trois pouces, comme il arrive d'ordinaire : on avoit le plaisir de voir en même temps monter le Vif-argent dans un petit tuyau renfermé dans la branche d'en haut, & descendre celui qui étoit resté dans la branche d'en bas , aussi-tôt que par une fort petite ouverture, faite seulement avec la pointe d'une épingle , on avoit donné moyen à l'Air grossier d'entrer dans ce tuyau. Or cette seule expérience est une preuve si manifeste de la pesanteur de l'Air , & prouve en même temps si manifestement que c'est cette pesanteur qui produit tous ces effets merveilleux qu'on attribue ordinairement à la crainte du Vuide, qu'il faut se boucher les yeux, on n'en avoit point, pour en douter.

Sa maniere d'expliquer la Lumiere & les Couleurs étoit aussi admirable ; & si ceux qui veulent que les Couleurs soient des Accidens Réels , & qui voudroient même en faire un article de nôtre Foi , lui avoient fait l'honneur d'assister eux-mêmes à ses explications , & veu les expériences dont il se servoit pour en découvrir la nature, & fait voir que ce ne sont que des modifications différentes de la Lumiere, selon qu'elle tombe sur des Corps dont les parties ont diverses figures & differens mouvemens , & que de là elle rejaillit vers nos yeux avec les diverses modifications qu'elle a receuës des Corps sur lesquels elle est tombée : je doute fort qu'ils eussent voulu après cela  
traiter

## P R E F A C E.

traiter d'hérétiques, ceux qui ne les regardent du côté des objets, que comme des différentes modifications de la Matière; & du côté de celui qui les apperçoit, que comme des sentimens en lui, qu'il rapporte aux objets qui les ont excitez.

Ce principe supposé, il ne rendoit pas seulement raison, mais des preuves sensibles, de tout ce qu'il y a de plus singulier & de plus merveilleux dans l'Arc-en-ciel, & que Mr. Des-cartes, avant lui, a expliqué si admirablement dans ses Méteores. Car par le moyen de certaines phioles ou bouteilles de verre, pleines d'eau, il faisoit remarquer les endroits par où les rayons de lumiere, qui se changent en couleur, entrent dans le verre; les lieux où ils se réfléchissent; & ceux par où ils sortent, pour venir de là frapper nos yeux, avec les modifications qu'ils ont receuës de ces diverses réflexions & réfractions, d'où résulte en nous le sentiment des Couleurs. Quelquefois même il avoit l'industrie de faire paroître dans sa chambre un Arc-en-ciel artificiel, par le moyen d'une pluye qu'il avoit l'adresse de répandre aux lieux où il devoit paroître, selon l'endroit où le Soleil étoit alors; & de le recevoir sur une toile bien blanche & bien unie; où ses Couleurs se peignant fort exactement, donnoient le moyen aux spectateurs de les pouvoir considerer avec soin & exactitude.

Je n'aurois jamais fait, si je voulois parcourir toutes les diverses experiences dont il se servoit pour justifier ses raisonnemens. Mais entre toutes celles qu'il communiquoit au Public, il n'y en avoit point qui surprît avec plus d'étonnement l'Esprit des spectateurs, qui leur donnât davantage d'admiration, & qui excitât plus vivement leur curiosité, que celle de l'Ayman. Aussi quand on sçavoit qu'il en devoit expliquer les proprietéz, & en faire les experiences, il y accouroit tant de monde, que non seulement la salle où il les faisoit, mais toute sa maison, n'étoit pas capable de le contenir.

Il avoit pour cela une boîte, où étoit renfermé tout ce qui lui étoit nécessaire pour faire ses experiences; d'où il tiroit

## P R E F A C E.

tiroit chaque piece l'une après l'autre, selon l'effet ou la propriété qu'il vouloit prouver, & l'expérience que pour cela il avoit à faire. Et quoi qu'il ne dît rien en cela que ce qu'il avoit appris de Monsieur Des-cartes : néanmoins, comme il rendoit les choses sensibles par le moyen de ses expériences, & que sa Méthode de les expliquer étoit différente de la sienne, cela faisoit quel'on eût dit qu'il en eût été l'Inventeur. Car Monsieur Des cartes s'est simplement contenté de rendre raison de toutes les propriétés de l'Aiman qui lui étoient connues, & que les Curieux, avant lui, avoient observées; mais il ne s'est pas mis en peine de les mettre dans un ordre qui en fit connoître la liaison & la dépendance. Or c'est ce que Monsieur Rohault faisoit dans ses explications publiques; où après avoir rendu raison de trois ou quatre propriétés les plus communes de l'Ayman, il en déduisoit toutes les autres par une suite si nécessaire, qu'il n'y avoit personne dans l'Assemblée qui ne les remarquât aussi bien que lui, & qui n'en prévît l'effet, avant que d'en venir à l'expérience.

Ces sortes de preuves si claires, si convaincantes, & si sensibles, fort différentes de ces vertus & qualitez occultes dont les autres Philosophes ont coûtume de se servir, pour rendre raison de ce qu'ils ignorent, justifient ce me semble bien clairement la vérité des Principes dont elles dépendent; car le moyen de pouvoir tirer un si grand nombre de conséquences justes, & que les effets verifient, d'un si petit nombre de Principes, si ces Principes n'étoient véritables? Et n'est-ce pas une chose bien étrange, que ces Principes étant clairs à l'Esprit, que la Raison en étant convaincuë, & que personne n'ayant pû découvrir le moindre effet de la Nature auquel ils contrarient, depuis tant de temps qu'on les examine: il y ait cependant aujourd'hui des gens assez imprudens pour se servir du plus auguste & du plus incomprehenfible de nos Mysteres, pour les combattre, & pour tâcher d'en déduire, s'ils pouvoient, la fausseté. Ces personnes ne prennent pas garde sans doute aux inconveniens qui s'en ensui-

vent;

## P R E F A C E.

vent ; puis que contre leur dessein , ce qu'ils font ne sert qu'à fournir des armes à nos Adversaires ; & peut même être capable d'ébranler la foi des Fidèles, & de faire chanceler ceux qui ne sont pas encore bien affermis dans leur croyance. Car comme nous sommes tous Hommes , c'est à dire Raisonnables , avant que d'être Chrétiens : ce qui persuade la Raison , entre plutôt dans l'Esprit , que ce qui nous est enseigné par la Foi. Outre que tout ce qu'ils disent , n'étant fondé que sur des suppositions fausses , il n'y a rien de plus injuste & de plus dangereux , que de faire combattre la Verité contre la Verité , c'est à dire la Foi contre la Raison bien éclairée ; puis que l'une n'est jamais , & ne peut même jamais être contraire à l'autre. C'est pourquoi il suffiroit pour toute réponse , de leur dire en un mot , qu'ils n'entendent point ce qu'ils combattent ; & que tout ce qu'ils disent n'a aucun fondement de vérité. Mais nous verrons tantôt ce que nous aurons à leur objecter , & peut-être aussi à leur répondre.

Monsieur Rohault voyant donc sa réputation suffisamment établie , & que dans la profession qu'il faisoit , il n'avoit plus rien à ménager pour l'établissement de sa fortune , crut ne devoir plus refuser au Public la satisfaction qu'il desiroit de lui , de mettre au jour son Traité de Physique ; afin qu'on n'eût plus la peine de copier ses Ecrits , ni de faire des Remarques particulieres sur ce qu'il avoit traité dans ses Conférences publiques ; comme le faisoient la plus-part de ses Auditeurs au sortir de ces Conférences , pour ne pas laisser échaper de leur memoire ce qu'ils lui avoient entendu dire , & profiter par ce moyen de ses Leçons.

Ce desir mêmes si naturel à l'Homme , d'acquérir de la gloire , desir qui n'est point blâmable , quand les moyens en sont louables & honnêtes , le fit aussi résoudre à contenter là-dessus le Public. Bien plus , il jugea mêmes qu'il y alloit alors de son honneur , de ne pas différer davantage. Car voyant que ses Ecrits étoient entre les mains d'une infinité de personnes ; & qu'étant ainsi passés de main

## P R E F A C E.

main en main, ils étoient devenus méconnoissables, par les fautes que chaque Copiste avoit ajoutées à celles qui s'étoient rencontrées dans son Original; outre que n'ayant mis lui-même dans ces Ecrits, qu'autant qu'il en falloit pour donner à ses Disciples l'envie d'apprendre; mais ne s'y étant pas assez expliqué & étendu, pour pouvoir d'eux-mêmes en tirer une parfaite connoissance, sans avoir besoin de l'explication du Maître: il prit enfin la résolution de faire imprimer ce Traité, & d'y mettre la dernière main.

Or comme l'on met toujours une grande différence, entre ce que l'on ne fait que pour soy, & pour le cabinet, & ce que l'on fait pour être vû par le Public: aussi ceux qui avoient vû ces Ecrits particuliers qui couroient de lui dans le monde, ont bien sçeu remarquer qu'il y avoit bien de la différence entre son Livre & ces Ecrits. Mais il ne s'en faut pas beaucoup étonner; car ceux-ci n'étoient que comme le projet & le brouillon de l'Ouvrage parfait qu'il méditoit de faire un jour, & qu'enfin l'on a veu paroître; où comme il avoit deux sortes de personnes à contenter, les Curieux & les Difficiles; il a tâché de travailler de telle sorte, que les uns n'y pussent trouver rien à reprendre, & les autres rien à désirer.

C'est pourquoy, pour satisfaire au desir & à la curiosité des premiers, il a traité dans son Livre toutes les questions les plus curieuses de la Physique; & en les examinant chacune à part, il s'est donné la peine de descendre jusques aux circonstances les plus particulières, n'ayant rien oublié en chacune qui pût mériter sa réflexion, & lui ayant donné tout le jour dont elle est capable. Ce qui fait que tout le monde s'étonne comment il a pû en si peu de mots expliquer un si grand nombre de choses, traiter en si peu de pages un si grand nombre de Questions, & faire de chaque Article presqu'autant de Résolutions.

Mais comme le nombre des Fâcheux l'emporte de beaucoup par-dessus l'autre, qu'ils sont plus pointilleux & plus à craindre, & qu'il est très difficile de les pou-  
voir

## P R E F A C E.

voir contenter tous, chacun ayant des veuës particulieres touchant l'examen qu'il fait d'un Livre; car les uns s'attachent à la diction, les autres à l'ornement du discours, quelques-uns vont au fond de la matiere, d'autres examinent la verité des Principes, d'autres considerent l'enchaînement qu'ils ont & qu'ils doivent avoir avec les sujets auxquels on les applique, d'autres par des veuës d'interêt ne remarquent que les endroits les plus foibles & les plus négligez, pour avoir dequoi le faire mépriser, & d'autres enfin, par jalousie, ou par un faux zèle, y cherchent dequoi faire d'écrier & rendre suspect l'Auteur & la doctrine: Aussi ce sont eux que Monsieur Rohault a eu principalement en veuë dans la composition de ce Traité-là; afin de tâcher, sinon de les contenter tous, au moins de se mettre hors de prise, & de pouvoir se rendre ce témoignage à soi-même, d'y avoir fait tout son possible; & heureusement il est arrivé que le succez a surpassé son attente.

Car premierement pour ce qui est de la diction, tout le monde demeure d'accord que les termes en sont propres, bien choisis, & en usage; en sorte qu'il n'y en a point qui blessent l'oreille, ni qui laissent l'Esprit du Lecteur en suspens sur le sens & la signification qu'ils renferment. Et pour ce qui regarde la polireté & l'ornement du discours, la matiere qu'il y traite n'en demande point d'autre, qu'une énonciation pure, nette, & qui ne soit point embarrassée. Et c'est ce qu'il est aisé d'y remarquer, chaque chose y étant en sa vraie place; où ce qui précède n'attend pas sa clarté & son intelligence de ce qui suit; & où ce qui suit est compris & contenu dans ce qui précède, comme dans son Principe; & ainsi chaque chose y étant en son rang, & dans son ordre, tout y paroît avec une grace & une beauté tout-à-fait naturelle.

Quant à ceux qui sont capables de juger du fond de la matiere, d'examiner les Principes dont elle dépend & qui la soutiennent, & de comprendre l'enchaînement & les conséquences qui la prouvent: ce sont eux principalement

## P R E F A C E.

Yement que Monsieur Rohault a toujours souhaité d'avoir pour Juges ou pour Arbitres. Car comme il étoit à présumer que des personnes d'Esprit n'auroient pas voulu agir autrement que de bonne foi, il ne lui pouvoit arriver à leur égard que l'une de ces deux choses: où de les avoir pour ses Approbateurs, ou de les avoir pour des Censeurs; & l'une ou l'autre ne lui pouvoit être que très-avantageuse. Car s'il arrivoit qu'il les eût pour Approbateurs, c'étoit se rendre eux-mêmes les Paranymphe de son Livre; c'étoit ouvertement, & par leur exemple, persuader les autres des veritez qu'il contient; c'étoit enfin leur en faire concevoir bonne opinion, & le confirmer lui-même dans la sienne. Et au contraire, s'il arrivoit qu'il deût les avoir pour Censeurs, c'étoit ajouter un nouveau moyen de s'instruire, à ceux dont il avoit coûtume de se servir. Et à dire la verité, il auroit fort souhaité d'en rencontrer plusieurs qui eussent bien voulu avoir cette bonté ou cette complaisance pour lui, que de lui faire connoître ses fautes, lui montrer en quoi il se feroit mépris, & lui marquer ce qu'il auroit dû mettre dans son Livre pour le rendre plus parfait qu'il n'est.

Mais personne n'a jamais voulu lui rendre ce bon office. Tant s'en faut, tout le monde l'a reçu avec tant d'applaudissement & d'approbation, que de son vivant une infinité de personnes de qualité & de mérite lui en sont venus faire leurs complimens & conjoüissances. Et depuis sa mort, j'ai reçu moi-même de toutes parts tant de témoignages de l'estime que chacun en fait, & en reçois encore tous les jours, qu'on peut dire qu'il n'y a gueres de Livre de ce genre, qui soit si universellement approuvé.

Au reste, on ne sçauroit gueres apporter de meilleur témoignage de cette estime generale que chacun en fait, que de voir qu'il a déjà été ici imprimé pour la quatrième fois; que nos Libraires tâchent partout de le contre-faire; que dans les pais étrangers il s'imprime publiquement; & que déjà on l'a traduit en plusieurs Langues. Nos Professeurs même ne font point de scrupule d'en tirer

## P R E F A C E.

rer une partie de leurs plus belles démonstrations ; de l'indiquer à leurs Ecoliers comme un des meilleurs Livres qui ait paru depuis long-temps sur une semblable matiere ; & d'en faire un des principaux ornemens de leur Cabinet & Bibliotheque.

Cependant, nonobstant cette generale & universelle approbation, comme la Science & la Vertu engendrent souvent l'Envie & la jalousie, il s'est trouvé des personnes assez indiscrettes, ou plutôt assez malicieuses, pour faire courir de mauvais bruits, & de l'Auteur & de son Livre. De celui ci, ayant eu l'effronterie & l'impudence d'écrire contre la verité, que la doctrine qu'il contient avoit été trouvée si dangereuse & si mauvaise, qu'on l'avoit fait brûler par la main d'un Bourreau ; Et à l'égard de l'Auteur, certains Esprits mal faits & emportez, ont eu pour lui si peu de respect & de retenue, qu'ils n'ont pas feint, en presence de Monsieur de Blampignon Docteur de Sorbonne, Curé de saint Mederic son Pasteur, de rendre sa Foi suspecte, & de le traiter d'Hérétique, au sujet du plus saint & du plus auguste de nos Mysteres, l'accusant de ne pas croire la Transsubstantiation. Ce qui fit que Monsieur de Blampignon, qui d'ailleurs étoit assuré de la Foi de Monsieur Rohault, pour s'être plusieurs fois entretenu avec lui sur ce Mystere, se crut obligé, lorsqu'il lui porta le saint Viatique, pour avoir des Témoins qui pussent comme lui répondre de sa Foi, de l'interroger en presence de toute la Compagnie qui assista à cette pieuse & triste ceremonie, sur les principaux Articles de nôtre Croyance, & entr'autres sur celui de la Transsubstantiation ; lui demandant publiquement, s'il ne croyoit pas cette conversion miraculeuse qui se fait en ce Sacrement, de toute la substance du pain en la substance du Corps, & de toute celle du vin en la substance du Sang de Nôtre Seigneur JESUS-CHRIST, que l'Eglise appelle Transsubstantiation. A quoi Monsieur Rohault répondit : qu'à la verité il étoit un très-grand pécheur, mais qu'il n'avoit jamais douté de tout ce que la Foi nous enseigne, & particuliere-

ment

## P R E F A C E.

ment touchant ce Mystere ; qu'il pouvoit se ressouvenir des entretiens qu'ils avoient eus autrefois là-dessus ensemble ; & qu'il n'ignoroit pas quelle étoit sur cela sa Foi : mais qu'il voyoit bien que la demande qu'il lui faisoit , ne venoit que des mauvais discours qu'on lui avoit tenus de lui sur ce point. Dequoi il s'étonnoit d'autant plus , que si ce reproche , de ne pas croire la Transsubstantiation , pouvoit tomber sur quelqu'un , c'étoit moins sur lui que sur beaucoup d'autres ; puis que selon ses Principes mêmes , la Transsubstantiation étoit tellement renfermée dans ce Mystere , que s'il n'y en avoit point , il seroit impossible que le Corps de J E S U S-CHRIST y fût , ni par conséquent J E S U S-CHRIST même. Mais qu'il confessoit avec toute l'Eglise , qu'il y avoit en ce Mystere une véritable Transsubstantiation du pain au Corps , & du vin au Sang de Nôtre Seigneur J E S U S-CHRIST ; & que cet Article de nôtre Foi , faisoit un des Articles de sa Croyance. Cette réponse de Monsieur Rohault , ou plutôt cette profession publique de sa Foi , contenta fort Monsieur de Blampignon ; tant parce que le salut de son Parroissien lui étoit cher , que parce qu'il étoit bien aisé d'avoir des Témoins qui , comme lui , eussent dequoi pouvoir confondre ou détromper ceux qu'ils pourroient encore à l'avenir entendre mal parler de lui touchant ce Mystere. Et ce qu'il avoit prévu lui arriva ainsi qu'il l'avoit pensé ; car dès le même jour , il rencontra un de ces Médifans , ou du moins un de ceux que d'autres avoient séduit par leurs calomnies ; lequel ayant appris qu'il avoit porté le saint Viatique à Monsieur Rohault , ne manqua pas de lui en faire reproche , & de lui dire , qu'il s'étonnoit fort , qu'un homme éclairé comme lui , se fût tellement laissé surprendre & abuser , que d'avoir administré ce Sacrement à une personne qui ne croyoit pas la présence réelle du Corps de J E S U S-CHRIST au saint Sacrement , puis qu'il ne croyoit pas la Transsubstantiation. A quoi il fut aisé à Monsieur de Blampignon de répondre , qu'il auroit fort souhaité de l'avoir eu lui-même , il n'y avoit qu'un moment ,

P R E F A C E.

ment, pour Témoin de la Foi de Monsieur Rohault touchant ce Myſtere; qu'il ne doutoit point qu'il n'eût été bien joyeux, & mêmes fort édifié, de lui entendre faire là-deſſus ſa confeſſion de Foi, laquelle il lui avoit fait faire publiquement, avant que de lui adminiſtrer le ſaint Viatique. Que ſans doute cela l'auroit détrompé, & l'auroit obligé en même temps de détromper ceux qui pouvoient lui avoir inſpiré ces mauvais ſentimens. Au reſte, ce que je diſ ici, n'eſt pas un conte fait à plaiſir; c'eſt une vérité, dont il eſt aiſé à un chacun de ſ'éclaircir; puis que Monsieur de Blampignon eſt encore vivant; lequel ne refuſera pas de le certifier, ſi l'on veut ſe donner la peine de ſ'en aller informer à lui.

Puis donc que Monsieur Rohault n'a trouvé juſqu'ici que des Approbateurs de ſes Ouvrages; & que ceux qui ont oſé mal parler de lui & de ſon Livre, ont été reconnus pour des injuſtes Calomniateurs: ce n'eſt pas ſans raiſon ni fondement, que j'ai dit au commencement de cette Préface, qu'un Livre qui porte ſon nom, ne peut que donner la penſée de quelque grand Ouvrage, quand d'ailleurs on ne ſ'en explique point. C'eſt pourquoi j'ai mis pour Titre à ce Recueil, *Oeuvres poſthumes de Monsieur Rohault*, pour exciter par-là la curioſité de pluſieurs, les attirer chez le Libraire, & les obliger par ce moyen de le feüilleter d'un bout à l'autre, pour voir ce qu'il contient, la maniere dont les choſes y ſont traitées, & la différence qu'il y a entre ce Livre & les autres qui traitent de ſemblables matieres; car je m'assure qu'il y en aura peu, qui après l'avoir veu, ſ'en retournent les mains vuides.

Comme Monsieur Rohault n'eſt pas le ſeul de qui l'on a tenu de mauvais diſcours, & rendu la Foi ſuſpecte; mais qu'il y en a eu d'aſſez imprudens & indiscrets, que de condamner hardiment, & par des Livres publics, la doctrine de Monsieur Des-cartes, comme contraire à la Foi, & conforme aux Erreurs de Calvin: l'on ne doit pas trouver mauvais, ſi ayant été mis au rang & à la tête des Cartéſiens, pour lever le ſcandale & les mauvais

## P R E F A C E.

soupçons que cela a pû faire naître dans l'Esprit de quelques-uns, touchant leur Foi & leur doctrine, je dis ici:

Premierement, pour ce qui regarde leur Religion, Que graces à Dieu ils sont fort bons Catholiques; qu'ils ne chancelent point dans leur Foi; qu'ils ont pour l'Eglise, & pour les Décisions des Conciles, toute la soumission que l'on scauroit desirer des Fidèles les plus zélez & les plus simples; qu'ils n'examinent jamais les veritez de la Foi par leurs Principes, comme pour juger ce qu'ils doivent croire ou ne pas croire; mais qu'au contraire, ils s'assurent & se confirment dans leurs Principes, parce qu'ils voyent qu'ils sont plus conformes aux Articles de nôtre Foi, aux Décisions des Conciles, au sentiment des Peres, à la Tradition, & à la véritable Théologie, que ne le sont ceux qui sont communément receus; ce qu'il ne leur seroit pas fort difficile de verifier, si on vouloit leur permettre d'en faire la preuve.

Et pour ce qui regarde leur doctrine, je croi pouvoir dire que ceux qui l'ont publiquement décriée, ne l'ont jamais bien entendüe; qu'ils leur attribuent cent absurditez dont ils ne demeurent pas d'accord, & qu'ils les font parler tout autrement qu'ils ne pensent. Car s'ils en avoient le moins du monde de connoissance, bien loin de les blâmer, & d'investiver, comme ils font, contr'eux, ils se rendroient peut-être à leur sentiment, & seroient les premiers à approuver la maniere avec laquelle ils s'expliquent sur le Mystere dont il s'agit, & dont ils veulent leur faire un crime; laquelle maniere n'est nullement celle qu'ils combattent, & qu'ils revêrent de cent extravagances, qui la rendent sans doute fort ridicule. Mais en verité, il me semble que ceux qu'ils attaquent ainsi, ont donné d'assez bonnes marques de la justesse de leur Esprit, pour ne leur pas attribuer des visions & des chimeres si hors de sens & de compréhension.

Aussi, bien loin de cela, l'explication que Monsieur Des-cartes donne lui-même à ce Mystere, est si naturelle & si

## P R E F A C E.

& si simple, & avec cela si conforme à ce que la Foi nous enseigne, au sentiment des Peres, & aux Décisions des Conciles; & résout si clairement les plus grandes difficultez qui s'y rencontrent: que tout Mystere de Foi qu'il est, la Raison n'en est point choquée, & ne trouve rien qui l'effarouche. Ensorte qu'il seroit peut-être du bien de l'Eglise, qu'elle fût serieusement examinée par ceux qui ont l'autorité en main, & qui ont droit d'en juger. Car si une fois elle étoit receüe, il seroit impossible que toutes les Hérésies ne tombassent par terre; & qu'il pût y avoir d'autre Croyance touchant ce Mystere, que celle de l'Eglise Catholique, Apostolique & Romaine. Desorte que ni l'Impanation des Lutheriens, ni la Figure des Calvinistes, ni toute autre Hérésie que ce puisse être, ne pourroit résister à la force & à la clarté de cette explication.

Pendant pour faire voir par quelque exemple, que ce n'est pas temerairement qu'ils avancent ces choses; & que des Principes dont ils se servent, l'on en peut tirer des conséquences fort justes pour nous fortifier dans la Foi, & pour la conduite & le réglement de nos mœurs; & qu'au contraire, de ceux de ces faiseurs de Livres, on en peut tirer de tout opposées; prenons pour exemple ce qui les effarouche le plus, & qui les fait tant crier contre Monsieur Des-cartes & sa doctrine

S'il est vrai, comme Monsieur Des-cartes le prétend, que l'essence de la Matière, ou du Corps, consiste dans l'étendue en longueur, largeur & profondeur: il n'est pas difficile de comprendre que l'Ame de l'Homme, ou ce Principe interieur qui est en lui capable de penser, est une Substance distincte du Corps. Car il est visible que l'Etendue, de quelque manière qu'on la conçoive taillée & remuée, ne peut jamais ni raisonner, ni vouloir, ni même sentir. Ainsi, ce qui est en nous qui pense, est nécessairement une Substance distinguée du Corps.

Les connoissances, les volontez, les sentimens actuels, sont actuellement des manieres d'être de quelque Substance. Or toutes les divisions qui arrivent à la Matière,

## P R E F A C E.

ou à l'Etenduë, ne produisent en elle que des figures; & tous ses mouvemens, ne produisent autre chose que des rapports de distance; l'Etenduë n'est pas capable d'autres modifications. Donc nôtre pensée, nôtre desir, nos sentimens de plaisir & de douleur, sont des manieres d'être d'une Substance qui n'est point Corps. Donc l'Ame de l'Homme est distinguée du Corps. Et cela posé, voici de quelle maniere l'on peut démontrer qu'elle est immortelle.

Jamais aucune Substance ne s'aneantit par les forces ordinaires de la Nature; car comme la Nature ne peut faire quelque chose de rien, aussi ne peut-elle réduire quelque chose à rien.

Les manieres des Estres peuvent s'aneantir; par exemple, la rondeur d'un Corps se peut détruire; car ce qui est rond peut devenir quarré. Mais cette rondeur n'est pas un Estre, une Chose, une Substance; ce n'est qu'un rapport d'égalité, dans la distance qui est entre les parties qui terminent ce Corps, & celle qui en est le Centre. Ainsi ce rapport changeant, la rondeur n'est plus; mais la Substance ne peut être réduite à rien.

Or par les raisons que je viens de dire, l'Ame n'est point une maniere d'être du Corps; Donc elle est immortelle. Et quoi que nôtre Corps se dissolve en une infinité de parties de differente nature, & que la construction de ses organes se rompe: l'Ame ne consistant point dans cette construction, ni dans aucune autre modification de la Matiere; il est évident que la dissolution, ni mêmes l'anéantissement de la Substance du Corps humain (supposé que cet anéantissement fût veritable) ne peut anéantir la Substance de nôtre Ame.

Voici encore une autre preuve de l'immortalité de l'Ame fondée sur le même Principe.

Quoi que le Corps humain ne puisse être réduit à rien, à cause que c'est une Substance, il peut néanmoins mourir, & toutes ses parties se peuvent dissoudre, parce que l'Etenduë se peut diviser. Or l'Ame étant une Substance distinguée de l'Etenduë, elle ne peut être divisée; car

## P R E F A C E.

on ne ſçauroit diviſer une penſée, un deſir, un ſentiment de douleur & de plaifir, de même que l'on peut diviſer un Quarré en deux ou en quatre Triangles. Donc la Subſtance de l'Ame eſt indiſſoluble, incorruptible, & par conſequent immortelle; parce qu'elle n'a point d'étenduë.

Voilà de véritables démonſtrations, qui convainquent l'Efprit de tout homme qui veut être attentif; & auxquelles il faut ſe rendre, ou renoncer à la Raiſon.

Mais ſi, comme le prétendent ces Auteurs inconnus, l'eſſence du Corps conſiſte dans quelque autre choſe que dans l'Etenduë: comment convaincront-ils les libertins, que nôtre Ame n'eſt ni matérielle ni mortelle? Ils leur ſouſtiendront, que ce quelque autre choſe, en quoi ils diſent que conſiſte l'eſſence du Corps, eſt capable de penſer; & que la Subſtance qui penſe, eſt la même que celle qui eſt étenduë. Que ſ'ils leur nient, ils leur feront voir que c'eſt ſans raiſon; puis que ſelon leur Principe, le Corps étant autre choſe que de l'Etenduë, ils n'ont point d'idée diſtincte de ce que ce peut être; & qu'ainſi ils ne peuvent ſçavoir, ſi cette choſe inconnuë n'eſt point capable de penſer. Ceux qui ont tant ſoit peu de diſcernement, peuvent voir aiſément les dangereuſes conſequences qui ſe peuvent tirer de là.

C'eſt pourquoi ceux qui font un crime à nos Philoſophes, de ce qu'ils démontrent que l'Etenduë n'eſt point une manière d'être, mais l'eſſence même du Corps, ou de la Matière, devroient penſer aux fâcheuſes conſequences qu'on peut tirer de leurs Principes; & ne pas renverſer la principale, ou mêmes la ſeule démonſtration que l'on peut avoir de la diſtinction qui eſt entre l'Ame & le Corps. Car enfin la diſtinction de ces deux Parties de nous-mêmes, prouvée par des idées claires & diſtinctes, comme l'ont fait nos Philoſophes en pluſieurs endroits, eſt de toutes les Veritez celle qui eſt la plus féconde & la plus neceſſaire, ſoit pour la Philoſophie, ſoit pour la Théologie, ſoit auſſi pour la Morale Chrétienne.

Il eſt donc bien important, lors qu'il s'agit de l'établiſſe-

P R E F A C E.

blissement de quelque Principe, de prendre garde de ne rien admettre qui ne soit clair à l'Esprit; c'est la clarté qui nous persuade, qui nous convainc, & qui nous assure de la Verité; sans cela l'on ne peut s'assurer de rien. Mais quand un Principe est clair, toutes les conséquences le sont aussi; l'on en voit aisément la suite & la liaison. Et comme les Veritez s'entretiennent toutes, & qu'elles ne sont point contraires les unes aux autres: l'on ne sçauoit tirer de conséquence contraire à la Religion, d'un Principe qui est évident. Mais lors qu'un Principe n'est pas évident, qu'il est obscur, qu'il ne porte aucune idée de soy à l'Esprit, & qu'il a par consequent la vraie marque de la fausseté: il n'y a rien de plus facile à ceux qui sçavent tant soit peu l'Art de raisonner, que d'en tirer des conséquences contraires à la Foi. Desorte que s'il étoit permis de rendre suspecte la Foi des autres hommes, par des conséquences tirées des Principes dont ils sont persuadés: comme il n'y a point d'homme qui ne se trompe en quelque chose, & qui ne prenne pour vraie ce qui ne l'est pas, il n'y en a point aussi que l'on ne pût traiter d'Hérétique. Et ainsi, c'est ouvrir la porte à une infinité de querelles & de disputes, que de laisser aux hommes la liberté de rendre suspecte la Foi de ceux qui en matière de Philosophie ne sont pas de leur sentiment. Aussi je ne puis comprendre, comment sur des conséquences que l'on défavoüe, on se plaît de faire passer pour Hérétiques, des personnes qui sont très-soumises à l'Eglise, & à toutes ses Décisions.

Chacun sçait que l'on doit distinguer la Théologie d'avec la Philosophie; les Articles de nôtre Foi, d'avec les Opinions des hommes; les Veritez que Dieu apprend à tous les Chrétiens par une autorité visible, de celles qu'il ne découvre qu'à quelques personnes en récompense de leur attention & de leur travail. Des choses qui dépendent de Principes si différens, ne doivent pas sans doute être confonduës. L'on ne doute point aussi qu'il ne faille faire servir les Sciences humaines à la Religion, chacun en demeure d'accord; mais cela se doit faire dans

## P R E F A C E.

un Esprit de paix & de charité, sans se condamner les uns les autres, tant que l'on convient des Veritez que l'Eglise a décidées; car c'est ainsi que la Verité se découvrira, & qu'ajoutant de nouvelles découvertes à celles des Anciens, toutes les Sciences se perfectionneront de plus en plus.

Mais l'Imagination de la plus-part des hommes ne s'accommode pas des nouvelles découvertes. La nouveauté des sentimens, même les plus avantageux à la Religion, les effraye; & ils se familiarisent facilement avec les Principes les plus faux, & les plus obscurs, pourveu que quelque Ancien les ait avancez. Et lors qu'ils se sont ainsi familiarisez avec ces Principes, quelque obscurs qu'ils soient, ils les trouvent évidens, & les regardent comme très-utiles, quoi qu'ils soient très-dangereux. Ils s'accoutument même si bien, à dire & à écouter ce qu'ils ne conçoivent point, & à se défaire d'une difficulté réelle par une distinction imaginaire, qu'ils demeurent toujours très-satisfaits de leurs fausses idées, & ne sçauroient même souffrir qu'on leur parle un langage qui soit clair & distinct: Semblables en cela à ces personnes qui sortant d'un lieu obscur, apprehendent la Lumiere, & ne peuvent la supporter, s'imaginant qu'on les aveugle, lors même que l'on tâche de dissiper les tenebres qui les environnent.

Ainsi, quoi que Monsieur Rohault ait fait voir plusieurs fois dans ses Conférences publiques, par plusieurs justes raisonnemens & conséquences, qu'il est dangereux de soutenir, par exemple, que les bestes ont une Ame plus noble que le Corps: cependant, comme cette opinion est ancienne, & que la plus-part des hommes sont accoutuméz à la croire; & que celle qui lui est contraire, & qui ne les fait considerer que comme des Machines, a le caractère de la nouveauté: ceux qui jugent de la dureté des opinions, plutôt par la frayeur & la surprise qu'elles produisent dans l'Imagination, que par l'évidence & la lumiere qu'elles répandent dans l'Esprit, ne manqueront pas de regarder cette opinion des Cartesiens,

## P R E F A C E.

tesiens, comme dangereuse ; & ils condamneront bien plutôt ces Philosophes comme temeraires, qu'ils ne feront ceux-là mêmes qui soutiennent que les bestes sont capables de raisonner.

Delà vient, que si dans une Compagnie, quelque personne un peu grave vient à dire d'un ton sérieux, ou plutôt avec cet air que répand sur le visage, l'Imagination, lors quelle est surprise & affrayée par quelque chose d'extraordinaire : *En verité les Cartesiens sont d'étranges gens ; ils soutiennent que les bestes n'ont point d'Ame : l'apprehende fort que bien-tôt ils n'en disent autant de l'Homme.* Cela seul sera suffisant pour persuader plusieurs personnes que cette opinion est dangereuse ; il n'y a point de raisons qui puissent empêcher l'effet de ce discours sur les Imaginations foibles. Et si par hazard il ne se trouve dans la Compagnie quelque Esprit vif & enjoué, qui en fasse voir le ridicule, & qui par un air fier & resolu, ne rassure la Compagnie de la peur qu'on lui aura faite : les Cartesiens auroit beau se tourmenter, ils n'effaceront jamais par leurs raisonnemens, l'impression qu'on aura donnée d'eux & de leur doctrine.

Cependant il n'y auroit rien de plus facile que de faire voir l'extravagance de ce discours ; il n'y auroit simplement qu'à mettre la Définition à la place du Défini. Car si par exemple, quelqu'un disoit sérieusement : *Les Cartesiens sont d'étranges gens ; ils disent que les bestes ne pensent ny ne sentent point : l'apprehende fort que bien-tôt ils n'en disent autant de nous ;* Certainement on se mocqueroit d'une personne qui avanceroit un tel discours ; & chacun jugeroit aisément que son apprehension seroit fort impertinente, & fort mal-fondée. Car que les bestes soient tout ce que l'on voudra, qu'elles pensent ou qu'elles ne pensent point, qu'elles sentent ou qu'elles ne sentent point : cela ne prouve & ne conclut rien à nôtre égard, & n'empêche pas que nous ne soyons ce que nous sommes, & que chacun ne soit convaincu de sa propre pensée, & de son propre sentiment.

Mais

## P R E F A C E.

Mais la plus-part des hommes ne sont pas capables de démêler les moindres équivoques ; principalement lors que leur Imagination est effrayée par l'idée de quelque nouveauté qu'on représente comme dangereuse. Outre que l'air, & les manieres avec lesquelles on dit les choses, nous persuadent sans peine, & souvent même avec plaisir ; mais la Verité ne se découvre point sans quelque application d'Esprit, dont plus de la moitié du monde n'est pas capable.

Mais je ne m'apperçois pas que cette Préface est déjà si longue, que je crains mêmes qu'elle ne soit ennuyeuse ; & cependant je n'ai encore rien dit de mon sujet, n'ayant jusques ici parlé que du Titre qu'il porte. Cela pourtant ne s'est pas fait sans raison ; car voyant que je n'avois que fort peu de choses à dire touchant le corps de ce Livre, qui neanmoins est assez gros, j'ai cru qu'il ne lui falloit pas mettre une tête qui lui fût tout à fait disproportionnée. Et pour avoir de la matiere, je me suis un peu étendu sur les loüanges de l'Auteur ; soit pour laisser à la Posterité ce petit monument de sa gloire, soit pour deffendre sa personne & sa doctrine des insultes de ses Envieux.

Je viens maintenant à mon sujet, dont je n'ai que deux mots à dire.

Ce Livre n'est autre chose qu'un Recueil de plusieurs differens Traitez de Mathématique, que Monsieur Rohault avoit coûtume d'enseigner à ceux qui lui faisoient l'honneur de vouloir bien l'avoir pour Maître. Il n'est pas nécessaire que je les désigne tous ici par leur nom, puis que cela se verra ci-après par la Table. Je puis dire seulement, que bien que ces Traitez soient très communs, les choses y sont touchées d'une maniere qui n'est pas commune. Car Monsieur Rohault avoit cela de particulier, que ne s'étant jamais appliqué à beaucoup approfondir ces parties de Mathématiques, qui étant d'une trop grande & trop profonde spéculation, & abstraction, sont de peu d'usage parmi le monde, (quoi que sans doute ce soient pourtant celles qui sont davan-

## P R E F A C E.

rage paroître la grandeur de l'Esprit humain, & jusques où peut aller sa capacité & son étendue, ) mais s'étant uniquement attaché à celles qui entrent plus dans le commerce des hommes, & dont il est presque impossible de se pouvoir passer: aussi s'étoit-il étudié à les bien comprendre, & particulièrement à trouver des manieres propres à les faire bien concevoir aux autres.

C'est ce que je me promets que l'on reconnoîtra facilement ici, par les expressions simples & propres dont il se servoit pour les donner à entendre à ses Auditeurs. Aussi, quoi que les divers Traitez qui sont contenus dans ce Livre, soient dans les mains de plusieurs: neanmoins l'on trouvera bien de la difference entre ces mêmes Traitez, tels qu'ils sont ici, & leurs copies, ou pour mieux dire leurs premiers crayons. Car on ne les donne pas ici simplement comme il les donnoit lui-même à ses Disciples, mais comme il les leur expliquoit dans ses Leçons particulieres. Si bien que ceux qui voudront se rendre tant soit peu attentifs, pourront aisément d'eux-mêmes, & sans autre Maître que l'Esprit de Monsieur Rohault qui y regne partout, entendre tout ce qui est conteu dans ce gros Livre.

J'espere après cela, que chacun trouvera que ce Livre ne sera pas d'une mediocre utilité pour le Public; puis que toutes sortes de personnes y pourront trouver dequoi s'instruire. Les jeunes Gentils-hommes y pourront apprendre les premiers Elemens de la Géometrie; puis passer de là aux Fortifications, où ils verront les différentes Manieres de fortifier les Places, tant regulieres qu'irregulieres; les avantages qu'il y faut ménager, les égards qu'il faut avoir à toutes les choses du dedans & du dehors; ils verront, entre ces différentes Manieres, quelles sont les plus parfaites, en quoi elles le sont, pourquoy elles ne le sont pas toûjours, & quand l'une doit être préférée à l'autre. Mais ils y apprendront aussi, que la maniere d'attaquer d'aujourd'huy: les grandes ruines que font les Bombes, les Carcasses, & le Canon: & sur tout que la vigueur, & la generosité extraordinaire de

## P R E F A C E.

nos Generaux, de nos Capitaines, & de nos Soldats: font qu'il n'y a plus de Places imprenables.

Ceux qui voudront se donner au Negoce ou aux Affaires, & y agir en gens de bien & d'honneur, y pourront apprendre à bien tenir leurs Livres, & dresser leurs Comptes; à ne se point laisser tromper, & à ne point aussi tromper les autres, par quelque erreur de calcul, ou impréveuë, ou malicieuse. Car ce n'est pas d'aujourd'hui que l'on sçait, que pour faire une grande fortune, & s'enrichir aux dépens d'autrui, il ne faut voir les choses qu'à demi, & non pas voir si clair. Une Conscience bien éclairée, est un obstacle invincible & impénétrable au Mal.

Les Artisans pourront aussi par le moyen des Méchaniques, se former eux-mêmes l'Esprit, & se rendre capables de bien exercer leurs Arts; & s'ils ont un peu de genie & d'industrie, cela leur ouvrira l'Esprit pour inventer de nouvelles Machines, fabriquer de nouveaux Instrumens, & faciliter ainsi les moyens d'exécuter leurs Ouvrages.

Je n'ai plus qu'une chose à faire observer, qui est, qu'ayant tâché de mettre chaque Traité dans l'ordre & dans le rang où il doit être, il est arrivé néanmoins que celui qui devoit être le premier, est ici le dernier. De quoi je n'ai point d'autre raison à rendre, sinon que comme c'étoit celui où Monsieur Rohault s'étoit le moins étendu & expliqué, & par conséquent où il avoit laissé plus de choses au soin de celui qui pourroit un jour travailler à le mettre en état de paroître au jour, j'en ai réservé pour le dernier, afin de me donner le loisir d'y pouvoir bien penser, tandis qu'on imprimeroit les autres Traitez. Mais il n'y a rien de plus facile, que de passer pardessus les autres, & de lire ce Traité-là le premier.

Si je ne m'étois point déjà trop étendu, je pourrois ici faire remarquer les grands avantages que l'on peut tirer des Mathématiques, & particulièrement de la Géométrie; C'étoit mêmes le premier dessein que je m'étois

pro-

## P R E F A C E.

proposé, afin de donner quelque étendue à cette Préface, & me fournir de la matière de quoi pouvoir proportionner la tête de ce Livre avec le reste du corps. Mais ayant depuis considéré qu'il étoit important de disculper Monsieur Rohault, & moi avec lui, des reproches qui nous étoient faits par ceux qui se donnoient la liberté de rendre publiquement suspecte la Foi du Maître & des Disciples, par les mauvaises conséquences qu'ils tiroient de leurs Principes: cela m'a fait changer de dessein, & m'a déterminé à celui que j'ai pris. Si j'y ai bien ou mal réussi, je laisse à chacun à en juger. Mais au moins je puis assurer avec sincérité, que ce n'est que le désir de défendre la Verité, & de repousser la Calomnie, en faisant connoître la pureté de leur Foi & de leur Doctrine, qui me l'a fait entreprendre.

# AVERTISSEMENT

Sur cette

## Nouvelle Edition.

 N pourroit se dispenser de rendre compte ici des changemens que l'on a apportez dans cette Nouvelle Edition, & il suffiroit de n'avoir rien changé que bien à propos. Car il n'en est pas des Mathématiques, comme des Matieres de Morale : dans celles-ci, les droits d'un Auteur sont inviolables, & l'on n'ose toucher ni à ses pensées, ni à ses expressions ; au lieu que dans celles-là, l'évidence qui les accompagne toujours, & l'intérêt de la Verité, ne permettent pas de copier des fautes. D'ailleurs, comme le principal but que doit avoir un Auteur en traitant des Sciences, & surtout des Mathématiques, est de les illustrer autant qu'il luy est possible, & d'en faciliter l'usage, puis qu'il est si universel dans tous les Arts : il doit prendre en bonne part la censure de ceux qui se proposent la même fin. C'est aussi par ce seul motif, de rendre cét Ouvrage plus utile au Public, qu'on en a éclairci & corrigé plusieurs endroits, qui étoient un peu négligez ; en quoi l'on n'a rien fait qu'avec l'approbation d'un Mathématicien du premier ordre, & qui n'est pas moins connu en France qu'en Hollande. On reconnoît cependant, avec tout le monde, le mérite distingué de feu Mr. Rohault, & l'on n'a garde de refuser à sa memoire la justice qui lui est due. Ainsi l'on considère ses Oeuvres Posthumes, comme plusieurs Traitez détachez, qu'il n'avoit composez que pour son usage particulier, & aux quels il n'avoit pas mis la dernière main.

Mais pour satisfaire en partie la curiosité de ceux qui  
n'au-

n'auront pas la premiere Edition de ce Livre, & qui souhaiteroient pourtant de voir les endroits qu'on a retouché, en voici quelques-uns des plus considerables.

Tome I. Pag. 355. l. 13. Or il est à remarquer &c. Dans la premiere Edition, il y a: Or il est à remarquer, que quand ce qui reste, excède 50000, on ajoute une unité dans les Tables. C'est une faute; car pour sçavoir si l'on doit ajouter l'Unité, il ne faut pas comparer ce qui reste, à 50000, mais seulement à la Racine trouvée. On a corrigé la même faute dans le Calcul du Côté du Decagone, pag. 367.

Tome II. pag. 109. l. 24. en multipliant &c. Dans la premiere Edition, il y a: en multipliant MC par MK, & le Produit par le tiers de la profondeur du Fossé. Ce Calcul suppose faussement que les deux Pyramides ont pour Bases les Triangles CMK, CLK; au lieu que ce sont les Rectangles de CM & CL par la profondeur du Fossé; ce qu'il est important de remarquer. On a corrigé la même faute dans le Toisé du Talus du Rempart, pag. 114. lig. 9. & 10.

Pag. 125. l. 6. A quoi l'on peut encore &c. Dans la premiere Edition, il y a: A quoi l'on peut encore ajouter le Plan incliné, & la Superficie plane, ou le Traisneau. On a ôté cette Superficie plane (l'Auteur a voulu dire, Superficie Horizontale) & ce Traisneau, parce que ce n'est pas une Machine simple.

Pag. 454. l. 16. il ne faut que diviser &c. Dans la premiere Edition, il y a: il ne faut que diviser le Numerateur de la Fraction à diviser, ou du Dividende, par le Numerateur de l'autre; & donner au Quotient le Dénominateur commun. Ainsi pour diviser  $\frac{8}{9}$  par  $\frac{2}{9}$ , il ne faut que diviser 8 par 2, le Quotient

tient fera 4, & donner au Quotient le Dénominateur commun, ce qui fera  $\frac{4}{9}$ . A quoi bon ce Dénominateur commun? c'est une faute; le Quotient est 4, & non pas  $\frac{4}{9}$ .

Enfin on donne avis, que le Profil qui se trouve dans les pages 69 & 70 du II. Tome, n'est pas exact. Car premièrement la largeur CD de l'Esplanade ne répond pas à la construction, ayant 10 Toises, au lieu de 8. De plus, la lettre R sert à marquer deux points différens, qui sont si proches l'un de l'autre, qu'ils se confondent en un: pour corriger ce défaut, il auroit fallu agrandir tellement la Figure, qu'elle n'auroit pû tenir dans la Page; on prie le Lecteur de suppléer à cela.

---

### Fautes à corriger.

- Page 167. ligne 23. par la 24. lisez, par la 23.  
Pag. 242. l. 11. multiple CD, lisez. multiple de CD,  
Pag. 262. l. penult. sera AC, lisez. sera à AC,  
Pag. 305. l. 16. que à AF lisez. que AF  
Pag. 327. l. 15. à CF. lisez. à CE.  
Pag. 336. l. 3. aussi au lisez. aussi semblable au



**T A B L E**  
**D E S**  
**T R A I T E Z**

Contenus dans le  
**PREMIER TOME.**

**PREMIER TRAITE'.**

**L** *Es six premiers Livres des Elemens d'Euclide.* Page 1

**SECOND TRAITE'.**

*La Trigonometrie; ou la Resolution des Triangles.* 349

**TROISIEME TRAITE'.**

*La Geometrie Pratique.* 387

**LES**



LES  
SIX PREMIERS LIVRES  
DES  
E L E M E N S  
D'EUCLIDE.

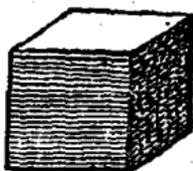
---

LIVRE PREMIER.

**Q**U'on ne peut pas douter qu'il n'y ait des Estres étendus en longueur, largeur, & profondeur ; Et c'est ce qu'on appelle *Corps* ou *Solide*.

En examinant en particulier un de ces Corps, comme celui qui est ici représenté, qui ressemble à un dé à jouer, il est certain que l'on y reconnoit un Dessus, un Dessous, un Devant, un Derriere, & des Côtez.

Puis ne considerant que le Dessus



## 2 ELEMENS D'EUCLIDE.

de ce Corps, on peut assurer, sans craindre de se tromper, qu'il a de la longueur & de la largeur, & point du tout de profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *Superficie* ou *Surface*.

Ensuite, considerant l'une des extremitéz de cette superficie, l'on n'y remarque que de la longueur, sans largeur ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *une Ligne*.

Enfin, considerant l'extremité de l'une de ces lignes, on reconnoît que c'est une chose qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *un Point*.

Ainsi, il est indubitable qu'il y a des Superficies, des Lignes, & des Points; mais il est certain aussi que c'est seulement par la pensée que les Points sont separez des Lignes, les Lignes des Superficies, & les Superficies des Corps, ou Solides; Ce qu'il suffit de remarquer ici pour établir le fondement & la verité des définitions suivantes.

Mais auparavant, comme dans les Sciences dont nous avons à traiter, on ne doit rien avancer qui ne soit clair à l'Esprit, & qui ne soit fondé en preuves, & que souvent pour la preuve des Propositions qu'on examine, on se sert de Definitions; de Demandes, d'Axiomes, de Theoremes, de Problemes; de Lemmes, & de Corollaires; il est bon d'expliquer ici ce que l'on entend par ces termes.

*Definition*, est une explication claire & précise de la signification des mots, ou des choses que les mots signifient.

*Demande*, est une proposition, qui étant claire & certaine, est supposée vraie, pour n'être pas obligé de la démontrer.

*Axiome*, est une proposition si évidente d'elle-même, que l'Esprit n'en peut douter, & qui pour cela n'a pas besoin de preuve.

*Theoreme*, est une proposition qui contient quelque propriété à démontrer.

# LIVRE PREMIER. 3

Probleme, est une proposition qui contient la preuve de quelque chose qui étoit à faire, ou à trouver.

Lemme, est une proposition qui n'est mise au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corollaire, est une proposition qui suit d'une autre qu'on vient de prouver.

## DEFINITIONS.

1. Un Point, est ce qui n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur; & qui par conséquent n'a ni étendue, ni parties.

2. Une Ligne, est une Etendue en longueur, sans largeur ni profondeur.

3. Les extremités d'une Ligne, sont les points qui la terminent.

4. Une Ligne droite, est une Ligne qui a toutes ses parties également posées entre ses extremités; en sorte que l'une ne s'élève & ne s'abaisse point plus que l'autre.

Par exemple, la Ligne AB est une Ligne droite, parce qu'elle a  toutes les parties tellement posées entre ses extremités A, & B, que pas une n'est plus élevée, ny plus abaissée que l'autre.

5. Une Ligne courbe, est une Ligne qui n'a pas toutes les parties également posées entre ses extremités.

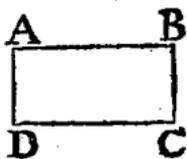
Par exemple, la Ligne CD est une Ligne courbe; parce qu'elle a quelques-unes de ses parties, comme E, & F, qui ne sont pas également posées entre ses extremités, & dont l'une s'élève ou s'abaisse plus que l'autre.



6. Une Superficie, ou Surface, est une Etendue en longueur & largeur, sans profondeur.

#### 4 ELEMENS D'EUCLIDE.

Par exemple, l'Etendue qui est renfermée entre les Lignes AB, BC, CD, & DA, est une Superficie, parce qu'elle a de la longueur & de la largeur, & qu'elle n'a point de profondeur.



7. Les extremités d'une Superficie, sont les lignes dont elle est bornée.

8. Une Superficie plane, ou un Plan, est une Superficie qui a toutes les parties également posées entre ses extremités; en sorte que l'une ne s'élève & ne s'abaisse point plus que l'autre, comme ici ABCD.

9. Une Superficie courbe, est une Superficie qui n'a pas toutes les parties également posées entre ses extremités; & dont l'une s'élève ou s'abaisse plus que l'autre.

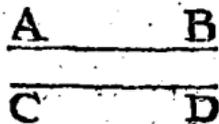
10. Une Superficie convexe, est une Superficie courbe, considérée du côté qu'elle s'élève.

11. Une Superficie concave, est une Superficie courbe, considérée du côté qu'elle s'enfonce ou s'abaisse.

Ainsi, la Superficie d'un Globe est une Superficie courbe; laquelle considérée par le dehors est convexe, & considérée par le dedans est concave.

12. Des Lignes paralleles, sont des lignes droites qui sont sur un même plan, & qui étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, ne se rencontrent jamais, & sont toujours également distantes.

Par exemple, les lignes AB, CD, sont paralleles; parce qu'elles sont sur un même plan, & qu'étant prolongées de part & d'autre à l'infiny, elles ne se rencontreront jamais, & seront toujours également distantes.



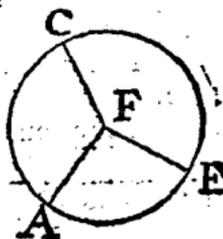
13. Le Terme, est l'extrémité de quelque Grandeur.

# LIVRE PREMIER. 5

14. Une Figure, est ce qui est environné de termes.

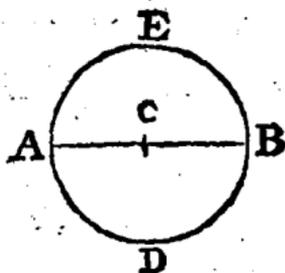
15. Un Cercle, est une figure plane, bornée d'une seule ligne courbe, qu'on nomme Circonférence, au dedans de laquelle il y a un point, qu'on nomme Centre, duquel toutes les lignes droites menées à la circonférence sont égales entr'elles.

Par exemple, la Figure ACE est un Cercle; parce que c'est une Figure plane, qui est bornée d'une seule ligne courbe, à sçavoir AEC, & qu'au dedans il y a un point, à sçavoir F, duquel toutes les lignes droites, comme FA, FC, FE, qui sont menées à la circonférence, sont égales entr'elles.



16. Le Diametre d'un Cercle, est une ligne droite qui passe par le centre, & qui se termine de part & d'autre à la circonférence.

Par exemple, au Cercle ADBE, la ligne droite AB, est un diametre; parce qu'elle passe par le centre C, & que ses extremités A, & B, se terminent de part & d'autre à la circonférence.



17. Un Arc de Cercle, est une partie de la circonférence d'un Cercle, comme BE.

Si la circonférence d'un Cercle est divisée en 360 parties égales, chacune de ces parties s'appelle Degré, dont la 60<sup>e</sup>. partie s'appelle Minute, &c.

18. Un Demi-Cercle, est une figure comprise du diametre du Cercle, & de la moitié de la circonférence, comme AEB.

19. Un Angle, est l'inclinaison de deux lignes qui se

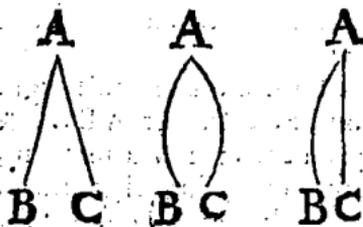
## 6 ELEMENS D'EUCLIDE.

se rencontrent en un point non directement ; ou pour mieux dire, c'est l'espace qui est compris entre deux lignes ainsi inclinées.

Ainsi, les lignes BA, CA, qui sont inclinées l'une vers l'autre, & qui se rencontrent non directement au point A, forment ce qu'on appelle un Angle.

20. Les Côtés d'un Angle, sont les lignes qui forment l'Angle.

21. La Pointe, ou le Sommet d'un Angle, est le point où se rencontrent les deux Côtés de l'Angle.



L'on désigne quelquefois un Angle par une seule lettre, que l'on met au sommet ; & quelquefois par trois, & alors celle qui marque le sommet se doit mettre au milieu. Ainsi pour désigner par trois lettres l'Angle A, l'on dit l'Angle BAC, ou bien l'Angle CAB.

22. Un Angle rectiligne, est un Angle compris de deux lignes droites.

23. Un Angle curviligne, est un Angle compris de deux lignes courbes.

24. Un Angle mixte, est un Angle compris d'une ligne droite & d'une ligne courbe ; comme on peut voir en la figure précédente.

Comme l'Angle rectiligne est d'un plus grand usage que les deux autres, c'est de lui que l'on entendra parler ci-après, lors qu'on parlera simplement d'un Angle, sans en désigner l'espece.

25. La Quantité ou la Grandeur d'un Angle, est le nombre des degrez que contient l'arc que les côtés comprennent, d'un Cercle qui a son sommet pour centre.

Et ainsi, pour déterminer la quantité ou la grandeur

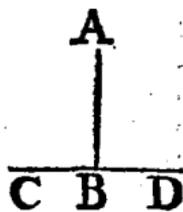
# LIVRE PREMIER. 7

deur d'un Angle, il ne faut que décrire un Cercle dont le sommet de l'Angle soit le centre; puis il faut sçavoir combien de degrez contient l'arc de ce Cercle compris entre ses deux Côtez, & le nombre de ces degrez en determinera la grandeur.

D'où il suit qu'un Angle est d'autant plus grand, que cet arc comprend un plus grand nombre de degrez.

26. Une Ligne perpendiculaire, est une ligne droite, qui tombant sur une autre ligne droite, fait de part & d'autre des Angles égaux.

Ainsi, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD; parce qu'elle tombe de telle sorte sur cette ligne, qu'elle fait les Angles ABC, & ABD, égaux entr'eux.

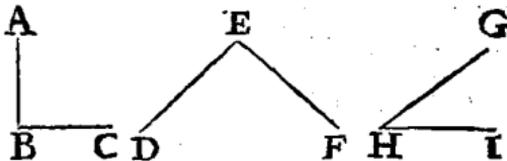


Quand une ligne droite tombe à l'extrémité d'une autre ligne droite, elle ne laisse pas de lui être perpendiculaire, si cette autre ligne étant prolongée, elle fait avec elle des angles de part & d'autre égaux entr'eux.

Si une ligne est perpendiculaire à une autre, cette autre reciproquement lui est aussi perpendiculaire; ainsi les deux lignes AB, CD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

27. Un Angle droit, est un Angle compris de deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre; comme l'Angle ABC.

28. Un Angle obtus, est un Angle plus grand



qu'un droit, comme l'Angle DEF.

29. Un Angle aigu, est un Angle plus petit qu'un droit, comme l'Angle GHI.

30. Une Figure rectiligne, est une Figure comprise

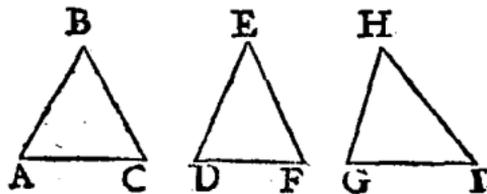
## 8 ELEMENS D'EUCLIDE.

prise ou bornée de plusieurs lignes droites ; Et c'est de celle-là seule, & du Cercle, dont il est parlé dans ces Elemens.

31. Les Côtez d'une Figure rectiligne, sont les lignes droites dont elle est bornée.

32. Un Triangle, est une Figure comprise de trois lignes droites, comme ABC.

Le Triangle considéré selon ses côtez, se divise en trois especes, sçavoir,



en Triangle Equilateral, en Isoscèle, & en Scalène.

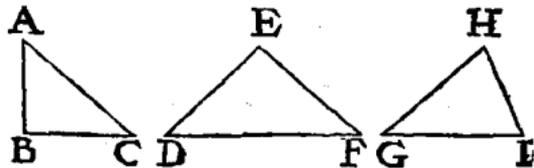
33. Un Triangle Equilateral, est un Triangle qui a ses trois côtez égaux, comme ABC.

34. Un Triangle Isoscèle, est un Triangle qui a deux de ses côtez égaux, comme DEF.

35. Un Triangle Scalène, est un Triangle qui a ses trois côtez inégaux, comme GHI.

Le Triangle considéré selon ses Angles, se divise aussi en trois especes ; sçavoir, en Triangle Rectanglé, en Amblygone, & en Oxygone.

36. Un Triangle Rectanglé, est un Triangle



qui a un angle droit, comme ABC.

37. Un Triangle Amblygone, ou Obtus-angle, est un Triangle qui a un angle obtus, comme DEF.

38. Un Triangle Oxygone, ou Aigu-angle, est un Triangle qui a les trois angles aigus, comme GHI.

39. La Bazc d'un Triangle, est un de ses trois Côtez indifféremment, que l'on nomme ainsi suivant le besoin qu'on en a.

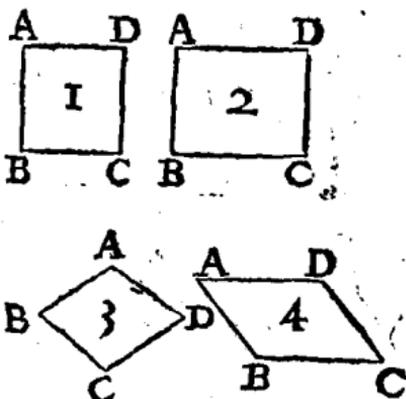
Ainsi

# LIVRE PREMIER. 9

Ainsi en tout Triangle chaque Côté peut servir de Baze ; & mêmes l'Hypotenufe d'un Triangle Rectangle (c'est à dire le Côté opposé à l'Angle droit) peut être considérée comme Baze de ce Triangle.

40. Un Parallelogramme, est une Figure comprise ou bornée de quatre lignes droites, dont les opposées sont paralleles.

Ainsi, les Figures qui sont ici marquées ABCD, sont des Parallelogrammes ; par ce que chacune est comprise de quatre lignes droites, dont les opposées, comme AB, CD, sont paralleles.



Il y a quatre sortes de Parallelogrammes, sçavoir, le Quarré, le Rectangle, (ou le Quarré-long,) le Rhombe, & le Rhomboïde.

41. Un Quarré, est un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les quatre angles droits, comme ABCD. 1.

42. Un Rectangle, ou un Quarré-long, est un Parallelogramme, qui a les quatre angles droits, & les côtez opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 2.

43. Un Rhombe, est un Parallelogramme, qui a les quatre côtez égaux, & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 3.

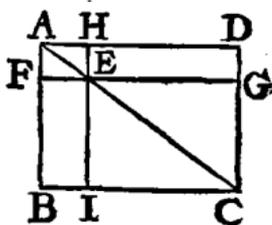
44. Un Rhomboides, est un Parallelogramme, qui a les côtez & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 4.

45. La Diagonale, ou le Diametre, d'un Paralle-

# 10 ELEMENS D'EUCLIDE.

lelogramme, est une Ligne droite, tirée de l'un des Angles de ce Parallelogramme, à celui qui lui est opposé.

Ainsi la Ligne AC, est la Diagonale ou le Diametre du Parallelogramme ABCD.



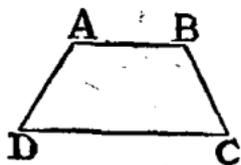
46. Les Parallelogrammes à l'entour du Diametre d'un autre Parallelogramme,

ce sont deux Parallelogrammes, dont les Diagonales, prises chacune à part, font partie de ce Diametre; & prises ensemble, font le Diametre total.

Ainsi les Parallelogrammes AFEH, & EICG, sont des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre du Parallelogramme ABCD; parce que leurs Diagonales AE, EC, prises chacune à part, font partie du Diametre AC; & prises ensemble font ce Diametre total.

47. Les Supplémens des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce sont deux Parallelogrammes, par lesquels ce Diametre ne passe point, & qui avec les deux autres qui sont alentour du Diametre, composent cet autre Parallelogramme total; comme sont ici les Parallelogrammes FBIE, EHDG, lesquels avec ceux qui sont alentour du Diametre font le Parallelogramme total ABCD.

48. Un Trapéze, est une Figure comprise de quatre Lignes droites, dont les côtez opposés, ou pour le moins deux de ces côtez, ne sont point paralleles; Comme ABCD est un Trapéze; parce que ses deux côtez opposés AD, BC, ne sont point paralleles.



Et ainsi un Trapéze est une Figure de quatre côtez

# LIVRE PREMIER. II

rez, qui n'est point Parallelogramme.

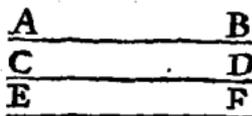
## DEMANDES.

1. Que d'un Point donné à un autre Point donné l'on puisse mener une Ligne droite.
2. Que l'on puisse prolonger tant que l'on voudra une Ligne droite donnée & terminée.
3. Que l'on puisse décrire un Cercle de quelque centre & de quelque intervalle que ce soit.
4. Que toute Grandeur donnée puisse être augmentée ou diminuée.

## AXIOMES.

1. Les Grandeurs égales à une même Grandeur sont égales entr'elles.

Ainsi les Lignes AB, EF, qui sont chacune égales à la Ligne CD, sont égales entr'elles.



2. Si à des Grandeurs égales on ajoute des Grandeurs égales, les Touts seront égaux.

3. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, les restes seront égaux.

4. Si à des Grandeurs inégales on ajoute des Grandeurs égales, les Touts seront inégaux.

5. Si de Grandeurs inégales on retranche des Grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6. Les Grandeurs qui sont doubles, ou triples, ou quadruples &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales; sont égales entr'elles.

7. Les Grandeurs qui sont moitié, ou tiers, ou quart &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.

8. Les Grandeurs qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles.

C'est à dire, par exemple, que si deux Gran-

## 12 ELEMENS D'EUCLIDE.

deurs étant mises l'une sur l'autre, se peuvent tellement ajuster, que l'une n'excede point l'autre, mais la couvre précisément: ces deux Grandeurs sont égales entr'elles.

13. Le Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

10. Le Tout est plus grand qu'une de ses parties.

11. Les Angles droits sont égaux entr'eux.

12. Deux Lignes droites n'enferment point un espace.

13. Si deux Lignes droites se coupent l'une l'autre, elles se couperont en un Point.

14. Si deux Lignes droites se rencontrent non directement en un Point, étant prolongées, elles se couperont l'une l'autre en ce même Point.

15. Si à des Grandeurs égales, on ajoute des Grandeurs inégales, l'excez des toutes sera le même que l'excez des ajoutées.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB, CD, sont égales, & qu'on leur ajoute les Lignes inégales BE, DF: l'excez dont la toute AE surpassera la toute CF, sera égal à l'excez dont l'ajoutée BE surpassera l'ajoutée DF.

16. Si à des Grandeurs inégales on ajoute des Grandeurs égales, l'excez des toutes sera le même que l'excez des premières.

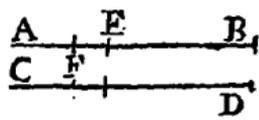
Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB, CD, sont inégales, & qu'on leur ajoute les Lignes égales BE, DF: l'excez dont la toute AE surpassera la toute CF, sera le même que celui dont AB surpassera CD.

17. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs inégales, l'excez des Grandeurs qui restent, sera égal à l'excez des Grandeurs retranchées.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB, CD, sont égales, & qu'on en retranche les parties in-

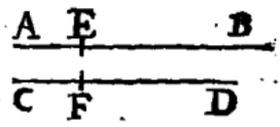
# LIVRE PREMIER. 13

inégales AE, CF : l'excez dont le reste FD surpassera le reste EB, sera égal à l'excez dont AE surpasse CF.



18. Si de Grandeurs inégales, on retranche des Grandeurs égales, l'excez des restes sera le même que l'excez des toutes.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB, CD, sont inégales, & qu'on en retranche les parties égales



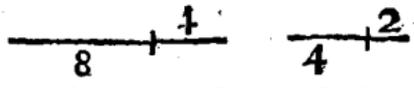
AE, CF : l'excez dont le reste EB surpassera le reste FD, sera le même que celui dont la toute AB surpasse la toute CD.

19. Si une Grandeur est double d'une autre, & l'ajoutée de l'ajoutée : le Tout sera double du Tout.

Ainsi, si à une Ligne de 8 pieds, qui est double d'une Ligne de 4 pieds, l'on ajoute une Ligne de 4 pieds, qui est double d'une Ligne de 2 pieds : le Tout 12 pieds sera double du Tout 6 pieds.

20. Si une Grandeur est double d'une autre, & la retranchée de la retranchée : le reste sera double du reste.

Ainsi, une Ligne de 12 pieds étant double d'une



ne Ligne de 6 pieds, si l'on retranche 4 pieds de la plus grande, & 2 pieds de la plus petite, les 8 pieds qui resteront en l'une, seront doubles des 4 qui resteront en l'autre.

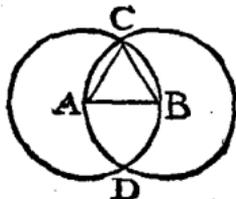
## PROPOSITION I.

## PROBLEME I.

*Sur une Ligne droite donnée & terminée,  
décrire un Triangle Equilateral.*

**J**E suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée; & je propose de décrire sur cette Ligne un Triangle Equilateral. Pour le faire,

Décrivez du centre A, & de l'intervalle AB, le Cercle CBD; décrivez aussi du Centre B, & de l'intervalle BA, le Cercle DAC; ce Cercle coupera l'autre aux deux points C, & D; de l'un de ces points, par exemple de C, menez les deux Lignes droites CA, CB. Ces deux Lignes avec la Ligne AB, feront un Triangle; & je dis que ce Triangle sera Equilateral. Pour le prouver,

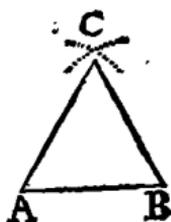


La Ligne AB, & la Ligne AC, sont les rayons du Cercle CBD, donc elles sont égales entr'elles. De même, la Ligne BA, & la Ligne BC, sont les rayons du Cercle DAC, donc elles sont aussi égales entr'elles. Par conséquent la Ligne AC, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à sçavoir AB, sont égales entr'elles, par le premier Axiome. Ainsi le Triangle ABC, qui est décrit sur la Ligne droite donnée AB, est Equilateral; ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Ouvrez le Compas

pas de l'intervalle AB; puis des points A, & B, comme centres, décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent au point C; & menez du Point C les Lignes droites CA, CB; & le Triangle ABC sera Equilateral.

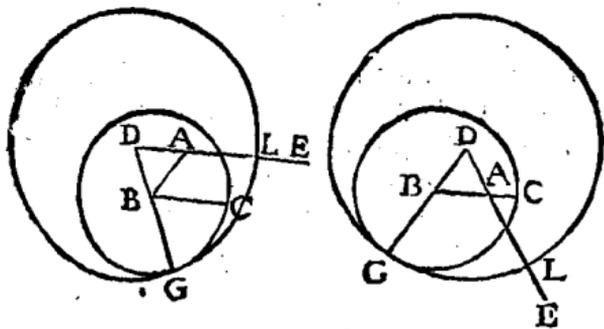


PROPOSITION II.

PROBLEME II.

*D'un Point donné mener une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée.*

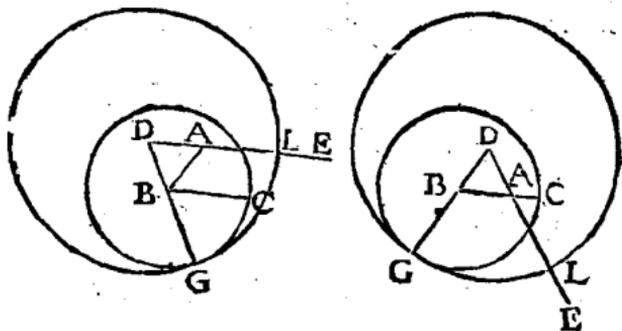
JE suppose que l'on donne le point A, & la Ligne droite BC; & je propose de tirer du Point A une Ligne droite égale à la Ligne BC. Pour le faire,



De l'une des extremités de la Ligne BC, par exemple, du point B, comme centre, & de l'intervalle BC, décrivez le Cercle CG; puis du Point A au point B menez la Ligne droite AB; décrivez ensuite sur cette Ligne, par la Proposition précédente, le Triangle Equilateral ABD; prolongez après cela le côté DB, jusqu'à ce qu'il rencontre la

## 16 ELEMENS D'EUCLIDE.

la circonférence du Cercle CG en quelque point, comme G ; prolongez aussi la Ligne DA indéfiniment vers E ; enfin du centre D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle GL ; ce Cercle coupera la Ligne indéfinie DE en quelque point, comme L. Cela étant, je dis que la Ligne AL, qui part du Point donné A, est égale à la Ligne droite donnée BC. Pour le prouver,



La Ligne DL, & la Ligne DG, sont les rayons du Cercle GL ; donc elles sont égales entr'elles. Maintenant si de ces deux Lignes on retranche les parties DA, DB, qui sont égales, parce que ce sont les côtez d'un Triangle Equilateral : les restes AL, & BG, seront égaux entr'eux, par le 3<sup>e</sup>. Ax. D'ailleurs, la Ligne BC, & la Ligne BG, sont les rayons du Cercle CG ; donc elles sont aussi égales entr'elles. Par conséquent la Ligne AL, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à sçavoir BG, sont égales entr'elles, par le 1<sup>er</sup>. Ax. Nous avons donc d'un Point donné mené une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

### REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la Ligne donnée, puis le transportant au point donné, y mener une Ligne égale à son ouverture. PRO-

## PROPOSITION III.

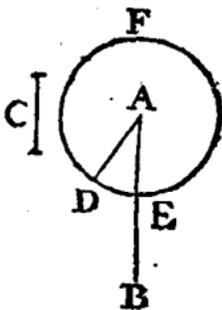
## PROBLEME III.

*Deux Lignes droites inégales étant données,  
retrancher de la plus grande une partie  
égale à la plus petite.*

**J**E suppose que les deux Lignes droites AB, & C, soient données, & que AB soit la plus grande; & je propose de retrancher de AB une partie égale à C. Pour le faire,

De l'une des extremittez de la Ligne AB, par exemple du Point A, menez, par la Proposition precedente, la Ligne droite AD, qui soit égale à C; puis du centre A, & de l'intervalle AD, décrivez le Cercle DEF; ce Cercle coupera la Ligne AB au Point E. Cela étant, je dis que la partie AE, qui est retranchée de AB, est égale à C. Pour le prouver,

La Ligne AE, & la Ligne AD, sont les rayons du Cercle DEF; donc elles sont égales entr'elles; mais la Ligne AD, par la construction, est égale à la Ligne C; donc la Ligne AE, qui est égale à la Ligne AD, est aussi égale à la Ligne C, par le premier Axiome; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



## REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la plus petite, & la retrancher de la plus grande.

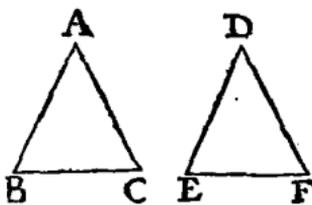
P R O-

## PROPOSITION IV.

## THEOREME I.

*Si deux Triangles ont deux Côtés égaux à deux Côtés, chacun au sien, & l'Angle compris de ces deux Côtés égal à l'Angle: la Baze sera égale à la Baze; les deux autres Angles seront égaux aux deux autres Angles, chacun au sien; & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.*

**J**E suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE, le Côté AC au Côté DF, & que l'Angle A, compris des deux Côtés AB, AC, soit égal à l'Angle D, compris des deux Côtés DE, DF. Cela



étant, je dis que la Baze BC est égale à la Baze EF; que l'Angle B est égal à l'Angle E; l'Angle C à l'Angle F; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF. Pour le prouver,

Transportez par pensée le Triangle DEF sur le Triangle ABC, en sorte que vous fassiez tomber le Côté DE sur le Côté AB, & les extremités D & E sur les extremités A & B; ce qui se peut faire, puisqu'on suppose ces deux Lignes tout supposées égales. Ensuite

## LIVRE PREMIER. 19

te de quoi, puis que l'Angle D est égal à l'Angle A, par supposition, il s'ensuit que le Côté DF tombera sur le côté AC; & puis que la Ligne DF est supposée égale à la Ligne AC, il s'ensuit que l'extrémité F tombera sur l'extrémité C; ainsi les Points E & F, qui sont les extrémités de la Baze EF, tombant sur les points B & C, qui sont les extrémités de la Baze BC, il s'ensuit que la Baze EF tombera sur la Baze BC, par la 4<sup>e</sup>. Définition. & par conséquent ces deux Lignes, qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles, par le 8<sup>e</sup>. Axiome. D'ailleurs, puis que l'Angle E convient avec l'Angle B, il s'ensuit qu'il lui est égal; & puis que l'Angle F convient avec l'Angle C, il s'ensuit aussi qu'il lui est égal; & enfin puis que le Triangle DEF convient avec le Triangle ABC, il s'ensuit que ces deux Triangles sont aussi égaux entr'eux, par le huitième Axiome; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



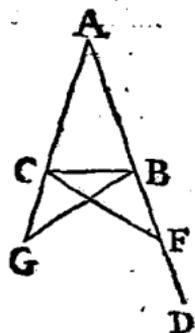
## PROPOSITION V.

## THEOREME II.

*Si un Triangle est Isoscele, les Angles sur la Baze sont égaux entr'eux; & ses Côtez étant prolongez, les Angles sous la Baze seront aussi égaux entr'eux.*

**J**E suppose que le Triangle ABC soit Isoscele, & que ses Côtez AB, AC, soient égaux; cela étant, je dis premierement que les Angles ABC, & ACB, qui sont sur la Baze BC, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Prolongez le côté AC autant qu'il vous plaira, par exemple, jusqu'au Point G; puis prolongez le côté AB indefiniment; en suite terranchez, par la troisième Proposition, du Côté AB prolongé, la partie AF, égale à AG; menez après cela une Ligne droite du point C au Point F, & une autre du Point B au Point G.



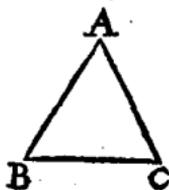
Cette construction supposée, comparez le Triangle BAG avec le Triangle CAF. Le Côté AB du premier Triangle est égal au Côté AC du second, par supposition; le Côté AG du même premier Triangle est égal au côté AF du second, par la construction. Voilà donc deux Côtez, sçavoir AB, AG, égaux à deux Côtez, AC, AF; deplus l'Angle compris des deux Côtez AB, AG, est égal à l'Angle compris des deux autres Côtez AC, AF,



## 22 ELEMENS D'EUCLIDE.

lateral, tel que je suppose ici le Triangle ABC, est aussi Equiangle, c'est à dire qu'il a ses trois Angles égaux.

Car puis que les Côtez AB, AC, sont égaux : il s'ensuit, par cette 5<sup>e</sup>. Proposition, que les Angles B & C sont égaux entr'eux. De même, puisque les Côtez BA, BC, sont égaux : il s'ensuit aussi que les Angles A & C sont égaux entr'eux. Ainsi les Angles A & B étant égaux au troisiéme C, il s'ensuit qu'ils sont tous-trois égaux entr'eux ; & par-tant que le Triangle Equilateral ABC est Equiangle.

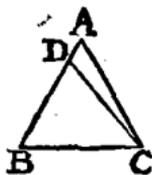


## PROPOSITION VI.

### THEOREME III.

*Si un Triangle a deux Angles égaux entr'eux, les Côtez qui les soutiennent sont aussi égaux entr'eux.*

Je suppose que dans le Triangle ABC les Angles ABC, & ACB, soient égaux entr'eux ; Cela étant, je dis que les Côtez AB, AC, qui soutiennent ces deux Angles, sont aussi égaux.



Car si ces deux Côtez AB, AC, n'étoient pas égaux entr'eux, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre ; posons que ce soit AB. Retranchez donc, par la troisiéme Proposition, du Côté AB, la partie BD, égale AC, & menez la Ligne CD. Comparez ensuite le Triangle

DBC

## LIVRE PREMIER. 23

DBC avec le Triangle ACB. Le côté DB du premier Triangle, est égal au Côté AC du second, par la construction; le Côté BC est commun aux deux Triangles; de plus l'Angle B, compris des deux Côtés DB, BC, est égal à l'Angle ACB, compris des deux autres Côtés AC, CB, par supposition. Donc par la quatrième Proposition, le Triangle DBC seroit égal au Triangle ABC, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Côté AB soit plus grand que le Côté AC. On prouvera de même que le Côté AC ne sauroit être plus grand que le Côté AB; & ainsi les deux Côtés AB, AC, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition que tout Triangle Equiangle, c'est à dire qui à ses trois angles égaux, comme nous supposons ici le Triangle ABC, est aussi Equilateral.

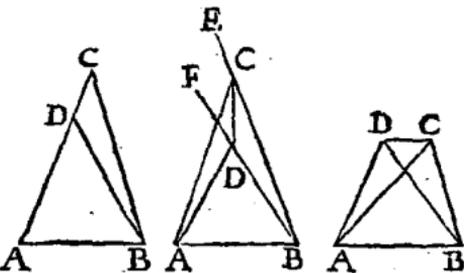
Car de ce que les Angles B & C sont égaux, les deux côtés AB, AC, qui les soutiennent, s'ensuivent égaux. De même, de ce que les Angles A & B sont égaux, les deux Côtés AC, BC, qui les soutiennent, s'ensuivent aussi égaux. D'où il suit que les deux côtés AB, BC, qui sont égaux au troisième AC, sont égaux entr'eux, par le premier Axiome; & partant que le Triangle ABC est Equilateral.

## PROPOSITION VII.

## THEOREME IV.

*Si des extremittez d'une Ligne droite, on mène deux Lignes droites, qui se rencontrent en un Point: on ne pourra pas des mêmes extremittez, & de même part, mener deux autres Lignes droites égales aux deux premières, chacune à la sienne, qui se rencontrent en un autre Point.*

**J**E suppose que des extremittez de la Ligne droite AB on mène les deux Lignes droites AC, BC, qui se rencontrent au Point C; & je dis que des mêmes extremittez A, & B, l'on ne sçauroit mener de même part, à sçavoir vers C,



deux autres lignes droites égales aux deux premières AC, BC, chacune à la sienne, (c'est à dire, en sorte que celle qui part du Point A soit égale à AC, & celle qui part du Point B soit égale à BC,) qui se rencontrent en un autre Point qu'au Point C.

Car si elles se pouvoient rencontrer ailleurs qu'au Point C, il faudroit que le Point de leur

ren-

## LIVRE PREMIER. 25

rencontre fût ou sur l'un des Côtez AC, BC, du Triangle ABC: ou dans ce Triangle: ou hors ce Triangle.

Premièrement, ce Point de rencontre ne peut être sur l'un des Côtez AC, BC, par exemple en D; autrement il s'ensuivroit que AD seroit égale à AC, c'est à dire la partie au tout, ce qui est absurde & impossible.

Secondement, ce Point de rencontre ne peut aussi être dans le Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce Point D les Lignes AD, BD; puis du Point D au Point C menez la Ligne DC; enfin prolongez BC, BD, vers E, & vers F. Cette construction supposée: puis que dans le Triangle ACD les Côtez AC, AD, sont supposés égaux, il s'ensuit, par la cinquième Proposition, que les deux Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle ECD est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que son égal ADC, & à plus forte raison que l'Angle FDC, qui n'est encore que partie de ADC. Maintenant puis que les Côtez BC, BD, du Triangle BCD, sont supposés égaux, & qu'ils sont prolongés vers E, & vers F: il s'ensuit, par la cinquième Proposition, que les Angles ECD, FDC, qui sont sous la Baze, sont égaux entr'eux. Mais nous avons déjà prouvé que l'Angle ECD étoit plus grand que l'Angle FDC. Ainsi il s'ensuivroit que deux Angles seroient égaux & inégaux, ce qui est impossible. Il est donc impossible que ce point de rencontre puisse être dans le Triangle ABC.

Enfin ce point de rencontre ne peut être hors du Triangle ABC. Car supposé qu'il pût être en D, menez à ce point D les Lignes AD, BD; puis du Point D au Point C menez la ligne DC. Cette construction supposée: puis que les Côtez AC, AD, du Triangle ACD, sont supposés égaux, il

s'enfuit par la cinquième Proposition, que les Angles  $ACD$ , &  $ADC$ , sont aussi égaux. Or l'Angle  $BCD$  est plus grand que l'Angle  $ACD$ , qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que son égal  $ADC$ , & à plus forte raison que sa partie  $BDC$ . Maintenant, puis que dans le Triangle  $BDC$  les Côtés  $BC$ ,  $BD$ , sont supposez égaux: il s'enfuit (par la cinquième Proposition) que les Angles  $BCD$ , &  $BDC$ , qui sont sur la Baze, sont égaux entr'eux. Mais nous venons de prouver que l'Angle  $BCD$  étoit plus grand que l'Angle  $BDC$ . Donc il s'enfuivroit que l'Angle  $BCD$ , & l'Angle  $BDC$ , seroient tout-ensemble égaux & inégaux; ce qui est absurde & impossible. Il est donc impossible que ce Point de rencontre puisse être hors du Triangle  $ABC$ . Mais nous avons aussi prouvé qu'il ne peut être ni dans le Triangle, ni sur ses Côtés, excepté au Point  $C$ ; il s'enfuit donc que le Point de rencontre de ces deux Lignes ne peut être ailleurs qu'au point  $C$ ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION VIII.

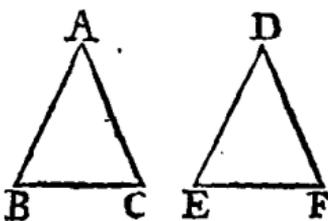
### THEOREME V.

*Si deux Triangles ont deux Côtés égaux à deux Côtés, chacun au sien, & la Baze égale à la Baze: l'Angle compris de ces Côtés égaux sera aussi égal à l'Angle.*

**J**E suppose que dans les deux Triangles  $ABC$ ,  $DEF$ , le Côté  $AB$  soit égal au Côté  $DE$ , le  
Côté

# LIVRE PREMIER. 27

Côté AC au Côté DF, & la Baze BC à la Baze EF ; cela étant, je dis que l'Angle A, compris des deux Côtés AB, AC, est égal à l'Angle D, compris des deux Côtés DE, DF. Pour le prouver,



Transportez par pensée le Triangle ABC sur le Triangle DEF, en sorte que vous fassiez tomber la Baze BC sur la Baze EF, & les extremités B, & C, sur les extremités E, & F ; ce qui se peut faire, puisque BC, & EF, sont supposées égales. Cela étant, considérez que des extremités de la Ligne EF partent deux Lignes droites ED, FD, qui se rencontrent au Point D ; & que des mêmes extremités partent deux autres Lignes droites BA, & CA, qui leur sont égales, chacune à la sienne, par supposition, & qui se rencontrent aussi en un Point. Partant, par la Proposition precedente, ces deux Lignes ne peuvent pas se rencontrer en un autre Point qu'au Point D. D'où il suit que le Point A tombera sur le Point D ; que la Ligne AB tombera sur DE ; la Ligne AC tombera sur DF ; & qu'ainsi l'Angle A conviendra avec l'Angle D ; & partant qu'il lui est égal ; Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

Puis que par la démonstration precedente il a été prouvé que le Triangle ABC convencit avec le Triangle DEF : outre que nous avons conclu que les Angles A, & D, étoient égaux entr'eux, nous pouvons encore conclure que les deux Angles B, & C, sont égaux aux deux Angles E, & F, chacun au sien ; & que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

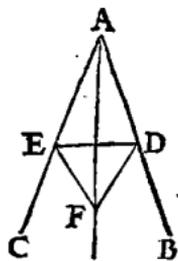
## PROPOSITION IX.

## PROBLEME IV.

*Couper en deux également un Angle rectiligne donné.*

**J**E suppose que l'Angle rectiligne BAC soit donné, & je propose de le couper en deux également. Pour le faire,

Prenez sur les Côtez AB, AC, deux parties égales AD, AE.; menez du Point D au Point E la Ligne droite DE; décrivez sur la Ligne DE, par la première Proposition, le Triangle Equilateral DEF; menez du point A au Point F la Ligne droite AF;



Cela étant je dis que cette Ligne AF coupe l'Angle BAC en deux également. Pour le prouver,

Comparez le Triangle DAF avec le Triangle EAF. Le Côté AD est égal au Côté AE, par la construction; le Côté AF leur est commun; la Baze DF est égale à la Baze EF, puis que ces deux Lignes sont les Côtez d'un Triangle Equilateral. Partant, par la Proposition précédente, l'Angle DAF est égal à l'Angle EAF; Et par conséquent l'Angle BAC est coupé en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## COROLLAIRE.

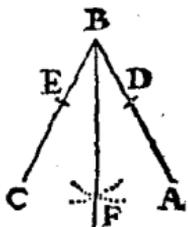
Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper un Angle rectiligne donné en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite en doublant toujours: Car après l'avoir divisé en deux également, il n'y a qu'à diviser cha-

# LIVRE PREMIER. 29

chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

## REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez votre Compas au Point B; & l'ayant ouvert à discrétion, marquez les Points E, & D; puis avec la même ou autre ouverture, mettez votre Compas au Point E, & décrivez vers F, un arc de Cercle; & sans changer d'ouverture transportez votre Compas au Point D, & décrivez un autre arc qui coupe le premier au Point F; Enfin menez par le Point B & le Point F une Ligne droite; & cette Ligne coupera l'Angle donné en deux également.



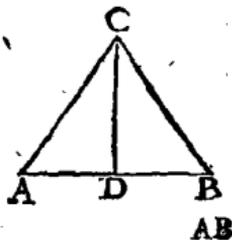
## PROPOSITION X.

### PROBLEME V.

*Couper en deux également une Ligne droite donnée, & terminée.*

JE suppose que l'on donne la Ligne droite AB, qui est terminée, & je propose de la couper en deux parties égales. Pour le faire,

Décrivez sur la Ligne AB le Triangle Equilateral ACB, par la 1. Prop. puis, par la Proposition précédente, coupez l'Angle ACB en deux également par la Ligne droite CD; cette Ligne coupera la Ligne



B 3

AB

## 30 ELEMENS D'EUCLIDE.

AB au Point D; Cela étant, je dis qu'elle sera coupée en deux parties égales. Pour le prouver,

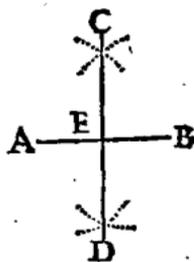
Comparez le Triangle ACD, avec le Triangle BCD. Le Côté AC est égal au Côté BC, parce que ce sont les Côtés d'un Triangle Equilateral; le Côté CD est commun aux deux Triangles. Voilà donc les deux Côtés AC, CD, égaux aux deux Côtés BC, CD, chacun au sien. De plus l'Angle ACD, compris de ces deux Côtés, est égal à l'Angle BCD, compris des deux autres, par la construction. Donc par la 4<sup>e</sup>. Prop. la Baze AD est égale à la Baze BD; Et ainsi la Ligne donnée AB est coupée en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

### COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, qu'on peut couper une Ligne droite donnée en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite, en doublant toujours; car après l'avoir coupée en deux également, il ne faut que couper derechef chaque moitié en deux parties égales, puis prendre la moitié de la moitié, &c.

### REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Appliquez votre Compas à l'une des extremités de la Ligne donnée; & le tenant ouvert plus que de la moitié de cette Ligne, décrivez deux Arcs de Cercle vers C, & vers D. Transportez votre Compas à l'autre extremité, & avec la même ouverture décrivez deux autres Arcs qui coupent les deux premiers aux Points C, & D. Puis du point C au point D menez une Ligne droite; cette Li-  
gne



gne conpera la Ligne AB en deux parties égales au Point E.

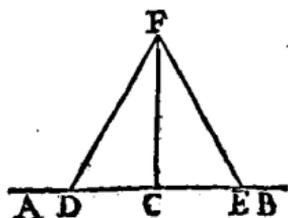
## PROPOSITION XI.

## PROBLEME VI.

*D'un point donné dans une Ligne droite élever une Ligne perpendiculaire.*

JE suppose que la Ligne AB soit donnée, & le Point C dans cette Ligne; Et je propose d'élever du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,

Prenez sur la Ligne AB, de part & d'autre du Point C, deux parties égales CD, CE. Décrivez sur la Ligne DE (par la 1<sup>re</sup> Prop.) le Triangle Equilateral DFE.



Menez du Point C au Point F la Ligne droite CF. Cela étant, je dis que cette Ligne CF, qui part du Point donné C, est perpendiculaire à la Ligne donnée AB. Pour le prouver,

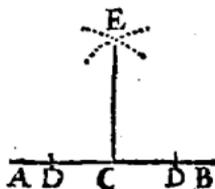
Comparez le Triangle DCF avec le Triangle ECF. Le Côté CD est égal au Côté CE, par la construction; le Côté CF est commun aux deux Triangles. Voilà donc deux Côtés CD, CF, égaux à deux Côtés EC, CF, chacun au sien. De plus, la Base DF est égale à la Base EF, parce que ce sont les Côtés d'un Triangle Equilateral. Partant (par la 8. Prop.) l'Angle DCF, compris des deux Côtés du premier Triangle, est égal à l'Angle ECF, compris des deux Côtés de l'autre Triangle; Et ainsi la Ligne CF, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre

## 32 ELEMENS D'EUCLIDE.

égaux entr'eux, est perpendiculaire. Nous avons donc d'un Point donné dans une Ligne droite, élevé une Perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

### R E M A R Q U E.

Pratique de cette Proposition. Appliquez votre Compas au Point C, & le tenant ouvert comme il vous plaira, marquez de part & d'autre de la Ligne donnée les deux Points D & D. Ouvrez après cela un peu davantage votre Compas, & le mettant successivement aux Points D & D, décrivez avec cette ouverture deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent au Point E; puis du Point C au Point E menez la Ligne droite CE; Et cette Ligne sera perpendiculaire à la Ligne donnée.



Si le Point donné étoit à l'extrémité de la Ligne, il la faudroit prolonger, & pratiquer ensuite ce qui vient d'être dit. Il y a encore une autre maniere d'élever une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne droite, qui sera enseignée ci-après.



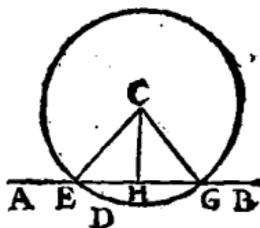
## PROPOSITION XII.

## PROBLEME VII.

*D'un Point donné hors d'une Ligne droite indéterminée, abaisser sur cette Ligne, une Ligne perpendiculaire.*

JE suppose qu'on donne la Ligne droite AB, qui est indéterminée, & le Point C hors de cette Ligne; & je propose d'abaisser du Point C une Ligne perpendiculaire à AB. Pour le faire,

Prenez au delà de la Ligne AB un Point tel qu'il vous plaira, comme D; puis du Centre C, & de l'intervalle CD, décrivez un Cercle. Ce Cercle coupera la Ligne AB aux Points E, & G. Coupez après cela (par la 10. Prop.) la partie EG en deux également au Point H. Menez du Point C au Point H la Ligne droite CH. Cela étant, je dis que cette Ligne CH, qui tombe du Point donné C sur la Ligne AB, lui est perpendiculaire. Pour le prouver,



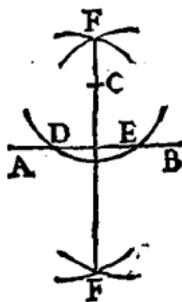
Menez les Lignes droites CE, CG, & comparez le Triangle EHC avec le Triangle GHC. Le Côté EH est égal au Côté GH, parce que la Ligne EG a été coupée en deux également; le Côté HC est commun aux deux Triangles; Voilà donc les deux Côtés EH, HC, égaux aux deux GH, HC. De plus, la Baze CE est égale à la Baze CG, parce que ce sont les rayons d'un même Cercle. Partant (par la 8. Prop.) l'Angle CHE, compris des deux premiers Côtés, est égal à l'Angle CHG, compris des

### 34 ELEMENS D'EUCLIDE.

deux autres. D'où il suit que la Ligne CH, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre égaux entr'eux, est perpendiculaire à AB. Ainsi nous avons d'un Point donné hors d'une Ligne droite indéterminée, abaissé sur cette Ligne une Ligne perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

#### R E M A R Q U E.

Pratique de cette Proposition. Appliquez votre Compas au Point donné C, & décrivez un Cercle de tel intervalle qu'il coupe la Ligne AB aux deux Points D, & E; puis ouvrant tant soit peu le Compas, & l'appliquant successivement aux deux Points D, & E: décrivez d'une part ou d'autre de la Ligne AB deux arcs qui s'entrecoupent au Point F. Enfin par le Point F, & par le Point C, menez une Ligne droite qui rencontre la Ligne AB; & cette Ligne sera perpendiculaire à la Ligne donnée.

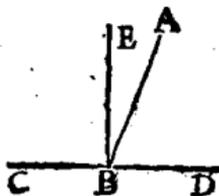


## PROPOSITION XIII.

## THEOREME VI.

*Quand une Ligne droite tombe sur une autre Ligne droite, ou elle fait deux Angles droits, ou deux Angles égaux à deux droits.*

JE suppose que la Ligne droite AB tombe sur la Ligne droite CD. Cela étant, je dis que les deux Angles ABC, ABD, sont droits, ou égaux à deux droits.



Car, ou la Ligne droite AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire en ce cas, il est évident que les deux Angles ABC, & ABD, sont deux Angles droits. Si AB n'est pas perpendiculaire à CD, élevez (par la 11<sup>e</sup>. Prop.) la Ligne BE, qui lui soit perpendiculaire. Cela étant, les Angles EBC, EBD, sont deux Angles droits. Mais les deux Angles ABC, ABD, pris ensemble, sont égaux aux deux Angles EBC, EBD, avec lesquels ils conviennent; donc ils sont égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

## I. COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si la quantité de l'un des deux Angles que fait une Ligne droite en tombant sur une autre, est connue, on connoitra facilement la quantité de l'autre. Car il n'y au-

### 36 ELEMENS D'EUCLIDE.

ra qu'à ôter la quantité connue de la valeur de deux Angles droitz, & le reste sera la quantité de l'autre. Comme par exemple, si l'Angle ABC étoit connu de 110 degrez: en ôtant cette quantité de 180 degrez, le reste 70 degrez seroit la quantité de l'Angle ABD.

#### I I. C O R O L L A I R E.

Il suit encore de cette Proposition, que si deux Lignes droites s'entrecoupent, les quatre Angles qu'elles feront vaudront quatre Angles droitz. Car deux de ces Angles pris ensemble, & à côté l'un de l'autre, valent deux droitz par cette Proposition; & les deux restans valent aussi deux droitz, par la même raison.

#### I I I. C O R O L L A I R E.

Il suit derechef, que si d'un Point pris dans un Plan, on tiroit tant de Lignes droites que l'on voudra sur le Plan: tous les Angles que feroient toutes ces Lignes, pris ensemble, vaudroient quatre Angles droitz; étant certain qu'ils conviendroient tous avec les quatre Angles que feroient deux Lignes droites qui s'entrecouperoit en ce même Point.

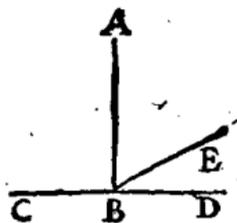


## PROPOSITION XIV.

## THEOREME VII.

*Si à un Point de quelque Ligne droite se rencontrent deux autres Lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux Angles égaux à deux droits: ces deux Lignes se rencontreront directement.*

JE suppose que les deux Lignes droites CB, DB, se rencontrent au Point B de la Ligne droite AB, & qu'elles font de part & d'autre de cette Ligne les deux Angles ABC, & ABD, égaux à deux droits. Cela étant, je dis que ces deux Lignes se rencontrent directement; c'est à dire, qu'elles ne font ensemble qu'une seule Ligne droite.



Car si CB ne concouroit pas directement avec DB, il s'ensuivroit que CB étant prolongée vers D, passeroit au dessus ou au dessous de DB. Supposons, si vous voulez, qu'elle passe au dessus, vers E. Cela étant, la Ligne CBE étant droite, & la Ligne AB tombant dessus: il s'ensuivroit, par la précédente Proposition, que les deux Angles ABC, & ABE, vaudroient deux Angles droits. Mais, par la supposition, les deux Angles ABC, & ABD, valent aussi deux droits; donc les Angles ABC, & ABE, seroient égaux aux deux Angles ABC, & ABD, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la

## 38 ELEMENS D'EUCLIDE.

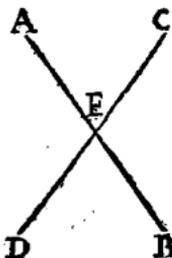
Ligne CB étant prolongée, passé au dessus de DB. On prouvera qu'il s'ensuivroit la même absurdité, si on prétendoit que CB étant prolongée, dût passer au dessous de DB. Et partant les Lignes CB, DB, se rencontrent directement, ou ne font qu'une Ligne droite; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XV.

## THEOREME VIII.

*Si deux Lignes droites s'entrecoupent, les Angles opposez au sommet seront égaux entr'eux.*

JE suppose que les deux Lignes droites AB, CD, s'entrecoupent au Point E, autour duquel elles font quatre Angles. Cela étant, je dis que les Angles AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, sont égaux entr'eux.



Car puis que la Ligne AE tombe sur CD, il s'ensuit, (par la 13<sup>e</sup>. Prop.) que les Angles AEC, AED, sont égaux à deux droits. De même, DE tombant sur AB, les deux Angles AED, DEB, sont égaux à deux droits. Partant les deux Angles AEC, AED, sont égaux aux deux Angles AED, DEB. Ostant donc l'Angle AED qui leur est commun, les Angles restans AEC, DEB, qui sont opposez au sommet, s'ensuivent égaux. On prouvera par un semblable raisonnement que les Angles AED, & CEB, qui sont aussi opposez au sommet, sont égaux entr'eux. Donc si deux Lignes s'entrecoupent, les Angles qu'el-

# LIVRE PREMIER. 39

qu'elles font oppofez au fommet, font égaux entr'eux; Ce qu'il falloir démontrer.

## R E M A R Q U E.

Nous pouvons ici établir une Propofition, qui peut en quelque façon paffer pour la Converfe de la précédente, à ſçavoir; que fi deux Lignes droites, venant de part & d'autre d'une autre Ligne droite, fe rencontrent à un même Point de cette Ligne, & font avec elle les Angles oppofez au fommet égaux: ces deux Lignes fe rencontrent directement. Par exemple,

Pofons que les deux Lignes droites CE, DE, viennent de part & d'autre de la Ligne droite AB fe rencontrer au Point E, en forte qu'elles faffent les Angles AEC, DEB, oppofez au fommet, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que ces deux Lignes concourent directement.

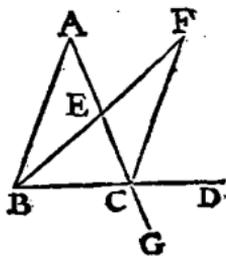
Car puiſque les Angles AEC, DEB, font oppofez égaux: en leur ajoutant l'Angle commun AED, il s'enſuivra que les deux Angles AEC, AED, pris enfemble, feront égaux aux deux autres BED, AED, auffi pris enfemble. Or puiſque la Ligne DE tombe fur la Ligne droite AB, les deux Angles BED, AED, valent deux droits, ( par la 13<sup>e</sup>. Prop. ) Partant les deux Angles AEC, AED, valent auffi deux droits. Et par conſéquent, par la Propofition précédente, les deux Lignes CE, DE, concourent directement.

## PROPOSITION XVI.

## THEOREME IX.

*Si le Côté d'un Triangle est prolongé, l'Angle extérieur sera plus grand que chacun des deux opposez intérieurs.*

**J**E suppose qu'au Triangle ABC le Côté BC soit prolongé vers D. Cela étant, je dis premièrement que l'Angle extérieur ACD est plus grand que l'Angle intérieur CAB, qui lui est opposé alternativement. Pour le prouver,



Coupez la Ligne AC en deux parties égales au Point E. Menez par le Point B & par le Point E la Ligne droite indéterminée BF. Retranchez de cette Ligne la partie EF, égale à EB; & du Point C au Point F menez la Ligne droite CF. Cela posé :

Comparez le Triangle CEF avec le Triangle AEB. Le Côté EC du premier Triangle, est égal au Côté EA du second, puis que la Ligne AC a été coupée en deux également. Le Côté EF a été fait égal au Côté EB. Voilà donc les deux Côtés CE, EF, égaux aux deux Côtés AE, EB, chacun au sien. De plus, l'Angle CEF, compris des deux Côtés CE, EF, est égal à l'Angle AEB, compris des deux autres Côtés; parce que ces deux Angles sont opposés au sommet. Partant (par la 4. Prop.) la Baze sera égale à la Baze, & les autres Angles égaux aux autres Angles, chacun au sien; c'est à dire

## LIVRE PREMIER. 41

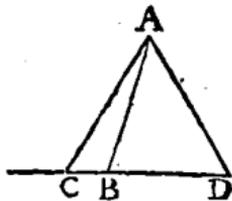
dire que l'Angle ECF, ou ACF, sera égal à l'Angle EAB, ou CAB. Or l'Angle ACD est plus grand que l'Angle ACF, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que l'Angle CAB; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que le même Angle extérieur ACD est plus grand que l'autre Angle intérieur ABC, qui lui est simplement opposé. Pour le prouver,

Continuez la Ligne AC vers G. L'Angle BCG est extérieur, & son opposé alternativement est ABC. Donc par ce qui vient d'être dit dans la première partie de cette Proposition, l'Angle BCG est plus grand que l'Angle ABC. Or par la Proposition précédente, l'Angle ACD est égal à l'Angle BCG, qui lui est opposé au sommet. Partant l'Angle ACD est aussi plus grand que l'Angle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que d'un même Point comme A, pris où l'on voudra hors d'une Ligne droite, par exemple CD, on ne peut mener vers cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles. Car si on prétendoit qu'on en pût mener trois, comme AC, AB, AD: de ce que les deux Lignes AB, AD, seroient égales, il s'en suivroit (par la 5. Prop.) que l'Angle ABD seroit égal à l'Angle D.



Mais puis que les Lignes AC, & AD, seroient aussi égales, il s'en suivroit aussi que l'Angle ACD seroit égal au même Angle D. Partant les deux Angles ACD, ABD, qui seroient égaux à l'Angle D, seroient égaux entr'eux; c'est à dire qu'un Angle extérieur seroit égal à son opposé intérieur, ce qui est

## 42 ELEMENS D'EUCLIDE.

est impossible, par la Proposition precedente. Il est donc impossible que d'un Point pris hors d'une ligne droite, on puisse mener sur cette Ligne-là plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

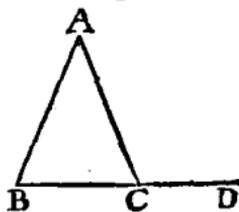
## PROPOSITION XVII.

## THEOREME X.

*En tout Triangle, deux Angles tels que l'on voudra, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits.*

JE suppose le Triangle ABC, & je dis que deux Angles de ce Triangle tels que l'on voudra, comme ABC, & ACB, pris ensemble, valent moins que deux Angles droits. Pour le prouver,

Prolongez la Ligne BC (aux extremités de laquelle sont ces deux Angles,) vers tel côté qu'il vous plaira, comme vers D. L'Angle ACD est extérieur, & l'Angle ABC est son opposé intérieur.



Donc, par la Proposition precedente, l'Angle ABC est plus petit que l'Angle ACD. Et partant les deux Angles ABC, & ACB, pris ensemble, seront moindres que les deux Angles ACD, & ACB, pris aussi ensemble. Or (par la 13.<sup>e</sup> Prop.) les deux Angles ACD, & ACB, valent deux droits. Donc les deux autres ABC, & ACB, valent moins que deux droits. On prouvera de même que ACB, & BAC, ou bien ABC, & BAC, valent moins que deux droits. Et partant deux Angles d'un Triangle pris comme l'on voudra, valent en-

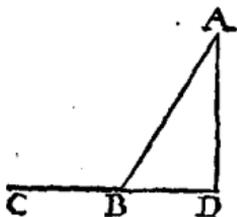
en-

# LIVRE PREMIER. 43

ensemble moins que deux droits ; Ce-qu'il falloit démontrer.

## I. COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que d'un même Point comme A, on ne peut faire tomber sur une Ligne droite, par exemple sur CD, qu'une seule Perpendiculaire. Car s'il en pouvoit tomber deux, comme par exemple AD, AB, il s'en suivroit que chacun des deux Angles ABD, & ADB, seroient droits, & qu'ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux droits ; Ce qui est contre la Proposition precedente.

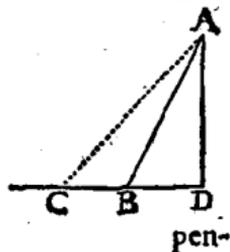


## II. COROLLAIRE.

Il suit encore, que si un Angle d'un Triangle est droit, ou obtus, chacun des deux autres sera aigu. Car chacun de ceux-ci étant pris avec celui qui est déjà droit, ou obtus, il s'en doit faire un Tout moindre que deux Angles droits. Partant, si l'on en ôte celui qui est droit, ou obtus, le restant sera moindre qu'un droit, c'est à dire aigu.

## III. COROLLAIRE.

Il suit en troisième lieu, que si une Ligne droite, comme AB, tombant sur une autre Ligne droite, comme CD, fait d'une part un Angle obtus, comme ABC, & de l'autre part un Angle aigu, comme ABD : en prenant quelque Point dans la Ligne AB, par exemple A, d'où l'on fasse tomber une Per-



pen-

## 44 ELEMENS D'EUCLIDE.

pendiculaire sur CD, cette Perpendiculaire tombera de la part de l'Angle aigu, comme vous voyez ici que tombe la Ligne AD. Car si l'on prétendoit que cette Perpendiculaire pût tomber de la part de l'Angle obtus, comme tombe AC: l'Angle ACB s'ensuivroit droit. Et d'ailleurs l'Angle ABC étant supposé obtus, il s'ensuivroit que deux Angles d'un même Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est contre la precedente Proposition.

### I V. C O R O L L A I R E.

Il est enfin évident que les trois Angles d'un Triangle Equilateral, ou les deux Angles égaux d'un Triangle Isocele, sont aigus. Car ces Angles étant égaux, si l'un d'eux étoit droit ou obtus, les autres le seroient aussi. Et ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux droits; ce qui est impossible, comme il vient d'être démontré.

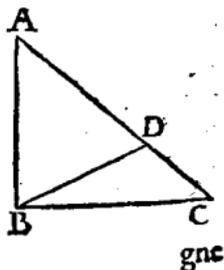
## P R O P O S I T I O N X V I I I.

### T H E O R E M E X I.

*En tout Triangle, le plus grand Côté soutient le plus grand Angle.*

Je suppose que dans le Triangle ABC le Côté AC soit plus grand que le Côté AB. Cela étant, je dis que l'Angle ABC est plus grand que l'Angle C. Pour le prouver,

Retranchez de AC la partie AD, égale à AB, & menez la Li-



gne

## LIVRE PREMIER. 45

gne droite BD. Le Côté CD, du Triangle BCD, est prolongé vers A ; donc ( par la 16. Prop.) l'Angle extérieur ADB est plus grand que son opposé intérieur C. D'ailleurs, puis que AD est égale à AB, les Angles ABD, ADB, sont égaux, par la 5. Prop. Or l'Angle ABC est plus grand què l'Angle ABD, qui n'est que sa partie ; il sera donc aussi plus grand que l'Angle ADB, & à plus forte raison que l'Angle C, qui a été prouvé moindre que ADB ; Ce qu'il falloit démontrer.

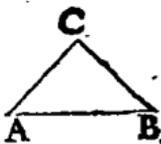
### PROPOSITION XIX.

#### THEOREME XII.

*En tout Triangle, le plus grand Angle est soutenu par le plus grand Côté.*

JE suppose que dans le Triangle ABC l'Angle C soit plus grand que l'Angle B. Cela étant, je dis que le Côté AB, qui soutient le plus grand Angle, est plus grand que AC, qui soutient le plus petit.

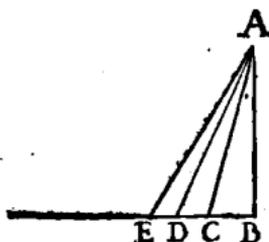
Car si AB n'étoit pas plus grand que AC, il s'ensuivroit qu'il lui seroit égal, ou moindre ; s'il lui étoit égal, les Angles B, & C, seroient égaux, ( par la 5. Prop.) ce qui est contre la supposition. S'il étoit plus petit, le Côté AC seroit plus grand, & ( par la Proposition précédente ) l'Angle B seroit plus grand que l'Angle C ; ce qui est encore contre la supposition. Et partant le Côté AB ne pouvant être ni égal, ni plus petit que AC, il s'ensuit qu'il est plus grand ; Ce qu'il falloit démontrer.



COROL-

## COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si d'un Point hors d'une Ligne droite, on fait tomber sur cette Ligne tant de Lignes droites que l'on voudra, comme AB, AC, AD, AE, l'une desquelles, sçavoir AB, soit perpendiculaire: cette Perpendiculaire sera la plus petite de toutes; car elle soutiendra nécessairement un Angle aigu, comme sont C, D, E; au lieu que les autres soutiendront un Angle droit, comme est B.

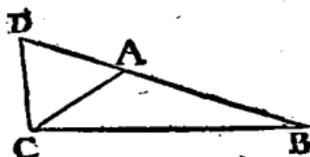


## PROPOSITION XX.

## THEOREME XIII.

*En tout Triangle, deux Côtés tels que l'on voudra, pris ensemble, sont plus grands que le troisième.*

JE suppose le Triangle ABC, & jedis que deux de ses Côtés, tels que l'on voudra, comme AB, AC, pris ensemble, sont plus grands que le troisième BC. Pour le prouver,



Prolongez le Côté AB vers D; puis ayant fait AD égal à AC, menez la Ligne droite DC. Cela posé: Au Triangle ADC les Côtés AC, AD, sont

## LIVRE PREMIER. 47

sont égaux, par la construction. Donc (par la 5<sup>e</sup>. Prop.) l'Angle ACD est égal à l'Angle D. Or l'Angle BCD est plus grand que ACD, qui n'est que sa partie; donc il est aussi plus grand que l'Angle D, son égal.

Maintenant, puisque dans le Triangle BDC l'Angle BCD est plus grand que l'Angle D: il s'ensuit par la Proposition précédente, que le Côté BD est plus grand que le Côté BC. Or les deux Côtés BA, AC, du Triangle ABC, sont égaux à BD, par la construction. Donc les deux Côtés BA, AC, pris ensemble, sont plus grands que BC; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXI.

### THEOREME XIV.

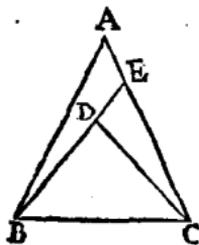
*Si des extremités d'un Côté de quelque Triangle, on mène deux Lignes droites qui se rencontrent au dedans d'icelui, ces deux Lignes seront plus petites que les deux autres Côtés de ce Triangle; mais elles feront un plus grand Angle.*

JE suppose le Triangle ABC; & ayant pris un de ses Côtés à discretion, comme BC, je mène les deux Lignes droites BD, CD, qui se rencontrent en dedans au Point D. Cela étant, je dis, 1<sup>o</sup>. que ces deux Lignes BD, CD, sont plus petites que les deux Côtés BA, AC. Pour le prouver,

Prolongez BD jusques en E. Cela posé: Dans le Triangle BAE les deux Côtés BA, AE, sont plus grands

## 48 ELEMENS D'EUCLIDE.

grands que le troisiéme BE, par la Proposition precedente; donc en leur ajoutant EC commun, il s'en suit que BA, AE, EC, ( c'est à dire BA, AC, ) sont plus grands que BE, EC. De même au Triangle CED les deux Côtés



CE, ED, sont plus grands que le troisiéme CD; donc en leur ajoutant DB, commun, il s'en suit que CE, ED, DB, ( c'est à dire BE, EC, ) sont plus grands que BD, CD. Mais il a déjà été prouvé que BA, AC, sont plus grands que BE, EC. Donc à plus forte raison BA, AC, sont plus grands que BD, CD; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC. Pour le prouver,

Le Côté ED, du Triangle CED, est prolongé vers B, & l'Angle BDC est extérieur; donc par la 16. Prop. il sera plus grand que son opposé intérieur DEC, ou BEC. De même, le Côté AE, du Triangle BAE, est prolongé vers C; partant l'Angle extérieur BEC est plus grand que son opposé intérieur BAE, ou BAC. Mais il a déjà été prouvé que l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BEC. Donc à plus forte raison l'Angle BDC est plus grand que l'Angle BAC; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XXII.

## PROBLEME VIII.

*Décrire un Triangle qui ait les trois Côtés égaux à trois Lignes droites données, qui soient telles que deux d'entr'elles, prises ensemble, soient plus grandes que la troisième.*

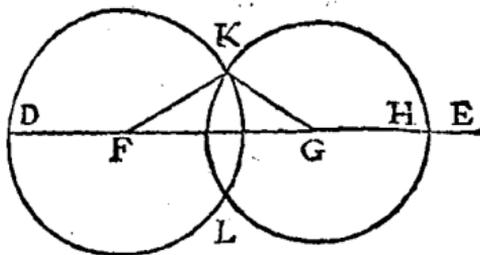
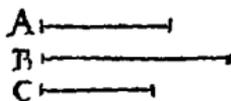
JE suppose qu'on donne les trois Lignes droites A, B, C, deux desquelles, telles que l'on voudra, comme A, & C, prises ensemble, sont plus grandes que la troisième B. Cela étant, je propose de décrire un Triangle qui ait les trois Côtés égaux à ces trois Lignes données, chacun à la sienne. Pour le faire,

Menez la Ligne droite indéterminée DE.

Prenez sur cette Ligne la partie DF, égale à l'une de ces trois Lignes droites données, par exemple à A.

Prenez ensuite la partie FG égale à l'une des deux restantes, par exemple à B. Prenez enfin la partie GH égale à la troisième C. Décrivez un Cercle du centre F,

Tome I.



C

& de

50. ELEMENS D'EUCLIDE.

& de l'intervalle FD. Décrivez un autre Cercle du centre G, & de l'intervalle GH. Ce second Cercle coupera le premier aux deux Points K, & L. Prenez l'un de ces deux Points, par exemple K, duquel menez deux Lignes droites aux Points F, & G. Cela étant, je dis que le Triangle FGK a les trois Côtéz égaux aux trois Lignes droites données A, B, C. Pour le prouver,

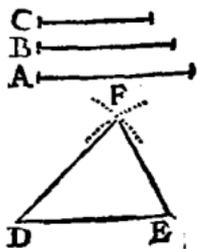
1°. Les Lignes FK, FD, sont égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais FD a été faite égale à la Ligne A; donc FK lui est aussi égale.

2°. Le Côté FG, par la construction, est égal à la Ligne B.

3°. Les Lignes GK, GH, sont aussi égales, étant les Rayons d'un même Cercle. Mais GH a été faite égale à la Ligne C; donc la Ligne GK est aussi égale à la Ligne C. Et partant le Triangle FGK a les trois Côtéz égaux aux trois Lignes droites données A, B, C; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

R E M A R Q U E.

Pratique de cette Proposition. Supposons qu'on donne les trois Lignes A, B, C; deux desquelles prises comme l'on voudra sont plus grandes que la troisième.



Prenez avec le Compas la grandeur de la Ligne A, & la transportez en DE. Prenez en suite la grandeur de la Ligne B, & appliquant le Compas au Point D, décrivez un Arc de Cercle vers F. Prenez aussi la grandeur de la Ligne C, & transportant le Compas au Point E, décrivez encore un Arc de Cercle qui coupe le premier au Point F. Enfin tirez les Lignes FD, FE; & le Triangle DEF aura ses trois Côtéz égaux aux trois Lignes données.

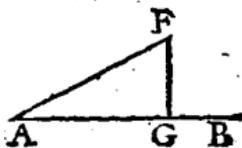
P R O-

## PROPOSITION XXIII.

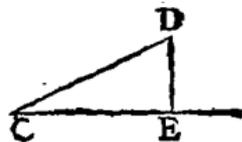
## PROBLEME IX.

*Une Ligne droite étant donnée, & un Point en icelle, tirer de ce Point une Ligne, qui fasse avec la Ligne donnée un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

JE suppose que la Ligne donnée soit AB ; que le Point donné en icelle soit A ; & que l'Angle donné soit C. Et je propose de tirer du Point A une Ligne droite qui fasse avec AB un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,



Prenez sur les Lignes CD, CE, tels Points qu'il vous plaira, comme D, & E, & menez la Ligne droite DE. Puis



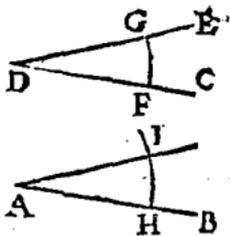
ayant pris AG, égale à CE, achevez par la Proposition précédente de décrire le Triangle AGF, qui ait les trois Côtés égaux aux trois Côtés du Triangle CDE ; sçavoir les deux Côtés AG, AF, égaux aux deux Côtés CE, CD ; & la Baze FG égale à la Baze DE. D'où il suit, ( par la 8. Prop. ) que l'Angle A est égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit faire.

## REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Supposons que l'on donne le Point A dans la Ligne droite AB, avec l'Angle D. Appliquez le pied du Compas au Point

52 ELEMENS D'EUCLIDE.

Point D, & de tel intervalle qu'il vous plaira décrivez l'Arc FG. Puis transportant le Compas ainsi ouvert au Point A, décrivez l'Arc HI. Cela fait, prenez avec le Compas la distance FG, & la transportez de H en I. Tirez enfin par le Point A & par le Point I, la Ligne droite AI; & alors l'Angle A sera égal à l'Angle D.



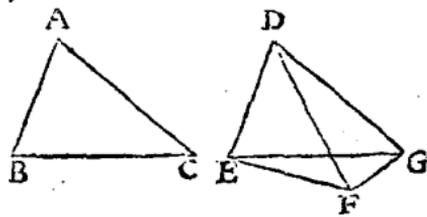
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XV.

*Si deux Triangles ont deux Côtés égaux à deux Côtés, chacun au sien, & que l'un d'iceux ait l'Angle compris de ces Côtés égaux plus grand que l'autre; la Baze sera aussi plus grande que la Baze.*

J'É suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Côté AB soit égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; mais que l'Angle A soit plus grand que l'Angle EDF. Cela étant, je dis que la Baze BC sera plus grande que la Baze EF. Pour le prouver,

Tirez (par la Proposition précédente) la Ligne DG, qui fasse avec DE l'Angle EDG égal à l'Angle

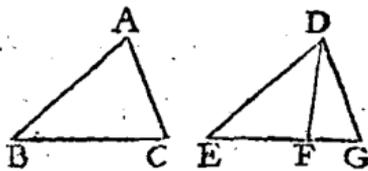


A. Cct-

## LIVRE PREMIER. 53

A. Cette Ligne DG tombera hors le Triangle DEF, puis que l'Angle EDF est supposé plus petit que l'Angle A. Faites ensuite DG égale à DF, ou à AC son égale, & menez la Ligne droite EG. Cette Ligne passera nécessairement ou au dessus du Point F, ou par le Point F, ou au dessous. Pensons qu'elle passe au dessus, comme ici; & tirons la Ligne FG. Maintenant en comparant les Triangles DEG, & ABC, les deux Côtez ED, DG, sont égaux aux deux Côtez BA, AC, chacun au sien; & l'Angle EDG égal à l'Angle A; par la construction. Parant la Baze EG est égale à la Baze BC, par la 4. Prop. De plus, au Triangle DFG les deux Côtez DF, DG, sont égaux, par la construction. Donc (par la 5. Prop.) les Angles DFG, DGF, sur la Baze, s'ensuivent égaux. Or l'Angle EFG est plus grand que l'Angle DFG, qui n'est que sa partie; il est donc aussi plus grand que l'Angle DGF, & à plus forte raison que l'Angle EGF, qui n'est que partie de DGF. Cela étant: puis qu'au Triangle EFG, l'Angle EFG est plus grand que l'Angle EGF, il s'ensuit (par la 19. Prop.) que le Côté EG, qui soutient le plus grand Angle, est plus grand que le Côté EF, qui soutient le plus petit. Mais BC est égale à EG, comme il a été prouvé. Parant BC est plus grande que EF.

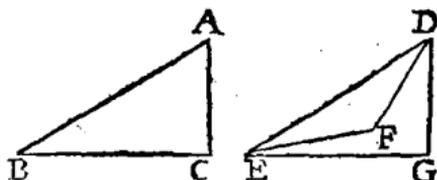
Pensons maintenant que la Ligne EG passe par le Point F, comme dans cette Figure;



auquel cas on montrera, comme ci-dessus, que EG est égale à BC. Or EG est plus grande que EF, qui n'est que sa partie; donc BC sera aussi plus grande que la Ligne EF.

Pensons en troisième lieu que la Ligne EG passe au dessous du Point F, comme ici; auquel cas la Ligne EG sera toujours prouvé égale à BC. Or

les Lignes  
DF, FE, qui  
sont menées  
dans le Triang-  
le DEG, sont  
plus petites  
que les deux



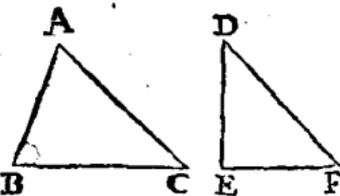
DG, GE, par la 21. Prop. Donc si de ces deux  
Tous inégaux on ôte les parties DF, DG, qui  
sont égales, par la construction : le reste EF s'en-  
suivra moindre que le reste EG ; & partant moi-  
dre que son égale BC. Ainsi de quelque façon que  
tombe la Ligne EG, cette Ligne, ou son égale  
BC, sera toujours plus grande que EF ; Ce qu'il  
falloit démontrer.

## PROPOSITION XXV.

### THEOREME XVI.

*Si deux Triangles ont deux Côtés égaux à  
deux Côtés, chacun au sien, & la Ba-  
ze plus grande que la Baze : ils auront  
aussi l'Angle compris de ces Côtés égaux  
plus grand que l'Angle.*

Je suppose que dans  
les deux Triangles  
ABC, DEF, le  
Côté AB soit égal au  
Côté DE, le Côté  
AC au Côté DF, &  
que la Baze BC soit  
plus grande que la Baze EF. Cela étant, je dis que  
l'Angle A est plus grand que l'Angle D.



Car

# LIVRE PREMIER. 55

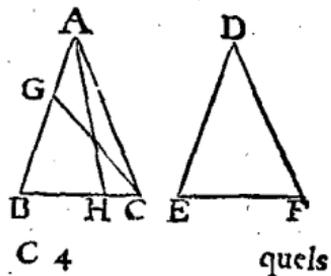
Car si cela n'étoit, il lui seroit égal, ou plus petit. Mais il ne peut lui être égal; parce qu'il s'ensuivroit que la Baze BC seroit égale à la Baze EF, par la 4. Prop. ce qui est contre la supposition. Il ne peut non plus être plus petit; car il s'ensuivroit que la Baze EF seroit plus grande que la Baze BC, par la Proposition precedente; ce qui est aussi contre la supposition. Donc l'Angle A est plus grand que l'Angle D; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXVI.

### THEOREME XVII.

*Si deux Triangles ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien; & un Côté égal à un Côté, sçavoir, ou celui aux extremittez duquel sont les Angles égaux, ou celui qui soutient l'un de ces Angles: ils auront aussi les deux autres Côtés égaux, chacun au sien, & l'autre Angle égal à l'autre Angle, & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.*

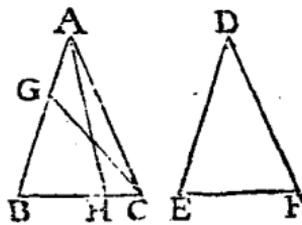
**J**E suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle E, l'Angle ACB à l'Angle F, & que le Côté BC soit égal au Côté EF, aux extremittez des-



## 56 ELEMENS D'EUCLIDE.

quels sont les Angles égaux. Cela étant, je dis que le Côté AB est égal au Côté DE; le Côté AC au Côté DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

Car si AB n'étoit pas égal à DE, il s'ensuivroit que l'un de ces deux Côtés seroit plus grand que l'autre; pensons, si vous voulez, que ce soit AB. En ce cas retranchez de AB la partie BG égale ED; puis tirez la Ligne CG. Maintenant comparant le Triangle GBC au Triangle DEF: le Côté GB sera égal au Côté ED par la construction; le Côté BC est égal au Côté EF, & l'Angle B égal à l'Angle E, par supposition. Donc (par la 4. Prop.) la Baze sera égale à la Baze, & l'Angle GCB égal à l'Angle F. Mais l'Angle ACB est supposé égal à l'Angle F; ainsi il s'ensuivroit que l'Angle GCB, & l'Angle ACB, seroient égaux entr'eux, c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Côté AB soit plus grand que le Côté DE. On prouvera de même que DE n'écarteroit



être plus grand que AB. Donc ces deux Côtés AB, DE, sont égaux. Ensuite de quoi, puis que, par la supposition, le Côté BC est égal à EF, & l'Angle B égal à l'Angle E: il s'ensuit (par la 4. Prop.) que la Baze AC est égale à la Baze DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF; Ce qu'il falloit démontrer.

Supposons maintenant que le Côté AB, qui soutient l'Angle ACB, & le Côté DE, qui soutient l'Angle F, sont égaux entr'eux. Cela étant, je dis que le Côté BC est égal à EF; le Côté AC égal à DF; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D; & enfin

fin

# LIVRE PREMIER. 57

fin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

Car si BC n'étoit pas égal à EF, il s'ensuivroit que l'un de ces deux Côtez seroit plus grand que l'autre. Pensons que ce soit BC, auquel cas retranchez de BC la partie BH égale à EF, & tirez la Ligne AH. Maintenant, comparant le Triangle ABH au Triangle DEF : le Côté BH sera égal au Côté EF, par la construction ; le Côté AB est égal au Côté DE, & l'Angle B égal à l'Angle E, par supposition. Partant ( par la 4. Prop. ) la Baze sera égale à la Baze, & l'Angle AHB sera égal à l'Angle F. Or l'angle ACB est supposé égal à l'Angle F. Donc l'Angle AHB seroit égal à l'Angle ACB, c'est à dire l'Angle extérieur à son opposé intérieur ; ce qui est impossible, par la 16. Prop. Il n'est donc pas vrai que le Côté BC soit plus grand que EF. On prouvera de même que EF n'est pas plus grand que BC. Partant ces deux Côtez BC, EF, sont égaux. Mais le Côté AB étant supposé égal à DE, & l'Angle ABC égal à l'Angle E : il s'ensuit ( par la 4. Prop. ) que la Baze AC est égale à la Baze DF ; que l'Angle BAC est égal à l'Angle D ; & enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF ; Ce qu'il falloit démontrer.

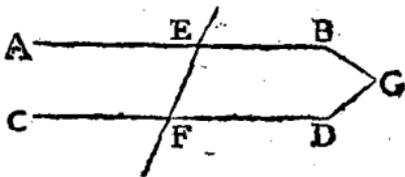


## PROPOSITION XXVII.

## THEOREME XVIII.

*Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les Angles opposez alternativement, égaux entr'eux : ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.*

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites ; & que la Ligne EF tombant dessus fait les deux Angles CFE, & FEB, qui sont alternativement opposez, égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.



Car si elles ne sont pas paralleles, ces deux Lignes étant prolongées d'une part ou d'autre se pourrout rencontrer ; pensons que ce soit vers G. En ce cas, les deux Lignes EG, FG, avec la Ligne EF, formeront le Triangle EFG, dont le Côté GF se trouve prolongé vers C. Partant ( par la 16. Prop.) l'Angle extérieur CFE fera plus grand que son opposez alternativement FEB ; ce qui est contre la supposition. Donc les deux Lignes AB, CD, sont paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXVIII.

## THEOREME XIX.

*Si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait l'Angle extérieur égal à son opposé intérieur de même part, ou bien les deux intérieurs de même part égaux à deux droits: ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.*

**J**E suppose que les deux Lignes AB, CD, sont droites, & que la Ligne EF tombant dessus, & les coupant aux Points G, & H, fasse l'un des Angles extérieurs, comme EGA, égal à l'Angle GHC, qui est son opposé intérieur de même part. Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car (par la 15. Prop.) l'Angle HGB est égal à l'Angle EGA. Mais l'Angle EGA est égal à l'Angle GHC, par suppo-

sition. Partant l'Angle HGB est égal à l'Angle GHC, qui est son opposé alternativement. D'où il suit, par la Proposition precedente, que les Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les deux Angles AGH, & GHC, qui sont les deux oppozés intérieurs de même part, soient égaux à deux droits.

## 60 ELEMENS D'EUCLIDE.

Ce'a étant, je dis encore que les deux Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car puis que les deux Angles AGH, & GHC, sont égaux à deux droits, il s'ensuit qu'ils sont égaux aux deux Angles AGH, & HGB, qui valent aussi deux droits, par la 13. Prop. Donc, si de ces deux Tours, qui sont égaux, l'on ôte l'Angle AGH, qui leur est commun: les Angles restans GHC, & HGB, qui sont opposez alternativement, seront égaux; & partant, par la Proposition precedente, les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

## R E M A R Q U E.

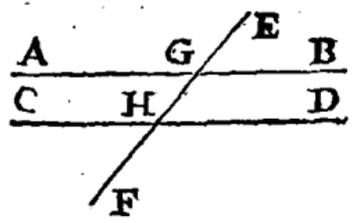
Si on supposoit que la Ligne AB inclinât tant soit peu par l'extremité A, vers la Ligne CD, & qu'ainsi l'Angle AGH devenant un peu plus petit, les deux Angles AGH, & GHC, pris ensemble, valussent moins que deux droits: en ce cas il est évident que les Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles; mais qu'étant prolongées elles se rencontreroient du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits. Et partant nous pouvons établir ici cette verité: Que si une Ligne droite tombant sur deux Lignes droites, fait les deux Angles interieurs de même part moindres que deux droits, ces deux Lignes ne sont point paralleles; & qu'étant prolongées elles se rencontreront du côté où ces deux Angles valent moins que deux droits,

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XX.

*Si une Ligne droite tombe sur deux Lignes droites paralleles : elle fera les Angles oppozes alternativement, égaux entr'eux; l'Angle exterieur égal à son oppozé interieur de même part; & les deux interieurs de même part égaux à deux droits.*

JE suppose que les deux Lignes droites AB, CD, soient paralleles, & que la Ligne droite EF tombe dessus, & les coupe aux Points



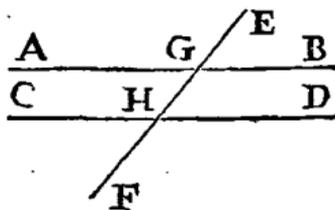
G, & H. Cela étant, je dis premierement que les Angles oppozes alternativement, tels que sont AGH, & GHD, sont égaux entr'eux.

Autrement il faudroit que l'un de ces deux Angles fût plus petit que l'autre. Pensons que ce soit AGH; auquel cas AGH pris avec GHC, vaudroit moins que GHD pris avec le même GHC. Mais GHD, & GHC, valent deux droits, par la 13. Prop. Partant AGH, & GHC, vaudront moins que deux droits. Et ainsi il s'enfuyroit, par la remarque precedente, que ces Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles; ce qui est contre la supposition. L'Angle AGH ne peut donc pas être plus

## 62 ELEMENS D'EUCLIDE.

petit que l'Angle GHD. On prouvera de même que l'Angle GHD ne peut pas être plus petit que l'Angle AGH. Donc ces deux Angles sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle extérieur EGB est égal à son opposé intérieur de même part, sçavoir GHD.



Car ( par la 15. Prop. ) EGB est égal à

AGH, qui lui est opposé au sommet. Or, par ce qui vient d'être prouvé, AGH est égal à GHD. Partant EGB est aussi égal à GHD; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis enfin que les deux Angles intérieurs de même part, comme BGH, & GHD, sont égaux à deux droits.

Car, par ce qui vient d'être prouvé, l'Angle GHD est égal à l'Angle AGH. Et partant GHD pris avec HGB, vaudra autant que AGH pris avec HGB. Or, par la 13. Prop. AGH, & HGB, valent deux droits. Donc GHD, & HGB, valent aussi deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXX.

### THEOREME XXI.

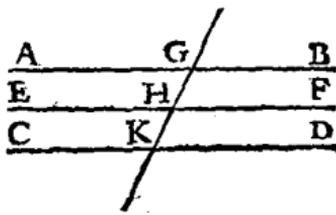
*Les Lignes droites paralleles à une même, sont paralleles entr'elles.*

**J**E suppose que les Lignes AB, CD, sont paralleles à la Ligne EF. Cela étant, je dis que ces Lignes sont paralleles entr'elles. Pour le prouver,

Tirez

# LIVRE PREMIER. 63

Tirez la Ligne droite GK, qui coupe ces trois Lignes aux Points G, H, K. Ensuite de quoi, puis que les Lignes AB, EF, sont paralleles, par supposition, & que GK tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les Angles AGH, & GHF, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux. De même, puis que les Lignes EF, CD, sont aussi supposées paralleles, & que la même Ligne GK tombe dessus: il s'ensuit (par la même



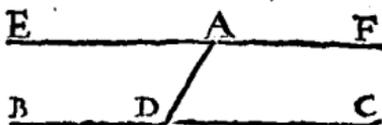
Prop.) que l'Angle extérieur GHF est égal à son opposé intérieur HKD. Ainsi les deux Angles AGH, & HKD, qui sont égaux à un même, sont égaux entr'eux. Or ces Angles sont opposez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXI.

### PROBLEME X.

*Par un Point donné mener une Ligne droite parallele à une Ligne droite donnée.*

Je suppose que le Point donné soit A, & la Ligne droite donnée, BC; & je propose de mener par le Point A une Ligne, qui soit parallele à BC. Pour le faire,

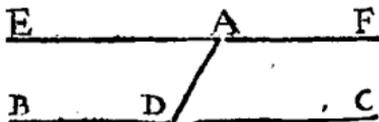


Tirez du Point A à tel Point qu'il vous plaira de la

## 64 ELEMENS D'EUCLIDE.

la Ligne BC, la Ligne droite AD, qui faitte avec BC un Angle tel qu'il vous plaira, comme ADC.

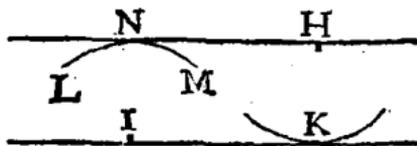
Menez ensuite par le Point A la Ligne droite EAF, qui fasse avec AD l'Angle EAD égal à l'Angle ADC. Cela étant, je dis que la Ligne EF est parallele à BC.



Car les Angles EAD, ADC, qui sont opposez alternativement, sont égaux, par la construction. Partant (par la 27. Prop.) les Lignes EF, BC, sont paralleles; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

### R E M A R Q U E.

Pratique de cette Proposition. Posons que la Ligne IK soit donnée, & que le Point donné soit H. Mettez le pied du Compas au Point H, & l'ouvrez de telle sorte, qu'en décrivant un Arc de Cercle, il raze la Ligne IK. Cela fait, transportez le Compas ainsi ouvert à un Point de la Ligne IK, comme I, & décrivez de la part du Point



H, l'Arc LNM; puis tirez par le Point H une Ligne droite qui raze l'Arc LNM; & alors cette Ligne NH sera parallele à la Ligne IK.

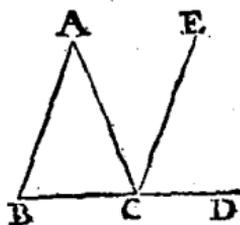


## PROPOSITION XXXII.

## THEOREME XXI.

*En tout Triangle, un des Côtés étant prolongé, l'Angle extérieur est égal aux deux oppozés intérieurs; & les trois Angles d'un Triangle sont égaux à deux droits.*

Je suppose que du Triangle ABC le Côté BC soit prolongé vers D. Cela étant, je dis premièrement que l'Angle extérieur ACD est égal aux deux oppozés intérieurs A, & B, pris ensemble. Pour le prouver,



Menez par le Point C, la Ligne droite CE parallèle à AB, par la Prop. précédente. Cela posé: puis que les Lignes AB, CE, sont parallèles, & que la Ligne AC tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que l'Angle ACE est égal à l'Angle A, qui lui est opposé alternativement.

De même, puis que les Lignes AB, CE, sont parallèles, & que la Ligne BD tombe dessus: il s'ensuit (par la même 29. Prop.) que l'Angle extérieur ECD est égal à son opposé intérieur B. Et partant l'Angle total AGD est égal aux deux Angles A, & B; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les trois Angles du Triangle ABC sont égaux à deux droits.

Car il vient d'être prouvé que les deux Angles A, & B,

## 66 ELEMENS D'EUCLIDE.

& B, sont égaux à l'Angle ACD. Or l'Angle ACD, avec l'Angle ACB, sont égaux à deux droits, (par la 13. Prop.) Donc les deux Angles A, & B, avec l'Angle ACB, sont aussi égaux à deux droits; Ce qu'il falloit démontrer.

### I. COROLLAIRE.

Il suit premièrement de cette Proposition, que les trois Angles d'un Triangle pris ensemble sont égaux aux trois Angles d'un autre Triangle, pris aussi ensemble. Car les trois Angles de l'un valent deux droits, de même que les trois Angles de l'autre.

### II. COROLLAIRE.

Il suit en second lieu, que si deux Angles d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle, le troisième sera aussi égal au troisième.

### III. COROLLAIRE.

Il suit en troisième lieu, que si l'un des Angles d'un Triangle est droit, les deux autres valent autant qu'un droit.

### IV. COROLLAIRE.

Il suit enfin, que si deux Angles d'un Triangle sont connus, le troisième sera aussi connu; car ce troisième est le reste de deux droits.

### REMARQUE.

Par cette Proposition nous pouvons déterminer à combien d'Angles droits sont égaux tous les Angles d'une Figure rectiligne. Car si de l'un des Angles de

## LIVRE PREMIER. 67

de cette Figure l'on tire à tous les autres Angles autant de Lignes droites qu'il est possible de former de Triangles: cette Figure sera divisée en plusieurs Triangles, les Angles de chacun desquels valant deux droits, l'on sçaura la valeur des Angles de cette Figure, puis qu'ils sont les mêmes que ceux de tous ces Triangles. Ainsi parce qu'une Figure de quatre Côtés se peut résoudre en deux Triangles: il s'ensuit que ses quatre Angles valent quatre Angles droits. Et parce qu'une Figure de cinq Côtés se peut résoudre en trois Triangles, ses cinq Angles valent six Angles droits &c. Et d'autant que toute Figure de plusieurs Côtés se peut résoudre en autant de Triangles qu'elle a de Côtés, moins deux: nous devons conclure que tous les Angles d'une Figure rectiligne sont égaux à deux fois autant d'Angles droits qu'elle a de Côtés, moins deux. Ainsi les Angles d'un Decagone valent 16 Angles droits; ceux d'un Dodecagone valent vingt Angles droits; & ceux d'un Chiliagone, ou d'une Figure de mille Côtés, valent 1996 Angles droits.

### PROPOSITION XXXIII.

#### THEOREME XXIII.

*Si deux Lignes droites sont égales & parallèles, les Lignes droites qui joignent leurs extremités de même part, sont aussi égales & parallèles.*

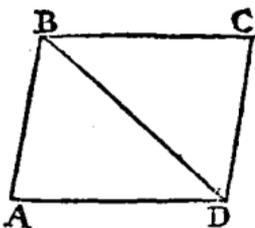
JE suppose que les Lignes AD, BC, sont égales & parallèles, & que leurs extremités sont jointes de même part par les Lignes droites AB, DC. Cela étant, je dis que ces Lignes AB, DC, sont aussi

## 68 ELEMENS D'EUCLIDE.

aussi égales & paralleles. Pour le prouver,

Du Point B au Point D tirez la Ligne droite BD. Cela posé, puis que les Lignes droites AD, BC, sont paralleles, & que la Ligne BD tombe dessus: il s'en suit (par la 29. Prop.) que les Angles ADB, & CBD, qui sont opposez alternativement, sont

égaux entr'eux. Comparant ensuite les Triangles ABD, & CBD, le Côté AD est égal au Côté BC, par supposition; le Côté BD est commun; l'Angle ADB est égal à l'Angle



CBD, comme il vient d'être prouvé. Partant la Baze AB est égale à la Baze CD, & l'Angle ABD égal à l'Angle CDB par la 4. Prop. Or ces deux Angles ABD, & CDB, sont opposez alternativement. Donc (par la 27. Prop.) les Lignes AB, DC, sont aussi paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXIV.

### THEOREME XXIV.

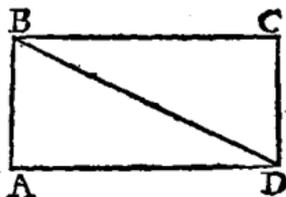
*En tout Parallelogramme les Côtés & les Angles opposez sont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux également.*

**J**E suppose que AC est un Parallelogramme, & que BD est la Diagonale. Cela étant, je dis que le Côté AB est égal à son oppose CD; le Côté AD égal à son oppose BC; que l'Angle A est égal à son oppose C; & que l'Angle ABC est égal à son

## LIVRE PREMIER. 69

à son opposé ADC ; & enfin que le Triangle ADB est égal au Triangle CDB , & qu'ainsi la Diagonale coupe le Parallelogramme en deux également.

Car puis que les Lignes AB, CD, sont les Côtez opposés d'un même Parallelogramme , il s'ensuit qu'elles sont parallèles. Et par conséquent la Ligne BD tombant des-



sus ; les Angles ABD, & BDC, qui sont opposés alternativement, sont égaux entr'eux, par la 29. Prop. Par la même raison, les deux Angles ADB, & CBD, qui sont opposés alternativement, sont aussi égaux entr'eux. Ainsi les deux Triangles ABD, BDC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & le Côté BD, aux extremités duquel sont les Angles égaux, est commun. Partant ( par la 26. Prop. ) les deux autres Côtez AB, AD, sont égaux aux deux autres Côtez CD, CB, chacun au sien, sçavoir AB à CD, & AD à CB ; l'Angle A est égal à l'Angle C ; & tout le Triangle ABD est égal à tout le Triangle CBD. Enfin puis que les deux Angles ABD, & CBD, ont été séparément prouvez égaux aux deux Angles CDB, & ADB : il est évident que l'Angle total ABC est égal à l'Angle total ADC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

### C O R O L L A I R E.

Il suit de cette Proposition, qu'en tout Parallelogramme, si un Angle est droit, les trois autres le sont aussi. Car puis que les deux Angles sur un même Côté sont égaux à deux droits : si l'un est droit, l'autre l'est aussi ; & par conséquent aussi leurs opposés.

P R O-

## PROPOSITION XXXV.

## THEOREME XXV.

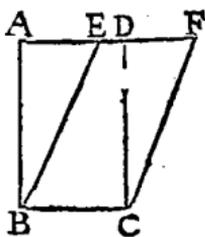
*Les Parallelogrammes constituez sur une même Baze, & entre mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.*

JE suppose que les Parallelogrammes AC, BF, sont sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AF, BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Cette supposition peut avoir trois cas. Car ou le Point E tombera entre A, & D; où il tombera sur le Point D; ou au delà du Point D.

Au premier cas, le Côté AD est égal au Côté BC, qui est son opposé dans le Parallelogramme AC. De même, le Côté EF est égal au même Côté BC, qui est aussi son opposé dans le Parallelogramme BF. Donc AD, & EF, sont égaux. Et si l'on en ôte la partie ED, qui leur est commune: les restes AE, DF, seront égaux entr'eux. De plus, dans le même Parallelogramme AC, le Côté AB est égal au Côté DC, qui est son opposé. Mais puis qu'ils sont parallèles, & que la Ligne AF tombe dessus: l'Angle extérieur CDF est égal à son opposé intérieur BAE, par la 29. Prop. D'où il suit que les deux Triangles BAE, CDF, ont deux Côtés égaux à deux Côtés, chacun au sien, & l'Angle compris de ces Côtés égal à l'Angle; & parant

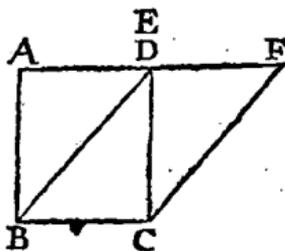
( par



# LIVRE PREMIER. 71

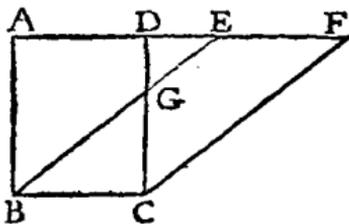
( par la 4. Prop. ) ces deux Triangles BAE, CDF, sont égaux entr'eux. C'est pourquoi si on leur ajoute à chacun le Trapéze EBCD : il s'enfuivra que le Triangle BAE avec ce Trapéze , sera égal au Triangle CDF avec ce même Trapéze ; c'est à dire le Parallelogramme AC au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

Au second cas, où le Point E tombe sur le Point D, on prouvera de même que le Côté AD est égal au Côté EF ; le Côté AB au Côté DC ; que l'Angle extérieur CDF est égal à son opposé intérieur BAE ; & que le Triangle BAE est égal au Triangle CDF. C'est pourquoi si on leur ajoute une chose commune, à sçavoir le Triangle EBC : il s'enfuivra que le Parallelogramme AC sera égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.



Au troisième cas, on prouvera de même que AD est égal à EF ; & en leur ajoutant la partie commune DE, la route AE sera égale à la route DF. On prouvera aussi que le Côté AB est égal au Côté DC ; que l'Angle extérieur CDF est égal à son opposé intérieur BAE ; & que le Triangle BAE est égal au Triangle CDF. Donc si on ôte de ces deux Triangles, le Triangle commun DGE : le Trapéze ABGD restera égal au Trapéze EGCF. A quoi si l'on ajoute le Triangle GBC, il s'enfuivra que le Trapéze ABGD avec ce Triangle, sera égal au Trapéze EGCF avec ce même Triangle ; c'est à dire que le Parallelogramme AC sera égal

égal



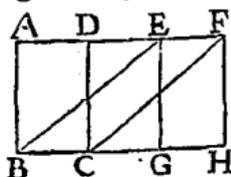
égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXVI.

### THEOREME XXVI.

*Les Parallelogrammes constituez sur Bases égales, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.*

Je suppose que les Parallelogrammes AC, EH, sont constituez sur Bases égales, sçavoir BC, GH, & entre mêmes Paralleles AF, BH. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Menez du Point B au Point E la Ligne BE, & du Point C au Point F la Ligne CF. Cela posé, BC est égal à GH, par supposition ; EF est aussi égal à GH, étant les Côtes opposés d'un même Parallelogramme. Donc BC est égal à EF. D'ailleurs BC, EF, sont supposées paralleles. Donc (par la 33. Prop.) les Lignes droites BE, CF, qui joignent leurs extrémités, sont aussi égales & paralleles. Et par conséquent la Figure BF est un Parallelogramme. Or ce Parallelogramme est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles, que le Parallelogramme AC. Donc (par la Prop. precedente) les deux Parallelogrammes AC, BF, sont égaux entr'eux. Mais ce même Parallelogramme BF, & le Parallelogramme EH, étant sur une même Baze, à sçavoir EF, & entre mêmes Paralleles, sont aussi égaux entr'eux. Et partant les Parallelogrammes AC,

LIVRE PREMIER. 73

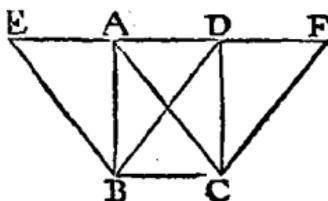
AC, EH, qui sont égaux au Parallelogramme BF, sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXVII.

*Les Triangles constituez sur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, sont égaux entr'eux.*

JE suppose que les Triangles ABC, DBC, sont sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC. Cela étant, je dis que ces deux



Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

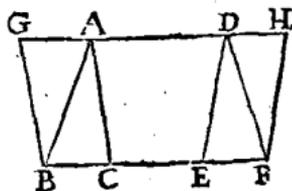
Menez par le Point B la Ligne droite BE parallele à AC, & par le Point C la Ligne droite CF parallele à BD, par la 31. Prop. Cela posé, il s'ensuit que les Figures AB, DC, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DC, sont les Diagonales. Et partant (par la 34. Prop.) les Triangles ABC, DBC, en sont les moitez. Or les Parallelogrammes AB, DC, étant sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles EF, BC, sont égaux entr'eux, par la 35. Prop. Donc les Triangles ABC, DBC, qui en sont les moitez, sont aussi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXVIII.

## THEOREME XXVIII.

*Les Triangles constituez sur Bases égales,  
& entre mêmes Paralleles, sont égaux  
entr'eux:*

**J**E suppose que les Triangles ABC, DEF, sont sur Bases égales, sçavoir BC, EF, & entre mêmes Paralleles, GH, BF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Menez par le point B la Ligne droite BG parallèle à AC; & par le Point F la Ligne droite FH parallèle à ED, par la 31. Prop. Cela posé, il s'en suit que les Figures AB, DF, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DF, sont les Diagonales. Et passant ( par la 34. Prop. ) les Triangles ABC, DEF, en sont les moitez. Or les Parallelogrammes AB, DF, étant sur des Bases égales BC, EF, & entre mêmes Paralleles BF, GH, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. Donc les Triangles ABC, DEF, qui sont leurs moitez, sont aussi égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXIX.

## THEOREME XXIX.

*Les Triangles égaux constituez sur une même Baze & de même part, sont entre mêmes Paralleles.*

Je suppose que les Triangles  $ABC$ ,  $DBC$ , sont égaux ; qu'ils sont constituez sur une même Baze, à sçavoir  $BC$  ; & qu'ils sont de même part.

Cela étant, je dis que ces Triangles sont entre mêmes Paralleles ;

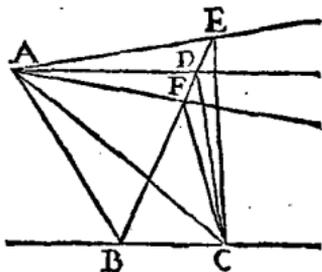
c'est à dire que si par le Point  $A$ , & le Point  $D$ , on mène la Ligne droite  $AD$ , cette Ligne sera parallele à  $BC$ . En voici la preuve :

Car si elle n'étoit pas parallele, on pourroit par le Point  $A$  mener une autre Ligne parallele à  $BC$ , par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de  $AD$ . Pensons donc premièrement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait ici  $AE$ . Puis prolongez la Ligne  $BD$ , jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne  $AE$  au Point  $E$ , & tirez la Ligne  $CE$ . Cela posé, les deux Triangles  $ABC$ ,  $EBC$ , étant sur une même Baze & entre mêmes Paralleles, seroient égaux entr'eux, par la 37. Prop. Mais par la supposition, le Triangle  $DBC$  est égal au même Triangle  $ABC$ . Donc le Triangle  $EBC$  seroit égal au Triangle  $DBC$ , qui n'est que la partie ; ce qui est impossible. Il est donc

## 76 ELEMENS D'EUCLIDE.

impossible qu'une Ligne menée par le Point A parallèle à la Ligne BC, passe au dessus de la Ligne AD.

Penfons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait ici AF, & menez la Ligne droite CF. Cela posé, le Triangle FBC seroit égal au Triangle ABC, par la 37. Prop. Mais



par la supposition, le Triangle DBC est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle FBC seroit égal au Triangle DBC, c'est à dire, la partie au Tout; ce qui est impossible. Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD; ni au dessus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD est parallèle à BC; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XL.

### THEOREME XXX.

*Les Triangles égaux constituez sur Bases égales, & de même part, sont entre mêmes parallèles.*

JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont égaux; qu'ils sont constituez sur Bases égales, à sçavoir BC, EF; & qu'ils sont de même part. Cela étant, je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles; c'est à dire que si par le Point A, & par le Point D, on mène la Ligne droite AD, cette Ligne sera parallèle à BF. En voici la preuve:

Car

# LIVRE PREMIER. 77

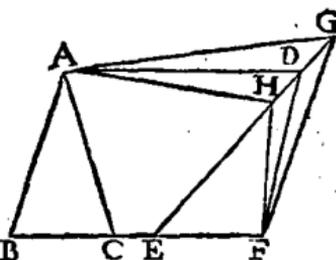
Car si elle n'étoit parallele, on pourroit par le Point A mener une autre Ligne parallele à BF, par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de AD. Pensons donc premierement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait ici AG. Puis prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rençontre la Ligne AG au Point G, & menez la Ligne FG. Cela posé, les deux Triangles ABC, GEF, étant sur Bazes égales BC, EF, & entre mêmes Paralle-

les, seroient égaux entr'eux, par la 38. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DEF est égal au même Triangle ABC.

Donc le Triangle GEF

seroit égal au Triangle DEF, qui n'est que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'une Ligne menée par le Point A parallele à BF, passe au dessus de AD.

Pensons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait ici AH, & menez la Ligne droite FH. Cela posé, le Triangle HEF seroit égal au Triangle ABC, par la 38. Prop. Mais par la supposition, le Triangle DEF est égal au même Triangle ABC. Donc le Triangle HEF seroit égal au Triangle DEF, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD; ni au dessus, comme il a été prouvé. Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD. Et partant AD est parallele à BF; Ce qu'il falloit démontrer.

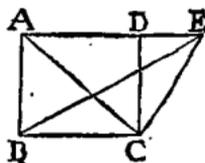


## PROPOSITION XLII.

## THEOREME XXXI.

*Si un Parallelogramme & un Triangle sont constituez sur une même Baze, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme sera double du Triangle.*

JE suppose que le Parallelogramme AC, & le Triangle EBC, soient constituez sur une même Baze, à sçavoir BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC. Cela étant, je dis que le Parallelogramme est double du Triangle. Pour le prouver,



Menez la Diagonale AC. Cela posé, puis que les Triangles ABC, EBC, sont sur la même Baze BC, & entre mêmes Paralleles AE, BC, ils sont égaux, par la 37. Prop. Or le Triangle ABC est moitié du Parallelogramme AC, d'autant que la Diagonale AC le coupe en deux également, par la 34. Prop. Donc le Triangle EBC est aussi moitié du Parallelogramme AC. Et par consequent le Parallelogramme AC est double du Triangle EBC; Ce qu'il falloit démontrer.

## REMARQUE.

Par là il est aussi évident que si un Parallelogramme & un Triangle étoient constituez sur Bazes égales, & entre mêmes Paralleles, le Parallelogramme seroit double du Triangle.

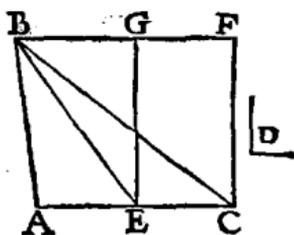
P R O-

## PROPOSITION XLII.

## PROBLEME XI.

*Décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

JE suppose que l'on donne le Triangle ABC, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propose de décrire un Parallelogramme égal au Triangle ABC, & qui ait un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,



Coupez l'un des Côtez de ce Triangle, par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point tirez (par la 23. Prop.) la Ligne EG, qui fasse avec EC l'Angle CEG égal à l'Angle donné D. Tirez aussi (par la 31. Prop.) du Point C la Ligne CF parallele à EG. Enfin menez par le Point B la Ligne BF parallele à AC. Cela posé, je dis que la Figure EF est un Parallelogramme; que ce Parallelogramme est égal au Triangle ABC; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,

Puis que CF est parallele à EG, & que GF est parallele à EC, il est évident que la Figure EF est un Parallelogramme, qui a l'Angle CEG égal à l'Angle donné D, par la construction; si bien qu'il reste seulement à prouver qu'il est égal au Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point B au Point E menez la Ligne droite BE. Cela posé: puis que les Triangles BAE, BEC,

## 80 ELEMENS D'EUCLIDE.

font sur des Bazes égales, AE, EC, & entre mêmes Paralleles, BF, AC, ils sont égaux entr'eux, par la 38. Prop. Par conséquent le Triangle ABC, qui est composé de ces deux Triangles, est double du Triangle BEC. Mais le Parallelogramme EF est aussi double de ce même Triangle BEC, par la Prop. précédente, puis qu'il est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles. Donc le Triangle ABC, & le Parallelogramme EF, qui sont doubles d'une même chose, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

### R E M A R Q U E.

La pratique de cette Proposition consiste seulement à faire un Parallelogramme sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles. C'est pourquoi nous pouvons établir comme une verité Geometrique, que tout Parallelogramme constitué sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles, est égal à ce Triangle,

## PROPOSITION XLIII.

### T H E O R E M E XXXII.

*En tout Parallelogramme, les Supplemens des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre sont égaux entr'eux.*

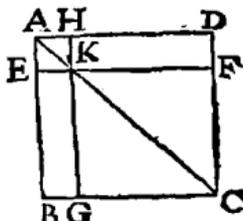
**J**E suppose que la Figure AC est un Parallelogramme, dont le Diametre est AC, alentour duquel sont les Parallelogrammes AK, KC. Cela étant, je dis que les Supplemens KB, KD, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Puis

# LIVRE PREMIER. 81

Puis que ( par la 34. Prop. ) le Diametre AC coupe le Parallelogramme AC en deux également , le Triangle ABC est égal au Triangle ACD. De même , les Parallelogrammes AK , KC , étant

coupez en deux également par leurs Diametres AK, KC, le Triangle AEK est égal au Triangle AKH, & le Triangle KGC égal au Triangle KCF. Si donc des Triangles ABC, ACD, qui sont égaux,



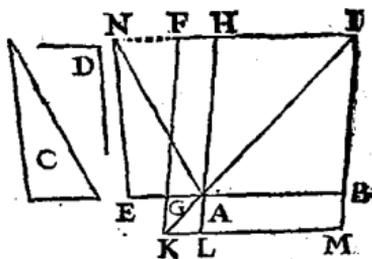
nous ôtons choses égales, sçavoir, du Triangle ABC les deux Triangles AEK, KGC, & du Triangle ACD les deux Triangles AKH, KCF: les restes, qui sont les Supplemens KB, KD, seront égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XLIV.

### PROBLEME XII.

*Sur une Ligne droite donnée décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

JE suppose qu'on donne la Ligne droite AB, le Triangle C, & l'Angle rectiligne D. Cela étant, je propose de décrire sur AB un Paralle-



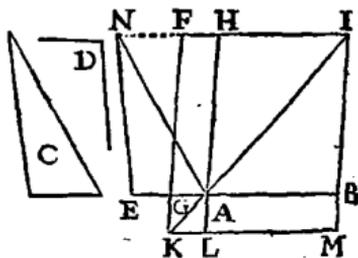
logramme égal au Triangle C, & qui ait un

## 82 ELEMENS D'EUCLIDE.

Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,

Prolongez AB vers E; & après avoir fait AE égale à un des Côtez du Triangle C, achevez (par la 22. Prop.) de décrire le Triangle AEN égal au Triangle C. Puis (par la 42. Prop.) décrivez le Parallelogramme AF égal au Triangle AEN, & qui ait l'Angle HAG égal à l'Angle D. Prolongez après cela FG, & HA, indefiniment vers K, & vers L. Prolongez de même FH indefiniment vers I; & ayant mené par le Point B la Ligne IBM parallèle à FG, (par la 31. Prop.) tirez du Point I, où les Lignes IBM, & FHI, se rencontrent, la Ligne droite IAK,

si longue, qu'elle rencontre la Ligne FGK au Point K. Enfin menez par le Point K la Ligne droite KLM parallèle à AB, par la



31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure AM, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Parallelogramme; que ce Parallelogramme est égal au Triangle donné C; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D. Pour le prouver,

Puis que les Lignes AB, LM, & les Lignes AL, BM, sont parallèles, par la construction: il s'en suit que AM est un Parallelogramme. Et puis que FI, KM, sont parallèles à AB, elles sont parallèles entr'elles, par la 30. Prop. De plus, les Lignes IBM, FGK, ayant aussi été faites parallèles, il est évident que la Figure FM est un Parallelogramme; dans lequel les Parallelogrammes AM, AF, étant les Suppléments des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, il s'en suit qu'ils sont égaux entr'eux, par la 43. Prop. Or, par la construction, AF est égal au Triangle AEN. Donc AM est aussi égal au Triangle AEN. Mais ce Triangle a été fait

égal

# LIVRE PREMIER. 83

égal au Triangle C. D'où il suit que le Parallelogramme AM est aussi égal au Triangle C. D'ailleurs, ( par la 15. Prop. ) l'Angle LAB est égal à l'Angle HAG, qui a été fait égal à l'Angle D. Et partant l'Angle LAB est aussi égal à l'Angle D ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

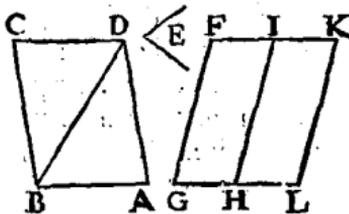
## PROPOSITION XLV.

### PROBLEME XIII.

*Décrire un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & qui ait un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

JE suppose qu'on donne la Figure rectiligne ABCD, & l'Angle rectiligne E. Cela étant, je propose de décrire un Parallelogramme égal à la Figure ABCD, qui ait un Angle égal à l'Angle E. Pour le faire,

Menez la Ligne droite BD, afin de résoudre la Figure ABCD en deux Triangles. Puis, ( par la 42. Prop. ) décrivez le Parallelogramme IG égal à l'un des Triangles, par exemple à ABD, & qui ait

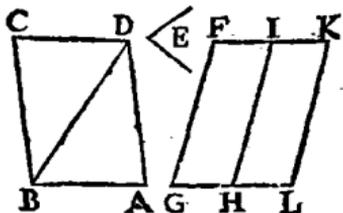


l'Angle FGH égal à l'Angle E. Ensuite ( par la 44. Prop. ) décrivez sur la Ligne HI le Parallelogramme IL égal au second Triangle BCD, & qui ait aussi l'Angle IHL égal à l'Angle E. Cela posé, je dis que la Figure FL, composée de ces deux Parallelogrammes, est un Parallelogramme égal à la Figure ABCD ; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné E. Pour le prouver,

# 84 ELEMENS D'EUCLIDE.

Les Parallelogrammes qui sont les parties de la Figure FL, étant égaux aux Triangles qui sont les parties de la Figure ABCD, il est évident que la Figure FL est égale la Figure ABCD. Deplus, la Figure FL a l'Angle FGL égal à l'Angle donné E. Il ne reste donc plus qu'à prouver que les deux Parallelogrammes IG, IL, composent ensemble un seul Parallelogramme. Pour le prouver,

Les deux Côtes FG, KL, sont égaux & paralleles, étant égaux & paralleles à IH. Supposé donc que FK, & GL, soient des Lignes droites, elles seront aussi égales & paralleles entr'elles, par la 33. Prop. puis qu'elles joignent des Lignes droites égales & paralleles. Or je prouve que les Lignes FK, & GL, sont des Lignes droites. Premièrement, l'Angle G, & l'Angle IHL, sont égaux entr'eux, par la construction. Si donc on leur ajoute l'Angle commun GHI, les deux Angles G, & GHI, seront



égaux aux deux Angles qui ont le Point H pour sommet. Mais les deux Angles G, & GHI, sont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Donc les deux Angles qui ont le Point H pour sommet, sont égaux à deux droits. Et partant les Lignes GH, & LH, qui concourent à un même Point, sont une Ligne droite. De même, l'Angle K, & l'Angle FIH, sont égaux entr'eux, puis qu'ils sont opposés aux Angles IHL, & G, qui sont égaux entr'eux. Si donc on leur ajoute l'Angle commun HIK, les deux Angles K, & HIK, seront égaux aux deux Angles qui ont le Point I pour sommet. Mais les deux Angles K, & HIK, sont égaux à deux droits, par la 29. Prop. Par conséquent les deux Angles qui ont le Point I pour sommet, sont égaux à deux droits; & partant les Lignes FI, &

KI,

# LIVRE PREMIER. 85

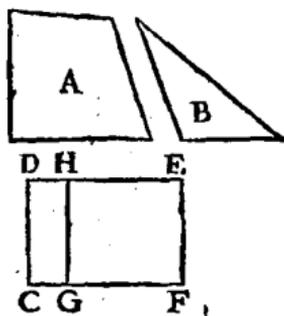
KI, qui concourent à un même Point, font une Ligne droite. D'où il suit que FL est un Parallelogramme; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

## I. REMARQUE.

Si la Figure donnée eût eu plus de quatre Côtés, il auroit fallu la diviser en tous les Triangles dont elle auroit pû être composée. Puis, après avoir fait (comme il vient d'être dit) le Parallelogramme FGLK égal à deux de ces Triangles: il auroit encore fallu décrire sur LK un Parallelogramme égal à un autre Triangle, & ayant un Angle au Point K égal à l'Angle donné E; & ainsi continuer autant de fois de suite qu'il y auroit eu de Triangles.

## II. REMARQUE.

Ensuite de la Proposition précédente, si deux Figures rectilignes inégales sont données, l'on pourra trouver l'excez de la plus grande pardessus la plus petite. Par exemple, si les Figures A, & B, sont données, entre lesquelles A est plus grande que B: il n'y aura qu'à décrire le Parallelogramme CE égal à la Figure A; puis décrire sur le Côté CD le Parallelogramme CH égal à la Figure B. Car alors il est évident que le Parallelogramme GE sera l'excez de la Figure A pardessus la Figure B.



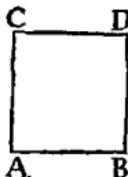
## PROPOSITION XLVI.

## PROBLEME XIV.

*Sur une Ligne droite donnée décrire  
un Quarré.*

**J**E suppose que la Ligne droite donnée soit AB, & je propose de décrire sur cette Ligne un Quarré. Pour le faire,

Elevez au Point A la Ligne droite AC perpendiculaire à AB, par la 11. Prop. & faites AC égale à AB. Puis menez par le Point C la Ligne CD parallèle à AB, & par le Point B la Ligne BD parallèle à AC, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure ACDB, qui est décrite sur la Ligne droite donnée AB, est un Quarré. Pour le prouver,



Puis que ACDB est une Figure de quatre Côtés, dont les oppozés ont été faits parallèles, il s'ensuit que c'est un Parallelogramme. Et par conséquent ses Côtés oppozés sont égaux, par la 34. Prop. Aiusi CD est égal à AB. Mais AC est aussi égal à AB, par la construction. Donc CD est aussi égal à AC. De même, BD est égal à AC; & parrant BD est aussi égal aux deux autres Côtés AB, CD. D'où il suit que le Parallelogramme AD a ses quatre Côtés égaux. D'ailleurs, puis que les Lignes AB, CD, sont parallèles, & que AC tombe dessus: il s'ensuit (par la 29. Prop.) que les deux Angles intérieurs A, & C, sont égaux à deux droits. Or l'Angle A est droit, par la construction. Donc l'Angle C est aussi droit. Et parce qu'en tout Parallelogramme les Angles oppozés sont égaux, les Angles B, & D, qui sont oppozés à des Angles droits,

# LIVRE PREMIER. 87

droits, sont aussi droits. Et par conséquent le Parallelogramme AD est un Quarré ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

## I. REMARQUE.

Il s'ensuit de là, que tout Parallelogramme, qui a deux Côtez égaux alentour d'un Angle droit, est un Quarré.

## II. REMARQUE.

Il suit aussi de là, qu'en tout Parallelogramme un Angle étant droit, les trois autres le sont aussi.

## III. REMARQUE.

Comme les Grandeurs qui conviennent sont égales entr'elles, il suit aussi assez évidemment, que si deux Lignes sont égales, leurs Quarrez seront aussi égaux ; & que si deux Quarrez sont égaux, les Lignes sur lesquelles ils sont décrits, seront aussi égales.

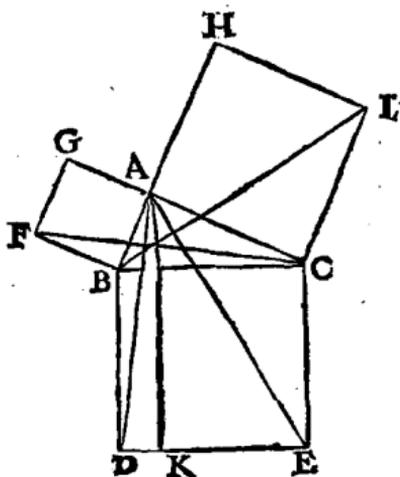


## PROPOSITION XLVII.

## THEOREME XXXIII.

*Aux Triangles Rectangles, le Carré du Côté qui soutient l'Angle droit, est égal aux Carrés des deux autres Côtés.*

JE suppose que le Triangle ABC est Rectangle; que l'Angle BAC est droit; & que sur les trois Côtés on ait décrit les trois Carrés BE, FA, AI. Cela étant, je dis que le Carré BE, décrit sur le Côté BC qui soutient l'Angle



droit BAC, est égal aux deux autres Carrés FA, AI, décrits sur les deux autres Côtés AB, AC. Pour le prouver,

Menez par le Point A la Ligne droite AK parallèle à BD, ou à CE; & menez les Lignes droites AD, AE, CF, BI. Cela posé: puis que l'Angle BAC est droit, par supposition, & que l'Angle BAG, qui est un des Angles du Carré FA, est aussi droit: il s'ensuit (par la 14. Prop.) que les Lignes GA, AC, concourent directement. De même, puis que l'Angle CAB est droit, & que l'Angle CAH du Carré AI, est aussi droit: il s'ensuit

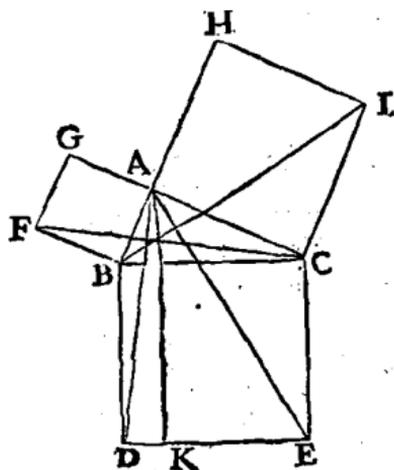
## LIVRE PREMIER. 89.

s'enfuit aussi que les Lignes BA, AH, concourent directement. Maintenant, puis que les Lignes BF, GC, qui sont les Côtés oppoſez du Parallelogramme ou du Quarré FA, ſont paralleles, il s'enfuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme FA eſt double du Triangle FBC, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une même Baze FB, & entre mêmes Paralleles FB, GC. De même, puis que les Lignes AK, BD, ſont paralleles, par la conſtruction, il s'enfuit que le Parallelogramme BK eſt double du Triangle ABD, étant tous deux conſtituez ſur la même Baze BD, & entre mêmes Paralleles BD, AK. Comparant maintenant le Triangle CBF avec le Triangle ABD, le Côté CB du premier, eſt égal au Côté BD du ſecond, puis que ce ſont les Côtés d'un même Quarré BE. Par la même raiſon, le Côté BF du premier, eſt égal au Côté AB du ſecond. Si bien que ces deux Triangles ont deux Côtés égaux à deux Côtés, chacun au ſien. De plus, l'Angle CBF, composé d'un Angle droit & de l'Angle ABC, eſt égal à l'Angle ABD, qui eſt auſſi composé d'un Angle droit & du même Angle ABC. Donc (par la 4. Prop.) le Triangle CBF eſt égal au Triangle ABD. Et ainſi le Parallelogramme BK, & le Quarré FA, qui ſont doubles de choſes égales, ſont égaux entr'eux, par le 6. Ax. De même, puis que les Lignes IC, HB, qui ſont les Côtés oppoſez du Parallelogramme ou du Quarré AI, ſont paralleles: il s'enfuit (par la 41. Prop.) que le Parallelogramme AI eſt double du Triangle ICB. De même, puis que les Lignes AK, CE, ſont paralleles, par la conſtruction: il s'enfuit que le Parallelogramme CK eſt double du Triangle ACE, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une même Baze CE, & entre mêmes Paralleles CE, AK. Comparant maintenant le Triangle BCI avec le Triangle ACE, le Côté CI du premier, eſt égal au Côté AC du ſecond,

90 ELEMENS D'EUCLIDE.

second, puis que ce sont les Côtés d'un même Carré AI. Par la même raison, le Côté CB du premier, est égal au Côté CE du second. De plus, l'Angle ICB, compris des deux Côtés du premier Triangle, est égal à l'Angle ACE, compris des deux Côtés du second, chacun de ces Angles étant composé d'un Angle droit & de l'Angle ACB. Donc

(par la 4. Prop.) le Triangle ICB est égal au Triangle ACE. Et par conséquent le Parallelogramme CK, & le Carré AI, qui sont doubles de choses égales, sont égaux entr'eux.



Mais il a déjà été prouvé auparavant, que le Parallelogramme BK est égal au Carré FA. Donc le Carré BE, qui convient avec les deux Parallelogrammes BK, CK, ou plutôt qui est la même chose, est égal aux deux Carrés FA, AI, pris ensemble; Ce qu'il falloit démontrer.

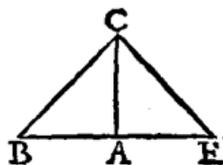


## PROPOSITION XLVIII.

## THEOREME XXXIV.

*Si le Carré de l'un des Côtés d'un Triangle est égal aux Carrés des deux autres Côtés, l'Angle compris de ces deux autres Côtés est droit.*

JE suppose qu'au Triangle ABC le Carré du Côté BC soit égal aux Carrés des deux autres Côtés AB, AC. Cela étant, je dis que l'Angle CAB, compris des deux Côtés AB, AC, est droit. Pour le prouver,



Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AC, & faites cette Ligne AE égale à AB; puis tirez la Ligne droite CE. Cela posé:

Puis que le Triangle ACE est Rectangle, il s'enfuit, par la Proposition précédente, que le Carré du Côté CE, qui soutient l'Angle droit CAE, est égal aux deux Carrés de CA, & de AE, ou de AB son égal. Mais par la supposition, le Carré du Côté BC est aussi égal aux deux Carrés de CA, & de AB. Donc le Carré de BC & le Carré de CE sont égaux entr'eux, par le premier Ax. Et partant les Lignes BC, CE, qui sont leurs Côtés, sont égales entr'elles, par la troisième Remarque de la 46. Prop. Comparant maintenant le Triangle ABC avec le Triangle ACE: le Côté AB est égal au Côté AE; le Côté AC est commun aux deux Triangles; de plus, la Base BC vient d'être prouvée égale à la Base CE. Donc (par la 8. Prop.)

## 92 ELEMENS D'EUCLIDE.

Prop.) l'Angle CAB est égal à l'Angle CAE.  
Mais l'Angle CAE est droit, par la construction.  
Donc l'Angle CAB, est aussi droit; Ce qu'il fal-  
loit démontrer.





E L E M E N S  
D'EUCLIDE.  
LIVRE SECOND.

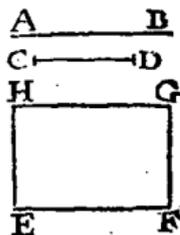
---

DEFINITIONS.

I. **L** Rectangle de deux Lignes droites, est un Parallelogramme, dont les deux Côtez alentour de l'un de ses Angles, sont égaux à ces deux Lignes droites.

Ainsi le Rectangle des deux Lignes droites AB, CD, est le Rectangle EG, qui a l'un de ses Côtez, sçavoir EF, égal à AB; & l'autre, sçavoir EH, égal à CD.

Et ainsi, tout Parallelogramme Rectangle est compris de deux Lignes droites, qui font l'Angle droit.

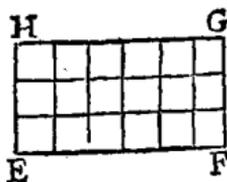


## REMARQUE.

Pour mesurer la quantité de la surface d'un Rectangle, il faut se servir d'une petite mesure connue, telle qu'on voudra; par exemple, d'une Toise quarrée, d'un Pied quarré, d'un Pouce quarré; & voir combien de ces Toises, de ces Pieds, ou de ces Ponces quarez, contient ce Rectangle.

Ainsi, pour trouver la mesure ou la quantité de la surface du Rectangle EG, il faut diviser chacun de ses Côtez en Toises, en Pieds, ou en Ponces, & multiplier l'un par l'autre; & le produit vous donnera ce que vous cherchez.

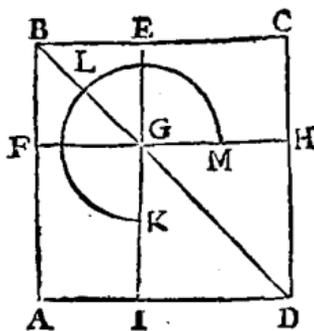
Par exemple, posé que le Côté EF contienne six Toises, & le Côté EH en contienne trois: multipliant l'un par l'autre, cela fait 18 Toises quarrées, qui est la mesure de la surface de ce Rectangle.



Et si le Rectangle dont on veut sçavoir la mesure, est un Quarré: il faut sçavoir combien un de ses Côtez contient de Toises, de Pieds, ou de Ponces, & le multiplier par lui-même; & le produit vous en donnera la mesure.

II. Un Gnomon, est une partie d'un Parallelogramme composée d'un des Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & des deux Supplemens.

Ainsi dans le Quarré ABCD, le Quarré FE, avec les deux Supplemens AG, GC, est un Gnomon.



# LIVRE SECOND. 95

Et pour le désigner, on décrit une portion de Cercle, semblable à KLM, que l'on fait passer par ce Carré, & par ces deux Suppléments, & que l'on marque avec trois lettres, comme est ici marqué le Gnomon KLM.

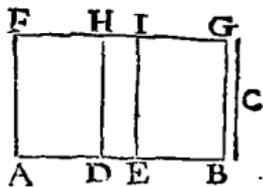
## PROPOSITION I.

### THEOREME I.

*Si de deux Lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra: les Rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au Rectangle des deux toutes.*

Je suppose que des deux Lignes AB, & C, la première AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple, aux points D, & E. Cela étant, je dis, que les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des parties de la coupée, sçavoir AD, DE, EB, pris ensemble, sont égaux au Rectangle des deux toutes AB, & C. Pour le prouver,

Elevez au Point A la Ligne droite AF perpendiculaire à AB, par la 11. du 1. & égale à C, par la 2. du 1. Puis, par les Points F, & B, menez les Lignes FG, BG, parallèles à AB, & à AF, par la 11. du 1. Elevez aux Points D, & E, les Lignes droites DH, EI, perpendiculaires à AB, qui

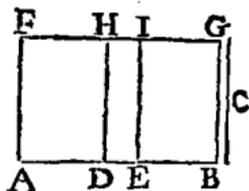


## 96 ELEMENS D'EUCLIDE.

qui seront aussi parallèles à AF. Cela posé :

Puisque AF est égale à C, il est évident que le Parallelogramme AG est le Rectangle des deux toutes AB, & C. Il est d'ailleurs évident que le Rectangle AH est compris de la non-coupée C, ou de son égale AF, & de AD, qui est la première partie de la coupée AB.

De plus, les Lignes DH, & EI, étant égales à AF, par la 34. du 1. ou à C son égale : les Parallelogrammes DI, EG, sont les Rectangles compris de la non-coupée



C, & de chacune des autres parties de la coupée AB. Or tous ces Rectangles AH, DI, EG, contiennent avec le Rectangle AG. Donc ils lui sont égaux, par le 8. Axiome ; Ce qu'il falloit démontrer.

### R E M A R Q U E.

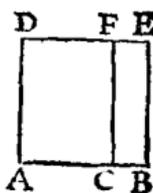
Pour vérifier cecy en nombres: Prenez par exemple les deux nombres 10 & 6. Divisez 10 en trois parties, telles qu'il vous plaira, comme 5, 3, & 2. Multipliez 10 par 6: il viendra 60, qui sera le Rectangle des deux nombres entiers. Après cela multipliez aussi 5, 3, & 2, par 6: & il viendra 30, 18, & 12, qui seront les Rectangles du nombre entier 6, & de chacune des parties du nombre 10. Enfin ajoutez les trois Rectangles 30, 18, & 12: & la somme sera 60, qui est égale au Rectangle compris des deux nombres entiers 10 & 6.

## PROPOSITION II.

## THEOREME II.

*Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : les Rectangles compris de la toute & de chacune de ses parties, sont égaux au Quarré de la toute.*

Je suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple, au Point C. Et je dis que les Rectangles compris de la toute AB, & de chacune de ses parties AC, CB, pris ensemble, sont égaux au Quarré de AB. Pour le prouver,



Décrivez sur AB le Quarré AE, par la 46. du 1. & élevez au Point C la Ligne CF perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallèle à AD, ou à BE. Cela posé :

Puisque AD est égale à AB, le Parallelogramme AF est le Rectangle compris de la toute AB, & de la partie AC. De même, CF étant égale à AD, ou à son égale AB, le Parallelogramme CE est le Rectangle compris de la toute AB, & de son autre partie CB. Or les Rectangles AF, CE, conviennent avec le Quarré AE, qui a été fait sur la toute AB. Donc ces Rectangles sont égaux à ce Quarré ; Ce qu'il falloit démontrer.

## REMARQUE.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par  
Tome I. E exem-

## 98 ELEMENS D'EUCLIDE.

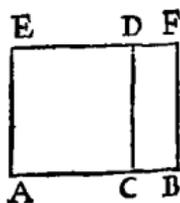
exemple, 10, & le divisez en deux parties, comme 7, & 3. Cela étant : le Rectangle du nombre entier 10 & de sa partie 7, est 70. Le Rectangle du même nombre 10 & de son autre partie 3, est 30 ; ajoutez ces deux nombres, cela fait 100. Lequel nombre est égal au Quarré de 10.

### PROPOSITION III.

#### THEOREME III.

*Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : le Rectangle de la toute, & de l'une de ses parties, est égal au Rectangle des deux parties, & au Quarré de la partie premierement prise.*

JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point C. Cela étant, je dis que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ses parties, par exemple AC, est égal au Rectangle des deux parties AC, CB, & au Quarré de la partie AC, qui avoit été premierement prise. Pour le prouver,



Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez par le Point E la Ligne EF parallele à AB ; & par le Point B la Ligne BF parallele à AE ; & au Point C élevez la Ligne CD perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AE, ou à BF. Cela posé :

Puisque AE est égale à AC, il s'ensuit que AD est le Quarré de AC, par la 1. Remarque de la 46.

## LIVRE SECOND. 99

du 1. Et puisque CD est égale à AE, ou à AC, son égale, il s'en suit que CF est le Rectangle des deux parties AC, CB. Or le Quarré AD, & le Rectangle CF, conviennent avec AF, qui est le Rectangle de la toute AB, & de la partie AC. Donc le Rectangle AF est égal au Rectangle CF, & au Quarré AD; Ce qu'il falloit démontrer.

### REMARQUE.

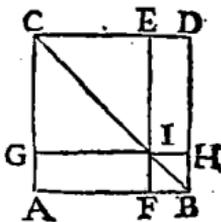
Pour verifien ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 10; divisez-le en deux parties, comme 7 & 3. Cela étant, le Rectangle des deux parties 7 & 3, est 21. Le Quarré de la premiere partie 7, est 49. Ajoutez ces deux nombres, cela fait 70. Lequel nombre est égal au Rectangle du nombre entier 10, & de sa premiere partie 7.

## PROPOSITION IV.

### THEOREME IV.

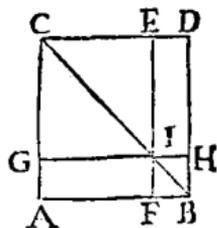
*Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : le Quarré de la toute est égal aux deux Quarrez des parties, & à deux Rectangles faits des deux parties.*

JE suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB est égal aux deux Quarrez des parties AF, FB, & à deux Rectangles faits de ces deux



parties. Pour le prouver,

Décrivez sur la Ligne AB le  
Quarré AD. Menez la Dia-  
gonale CB. Elevez au Point  
F la Ligne FE perpendiculaire  
à AB, qui sera aussi parallèle  
à AC, & à BD. Et par le  
Point I, où la Ligne FE cou-



pe la Diagonale CB, menez la Ligne droite GIH  
parallèle à AB. Cela posé :

Puisque les Lignes AC, AB, qui sont les Côtez  
du Quarré AD, sont égales, il s'enfuit ( par la 5.  
Prop. du 1. ) que le Triangle ABC a les Angles  
ABC & ACB, sur la Baze BC, égaux entr'eux.  
D'ailleurs, les Lignes GH & AB étant parallèles,  
& la Ligne CIB tombant dessus, l'Angle extérieur  
GIC est égal à son opposé intérieur ABC, par la  
29. du 1. Or l'Angle ACB est égal à l'Angle ABC.  
Donc l'Angle ACB, ou GCI, est égal à l'Angle  
GIC. Et par conséquent dans le Triangle CGI les  
Côtez CG, GI, qui soutiennent ces deux Angles,  
sont égaux entr'eux, par la 6. du 1.

D'ailleurs, puisque dans le Parallelogramme  
GE, l'Angle GCE est droit, étant un des Angles  
du Quarré AD: il s'enfuit ( par la 2. Remarque de  
la 46. Prop. du 1. ) que ce Parallelogramme GE a  
ses quatre Angles droits. Et puisque les deux Côtez  
CG, GI, qui sont alentour d'un de ces Angles  
droits, sont égaux entr'eux: il s'enfuit ( par la 1.  
Remarque de la même Prop. ) que ce Parallelo-  
gramme GE est le Quarré de GI, ou de son égale  
AF. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont  
parallèles, & que la Ligne BIC tombe dessus: l'An-  
gle extérieur FIB est égal à son opposé intérieur  
ACB. Mais l'Angle ABC est égal à ACB. Donc  
l'Angle ABC, ou FBI, est égal à l'Angle FIB.  
Et par conséquent dans le Triangle BFI les deux  
Côtez FI, FB, qui les soutiennent, sont aussi  
égaux

## LIVRE SECOND. 101

égaux entr'eux. D'où il suit que le Parallelogramme FH, qui a deux Côtez égaux alentour de l'Angle droit IFB, est le Quarré de la partie EB. De plus, AI, ID, sont deux Parallelogrammes Rectangles, puisque leurs Côtez opposez sont paralleles, & que les Angles A, & D, étant droits, tous les autres le sont aussi. Or AI est le Rectangle de AF, FI, ou bien de AF, FB; & ID est le Rectangle de DH, HI, ou de leurs égales AF, FB. Mais ces deux Rectangles AI, ID, avec les deux Quarrez GE, FH, conviennent avec le Quarré AD. Donc ce Quarré leur est égal; Ce qu'il falloit démontrer.

### I. R E M A R Q U E.

Il suit de cette Proposition, que quand deux Lignes droites paralleles aux Côtez d'un Quarré, coupent la Diagonale de ce Quarré en un même Point; les Parallelogrammes qui se font alentour du Diametre sont des Quarrez.

### I I. R E M A R Q U E.

Pour verifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10, & le divisez en deux parties comme 7 & 3. Cela étant, le Quarré de 7 est 49; le Quarré de 3 est 9; le Rectangle des deux parties 7 & 3, est 21. Ce même Rectangle pris encore une fois est encore 21. Ajoûtez ces deux Quarrez & ces deux Rectangles, cela fait 100. Lequel nombre est égal au Quarré du nombre entier 10.

## PROPOSITION V.

## THEOREME V.

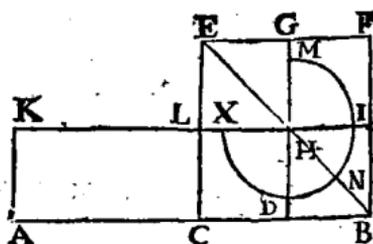
*Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales: le Rectangle compris des deux parties inégales, avec le Quarré de la partie du milieu, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute.*

**J**E suppose que la Ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D. Cela étant, je dis que

le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB, avec le Quarré de la partie du milieu CD, sont égaux au Quarré de la moitié de la toute CB. Pour le prouver,

Décrivez sur CB le Quarré CF; tirez la Diagonale BE; élevez au Point D la Ligne DG perpendiculaire à AB, qui fera aussi parallèle à BF, & à CE. Puis par le Point H, où la Ligne DG coupe la Diagonale, menez la Ligne droite IHK parallèle à BA. Enfin menez par le Point A la Ligne AK parallèle à CE. Cela posé:

Il suit de la 1. Remarque sur la Proposition précédente, que LG est un Quarré, à sçavoir, celui de LH, ou de son égale CD. Par la même



LIVRE SECOND. 103

me raison, DI est aussi un Carré; & partant DH est égale à DB. Par conséquent le Rectangle AH est le Rectangle compris des deux parties inégales AD, DB. De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Rectangle AH avec le Carré LG, sont égaux au Carré CF. Pour le prouver,

Les Rectangles CH, HF, sont égaux entr'eux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoute le Carré DI, les Rectangles CI, DF, seront aussi égaux entr'eux. Mais le Rectangle AL est égal à CI, par la 36. Prop. du 1. Donc il est aussi égal à DF. Maintenant, si à ces deux choses égales on ajoute le Rectangle CH: le Rectangle AH sera égal au Gnomon MNX. Et si l'on ajoute à ce Rectangle & à ce Gnomon le Carré LG: le Rectangle AH & le Carré LG, pris ensemble, seront égaux au Gnomon MNX & au Carré LG, pris aussi ensemble. Or ce Gnomon & ce Carré composent le Carré CF. Donc le Rectangle AH, avec le Carré LG, sont égaux au Carré CF; Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

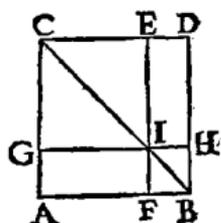
Pour vérifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 20. Divisez ce nombre en deux parties égales 10 & 10; & en deux inégales 17 & 3. Cela étant, le nombre du milieu sera 7. Multipliez maintenant 17 par 3; le Produit est 51. Carrez le nombre 7, vous aurez 49. Ces deux nombres joints ensemble font 100; qui est le Carré de 10, ou de la moitié de 20.

## PROPOSITION VII.

## THEOREME VII.

*Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra: le Quarré de la toute, & le Quarré de l'une de ses parties, sont égaux au Quarré de l'autre partie, & à deux Rectangles faits de la toute & de la partie premierement prise.*

**J**E suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra au Point F. Cela étant, je dis que le Quarré de la toute AB, & le Quarré de l'une de ses parties, par exemple de AF, sont égaux au



Quarré de l'autre partie FB, & à deux Rectangles faits de la toute AB & de la partie AF, qui avoit été premierement prise. Pour le prouver,

Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AD; menez la Diagonale BC; élevez au Point F la Ligne FE perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallèle à AC & à BD. Puis, par le Point I, où la Ligne FE coupe la Diagonale, menez la Ligne GIH parallèle à AB. Cela posé:

Puisque AD est un Quarré, AC est égale à AB; & par consequent le Rectangle AE est compris de la toute AB, & de sa partie AF. D'ailleurs, puisque FH & GE sont des Quarrez, par la premiere Remarque de la 4. Prop. le Rectangle GD compris de CD, qui est égale à AB, & de CG, qui est égale

## LIVRE SECOND. 107

égale à GI, ou à AF, est aussi compris de AB, & de AF. De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Carré AD, & le Carré GE, sont égaux au Carré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD. Pour le prouver,

Le Carré AD est déjà égal au Carré FH, & aux deux Rectangles AE, ID, pris ensemble, par le 8. Ax. Si donc on leur ajoute le Carré commun GE: il s'ensuivra que le Carré AD, & le Carré GE, seront égaux au Carré FH, au Rectangle AE, au Rectangle ID, & au Carré GE. Mais le Rectangle ID, & le Carré GE, composent ensemble le Rectangle GD. Et partant le Carré AD, & le Carré GE, sont égaux au Carré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD; Ce qu'il falloit démontrer.

### REMARQUE.

Pour vérifier ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10; & le divisez en 7 & 3. Cela étant, le Carré du nombre entier 10 est 100. Le Carré de la partie 7 est 49. Ces deux Carrés font ensemble 149. D'ailleurs le Carré de l'autre partie 3, est 9; le Rectangle compris du nombre entier 10 & de la partie premièrement prise 7, est 70. Le même Rectangle pris une seconde fois est encore 70. Or 9, 70, & 70, font aussi 149.

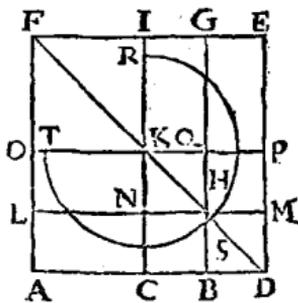
## PROPOSITION VIII.

## THEOREME VIII.

*Si une Ligne droite est coupée comme l'on voudra : quatre-fois le Rectangle compris de la toute & de l'une de ses parties, avec le Quarré de l'autre partie, sont égaux au Quarré de la toute & de la partie premierement prise, comme d'une seule Ligne.*

**J**E suppose que la Ligne AB soit coupée comme l'on voudra au Point C. Cela étant, je dis que quatre-fois le Rectangle de AB, CB, avec le Quarré de l'autre partie AC, sont égaux au Quarré de la toute AB, & de la partie premierement prise CB, comme d'une seule Ligne. Pour le prouver,

Continuez AB vers D, & faites BD égale à BC. Puis ayant décrit sur la Li-AD le Quarré AE, menez la Diagonale DF. Elevez aux Points B & C les Perpendiculaires BG & CI, qui seront aussi parallèles à AF & à DE; & par les Points H & K, où BG & CI coupent la Diagonale DF, menez les Lignes LHM & OKP parallèles à AD. Cela posé:



Premierement ( par la premiere Remarque de la 4. Prop. ) BM & LG sont des Quarrez. Ensuite de

LIVRE SECOND. 109

de quoi NQ & OI sont aussi des Quarrez. Or puis-  
 que BM est un Carré, la Ligne BH est égale à  
 BD; laquelle ayant été faite égale à BC, il s'en-  
 suit que la Ligne BH est égale à BC, & ainsi que  
 le Rectangle CH est un Carré. Et d'autant que les  
 Quarrez BM & CH ont le Côté BH commun, il  
 s'en suit que ces deux Quarrez sont égaux entr'eux.  
 Et par la même raison, les Quarrez CH & NQ sont  
 aussi égaux, puis qu'ils ont le Côté NH commun.  
 D'où il suit que les Quarrez BM, NQ, sont égaux  
 entr'eux, puis qu'ils sont tous-deux égaux à CH.  
 Cela étant, HM est égal à HQ, puisque ce sont  
 les Côtés de Quarrez égaux. Et partant HP est en-  
 core un Carré égal aux trois autres. Ensuite de  
 quoi il est évident que les Rectangles AH & LQ  
 sont compris de la toute AB & de la partie BC. Et  
 puisque (par la 43. Prop. du 1.) le Rectangle HE  
 est égal au Rectangle AH, il s'en suit que le Rectan-  
 gle HE est aussi compris de AB & de BC. D'ailleurs  
 les Rectangles IQ & GP étant sur des Bases égales  
 KQ, QP, & entre mêmes Paralleles IE & KP,  
 sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Si donc  
 on leur ajoute les Quarrez égaux BM & QM, il  
 s'en suivra que QI, pris avec BM, fera équivalent  
 à GP, pris avec QM, c'est à dire au seul Rectan-  
 gle GM, ou HE. Et ainsi le Gnomon RST est égal  
 à quatre-fois le Rectangle compris de AB, BC.  
 Maintenant si à ces deux choses égales on ajoute le  
 Carré OI, qui est le Carré de OK, ou de AC  
 son égale: il s'en suivra que quatre-fois le Rectan-  
 gle de AB, BC, avec le Carré de AC, sont égaux  
 au Gnomon RST, avec le Carré OI. Or ce  
 Gnomon & ce Carré composent ensemble le  
 Carré AE. Donc quatre-fois le Rectangle de AB,  
 BC, avec le Carré de AC, sont égaux au Carré  
 AE; Ce qu'il falloit démontrer.

DE.  
 VIII.  
 II.  
 me la  
 le con-  
 ses par-  
 partie,  
 ce O' a  
 comen  
 e comen  
 e dis q  
 avec  
 la Quar  
 ent. pré  
 rouver,  
 E  
 D  
 iges  
 re de  
 suite  
 de

## REMARQUE.

Pour verifler ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 8 ; & le divifez en 6 & 2. Cela étant, le Rectangle du nombre entier 8, & de fa partie 2, eft 16 ; & quatre-fois ce Rectangle eft 64. D'ailleurs le Quarré de l'autre partie 6, eft 36. Or 64 & 36 font 100. Ce que vaut aufli le Quarré du nombre 10, qui eft composé du premier nombre 8, & de fa partie premiere ment prife, à fçavoir 2.

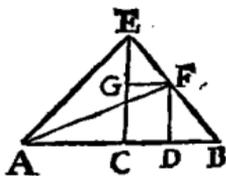
## PROPOSITION IX.

## THEOREME IX.

*Si une Ligne droite eft coupée en deux parties égales, & en deux inégales, les Quarrez des deux parties inégales font doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la partie du milieu.*

**J**E fuppose que la Ligne AB foit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux inégales au Point D ; & que la partie du milieu foit CD. Cela étant, je dis que les Quarrez des deux parties inégales AD, DB, font doubles du Quarré de la moitié AC, & du Quarré de la partie du milieu CD. Pour le prouver,

Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC. Menez au Point E les Lignes droites



## LIVRE SECOND. 117

droites AE, BE. Elevez aussi au Point D la Ligne DF perpendiculaire à AB; & du Point F, où la Ligne DE coupe BE, abaissez la Ligne FG perpendiculaire à CE, qui sera aussi parallèle à CD. Enfin du Point A au Point F menez la Ligne droite AF. Cela posé :

Puisque par la construction le Triangle ACE est Ifoſcele, les Angles AEC & EAC, sur la Baze AE, sont égaux entr'eux. Et puisque l'Angle ACE est droit, les deux Angles AEC, EAC, qui sont égaux, valent chacun un demi-droit. Et par la même raison les Angles CEB, CBE, valent aussi chacun un demi-droit. Par conséquent l'Angle AEB, ou AEF, qui est composé de deux de ces Angles, est droit. De plus, puisque dans le Triangle EGF l'Angle EGF est droit, & que l'Angle GEF vaut un demi-droit, l'Angle EFG vaut aussi un demi-droit. D'où il suit que les deux Côtés GE, GF, qui les soutiennent, sont égaux entr'eux, par la 6. Prop. du 1. De même, puisque dans le Triangle FDB l'Angle FDB est droit, & que l'Angle B vaut un demi-droit, l'Angle DFB vaut aussi un demi-droit. Par conséquent les Côtés DF, DB, qui les soutiennent, sont égaux entr'eux.

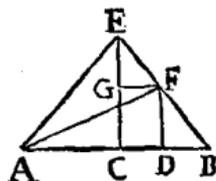
Ensuite de quoi, puisque le Côté AE soutient l'Angle droit ACE, son Quarré est égal aux Quarrés de AC & de CE, par la 47. Prop. du 1. Et puisque ces deux Quarrés sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de AE est double du Quarré de AC. De même, puisque le Côté EF soutient l'Angle droit EGF, son Quarré est égal aux Quarrés de EG & de GF. Et puisque ces deux Quarrés sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de EF est double du Quarré de GF, ou de son égale CD. Et ainsi les deux Quarrés de AE & de EF sont doubles des deux Quarrés de AC & de CD. Or le Quarré de AF, qui soutient l'Angle droit AEF, est égal aux deux Quarrés de AE & de EF. Donc le Quarré de

AF

DE.  
 deux se  
 ales,  
 ales  
 rité de  
 artu  
 D B  
 face  
 quarré  
 que  
 que

# 112 ELEMENS D'EUCLIDE.

AF est double des deux Quarrez de AC & de CD. Mais les deux Quarrez de AD & de DF, qui comprennent l'Angle droit ADF, sont égaux au Quarré de AF.



Donc les deux Quarrez de AD & de DF, ou de BD son égale, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

## R E M A R Q U E.

Pour verifier ceci dans un nombre : Prenez, par exemple, 12. Divisez ce nombre en deux parties égales 6 & 6 ; & en deux inégales 10 & 2. Cela étant, le nombre du milieu sera 4. Maintenant les Quarrez des deux parties inégales sont 100 & 4, qui ensemble font 104. D'ailleurs le Quarré de la moitié 6 est 36 ; le Quarré de la partie du milieu 4 est 16 ; 16 & 36 font 52, qui n est que la moitié de 104, où dont 104 est le double.

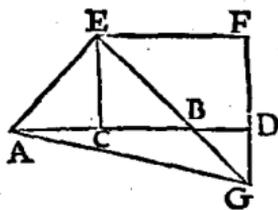


## PROPOSITION X.

## THEOREME X.

Si une Ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoute directement une autre Ligne droite: le Quarré de la toute & de l'ajoutée, comme d'une seule Ligne, avec le Quarré de l'ajoutée, sont doubles du Quarré de la moitié de la toute, & du Quarré de la moitié de la toute & de l'ajoutée, comme d'une seule Ligne.

JE suppose que la Ligne AB soit coupée en deux parties égales au Point C, & qu'on lui ajoute directement la Ligne BD. Cela étant, je dis que le Quarré de AD & le Quarré de BD, pris ensemble, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Pour le prouver,



Elevez au Point C la Ligne CE perpendiculaire à AB, & égale à AC, ou à CB. Du Point A au Point E menez la Ligne droite AE. Puis par le Point D menez la Ligne FDG parallèle à EC, ou perpendiculaire à AD; & par le Point E la Ligne EF parallèle à CD. Tirez du Point E, par le Point B, la Ligne droite EBG, si longue, qu'elle rencontre la Ligne FDG au Point G. Enfin du Point A au Point

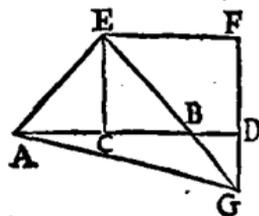
G me-

# 114 ELEMENS D'EUCLIDE.

G menez la Ligne droite AG.

Cela posé,

Puisque les Lignes AC, CE, sont égales, les Angles CAE, CEA, sur la Baze, sont égaux entr'eux. Or l'Angle ACE est droit. Donc



les Angles CAE, CEA, valent chacun un demi-droit. De même, puisque dans le Triangle ECB les Côtez CE, CB, sont égaux, & que l'Angle ECB est droit, chacun des Angles CEB & CBE, vaut un demi-droit. Et par conséquent l'Angle AEB est droit. Maintenant les Angles CBE & DBG, qui sont oppozés au sommet, sont égaux entr'eux. Mais l'Angle CBE vaut un demi-droit. Donc l'Angle DBG vaut aussi un demi-droit. De plus, dans le Triangle BDG l'Angle D est droit; donc l'Angle DGB vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez DB, DG, qui soutiennent les Angles DGB, DBG, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1. De même, dans le Triangle EFG l'Angle F est droit, puis qu'il est oppozé à l'Angle C. Mais l'Angle EGF vaut un demi-droit. Donc l'Angle GEF vaut aussi un demi-droit. Et partant les Côtez FE, FG, qui les soutiennent, sont aussi égaux entr'eux, par la 6. du 1.

Ensuite de quoi, puisque du Triangle ACE l'Angle ACE est droit, le Quarré de AE est égal aux deux Quarrez de AC & de CE, par la 47. du 1. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de AE est double du Quarré de AC. De même, puisque du Triangle EFG l'Angle EFG est droit, le Quarré de EG est égal aux deux Quarrez de EF & de FG. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarré de EG est double du Quarré de EF, ou de son égale CD. De sorte que les deux Quarrez de AE & de EG, sont doubles des deux Quarrez de AC & de CD. Or le Quarré de AG, qui soutient l'Angle droit

## LIVRE SECOND. 115

droit AEG, est égal aux deux Quarrez de AE & de EG. Donc le Quarré de AG est double des Quarrez de AC & de CD. Mais les Quarrez de AD & de DG, qui comprennent l'Angle droit ADG, sont égaux au Quarré de AG. Donc les Quarrez de AD & de DG, ou de BD son égale, sont doubles des Quarrez de AC & de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

### REMARQUE.

Pour verifler ceci dans un nombre: Prenez, par exemple, 10. Divifez ce nombre en deux parties égales 5 & 5. Ajoûtez 2 à 10, cela fera 12. Cela étant, le Quarré de 12 est 144; le Quarré de 2 est 4; ces deux nombres font ensemble 148. D'ailleurs le Quarré de 5 est 25; le Quarré de 7 est 49. Ces deux nombres font ensemble 74, qui est la moitié de 148, ou dont 148 est le double.

## PROPOSITION XI.

### PROBLEME I.

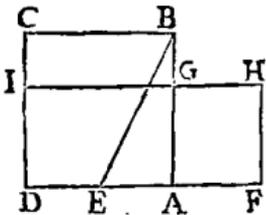
*Couper une Ligne droite donnée, de telle sorte, que le Rectangle de la toute, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie.*

JE suppose que la Ligne droite donnée soit AB; & je propose de la couper de telle sorte, que le Rectangle de la toute AB, & de l'une de ses parties, soit égal au Quarré de l'autre partie. Pour le faire,

Décrivez sur AB le Quarré AC. Coupez le Côté

# 116 ELEMENS D'EUCLIDE.

té AD en deux également au Point E. Du Point E  
 au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez  
 EA vers F, & faites EF égale à EB. Décrivez sur  
 AF le Quarré AH; & prolongez le Côté HG jus-  
 qu'en I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est cou-  
 pée au Point G comme il a été proposé; c'est à dire  
 de telle sorte, que le Rectan-  
 gle de la toute AB, & de  
 sa partie BG, est égal au  
 Quarré de l'autre partie AG. Pour le prouver,



Puisque la Ligne DA est coupée en deux parties  
 égales au Point E, & que la Ligne AF lui est ajoutée:  
 le Rectangle de DF, & de FA, ou de FH son  
 égale, (c'est à dire le Rectangle DH,) avec le Quar-  
 ré de la moitié EA, sont égaux au Quarré de EF,  
 ou de son égale EB, par la 6. Prop. Or les Quar-  
 rez de AB & de EA sont égaux au Quarré de EB,  
 par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle DH, & le  
 Quarré de EA, sont égaux aux Quarrez de AB & de  
 EA. Ostant donc le Quarré de EA de ces deux Tours  
 égaux, ausquels il est commun, il restera le  
 Rectangle DH égal au Quarré de AB, c'est à dire  
 au Quarré AC. Que si maintenant de ce Rectan-  
 gle & de ce Quarré, qui sont égaux, l'on ôte le  
 Rectangle DG, qui leur est commun, il restera le  
 Quarré AH égal au Rectangle IB. Or le Quarré  
 AH est le Quarré de AG, & le Rectangle IB est le  
 Rectangle compris de CB, ou de AB son égale,  
 & de BG. Il est donc vrai de dire, que la Ligne AB  
 a été coupée comme il a été proposé; Ce qu'il fal-  
 loit faire, & démontrer.

## REMARQUE.

Il est impossible d'exprimer en nombre la quan-  
 tité des parties AG, GB, de la Ligne AB coupée  
 lui-

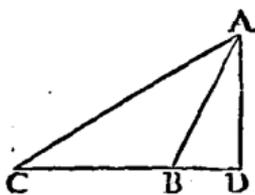
suivant la Prop. précédente ; parce que quelque nombre de parties qu'on puisse attribuer à la Ligne AB, il est impossible que AG, ou GB, contienne un nombre déterminé de ces parties.

## PROPOSITION XII.

### THEOREME XI.

*Aux Triangles Amblygones, le Quarré du Côté qui soutient l'Angle obtus est plus grand que les Quarrez des deux autres Côtés, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Côtés alentour de l'Angle obtus, à sçavoir de celui sur lequel étant prolongé tombe la Perpendiculaire de l'Angle opposé, & de la partie comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle obtus.*

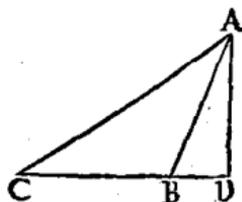
JE suppose qu'au Triangle ABC l'Angle ABC soit obtus. Cela étant, après avoir prolongé l'un des Côtés alentour de l'Angle obtus, comme CB, vers D, & avoir abaissé de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à CD: Je dis que le Quarré de AC est plus grand que les deux Quarrez de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris de CB, & de BD. Pour le prouver,



La

## 118 ELEMENS D'EUCLIDE.

La Ligne CD étant coupée au Point B, il s'en suit ( par la 4. Prop. ) que le Carré de la route CD est égal aux deux Carrés des deux parties CB, BD, & à deux Rectangles compris de ces deux mêmes parties. Donc si à ces deux Tours égaux l'on ajoute le Carré de DA, il s'en suivra que les Carrés de CD & de DA seront égaux aux trois Carrés de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Mais le Carré de AC



( par la 47. Prop. du 1. ) est égal aux deux Carrés de CD & de DA. Donc le Carré de AC est égal aux trois Carrés de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. D'ailleurs le Carré de BA est égal aux deux Carrés de BD & de DA. Prenant donc le Carré de BA, au lieu de ces deux Carrés : il s'en suivra que le Carré de AC sera égal aux deux Carrés de CB & de BA, & à deux Rectangles compris de CB & de BD. Et ainsi le Carré de AC est plus grand que les deux Carrés de CB & de BA, de la quantité de deux Rectangles compris de CB & de BD ; Ce qu'il falloit démontrer.

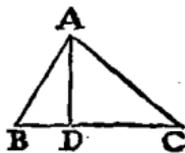


## PROPOSITION XIII.

## THEOREME XII.

*Aux Triangles Oxygones , le Quarré du Côté qui soutient l'Angle aigu est plus petit que les Quarrez des deux autres Côtés, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Côtés alentour de l'Angle aigu, à sçavoir de celui sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire, & de la partie comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu.*

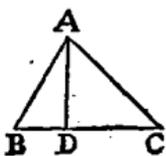
**J**E suppose qu'au Triangle ABC l'Angle C soit aigu, & qu'ayant fait tomber de l'Angle A la Ligne AD perpendiculaire à la Ligne BC, qui est l'un des Côtés



qui comprend l'Angle aigu, cette Perpendiculaire tombe entre B & C. Cela étant, je dis que le Quarré du Côté AB, qui soutient l'Angle aigu C, est plus petit que les deux Quarrez des deux autres Côtés AC, BC, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris du Côté BC, qui est alentour de l'Angle aigu C, & sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire AD, & de la partie DC comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle aigu. Pour le prouver,

La

La Ligne BC étant coupée au Point D, il s'ensuit (par la 7. Prop.) que le Quarré de la toute BC, & le Quarré de l'une de ses parties, à sçavoir DC, sont égaux au Quarré de l'autre partie BD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Si donc à ces deux Touts égaux l'on ajoute le Quarré de AD : il s'ensuivra que les trois Quarrez de BC, de DC, & de AD, seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. Donc si nous prenons le Quarré de AC, au lieu des deux Quarrez de DC & de AD, auxquels il est égal, par la 47. Prop. du 1. il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux aux deux Quarrez de BD & de AD, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'ailleurs, le Quarré de AB est égal aux deux Quarrez de BD & de AD. Prenant donc ce seul Quarré au lieu des deux autres, il s'ensuivra que les deux Quarrez de BC & de AC seront égaux au Quarré de AB, & à deux Rectangles compris de BC & de DC. D'où il suit que les deux Quarrez de BC & de AC sont plus grands que le seul Quarré de AB, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC ; ou, ce qui est la même chose, que le Quarré de AB est moindre que les deux Quarrez de AC & de BC, de la quantité de deux Rectangles compris de BC & de DC ; Ce qu'il falloit démontrer.



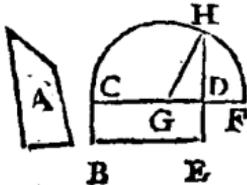
## PROPOSITION XIV.

## PROBLEME II.

*Décrire un Quarré égal à une Figure rectiligne donnée.*

JE suppose que la Figure rectiligne A soit donnée; & je propose de décrire un Quarré égal à cette Figure. Pour le faire,

Décrivez premierement ( par la 45. Prop. du 1. ) le Parallelogramme Rectangle BD égal à la Figure donnée A. Prolongez le Côté CD vers F, & faites DF égale à DE. Coupez la Ligne CF en deux également au Point G. Décrivez un demi-Cercle du Centre G, & de l'intervalle GC, ou GF. Enfin prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Circonférence du Cercle au Point H. Cela étant, je dis que le Quarré de la Ligne DH est égal à la Figure rectiligne A. Pour le prouver,

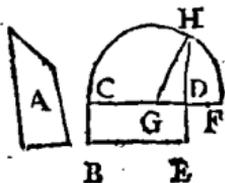


Du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela posé:

Puisque la Ligne CF est coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point D: il s'ensuit ( par la 5. Prop. ) que le Rectangle compris des deux parties inégales CD, DF, c'est à dire le Rectangle BD, & le Quarré de la partie du milieu GD, sont égaux au Quarré de la moitié de la route GF, ou de son égale GH. Mais ce Quarré de GH est égal aux Quarrés de GD & de DH, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle BD, & le Quarré de GD, sont égaux aux deux Quarrés de

122 ELEMENS D'EUCLIDE.

GD & de DH. Et partant, si de ces deux Touts égaux l'on ôte le Quarré de GD, qui leur est commun, les restes, à sçavoir le Rectangle BD, & le Quarré de DH, seront



égaux. Mais le Rectangle BD a été fait égal à la Figure rectiligne donnée A. Denc le Quarré de DH est aussi égal à cette Figure; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.





E L E M E N S  
D'EUCLIDE.  
LIVRE TROISIE'ME.

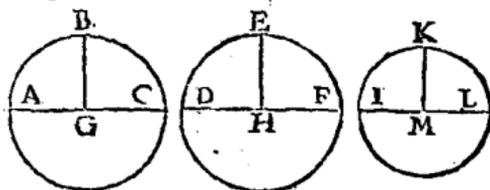
DEFINITIONS.

1. **L**es Cercles égaux, sont des Cercles dont les Diametres sont égaux, ou dont les Lignes droites menées du Centre à leurs Circonférences, sont égales.

Ainsi les Cercles ABC, DEF,

sont égaux, parce que leurs Diametres AC, DF,

sont égaux; ou parce que les Lignes droites GB, HE, qui sont



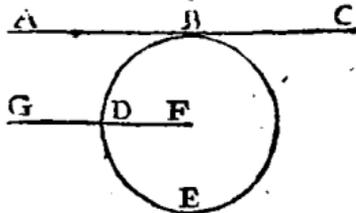
menées du Centre à leurs Circonférences, sont égaux.

124 ELEMENS D'EUCLIDE.

égales. Mais les Cercles DEF, IKL, sont inégaux, parce que leurs Diametres DF, IL, sont inégaux, ou parce que les Lignes droites HE, MK, qui sont menées du Centre à leurs Circonférences, sont inégales.

2. La Tangente d'un Cercle, ou la Ligne qui le touche, est une Ligne droite qui touche la Circonférence de telle sorte, qu'étant prolongée, elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.

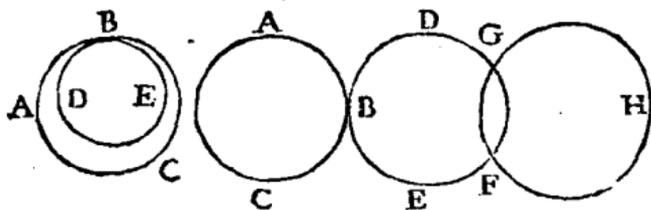
Ainsi la Ligne AB est la Tangente du Cercle BDE, parce qu'elle touche sa Circonférence de telle sorte au Point B, qu'étant prolongée elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.



3. La Secante d'un Cercle, ou la Ligne qui le coupe, est une Ligne droite qui touche tellement sa Circonférence, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

Ainsi la Ligne GD est la Secante du Cercle BDE, parce qu'elle touche tellement sa Circonférence au Point D, qu'étant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

4. Des Cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand leurs Circonférences se touchent sans se couper.



Ainsi les Cercles ABC, DBE, sont dits se toucher l'un l'autre, parce que leurs Circonférences se

se touchent tellement au Point B, qu'elles ne se coupent point.

5. Deux Cercles sont dits se couper l'un l'autre, lorsque leurs Circonférences ne se touchent pas simplement, mais qu'ils entrent reciproquement l'un dans l'autre.

Ainsi les Cercles FGD, FGH, sont dits se couper l'un l'autre, parce que leurs Circonférences ne se touchent pas simplement, mais que ces Cercles entrent reciproquement l'un dans l'autre.

6. La distance d'une Ligne droite au Centre d'un Cercle, est la Ligne droite qui part du Centre de ce Cercle, & qui tombe perpendiculairement sur cette Ligne.

Ainsi la distance de la Ligne AB au Centre du Cercle ABD, est la Ligne EF, qui part du Centre E, & qui tombe perpendiculairement sur AB.

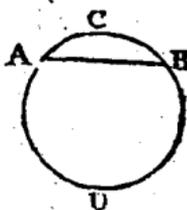
D'où il suit que les deux Lignes droites AB, CD, sont également distantes du Centre E, parce que leurs distances EF, EG, sont égales. Mais que la Ligne HI est plus éloignée de ce même Centre, parce que sa distance EK est plus grande que celle des autres.



7. La Soûtendante, ou la Corde d'un Arc de Cercle, est la Ligne droite bornée des deux extrémités de cet Arc.

Ainsi la Ligne droite AB est la Soûtendante ou la Corde de l'Arc ACB, parce qu'elle est bornée de ses deux extrémités A & B.

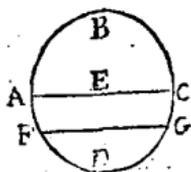
Il est évident que la même Ligne AB est aussi la Soûtendante de l'Arc ADB. Si bien que la Ligne droite qui est la Soûtendante d'un Arc, est aussi la Soûtendante du Complement de cet Arc à la Circonférence entiere.



126 ELEMENS D'EUCLIDE.

8. Un Segment, ou une portion de Cercle, est une Figure comprise d'un Arc de Cercle & de sa Soûrondante.

Ainsi les Figures ABC, FBG, FDG, sont des Segmens ou des portions de Cercles, parce chacune de ces Figures est comprise d'un Arc de Cercle & de sa Soûrondante.



9. La Baze d'un Segment de Cercle, est la Ligne droite qui soûtient ce Segment, & qui le borne.

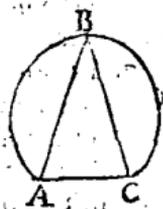
Ainsi la Ligne FG est la Baze du Segment FBG, & du Segment FDG, parce qu'elle les soûtient & les borne.

10. L'Angle du Segment, est l'Angle mixte compris de l'Arc du Segment & de sa Baze.

Ainsi l'Angle mixte compris de l'Arc FD, & de la Ligne FG, est l'Angle du Segment FDG.

11. l'Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment est capable, est un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de l'Arc du Segment, & qui aboutissent aux deux extremittez de sa Baze.

Ainsi l'Angle ABC est un Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment ABC est capable; parce qu'il est compris des deux Lignes droites BA, BC, qui partent du Point B de l'Arc du Segment, & aboutissent aux deux extremittez de sa Baze A & C.



12. Un Angle au Centre d'un Cercle, est un Angle compris de deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle; comme l'Angle BED.

13. Un Angle à la Circonference d'un Cercle, est un Angle compris de deux Lignes droites qui partent d'un Point de la Circonference du Cercle, comme l'Angle BAD.

14. Quand

14. Quand l'Angle que font deux Lignes droites qui partent du Centre d'un Cercle, ou d'un même Point de la Circonference, a pour Baze un Arc de ce Cercle, cét Angle est dit s'appuyer sur cét Arc.



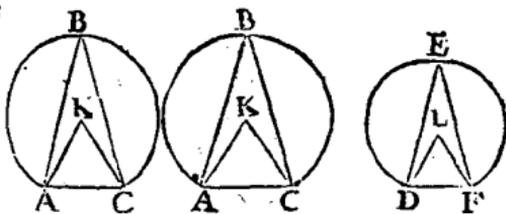
Ainsi l'Angle BED, ou l'Angle BAD, est dit s'appuyer sur l'Arc BCD.

15. L'Arc sur lequel s'appuye un Angle, ou qui lui sert de Baze, est l'Arc compris entre les deux Côtez de l'Angle.

Ainsi l'Arc BCD est l'Arc sur lequel s'appuyent les Angles BAD, BED, ou bien est la Baze de ces Angles, parce que cét Arc est compris entre leurs Côtez.

16. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux Lignes droites qui font un Angle au Centre, & de la partie de la Circonference que ces deux Lignes embrassent, comme ci-dessus la Figure EBCD est un Secteur de Cercle.

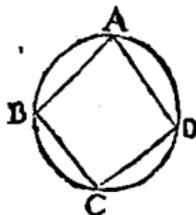
17. Des Segmens semblables, sont des Segmens qui sont capables d'Angles égaux.



Ainsi les Segmens marquez ABC, & DEF, sont des Segmens qui s'appellent semblables, parce que les Angles ABC, & DEF, dont ils sont capables, sont égaux. Mais ces mêmes Segmens ne laissent pas d'être inégaux, parce que l'un est plus grand que l'autre. Au lieu que les deux Segmens marquez ABC, sont semblables, & égaux; parce que non seulement ils sont capables d'Angles égaux, mais aussi parce que l'un n'est pas plus grand que l'autre.

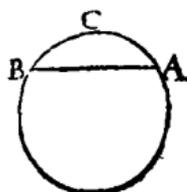
# 128 ELEMENS D'EUCLIDE.

18. Une Figure rectiligne est dite inscrite dans un Cercle, lorsque le Sommet de chacun de ses Angles est dans la Circonférence du Cercle.



Ainsi la Figure ABCD est inscrite dans le Cercle ABCD, parce que tous les Sommets de ses Angles A, B, C, D, sont dans la Circonférence de ce Cercle.

19. Une Ligne droite est dite être dans un Cercle, lorsque ses extremittez se terminent à la Circonférence.



Ainsi la Ligne AB est dite être dans le Cercle ABC.



PROPOSITION I.

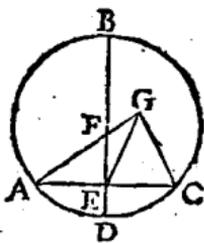
PROBLÈME I.

*Trouver le Centre d'un Cercle donné.*

**J**E suppose que l'on donne le Cercle ABC, & je propose d'en trouver le Centre. Pour le trouver,

Menez dans ce Cercle la Ligne droite AC, qui coupe la Circonférence où il vous plaira, comme aux Points A & C. Divisez la Ligne AC en deux également au Point E, par la 10. du 1. Et par ce Point menez la Ligne BED perpendiculaire à AC, par la 11. du premier. Enfin coupez la Ligne BD en deux également au Point F. Cela étant, je dis que le Point F est le Centre du Cercle ABC. Pour le prouver,

Premièrement il est évident que tout autre Point que F, pris dans la Ligne BD, ne peut être le Centre, puisque cet autre Point ne diviserait pas la Ligne BD en deux également. C'est pourquoi si le Centre n'étoit pas au Point F, il faudroit qu'il fût en quelque Point hors de la Ligne BD. Pensons, si vous voulez, qu'il soit au Point G. Menez donc les Lignes droites GA, GE, GC. Cela posé:



Comparez le Triangle AEG avec le Triangle CEG. Le Côté AE du premier est égal au Côté EC du second, par la construction; le Côté EG est commun aux deux Triangles; & la Baze GA seroit égale à la Baze GC, puis qu'elles seroient tirées du Centre à la Circonférence. Ainsi (par la

# 136. ELEMENS D'EUCLIDE.

8. du 1. ) l'Angle AEG seroit égal à l'Angle CEG, & la Ligne GE seroit perpendiculaire à AC, par la 26. Definition. du 1. Et partant les Angles GEA, GEC, seroient droits. Mais, par la construction, l'Angle AEB est droit. Donc il s'enfuivroit que l'Angle AEB & l'Angle AEG seroient égaux, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle ABC soit hors la Ligne BD. Et partant le Point F est le Centre du Cercle ABC; Ce qu'il falloit trouver.

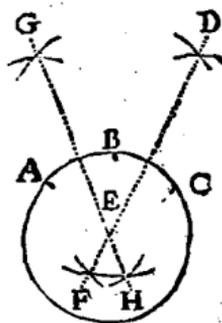


## I. REMARQUE.

Il suit de-là, que si dans un Cercle une Ligne droite en coupe une autre qui se termine à sa Circonférence, en deux également & perpendiculairement, cette Ligne droite passera par le Centre du Cercle.

## II. REMARQUE.

Pratique de cette Proposition. Prenez dans la Circonférence du Cercle ABC trois Points, tels qu'il vous plaira, A, B, C. Mettez successivement votre Compas à deux de ces Points A & B; & de même intervalle décrivez deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points G & H. Puis par ces Points menez la Ligne droite GH. Cela fait, mettez derechef successivement le pied du Compas aux Points B & C; & de même



même intervalle décrivez encore deux Arcs de Cercle, qui s'entrecoupent aux Points D & F. Enfin menez par ces deux Points la Ligne DF, si longue, qu'elle rencontre la Ligne GH au Point E. Alors le Point E sera le Centre qu'il falloit trouver.

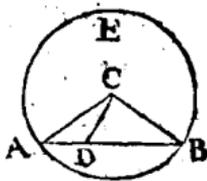


PROPOSITION VI.

THEOREME I.

*Si ayant pris deux Points dans la Circonférence d'un Cercle, on mène de l'un à l'autre une Ligne droite, elle tombera dans le Cercle.*

**J**E suppose que dans la Circonférence du Cercle ABE l'on prenne deux Points tels qu'on voudra, comme A & B; & que du Point A au Point B on mène la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que cette Ligne tombera dans ce Cercle. Pour le prouver,



Menez du Centre C aux extremités de la Ligne AB les Lignes droites CA, CB. Puis ayant pris à discretion dans la Ligne AB un Point entre A & B, comme par exemple D, menez la Ligne droite CD. Cela posé:

Les Lignes CA, CB, qui partent du Centre C, & vont se borner à la Circonférence, sont égales. Ainsi les Angles CAB, CBA, sont égaux entr'eux, par la 5. du 1. Mais l'Angle CDB est extérieur au respect du Triangle ADC. Donc (par la 16. du 1.) il est plus grand que son opposé intérieur CAD, & par conséquent aussi que son égal CBD. D'où il

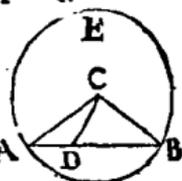
l'Angle ABE  
au Tour, on  
peut que le  
ne BD. En  
cercle ABC, à

le Cercle  
à la C  
perpendic  
le Centre



elles  
& de  
meis

suit ( par la 19. du 1. ) que le Côté CD est plus petit que le Côté CB, qui soutient un plus grand Angle. Et puis qu'il est plus petit, son extrémité D est dans le Cercle. Mais d'autant que le Point D a été pris à discretion dans la Ligne AB, & que la même chose se peut prouver de tout autre Point de cette Ligne, il suit que cette Ligne toute entiere est dans le Cercle; Ce qu'il falloit démontrer.

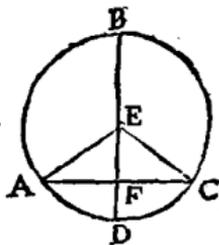


### PROPOSITION III.

#### THEOREME II.

*Si dans un Cercle, une Ligne droite passe par le Centre, & coupe en deux également une autre Ligne droite qui n'y passe point, elle la coupera perpendiculairement; Et si elle la coupe perpendiculairement, elle la coupera en deux également.*

**J**E suppose premièrement que la Ligne droite BD, qui est dans le Cercle ABC, passe par le Centre E, & qu'elle coupe en deux également au Point F la Ligne AC, qui n'y passe point. Cela étant, je dis que la Ligne BD coupe la Ligne AC perpendiculairement. Pour le prouver, Menez les Lignes droites AE, EC. Cela posé :



Dans

## LIVRE TROISIE'ME. 133

Dans les Triangles AFE & CFE, le Côté AF est égal au Côté FC, par supposition. Le Côté FE est commun à ces deux Triangles. Deplus, la Baze EA est égale à la Baze EC, par la definition du Cercle. Donc (par la 8. du 1.) l'Angle AFE est égal à l'Angle CFE, & la Ligne BD est perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que la Ligne BD qui passe par le Centre du Cercle, coupe la Ligne AC perpendiculairement. Cela étant, je dis qu'elle la coupe aussi en deux également. Pour le prouver,

Puisque les Lignes EA, EC, sont égales, par la definition du Cercle: les Angles EAC & ECA, sont égaux, par la 5. du 1. D'ailleurs puisque la Ligne BF est perpendiculaire à la Ligne AC, les deux Angles EFA, EFC, sont aussi égaux. Si bien que les deux Triangles EFA, EFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien; & le Côté EF, qui est commun aux deux, soutient des Angles égaux. Partant (par la 26. du 1.) le Côté AF est égal au Côté FC; Ce qu'il falloit démontrer.



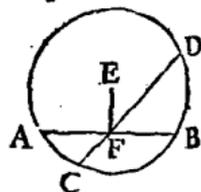
## PROPOSITION IV.

## THEOREME III.

*Si dans un Cercle , deux Lignes droites qui ne passent pas par le Centre , s'entre-coupent , elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.*

JE suppose que dans le Cercle ABD les deux Lignes droites AB , CD , qui ne passent point par le Centre , se coupent l'une l'autre au Point F. Cela étant , je dis qu'elles ne se coupent pas toutes-deux en deux parties égales. Pour le prouver ,

S'il étoit possible que chacune de ces deux Lignes fût coupée en deux parties égales : il s'ensuivroit , par la Proposition précédente , qu'en menant du Centre E au Point F la Ligne droite EF , cette Ligne seroit perpendiculaire à chacune des deux autres AB , CD ; & par conséquent que les Angles AFE & CFE seroient droits , & égaux entr'eux , & qu'ainsi la partie seroit égale au Tout , ce qui est impossible. Il est donc impossible que les Lignes AB , CD , se coupent toutes-deux en deux parties égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

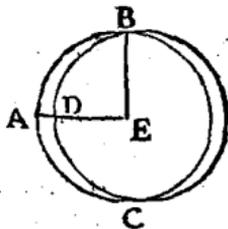


## PROPOSITION V.

## THEOREME IV.

*Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas un même Centre.*

JE suppose que les deux Cercles ABC, BDC, se coupent l'un l'autre aux Points B & C. Cela étant, je dis qu'ils n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,



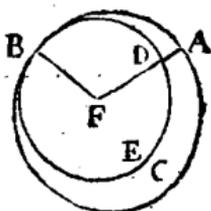
S'il étoit possible qu'ils eussent tous-deux un même Centre, à sçavoir E : en menant de ce Point une Ligne droite à l'un des Points où ces deux Cercles s'entre-coupent, par exemple au Point B, & une autre Ligne droite en quelque autre Point, comme A, qui les coupât tous-deux : De ce que le Point E seroit Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes EA, EB, seroient égales. D'ailleurs, de ce que ce même Point seroit aussi le Centre du Cercle BDC, il s'ensuivroit que les Lignes ED, EB, seroient aussi égales. Si bien que les deux Lignes EA, ED, qui seroient égales à une même, à sçavoir à EB, seroient égales entr'elles. C'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa partie; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDC, ayent un même Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION VI.

## THEOREME V.

*Si deux Cercles se touchent l'un l'autre en dedans, ils n'auront pas un même Centre.*

**J**E suppose que le Cercle BDE touche le Cercle ABC en dedans au Point B. Cela étant, je dis que ces deux Cercles n'ont pas un même Centre. Pour le prouver,



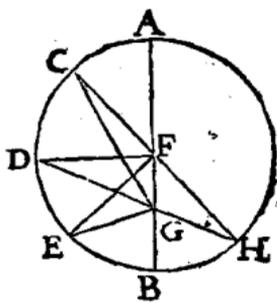
S'il étoit possible qu'ils eussent tous-deux un même Centre, à sçavoir F : menant de ce Centre au Point de leur atouchement la Ligne droite FB, puis une autre Ligne droite à quelqu'autre Point de la Circonférence du Cercle ABC, par exemple au Point A : De ce que le Point F seroit le Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes FA, FB, seroient égales. Et parce que ce même Point seroit aussi le Centre du Cercle BDE, il s'ensuivroit que les Lignes FD, FB, seroient aussi égales. Et ainsi les Lignes droites FA, FD, qui seroient égales à la même FB, seroient égales entr'elles, c'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa partie ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDE, ayent un même Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION VII.

## THEOREME VI.

Si ayant pris un Point, autre que le Centre, dans un Cercle, on mène de ce Point tant de Lignes droites que l'on voudra, jusqu'à la Circonférence; la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre; & la plus petite est le reste du Diametre. Quant aux autres Lignes, la plus proche de celle qui passe par le Centre est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçaurait mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.

JE suppose que dans le Cercle ADB, dont le Centre est F, on ait pris à discretion le Point G, différent du Centre F; & que de ce Point on ait mené à la Circonférence plusieurs Lignes droites, comme GA, GC, GD, GE, GB, entre lesquelles GA passe par le Centre F, & GB



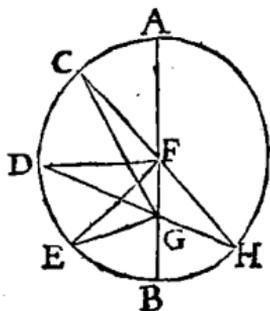
GB

# 138 ELEMENS D'EUCLIDE.

GB achève le Diametre AB. Cela étant, je dis premierement que la Ligne GA est la plus grande de toutes. Pour le prouver,

Menez du Centre F aux Points C, D, E, les Lignes droites FC, FD, FE. Cela posé:

Au Triangle GFC les deux Côtez GF, FC, sont plus grands que le troisiéme GE, par la 20. du 1. Donc si au lieu de FC on prend FA, qui lui est égale par la definition du Cercle, les deux Lignes GF, FA, ou la toute GA, sera plus grande que GC. On prouvera de même, que la Ligne GA est plus grande que les Lignes GD, GE. Mais GA est aussi plus grande que GB, puisque GA est plus grande que le demi-Diametre du Cercle, & que GB est plus petite. Et partant la Ligne GA est la plus grande de toutes.



Je dis en second lieu, que la Ligne GB est la plus petite de toutes. Pour le prouver,

Au Triangle EGF, les deux Côtez FG, GE, sont plus grands que le troisiéme FE, par la 20. du 1. Ils sont donc aussi plus grands que la Ligne FB, qui lui est égale. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie FG, qui leur est commune: il s'en suivra que le reste GE sera plus grand que le reste GB, & ainsi que GB est plus petite que GE. On prouvera de même, que GB est plus petite que GD, ou GC. Et partant la Ligne GB est la plus petite de toutes.

Je dis en troisiéme lieu, que la Ligne GC, qui est la plus proche de la Ligne GA qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que GD, ou GE. Pour le prouver,

Comparez les deux Triangles CFG, & DFG.

Le

## LIVRE TROISIE'ME. 139

Le Côté CF du premier Triangle est égal au Côté FD du second, par la définition du Cercle; le Côté FG est commun à ces deux Triangles. Deplus, l'Angle CFG, compris des deux Côtés du premier Triangle, est plus grand que l'Angle DFG, compris des deux Côtés du second, puis qu'il n'est que sa partie. Ainsi ( par la 24. du 1. ) la Baze GC est plus grande que la Baze GD. On prouvera de même, que GD est plus grande que GE. Et ainsi la Ligne GC, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en quatrième lieu, qu'on ne scauroit mener du Point G, de part & d'autre de la Ligne GB, plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ou bien qu'on n'en scauroit mener une troisième égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Point F la Ligne FH, qui fasse avec FB l'Angle BFH égal à l'Angle BFE; & du Point G au Point H menez la Ligne droite GH. Cela posé:

Les Triangles GEH & GFE ont les deux Côtés GF, FH, égaux aux deux Côtés GF, FE; & l'Angle GFH, compris des deux Côtés du premier Triangle, est égal à l'Angle GFE, compris des deux autres, par la construction. Donc la Baze GH est égale à la Baze GE; par la 4. du 1. Ainsi voilà deux Lignes droites égales menées du Point G de part & d'autre de la Ligne GB. Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisième égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déjà été prouvé. Car cette Ligne ou approchera plus près du Point B, & ainsi elle sera plus petite que GH: ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION VIII.

## THEOREME VII.

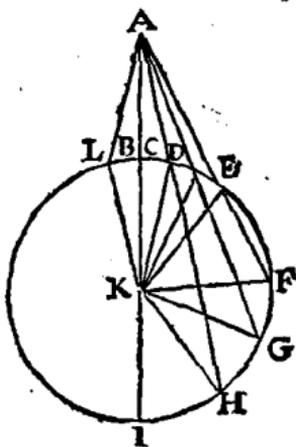
*Si d'un Point pris hors d'un Cercle on mène tant de Lignes droites que l'on voudra, qui se terminent à la Circonférence concave du Cercle : la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre; & celle qui en est plus proche est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée. Tout au contraire : de celles qui tombent sur la Circonférence convexe, celle qui étant prolongée passe par le Centre, est la plus petite de toutes; & celle qui en est plus proche est plus petite qu'une autre qui en est plus éloignée. Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes droites égales entr'elles.*

**J**E suppose que du Point A, pris à discretion, hors du Cercle BCD, on ait mené plusieurs Lignes droites AF, AG, AH, AI, qui se vont terminer à sa Circonférence concave; & que la Ligne AI passe par le Centre K. Cela étant, je dis  
pre-

premierement que la Ligne AI est la plus grande de toutes. Pour le prouver,

Menez du Centre K les Lignes droites KF, KG, KH. Cela posé:

Au Triangle AKH les deux Côtez AK, KH, sont plus grands que le troisieme AH, par la 20. du 1. Or AK & KH sont égaux à AK & à KI, ou à la toute AI. Ainsi la



Ligne AI est plus grande que la Ligne AH. On prouvera de même, que la Ligne AI est plus grande que la Ligne AG, & que la Ligne AF. Donc la Ligne AI est la plus grande de toutes.

Je dis en second lieu, que la Ligne AH, qui est la plus proche de la Ligne AI qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que AG, ou AF. Pour le prouver,

Aux Triangles AKH & AKG, les deux Côtez AK, KH, sont égaux aux deux Côtez AK, KG, chacun au sien. Mais l'Angle AKH est plus grand que l'Angle AKG, qui n'est que sa partie. Donc (par la 24. du 1.) la Baze AH est plus grande que la Baze AG. On prouvera de même, que la Ligne AG est plus grande que la Ligne AF. Et ainsi la Ligne AH, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en troisieme lieu, qu'entre les Lignes AB, AC, AD, AE, qui partent du Point A, & qui tombent sur la Circonference convexe du Cercle BCD, la plus petite de toutes est la Ligne AB, qui étant prolongée passe par le Centre K. Pour le prouver,

Menez

## 142 ELEMENS D'EUCLIDE.

Menez du Centre K les Lignes droites KC, KD, KE. Cela posé :

Au Triangle AKC le Côté AK est moindre que les deux Côtés KC, AC, par la 20. du 1. Donc si de ces deux Touts inégaux on ôte des parties égales, à sçavoir KB & KC: le reste AB sera plus petit que le reste AC. On prouvera de même, que la Ligne AB est plus-petite que AD, ou AE. Et par-tant elle est la plus petite de toutes.

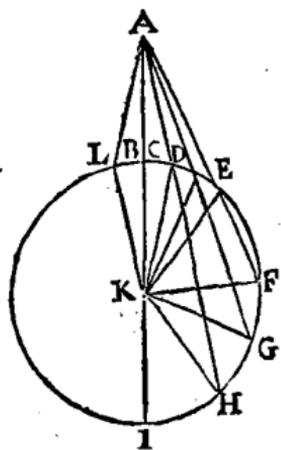
Je dis en quatrième lieu, qu'entre les Lignes AC, AD, AE, celle qui approche de plus près de la Ligne AB, est plus petite qu'une autre plus éloignée. Pour le prouver,

Les Lignes AC, KC, sont menées des extrémités de la Ligne AK, qui est un des Côtés du Triangle AKD, & se rencontrent dans ce Triangle. Donc (par la 21. du 1.)

les Lignes AC, KC, sont plus petites que les Lignes AD, KD. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte les parties égales KC, KD: le reste AC sera plus petit que le reste AD. On prouvera de même, que AD est plus petite que AE. Et ainsi de toutes ces Lignes, celle qui est la plus proche de la Ligne AB est plus petite qu'une autre plus éloignée.

Je dis enfin qu'on ne sçauroit mener du Point A de part & d'autre de la Ligne AB plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisième égale aux deux autres. Pour le prouver,

Menez du Centre K la Ligne KL, qui fasse avec KA l'Angle AKL égal à l'Angle AKC; & du Point L au Point A menez la Ligne droite LA. Cela posé :



Les

## LIVRE TROISIE'ME. 143

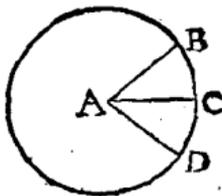
Les deux Triangles AKL, AKC, ont les deux Côtés AK, KL, égaux aux deux Côtés AK, KC, chacun au sien ; & l'Angle AKL, compris des deux Côtés du premier Triangle, est égal à l'Angle AKC compris des deux autres Côtés, par la construction. Donc la Baze AL est égale à la Baze AC, par la 4. du 1. Ainsi voilà deux Lignes droites égales menées du Point A de part & d'autre de la Ligne AB. Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisième égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déjà été prouvé. Car cette Ligne ou approchera plus près de la Ligne AB, & ainsi elle sera plus petite : ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

### PROPOSITION IX.

#### THEOREME VIII.

*Si ayant pris un Point dans un Cercle, l'on peut mener de ce Point à la Circonférence du Cercle plus de deux Lignes droites égales entr'elles, ce Point-là est le Centre du Cercle.*

JE suppose que dans le Cercle BCD l'on ait pris le Point A ; & qu'ayant mené de ce Point à la Circonférence les trois Lignes droites AB, AC, AD, ces trois Lignes se trouvent égales. Cela étant, je dis que le Point A est le Centre de ce Cercle.



Car si cela n'étoit, il s'ensuivroit que d'un Point pris

# 144 ELEMENS D'EUCLIDE.

pris dans un Cercle, lequel Point ne seroit pas le Centre, on pourroit mener à la Circonference plus de deux Lignes droites égales entr'elles; ce qui est impossible par la 7. Prop. Par conséquent le Point A est le Centre de ce Cercle; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION X.

### THEOREME IX.

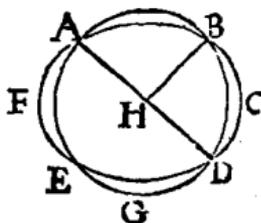
*Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils ne se couperont pas en plus de deux Points.*

**J**E suppose que les deux Cercles ABDGE & ABCDEF se coupent l'un l'autre. Cela étant, je dis qu'ils ne se coupent pas en plus de deux Points. Pour le prouver,

Supposons, s'il est possible, qu'ils se coupent l'un l'autre aux trois Points A, B, D. Cela posé:

Trouvez (par la premiere Proposition) le Centre du Cercle ABDGE, & que le Centre soit H; puis de ce Centre menez à ces trois Points A, B, D, les Lignes droites HA, HB, HD. Cela posé:

Puisque le Point H est le Centre du Cercle ABDGE, les Lignes HA, HB, HD, qui partent de ce Centre, & se vont terminer à sa Circonference, sont égales entr'elles. Et puisque ces trois mêmes Lignes partent aussi d'un Point pris dans le



Cercle

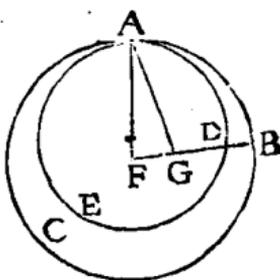
Cercle ABCDEF, & qu'elles vont se terminer à sa Circonference, le Point H est aussi le Centre du Cercle ABCDEF. Et ainsi il s'ensuivroit que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, auroient un même Centre; ce qui est impossible, par la 5. Prop. Il est donc impossible que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre, se puissent couper en plus de deux Points; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

THEOREME X.

*Si un Cercle en touche un autre en dedans, la Ligne droite menée par leurs Centres étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement.*

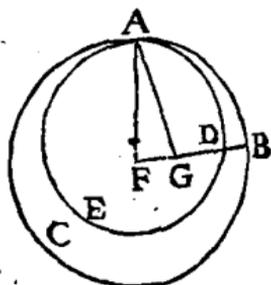
Je suppose que le Cercle ADE touche le Cercle ABC en dedans au Point A. Cela étant, je dis que si on mène par leurs Centres une Ligne droite, cette Ligne étant prolongée, passera par le Point de leur attouchement; ou, ce qui est la même chose, que si on mène du Point F, Centre du Cercle ABC, au Point A, qui est le Point de leur attouchement, la Ligne droite FA; le Centre du Cercle ADE se rencontrera dans cette Ligne.



Car si cela n'étoit, le Centre du Cercle ADE seroit en quelque Point hors de la Ligne FA. Qu'il soit donc au Point G, s'il est possible. En ce cas,

## 146 ELEMENS D'EUCLIDE.

si l'on mène par le Point F, & par le Point G, la Ligne droite FGDB, elle coupera la Circonférence des deux Cercles ailleurs qu'au Point de leur attouchement. Puis menant du Point G au Point A la Ligne droite GA, cette Ligne avec les deux autres FG, FA, composera le Triangle FGA, dont les deux Côtes FG, GA, seront plus grands que le troisième FA, par la 20. du 1. Ils seront donc aussi plus grands que son égale FB. Si donc de ces deux Touts inégaux on ôte la partie commune FG, le reste GA sera plus grand que le reste GB. Mais puisque le Point G est le Centre du Cercle ADE, la Ligne GD est égale à GA. Et ainsi la Ligne GD sera aussi plus grande que la Ligne GB, c'est à dire la partie que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle ADE soit hors de la Ligne FA; Ce qu'il falloit démontrer.

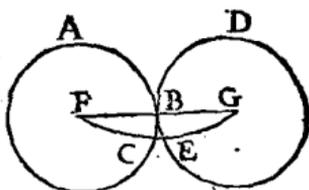


## PROPOSITION XII.

## THEOREME XI.

*Si deux Cercles se touchent l'un l'autre par dehors, la Ligne droite menée d'un Centre à l'autre passera par le Point de leur attouchement.*

JE suppose que les Cercles ABC, DBE, se touchent l'un l'autre par dehors au Point B, & que du Centre de l'un au Centre de l'autre on ait mené la Ligne droite FG. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Point de leur attouchement.



Car si cela n'étoit, elle passeroit par ailleurs. Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les Points C & E, & qu'ainsi la Ligne FCEG soit une Ligne droite. Cela étant, les deux Lignes BF, BG, ne concourront pas directement, & ainsi feront un Angle au Point B, & avec la troisième FCEG feront un Triangle, dont les deux Côtés BF, BG, seront ensemble plus grands que le troisième FCEG, par la 20. du 1. Mais les Lignes FC, GE, sont égales à BF, BG, par la définition du Cercle. Donc ces mêmes Lignes FC, GE, seroient aussi plus grandes que la Ligne entière FCEG, c'est à dire la partie que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne qui est menée par les Centres F & G, passe par un autre Point que B; Ce qu'il falloit démontrer.

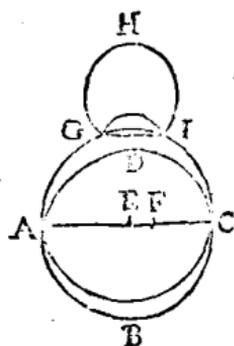
## PROPOSITION XIII.

## THEOREME XII.

*Si un Cercle en touche un autre, soit en dedans, soit en dehors, il ne le touchera pas à plus d'un Point.*

Je suppose premierement que le Cercle ADC touche le Cercle ABC en dedans. Cela étant, je dis qu'il ne le touche pas à plus d'un Point.

Car si cela étoit, posons, s'il est possible, qu'il le touche aux deux Points A, & C. Si cela est: puisque (par la 6. Prop.) deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, n'ont pas un même Centre, les deux Cercles ABC, ADC, auront chacun leur Centre particulier, par exemple E & F. Et puisque (par la 11. Prop.) la Ligne menée par les Centres de deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, étant prolongée, passe par le Point de leur attouchement, il s'ensuivra que la Ligne EF étant prolongée de part & d'autre, passera par les Points A & C. Ensuite dequoy, puisque le Point E est le Centre du Cercle ABC, la Ligne EA, & la Ligne EC, sont égales: Mais la Ligne FA est plus grande que EA, qui n'est que sa partie. Donc elle est aussi plus grande que la Ligne EC, & à plus forte raison que la Ligne FC. D'ailleurs, puisque le Point F est le Centre du Cercle ADC, la Ligne FA, & la Ligne FC, sont aussi égales. Si



Si  
bien

bien que les deux Lignes FA, FC, sont ensemble égales, & inégales; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'un Cercle qui en touche un autre en dedans, le touche à plus d'un Point.

Je suppose en second lieu que le Cercle GHI touche le Cercle ABC par dehors. Cela étant, je dis qu'il ne le sçauroit toucher à plus d'un Point.

Car par exemple, s'il le pouvoit toucher aux deux Points G & I: puisque ces deux Points seroient dans la Circonference de ces deux Cercles; en menant du Point G au Point I la Ligne droite GI, elle devoit (par la 2. Prop.) tomber dans l'un & dans l'autre de ces deux Cercles; ce qui est impossible, puisque l'un est supposé hors de l'autre. Il est donc impossible que le Cercle GHI touche le Cercle ABC à plus d'un Point; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIII.

*Dans un Cercle, les Lignes droites égales sont également distantes du Centre; Et celles qui sont également distantes du Centre sont égales entr'elles.*

JE suppose que dans le Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, sont égales entr'elles. Cela étant, je dis que ces deux Lignes sont également distantes du Centre E. C'est à dire, que si du Centre E l'on abaisse sur ces Lignes les Perpendiculaires EF, EG, par la



G 3

12. du

CIDE

N VII

XII

e, soit en  
ne le mes



par un  
DC, au  
vampé  
se mes  
l'un  
pâte  
sura  
ure, p  
u, p  
la  
a l'op  
la p  
sige  
de DC  
a. s  
les

# 150 ELEMENS D'EUCLIDE.

12. du 1. ces Perpendiculaires sont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela posé :

Puisque les Lignes EF, EG, partent du Centre E, & qu'elles tombent perpendiculairement sur AD & sur BC, il s'ensuit qu'elles les coupent en deux également, par la 3. Prop. & partant AF est la moitié de AD, & BG la moitié de BC : d'où il suit que les deux Lignes AF, & BG, sont égales, par le 7. Ax. du 1. D'ailleurs, puisque le Triangle AFE est Rectangle, les deux Quarrez de AF & de FE sont égaux au Carré de



AE, ou de son égale EB, par la 47. du 1. Mais puisque le Triangle EGB est aussi Rectangle, les deux Quarrez de BG & de EG sont aussi égaux au Carré de EB. Et partant les deux Quarrez de AF & de FE sont égaux aux deux Quarrez de BG & de EG. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de AF & de BG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont égales, les restes, à sçavoir le Carré de EF & le Carré de EG, seront égaux entr'eux. D'où il suit que les deux Lignes EF, EG, sont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

Je suppose en second lieu, que dans le même Cercle ABCD les deux Lignes droites AD, BC, sont également distantes du Centre E ; c'est à dire que les Perpendiculaires EF, EG, qu'on a abaissées du Centre E sur ces deux Lignes, sont égales. Cela étant, je dis que ces deux Lignes AD, BC, sont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez les deux Lignes droites EA, EB. Cela posé :

Puisque le Triangle AEF est Rectangle, les deux Quarrez de EF & de FA sont égaux au Carré de EA,

# LIVRE TROISIE'ME. 151

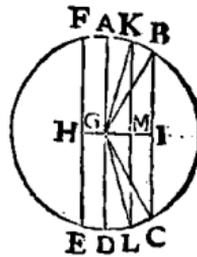
EA, ou de son égale EB. Mais les deux Quarrez de EG & de GB sont aussi égaux au Quarré de EB. Donc les deux Quarrez de EF & de FA sont égaux aux deux Quarrez de EG & de GB. Si donc de ces deux Touts égaux on ôte les Quarrez de EF & de EG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont supposées égales, les restes, à sçavoir le Quarré de FA & le Quarré de GB, seront égaux entr'eux. D'où il suit que les deux Lignes FA, GB, sont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1. Mais (par la 3. Prop.) les Lignes AD & BC sont doubles de FA & de GB. Donc ces deux Lignes AD & BC sont égales entr'elles; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XV.

### THEOREME XIV.

*Si on mène plusieurs Lignes droites dans un Cercle, la plus grande de toutes est le Diametre, & celle qui approche le plus près du Centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.*

JE suppose que dans le Cercle ABCD on ait mené plusieurs Lignes droites, comme AD, BC, FE; que AD soit le Diametre, & que FE soit plus près du Centre G que n'est la Ligne BC. Cela étant, je dis premièrement que AD est la plus grande de toutes. Pour le prouver,



152 ELEMENS D'EUCLIDE.

Abaissez du Centre G sur FE & sur BC les Perpendiculaires GH, GI. Cela posé :

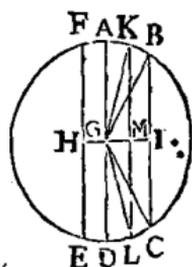
Puisque BC est supposée plus éloignée du Centre G que n'est pas FE, la Ligne GI est plus grande que GH, par la 6. Définition. Retranchez donc de GI la partie GM, égale à GH, & menez par le Point M la Ligne droite KML, perpendiculaire à GI. Enfin tirez les Lignes droites GK, GB, GL, GC. Cela posé :

Au Triangle KGL, les deux Côtez KG, GL, sont plus grands que le troisième KL, par la 20. du 1. Or KG & GL sont égaux à GA & à GD, ou au Diametre AD. Donc le Diametre AD est plus grand que la Ligne KL.

Mais, par la Prop. precedente, KL est égale à FE, puisqu'elle est autant éloignée du Centre G que la Ligne FE. Partant le Diametre AD est plus grand que la Ligne FE. On prouvera de même, que AD est plus grand que BC. Et ainsi le Diametre du Cercle est la plus grande de toutes les Lignes qu'on peut mener dans un Cercle.

Je dis en second lieu, que la Ligne FE, ou son égale KL, qui est plus près du Centre G que n'est pas BC, est plus grande que BC. Pour le prouver,

Aux deux Triangles KGL, & BGC, les deux Côtez KG, GL, sont égaux aux deux Côtez BG, GC, chacun au sien. Mais l'Angle KGL est plus grand que l'Angle BGC, qui n'est que sa partie. Donc ( par la 24. du 1. ) la Baze KL est plus grande que la Baze BC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



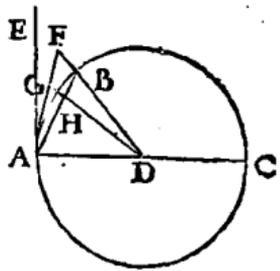
PROPOSITION XVI.

THEOREME XV.

Si on élève une Perpendiculaire à l'extremité du Diametre d'un Cercle, elle touchera le Cercle sans le couper. Et de l'extremité du Diametre on ne pourra pas mener une Ligne droite qui soit entre la Perpendiculaire & la Circonférence. Deplus, l'Angle mixte, compris de la Circonférence & du Diametre, est plus grand que tout Angle rectiligne aigu; & l'Angle mixte, compris de la Circonférence & de la Perpendiculaire, est plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

Je suppose qu'à l'extremité A du Diametre AC du Cercle ABC, on a élevé la perpendiculaire AE. Cela étant, je dis premierement que cette Perpendiculaire touche le Cercle sans le couper.

Car si cette Perpendiculaire coupoit le Cercle, comme fait ici la Ligne AB: en menant du Centre D au Point où cette Perpendiculaire couperoit le Cercle, par exemple au Point B, la Ligne droite DB; les Angles DAB, DBA, seroient égaux, par la 5. du 1. Mais l'Angle DAB est



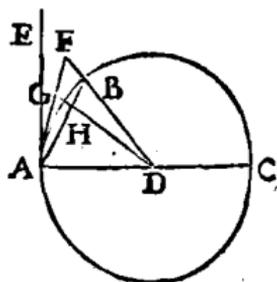
Mais l'Angle DAB est droit.

LUDE.  
de 30. as 3e  
gise de a  
le phage  
Receus  
S. man  
perpendic  
G, Gb.  
F, A, B  
H  
E, P, U  
urant abge  
ut le Part  
On puce  
3C. Hanc  
de nocet  
ie.  
FE, ou la  
G que ac  
le puce  
; les des  
Coter. D.  
L est par  
la para  
plus que  
allon de

## 154 ELEMENS D'EUCLIDE.

droit, par la construction. Par conséquent l'Angle DBA seroit aussi droit; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible qu'une Ligne droite élevée perpendiculairement à l'extrémité du Diamètre d'un Cercle, coupe ce Cercle. Et par conséquent il est vrai qu'elle le touche sans le couper; & ainsi qu'elle est hors le Cercle.

Je dis en second lieu, que de l'extrémité A on ne peut pas mener une Ligne droite qui soit entre la Perpendiculaire AE & la Circonférence AB.



Car si l'on prétendoit qu'on en pût mener une, par exemple AF: comme cette Ligne ne seroit pas perpendiculaire au Diamètre AC, ce Diamètre ne lui seroit pas non plus perpendiculaire. Donc en tirant du Centre D une Ligne perpendiculaire à AF, cette Ligne tombera en quelque Point de la Ligne AF, par exemple au Point G; & ce Point sera différent du Point A, & par conséquent hors le Cercle. D'où il s'ensuivra que la Ligne DG, qui passera au delà de la Circonférence, sera plus grande que DA. Si bien que dans le Triangle DAG, l'Angle DAG, qui est soutenu du Côté DG, sera plus grand que l'Angle DGA, qui est soutenu du Côté DA, qui est plus petit. Or l'Angle DGA est droit, par la construction. Donc l'Angle DAG sera plus grand qu'un droit. Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible de pouvoir mener du Point A une Ligne droite qui se trouve entre la Perpendiculaire AE & la Circonférence AB.

Je dis en troisième lieu, que l'Angle BAD, compris de la Circonférence AB & du Diamètre AD, est plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

Car

# LIVRE TROISIÈME. 155

Car si on mène du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus près qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus grand Angle rectiligne aigu qu'il est possible : il s'ensuivra, par ce qui vient d'être prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec le Diametre AC un Angle plus petit que l'Angle mixte BAD ; lequel par conséquent est plus grand que tout Angle rectiligne aigu.

Je dis enfin, que l'Angle de contingence BAE, compris de la Circonférence du Cercle & de la Perpendiculaire AE, est plus petit que tout Angle rectiligne aigu.

Car si on mène du Point A une Ligne droite, & qu'on l'approche le plus près qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus petit Angle rectiligne aigu qu'il est possible : il s'ensuivra de même, par ce qui a été déjà prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec la Ligne AE un Angle plus grand que l'Angle de contingence BAE ; lequel par conséquent est plus petit que tout Angle rectiligne aigu ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

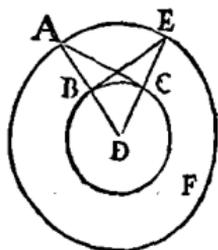


## PROPOSITION XVII.

## PROBLEME II.

*D'un Point donné hors d'un Cercle, mener une Ligne droite qui touche le Cercle.*

**J**E suppose qu'on donne le Point A, hors le Cercle BC; & je propose de mener du Point A une Ligne droite qui touche le Cercle BC. Pour le faire,



Du Point A au Centre D menez la Ligne droite AD; & du Centre D, & de l'intervalle DA, décrivez le Cercle AEF. Puis du Point B, où la Ligne droite AD coupe le Cercle BC, élevez la Ligne droite BE perpendiculaire à AD. De même, du Point E, où la Ligne BE coupe le Cercle AEF; au Centre D, menez la Ligne droite ED. Enfin du Point A au Point C, où la Ligne DE coupe la Circonférence du Cercle BC, menez la Ligne droite AC. Cela étant, je dis que la Ligne AC, qui part du Point donné A, touche le Cercle BC. Pour le prouver,

Les Triangles ADC, EDB, ont les deux Côtés AD, DC, égaux aux deux Côtés ED, DB, chacun au sien; & l'Angle D, compris de ces Côtés égaux, est commun. Donc (par la 4. du 1.) la Baze est égale à la Baze, & l'Angle ACD est égal à l'Angle EBD. Or l'Angle EBD est droit, par la construction. Donc l'Angle ACD est aussi droit. Et partant (par la Proposition précédente) la Ligne AC, qui est élevée perpendiculairement à l'extrémité

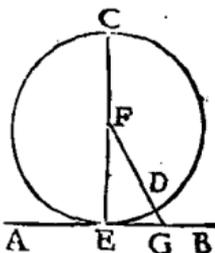
tremité du Diametre DC, touche le Cercle BC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

*Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Centre à l'attouchement on mène une autre Ligne droite, cette Ligne sera perpendiculaire à la Touchante.*

**J**E suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle EDC au Point E, & que du Centre F on mène au Point de l'attouchement E la Ligne droite FE. Cela étant, je dis que la Ligne FE est perpendiculaire à la Touchante AB.



Car si FE n'étoit pas perpendiculaire à AB, on pourroit (par la 12. du 1.) du Point F abaisser sur AB une Perpendiculaire, comme FG; laquelle allant rencontrer la Ligne AB en un autre Point que celui de l'attouchement, passera au delà de la Circonférence du Cercle, & par consequent sera plus grande que FD, qui est bornée à cette Circonférence, ou que son égale FE. Si bien que dans le Triangle FEG, l'Angle FEG, qui est soutenu du Côté FG, sera plus grand que l'Angle FGE, qui est soutenu du Côté FE, qui est plus petit. Or l'Angle FGE est droit, par cette fausse construction. Donc l'Angle FEG sera plus grand qu'un droit. Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux droits; ce qui est impossible,

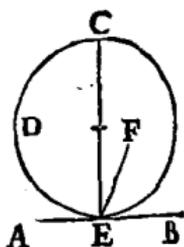
par la 17. du 1. Il est donc impossible que la Ligne FE ne soit pas perpendiculaire à AB ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XIX.

### THEOREME XVII.

*Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on élève une Perpendiculaire, elle passera par le Centre.*

JE suppose que la Ligne droite AB touche le Cercle CDE, au Point E ; & que de ce Point on élève la Ligne droite EC perpendiculaire à AB. Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Centre, ou ce qui est la même chose, que le Centre du Cercle se rencontre dans la Ligne EC.



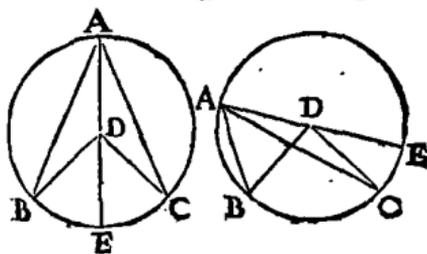
Car si cela n'étoit, le Centre de ce Cercle seroit en quelque Point hors de cette Ligne, par exemple, au Point F. Tirant donc de ce Point à celui de l'attouchement, la Ligne droite FE : cette Ligne, par la Proposition précédente, sera perpendiculaire à AB. Et partant l'Angle AEF sera droit. Mais l'Angle AEC est déjà droit, par supposition. Ainsi l'Angle AEF seroit égal à l'Angle AEC, c'est à dire le Tout à sa partie ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Centre du Cercle CDE soit hors de la Ligne EC, laquelle par consequent passe par le Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XVIII.

*Au Cercle, l'Angle du Centre est double de l'Angle de la Circonférence, quand ils s'appuyent tous-deux sur un même Arc, où qu'ils ont une même portion de Circonférence pour Base.*

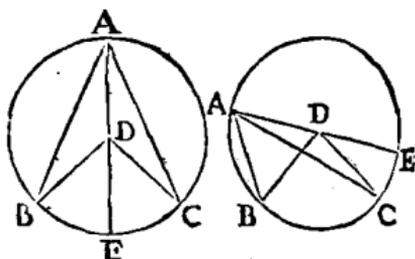
Je suppose que dans le Cercle ABC, l'Angle BDC, qui est au Centre D, & l'Angle BAC, qui est à la Circonférence, s'appuyent tous-deux sur un même Arc, & ont la même portion de Circonférence pour Base, à sçavoir BC. Cela étant, je dis que l'Angle BDC est double de l'Angle BAC. Pour le prouver,



Menez par les Points A & D la Ligne droite ADE. Cela posé :

Au Triangle ADB les deux Côtés DA, DB, sont égaux, par la définition du Cercle. Donc ( par la 5. du 1. ) les deux Angles DAB & DBA sont égaux entr'eux. Or l'Angle extérieur BDE est égal aux deux Angles DAB & DBA, par la 32. du 1. Donc l'Angle BDE est double de l'Angle BAD. De même, au Triangle ADC les deux Côtés DA, DC, sont égaux ; par conséquent les deux Angles DAC & DCA sont aussi égaux. Or l'Angle EDC est aussi égal

égal aux deux  
Angles DAC &  
DCA ; donc il  
est double de  
l'Angle DAC. Si  
donc à l'Angle  
BDE on ajoute  
l'Angle EDC, &



à l'Angle BAD on ajoute l'Angle DAC ; l'Angle  
BDC sera double de l'Angle BAC, par le 19. Ax.  
du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

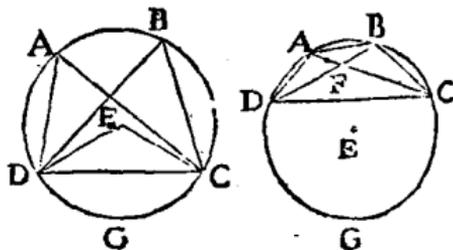
Que si le Point A avoit été pris comme dans cette  
seconde Figure, on auroit prouvé de même, que  
l'Angle BDE est double de l'Angle BAD, & que  
l'Angle CDE est double de l'Angle CAD. Ensuite  
de quoi, ôtant l'Angle CAD de l'Angle BAD, &  
l'Angle CDE de l'Angle BDE ; l'Angle restant  
BDC sera double de l'Angle restant BAC, par le  
20. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXI,

### THEOREME XIX.

*Au Cercle, les Angles qui sont dans un  
même Segment, ou qui s'appuyent sur un  
même Arc, sont égaux entr'eux.*

JE suppose  
que dans  
le Cercle  
ABCD les  
deux Angles  
DAC, DBC,  
soient dans le  
même Seg-



ment

# LIVRE TROISIE'ME. 161

ment DABC, ou, ( ce qui est la même chose) qu'ils s'appuyent tous-deux sur le même Arc DGC. Cela étant, je dis que ces deux Angles DAC, DBC, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

Comme tout Segment de Cercle est plus ou moins grand qu'un demi - Cercle; supposons premièrement que le Segment DABC soit plus grand que le Demi-cercle. Cela supposé, menez du Centre E aux extremitéz D & C de la Baze du Segment, les Lignes droites ED, EC. Cela posé:

L'Angle DEC, qui est au Centre, est double de l'Angle DAC, qui est à la Circonference, par la Prop. precedente; & par la même raison il est aussi double de l'Angle DBC. Et partant les deux Angles DAC & DBC, qui sont chacun moitié d'un même Angle, sont égaux entr'eux.

Supposons en second lieu, que le Segment DABC soit plus petit que le demi-Cercle. Cela supposé, du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela posé:

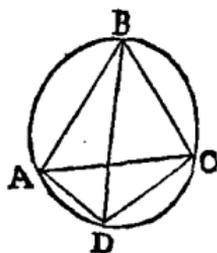
Puisque le Segment DABC est plus petit que le demi-Cercle, il s'ensuit que le Segment DGC est plus grand que le demi-Cercle, & à plus forte raison le Segment AGB. D'où il suit que les Angles ADB, ACB, qui sont dans le Segment AGB, sont égaux entr'eux, par ce qui vient d'être prouvé. D'ailleurs, les Angles AFD, BFC, sont aussi égaux entr'eux, par la 15. du 1. Par consequent les deux Triangles AFD, BFC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien. Et partant le troisième DAF, ou DAC, est égal au troisième FBC, ou DBC, par le 2. Corollaire de la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXII.

## THEOREME XX.

*Les Figures de quatre Côtés inscrites au Cercle, ont les Angles oppozés égaux à deux droits.*

**J**E suppose que la Figure ABCD soit inscrite dans le Cercle ABCD. Cela étant, je dis que les Angles oppozés, comme BAD & BCD, sont égaux à deux droits. Pour le prouver,



Menez les deux Lignes droites AC & BD. Cela posé :

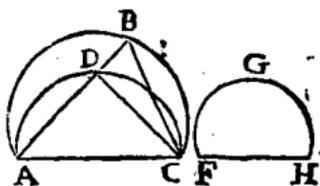
L'Angle BAC & l'Angle BDC s'appuyent sur le même Arc BC ; donc ils sont égaux, par la Proposition precedente. L'Angle CAD & l'Angle CBD s'appuyent aussi sur un même Arc, à sçavoir DC ; donc ils sont aussi égaux. Partant les deux Angles BAC & CAD, qui font l'Angle total BAD, sont égaux aux deux Angles DBC & BDC. Mais ces deux-ci pris avec le troisiéme BCD, valent deux droits, par la 32. du 1. Donc l'Angle BAD, pris avec le même Angle BCD, valent aussi deux droits. On prouvera, par la même raison, que les deux Angles ABC & ADC sont égaux à deux droits, Qui est ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXI.

*Si deux portions de Cercles sont semblables & inégales, leurs Bazes ne seront pas égales.*

JE suppose que les deux portions de Cercles ABC, FGH, soient semblables & inégales. Cela étant, je dis que leurs Bazes AC, FH, ne sont pas égales.



Car si ces Bazes étoient égales : en transportant par pensée le Segment ou portion de Cercle FGH sur le Segment ABC, on pourroit faire convenir la Baze FH avec la Baze AC. Et d'autant que le Segment FGH est supposé inégal au Segment ABC, l'Arc FGH ne conviendrait pas avec l'Arc ABC. C'est pourquoi l'Arc FGH tomberoit en quelque autre endroit, comme par exemple à l'endroit ADC. Tirant donc la Ligne droite ADB, qui coupe ces Arcs aux Points D & B, & menant les Lignes droites CB, CD ; il s'ensuivra que puisque les Segmens ADC, ABC, sont supposés semblables, les Angles ADC, ABC, qui sont dans ces Segmens, seront égaux entr'eux, par la définition des Segmens semblables. Et ainsi l'Angle ADC, qui est extérieur au respect du Triangle DBC, seroit égal à son opposé intérieur DBC ; ce qui est impossible, par la 16. du 1. Donc si deux portions de Cercles sont semblables & inégales, leurs Bazes ne seront pas égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

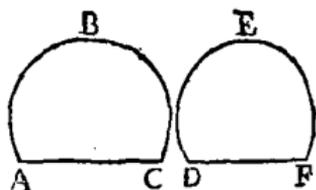
P R O-

## PROPOSITION XXIV.

## THEOREME XXII.

*Si deux Segmens, ou deux portions de Cercles, semblables, ont pour Bazes des Lignes droites égales, ils seront égaux entr'eux.*

**J**E suppose que les deux Segmens ABC, DEF, soient semblables, & que leurs Bazes AC, DF, soient égales. Cela étant, je dis que ces deux Segmens sont égaux entr'eux.



Car s'ils étoient inégaux, il s'ensuivroit que deux Segmens semblables & inégaux auroient des Bazes égales; ce qui est impossible, par la Prop. precedente. Donc ces deux Segmens sont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

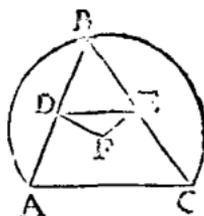


## PROPOSITION XXV.

## PROBLEME III.

*Une portion de Cercle étant donnée, décrire le Cercle duquel elle est portion.*

JE suppose que la portion de Cercle ABC soit donnée, & je propose de décrire le Cercle entier duquel elle est portion ; c'est à dire que je propose de trouver le Centre du Cercle, duquel la portion ABC est donnée. Pour le faire,



Prenez à discretion dans la Circonférence ABC trois Points, par exemple A, B, C. Menez les deux Lignes droites AB, BC. Coupez chacune de ces Lignes en deux également aux Points D & E. De chacun de ces Points élevez une Perpendiculaire, sçavoir DF, EF. Cela étant, je dis que ces deux Perpendiculaires se rencontreront ; & que le Point de leur rencontre, à sçavoir F, est le Centre du Cercle dont ABC est une portion. Pour le prouver,

Du Point D au Point E menez la Ligne droite DE. Cela posé :

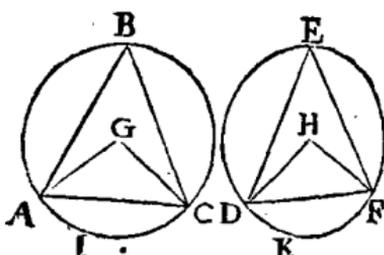
Puisque les Angles BDF & BEF sont droits, par la construction, les Angles EDF & DEF, qui n'en sont que les parties, sont moindres que deux droits. Et partant les deux Lignes DF, EF, se doivent rencontrer, par la Remarque de la 28. du 1. Ensuite de quoi, il s'ensuit, par la 1. Remarque de la premiere Prop. de ce Livre, que le Point F est le Centre cherché ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXVI.

## THEOREME XXIII.

*Aux Cercles égaux , les Angles égaux s'appuyent sur Circonférences égales ; soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonférence.*

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez au Centre, ou les Angles ABC, DEF, qui sont constituez à la Circonférence, soient aussi égaux entr'eux. Cela étant, je dis que les Arcs AIC, DKF, sur lesquels ces Angles s'appuyent, sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Menez les Lignes droites AC, DF. Cela posé : Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux, il s'ensuit que les Côtez AG, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez DH, HF, du Triangle DHF. Deplus, l'Angle AGC est supposez égal à l'Angle DHF. Partant la Baze AC est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ainsi nous avons deux Segmens de Cercles ABC, DEF, qui sont semblables, puis qu'ils sont supposez capables d'Angles égaux ; & qui d'ailleurs ont pour Bazes des Lignes droites égales, sçavoir AC, DF. Et partant ces deux Segmens sont égaux, par la 24. Prop. D'où il suit, que si on les ôte des deux Cercles

Cercles entiers, qui sont supposez égaux, les Arcs restans AIC, DKF, seront égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

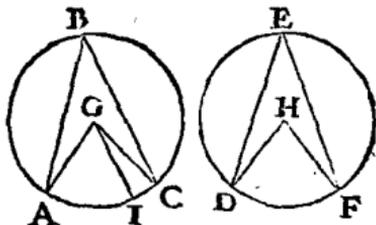
THEOREME XXIV.

*Aux Cercles égaux, les Angles qui s'appuyent sur Circonférences égales sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonférence.*

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Arcs AC, DF soient aussi égaux. Cela étant, je dis premierement que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez aux Centres G & H, & qui s'appuyent sur ces deux Arcs, sont égaux entr'eux.

Car s'ils n'étoient pas égaux, il faudroit que l'un de ces Angles fût plus grand que l'autre.

Posons donc que ce soit l'Angle AGC Si cela est, par la 24. du 1. on pourra en retrancher une partie, comme AGI, égale à DHF. Ensuite de quoi, par la Prop. precedente, l'Arc AI sera égal à l'Arc DF. Mais l'Arc AC est déjà supposez égal à l'Arc DF. Ainsi l'Arc AI & l'Arc AC seroient égaux entr'eux, c'est à dire la partie au Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que l'Angle AGC soit plus grand que l'Angle DHF. On prouvera de même, que l'Angle DHF n'est pas plus grand que l'Angle AGC;

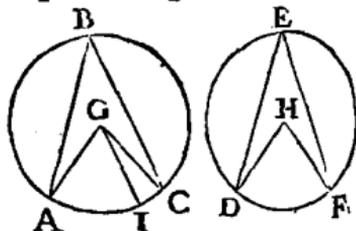


CIDE.  
XVI  
XXIII  
Angles ég  
entes ég  
au Cer  
D  
K  
z à l'Arc  
Cela est  
quelques  
ix. Par  
Cela est  
ne suppo  
GC. à  
Arc DE  
le Me  
ne à l'Arc  
1. Arc  
DE.  
ne suppo  
or de  
DE  
par la  
des  
cité

Y68 ELEMENS D'EUCLIDE.

AGC ; & partant ces deux Angles sont égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu , que les Angles ABC , DEF, qui sont à la Circonference, & qui s'appuyent sur ces mêmes Arcs , sont égaux entr'eux.



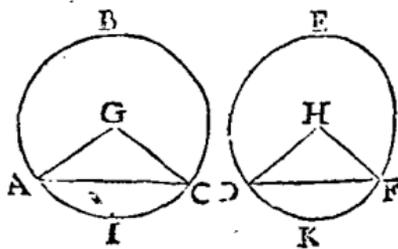
Car ( par la 20. Prop. ) ces deux Angles ABC , DEF, sont moitié des Angles AGC , DHF, qui viennent d'être prouvez égaux. Et partant les deux Angles ABC , DEF, sont égaux entr'eux , par le 7. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXV.

*Aux Cercles égaux , les Lignes droites égales soutiennent Circonférences égales.*

JE suppose que les Cercles ABC , DEF, soient égaux , & que les Lignes AC , DF, qui sont les Souten-



dantes des Arcs AIC & DKF , soient égales. Cela étant , je dis que les Arcs AIC & DKF sont égaux entr'eux. Pour le prouver ,

Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC ; HD , HF. Cela posé :

Les

# LIVRE TROISIE'ME. 169

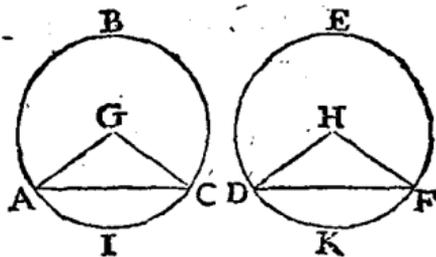
Les Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux Côtez HD, HF, du Triangle DHF, par la definition des Cercles égaux. Deplus, la Baze AC est égale à la Baze DF, par supposition. Donc l'Angle AGC est égal à l'Angle DHF, par la 8. du 1. D'où il suit (par la 26. Prop.) que les Arcs AIC & DKF, sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXIX.

### THEOREME XXVI.

*Aux Cercles égaux, les Circonférences égales ont leurs Soutendantes égales.*

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Circonférences ou les Arcs AIC, DKF, soient



aussi égales. Cela étant, je dis que les Lignes AC & DF, qui en sont les Soutendantes, sont égales entr'elles. Pour le prouver,

Menez des Centres G & H les Lignes droites GA, GC; HD, HF. Cela posé :

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux : les deux Côtez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Côtez HD, HF, du Triangle DHF. D'ailleurs l'Angle AGC, compris des deux Côtez du premier Triangle, est égal à l'Angle DHF, compris des deux Côtez du second; puisque les Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont

égaux par supposition. Et partant la Baze AC est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

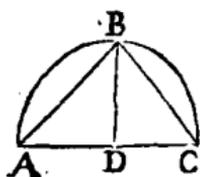
## PROPOSITION XXX.

### PROBLEME IV.

*Couper en deux également un Arc de Cercle donné.*

**J**E suppose que l'Arc de Cercle ABC, soit donné; & je propose de le couper en deux parties égales. Pour le faire;

Du Point A au Point C menez la Ligne droite AC; coupez cette Ligne en deux également au Point D; élevez au Point D la Perpendiculaire DB, qui rencontre l'Arc au Point B. Cela étant, je dis que cet Arc est coupé en deux également; c'est à dire que l'Arc AB est égal à l'Arc BC. Pour le prouver,



Menez les Lignes droites AB, BC. Cela posé:

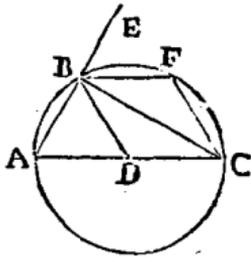
Le Côté AD, du Triangle ABD, est égal au Côté DC, du Triangle CDB, par la construction. Le Côté BD est commun à ces deux Triangles. Deplus, l'Angle ADB est égal à l'Angle CDB, par la construction. Donc la Baze AB est égale à la Baze BC, par la 4. du 1. Et par consequent les Arcs AB, BC, que ces deux Bazes soutiennent, sont égaux entr'eux, par la 28. Prop. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXVII.

*Au Cercle, l'Angle qui est au demi-Cercle est droit; celui qui est au plus grand Segment est plus petit qu'un droit; & celui qui est au plus petit Segment est plus grand qu'un droit. De plus, l'Angle du plus grand Segment est plus grand qu'un droit; & l'Angle du plus petit Segment est plus petit qu'un droit.*

JE suppose qu'au Cercle ABC, D soit le Centre, & ADC le Diametre, & qu'ayant pris dans la Circonférence le Point B à discretion, on ait mené de ce Point aux extremités du Diametre les deux Lignes droites BA, BC, qui font l'Angle au demi-Cercle ABC. Cela étant, je dis premièrement que l'Angle ABC est droit. Pour le prouver,



Menez du Point D au Point B la Ligne droite DB, & continuez la Ligne AB vers E. Cela posé: Au Triangle ABD, les Côtez DA, DB, sont égaux, par la définition du Cercle. Donc l'Angle ABD est égal à l'Angle BAD, par la 5. du 1. De même, au Triangle DBC, les Côtez DB, DC, étant égaux, l'Angle DBC est égal à l'Angle BCD. Et ainsi l'Angle total ABC est égal aux deux Angles

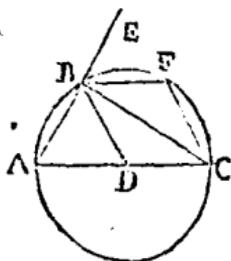
EUCLEDE  
 11. Coroll.  
 O N II  
 E I I  
 rti na des  
 A D  
 D: éca  
 rences  
 et Ardit  
 que l'Ar  
 Cel  
 est ég  
 constr  
 ou Tri  
 de CD  
 gale à  
 les An  
 leme  
 ont l'ar

## 172 ELEMENS D'EUCLIDE.

gles BAD, BCD. D'ailleurs, l'Angle extérieur EBC est égal à ces deux mêmes Angles BAC, BCD, par la 32. du 1. Partant l'Angle ABC & l'Angle EBC sont égaux entr'eux. Et par conséquent la Ligne BC est perpendiculaire à AE, & l'Angle ABC est droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BAC, qui est au plus grand Segment CAB, est plus petit qu'un droit. Pour le prouver,

Au Triangle ABC, les deux Angles ABC & BAC sont plus petits que deux droits, par la 17. du 1. Or il vient d'être prouvé que l'Angle ABC est droit. Donc l'Angle BAC est moindre qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.



Je dis en troisième lieu, que l'Angle BFC, qui est au plus petit Segment CFB, est plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez ABFC est inscrite au Cercle; & ainsi les deux Angles oppozes BAC & BFC sont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais il vient d'être prouvé que l'Angle BAC est moindre qu'un droit. Donc l'Angle BFC est plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en quatrième lieu, que l'Angle du plus grand Segment, c'est à dire l'Angle mixte CBA, qui est compris de la Ligne droite BC, & de la Circonférence BA, est plus grand qu'un droit. Pour le prouver,

L'Angle mixte CBA est plus grand que l'Angle rectiligne ABC, qui n'est que sa partie. Or l'Angle ABC est droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBA est plus grand qu'un droit; Ce qu'il falloit démontrer.

Je

LIVRE TROISIE'ME. 173

Je dis enfin que l'Angle du plus petit Segment, c'est à dire l'Angle mixte CBF, qui est compris de la Ligne droite CB, & de la Circonference BF, est plus petit qu'un droit. Pour le prouver,

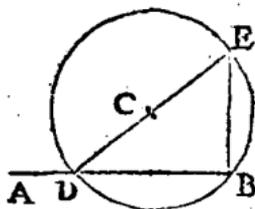
L'Angle mixte CBF est plus petit que l'Angle rectiligne CBE, dont il n'est que partie. Or l'Angle CBE est droit, comme on vient de le prouver. Donc l'Angle mixte CBF est plus petit qu'un droit; Ce qui restoit à démontrer.

REMARQUE.

Cette Proposition nous donne un moyen facile pour élever une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne droite donnée.

Supposons que la Ligne droite donnée soit AB, & qu'à son extrémité B il faille élever une Perpendiculaire. Pour le faire,

Prenez quelque Point, comme C, au dessus de la Ligne AB. Puis du Point C, comme Centre, & de l'intervalle CB, décrivez le Cercle EBD. Ce Cercle coupera la Ligne AB en quelqu'autre



Point, comme D. Par ce Point D & par le Centre C menez la Ligne droite DCE. Enfin du Point E au Point B menez la Ligne droite EB; & cette Ligne sera perpendiculaire à AB. Car puisque l'Angle B est au demi-Cercle, il est droit.

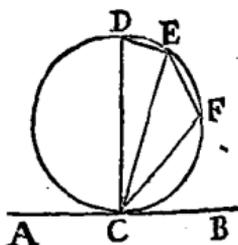


## PROPOSITION XXXII.

## THEOREME XXVIII.

*Si une Ligne droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on mène une Ligne droite qui le coupe: l'Angle que fait de part & d'autre la Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne est capable.*

**J**E suppose que la Ligne AB touche le Cercle CDE au Point C, & que de ce Point on a mène la Ligne droite CE, qui coupe le Cercle en deux Segmens, sçavoir CDE, & CFE. Cela étant, je dis premièrement que l'Angle BCE, que la Coupante fait d'une part avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CDE est capable. Pour le prouver,



Elevez au Point C la Ligne CD perpendiculaire à AB; & du Point D au Point E menez la Ligne droite DE, laquelle fera avec CD l'Angle CDE, dont le Segment CDE est capable. Si bien qu'il s'agit de montrer que l'Angle CDE est égal à l'Angle BCE. Pour le prouver,

Puisque la Ligne AB touche le Cercle, & que CD a été élevée perpendiculairement au Point de l'atrou-

l'attouchement, il s'ensuit (par la 19. Prop.) qu'elle passe par le Centre, & par conséquent qu'elle en est le Diametre, & que le Segment CFE D est un demi-Cercle. D'où il suit que l'Angle CED, qui est au demi-Cercle, est droit, par la 31. Prop. Et d'autant que les trois Angles du Triangle CDE sont égaux à deux droits, par la 32. du 1. il s'ensuit que les deux Angles CDE & DCE sont égaux à un droit; c'est à dire à l'Angle BCD. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte l'Angle DCE, qui leur est commun, il restera l'Angle BCE égal à l'Angle CDE; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle ACE, que la Coupante CE fait avec la Touchante AB, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CFE est capable; c'est à dire, que si dans l'Arc CFE on prend à discretion quelque Point, comme F, d'où l'on mène les Lignes droites FC, FE, l'Angle ACE sera égal à l'Angle CFE. Pour le prouver,

La Figure de quatre Côtez CDEF étant inscrite au Cercle, les deux Angles opposez CDE, CFE, sont égaux à deux droits, par la 22. Prop. Mais les Angles ACE, BCE, sont aussi égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles CDE, CFE, sont égaux aux deux Angles BCE, ACE. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles CDE & BCE, qui viennent d'être prouvez égaux, l'Angle restant CFE sera égal à l'Angle restant ACE; Ce qu'il falloit démontrer.

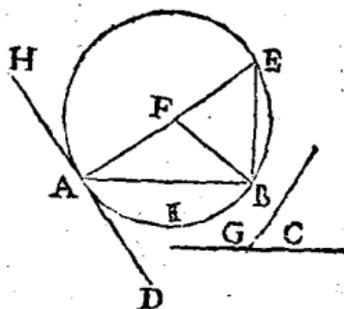


## PROPOSITION XXXIII.

## PROBLEME V.

*Sur une Ligne droite donnée, décrire une portion de Cercle capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

JE suppose que la Ligne droite AB soit donnée, & que l'Angle rectiligne C soit aussi donné; & je propose de décrire sur AB une portion de Cercle capable d'un Angle égal à l'Angle C. Pour le faire,



Menez la Ligne droite HAD, qui fasse avec AB l'Angle BAD égal à l'Angle C. Elevez au Point A la Ligne AE perpendiculaire à HD. Puis tirez du Point B la Ligne droite BF, qui fasse avec AB l'Angle ABF égal à l'Angle FAB. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que la Circonférence de ce Cercle passera par le Point B, & que le Segment AEB sera capable d'un Angle égal à l'Angle C; c'est à dire, qu'ayant mené la Ligne BE, l'Angle AEB sera égal à l'Angle C. Pour le prouver,

Puisque les Angles FAB, FBA, sont égaux, par la construction: les deux Côtes FA, FB, qui les soutiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. D'où il suit, que la Circonférence du Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par le

LIVRE TROISIE'ME. 177

le Point B. D'ailleurs, puisque la Ligne AFE passe par le Centre F du Cercle AEB, il s'en suit qu'elle en est le Diametre; & puisque la Ligne HAD lui est perpendiculaire, il s'en suit que cette Ligne HAD touche ce Cercle, par la 16. Prop. Or la Ligne AB part du Point de l'attouchement, & coupe le même Cercle. Donc (par la Proposition precedente) l'Angle BAD, qu'elle fait avec la Touchante, est égal à l'Angle AEB, dont le Segment alterne AEB est capable. Mais l'Angle BAD a été fait égal à l'Angle C. Donc l'Angle AEB est aussi égal à l'Angle C; Ce qu'il falloit démontrer.

Si l'Angle donné eût été obtus, comme l'Angle G, il auroit toujours fallu faire la même construction que ci-dessus. Mais au lieu de prendre la portion AEB, il auroit fallu prendre la portion AIB, comme étant celle qui est capable d'un Angle égal à l'Angle donné G.

Si l'Angle donné eût été droit, il n'auroit fallu que décrire un demi-Cercle sur la Ligne donnée AB. Car le demi-Cercle est capable d'un Angle droit, par la 31. Prop. Ainsi dans tous les cas possibles, nous avons sur une Ligne droite donnée décrit un Segment, ou une portion de Cercle, capable d'un Angle rectiligne donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

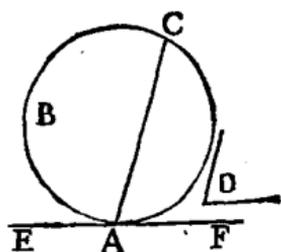


## PROPOSITION XXXIV.

## PROBLEME VI.

*D'un Cercle donné, retrancher un Segment capable d'un Angle égal à un Angle rectiligne donné.*

**J**E suppose que le Cercle ABC soit donné, & que l'Angle rectiligne D soit aussi donné; & je propose de retrancher du Cercle ABC un Segment capable d'un Angle égal à l'Angle D. Pour le faire,



Menez la Ligne droite EAF, qui touche le Cercle au Point A. Puis (par la 23. du 1.) tirez du Point A dans le Cercle la Ligne droite AC, qui fasse avec AF l'Angle FAC égal à l'Angle D. Cela étant, je dis que le Segment ABC est capable d'un Angle égal à l'Angle rectiligne donné D. Pour le prouver,

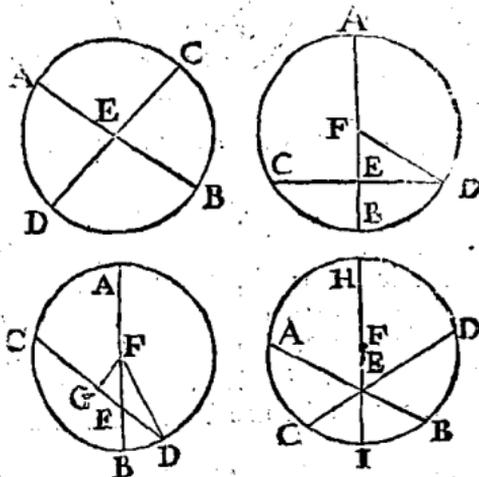
Par la 32. Prop. l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle FAC. Or, par la construction, l'Angle FAC est égal à l'Angle D. Partant l'Angle dont le Segment ABC est capable, est égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXIX.

Si dans un Cercle deux Lignes droites se coupent l'une l'autre; le Rectangle compris des deux parties de l'une, est égal au Rectangle compris des deux parties de l'autre.

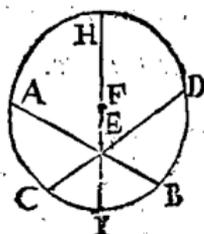
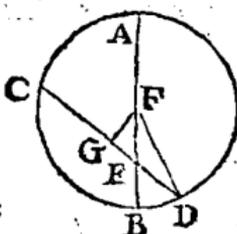
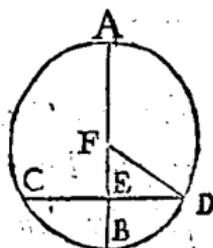
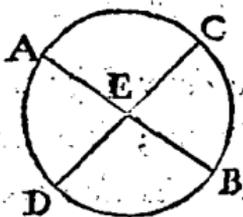
JE suppose que dans le Cercle ACBD les deux Lignes droites AB, CD, se coupent l'une l'autre au Point E. Cela étant, je dis que le Rectangle compris des deux parties AE, EB, de la Ligne AB, est égal au Rectangle compris des deux parties CE, ED, de la Ligne CD.



Cette Prop. peut avoir quatre cas. Car premièrement il se peut faire que les deux Lignes qui s'entrecouperont passent par le Centre. Secondement il se peut faire qu'il n'y en ait qu'une qui y passe, & qu'elle coupe l'autre en deux parties égales. Troisième-

siémement il se peut faire que celle qui passe par le Centre, coupe l'autre en deux parties inégales. Enfin il se peut faire que ni l'une ni l'autre ne passe par le Centre.

Supposons donc 1. que les deux Lignes  $AB$ ,  $CD$ , passent par le Centre. Cela posé : comme les deux parties  $AE$ ,  $EB$ , sont égales aux deux parties  $CE$ ,  $ED$ ,



par la définition du Cercle ; il est évident que le Rectangle compris des deux premières, est égal au Rectangle compris des deux autres.

Supposons en second lieu, que la Ligne  $AB$  passe par le Centre  $F$ , & qu'elle coupe  $CD$ , qui n'y passe point, en deux parties égales. Cela étant, je dis que le Rectangle de  $AE$ ,  $EB$ , est égal au Rectangle de  $CE$ ,  $ED$ . Pour le prouver,

Menez du Centre  $F$  au Point  $D$  la Ligne droite  $FD$ . Cela posé :

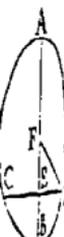
Puisque la Ligne  $AB$  est coupée en deux également au Point  $F$ , & en deux inégalement au Point  $E$ , il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle compris de  $AE$ ,  $EB$ , avec le Quarré de  $FE$ , est égal au Quarré de  $FB$ , ou de son égale  $FD$ . Mais puisque  $FE$ , qui passe par le Centre, coupe  $CD$  en deux également, elle la coupe aussi perpendiculairement, par la 3. Proposition. Donc l'Angle  $FED$  est droit. Par conséquent (par la

47. du 1.) les deux Quarrez de FE & de ED sont égaux au Carré de FD. Et ainsi le Rectangle compris de AE, EB, avec le Carré de FE, est égal aux deux Quarrez de FE & de ED. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Carré de FE, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AE, EB, égal au Carré de ED. Mais puisque les Lignes CE, ED, sont égales, le Carré de ED n'est autre chose que le Rectangle compris de CE, ED. Et partant le Rectangle compris de AE, EB, est égal au Rectangle compris de CE, ED.

Supposons en troisiéme lieu, que la Ligne AB passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui n'y passe point, en deux parties inégales. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Abaissez du Centre F la Ligne FG, perpendiculaire à CD; au moyen de quoi, la Ligne CD sera divisée en deux également, par la 3. Prop. Puis du Point F au Point D menez la Ligne droite FD. Cela posé :

Puisque AB est coupée en deux parties égales au Point F, & en deux inégales au Point E; il s'ensuit (par la 5. Prop. du 2.) que le Rectangle de AE, EB, avec le Carré de FE, est égal au Carré de FB, ou de son égale FD. Mais (par la 47. du 1.) le Carré de FE est égal aux deux Quarrez de FG & de GE. De même, le Carré de FD est égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Si donc au lieu du Carré de FE on prend les deux Quarrez de FG & de GE, & au lieu du Carré de FD on prend les deux Quarrez de FG & de GD: il s'ensuivra que le Rectangle de AE, EB, avec les deux Quarrez de FG & de GE, sera égal aux deux Quarrez de FG & de GD. Et partant, ôtant de ces deux Touts, qui sont égaux, le Carré de FG, qui leur est commun; il restera le Rectangle compris de AE, EB,



avec le Carré de GE, qui sera égal au Carré de GD. D'ailleurs, puisque CD est coupée en deux parties égales au Point G, & en deux inégales au Point E; le Rectangle de CE, ED, avec le Carré de GE, est égal au Carré de GD, par la 5. Prop. du 2. Et ainsi le Rectangle de AE, EB, avec le Carré de GE, est égal au Rectangle de CE, ED, avec le Carré de GE. Orant donc le Carré de GE, qui leur est commun, il s'ensuivra que le Rectangle de AE, EB, sera égal au Rectangle de CE, ED.

Supposons enfin que ni l'un ni l'autre de ces deux Lignes AB, CD, ne passe par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED. Pour le prouver,

Menez par le Centre F & par le Point E la Ligne droite HFEI. Cela posé :

De quelque façon que la Ligne HI coupe AB, il s'ensuit, par ce qui vient d'être démontré, que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de HE, EI. De même aussi, de quelque façon que HI coupe CD, il s'ensuit que le Rectangle de DE, EC, est égal au même Rectangle de HE, EI. Et ainsi le Rectangle de AE, EB, & le Rectangle de DE, EC, qui sont égaux à un même Rectangle, sont égaux entr'eux; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

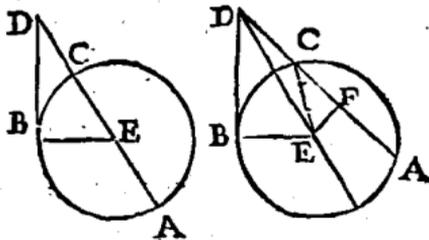


PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXX.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on tire deux Lignes droites, dont l'une le touche, & l'autre le coupe, & se va terminer à sa Circonférence concave: le Rectangle compris de toute la Coupante & de sa partie hors du Cercle, sera égal au Quarré de la Touchante.

**J**E suppose qu'on ait pris à discretion le Point D, hors du Cercle ABC, & que de ce Point on ait tiré la



Ligne droite DB, qui touche le Cercle au Point B, & la Ligne droite DA, qui le coupe, & va se terminer à la Circonférence concave. Cela étant, je dis que le Rectangle compris de AD, DC, est égal au Quarré de DB.

Cette Proposition peut avoir deux cas. Car ou la Ligne DA passe par le Centre, ou elle n'y passe point.

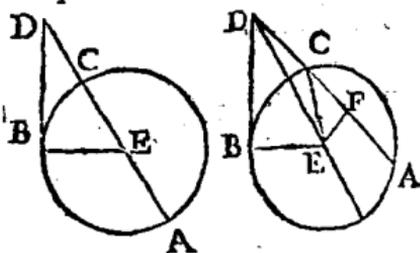
Supposons donc i. qu'elle passe par le Centre. Cela supposé :

Menez

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB. Cette Ligne ( par la 18. Prop. ) sera perpendiculaire à la Touchante DB ; d'où il suit que l'Angle EBD sera droit. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux également au Point E, & que la Ligne CD lui est ajoutée : il s'ensuit que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EC, ou de son égale EB, est égal au Quarré de ED, par la 6. Prop. du 2. Mais le Quarré de ED est égal aux deux Quarrez de EB & de DB, par la 47. du 1. Par conséquent le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, est égal aux deux Quarrez de EB & de DB. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AD, DC, qui sera égal au Quarré de DB ; Ce qu'il falloit démontrer.

Supposons maintenant que la Ligne DA ne passe point par le Centre. Cela étant, je dis encore que le Rectangle de



AD, DC, est égal au Quarré de DB. Pour le prouver,

Menez du Centre E au Point B la Ligne droite EB ; cette Ligne ( par la 18. Prop. ) sera perpendiculaire à DB. De ce même Centre abaissez la Ligne EF perpendiculaire à AD ; cette Ligne EF ( par la 3. Prop. ) coupera la partie AC, qui est dans le Cercle, en deux également. Enfin de ce même Point menez les deux Lignes droites EC, ED. Cela posé :

Puisque la Ligne AC est coupée en deux parties égales au Point F, & que la Ligne CD lui est ajoutée : il s'ensuit ( par la 6. Prop. du 2. ) que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de CF, est égal au Quarré de DF. Si donc à ces deux Touts, qui

## LIVRE TROISIE'ME. 185

qui sont égaux, on ajoute le Quarré de FE; il s'en suivra que le Rectangle de AD, DC, & les deux Quarrez de CF & de FE, seront égaux aux deux Quarrez de DF & de FE. Or les deux Quarrez de CF & de FE sont égaux au Quarré de EC, ou de son égale EB, par la 47. du 1. Et de même, les deux Quarrez de DF & de FE sont égaux au Quarré de ED. Si donc au lieu des deux Quarrez de CF & de FE, on prend le Quarré de EB; & au lieu des deux Quarrez de DF & de FE, on prend le Quarré de ED: il s'en suivra que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, sera égal au Quarré de ED. Mais les deux Quarrez de DB & de EB sont aussi égaux au Quarré de ED, par la 47. du 1. Donc le Rectangle de DA, DC, & le Quarré de EB, sont ensemble égaux aux deux Quarrez de DB & de EB. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur est commun; il restera le Rectangle de DA, DC, égal au Quarré de DB; Ce qu'il falloit démontrer.

### I. C O R O L L A I R E.

Il suit de cette Proposition, que si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on mène tant de Lignes droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent se terminer à sa Circonférence concave; le Rectangle compris d'une de ces Coupantes, telle que l'on voudra, & de sa partie hors du Cercle, sera égal au Rectangle compris de telle autre Coupante que l'on voudra; de sa partie hors du Cercle. Car chacun de ces Rectangles est égal au Quarré de la Touchante, qui seroit menée de ce même Point.

### II. C O R O L L A I R E.

Il suit encore, que si d'un Point pris à discretion hors



sur le point  
 Ligne des  
 sera perpendiculaire  
 EF  
 dans le  
 Cercle  
 sur l'axe  
 de la  
 Terre

hors d'un Cercle, en même deux Lignes droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles. Car le Quarré de chacune de ces Lignes est égal au Rectangle d'une Coupante & de sa partie hors du Cercle. Et ainsi chacun de ces Quarrez est égal à l'autre; d'où il suit que les Lignes qui en sont les Côtez. sont égales, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

## PROPOSITION XXXVII.

## THEOREME XXXI.

*Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on mène deux Lignes droites, dont l'une coupe le Cercle, & va se terminer à sa Circonférence concave, & l'autre atteint le Cercle: & que le Rectangle compris de toute la Coupante, & de sa partie hors du Cercle, soit égal au Quarré de celle qui atteint le Cercle; celle-ci touchera le Cercle.*

JE suppose que du Point D, pris à discretion hors du Cercle ABC, on ait mené les deux Lignes droites DA, DB; dont l'une, à sçavoir DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonférence concave; & l'autre, à sçavoir DB, atteint le Cercle; & que le Rectangle compris de DA, DC, soit égal au Quarré de DB. Cela étant, je dis que cette



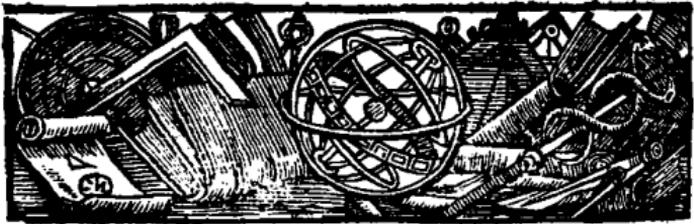
Ligne

# LIVRE TROISIE'ME. 187

Ligne DB touche le Cercle. Pour le prouver ,  
 Menez du Point D la Ligne droite DF, qui touche  
 le Cercle. Puis du Centre E menez les Lignes droi-  
 tes EB, ED, EF. Cela posé :

Puisque du Point D partent les deux Lignes droi-  
 tes DA, DF; que DA, coupe le Cercle, & se ter-  
 mine à sa Circonférence concave; & que DF le  
 touche: il s'ensuit ( par la Proposition précédente )  
 que le Carré de DF est égal au Rectangle de DA,  
 DC. Mais le Carré de DB est supposé égal au mê-  
 me Rectangle. Partant le Carré de DB, & le  
 Carré de DF, sont égaux entr'eux. Et par con-  
 séquent ces deux Lignes, qui en sont les Côtez, sont  
 aussi égales entr'elles. D'ailleurs, la Ligne BE est  
 égale à la Ligne FE, par la définition du Cercle.  
 Si bien que les deux Triangles DBE, DFE, ont  
 deux Côtez égaux à deux Côtez, chacuu au sien,  
 & la Baze DE commune. Partant ( par la 8. du 1. )  
 l'Angle DBE est égal à l'Angle DFE. Mais l'Angle  
 DFE est droit, par la 18. Prop. Donc l'Angle DBE  
 est aussi droit. D'où il suit ( par la 16. Prop. ) que  
 la Ligne DB touche le Cercle ABC; Ce qu'il falloit  
 démontrer.





E L E M E N S  
 D'EUCLIDE.  
 LIVRE QUATRIÈME.

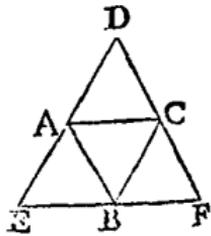
---

DEFINITIONS.

1. **U**NE Figure rectiligne est dite être inscrite dans une autre Figure rectiligne, quand le Sommet de chacun de ses Angles touche un des Côtez de la Figure dans laquelle elle est inscrite.

Ainsi le Triangle ABC est dit être inscrit dans le Triangle DEF, parce que le Sommet de chacun de ses Angles A, B, C, touche un des Côtez du Triangle DEF.

2. Une Figure rectiligne est dite être circonscrite à une autre Figure rectiligne, quand chacun de ses Côtez passe par



# LIVRE QUATRIÈME. 189

par le Sommet d'un des Angles de la Figure à laquelle elle est circonscrite.

Ainsi le Triangle DEF est dit être circonscrit au Triangle ABC, parce que chacun des Côtés du Triangle DEF passe par le Sommet d'un des Angles du Triangle ABC.

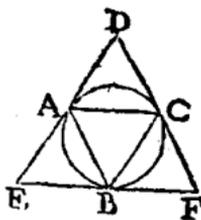
3. Une Figure rectiligne est dite être inscrite au Cercle, quand le Sommet de chacun de ses Angles touche la Circonférence du Cercle auquel elle est inscrite.

Ainsi le Triangle ABC est inscrit dans le Cercle ABC.

4. Une Figure rectiligne est dite être circonscrite à un Cercle, quand chacun de ses Côtés touche le Cercle auquel elle est circonscrite.

Ainsi le Triangle DEF est circonscrit au Cercle ABC, parce que chacun des Côtés du Triangle DEF touche le Cercle ABC.

5. Un Cercle est dit être inscrit dans une Figure rectiligne, quand sa Circonférence touche chacun des Côtés de la Figure dans laquelle il est inscrit.

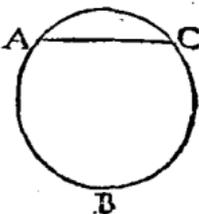


Ainsi le Cercle ABC est inscrit dans le Triangle DEF.

6. Un Cercle est dit être circonscrit à une Figure rectiligne, quand sa Circonférence passe par le Sommet de chaque Angle de la Figure à laquelle il est circonscrit.

Ainsi le Cercle ABC est circonscrit au Triangle DEF.

7. Une Ligne droite est dite être appliquée à un Cercle, quand ses extrémités sont dans la Circonférence du Cercle.



Ainsi la Ligne AC est appliquée au Cercle ABC.

8. Un Polygone, est une Fi-

gure

## 190 ELEMENS D'EUCLIDE.

gure comprise de plusieurs Lignes droites.

9. Un Pentagone, est une Figure comprise de cinq Lignes droites.

10. Un Hexagone, est une Figure comprise de six Lignes droites.

11. Un Heptagone, de sept.

12. Un Octogone, de huit.

13. Un Enneagone, de neuf.

14. Un Decagone, de dix.

15. Un Endecagone, de onze.

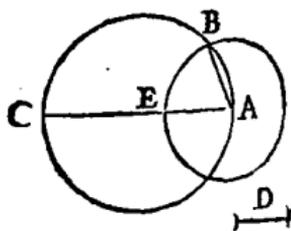
16. Un Dôdecagone, de douze, &c.

### PROPOSITION I.

#### PROBLEME I.

*A un Cercle donné, appliquer une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le Diametre du Cercle.*

JE suppose que le Cercle ABC soit donné, & que la Ligne D, qui n'est pas plus grande que le Diametre du Cercle, soit aussi donnée; & je propose d'appliquer au Cercle ABC, une Ligne droite égale à la Ligne D. Pour le faire,



Menez dans ce Cercle le Diametre AC, lequel par la supposition est ou égal, ou plus grand que la Ligne donnée D. Cela posé :

S'il est égal, la chose est faite, & la Ligne appliquée,

# LIVRE QUATRIÈME. 191

que, puis que le Diamètre AC est supposé égal à la Ligne donnée D. S'il est plus grand, retranchez-en la partie AE égale à la Ligne D. Puis du Centre A, & de l'intervalle AE, décrivez le Cercle EB, lequel coupera la Circonférence de l'autre Cercle au Point B. Enfin du Point A au Point B menez la Ligne droite AB. Cela étant, je dis que la Ligne AB, qui est appliquée au Cercle ABC, est égale à la Ligne donnée D. Pour le prouver,

La Ligne AB, & la Ligne AE, partent toutes-deux du Point A, qui est le Centre du Cercle EB, & vont se terminer à la Circonférence; par conséquent elles sont égales entr'elles. Or la Ligne AE est égale à la Ligne donnée D, par la construction. Donc la Ligne AB est aussi égale à la Ligne D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

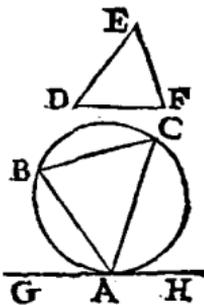
## PROPOSITION II.

### PROBLÈME I.

*Dans un Cercle donné, inscrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.*

JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnés; & je propose d'inscrire dans ce Cercle un Triangle, qui soit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,

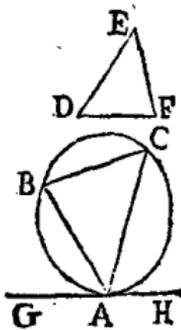
Menez (par la 17. du 3.) la Ligne droite GAH, qui touche le Cercle au Point A. Puis du Point A menez la Ligne droite AB, qui fasse avec AG l'Angle BAG égal à l'Angle D du Triangle DEF. De ce même Point menez la Ligne droite



## 192. ELEMENS D'EUCLIDE.

droite AC, qui fasse avec AH l'Angle HAC égal à l'Angle F. Enfin du Point B au Point C menez la Ligne droite BC. Cela posé, je dis que le Triangle ABC, inscrit au Cercle ABC, est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puisque la Ligne GAH touche le Cercle au Point A, & que la Ligne AB, qui part du Point de l'atouchement, le coupe: l'Angle GAB, que la Coupante fait avec la Touchante, sera égal à l'Angle ACB, qui est au Segment alterne, par la 32. Prop. du 3. Mais l'Angle GAB est égal à l'Angle D, par la construction. Donc l'Angle ACB est aussi égal à l'Angle D. De même, la Ligne AC coupant le Cercle, l'Angle HAC, qu'elle fait avec la Touchante, est égal à l'Angle ABC, qui est dans le Segment alterne. Mais l'Angle HAC est égal à l'Angle F, par la construction. Donc l'Angle ABC est aussi égal à l'Angle F. Et ainsi le Triangle ABC a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF. Par conséquent le troisieme BAC est égal au troisieme E, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

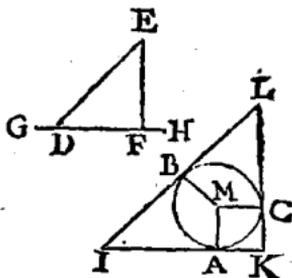


## PROPOSITION III.

## PROBLÈME III.

*Autour d'un Cercle donné, décrire un Triangle équiangle à un Triangle donné.*

JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnés; & je propose de décrire autour du Cercle ABC un Triangle qui soit équiangle au Triangle DEF. Pour le faire,



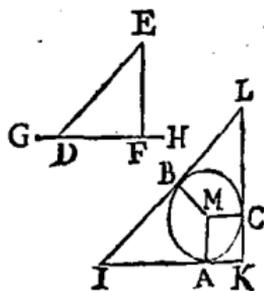
Prolongez de part & d'autre l'un des Côtés du Triangle, par exemple DF, vers G, & vers H. Puis du Centre M tirez à discretion à quelque Point de la Circonférence la Ligne droite MA. De ce même Centre menez la Ligne droite MB, qui fasse avec MA l'Angle AMB égal à l'Angle EDG, par la 23. du 1. De ce même Point menez la Ligne MC, qui fasse avec MA l'Angle AMC égal à l'Angle EFH. Cela fait, tirez par les Points A, B, C, trois Lignes droites IAK, IBL, KCL, perpendiculaires aux Lignes MA, MB, MC. Ces trois Lignes formeront un Triangle, que je dis être circonscrit au Cercle ABC, & être équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

Puisque chacune de ces Lignes IK, IL, KL, est perpendiculaire à l'extrémité du Diamètre du Cercle, ces Lignes touchent le Cercle, par la 16. du 3. Et ainsi le Triangle IKL est circonscrit à ce Cercle. Si bien qu'il ne reste plus qu'à prouver qu'il est équiangle au Triangle DEF. Pour le prouver,

# 194 ELEMENS D'EUCLIDE.

Les quatre Angles de la Figure AMBI valent quatre droits, par la Remarque de la 32. du 1. Or les deux Angles MAI, MBI, sont droits, par la construction. Donc les deux Angles AMB, AIB, sont aussi égaux à deux droits. D'ailleurs, les Angles EDG, EDF, sont égaux à deux droits, par la 13. du 1. Partant les deux

Angles AMB, AIB, sont égaux aux deux Angles EDG, EDF. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMB, & EDG, qui sont égaux par la construction: l'Angle AIB restera égal à



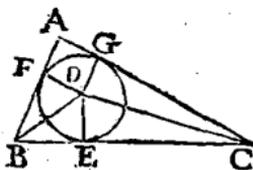
l'Angle EDF. De même, les quatre Angles de la Figure AMCK valent quatre droits. Or les deux Angles MAK, MCK, sont droits, par la construction. Donc les deux restans AMC, AKC, valent ensemble deux droits. Mais les Angles EFH, EFD, valent aussi deux droits. Ainsi les deux Angles AMC, AKC, sont égaux aux deux Angles EFH, EFD. Si donc de ces deux Touts, qui sont égaux, on ôte les Angles AMC, & EFH, qui sont égaux par la construction: l'Angle AKC restera égal à l'Angle EFD. Et ainsi le Triangle ILK a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF. Par conséquent le troisième ILK est égal au troisième DEF; par la 32. du 1. D'où il suit que le Triangle ILK, que nous avons circonscrit au Cercle ABC, est équiangle au Triangle DEF; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME IV.

Dans un Triangle donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Triangle ABC soit donné; & je propose d'y inscrire un Cercle. Pour le faire,



Coupez. (par la 9. du 1.) l'un des Angles de ce Triangle, par exemple ABC, en deux également par la Ligne droite BD. Coupez de même un autre Angle, comme ACB, en deux également par la Ligne droite CD. Du Point D, où les deux Lignes BD, CD; se rencontrent, abaissez sur l'un des Côtés de ce Triangle, par exemple sur BC, la Perpendiculaire DE. Enfin du Centre D, & de l'intervalle DE, décrivez un Cercle; & je dis qu'il sera inscrit au Triangle ABC. Pour le prouver,

Abaissez du Point D les Lignes droites DF, DG, perpendiculaires aux deux autres Côtés AB, AC: Cela posé:

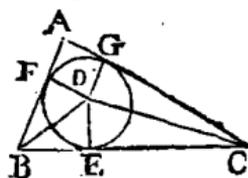
Aux Triangles BDE, & BDF, l'Angle EBD est égal à l'Angle FBD, par la construction; l'Angle DEB est égal à l'Angle DFB, étant tous-deux droits, par la construction; de plus, le Côté BD est commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DF est égal au Côté DE, par la 26. du 1. De même, aux Triangles CGD, & CED, l'Angle GCD est égal à l'Angle ECD, par la construction; l'Angle DGC est égal à l'Angle DEC, ces deux Angles étant droits, par la construction; de plus,

S DEUXIÈME  
la Figure 186.  
ma que de la  
MBI; son des  
deux Angles  
vons. D'ailleurs  
égaux à deux  
ix  
or  
es  
le  
t  
les quatre  
tre droits. Ce  
nt droits, par  
restans AMC.  
rs. Mais les  
deux droites  
sont égales  
ic de ces deux  
gles AMC. Et  
ction: l'Angle  
Et ainsi le  
ux Angles de  
sifficence HK  
lu 1. D'où il  
vons circon  
Triangle DE

# 196 ELEMENS D'EUCLIDE.

plus, le Côté DC est commun à ces deux Triangles. Et partant le Côté DG est égal au Côté DE, par la 26. du 1. Et ainsi les trois Lignes DE, DF, DG, sont égales entr'elles.

Par conséquent le Cercle EFG, qui est décrit du Centre D, & de l'intervalle DE, passe aussi par les extremitéz des Lignes FD, DG. Or puisque les Côtéz AB, BC, CA, du Triangle ABC, sont perpendiculaires aux extremitéz des trois demi-Diametres DF, DE, DG, il s'ensuit par la 16. du 3. qu'ils touchent le Cercle EFG, & par conséquent que ce Cercle est inscrit dans le Triangle ABC, par la 5. Definition; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

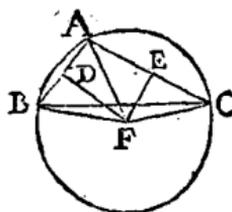


## PROPOSITION V.

### PROBLEME V.

*Autour d'un Triangle donné, décrire un Cercle.*

**J**E suppose que le Triangle ABC soit donné; & je propose de décrire un Cercle autour de ce Triangle. Pour le faire,



Coupez ( par la 10. du 1. ) un des Côtéz de ce Triangle, par exemple AB, en deux également au Point D; & de ce Point élevez la Perpendiculaire DF, par la 11. du 1. Coupez de même un autre Côté, comme par exemple AC, en deux également au Point E; & de ce Point élevez aussi la Perpendiculaire EF.

Mainte-

# LIVRE QUATRIÈME. 197

Maintenant du Point F, où les Lignes DF, EF, se rencontrent, menez la Ligne droite FA, au Sommet de l'un des Angles de ce Triangle. Enfin du Centre F, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentour du Triangle ABC. Pour le prouver,

Du Point F aux Sommets des deux autres Angles B & C, menez les deux Lignes droites FB, FC. Cela posé :

Aux Triangles BDF, & ADF, le Côté BD est égal au Côté AD, par la construction ; le Côté DF, leur est commun ; de plus, l'Angle BDF est égal à l'Angle ADF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Et partant la Baze FB est égale à la Baze FA, par la 4. du 1. De même, aux Triangles CEF, & AEF, le Côté CE est égal au Côté AE, par la construction ; le Côté EF leur est commun ; & l'Angle CEF est égal à l'Angle AEF, ces deux Angles étant droits, par la construction. Partant la Baze FC est égale à la Baze FA. Et ainsi les trois Lignes FB, FA, FC, sont égales entr'elles. Par conséquent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extrémités des Lignes FB, FC. Or les extrémités des Lignes FA, FB, FC, sont les Sommets des Angles du Triangle ABC. Et par conséquent ce Cercle est décrit alentour du Triangle ABC, par la 6. Définition ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

CLEF.  
des Lignes  
du Cercle  
Lignes DF, E



du Triangle  
extremitez  
DG, à l'extré-  
Cercle EF, à  
interieur dans  
n ; Cercle à

ON V.

V.

né, décrit



Point D, à  
par la  
comme  
point E, à  
laire E.  
Maine

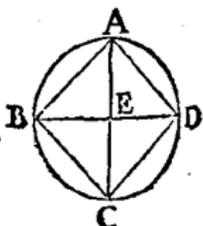


## PROPOSITION VI.

## PROBLEME VI.

*Dans un Cercle donné, décrire un Quarré.*

JE suppose que le Cercle ABC soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quarré. Pour le faire, Par le Centre E menez le Diametre AEC ; coupez ce Diametre à Angles droits par un autre Diametre, comme BED ; puis menez les Lignes AB, BC, CD, & DA. Ces quatre Lignes formeront une Figure de quatre Côtés inscrite au Cercle. Cela étant, je dis que cette Figure est un Quarré. Pour le prouver,



Puisque les quatre Angles qui sont autour du Centre E, sont droits par la construction, les quatre Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux entr'eux, par la 26. du 3. Et par conséquent les quatre Soutendantes AB, BC, CD, DA, sont égales entr'elles, par la 29. du 3. D'ailleurs, chacun des Angles de la Figure ABCD, étant au demi-Cercle, est droit, par la 31. du 3. Et par conséquent cette Figure ABCD, qui est comprise de quatre Côtés égaux, & qui a ses quatre Angles droits, est un Quarré ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

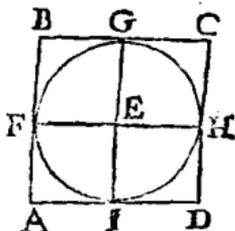
## PROPOSITION VII.

## PROBLÈME VII.

*Autour d'un Cercle donné, décrire un Carré.*

JE suppose que le Cercle  $FGHI$  soit donné; & je propose de décrire un Carré autour de ce Cercle. Pour le faire,

Menez tel Diamètre qu'il vous plaira, par exemple  $FEH$ .

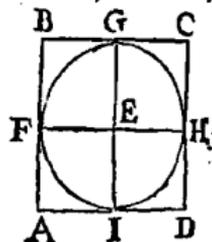


Coupez ce Diamètre à Angles droits par un autre Diamètre, comme  $GEI$ . Puis (par la 31. du 1.) menez par les Points  $F$ , &  $H$ , les Lignes droites  $AFB$ ,  $DHC$ , parallèles à  $GI$ , ou perpendiculaires à  $FH$ ; & par les Points  $G$ , &  $I$ , les Lignes droites  $BGC$ ,  $AID$ , parallèles à  $FH$ , ou perpendiculaires à  $GI$ . Ces quatre Lignes  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , formeront une Figure de quatre Côtés. Cela étant, je dis que cette Figure est un Carré, qui est décrit autour du Cercle  $FGHI$ . Pour le prouver,

Puisque les Lignes  $AB$ ,  $CD$ , sont parallèles à  $GI$ , elles sont parallèles entr'elles. De même, puisque les Lignes  $BC$ ,  $AD$ , sont parallèles à  $FH$ , elles sont aussi parallèles entr'elles. Et par conséquent les Figures  $ABCD$ ,  $ABGI$ ,  $GCDI$ ,  $BCHF$ , &  $AFHD$ , sont des Parallelogrammes. Et partant les Lignes  $BC$ ,  $AD$ , sont égales au Diamètre  $FH$ , ou à son égale  $GI$ , par la 34. du 1. Et de même, les Lignes  $AB$ ,  $CD$ , sont aussi égales à  $GI$ . D'où il suit que les quatre Côtés du Pa-

## 300 ELEMENS D'EUCLIDE.

rallelogramme ABCD sont égaux entr'eux. De plus, puisque la Figure AF EI est un Parallelogramme, par la construction, & que l'Angle FEI a été fait droit; il s'ensuit que son opposé FAI est aussi droit, par la 34. du 1. On prouvera de même, que les Angles FBG, GCH, & HDI, sont aussi droits. Et partant la Figure ABCD est un Quarré; qui touche le Cercle donné, puisque par la 16. du 3. chaque Côté est perpendiculairement élevé à l'extrémité du Diametre; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



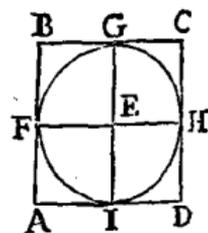
## PROPOSITION VIII.

### PROBLEME VIII.

*Dans un Quarré, décrire un Cercle.*

JE suppose que le Quarré ABCD soit donné; & je propose d'inscrire un Cercle dans ce Quarré. Pour le faire,

Coupez les Côtés du Quarré ABCD en deux également, aux Points F, G, H, I. Menez les Lignes droites FH, GI. Puis du Point E, où ces deux Lignes se coupent, & de l'intervalle EF, décrivez le Cercle FGHI. Cela étant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD. Pour le prouver,



Puisque les Lignes AD, BC, sont égales & parallèles, leurs moitiés AI, BG, sont aussi égales & parallèles. D'où il suit (par la 33. du 1.) que les Lignes AB, IG, sont aussi égales & parallèles.

De

# LIVRE QUATRIÈME. 201

De même, puisque  $AB, DC$ , sont égales & parallèles, leurs moitiés  $AF, DH$ , sont aussi égales & parallèles. D'où il suit que les Lignes  $AD, FH$ , sont aussi égales & parallèles. Et par conséquent les Figures  $EA, EB, EC, ED$ , sont des Parallelogrammes. D'où il suit que la Ligne  $EI$  est égale à  $AF$ ; que  $EF$  est égale à  $BG$ ; que  $EG$  est égale à  $CH$ ; & que  $EH$  est égale à  $DI$ . Ainsi ces quatre Lignes  $EI, EF, EG, EH$ , qui sont égales à des choses égales, sçavoir aux moitiés des Côtés d'un Carré, sont égales entr'elles. Et le Cercle qui est décrit du Centre  $E$ , & de l'intervalle  $EI$ , passe aussi par les Points  $F, G, H$ . D'ailleurs; puisque l'Angle  $BGI$  est égal à son opposé  $A$ , par la 34. du 1; que l'Angle  $CHF$  est égal à son opposé  $B$ ; que l'Angle  $DIG$  est égal à son opposé  $C$ ; & enfin que l'Angle  $AFH$  est égal à son opposé  $D$ : ces quatre Angles sont droits, leurs oppozés étant droits, par supposition. D'où il suit que les Lignes  $AB, BC, CD, DA$ , touchent le Cercle  $FGHI$ , par la 16. du 3. Et partant ce Cercle est inscrit dans le Carré  $ABCD$ ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION IX.

### PROBLÈME IX.

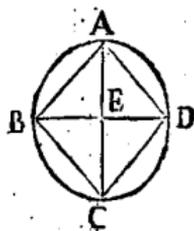
*Autour d'un Carré donné, décrire un Cercle.*

Je suppose que le Carré  $ABCD$  soit donné; & je propose de décrire un Cercle autour de ce Carré. Pour le faire,

Menez les deux Diagonales  $AC, BD$ . Puis du Point  $E$ , où elles se coupent, & de l'intervalle  $EA$ , décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cer-

cle est décrit alentour du Quarré ABCD. Pour le prouver,

Puisqu'au Triangle ABD les deux Côtez BA, AD, sont égaux par supposition: les Angles ABD, ADB, sont aussi égaux, par la 5. du 1. Et puis- que l'Angle BAD est supposé droit, les deux Angles ABD,



ADB, valent chacun un demi-droit. On prouvera de même, que chacun des autres Angles qui sont autour des Points A, B, C, D, est demi-droit. Ensuite de quoi, puisqu'au Triangle AEB les deux Angles EAB, EBA, sont égaux: les deux Côtez EA, EB, qui les soutiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que EC est égal à EB, & que ED est égal à EC; & partant ces quatre Lignes EA, EB, EC, ED, sont égales entr'elles. D'où il suit que le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'intervalle EA, passe par les extremitéz des Lignes EB, EC, ED; & par consequent qu'il est décrit alentour du Quarré ABCD, par la Definition 6. Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



## PROPOSITION X.

## PROBLÈME X.

*Décrire un Triangle Isoscele qui ait chacun des Angles sur la Baze double de l'autre.*

**P**our le faire, menez une Ligne droite de telle longueur qu'il vous plaira, comme par exemple AB. Coupez cette Ligne au Point C, de telle sorte, que le Rectangle de AB, BC, soit égal au Carré de AC, par la 11. du 2. Décrivez un Cercle du Centre A, & de l'intervalle AB. Puis appliquez à la Circonférence de ce Cercle la Ligne droite BD égale à AC, par la 1. Prop. Enfin menez la Ligne droite AD. Cela étant, je dis que le Triangle ABD est Isoscele, & que chacun de ses Angles ABD, ADB, qui sont sur la Baze BD, est double de l'Angle BAD. Pour le prouver,



Du Point C au Point D menez la Ligne droite CD; & ( par la 5. Prop. ) alentour du Triangle ACD décrivez un Cercle. Cela posé :

Puisque les Lignes AB, AD, sont égales, par la définition du Cercle: le Triangle ABD est Isoscele. D'ailleurs, puisque par la construction le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Carré de AC: ce même Rectangle sera aussi égal au Carré de BD, qui a été faite égale à AC. Ainsi nous avons le Point B, hors du Cercle ACD, d'où partent les deux Lignes droites BA, BD; l'une desquelles, à sçavoir BA, coupe le Cercle; & l'autre, à sçavoir

voir BD, l'atteint; en sorte que le Rectangle compris de BA, & de sa partie BC qui est hors du Cercle, est égal au Quarré de BD, qui l'atteint. Par consequent (par la 37. du 3.) la Ligne BD touche le Cercle ACD. Et d'autant que la Ligne droite DC part du Point de l'attouchement D, & coupe le Cercle: il s'ensuit que l'Angle CDB, que fait cette Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle CAD, qui est au Segment alterne, par la 32. du 3. Si donc on leur ajoûte l'Angle commun ADC; il s'ensuivra que l'Angle total ADB



sera égal aux deux Angles ADC, CAD. Mais (par la 32. du 1.) l'Angle BCD est égal aux deux Angles ADC & CAD. Partant l'Angle BCD est égal à l'Angle ADB. Maintenant, le Triangle ABD étant Isoscele, l'Angle ABD est égal à l'Angle ADB, par la 5. du 1. Partant l'Angle ABD, ou CBD qui est le même, est aussi égal à l'Angle BCD. D'où il suit (par la 6. du 1.) que le Côté CD est égal au Côté BD. Mais BD a été fait égal à AC. Partant les deux Lignes AC, CD, sont égales entr'elles. D'où il suit (par la 5. du 1.) que l'Angle CDA est égal à l'Angle CAD, ou BAD. Mais il a déjà été prouvé que l'Angle CDB étoit égal à l'Angle CAD. Partant l'Angle total ADB, ou son égal ABD, est double de l'Angle BAD; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## R E M A R Q U E.

Ensuite de cette Proposition, il est aisé de montrer, que si l'on divise le Rayon du Cercle en moyenne & extrême raison, c'est à dire, en sorte que le Rectangle compris de tout le Rayon & de la moindre partie, soit égal au Quarré de la plus grande partie: le Côté du Decagone inscrit dans le Cercle

# LIVRE QUATRIÈME. 205

Cercle, sera égal à cette plus grande partie.

Car, puisque les trois Angles d'un Triangle valent autant que deux droits; il est évident que si on divise deux Angles droits en cinq parties égales, deux de ces parties feront la quantité de l'Angle ABD, du Triangle ABD de la Proposition précédente; que deux autres parties feront la quantité de l'Angle ADB, & que la cinquième partie qui reste, sera la quantité de l'Angle BAD, lequel par conséquent sera la dixième partie des quatre Angles droits que valent tous les Angles qu'on peut faire autour du Point A. D'où il suit que l'Arc BD est aussi la dixième partie de la Circonférence du Cercle. Or la Ligne droite BD est la Soûtendante de cet Arc, & elle a été faite égale à AC, qui est la plus grande partie du Rayon AB coupé en sorte que le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Carré de AC. Donc il est vrai de dire, que la Soûtendante de la dixième partie de la Circonférence du Cercle, ou ce qui est la même chose, le Côté du Decagone inscrit au Cercle, est égal à la plus grande partie du Rayon divisé en moyenne & extrême raison.

## PROPOSITION XI.

### PROBLÈME XI.

*Dans un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.*

Je suppose que le Cercle ABCDE soit donné; & Je propose d'y inscrire un Pentagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez (par la Proposition précédente) le Triangle Isoscele FGH, qui ait chacun des Angles sur la Base double du troisième. Puis (par la 2. Prop.)

## 206 ELEMENS D'EUCLIDE.

décrivez dans le Cercle ABCDE le Triangle ACD équiangle au Triangle FGH. Coupez les Angles ACD, ADC, en deux également par les Lignes droites CE, DB; & menez les Lignes droites CB, BA, AE, ED. Cela étant, je dis que le Pentagone ABCDE, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver,



Puisque le Triangle FGH est Isocele, & qu'il a les Angles G & H, sur la Baze, doubles de l'Angle F; & que le Triangle ACD lui est équiangle: ce Triangle ACD a aussi les Angles ACD, ADC, sur la Baze, doubles de l'Angle CAD. Or chacun de ces Angles ACD, ADC, ayant été coupé en deux également; les Angles DCE, ECA, ADB, BDC, qui en font les moitez, sont égaux entr'eux, & égaux aussi à l'Angle CAD. D'ou il suit (par la 26. du 3.) que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont égaux; & par la 29. du 3. que les cinq Lignes droites AB, BC, CD, DE, EA, sont égales. Et par conséquent, que le Pentagone ABCDE est Equilateral.

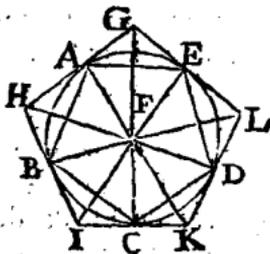
Mais ce Pentagone est aussi Equiangle; puisque (par la 27. du 3.) chacun de ses Angles s'appuye sur des Arcs égaux, sçavoir, sur trois fois la cinquième partie de la Circonference du Cercle. Nous avons donc dans un Cercle donné, décrit un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XII.

## PROBLEME XII.

*Autour d'un Cercle donné, décrire un  
Pentagone Equilateral & Equiangle.*

JE suppose que le Cercle  
ABCDE soit donné ; &  
je propose de décrire  
alentour de ce Cercle un  
Pentagone Equilateral &  
Equiangle. Pour le faire ;  
Décrivez premierement  
dans ce Cercle ( par la Pro-  
position précédente ) le Pentagone ABCDE, Equi-  
lateral & Equiangle. Menez du Centre F aux Points  
A, B, C, D, E, les Lignes droites FA, FB,  
FC, FD, FE ; & par les extremités de ces Lignes  
menez les Lignes droites GH, HI, IK, KL,  
LG, qui leur soient perpendiculaires. Cela étant,  
je dis que ces Lignes se rencontreront ; que le Pen-  
tagone qu'elles formeront sera circonscrit au Cercle  
donné ; & qu'il sera Equilateral & Equiangle.  
Pour le prouver,



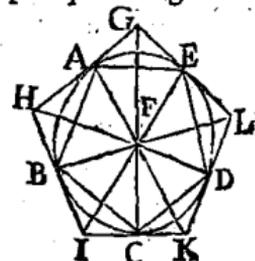
Premierement, puisque les Angles GAE, &  
GEA, sont partie des Angles droits GAF, GEF,  
ils seront moindres que deux droits. Et partant  
( par la Remarque de la 28. du 1. ) les Lignes AG,  
EG, se rencontreront ; & ainsi des autres.

Deplus, puisque les Lignes GH, HI, IK,  
KL, LG, sont perpendiculaires aux extremités  
du Diametre du Cercle ; il s'ensuit ( par la 16.  
Prop. du 3. ) qu'elles touchent le Cercle, & qu'ainsi  
le Pentagone GHIKL est circonscrit au Cercle don-  
né.

Main.

Maintenant, pour prouver que ce Pentagone  $GHIKL$  est Equilateral, menez les Lignes droites  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$ ,  $FK$ ,  $FL$ . Cela posé :

Puisque le Pentagone  $ABCDE$  est Equilateral, par la construction ; il s'ensuit que les cinq Arcs  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ , que ces Côtez égaux soutiennent, sont égaux entr'eux ; & que les cinq Angles  $AFB$ ,  $BFC$ ,  $CFD$ ,  $DFE$ ,  $EFA$ , qui s'appuyent sur ces Arcs, sont aussi égaux entr'eux, par la 27. du 3. D'ailleurs, puisque l'Angle  $FAG$  est droit, par la construction : les deux Quarrez de  $FA$  & de  $AG$  sont égaux au



Quarré de  $FG$ , par la 47. du 1. Mais l'Angle  $FEG$  étant aussi droit, les deux Quarrez de  $FE$  & de  $EG$  sont égaux au même Quarrez de  $FG$ . Partant les deux Quarrez de  $FA$  & de  $AG$  sont égaux aux deux Quarrez de  $FE$  & de  $EG$ . Ostant donc de ces deux Touts, qui sont égaux, les Quarrez de  $FA$  & de  $FE$ , qui sont égaux, (parce que ce sont les Quarrez de deux demi-Diametres du Cercle :) le Quarrez de  $AG$  fera égal au Quarrez de  $EG$ . Et partant les Lignes  $AG$ ,  $EG$ , sont égales entr'elles. On prouvera de même, que la Ligne  $AH$  est égale à  $HB$  ; la Ligne  $BI$ , à  $IC$  ; la Ligne  $CK$ , à  $KD$  ; & la Ligne  $DL$ , à  $LE$ . Or comparant le Triangle  $AFG$  avec le Triangle  $EFG$ , les deux Côtez  $AF$ ,  $FG$ , sont égaux aux deux Côtez  $EF$ ,  $FG$  ; & la Baze  $AG$  égale à la Baze  $EG$ . Partant (par la 8. du 1.) l'Angle  $AFG$  est égal à l'Angle  $EFG$  ; & l'Angle  $AGF$  égal à l'Angle  $EGF$ . Desorte que chacun des Angles  $AFE$ , &  $AGE$ , est coupé en deux également. On prouvera de même, que les Angles  $AFB$ ,  $BFC$ ,  $CFD$ ,  $DFE$ , & les Angles  $AHB$ ,  $BIC$ ,  $CKD$ ,  $DLE$ , sont coupez en deux également. D'où il suit, que tous les

LIVRE QUATRIÈME. 209

Angles qui sont autour du Point F, qui sont tous moitié de choses égales, sont égaux entr'eux. Comparant maintenant les Triangles FAG & FAH: les Angles AFG & FAG sont égaux aux Angles AFH & FAH, chacun au sien; & le Côté AF, aux extrémités duquel sont ces Angles, leur est commun. Partant (par la 26. du 1.) l'Angle AGF est égal à l'Angle AHF, & le Côté AG au Côté AH. On prouvera de même, que l'Angle BHF est égal à l'Angle BIF; l'Angle CIF, à l'Angle CKF; l'Angle DKF, à l'Angle DLF; l'Angle ELF, à l'Angle EGF. Comme aussi que la Ligne HB est égale à IB; la Ligne IC, à CK; la Ligne KD, à DL; & la Ligne LE, à EG. Ensuite dequoy, GH & GL sont égales, étant doubles de AG & de GE, qui ont été prouvées égales; GH & HI sont égales, étant doubles de AH & de HB, qui ont été prouvées égales; HI & IK sont égales, étant doubles de BI & de IC, qui ont été prouvées égales; IK & KL sont égales, étant doubles de CK & de KD, qui ont été prouvées égales; & enfin KL & LG sont égales, étant doubles de DL & de LE, qui ont été prouvées égales. Si bien que le Pentagone GHIKL est Equilateral.

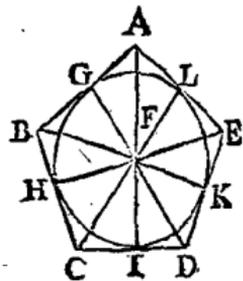
D'ailleurs, puisque les Angles HGL & GHI sont doubles des Angles AGF & AHF, qui ont été prouvés égaux, ils sont aussi égaux entr'eux. On montrera de même, que l'Angle GHI est égal à l'Angle HIK; l'Angle HIK, à l'Angle IKL; & l'Angle IKL, à l'Angle KLG. Et partant le Pentagone GHIKL est Equiangle. Nous avons donc décrit alentour d'un Cercle donné un Pentagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XIII.

## PROBLEME XIII.

*Dans un Pentagone donné, qui est Equiangular & Equilateral, décrire un Cercle.*

JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangular, soit donné; & je propose d'y inscrire un Cercle. Pour le faire,



Coupez (par la 9. du 1.) les deux Angles BAE & ABC, qui se suivent, en deux également, par les Lignes droites AF, BF. Et du Point F, où ces Lignes se rencontrent, abaissez sur un des Côtés la Perpendiculaire FG. Puis du Centre F, & de l'intervalle FG, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné. Pour le prouver,

Abaissez du Point F les Lignes FH, FI, FK, FL, perpendiculairement sur les Côtés BC, CD, DE, EA. Cela posé:

Puisque le Pentagone ABCDE est supposé Equilateral, le Côté AB, du Triangle AFB, est égal au Côté BC, du Triangle CBF; le Côté FB est commun à ces deux Triangles; & l'Angle ABF est égal à l'Angle CBF, par la construction. Donc l'Angle BAF est égal à l'Angle BCF. Or l'Angle BAF est moitié de l'Angle BAE, qui est égal à BCD, puisque le Pentagone est supposé Equiangular. Partant l'Angle BCF est aussi moitié de l'Angle BCD. Et par conséquent les deux Angles BCF & DCF

LIVRE QUATRIÈME. 211

DCF sont égaux entr'eux. On prouvera de même, que l'Angle CDF est égal à l'Angle FDE, & l'Angle DEF à l'Angle FEA. Maintenant, comparant les Triangles FBG & FBH: l'Angle FBG vient d'être prouvé égal à l'Angle FBH, & l'Angle FGB est égal à l'Angle FHB, étant rous-deux droits, par la construction; & le Côté FB est commun à ces deux Triangles. Parrant FH est égale à FG, par la 16. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FI est égale à FH; la Ligne FK à FI; & la Ligne FL, à FK. Par conséquent les cinq Lignes FG, FH, FI, FK, & FL, sont toutes égales; & le Cercle qui est décrit du Centre F; & de l'intervalle FG, passe aussi par les extremitéz de toutes les autres: & chacune de ces Lignes est un demi-Diametre du Cercle. Or les Côtéz du Pentagone ABCDE sont éleveez perpendiculairement aux extremitéz de ces demi-Diametres. Parrant (par la 16. du 3.) ces Côtéz touchent le Cercle. Et par conséquent ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME XIV.

*Alentour d'un Pentagone donné, qui est Equilateral & Equiangle, décrire un Cercle.*

JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, soit donné; & je propose de décrire un Cercle alentour de ce Pentagone. Pour le faire,

Coupez les deux Angles BAE & ABC qui se suivent, en deux également, par les Lignes droites

AF,

EUCLIDE  
 O N III  
 E XIII  
 qui est Equ  
 rive au Cos  
 A  
 G  
 C  
 I  
 B  
 droites AB  
 accourra  
 uaire FA  
 G, éleve  
 Cercle de  
 rive,  
 FH, FI  
 sez BC  
 l'angle  
 AB, est  
 Cos B  
 n'est pas  
 l'angle B  
 On l'a  
 i est é  
 le B  
 é de  
 les B

## 212. ELEMENS D'EUCLIDE.

AF, BF. Puis du Point F, où ces deux Lignes se rencontrent, & de l'intervalle FA, décrivez un Cercle. Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit alentour du Pentagone ABCDE.

Pour le prouver,

Menez les Lignes droites FC, FD, FE. Cela posé :

Par un raisonnement semblable à celui de la Proposition précédente, on prouvera que les Angles BCD, CDE, & DEA, sont coupez en deux également. Les Angles BAE & ABC le sont aussi, par la construction. Or les cinq Angles du Pentagone étant égaux, les dix Angles, qui en sont les moitez, sont aussi égaux. D'où il suit, que puisqu'au Triangle ABF les Angles FAB, FBA, sont égaux; les deux Côtez FA, FB, qui les soutiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FC est égale à FB; la Ligne FD, à FC; la Ligne FE, à FD. De sorte que les cinq Lignes FA, FB, FC, FD, FE, sont égales entr'elles. Par conséquent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'intervalle FA, passe aussi par les extremitéz des Lignes FB, FC, FD, FE, c'est à dire par les Sommets des Angles du Pentagone. Et partant ce Cercle est décrit alentour du Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



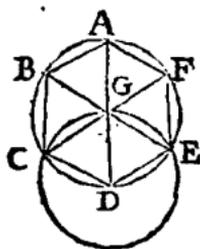
## PROPOSITION XV.

## PROBLÈME XV.

*Dans un Cercle donné, décrire un Hexagone Equilatéral & Equiangle.*

JE suppose que le Cercle ACE soit donné; & je propose d'y inscrire un Hexagone Equilatéral & Equiangle. Pour le faire,

Menez un Diamètre tel qu'il vous plaira, par exemple AGD. Puis du Point D, & de l'intervalle DG, décrivez le Cercle CGE. Ce Cercle coupera le premier aux Points C & E, Menez par ces Points les Diamètres CGF & EGB. Puis menez les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA. Cela étant, je dis que l'Hexagone ABCDEF, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilatéral & Equiangle. Pour le prouver,



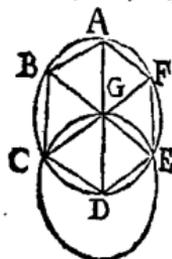
Par le raisonnement de la première Prop. du 1. on prouvera que les deux Triangles DGC, DGE, sont Equilatéraux; & par la 5. du 1. on prouvera qu'ils sont Equiangles. Et partant (par la 32. du 1.) chacun de leurs Angles vaut le tiers de deux droits. Or (par la 13. du 1.) les deux Angles CGE, & EGF, valent deux droits. Partant si on ôte l'Angle CGE, l'Angle restant EGF vaudra aussi le tiers de deux droits. Et ainsi les trois Angles CGD, DGE, EGF, sont égaux entr'eux. Mais les Angles AGF, AGB, BGC, qui leur sont opposés au Sommet, leur sont égaux, par la 15. du 1. Donc les six Angles qui sont autour du Centre G, sont tous égaux.

D'où

214 ELEMENS D'EUCLIDE.

D'où il suit ( par la 26. du 3. ) que les six Arcs sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux ; & ( par la 29. du 3. ) que les six Lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA, qui les soutiennent, sont égales. Par conséquent l'Hexagone ABCDEF est Equilateral.

Maintenant, qu'il soit Equi-angle, cela suit de la 27. du 3. Car chacun de ces six Angles s'appuye sur un Arc qui contient quatre-fois la 6. partie de la Circonférence du Cercle. Ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Hexagone Equilateral & Equi-angle ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.



C O R O L L A I R E.

Il suit de cette Proposition, que le Côté de l'Hexagone est égal au Rayon du Cercle auquel il est inscrit ; puisque chaque Côté a été prouvé égal au demi-Diametre.



## PROPOSITION XVI.

## PROBLÈME XVI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle.

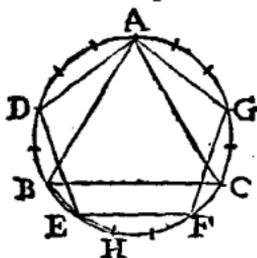
Je suppose que le Cercle  $ADBC$  soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire,

Décrivez premierement un Triangle Equilateral. Puis ( par la 2. Prop. ) décrivez dans le Cercle donné le Triangle  $ABC$ , équiangle à ce Triangle Equilateral. Décrivez ensuite ( par la 11. Prop. ) dans ce même Cercle le Pentagone

$ADEFG$ , Equilateral & Equiangle, & menez du Point  $B$  au Point  $E$  la Ligne droite  $BE$ . Cela étant, je dis que cette Ligne  $BE$  est le Côté du Quindecagone demandé.

Pour le prouver,

Puisque par la construction, le Triangle  $ABC$  est équiangle à un Triangle Equilateral, il est aussi Equilateral, par les 5. & 6. du 1. Et partant les trois Arcs  $ADB$ ,  $BEC$ , &  $CGA$ , que ses Côtés soutiennent, sont égaux, par la 28. du 3. & chacun d'eux est la 3. partie de la Circonférence du Cercle. D'ailleurs, puisque le Pentagone  $ADEFG$  est Equilateral, par la construction : les cinq Arcs que ses Côtés soutiennent, sont aussi égaux, & chacun d'eux est la cinquième partie de la Circonférence du Cercle. Or puisque l'Arc  $ADB$  est la 3. partie de la Circonférence, on peut lui appliquer cinq Côtés du Quindecagone. Et puisque l'Arc  $AD$  en est la



## 216 ELEMENS D'EUCLIDE.

cinquième partie, on lui en peut appliquer trois. Par conséquent on peut en appliquer six aux deux Arcs AD, DE. Mais nous avons montré qu'on en peut appliquer cinq à l'Arc ADB. Par conséquent on en peut appliquer un à l'Arc BE. Et ainsi la Ligne droite BE, qui lui est appliquée, est le Côté du Quindecagone. D'où il suit, qu'en appliquant quinze Lignes égales à BE, à toute la Circonférence du Cercle, on a le Quindecagone demandé. Et ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Quindecagone Equilateral.



De plus, puisque chacun des Angles de ce Quindecagone, comme BEH, s'appuye sur un Arc qui soutient treize fois la 15. partie de la Circonférence du Cercle; tous ces Angles s'ensuivent égaux, par la 27. du 3. Et par conséquent ce Quindecagone est aussi Equiangle; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.





E L È M E N S  
D'EUCLIDE.  
LIVRE CINQUIÈME.

DEFINITIONS.

1. **U**NE Grandeur est dite en mesurer une autre, lors qu'étant prise un certain nombre de fois, elle l'é-  
gale, & la mesure précisément.

Ainsi une Ligne de quatre pieds, est dite mesurer une Ligne de 20 pieds, parce que la Ligne de 4 pieds étant prise cinq fois, égale justement celle de 20 pieds; mais une Ligne de 6 pieds n'est pas dite mesurer une Ligne de 20 pieds; parce que la Ligne de 6 pieds, étant prise tant de fois que l'on voudra, ne la mesure pas précisément.

2. Une partie *aliquote* d'une Grandeur, est une partie de cette Grandeur qui la mesure précisément.

Tome I.

K

Ainsi

## 218. ELEMENS D'EUCLIDE.

Ainsi une Ligne de 4 pieds, est une partie aliquote d'une Ligne de 20 pieds.

La partie aliquote prend son nom & sa dénomination, du nombre de fois qu'elle mesure la Grandeur dont elle est partie; ou bien du nombre des parties égales dans lesquelles elle divise cette Grandeur.

Ainsi, une partie qui mesure une Grandeur deux fois, s'appelle un Demy, & s'écrit ainsi  $\frac{1}{2}$ . Une partie qui mesure une Grandeur trois fois, s'appelle un Tiers, & s'écrit ainsi  $\frac{1}{3}$ . Une partie qui mesure une Grandeur quatre fois, s'appelle un Quart, & s'écrit ainsi  $\frac{1}{4}$ . &c.

3. Une partie *aliquante* d'une Grandeur, est une partie de cette Grandeur qui ne la mesure pas précisément.

Ainsi une Ligne de six pieds est une partie aliquote d'une Ligne de vingt pieds.

Quelquefois une partie aliquote d'une Grandeur a des parties aliquotes qui mesurent la Grandeur dont elle est partie, comme par exemple 8, qui est une partie aliquote de 12, a pour partie aliquote 4, qui est le tiers de 12; dont 8 par conséquent fait les deux-tiers, puisqu'il contient deux fois 4, que l'on écrit ainsi  $\frac{2}{3}$ .

Les parties, soit aliquotes, soit aliquantes, s'appellent Fractions du Tout dont elles sont parties. Et en les marquant comme nous venons de faire, le Caractere de dessus s'appelle le Numerateur de la Fraction, & celui de dessous s'appelle le Dénominateur.

4. Des parties pareilles, ou semblables, de deux Grandeurs, ce sont des parties, dont l'une est en comparaison de sa Grandeur, ou de son Tout, ce que l'autre est en comparaison du sien.

Ainsi 3 & 5, sont des parties semblables de 12 & de 20; parce que comme 3 est le quart de 12, de même 5 est le quart de 20.

## LIVRE CINQUIÈME. 219

Il est bon de remarquer ici, que si on ôte des parties semblables de deux Grandeurs, les restes en seront des parties semblables.

Ainsi 3, qui est le quart de 12, étant ôté de 12; & 5, qui est le quart de 20, étant ôté de 20: les restes 9 & 15 sont des parties semblables de 12 & de 20, à sçavoir les trois-quarts.

5. Une Grandeur est dite multiple d'une autre Grandeur, lorsqu'elle la contient un certain nombre de fois précisément; & celle qui est contenuë s'appelle sous-multiple; laquelle sert de mesure à l'autre.

Ainsi une Ligne de 20 pieds est multiple d'une Ligne de 4 pieds; & une Ligne de 4 pieds est sous-multiple d'une Ligne de 20 pieds; parce que comme l'une contient, l'autre est contenuë, justement 5 fois; & ainsi l'une sert de mesure à l'autre.

6. Des Equimultiples de plusieurs Grandeurs, ce sont des Grandeurs qui contiennent également celles dont elles sont dites Equimultiples, ou qui sont également mesurées par ces Grandeurs.

Ainsi deux Lignes, dont l'une est de 20 pieds, & l'autre de 15 pieds, sont equimultiples de deux autres Lignes, dont l'une est de 4 pieds & l'autre de 3 pieds: parce que comme 20 est mesuré 5 fois par 4; aussi 15 est mesuré 5 fois par 3.

Il est évident que si à des Equimultiples de deux Grandeurs, on ajoute d'autres Equimultiples de ces Grandeurs, les Touts seront encore Equimultiples de ces mêmes Grandeurs.

De même, si des Equimultiples de deux Grandeurs l'on ôte des Equimultiples de ces Grandeurs, les restes seront encore equimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou leur seront égaux.

7. Raison, c'est le rapport qui est entre deux Grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Les Grandeurs de même genre, comme sont

deux Lignes, deux Surfaces, deux Corps, s'appellent Homogenes.

Les grandeurs de divers genre, comme une Ligne & une Surface, une Surface & un Corps, s'appellent Heterogenes.

Or le rapport qui est entre deux Grandeurs de même genre, lorsqu'on les compare l'une à l'autre, pour sçavoir comment & combien de fois l'une contient l'autre, ou l'autre est contenuë, s'appelle *Raison*.

Et d'autant qu'on ne peut pas dire comment & combien de fois une Grandeur est contenuë dans une autre qui n'est pas de même genre; cela fait qu'il n'y a point de Raison entre des Grandeurs de divers genre.

De même, d'autant que c'est une propriété particuliere aux Grandeurs finies, de pouvoir servir de mesure, & de pouvoir être mesurées, & qu'on ne peut pas dire qu'une Grandeur infinie contienne tant de fois une grandeur finie, ni qu'une Grandeur finie soit contenuë tant de fois dans une Grandeur infinie: De là vient aussi qu'il n'y a point de Raison entre une Grandeur finie & une infinie, encore qu'on les suppose toutes-deux de même genre.

8. Les Termes d'une Raison, sont les deux Grandeurs que l'on compare ensemble.

9. L'Antecedent d'une Raison, est le premier Terme des deux que l'on compare l'un à l'autre.

10. Le Consequent d'une Raison, est le second Terme des deux que l'on compare.

Ainsi comparant 15 à 10: l'Antecedent est 15, & le Consequent est 10.

11. La Raison d'égalité, est une Raison où l'Antecedent est égal au Consequent.

12. La Raison d'inégalité, est une Raison où l'Antecedent n'est pas égal au Consequent.

13. La Raison d'inégalité majeure, est une Raison où l'Antecedent est plus grand que le Consequent.

14. La

## LIVRE CINQUIÈME 221

14. La Raison d'inégalité mineure, est une Raison où l'Antecedent est plus petit que le Consequent.

15. La Raison Rationnelle, ou la Raison de nombre à nombre, est celle où l'on peut exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Consequent, ou combien de fois il est contenu dans le Consequent. Telle est la Raison qui est entre une Ligne de 6 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent contient le Consequent une fois & demye; ou celle qui est entre une Ligne de 2 pieds, & une Ligne de 4 pieds, où l'Antecedent est contenu deux fois dans le Consequent.

16. La Raison Irrationnelle, ou Sourde, est celle où il est impossible d'exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Consequent, où combien de fois il est contenu dans le Consequent; comme la Raison qui est entre le Côté d'un Carré & sa Diagonale; qui est telle, qu'encore que chaque Ligne à part ait plusieurs parties aliquotes, il n'y en a pourtant pas une de celles qui mesurent l'une, qui puisse mesurer l'autre; & ainsi on ne sauroit exprimer par nombre le rapport qui est entre ces deux Lignes.

17. La quantité d'une Raison d'inégalité majeure, est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent contient le Consequent.

Ainsi comparant une Grandeur de 12 pieds avec une Grandeur de 6 pieds, la quantité de cette Raison est 2, d'autant que 12 pieds contiennent 6 pieds deux fois; & cette Raison s'appelle Double. De même, comparant 12 à 4, la quantité de cette Raison est 3, d'autant que 12 contient 4 trois fois; & cette raison s'appelle Triple. De même encore, comparant 12 à 8, la quantité de cette Raison est un & demi, d'autant que 12 contient 8 une fois & demye; & cette Raison s'appelle Sesquialtere. &c.

## 222 ELEMENS D'EUCLIDE.

18. La quantité d'une Raison d'inégalité mineure est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent est contenu dans le Consequent, ou quelle partie il est du Consequent.

Ainsi comparant une Grandeur de 6 pieds, avec une de 12 pieds, la quantité de cette Raison est un demi, parce que 6 pieds sont la moitié de 12 pieds; & cette Raison s'appelle Sous-double. De même, comparant 4 à 12, la quantité de cette Raison est un tiers, d'autant que 4 est le tiers de 12; & cette Raison s'appelle Sous-triple. Et de même encore, comparant 8 à 12, la quantité de cette Raison est deux-tiers, d'autant que 8 sont les deux-tiers de 12; & cette Raison s'appelle Sous-sesquialtere.

Par là, il paroît que deux Raisons sont égales, lorsque l'Antecedent de l'une contient son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre contient le sien; ou bien lorsque l'Antecedent de l'une est contenu dans son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre est contenu dans le sien.

Ainsi la Raison de 15 à 10 est égale à la Raison de 12 à 8; parce que comme 15 contient 10 une fois & demye, de même 12 contient 8 une fois & demye.

Mais une Raison est plus grande qu'une autre, lorsque l'Antecedent de la premiere contient plus de fois son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne contient le sien; ou bien lorsque l'Antecedent de la premiere est une plus grande partie de son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne l'est du sien.

Ainsi la Raison de 15 à 5 est plus grande que la Raison de 12 à 6; parce que l'Antecedent 15 contient son Consequent 5, trois fois; au lieu que l'Antecedent 12 ne contient son Consequent 6 que deux fois. Tout au contraire, la Raison de 6 à 12 est plus grande que la Raison de 5 à 15; parce que l'Antecedent 6 est la moitié de son Consequent 12;

## LIVRE CINQUIÈME. 223

au lieu que l'Antecedent 5 n'est que le tiers de son Consequent 15.

19. Proportion, c'est la ressemblance ou l'égalité de deux Raisons.

Ainsi il y a proportion entre ces quatre Grandeurs,

$$15 \text{ — } 10 \text{ — } 12 \text{ — } 8;$$

parce que la Raison de 15 à 10 est la même, ou est égale à la Raison, de 12 à 8; ou comme l'on dit communément, parce que 15 est à 10, comme 12 est à 8.

20. Des Grandeurs proportionnelles, sont celles entre lesquelles il y a proportion.

Ainsi les Grandeurs 15 — 10 — 12 — 8, sont proportionnelles; car comme 15 contient 10 une fois & demye, ainsi 12 contient 8 une fois & demye.

21. La Proportion continuë, est celle où le Consequent de la premiere Raison sert d'Antecedent à la seconde.

Ainsi il y a proportion continuë entre ces trois Grandeurs, 18 — 12 — 8; parce que 18 est à 12, comme 12 est à 8: où l'on voit que 12, qui est le Consequent de la premiere Raison, est l'Antecedent de la seconde.

22. La Proportion non-continuë, est celle où l'Antecedent de la seconde Raison est different du Consequent de la premiere.

Telle est la Proportion qui est entre ces quatre Grandeurs, 15 — 10 — 12 — 8. Parce que 12, qui est l'Antecedent de la seconde Raison, est different de 10, qui est le Consequent de la premiere.

23. Les Termes homologues d'une Proportion, sont ceux qui tiennent le même rang, ou qui sont de même nom, dans une Proportion.

Ainsi dans la Proportion précédente, les deux Antecedens 15 & 12, & les deux Consequents 10 & 8, sont des Termes homologues; parce qu'ils

tiennent le même rang, & ont un même nom, dans cette Proportion.

Remarquez que la Proportion dont il a été parlé jusques-ici, s'appelle Geometrique; pour la distinguer d'une autre, qu'on nomme Arithmetique; laquelle se rencontre entre trois Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont cette seconde surpasse la troisième, ou en est surpassée; ou bien entre quatre Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont la troisième surpasse la quatrième, ou en est surpassée.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces trois Grandeurs, 16 — 12 — 8, est une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 4, de même aussi la seconde surpasse la troisième de 4.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces quatre Grandeurs, 15 — 10 — 7 — 2, est encore une Proportion Arithmetique; parce que comme la premiere surpasse la seconde de 5, de même aussi la troisième surpasse la quatrième de 5.

Comme la Proportion Geometrique est la principale, & d'un plus grand usage que la Proportion Arithmetique, c'est aussi de celle-là dont nous entendrons parler, quand nous parlerons simplement de Proportion.

24. Conclure en Raison Inverse, ou en changeant les Termes, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que le Consequent de la premiere Raison est à son Antecedent, comme le Consequent de la seconde est au sien. Ou, ce qui est la même chose, c'est changer les Termes des Raisons, & faire que le Consequent devienne l'Antecedent, & l'Antecedent le Consequent.

Ainsi, après avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8: si l'on vient à dire, donc 10 est à 15, comme

comme 8 est à 12 : cela s'appelle conclure en Raison inverse.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles sont encore proportionnelles en Raison inverse. Car s'il est vrai que l'Antecedent de la premiere Raison contienne son Consequent, de même que l'Antecedent de la seconde contient le sien : il est vrai aussi que le Consequent de la premiere est contenu dans son Antecedent, de même que le Consequent de la seconde est contenu dans le sien.

Ou bien au contraire, si l'Antecedent de la premiere Raison est contenu dans son Consequent, de même que l'Antecedent de la seconde est contenu dans le sien : il est vrai aussi que le Consequent de la premiere Raison contient son Antecedent, de même que le Consequent de la seconde contient le sien. Car contenir & être contenu sont termes relatifs, qui s'entendent & qui s'expliquent l'un par l'autre.

25. Conclure en Raison Alterne, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raison est à l'Antecedent de la seconde, comme le Consequent de la premiere est au Consequent de la seconde.

Ainsi, après avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 15 est à 12, comme 10 est à 8 : cela s'appelle conclure en Raison alterne.

Quelques-uns estiment que supposé que quatre Grandeurs soient proportionnelles, il est évident qu'on peut conclure qu'elles sont proportionnelles en Raison alterne.

Neanmoins, il faut remarquer qu'on ne peut valablement conclure en Raison alterne, à moins que les quatre Grandeurs ne soient de même genre. Car par exemple, si on supposoit qu'une Ligne fût à une autre Ligne, comme une Superficie est à une

## 226 ELEMENS D'EUCLIDE.

autre Superficie : on ne pourroit pas pour cela conclure que la premiere Ligne seroit à la premiere Superficie, comme la seconde Ligne est à la seconde Superficie ; étant évident, par ce qui a été dit ci-dessus, qu'il n'y a point de raison d'une Ligne à une Superficie.

26. Conclure en composant, c'est de quatre Grands qui sont proportionnelles, conclure que la somme de l'Antecedent & du Consequent de la premiere Raison, est au seul Consequent de cette premiere Raison, comme la somme de l'Antecedent & du Consequent de la seconde Raison, est au seul Consequent de cette seconde Raison.

Ainsi, après avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 25 est à 10, comme 20 est à 8 : cela s'appelle conclure en composant.

Or il est évident que si quatre Grands sont proportionnelles, on peut conclure en composant, qu'elles sont aussi proportionnelles. Car conclure en composant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Conséquens une fois plus que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la supposition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Conséquens. D'où il suit, que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également ; & ainsi ces quatre Grands doivent être encore proportionnelles.

27. Conclure en divisant, c'est de quatre Grands qui sont proportionnelles, conclure que l'excez du premier Antecedent par-dessus son Consequent, est à son Consequent, comme l'excez du second Antecedent par-dessus son Consequent, est aussi à son Consequent.

Ainsi, après avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8 ; si l'on vient à dire, donc 5 est à 10, comme 4 est à 8 : cela s'appelle conclure en divisant.

## LIVRE CINQUIÈME. 227

Il est encore évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, on peut conclure en divisant, qu'elles sont aussi proportionnelles. Car conclure en divisant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Consequens une fois moins que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or, par la supposition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Consequens. D'où il suit que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également; & ainsi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

28. Conclure par conversion de Raison, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raison est à son excez par-dessus son Consequent, comme l'Antecedent de la seconde est à son excez par-dessus le sien.

Ainsi, après avoir montré que 15 est à 10, comme 12 est à 8; si l'on vient à dire, donc 15 est à 5, comme 12 est à 4: cela s'appelle conclure par conversion de Raison.

Il est encore évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, on peut conclure par conversion de Raison, qu'elles sont aussi proportionnelles. Car puisque, par supposition, les Antecedens contiennent également les Consequens, c'est une nécessité que les Consequens soient des parties semblables des Antecedens. Si donc on ôte les Consequens des Antecedens, les restes seront encore des parties semblables des mêmes Antecedens; & par consequent les Antecedens les contiendront également, & la Raison qui sera entr'eux sera semblable.

29. Raison composée, c'est une Raison dont la quantité resulte de la multiplication de la quantité de plusieurs autres Raisons.

Pour bien entendre cette Definition, considerez par exemple ces trois Grandeurs, 24. 6. 2: & re-

## 228 ELEMENS D'EUCLIDE.

márquez que la premiere étant quadruple de la seconde, & la seconde étant triple de la troisiéme, & par consequent la quantité de la Raison de la premiere à la seconde étant 4, & celle de la seconde à la troisiéme étant 3 : il est vrai de dire, que la premiere Grandeur, comparée à la troisiéme, en est le quadruple du triple, ou la contient quatre-fois trois-fois, c'est à dire douze-fois. Si bien que la quantité de la Raison de la premiere Grandeur à la troisiéme est 12. Or cette Raison dodecuple, qui résulte de la multiplication des quantitez des deux Raisons particulieres, 4 & 3, est dite composée de ces deux Raisons.

Il suit de là, que si on dispose à discretion tant de Grandeurs que l'on voudra : la Raison de la premiere à la dernière sera composée de toutes les Raisons moiennes & particulieres, qu'ont entr'elles toutes ces Grandeurs, étant comparées de suite l'une à l'autre. Ainsi, ayant disposé à discretion ces quatre Grandeurs, 2. 4. 6. 3. 12 : la Raison de 2.4 à 12, ( qui est une Raison double, ) est composée de celles de 2.4 à 6, de 6 à 3, & de 3 à 12. Et de fait, multipliant l'un par l'autre 4, 2, &  $\frac{1}{4}$ , ( qui sont les quantitez de ces Raisons, ) le produit, qui est 2, est la quantité de la Raison de 2.4 à 12.

Remarquez, que comme le même produit qui résulte de la multiplication de deux nombres, peut résulter de la multiplication de deux autres : aussi une même Raison peut être composée de plusieurs Raisons différentes. Ainsi, par exemple, la Raison dodecuple, que nous avons veu ci-dessus être composée de la quadruple & de la triple, peut aussi être composée de la sextuple & de la double.

Maintenant, si les Raisons qui se trouvent entre plusieurs Grandeurs d'une part, sont égales ou semblables à celles qui se rencontrent entre plusieurs autres Grandeurs d'une autre part, chacune à la sienne : il est évident que la Raison composée

des premières Raisons, doit être égale à la Raison composée des autres semblables; étant nécessaire que les mêmes quantités ou les mêmes nombres multipliés deux fois, produisent le même nombre ou la même quantité.

Ainsi, si l'on suppose d'une part ces trois Grands, 24. 6. 2. & d'autre part ces trois autres Grands, 36. 9. 3; entre lesquelles les mêmes Raisons, sçavoir la quadruple & triple, se rencontrent: c'est une nécessité que la Raison de 24 à 2, soit semblable à la Raison de 36 à 3; puisque la quantité de chacune de ces Raisons résulte de la multiplication de 4 par 3.

30. Raison doublée, c'est une Raison composée de deux Raisons semblables.

Ainsi supposant trois Grands continuëment proportionnelles, telles que sont celles-ci, 64. 16. 4; puis comparant la première à la troisième: la Raison qui se trouve entre ces deux Grands, 64 & 4, (laquelle est composée des deux Raisons semblables de 64 à 16, & de 16 à 4,) s'appelle Raison doublée de 64 à 16.

31. Raison triplée, c'est une Raison composée de trois Raisons semblables.

Ainsi, supposant quatre Grands continuëment proportionnelles, comme sont les suivantes 64. 16. 4. 1; puis comparant la première à la quatrième: la Raison qui se trouve entre ces deux Grands, 64 & 1; (laquelle est composée des trois Raisons semblables de 64 à 16, de 16 à 4, & de 4 à 1,) s'appelle Raison triplée de 64 à 16.

32. Proportion ordonnée, c'est l'arrangement de plusieurs Grands d'une part, & d'autant d'autres Grands d'une autre part, disposées de telle sorte, que la première du premier ordre soit à la seconde, comme la première du second ordre est à la seconde; puis la seconde du premier ordre à la troisième, comme la seconde du second ordre à la

## 230 ELEMENS D'EUCLIDE.

troisième ; & la troisième du premier ordre à la quatrième , comme la troisième du second est à la quatrième , & ainsi de suite.

Ainsi , ayant mis d'une part les quatre Grandeurs suivantes, 12. 4. 2. 8. & d'autre part ces quatre autres, 30. 10. 5. 20. qui sont disposées de telle sorte, que la première 12 est à la seconde 4, comme la première 30 est à la seconde 10 ; que la seconde 4 est à la troisième 2, comme la seconde 10 est à la troisième 5 ; & que la troisième 2 est à la quatrième 8, comme la troisième 5 est à la quatrième 20: cet arrangement s'appelle Proportion ordonnée.

33. Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte, que la première du premier ordre soit à la seconde, comme la penultième du second ordre est à la dernière ; puis la seconde du premier ordre à la troisième, comme l'antepenultième du second ordre à la penultième, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les trois Grandeurs 12. 4. 2. & d'autre part ces trois autres, 18. 9. 3. qui sont disposées de telle sorte, que la première 12 est à la seconde 4, comme la penultième 9 est à la dernière 3 ; & que la seconde 4 est à la troisième 2, comme l'antepenultième 18 à la penultième 9 : cet arrangement s'appelle Proportion troublée.

34. Conclure en Raison égale, c'est (après avoir supposé que quelques Grandeurs d'une part, & autant d'autres d'une autre part, sont proportionnelles, soit en Proportion ordonnée, soit en Proportion troublée,) conclure que la première d'une part est à la dernière, comme la première de l'autre part est à la dernière.

Ainsi, dans l'exemple qui a été ci-dessus rapporté de la Proportion ordonnée, conclure que la première Grandeur 12 est à la dernière 8, comme la première 30 est à la dernière 20 ; Ou bien, dans  
l'exem-

## LIVRE CINQUIE'ME. 237

L'exemple de la Proportion troublée, conclure que la premiere Grandeur 12 est à la derniere 2, comme la premiere 18 est à la derniere 3 : cela s'appelle conclure en Raison égale.

Il est certain qu'on peut fort bien conclure en Raison égale ; c'est à dire qu'on peut fort bien conclure, que la Raison de la premiere Grandeur à la derniere d'une part, est semblable à la Raison de la premiere Grandeur à la derniere de l'autre part. Car chacune de ces Raisons est composée des Raisons moyennes & particulieres qu'il y a entre ces Grandeurs ; lesquelles Raisons sont supposées égales, ou les mêmes, & qui par consequent doivent produire une même quantité.

Ainsi dans cet exemple de la Proportion ordonnée, 12. 4. 2. 8 ; 30. 10. 5. 20 ; la Raison de 12 à 8 est composée de la Raison triple, de la double, & de la sous-quadruple ; & de même la Raison de 30 à 20 est composée de la Raison triple, de la double, & de la sous-quadruple, qui sont les mêmes.

De même aussi, dans cet exemple de la Proportion troublée, 12. 4. 2 ; 18. 9. 3 ; la Raison de 12 à 2 est composée de la Raison triple, & de la double ; ou resulte de la multiplication de 3 par 2 : & de même la Raison de 18 à 3 est composée de la Raison double & de la triple ; ou resulte de la multiplication de 2 par 3, qui sont les mêmes, & doivent par consequent produire une même quantité.

Encore que toutes les manieres de conclure, dont il a été parlé ci-dessus, paroissent fort justes & convaincantes à tous ceux qui les examinent avec un peu d'attention ; néanmoins Euclide a jugé à propos de les démontrer, aussi bien que quelques autres veritez aussi faciles ; & c'est à quoi il employe le cinquième Livre de ces Elemens. Mais il présume les trois Axiomes suivans, qui à dire le vrai ne sont pas plus évidens que les choses à la preuve desquelles il les employe.

## A X I O M E S.

1. Si de quatre Grandeurs proportionnelles, l'on prend à discretion des Equimultiples des deux Antecedens, comme aussi des deux Consequens: les Equimultiples des deux Antecedens seront toujours, ou plus grands, ou plus petits, ou égaux à ceux des Consequens.

Ainsi, de ces quatre Grandeurs, qui sont proportionnelles, 15. 10. 12. 8. prenant à discretion des Equimultiples de 15 & de 12; comme aussi de 10 & de 8: si l'Equimultiple de 15 surpasse l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 surpassera l'Equimultiple de 8: ou bien si l'Equimultiple de 15 est égal à l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi égal à l'Equimultiple de 8: ou enfin, si l'Equimultiple de 15 est moindre que l'Equimultiple de 10; l'Equimultiple de 12 sera aussi moindre que l'Equimultiple de 8.

2. Tout au contraire, si quatre Grandeurs sont telles, qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisieme, c'est à dire des deux Antecedens; & de la seconde, & de la quatrieme, c'est à dire des deux Consequens: il arrive que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être égal à l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisieme ne soit aussi égal à l'Equimultiple de la quatrieme: Ou que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais surpasser l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisieme ne surpassé celui de la quatrieme: Ou enfin, que l'Equimultiple de la premiere ne puisse jamais être moindre que l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisieme ne soit aussi moindre que celui de la quatrieme: alors ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Ainsi, parce que ces circonstances arrivent tou-

toijours en ces quatre Grandeurs 15. 10. : 12. 8. elles sont proportionnelles.

3. Enfin, si quatre Grandeurs sont telles, qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisiéme, comme aussi de la seconde & de la quatriéme, il puisse quelquefois arriver que l'Equimultiple de la premiere surpassera l'Equimultiple de la seconde, sans que l'Equimultiple de la troisiéme surpassé celui de la quatriéme : alors ces quatre Grandeurs ne sont pas proportionnelles ; & il y a plus grande Raison de la premiere à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme. Ainsi ces quatre Grandeurs, 12. 6. : 7. 5. ne sont pas proportionnelles ; & il y a plus grande Raison de 12 à 6, que de 7 à 5. Car prenant à discretion des Equimultiples de 12 & de 7, par exemple 24 & 14, comme aussi de 6 & de 5, par exemple 18 & 15 : il arrive que l'Equimultiple de 12, sçavoir 24, surpassé 18, Equimultiple de 6 ; sans que l'Equimultiple de 7, sçavoir 14, surpassé 15, l'Equimultiple de 5.



## PROPOSITION I.

## THEOREME I.

*S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra équivultiples d'autant d'autres Grandeurs, chacune à la sienne: comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes.*

**J**E suppose qu'il y ait d'une part deux Grandeurs, sçavoir AB, CD; & d'autre part deux autres Grandeurs, sçavoir E & F; & que AB soit autant multiple de E, que CD est multiple de F. Cela étant, je dis que comme AB est multiple de E, ou CD multiple de F; de même AB & CD, prises ensemble, sont multiples de E, & de F, prises aussi ensemble. Pour le prouver,

Concevez que AB soit divisée en trois parties égales à E, sçavoir AG, GH, HB; & CD en trois parties égales à F, sçavoir CI, IK, KD: ce qui est possible, puisque AB & CD sont supposées équivultiples de E & de F. Cela posé:

Puisque AG est égale à E, & que CI est égale à F; il s'ensuit que AG & CI, prises ensemble, seront égales à E & à F, prises aussi ensemble. De même, GH & IK, prises ensemble, seront aussi égales à E & à F, prises ensemble; & ainsi de suite. Et parce que AB & CD sont supposées équivultiples de E & de F, & qu'ainsi le nombre des parties de AB égales à E, est égal au nombre des parties de CD égales à F: autant de fois que l'on pourra pren-

LIVRE CINQUIÈME. 235

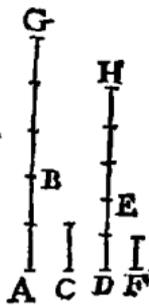
prendre dans AB une partie égale à E, autant de fois on pourra prendre dans AB & CD des parties égales à E & à F. Et par conséquent, comme AB est triple de E, ainsi AB & CD, prises ensemble, sont triples de E & de F, prises aussi ensemble; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

*Si la première Grandeur est autant multiple de la seconde, que la troisième l'est de la quatrième; & la cinquième encore autant multiple de la seconde, que la sixième l'est aussi de la quatrième: la Grandeur composée de la première & de la cinquième, sera autant multiple de la seconde, que la composée de la troisième & de la sixième, le sera de la quatrième.*

JE suppose ces six Grandeurs, AB, C, DE, F, BG, EH; & que la première AB soit autant multiple de la seconde C, que la troisième DE l'est de la quatrième F; & que la cinquième BG soit encore autant multiple de la seconde C, que la sixième EH l'est aussi de la quatrième F. Cela étant, je dis que la Grandeur composée de la première & de la cinquième,

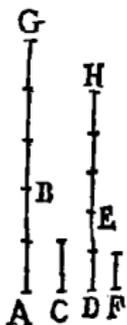


ſçavoir

236 ELEMENS D'EUCLIDE.

ſçavoir AG, eſt autant multiple de la ſeconde C, que la Grandeur DH, compoſée de la troiſième & de la ſixième, l'eſt de la quatrième F. Pour le prouver,

Puiſque AB & DE ſont équi-multiples de C & de F, le nombre des parties que AB contient égales à C, eſt égal au nombre des parties que DE contient égales à F. De même, puiſque BG & EH ſont encore équi-multiples de C & de F, le nombre des parties que BG contient égales à C, eſt auſſi égal au nombre des parties que EH contient égales à F. Si donc aux nombres égaux des parties de AB & de DE, on ajoute les nombres égaux des parties de BG & de EH; il ſ'enſuivra que le nombre des parties que la toute AG contiendra égales à C, ſera égal au nombre des parties que la toute DH contiendra égales à F: c'eſt à dire que AG ſera autant multiple de C, que DH le ſera de F; Ce qu'il falloir démonſtrer.

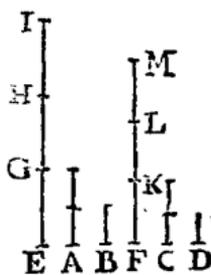


## PROPOSITION III.

## THEOREME III.

*Si la premiere Grandeur est autant multiple de la seconde, que la troisieme l'est de la quatrieme, & qu'on prenne des Equimultiples de la premiere & de la troisieme: l'Equimultiple de la premiere sera autant multiple de la seconde, que l'Equimultiple de la troisieme le sera de la quatrieme.*

**J**E suppose ces quatre Grandeurs, A, B, C, D; dont la premiere, à sçavoir A, est autant multiple de la seconde B, que la troisieme C l'est de la quatrieme D. Je suppose de plus, qu'on ait pris les Grandeurs EI & FM, équi-multiples de la premiere A & de la troisieme C. Cela étant, je dis que EI est autant multiple de la seconde B, que FM l'est de la quatrieme D. Pour le prouver,

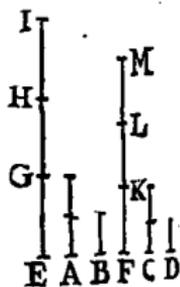


Concevez que EI soit divisée en trois parties égales à A, sçavoir, EG, GH, HI; & FM en trois parties égales à C, sçavoir FK, KL, LM. Cela posé :

Puisque EG est égale à A, & FK égale à C, il s'ensuit que EG & FK contiennent autant de fois B & D, que A & C les contiennent. Il en est de même

## 238 ELEMENS D'EUCLIDE.

même des parties GH & KL, & ainsi de suite. Or puisque la première Grandeur EG est autant multiple de la seconde B, que la troisième FK l'est de la quatrième D; & que la cinquième GH est encore autant multiple de la seconde B, que la sixième KL l'est de la quatrième D: il s'ensuit, par la Proposition précédente, que la Grandeur EH, composée de la première & de la cinquième, est autant multiple de la seconde B, que la Grandeur FL, composée de la troisième & de la sixième, l'est de la quatrième D. Ensuite de quoi prenant EH & FL pour la première & la troisième Grandeur, & HI & LM pour la cinquième & la sixième: on conclura de même, que EI est autant multiple de B, que FM l'est de D; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION IV.

## THEOREME IV.

*Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, & qu'on prenne à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisième, comme aussi des Equimultiples de la seconde & de la quatrième : il y aura même Raison de l'Equimultiple de la premiere à l'Equimultiple de la seconde, que de l'Equimultiple de la troisième à l'Equimultiple de la quatrième.*

JE suppose que A soit à B, comme C est à D ; & qu'on ait pris à discretion E & F, équi-multiples de la premiere A, & de la troisième C ; comme aussi G & H, équi-multiples de la seconde B, & de la quatrième D. Cela étant, je dis qu'il y a même Raison de E, Equimultiple de la premiere, à G, Equimultiple de la seconde ; que de F, Equimultiple de la troisième, à H, Equimultiple de la quatrième. Pour le prouver,

Prenez I & K, équi-multiples de E & de F. Prenez aussi L & M, équi-multiples de G & de H. Cela posé :



Puisque

Puisque E, considérée comme première Grandeur, est autant multiple de A, considérée comme seconde, que F, troisième, l'est de C, quatrième; & qu'on a pris les Grandeurs I & K, équi-multiples de E & de F: il s'en-suit, par la Proposition précédente, que I & K sont aussi équi-multiples de A & de C, c'est à dire de la première & de la troisième des quatre que nous avons supposées proportionnelles. De même, G & H étant équi-multiples de B & de D; & L & M ayant été prises équi-multiples de G & H: il s'en-suit que L & M sont équi-multiples de B & de D, c'est à dire de la seconde & de la quatrième des quatre que nous avons supposées proportionnelles. Par conséquent, par le premier Axiome de ce Livre, si l'Equimultiple I surpasse l'Equimultiple L, l'Equimultiple K surpassera l'Equimultiple M; s'il est égal, l'autre sera égal; s'il est moindre, l'autre sera aussi moindre. Cela étant, puisque I & K ont été prises équi-multiples de E & de F, première & troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & que L & M ont été prises équi-multiples de G & de H, seconde & quatrième de ces quatre Grandeurs: il s'en-suit, par le second Axiome, qu'elles sont en effet proportionnelles; & qu'ainsi il y a même Raison de E à G, que de F à H; Ce qu'il falloit démontrer.



## REMARQUE.

Par cette même methode, on peut aisément prouver, que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles

LIVRE CINQUIÈME. 241

elles seront encore proportionnelles en Raison inverse. Par exemple, si A est à B, comme C est à D: on prouvera aisément que B sera à A, comme D est à C. Car après avoir pris E & F, équi-multiples de A & de C, première & troisième Grandeurs des quatre qui sont supposées proportionnelles; puis G & H, équi-multiples de B & D, seconde & quatrième: on conclura, par le premier Axiome de ce Livre, que si E est égale à G, F sera égale à H; si E surpasse G, F surpassera H; & si E est moindre que G, F sera moindre que H. Or si cela est vrai, il est donc vrai aussi, que si G est égale à E, H sera égale à F; si G est moindre que E, H sera moindre que F; & si G surpasse E, H surpassera aussi F. Considérant donc maintenant B comme première Grandeur, A comme seconde, D comme troisième, & C comme quatrième; on conclura, par le second Axiome, que ces quatre Grandeurs sont proportionnelles en Raison inverse, c'est à dire que B est à A, comme D est à C; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

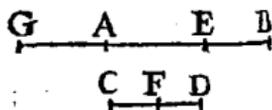
*Si une Grandeur est autant multiple d'une autre Grandeur, que la retranchée l'est de la retranchée: le reste sera autant multiple du reste, que la toute l'est de la toute.*

J'É suppose que AB est autant multiple de CD, que la retranchée AE l'est de la retranchée CF. Cela  
 Toise I. L étant,

242. ELEMENS D'EUCLIDE.

étant, je dis que le reste EB est autant multiple du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD. Pour le prouver,

Posons que GA soit autant multiple de FD, que AE l'est de CF, ou que AB l'est de CD. Il s'en suivra, par la 1. Prop. de ce Livre, que GE sera autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Or AB est



supposée autant multiple de CD, que AE l'est de CF. Donc GE est autant multiple CD, que AB l'est aussi de CD. Et par conséquent les Grandeurs GE & AB, qui sont équimultiples d'une même Grandeur, sont égales entr'elles. Si donc on ôte la partie AE, qui leur est commune, le reste GA sera égal à EB. Or GA a été posée autant multiple de FD, que AB l'est de CD. Et parant EB est autant multiple de FD, que AB l'est de CD; Ce qu'il falloit démontrer.

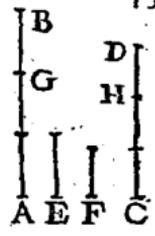
PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

*Si deux Grandeurs sont équimultiples de deux autres Grandeurs, & qu'on en retranche des Équimultiples : les restes seront équimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou ils leur seront égaux :*

**J**E suppose que les deux Grandeurs AB, CD, soient équimultiples des deux autres Grandeurs E & F, & qu'on en ait retranché AG & CH, équimultiples des mêmes Grandeurs E & F. Cela posé,

posé, je dis que les restes GB & HD sont équi-multiples de E & de F, ou qu'ils leur sont égaux. Pour le prouver,



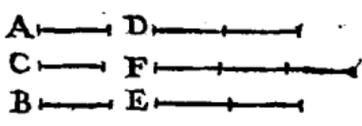
Puisque AB & CD sont équi-multiples de E & de F, il y a dans AB autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CD d'égales à F. Et puisque AG & CH sont aussi équi-multiples de E & de F, il y a aussi dans AG autant de parties égales à E, qu'il y en a dans CH d'égales à F. Si donc des deux nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AB & dans CD, on ôte les nombres égaux de parties qui sont contenuës dans AG & dans CH, il s'ensuit qu'il restera dans GB autant de parties égales à E, qu'il en restera dans HD d'égales à F. Et par conséquent, s'il en reste plusieurs dans GB & dans HD, ces restes seront équi-multiples de E & de F; que s'il n'en reste qu'une, ces restes leur seront égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

*Les Grandeurs égales ont même Raison à une même Grandeur; & une même Grandeur a même Raison à des Grandeurs égales.*

JE suppose que les deux Grandeurs A & B sont égales. Cela étant, je dis premierement que la Raison de A à C est la même



## 244 ELEMENS D'EUCLIDE.

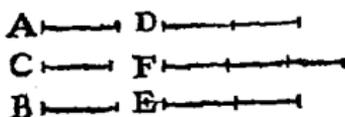
me que celle de B à

C. Pour le prouver,

Prenez à discretion

les Grandeurs D &

E, équimultiples de la premiere Grandeur A, & de la troisiéme B. Prenez encore à discretion la Grandeur F, équimultiple de la seconde & quatriéme C. Cela posé :



Puisque les Grandeurs D & E sont équimultiples des deux Grandeurs égales A & B, elles sont aussi égales entr'elles. Et par conséquent, si D est égale à F, E lui est aussi égale ; si D est plus grande que F, E est aussi plus grande que F ; enfin si D est moindre que F, E est aussi moindre que F. D'où il suit que A est à C, comme B est à C, par le 2. Ax. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, qu'il y a même Raison de C à A, que de C à B. Car puisque A est à C, comme B est à C : en Raison inverse, ( par le Corollaire de la 4 Prop. de ce Livre, ) C est à A, comme C est à B ; Ce qu'il falloit aussi démontrer,



## PROPOSITION VIII.

## THEOREME VIII.

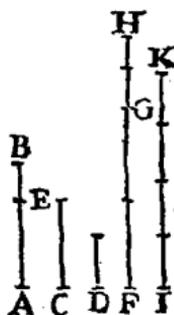
*Si deux Grandeurs sont inégales, la plus grande aura plus grande Raison à une même Grandeur, que la plus petite; & au contraire, cette même Grandeur aura plus grande Raison à la plus petite, qu'à la plus grande.*

JE suppose que les deux Grandeurs AB & C soient inégales, & que AB soit la plus grande. Cela étant, je dis premièrement que AB a plus grande Raison à D, que C n'a à D. Pour le prouver,

Retranchez de AB la partie AE, égale à C. Puis prenez FG & GH, équimultiples de AE & de EB, de telle sorte que chacune des deux Grandeurs FG & GH surpasse la Grandeur D. Prenez encore la Grandeur IK tellement multiple de D, qu'elle soit plus grande que FG, mais plus petite que FH. Or cela se peut faire aisément; car puisque FG surpasse D, il est aisé de multiplier D en sorte qu'elle surpasse FG, sans qu'elle surpasse FH. Cela posé:

Puisque FG & GH sont équimultiples de AE & de EB, il s'ensuit (par la 1. Prop.) que FH est autant multiple de la toute AB, que FG l'est de AE, ou de son égale C.

Considérant donc ici ces quatre Grandeurs, AB première, D seconde, C troisième, & derechef

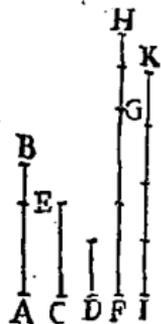


## 246 ELEMENS D'EUCLIDE.

D quatrième ; & que les Grandeurs FH , FG , sont équitriples de la première AB & de la troisième C ; & que IK est équitriples de la seconde & de la quatrième D : Puisque FH multiple de la première AB , surpasse IK multiple de la seconde D , sans que FG multiple de la troisième C , surpasse IK multiple de la quatrième , qui est la même D : il s'ensuit ( par le 3. Ax. ) que la première Grandeur AB , a plus grande Raison à la seconde D , que la troisième C n'a à la quatrième , c'est à dire à la même Grandeur D ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu , que la Grandeur D a plus grande Raison à la plus petite C , qu'elle n'a à la plus grande AB. Pour le prouver ,

Considerant maintenant D comme première & troisième Grandeur , C comme seconde , & AB comme quatrième : Puisque IK multiple de la première D , surpasse FG multiple de la seconde C , sans que IK multiple de la troisième D , surpasse FH multiple de la quatrième AB ; il s'ensuit ( par le 3. Ax. ) que D a plus grande Raison à la plus petite C , que la même D n'a à la plus grande AB ; Ce qu'il falloit encore démontrer.



## PROPOSITION IX.

## THEOREME IX.

*Les Grandeurs qui ont même Raison à une même Grandeur, sont égales entr'elles; & celles auxquelles une même Grandeur a même Raison, sont aussi égales entr'elles.*

JE suppose premierement, que les deux Grandeurs A & B ayent même Raison à la même Grandeur C. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B sont égales entr'elles.



Car si cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus grande que l'autre. Et cela étant, il s'ensuivroit, par la Proposition précédente, que la plus grande auroit plus grande Raison à la Grandeur C, que n'auroit la plus petite; ce qui est contre la supposition. L'une n'est donc pas plus grande que l'autre; & par conséquent elles sont égales.

Je suppose en second lieu, qu'une même Grandeur, comme C, ait même Raison à deux Grandeurs, comme A & B. Cela étant, je dis que ces deux Grandeurs A & B sont aussi égales entr'elles.

Car si cela n'étoit, il faudroit que l'une fût plus petite que l'autre. Et cela étant, il s'ensuivroit, par la Proposition précédente, que la Grandeur C auroit plus grande Raison à celle qui seroit plus petite, qu'elle n'auroit à la plus grande; ce qui est contre la supposition. L'une n'est donc pas plus petite que l'autre; & par conséquent elles sont égales; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION X.

## THEOREME X.

*De deux Grandeurs, celle qui a plus grande Raison à une même, est la plus grande; & au contraire, celle à laquelle une même a plus grande Raison, est la plus petite.*

JE suppose premierement, que des deux Grandeurs A & B, A a plus grande Raison à C, que B n'a à C. Cela étant, je dis que A est plus grande que B. Pour le prouver,

Si A n'étoit pas plus grande que B, il faudroit qu'elle lui fût égale, ou qu'elle fût plus petite que B. Si elle lui étoit égale, il s'en suivroit (par la 7. Prop.) que A & B auroient même Raison à C; ce qui est contre la supposition. A n'est donc pas égale à B. Que si A étoit plus petite que B, il s'en suivroit, (par la 8. Prop.) que A auroit moindre Raison à C, que B n'a à C; ce qui est aussi contre la supposition. A n'est donc pas aussi plus petite que B. Par conséquent A est plus grande que B; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que C a plus grande Raison à B, que C n'a à A. Cela étant, je dis que B est plus petite que A.

Car si cela n'étoit, il faudroit que B fût égale à A, ou qu'elle fût plus grande. Si elle étoit égale, il s'en suivroit (par la 7. Prop.) qu'il y auroit même Raison de C à B, que de C à A; ce qui est con-

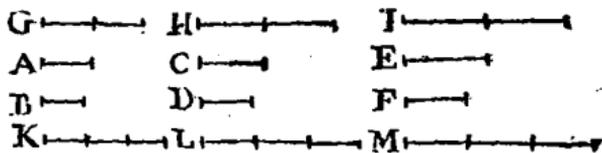
tre la supposition. B n'est donc pas égale à A. Que si B étoit plus grande que A, il s'ensuivroit ( par la 8. Prop. ) qu'il y auroit plus grande Raison de C à A, que de C à B; ce qui est encore contre la supposition. B n'est donc pas aussi plus grande que A. Par conséquent B est plus petite que A; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XI.

### THEOREME XI.

*Les Raisons qui sont semblables à une même, sont semblables entr'elles.*

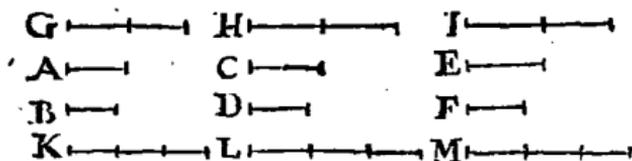
Je suppose que A soit à B, comme C est à D; & de plus, que comme C est à D, ainsi E soit à F. Cela étant, je dis que comme A est à B, ainsi E est à F. Pour le prouver,



Prenez à discretion G, H, I, équit multiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à discretion K, L, M, équit multiples des Consequens B, D, F. Cela posé :

Puisque les quatre Grandeurs A, B, C, D, sont proportionnelles, & que G & H sont les Equimultiples de la première & de la troisième, & que K & L sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième: il s'ensuit ( par le 1. Ax. ) que G ne pourra être égal à K, que H ne soit égal à L; ou que G ne pourra surpasser K, que H ne surpassé L; ou enfin que G ne pourra être moindre que K, que

H ne soit aussi moindre que L. Mais puisque les quatre Grandeurs C, D, E, F, sont aussi proportionnelles, & que H & I sont les Equimultiples de la première & de la troisième Grandeur, & que L & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième : il s'ensuit aussi ( par le 1. Ax. ) que H



ne sauroit être égal à L, que I ne soit égal à M; ou que H ne sauroit être plus grand que L, que I ne soit plus grand que M; ou enfin que H ne sauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Et partant G ne pourra être égal à K, que I ne soit égal à M; ou bien G ne pourra être plus grand que K, que I ne soit plus grand que M; ou bien enfin G ne pourra être moindre que K, que I ne soit aussi moindre que M.

Mais G & I sont les Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & K & M sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième. D'où il suit ( par le 2. Ax. ) que ces quatre Grandeurs A, B, E, F, sont proportionnelles; c'est à dire, que A est à B, comme E est à F; Ce qu'il falloit démontrer.

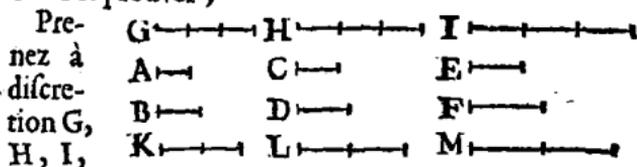


PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

*Si tant de Grandeurs que l'on voudra sont proportionnelles : comme l'un des Antecedens sera à son Consequent, ainsi tous les Antecedens pris ensemble seront à tous les Consequens pris ensemble.*

**J**E suppose que A soit à B, comme C est à D, & E à F. Cela étant, je dis que comme l'un des Antecedens A est à son Consequent B, ainsi tous les Antecedens A, C, E, pris ensemble, sont à tous les Consequens B, D, F, pris aussi ensemble. Pour le prouver,



équimultiples des Antecedens A, C, E. Prenez de même à discretion K, L, M, équimultiples des Consequens B, D, F. Cela posé :

Il s'ensuit (par la 1. Prop.) qu'autant que la Grandeur G est multiple de la Grandeur A, autant aussi les Grandeurs G, H, I, prises ensemble, sont multiples des Grandeurs A, C, E, prises aussi ensemble; & qu'autant que la Grandeur K est multiple de la Grandeur B, autant les Grandeurs K, L, M, prises ensemble, sont multiples des Grandeurs B, D, F, prises aussi ensemble. D'ailleurs, puisque A est à B, comme C est à D; & que G & H sont équimultiples

tiples de la premiere & troisiéme, & K & L équimultiples de la seconde & quatriéme : il suit ( par le 1. Ax. ) que si G est égale à K, H sera égale à L ; ou que si G surpasse K, H surpassera L ; ou enfin que si G est moindre que K, H sera aussi moindre que L. Mais puisque C est à D, comme E est à F ; & que H & I

font é-  
 quimul-  
 tiples de  
 la pre-  
 miere

G	→→→	H	→→→	I	→→→
A	→	C	→	E	→
B	→	D	→	F	→
K	→→→	L	→→→	M	→→→

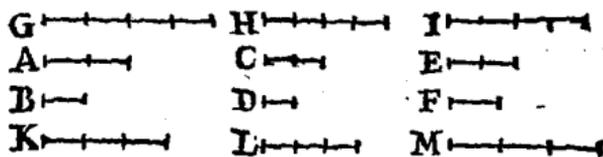
& de la troisiéme de ces Grandeurs, & L & M équimultiples de la seconde & de la quatriéme : H ne sçauroit aussi être égale à L, que I ne soit égale à M ; ou bien H ne sçauroit surpasser L, que I ne surpasse M ; ou enfin H ne sçauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M. Par consequent G ne sçauroit être égale à K, que G, H, I, prises ensemble, ne soient aussi égales à K, L, M, prises aussi ensemble ; ou bien G ne sçauroit surpasser K, que G, H, I, ne surpassent K, L, M ; ou enfin G ne sçauroit être moindre que K, que G, H, I, ne soient moindres que K, L, M. Mais G d'une part, & G, H, I, d'autre part, sont équimultiples de la premiere A, & de la troisiéme A, C, E, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; comme aussi K d'une part, & K, L, M, d'autre part, sont équimultiples de la seconde B, & de la quatriéme B, D, F, de ces quatre Grandeurs. D'où il suit ( par le 2. Ax. ) qu'elles sont proportionnelles ; & ainsi, que comme A est à B, ainsi A, C, E, prises ensemble, sont à B, D, F, prises aussi ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XIII.

## THEOREME XIII.

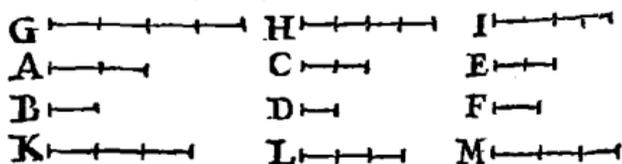
*Si la premiere Grandeur est à la seconde, comme la troisième est à la quatrième; mais que la troisième ait plus grande Raison à la quatrième, que la cinquième à la sixième: il y aura aussi plus grande Raison de la premiere à la seconde, que de la cinquième à la sixième.*

**J**E suppose les six Grandeurs A, B, C, D, E, F, & que la premiere A soit à la seconde B, comme la troisième C est à la quatrième D; mais que la Raison de C à D soit plus grande que celle de la cinquième E à la sixième F. Cela étant, je dis que A a plus grande Raison à B, que E n'a à F. Pour le prouver,



Puisque A est à B, comme C est à D; il s'ensuit (par le 1. Ax.) qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & troisième Grandeur, & des Equimultiples de la seconde & de la quatrième: jamais l'Equimultiple de C ne surpassera l'Equimultiple de D, que l'Equimultiple de A ne surpassé aussi l'Equimultiple de B. Mais puisqu'il

ya plus grande Raison de C à D, que de E à F; si l'on prend à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisieme, & des Equimultiples de la seconde & de la quatrieme: il se pourra faire que l'Equimultiple de C surpassera l'Equimultiple de D, sans que l'Equimultiple de E surpasse l'Equimultiple de F. Partant il se pourra faire aussi qu'ayant pris à discretion des Equimulti-



ples de A & de E, ( qui sont la premiere & la troisieme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver n'être pas proportionnelles, ) & de même des Equimultiples de B & de F, qui sont la seconde & la quatrieme: il se pourra, dis je, faire que l'Equimultiple de la premiere A surpassera l'Equimultiple de la seconde B, sans que l'Equimultiple de la troisieme E surpasse l'Equimultiple de la quatrieme F. D'où il suit ( par le 3. Ax. ) qu'il y a plus grande Raison de A à B, que de E à F; Ce qu'il falloit démontrer:



## PROPOSITION XIV.

## THEOREME XIV.

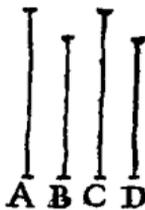
*Si de quatre Grandeurs proportionnelles, la première est plus grande que la troisième: la seconde sera aussi plus grande que la quatrième; si égale, égale; si moindre, moindre.*

JE suppose que les quatre Grandeurs A, B, C, D, soient proportionnelles, & premièrement que la première A soit plus grande que la troisième C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi plus grande que la quatrième D. Pour le prouver,



Puisque A est plus grande que C, il y a plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D, par supposition. Il y a donc aussi plus grande Raison de C à D, que de C à B. Et partant (par la 10. Prop.) D sera plus petite que B, ou B plus grande que D; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que de ces quatre Grandeurs proportionnelles A, B, C, D, la première A soit égale à la troisième C. Cela étant, je dis que la seconde B est aussi égale à la quatrième D. Pour le prouver,



Puisque A est égale à C, il y a même Raison de A à B, que de C à B, par la 7. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D. Il y a donc aussi même Raison de C à D, que de

de

256 ELEMENS D'EUCLIDE.

de C à B. Et partant ( par la 9. Prop. ) les Grandeurs B & D sont égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose enfin que de ces quatre Grandeurs proportionnelles A , B , C , D , la premiere A soit moindre que la troisième C. Cela étant , je dis que la seconde B est aussi moindre que la quatrième D. Pour le prouver ,



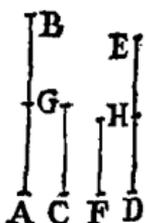
Puisque A est moindre que C , il y aura moindre Raison de A à B , que de C à B , par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de C à D. Il y aura donc aussi moindre Raison de C à D , que de C à B. Et partant ( par la 10. Prop. ) B sera moindre que D ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XV.

*Si deux Grandeurs sont équivultiples de deux autres Grandeurs ; elles seront entr'elles comme les Grandeurs dont elles sont équivultiples.*

JE suppose que les deux Grandeurs AB , DE , soient équivultiples des deux autres Grandeurs C & F ; sçavoir AB autant multiple de C , que DE l'est de F. Cela étant , je dis que AB est à DE , comme C est à F. Pour le prouver ,



Puisque AB & DE sont équivultiples de C & de F : il y a dans AB autant de parties égales à C , qu'il y en a dans DE d'égales à F. Donc  
(par

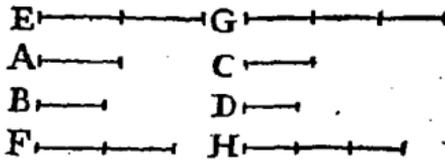
# LIVRE CINQUIÈME. 257

( par la 7. Prop. ) la premiere des parties de AB a même Raïson à la premiere de DE , que la seconde de AB à la seconde de DE , & que la troisiéme à la troisiéme , & ainsi de suite , s'il y en a ; & cette Raïson est la même que celle de C à F. Deplus , puisque nous avons dans AB plusieurs Grandeurs qui sont toutes en même Raïson à autant d'autres dans DE : il s'ensuit ( par la 12. Prop. ) que toutes les parties de AB prises ensemble , sont à toutes les parties de DE prises aussi ensemble , ( ce qui est la même chose que la toute AB est à la toute DE , ) comme une seule partie de AB est à une seule partie de DE. Or une seule partie de AB a été montrée être à une seule partie de DE , comme C est à F. Partant AB est à DE , comme C est à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVI.

### THEOREME XVI.

*Si quatre Grandeurs sont proportionnelles , elles le seront encore en Raïson alterne.*

JE suppose  E ——— G ———  
 que A soit A ——— C ———  
 à B, com- B ——— D ———  
 me C est à D.  
 Cela étant , je F ——— H ———

dis que ces Grandeurs sont encore proportionnelles en Raïson alterne ; c'est à dire que A est à C , comme B est à D. Pour le prouver ,

Prenez des Equimultiples tels qu'il vous plaira de A & de B, comme par exemple E & F. Prenez encore des Equimultiples tels aussi qu'il vous plaira de C & de D , comme G & H. Cela posé :

## 258 ELEMENS D'EUCLIDE.

Il s'ensuit ( par la Prop. précédente ) que E est à F, comme A est à B ; & que G est à H, comme C est à D. Or par la supposition, A est à B, comme C est à D.

E ————— G —————  
 Partant ( par la 11. Prop. ) A ————— C —————  
 E est à F, B ————— D —————  
 comme G est F ————— H —————

à H. D'où il suit ( par la 14. Prop. ) que si E est plus grande que G, F sera plus grande que H ; si égale, égale ; si moindre, moindre. Or est-il que E & F sont les Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles ; & que G & H sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième. Donc ( par le 2. Ax. ) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même Raison de A à C, que de B à D ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVII.

### THEOREME XVII.

*Si des Grandeurs composées sont proportionnelles, en divisant elles seront aussi proportionnelles.*

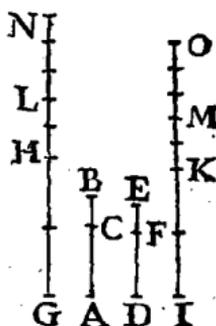
**J**E suppose que AB est à BC, comme DE est à EF. Cela étant, je dis qu'en divisant elles seront encore proportionnelles ; c'est à dire qu'il y aura même Raison de AC à CB, que de DF à FE. Pour le prouver,

Prenez à discretion les Grandeurs GH & IK, équi-multiples de AC & de DF. Puis prenez HL & KM, équi-multiples de CB & de FE, & autant mul-

# LIVRE CINQUIÈME. 259

multiples de ces Grandeurs, que GH & IK le font de AC & de DF. Prenez derechef à discretion LN & MO, équivultiples de CB & de FE. Cela posé :

Puisque GH & HL sont équivultiples de AC & de CB : il s'ensuit ( par la 1. Prop. ) que GL sera autant multiple de AB, que GH l'est de AC. Or GH est autant multiple de AC, que IK l'est de DF. Donc GL est autant multiple de AB, que IK l'est de DF. D'ailleurs, IK & KM sont équivultiples de DF & de FE.



Donc ( par la 1. Prop. ) autant que IK est multiple de DF, autant IM est multiple de DE. Et par consequent GL & IM s'ensuivent équivultiples de AB & de DE, qui sont la première & la troisième des quatre Grandeurs qui sont supposées proportionnelles. Deplus HL, considérée comme première Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que KM troisième l'est de FE quatrième ; & LN, cinquième Grandeur, est autant multiple de CB seconde, que MO, sixième Grandeur, l'est de FE quatrième. Partant ( par la 2. Prop. ) HN sera autant multiple de CB, que KO l'est de FE ; c'est à dire que HN & KO sont encore équivultiples de la seconde & de la quatrième Grandeur des quatre que nous avons supposées être proportionnelles. Ainsi ( par le 1. Ax. ) si GL est égale à HN, IM sera égale à KO ; si GL surpasse HN, IM surpassera KO ; & si GL est moindre que HN, IM sera moindre que KO. C'est pourquoi en retranchant des deux Grandeurs GL & HN, la partie HL, qui leur est commune ; & des deux Grandeurs IM, & KO, la partie KM, qui leur est aussi commune : il sera encore vrai de dire, que si GH est égale à LN, IK sera égale à MO ; si GH surpasse LN, IK surpassera MO ; & si GH est moindre que LN, IK

sera

sera moindre que MO. Mais GH & IK sont les Equimultiples de la premiere AC, & de la troisieme DF, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & LN & MO sont aussi les Equimultiples de la seconde CB, & de la quatrième FE. Donc ( par le 2. Axiome ) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles. Et ainsi il y a même Raison de AC à CB, que de DF à FE; Ce qu'il falloit démontrer.



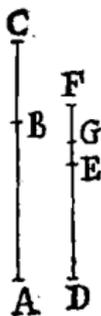
## PROPOSITION XVIII.

## THEOREME XVIII.

*Si des Grandeurs divisées sont proportionnelles, en composant elles seront encore proportionnelles.*

JE suppose que la Grandeur AB soit à la Grandeur BC, comme la Grandeur DE est à la Grandeur EF. Cela étant, je dis qu'en composant, ces Grandeurs seront encore proportionnelles; c'est à dire, que comme AC sera à BC, ainsi DF sera à EF.

Car si cela n'étoit, il faudroit que AC fût à BC, comme DF est à une autre Grandeur que EF. Posons, si vous voulez, que cette autre Grandeur soit GF; auquel cas ( par la Prop. précédente ) il s'ensuivroit, en divisant, que comme AB est à BC, ainsi DG seroit à GF. Mais comme AB est à BC, ainsi



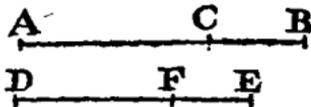
ainsi DE est à EF, par supposition. Partant (par la 11. Prop.) DG seroit à GF, comme DE est à EF. Or DG, qui est la première de ces quatre Grandeurs, est plus grande que la troisième DE. Donc (par la 14. Prop.) la seconde GF seroit plus grande que la quatrième EF, & ainsi la partie seroit plus grande que le Tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que comme AC est à BC, ainsi DF soit à une autre que EF. Et partant AC est à BC, comme DF est à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

THEOREME XIX.

*Si le Tout est au Tout, comme le retranché au retranché: le reste sera aussi au reste, comme le Tout est au Tout.*

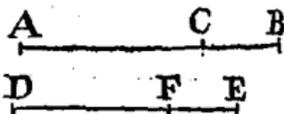
JE suppose que le Tout AB soit au Tout DE, comme le retranché AC est au retranché DF. Cela étant, je dis que le reste CB est au reste FE, comme le Tout AB est au Tout DE. Pour le prouver,



Puisque AB est à DE, comme AC est à DF: en Raison alterne, AB sera à AC, comme DE est à DF, par la 16. Prop. Et en disant, CB sera à AC, comme FE est à DF, par la 17. Prop. Et derechef en Raison alterne, CB sera à FE, comme AC est à DF. Or AC est à DF, comme AB est à DE, par supposition. Donc CB est à FE, comme AB est à DE. Et ainsi, si le Tout &c. Ce qu'il falloit démontrer.

## REMARQUE.

On démontre ici la vérité de cette manière de conclure, que nous avons ci-devant appelée *par conversion de Raison*. Supposons par exemple, que AB est à CB, comme DE est à FE. Cela étant je dis, par conversion de Raison, que AB sera à AC, comme DE est à DF. Car puisque AB est à CB, comme DE est à FE : en divisant, AC sera à CB, comme DF est à FE. Et en Raison inverse, CB sera à AC, comme FE est à DF. Et derechef en composant, AB sera AC, comme DE est à DF ; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XX.

## THEOREME XX.

*Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la première d'une part soit plus grande que la troisième: la première de l'autre part sera aussi plus grande que la troisième; si égale, égale; si moindre, moindre.*

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion ordonnée; c'est à dire,



que A soit à B, comme D est à E; & que B soit à C, comme E est à F. Cela étant, je dis premièrement que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,

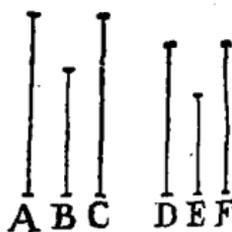
Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de D à E est la même que celle de A à B. Il y aura donc plus grande Raison de D à E, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme E est à F: en Raison inverse, la Raison de C à B est la même que celle de F à E. Il y a donc plus grande Raison de D à E, que de F à E. Et partant  
(par

264 ELEMENS D'EUCLIDE.

( par la 10. Prop. ) D sera plus grande que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu , que A soit égale à C. Cela étant, je dis que D sera égale à F.

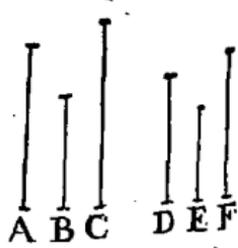
Car puisque A est égale à C , il y aura même Raison de A à B , que de C à B.



Or la Raison de A à B est la même que de D à E. Donc il y aura même Raison de D à E , que de C à B. Mais puisque B est à C , comme E est à F : en Raison inverse , C est aussi à B , comme F est à E. Il y a donc même Raison de D à E , que de F à E. Et partant ( par la 9. Prop. ) D sera égale à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose enfin , que A soit moindre que C. Cela étant, je dis que D sera moindre que F.

Car puisque A est moindre que C , il y aura une moindre Raison de A à B , que de C à B , par la 8. Prop. Or la Raison de A à B est la même que celle de D à E. Il y a donc une moindre Raison de D à E , que de C à B. Mais puisque B est à C , comme E est à F : en Raison inverse , il y aura même Raison de C à B , que de F à E. Il y a donc une moindre Raison de D à E , que de F à E. Et partant ( par la 10. Prop. ) D sera moindre que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

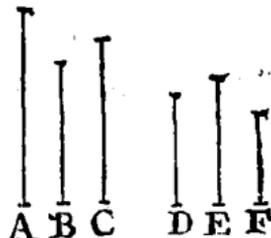


## PROPOSITION XXI.

## THEOREME XXI.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison; & qu'en Raison égale, la première d'une part soit plus grande que la troisième: la première de l'autre part sera aussi plus grande que la troisième; si égale, égale; si moindre, moindre.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée; c'est à dire, que A soit à B, comme E est à F; & que B soit à C, com-



me D est à E. Cela étant, je dis premièrement, que si A est plus grande que C, D sera aussi plus grande que F. Pour le prouver,

Puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B. Or la Raison de A à B est la même que celle de E à F. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de C à B. Mais puisque B est à C, comme D est à E: en Raison inverse, E est à D, comme C est à B. Il y aura donc plus grande Raison de E à F, que de E à D. Et partant (par la 10. Prop.) D sera plus

grande que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

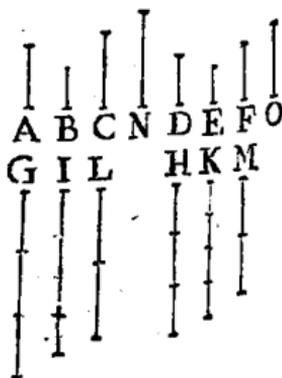
Par un semblable raisonnement on montrera que si A est égale à C , D sera égale à F ; & que si A est moindre que C , D sera aussi moindre que F. Si donc trois Grandeurs d'une part , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXII.

### THEOREME XXII.

*Si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont en même Raison: en Raison égale, elles seront proportionnelles.*

JE suppose d'une part trois Grandeurs, comme A , B , C , & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D , E , F , tellement disposées, que A soit à B, comme D est à E ; & B à C , comme E à F. Cela étant, je dis qu'en Raison égale il y aura même Raison de



A à C , que de D à F. Pour le prouver ,

Prenez à discretion G & H , équi-multiples de A & de D ; puis I & K , équi-multiples de B & de E ; & enfin L & M , équi-multiples de C & de F. Cela posé :

Puisque A est à B , comme D est à E ; & que G & H sont équi-multiples de la première & de la troisième ;

LIVRE CINQUIE'ME. 267

fième; & I & K équivmultiples de la seconde & de la quatrième: il s'ensuit (par la 4. Prop.) que G est à I, comme H est à K. De même, puisque B est à C, comme E est à F; & que I & K sont équivmultiples de la première & de la troisième; & L & M équivmultiples de la seconde & de la quatrième: il s'ensuit aussi (par la 4. Prop.) que I est à L, comme K est à M. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, I, L, & d'autre part trois autres Grandeurs H, K, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont proportionnelles. Partant (par la 20. Prop.) si G est plus grande que L, H sera aussi plus grande que M; si G est égale à L, H sera aussi égale à M; & si G est moindre que L, H sera aussi moindre que M. Mais G & H sont les Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & L & M sont aussi les Equimultiples de la seconde & de la quatrième. Donc (par le 2. Ax.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; & ainsi il y a même Raison de A à C, que de D à F; Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, s'il y avoit plus de trois Grandeurs de chaque côté, & que par exemple, il y en eût quatre d'une part, & quatre d'une autre, en sorte que C fût à N, comme F est à O: on prouveroit aisément, ensuite de ce qui vient d'être démontré de trois Grandeurs, que A seroit à N, comme D seroit à O. Car ne considérant point la seconde Grandeur de part ni d'autre, & supposant, comme il vient d'être prouvé, que A est à C, comme D est à F; & que C est à N, comme F est à O: comme il n'y auroit plus alors que trois Grandeurs de chaque côté, il s'ensuivroit que A seroit à N, comme D seroit à O. Donc si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, prises deux à deux, sont en même Raison; en Rai-

son égale, elles seront proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXIII.

### THEOREME XXIII.

*Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en même Raison: en Raison égale, elles seront proportionnelles.*

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée; c'est à dire que A soit à B, comme E est à F; & que B soit à C, comme D est à E. Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y aura même Raison de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Prenez à discretion G & I, équimultiples de A & de D; & K & M, équimultiples de C & de F. Puis prenez H autant multiple de B, que G l'est de A; & L autant multiple de E, que M l'est de F. Cela posé:

Puisque G & H sont équimultiples de A & de B, il s'en suit ( par la 15. Prop. ) que G sera à H, comme A est à B. Or A est à B, comme E est à F. Donc G sera à H, comme E est à F. Mais puisque L & M sont équimultiples de E & de F, E est à F, com-



LIVRE CINQUIE'ME. 269

me L est à M. Partant G sera à H, comme L est à M. D'ailleurs, puisque B est à C, comme D est à E, & que H & I ont été prises équivales de la première & de la troisième de ces quatre Grandeurs, & que K & L ont été prises équivales de la seconde & de la quatrième: il s'entuit ( par la 4. Prop. ) que H est à K, comme I est à L. Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, H, K, & d'autre part trois autres Grandeurs I, L, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion troublée, sont proportionnelles. Partant ( par la 21. Prop. ) si G est plus grande que K, I sera plus grande que M; si G est égale à K, I sera égale à M; ou enfin, si G est moindre que K, I sera moindre que M. Mais G & I sont les Equivales de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être proportionnelles; & K & M sont aussi les Equivales de la seconde & de la quatrième. Donc ( par le 2. Ax. ) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

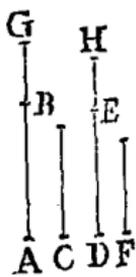


## PROPOSITION XXIV.

## THEOREME XXIV.

*Si la premiere Grandeur est à la seconde, comme la troisième est à la quatrième; & la cinquième à la seconde, comme la sixième à la quatrième: la composée de la premiere & de la cinquième sera à la seconde, comme la composée de la troisième & de la sixième sera à la quatrième.*

JE suppose que la premiere Grandeur AB soit à la seconde C, comme la troisième DE est à la quatrième F; & que la cinquième BG soit encore à la seconde C, comme la sixième EH est à la quatrième F. Cela étant, je dis que la Grandeur AG, composée de la premiere & de la cinquième, est à la seconde C, comme la Grandeur DH, composée de la troisième & de la sixième, est à la quatrième F. Pour le prouver,



Puisque BG est à C, comme EH est à F; en Raison inverse, C est à BG, comme F est à EH. Maintenant, AB est à C, comme DE est à F, par supposition; C est à BG, comme F est à EH, comme il vient d'être prouvé. Donc (par la 22. Prop.) en Raison égale, AB est à BG, comme DE est à EH. De plus, en composant, AG est à BG, comme DH est à EH; BG est à C, comme EH est à F,

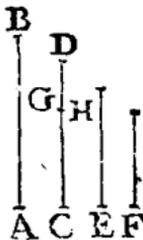
à F, par supposition. Partant, en Raison égale, AG est à C, comme DH est à F; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXV.

\* THEOREME XXV.

*Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite prises ensemble, sont plus grandes que les deux autres prises aussi ensemble.*

**J**E suppose que AB soit à CD, comme E est à F; & que AB soit la plus grande, & par conséquent F la plus petite. Cela étant, je dis que les Grandeurs AB & F prises ensemble, sont plus grandes que CD & E prises aussi ensemble. Pour le prouver,



Retranchez de AB la partie AG égale à E; & de CD la partie CH égale à F. Cela posé:

La toute AB sera à la toute CD, comme la retranchée AG est à la retranchée CH. Donc (par la 19. Prop.) le reste GB sera au reste HD, comme la toute est à la toute. Or la toute AB est supposée plus grande que CD. Partant le reste GB sera aussi plus grand que le reste HD. Si donc aux deux Grandeurs égales AG & E, on ajoute les Grandeurs égales F & CH: il s'ensuivra que le Tout composé de AG & de F, sera égal au Tout composé de E & de CH. Que si maintenant on ajoute à ces deux Touts des Grandeurs inégales, sçavoir GB d'un côté, & HD de l'autre: il s'ensui-

vra que le Tout composé de AB & de F, sera plus grand que le Tout composé de CD & de E; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXVI.

### THEOREME XXVI.

*Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisieme à la quatrieme: en Raison inverse, tout au contraire, la seconde aura moindre Raison à la premiere, que la quatrieme à la troisieme.*

**J**E suppose qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de C à D. Cela étant, je dis qu'en Raison inverse, tout au contraire, la Raison de B à A est moindre que celle de D à C. Pour le prouver,

Supposons qu'il y ait même Raison de E à B, que de C à D. Cela posé:

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à B, que de C à D, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison de A à B, que de E à B; par conséquent A est plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il suit que la Raison de B à A est moindre que celle de B à E, par la 8. Prop. Mais puisque par la supposition E est à B, comme C est à D: en Raison inverse, B est à E, comme D à C. Donc la Raison de B à A est aussi moindre que celle de D à C; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XXVII.

## THEOREME XXVII.

*Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisième à la quatrième: en Raison alterne, la premiere aura aussi plus grande Raison à la troisième, que la seconde à la quatrième.*

**J**E suppose qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de C à D.

Cela étant, je dis qu'en Raison alterne il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de B à D. Pour le prouver,

Supposons qu'il y ait même Raison de E à B, que de C à D. Cela posé:

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à B, que de C à D, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison de A à B, que de E à B. Et par conséquent A est plus grande que E, par la 10. Prop. D'où il suit qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de E à C, par la 8. Prop. Mais puisque par la supposition E est à B, comme C est à D: en Raison alterne, E est à C, comme B est à D. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de B à D; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XXVIII.

## THEOREME XXVIII.

*Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisième à la quatrième: en composant, la composée de la premiere & de la seconde aura aussi plus grande Raison à la seconde, que la composée de la troisième & de la quatrième n'aura à la quatrième.*

JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de la premiere Grandeur AB à la seconde BC, que de la troisième DE à la quatrième EF. Cela étant, je dis qu'en composant, il y a aussi plus grande Raison de la route AC à BC, que de la route DF à EF. Pour le prouver,

Supposons que AB soit à BC, comme GE est à EF. (Cela posé :

Puisqu'il y a plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison de GE à EF, que de DE à EF; & par consequent GE est plus grande que DE. Mais puisque par la supposition AB est à BC, comme GE est à EF: en composant, AC est à BC, comme GF est à EF. Mais puisque GF est plus grande que DF, il y a plus grande Raison de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. Prop. Donc il y a aussi plus gran-

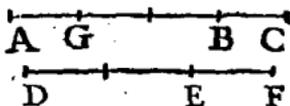
grande Raison de AC à BC, que de DF à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXIX.

## THEOREME XXIX.

*Si la composée de la première & de la seconde a plus grande Raison à la seconde, que la composée de la troisième & de la quatrième n'a à la quatrième: en divisant, la première aura aussi plus grande Raison à la seconde, que la troisième à la quatrième.*

JE suppose ces quatre Grandeurs, AB première, BC seconde, DE troisième, EF quatrième; & qu'il y ait plus grande Raison de la composée de la première & de la seconde, sçavoir AC, à la seconde BC, que de la composée de la troisième & de la quatrième, sçavoir DF, à la quatrième EF. Cela étant, je dis qu'en divisant, il y a aussi plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF. Pour le prouver,



Supposons que GC soit à BC, comme DF est à EF. Cela posé:

Puïsqu'il y a plus grande Raison de AC à BC, que de DF à EF, par supposition; il y a donc aussi plus grande Raison de AC à BC, que de GC à BC; & par conséquent AC est plus grande que GC, par la 10. Prop. Ostant donc de ces deux Grandeurs inégales, BC, qui leur est commune, le reste AB sera plus grand que le reste GB. Et par conséquent

## 276 ELEMENS D'EUCLIDE.

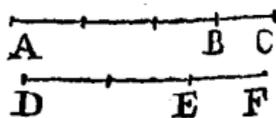
il y a plus grande Raison de AB à BC que de GB à BC, par la 8. Prop. Mais puisque par supposition GC est à BC, comme DF est à EF: en divisant, GB est à BC, comme DE est à EF. Donc il y a aussi plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXX.

### THEOREME XXX.

*Si la composée de la première & de la seconde a plus grande Raison à la seconde, que la composée de la troisième & de la quatrième n'a à la quatrième: Par conversion de Raison, tout au contraire, la composée de la première & de la seconde aura moindre Raison à la première, que la composée de la troisième & de la quatrième n'aura à la troisième.*

**J**E suppose ces quatre  
 Grandeurs, AB première, BC seconde, DE troisième, EF quatrième; & qu'il y ait plus grande Raison de la composée de la première & de la seconde, sçavoir AC, à la seconde BC, que de la composée de la troisième & de la quatrième, sçavoir DF, à la quatrième EF. Cela étant, je dis que par conversion de Raison, AC aura moindre Raison à AB, que



que DF n'aura à DE. Pour le prouver ,  
 Puisque par supposition , il y a plus grande Raison de AC à BC , que de DF à EF : en divisant , il y a aussi plus grande Raison de AB à BC , que de DE à EF , par la 29. Prop. Par conséquent , en Raison inverse , il y a moindre Raison de BC à AB , que de EF à DE , par la 26. Prop. Et partant , en composant , il y a aussi moindre Raison de AC à AB , que de DF à DE ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXXI.

*S'il y a trois Grandeurs d'un côté , & trois d'un autre , & qu'il y ait plus grande Raison de la première à la seconde , & de la seconde à la troisième , d'une part , que de la première à la seconde , & de la seconde à la troisième , de l'autre part : en Raison égale , il y aura aussi plus grande Raison de la première à la troisième d'une part , que de la première à la troisième de l'autre part.*

JE suppose d'une part trois Grandeurs , comme A , B , C , & d'autre part trois autres Grandeurs , comme D , E , F , & qu'il y ait plus grande Raison de A à B , que de D à E ; & de B à C , que de E à F. Cela étant , je dis qu'en Raison égale , il y a aussi plus grande Raison de A à C , que de D à F. Pour le prouver ,

278 ELEMENS D'EUCLIDE.

Supposons que G soit à C, comme E est à F.  
Cela posé :

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de E à F, par supposition : il y a donc aussi plus grande Raison de B à C, que de G à C. Et par conséquent B est plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B. Mais par la supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de D à E. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de D à E.



Supposons maintenant que H soit à G, comme D est à E. Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G ; & par conséquent A est plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puisque par supposition, D est à E, comme H est à G ; & que E est à F, comme G est à C : en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 22. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XXXII.

## THEOREME XXXII.

*S'il y a trois Grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raison de la première à la seconde, & de la seconde à la troisième, d'une part, que de la seconde à la troisième, & de la première à la seconde, de l'autre part: en Raison égale, il y aura aussi plus grande Raison de la première à la troisième d'une part, que de la première à la troisième de l'autre part.*

**J**E suppose d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de E à F; & de B à C, que de D à E. Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F. Pour le prouver,

Supposons que G soit à C, comme D est à E. Cela posé :

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de D à E, par supposition: il y a donc aussi plus grande Raison



## 280 ELEMENS D'EUCLIDE.

Raison de B à C, que de G à C; & par conséquent B est plus grande que G, par la 10. Prop. Donc (par la 8. Prop.) il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B. Mais par la supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de E à F. Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de E à F.

Supposons maintenant que H soit à G, comme E est à F. Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G; & par conséquent A est plus grande que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puis que par supposition D est à E, comme G est à C; & que E est à F, comme H est à G: en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 23. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F; Ce qu'il falloit démontrer.

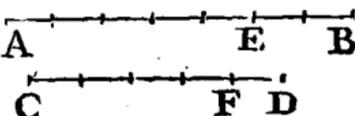


## PROPOSITION XXXIII.

## THEOREME XXXIII.

*S'il y a plus grande Raison du Tout au Tout, que du retranché au retranché : il y aura aussi plus grande Raison du reste au reste, que du Tout au Tout.*

JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de la toute AB à la toute CD, que de la retranchée AE à la retranchée CF. Cela étant, je dis qu'il y a aussi plus grande Raison du reste EB au reste FD, que de la toute AB à la toute CD. Pour le prouver,



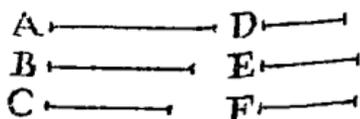
Puisqu'il y a plus grande Raison de AB à CD, que de AE à CF, par supposition : donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de AB à AE, que de CD à CF, par la 27. Prop. Et par conversion de Raison, tout au contraire, il y a moindre Raison de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. Prop. Donc en Raison alterne, il y a aussi moindre Raison de AB, à CD, que de EB à FD ; ou pour parler en d'autres termes, il y a plus grande Raison de EB à FD, c'est à dire du reste au reste, que de AB à CD, c'est à dire du Tout au Tout ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXIV.

## THEOREME XXXIV.

*S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra d'un côté, & autant d'un autre; & qu'il y ait plus grande Raison de la premiere d'une part à la premiere de l'autre part, que de la seconde à la seconde; & aussi plus grande Raison de la seconde à la seconde, que de la troisième à la troisième, & ainsi de suite: La composée de toutes les Grandeurs d'un côté, aura plus grande Raison à la composée de toutes les Grandeurs de l'autre, que (la premiere étant retranchée de part & d'autre) le reste n'aura au reste; mais elle aura moindre Raison, que la premiere à la premiere; & plus grande Raison, que la derniere à la derniere.*

**J**E suppose d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F; & qu'il y ait plus grande Raison de A à D, que de B à E; & encore plus grande Raison de B à E, que de



## LIVRE CINQUIE'ME. 283

de C à F. Cela étant, je dis que la composée de A, B, C, a plus grande Raison à la composée de D, E, F, que le reste B, C, n'a au reste E, F; mais qu'elle a moindre Raison, que A n'a à D; & plus grande Raison, que C n'a à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de A à D, que de B à E, par supposition: donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de A à B, que de D à E, par la 27. Prop. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de A, B, prises ensemble, à B, que de D, E, prises ensemble, à E, par la 28. Prop. Et derechef en Raison alterne, il y a encore plus grande Raison de la toute A, B, à la toute D, E, que de B à E. Et puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, à la toute D, E, que de la retranchée B à la retranchée E: il y a par consequent aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, à la toute D, E, par la Proposition précédente. Par la même raison, il y a aussi plus grande Raison de B à E, que de la toute B, C, à la toute E, F. Donc à plus forte raison, il y a aussi plus grande Raison de A à D, que de la toute B, C, à la toute E, F. Et en Raison alterne, il y a plus grande Raison de A à la toute B, C, que de D à la toute E, F. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de la toute A, B, C, au reste B, C, que de la toute D, E, F, au reste E, F, par la 28. Prop. Enfin en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que du reste B, C, au reste E, F; Ce qu'il falloit premièrement démontrer.

Je dis en second lieu, qu'il y a moindre Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de A à D. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de la retranchée B, C, à la retranchée E, F: par consequent, il y a aussi plus grande Raison de la restante A à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, par la Prop. précédente;

284 ELEMENS D'EUCLIDE.

cedente; Ce qu'il  
falloit démontrer.

Je dis en troisié-  
me lieu, qu'il y a

plus grande Raison de la toute A, B, C, à la toute  
D, E, F, que de C à F. Pour le prouver,

Puis qu'il y a plus grande Raison de B à E, que  
de C à F; par supposition: donc en Raison alterne,  
il y a aussi plus grande Raison de B à C, que de E à  
F, par la 27. Prop. Et en composant, il y a plus  
grande Raison de la toute B, C, à C, que de la toute  
E, F, à F, par la 28. Prop. Donc derechef en Raison  
alterne, il y a plus grande Raison de la toute B, C, à  
la toute E, F, que de C à F. Mais il a été prouvé  
qu'il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à la  
toute D, E, F, que de B, C, à E, F. Donc à plus forte  
raison, il y a plus grande Raison de la toute A, B, C, à  
la toute D, E, F, que de C à F; Ce qu'il falloit enco-  
re démontrer.

Que s'il y avoit quatre Grandeurs, ou plus, de  
part & d'autre, on prouveroit aisément la même  
chose en suivant la même voye.



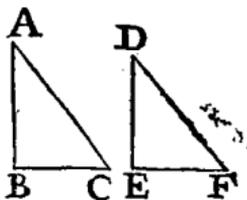


E L E M E N S  
 D'EUCLIDE.  
 LIVRE SIXIÈME.

DEFINITIONS.

1. **L**ES Figures Semblables, sont celles qui ont les Angles égaux, chacun à son lieu ; & les Côtés autour des Angles égaux, proportionaux.

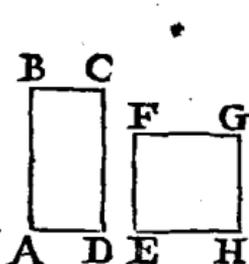
Ainsi, supposé que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D, l'Angle B à l'Angle E, & l'Angle C à l'Angle F ; & d'ailleurs, que AB soit à AC, comme DE à DF ; que AC soit à CB, comme DF à FE ; & que AB soit à BC, comme DE est à EF : ces deux Triangles seront semblables.



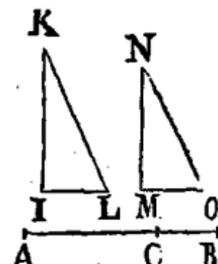
2. Les Figures Reciproques, sont celles qui ont les

les Côtez alentour des Angles égaux , tellement proportionnaux, que le premier & le quatrième terme de la Proportion se trouvent dans l'une, & le second & le troisième se trouvent dans l'autre.

Ainsi ,  
les Parallelogrammes  
ABCD,  
EFGH, seront des  
Figures Reciproques,



si comme AB est à EF, ainsi FG est à BC. De même, les deux Triangles IKL, MNO, seront des Figures Reciproques, si comme IK est à MN, ainsi MO est à IL.

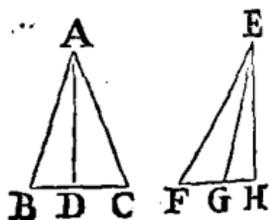


3. Une Ligne droite est dite être divisée en moyenne & extrême Raison, quand la toute est à la plus grande partie, comme la plus grande partie est à la plus petite.

Ainsi, la Ligne AB sera dite être divisée en moyenne & extrême Raison, si elle est tellement divisée au Point C, que la toute AB soit à la partie AC, comme AC est à CB.

4. La hauteur d'une Figure est la Perpendiculaire tirée du sommet sur la Baze.

Ainsi, la hauteur du Triangle ABC est la Perpendiculaire AD, qui est tirée du sommet A sur la Baze BC. De même, la hauteur du Triangle EFG est la Perpendiculaire EH, qui tombe du sommet E sur la Baze FG, prolongée.

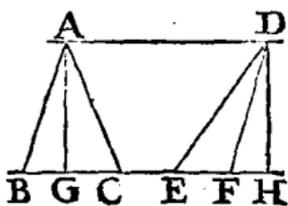


Il est important pour la suite, de remarquer ici, que si deux Figures qui ont leurs Bazes dans une même Ligne droite, & de même part, sont de même

# LIVRE SIXIÈME. 287

même hauteur, elles sont entre mêmes Paralleles. Et que si elles sont entre mêmes Paralleles, elles sont de même hauteur.

Je suppose que les Triangles ABC, DEF, qui ont leurs Bases BC, EF, dans la même Ligne droite BH, & de même part, soient de même hauteur; c'est à dire que les Lignes



AG, DH, qui sont abaissées des Points A & D perpendiculairement sur BH, soient égales. Cela étant, je dis que ces Triangles ABC, DEF, sont entre mêmes paralleles; c'est à dire qu'en tirant par les Points A & D la Ligne droite AD, cette Ligne est parallele à la Ligne BH.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont perpendiculaires à BH, les Angles AGH & DHG sont droits. Et partant (par la 28. du 1.) les Lignes AG, DH, sont paralleles. D'ailleurs elles sont supposées égales; donc (par la 33. du 1.) les Lignes droites AD, GH, qui joignent leurs extrémités, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Lignes AD, BH, entre lesquelles sont les deux Triangles ABC, DEF, sont paralleles. Cela étant, je dis que les deux Lignes AG, DH, qui marquent la hauteur de ces deux Triangles, sont égales entr'elles.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont perpendiculaires à BH, elles sont paralleles. D'ailleurs, les Lignes AD, GH, sont supposées paralleles: ainsi la Figure AGHD est un Parallelogramme; & par la 34. du 1. les Côtes oppozés AG, DH, sont égaux; Ce qu'il falloit démontrer.

5. Un Parallelogramme est dit être appliqué à une Ligne droite, quand il a pour Baze, ou pour l'un de ses Côtez, cette Ligne droite proposée.

Ainsi

## 288 ELEMENS D'EUCLIDE.

Ainsi le Parallelogramme AD, qui a pour Baze la Ligne droite proposée AC, est dit être appliqué à cette Ligne.

6. Un Parallelogramme *défaillant*, est un Parallelogramme, dont la Baze est plus petite que la Ligne proposée, sur laquelle il est dit être appliqué.

Ainsi, le Parallelogramme AD, est un Parallelogramme *défaillant*; à cause que sa Baze AC est plus petite que la Ligne proposée AB, à laquelle il est dit être appliqué, du reste CB.



7. Le défaut d'un Parallelogramme *défaillant*, est un Parallelogramme qui a pour Baze le reste de la Ligne proposée, & qui avec le *défaillant* fait un Parallelogramme total.

Ainsi, dans cette Figure, le Parallelogramme CF est le défaut du Parallelogramme AD; à cause qu'il a pour Baze le reste CB, & qu'il compose avec AD le Parallelogramme total AF.

8. Un Parallelogramme *excedant*, est un Parallelogramme total, dont la Baze est plus grande que la Ligne proposée, à laquelle il est dit être appliqué.

Ainsi, le Parallelogramme AF est un Parallelogramme *excedant*; à cause que sa Baze AB est plus grande que la Ligne proposée AC, à laquelle il est dit être appliqué, de la partie CB.

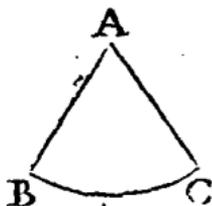
9. L'excez d'un Parallelogramme *excedant*, est un Parallelogramme qui a pour Baze la partie dont il excède, & qui étant retranché du Parallelogramme total, le reste est un Parallelogramme justement appliqué à la Ligne proposée.

Ainsi, le Parallelogramme CF est cet excès; à cause qu'il a pour Baze la partie excédante CB, & qu'étant retranché du Parallelogramme total AF, il reste le Parallelogramme AD, qui est justement

ment

ment appliqué à la Ligne proposée AC.

10. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux demi-Diamètres qui font un Angle au Centre, & d'une partie de la Circonférence.



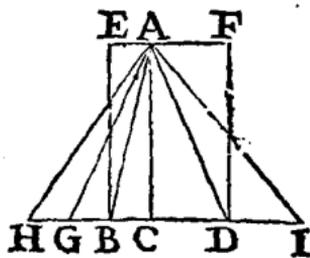
Ainsi, la Figure ABC est un Secteur de Cercle, parce qu'elle est comprise des deux demi-Diamètres AB, AC, qui forment l'Angle A au Centre, & d'une partie de la Circonférence, BC.

## PROPOSITION I.

### THEOREME I.

*Les Triangles & les Parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux en même Raison que leurs Bases.*

JE suppose 1°. que les deux Triangles ABC, ACD, soient de même hauteur. Cela étant, je dis que comme la Baze BC, est à la Baze CD, ainsi le Triangle ABC est au Triangle ACD. Pour le prouver,

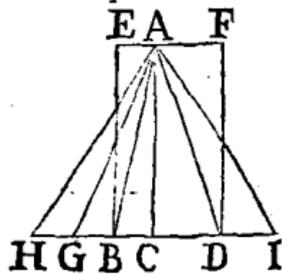


Prolongez la Ligne BD, qui est composée des deux Bases, indéfiniment vers H, & vers I. Puis ayant pris d'une part plusieurs parties égales à BC, comme BG, GH; & d'autre part plusieurs parties égales à CD, ou une seulement, comme DI; menez les Lignes droites AG, AH, AI. Cela posé:

Puisque les Triangles ABC, ABG, AGH, N sont

sont sur Bases égales, sçavoir CB, BG, GH, & entre mêmes Paralleles, comme il a été prouvé ci-devant, ils sont égaux entr'eux, par la 38. du 1. Et par consequent, autant de fois que la Ligne HC contient la Ligne BC, autant de fois le Triangle ACH contient le Triangle ABC. Et ainsi la Ligne HC, & le Triangle ACH, sont équi-multiples de la premiere & de la troisiéme des quatre Grandeurs

que je dis être proportionnelles. De même, puisque les Triangles ACD, ADI, sont sur Bases égales, sçavoir CD, DI, & entre-mêmes Paralleles, ils sont aussi égaux entr'eux. Et



par consequent, autant de fois que la Ligne CI contient CD, autant de fois le Triangle ACI contient le Triangle ACD. Et ainsi la Ligne CI, & le Triangle ACI, sont équi-multiples de la seconde & de la quatrième des quatre Grandeurs que je dis être proportionnelles. Or si la Ligne HC est égale à CI, le Triangle ACH est égal au Triangle ACI, par la 38. du 1; & si la Ligne HC est plus grande que CI, le Triangle ACH est plus grand que le Triangle ACI; & si la Ligne HC est plus petite que CI, le Triangle ACH est aussi plus petit que le Triangle ACI. D'où il suit (par le 2. Axiome du 5.) que comme la premiere Grandeur BC est à la seconde CD, ainsi la troisiéme ABC est à la quatrième ACD; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes AEBC, & ACDF, soient de même hauteur. Cela crant, je dis que comme la Baze BC est à la Baze CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF. Pour le prouver,

Par ce qui vient d'être démontré, la Baze BC est à la Baze CD, comme le Triangle ABC est au Trian-

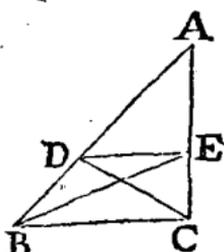
Triangle ACD. Mais ces Triangles sont les moitiés de ces Parallelogrammes, par la 41. du 1. Donc le Triangle ABC est au Triangle ACD, comme le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF, par la 15. Prop. du 5. Et partant, comme la Baze BC est à la Baze CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION II.

### THEOREME I.

*Si une Ligne droite menée dans un Triangle est parallele à l'un de ses Côtez, & coupe les deux autres; elle les coupera proportionnellement: & si elle coupe deux de ses Côtez proportionnellement, elle sera parallele au troisième.*

JE suppose 1°. que dans le Triangle ABC, la Ligne droite DE soit menée parallele au Côté BC, & qu'elle coupe les deux autres Côtés AB, AC. Cela étant, je dis que ces deux Côtés sont coupez proportionnellement; c'est à dire, que comme AD est à DB, ainsi AE est à EC. Pour le prouver,



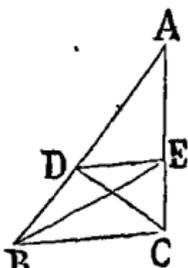
Menez les Lignes droites BE, DC. Cela posé: Puisque les Triangles DBE, DCE, sont sur une même Baze, à sçavoir DE, & entre mêmes Paralleles BC, DE: ils sont égaux entr'eux, par la 37. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE,

N 2

BDE,

BDE, sont de même hauteur : il s'ensuit (par la Proposition précédente) que la Baze AD est à la Baze DB, comme le Triangle ADE est au Triangle BDE, ou à son égal CED. Mais les Triangles ADE, CED, étant de même hauteur, il s'ensuit aussi que le Triangle ADE est au Triangle CED, comme la Baze AE est à la Baze EC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AD est à DB, comme AE est à EC; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que la Ligne DE coupe de telle sorte les deux Côtez AB, AC; que AD soit à DB, comme AE est à EC. Cela étant, je dis que la Ligne DE est parallele à BC. Pour le prouver,



Puisque les Triangles ADE, BDE, sont de même hauteur : ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. Donc le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme AD est à DB. Mais, par la supposition, AD est à DB, comme AE est à EC. Donc le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme AE est à EC. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE, CED, sont de même hauteur : la Baze AE est à la Baze EC, comme le Triangle ADE est au Triangle CED. Partant le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme le même Triangle ADE est au Triangle CED. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Triangles BDE, & CED, sont égaux. Mais ils sont sur une même Baze, à sçavoir DE. Donc (par la 39. du 1.) les Lignes DE, BC, entre lesquelles ils sont, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

De ce que AD est à DB, comme AE est à EC, il s'ensuit en Raison inverse, que DB est à DA, comme

**LIVRE SIXIÈME. 293**

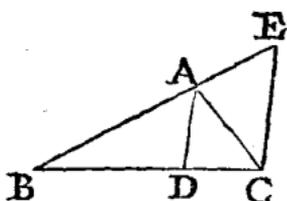
comme EC est à EA. Et en Raison alterne, que DB est à EC, comme DA est à EA. Et en composant, que AB est à AD, comme AC est à AE.

**PROPOSITION III.**

**THEOREME III.**

*Si un Angle d'un Triangle est coupé en deux également par une Ligne droite qui coupe aussi la Baze ; elle la coupera proportionnellement aux deux autres Côtez : & si elle coupe la Baze proportionnellement aux deux autres Côtez, elle divisera l'Angle en deux également.*

**J**E suppose 1°. que l'Angle BAC, du Triangle ABC, soit coupé en deux également par la Ligne droite AD, qui coupe la Baze BC au Point D. Cela étant, je dis qu'elle la coupe proportionnellement aux deux autres Côtez ; c'est à dire, que BD est à DC, comme BA est à AC. Pour le prouver,



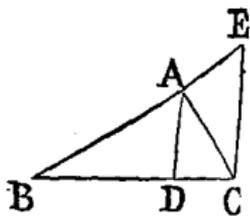
Prolongez la Ligne BA vers E, & menez par le Point C la Ligne CE parallèle à AD. Cela posé :

Puisque les Lignes AD, EC, sont parallèles, & que la Ligne AC tombe dessus : l'Angle ACE est égal à son opposé alternativement DAC, par la 29. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont parallèles, & que la Ligne BAE tombe dessus :

f N 3 l'An-

## 294 ELEMENS D'EUCLIDE.

l'Angle interieur AEC est égal à son opposé exterieur BAD, par la 29. du 1. Mais, par la supposition, les deux Angles BAD, DAC, sont égaux. Donc les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux. D'où il suit ( par la 6. du 1. ) que les deux Côtés AE, AC, qui les soutiennent, sont aussi égaux entr'eux. D'ailleurs, puisque la Ligne AD, qui est menée dans le Triangle BEC, est parallele au Côté EC : il s'ensuit ( par la Prop. précédente ) que comme BD est à DC, ainsi BA est à AE, ou à AC, son égale ; Ce qu'il falloit premierement démontrer.



Je suppose en second lieu, que la Ligne AD, qui coupe l'Angle BAC, coupe la Baze BC proportionnellement aux deux autres Côtés ; c'est à dire, que BD est à DC, comme BA est à AC. Cela étant, je dis que l'Angle BAC est coupé en deux également. Pour le prouver,

Puisque dans le Triangle BEC, la Ligne AD est menée parallele au Côté EC : BA est à AE, comme BD est à DC, par la Prop. précédente. Mais, par la supposition, BD est à DC, comme BA est à AC. Partant BA est à AE, comme BA est à AC, par la 11. Prop. du 5. D'où il suit ( par la 9. Prop. du 5. ) que les Lignes AE, AC, sont égales. Et par conséquent ( par la 5. Prop. du 1. ) les Angles ACE & AEC sont égaux entr'eux. Or puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne AC tombe dessus : l'Angle DAC est égal à son alterne ACE, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, & que la Ligne BAE tombe dessus : l'Angle exterieur BAD est égal à son opposé interieur AEC. Mais les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux, comme il a été prouvé. Donc les deux Angles BAD, DAC, sont

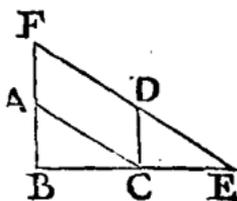
sont aussi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démon-  
trer.

## PROPOSITION IV.

## THEOREME IV.

*Les Triangles équiangles ont les Côtez aen-  
tour des Angles égaux, proportionnaux.*

JE suppose que les Triangles  
ABC, & DCE, soient  
équiangles ; c'est à dire, que  
l'Angle ACB soit égal à l'An-  
gle DEC ; que l'Angle CBA  
soit égal à l'Angle ECD ; &  
que l'Angle BAC soit égal à  
l'Angle CDE. Cela étant, je dis que les Côtez de



ces Triangles qui sont autour des Angles égaux,  
sont proportionnaux ; c'est à dire, que DE est à EC,  
comme AC est à CB ; que EC est à CD, comme  
CB est à BA ; & que CD est à DE, comme BA est  
à AC. Pour le prouver,

Disposez ces deux Triangles ABC, DCE, en  
sorte que les deux Lignes BC, CE, se rencontrent  
directement. Puis continuez les Côtez ED, BA,  
vers F. Cela posé :

Puisque, par la supposition, l'Angle DEC est  
égal à l'Angle ACB, les deux Angles B & E sont  
égaux aux deux Angles B & ACB. Or ceux-ci en-  
semble valent moins que deux droits, par la 17. du  
1. Donc les deux Angles B & E ensemble valent  
aussi moins que deux droits. Et partant les deux  
Lignes ED, BA, étant prolongées vers F, se ren-  
contreront. D'ailleurs, puisque la Ligne droite  
BCE tombe sur les deux Lignes droites EF, CA,

& que l'Angle extérieur ACB est égal à son opposé intérieur E, par supposition : ces deux Lignes EF, CA, sont parallèles, par la 28. du 1. De même, puisque la Ligne droite BCE tombe sur les deux Lignes droites CD, BF, & que l'Angle extérieur DCE est égal à son opposé intérieur B, par supposition : ces deux Lignes CD, BF, sont aussi parallèles. Et par conséquent la

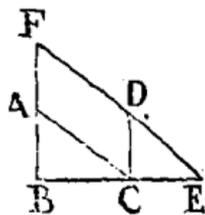


Figure ACDF est un Parallelogramme. D'où il suit que DF est égale à CA, & CD égale à AF, par la 34. du 1. Maintenant, puisque CD est parallèle à BF, il s'ensuit ( par la 2. Prop. ) que comme ED est à DF, ou à CA son égale, ainsi EC est à CB. Et en Raison alterne, comme ED est à EC, ainsi CA est à CB. De même, puisque CA est parallèle à EF, il s'ensuit ( par la 2. Prop. ) que comme EC est à CB, ainsi FA, ou CD son égale, est à BA. Et en Raison alterne, comme EC est à CD, ainsi CB est à BA. Nous avons donc d'une part trois Grandeurs DE, EC, CD, & d'autre part trois autres Grandeurs AC, CB, BA, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Parrant en Raison égale, comme la première DE est à la dernière DC, ainsi la première AC est à la dernière AB. Et ainsi dans les Triangles équiangles, les Côtez qui sont alentour des Angles égaux sont proportionnaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

### I. COROLLAIRE.

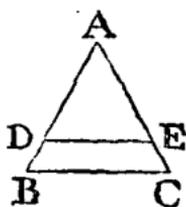
Il suit de là, que les Triangles équiangles sont semblables.

### II. COROLLAIRE.

Il suit encore de là, que si on mène dans un Triangle

gle une Ligne droite parallèle à l'un des Côtez, elle retranchera un Triangle semblable au total.

Ainsi, si dans le Triangle ABC, on mène la Ligne DE parallèle à BC, le Triangle ADE sera semblable au total ABC. Car (par la 29. du 1.) l'Angle ADE est égal à l'Angle B; & l'Angle AED est égal à l'Angle C; & l'Angle A est commun à ces deux Triangles: donc ils sont équiangles, & par conséquent semblables.

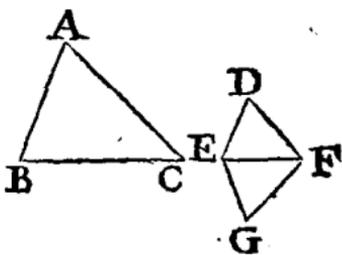


PROPOSITION V.

THEOREME V.

*Les Triangles qui ont leurs Côtez proportionaux, sont équiangles.*

JE suppose que dans les Triangles ABC, DEF, AB soit à BC, comme DE est à EF; que BC soit à CA, comme EF est à FD; & enfin que AB soit à AC, comme DE est à DF. Cela étant, je dis que ces deux Triangles ABC, DEF, sont équiangles. Pour le prouver,



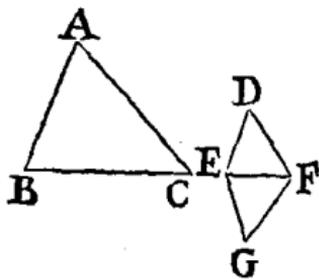
Faites au Point E l'Angle FEG égal à l'Angle B, & au Point F l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. du 1. & les deux Triangles ABC, & EFG, seront équiangles. Cela posé:

Puisque ces deux Triangles sont équiangles: par la Proposition précédente, EF est à EG, comme

N 5 BC

## 298 ELEMENS D'EUCLIDE.

BC est à BA. Mais BC est à BA, comme EF est à ED, par supposition. Partant (par la 11. Prop. du 5.) EF est à EG, comme EF est à ED. Et par conséquent les Lignes EG, ED, sont égales, par la 9. Prop. du 5. De même, EF est à FG, comme BC est à CA. Mais BC est à CA, comme EF est à FD. Partant EF est à FG, comme EF est à FD. Et par conséquent les Lignes FG, FD, sont égales, par la 9. Prop. du 5. Maintenant, puis qu'aux Triangles EFD, EFG, les deux Côtez EF, ED, sont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au sien, & la Baze FD égale à la Baze FG: le Triangle EFD est en tout égal au Triangle EFG, par la 8. Prop. du 1. Mais le Triangle EFG est équiangle au Triangle ABC, par la construction. Donc le Triangle EFD est aussi équiangle au Triangle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

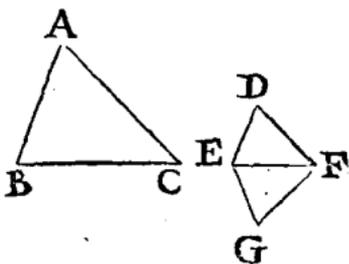


## PROPOSITION VI.

## THEOREME VI.

*Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez d'alentour proportionnaux, ils seront équiangles.*

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle DEF, & que comme BC est à BA, ainsi EF soit à ED. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF.



Pour le prouver,

Faites l'Angle FEG égal à l'Angle B, & l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela étant, l'Angle G fera égal à l'Angle A, par la 3. Prop. du 1. & les deux Triangles ABC, EFG, seront équiangles. Cela posé :

Puisque ces deux Triangles sont équiangles : EF est à EG, comme BC est à BA, par la 4. Prop. Or BC est à BA, comme EF est à ED, par supposition. Donc EF est à EG, comme EF est à ED. Et partant (par la 9. Prop. du 5.) les Côtez ED & EG sont égaux. Maintenant, aux Triangles EFD, EFG, les deux Côtez EF, ED, sont égaux aux deux Côtez EF, EG, chacun au sien; & l'Angle FED égal à l'Angle FEG, puisqu'ils sont tous-deux égaux à l'Angle B. Partant (par la 4. du 1.) le Triangle EFD est égal en tout au Triangle EFG. Mais le Triangle EFG est équiangle au Triangle

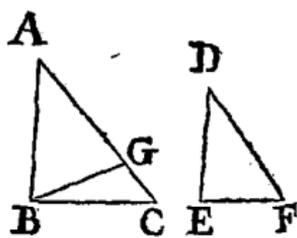
ABC, par la construction. Donc le Triangle EED est aussi équiangle au Triangle ABC; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION VII.

### THEOREME VII.

*Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez qui sont autour d'un autre Angle, proportionnaux, le troisième Angle de l'un étant de même espee que celui de l'autre: ces deux Triangles seront équiangles.*

**J**E suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D; que le Côté AB soit au Côté BC, comme le Côté DE est au



Côté EF; & deplus, que l'Angle C soit de même espee que l'Angle F, c'est à dire, que si l'Angle F est droit, obtus, ou aigu, comme ici, l'Angle C le soit aussi. Cela étant, je dis que le Triangle ABC est équiangle au Triangle DEF. Et premièrement, je dis que l'Angle ABC est égal à l'Angle E. Pour le prouver,

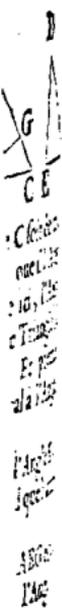
Si l'Angle ABC n'étoit pas égal à l'Angle E, il s'en suivroit que l'un seroit plus grand que l'autre; supposons que ce soit ABC. Cela posé:

Retranchez de cet Angle, l'Angle ABG égal à l'Angle E, par la 23. du 1. Et puis que l'Angle A est

LIVRE SIXIÈME 301

est égal à l'Angle D, par supposition : le troisième BGA sera égal au troisième F, & ainsi les deux Triangles ABG & DEF seront équiangles. Desorte que si l'Angle F est aigu, comme ici, l'Angle BGA sera aussi aigu, & par conséquent son Complement à deux droits BGC sera obtus. D'ailleurs, puisque les deux Triangles ABG & DEF sont équiangles : le Côté AB sera à BG, comme DE est à EF, par la 4. Prop. Mais DE est à EF, comme AB est à BC, par supposition. Donc AB est à BG, comme AB est à BC. D'où il suit ( par la 9. Prop. du 5. ) que les deux Côtés BG, BC, sont égaux ; & ( par la 5. Prop. du 1. ) que l'Angle BGC est égal à l'Angle C. Mais l'Angle C a été supposé aigu : donc l'Angle BGC sera aussi aigu. Mais cet Angle BGC a déjà été prouvé obtus : & ainsi l'Angle BGC seroit ensemble obtus & aigu ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que les Angles C & F étant aigus, l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E.

Que si l'on eût supposé au commencement, que les Angles C & F eussent été obtus : on auroit prouvé de même, que l'Angle BGA auroit été obtus ; & par conséquent que son Complement à deux droits BGC auroit été aigu. Puis montrant que cet Angle BGC seroit aussi égal à l'Angle obtus C, il seroit arrivé que l'Angle BGC auroit dû être aigu & obtus tout ensemble ; ce qui est impossible. Si bien qu'il est absolument impossible que l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E. Et comme l'on peut prouver de même, que l'Angle E ne scauroit être plus grand que l'Angle ABC, il s'ensuit que ces deux Angles sont égaux. Mais l'Angle A est égal à l'Angle D, par supposition. Par conséquent les deux Angles C & F sont aussi égaux, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

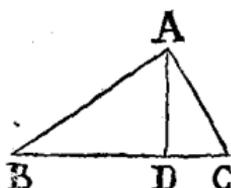


## PROPOSITION VIII.

## THEOREME VIII.

*Si de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Baze, elle le divisera en deux autres Triangles, qui seront semblables entr'eux, & au total.*

**J**E suppose que le Triangle ABC soit Rectangle, & que de l'Angle droit BAC on abaisse la Ligne droite AD perpendiculaire à la Baze BC.



Cela étant, je dis premièrement que les deux Triangles ABD, ADC, dans lesquels le Triangle ABC est divisé, lui sont semblables. Pour le prouver,

Au Triangle ABD, l'Angle BDA est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle B est commun aux deux Triangles ABD & ABC. Par conséquent le troisième BAD est égal au troisième BCA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables, par la 4. Prop. & par la 1. Définition.

De même, au Triangle ADC, l'Angle ADC est droit, & égal à l'Angle BAC. Deplus, l'Angle C est commun aux deux Triangles ADC & ABC. Et par conséquent le troisième DAC est égal au troisième CBA. Et ainsi ces deux Triangles sont équiangles & semblables; Ce qu'il falloit démontrer.

## LIVRE SIXIÈME. 303

Je dis en second lieu, que les deux Triangles ABD, & ADC, sont semblables entr'eux. Pour le prouver,

L'Angle ADB est égal à l'Angle ADC, étant droits, par la construction. L'Angle ABD a été prouvé égal à l'Angle DAC, & l'Angle BAD à l'Angle ACD. Et partant, ces deux Triangles sont équiangles & semblables; Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que si de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Baze, elle sera moyenne proportionnelle entre les deux parties de la Baze; c'est à dire que comme une des parties de la Baze sera à cette Perpendiculaire, ainsi cette Perpendiculaire sera à l'autre partie. Car puisque les deux Triangles ADB, ADC, sont semblables: les Côtes alentour de leurs Angles droits doivent être proportionnaux, par la 4. Prop. Et partant, comme BD est à DA, ainsi DA est à DC.

## PROPOSITION IX.

### PROBLEME I.

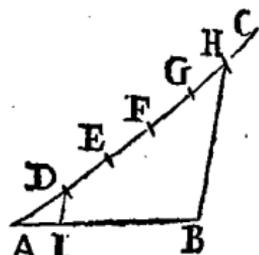
*Une Ligne droite étant donnée, en retrancher une partie demandée.*

Je suppose que la Ligne droite AB soit donnée, & je propose d'en retrancher une partie demandée, comme par exemple la cinquième partie. Pour le faire,

Tirez du Point A la Ligne droite indéterminée AC, qui fasse avec AB tel Angle qu'il vous plaira. Puis ayant

ayant pris la partie AD, à discretion, prenez de suite quatre autres parties, sçavoir, DE, EF, FG, GH, égales à AD, enforte que la Ligne AD soit la cinquième partie de AH. Menez après cela du Point H au Point B la Ligne droite HB; & par le Point D menez la Ligne droite DI, parallèle à HB. Cela étant, je dis que la Ligne AI est la partie demandée; c'est à dire qu'elle est la cinquième partie de AB. Pour le prou-

ver, Puisque DI est parallèle à HB, il s'enfuit (par la 2. Prop.) que AI est à IB, comme AD est à DH; & en composant, AB est à AI, comme AH est à AD.



Et en Raison inverse, AI est à AB, comme AD est à AH. Or AD est la cinquième partie de AH, par la construction. Donc AI sera aussi la cinquième partie de AB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION X.

### PROBLEME II.

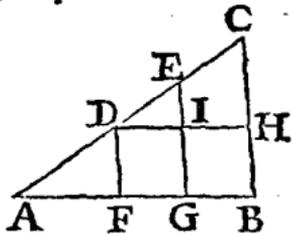
*Une Ligne droite étant donnée, la couper semblablement à une autre Ligne droite donnée & coupée.*

JE suppose que les deux Lignes droites AB, AC, soient données, & que AC soit coupée en trois parties, sçavoir, AD, DE, EC. Et je propose de couper la Ligne AB semblablement à la Ligne AC; c'est à dire, enforte que ses parties soient entr'elles en même Raison que les parties AD, DE, EC. Pour le faire,

Dispo-

LIVRE SIXIÈME. 305

Disposez ces deux Lignes en sorte qu'elles se rencontrent au Point A, & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC. Et après avoir mené du Point C au Point B la Ligne droite CB, tirez par les Points D & E les Lignes droites DF, EG, parallèles à CB & entr'elles; & par le même Point D menez aussi la Ligne droite DH parallèle à AB. Cela étant, je dis que la Ligne droite AB est coupée semblablement à la Ligne AC, aux Points F & G; Pour le prouver,



Puisque dans le Triangle AEG la Ligne droite DF est menée parallèle à EG: il s'ensuit ( par la 2. Prop.) que AF est à FG, comme AD est à DE. Et puisque la Ligne DH est parallèle à FB, il s'ensuit que les Figures FI, GH, sont des Parallelogrammes; & qu'ainsi les Côtez FG, GB, sont égaux aux Côtez opposés DI, IH; & partant que FG est à GB, comme DI est à IH. Or puisque dans le Triangle DCH, la Ligne EI est menée parallèle à CH: DI est à IH, comme DE est à EC, par la 2. Prop. Et partant FG est à GB, comme DE est à EC; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

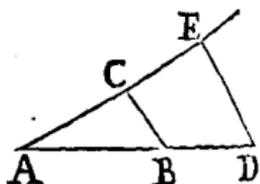


## PROPOSITION XI.

## PROBLEME III.

*Deux Lignes droites étant données, en trouver une troisième qui leur soit proportionnelle.*

**J**E suppose que les deux Lignes droites  $AB$ ,  $AC$ , soient données, & je propose de trouver une troisième Ligne qui leur soit proportionnelle. Pour le faire,



Disposez les deux Lignes droites  $AB$ ,  $AC$ , en sorte qu'elles se rencontrent au Point  $A$ , & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme  $BAC$ . Prolongez ces mêmes Lignes indefiniment vers  $D$  & vers  $E$ ; & après avoir pris  $BD$  égale à  $AC$ , & tiré du Point  $B$  au Point  $C$  la Ligne droite  $BC$ , menez par le Point  $D$  la Ligne droite  $DE$  parallèle à  $BC$ , qui coupe la Ligne  $AE$  au Point  $E$ . Cela étant, je dis que la Ligne  $CE$  est la troisième proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

Puisque dans le Triangle  $DAE$ , la Ligne droite  $BC$  est menée parallèle à  $DE$ , il s'ensuit (par la 2. Prop.) que  $AB$  est à  $BD$ , ou à son égale  $AC$ , comme  $AC$  est à  $CE$ . Et partant  $CE$  est troisième proportionnelle aux deux Lignes droites données  $AB$ ,  $AC$ ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

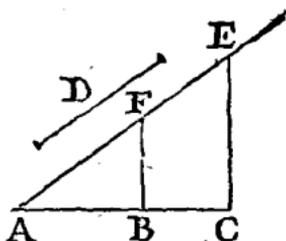
D'EUCLIDE  
TION  
ME III

PROPOSITION XII.

PROBLÈME IV.

Trois Lignes droites étant données, en trouver une quatrième qui leur soit proportionnelle.

JE suppose que les trois Lignes droites AB, BC, & D, soient données; & je propose de trouver une quatrième Ligne qui leur soit proportionnelle. Pour le faire,



Disposition de la première Ligne AB, & la seconde BC, en sorte qu'elles se rencontrent directement au Point B. Tirez du Point A la Ligne indéfinie AE, qui fasse avec AC un Angle tel qu'il vous plaira, comme CAE. Puis ayant pris AF égale à la Ligne droite donnée D, & mené la Ligne droite FB: tirez par le Point C la Ligne CE parallèle à FB, qui coupe la Ligne AE au Point E. Cela étant, je dis que la Ligne FE est la quatrième proportionnelle qu'il s'agit de trouver. Pour le prouver,

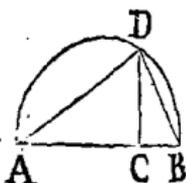
Puisque dans le Triangle CAE, la Ligne FB est menée parallèle à EC, il s'ensuit (par la 2. Prop.) que AB est à BC, comme AF, ou D son égale, est à FE. Et partant FE est cette quatrième Ligne qu'il falloit trouver, proportionnelle aux trois Lignes droites données; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XIII.

## PROBLEME V.

*Deux Lignes droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux Lignes.*

JE suppose que les deux Lignes droites AC, CB, soient données, & je propose de leur trouver une moyenne proportionnelle; c'est à dire, je propose de trouver une Ligne qui ait cette proportion avec les deux autres, que comme AC sera à cette Ligne, ainsi cette Ligne soit à CB. Pour le faire,



Disposez les deux Lignes droites AC, CB, en telle sorte, qu'elles se rencontrent directement. Puis décrivez sur AB le demi-Cercle ADB; & élevez du Point C la Ligne CD perpendiculaire sur AB, & qui rencontre la Circonférence au Point D. Cela étant, je dis que la Ligne CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. Pour le prouver,

Menez les Lignes droites AD, DB. Cela posé:

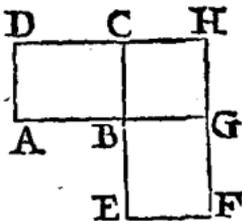
Puisque l'Angle ADB est au demi-Cercle, il est droit, par la 31. Prop. du 3. Et partant (par le Corollaire de la 8. Prop.) CD est moyenne proportionnelle entre AC & CB. C'est à dire que comme AC est à CD, ainsi CD est à CB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XIV.

## THEOREME IX.

*Si deux Parallelogrammes égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtez alentour des Angles égaux seront reciproquement proportionnaux : Et si deux Parallelogrammes ont un Angle égal à un Angle, & les Côtez alentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, ils seront égaux.*

JE suppose premierement que les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, soient égaux, & que les Angles ABC, EBG, soient aussi égaux. Cela étant, je dis que les Côtez alentour de ces Angles sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire, que comme AB est à BG, ainsi EB est à BC. Pour le prouver,



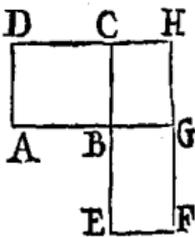
Disposez les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, en sorte, que leurs Côtez AB, BG, se rencontrent directement au Point B; & prolongez les Côtez DC, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H. Cela posé :

Puisque les Angles ABC & EBG sont égaux, par supposition; les Lignes CB, & EB, se rencontrent directement, par la Remarque de la 15. du 1. D'ailleurs, puisque les Lignes DH, AG, sont paralleles, & que CE, HF, sont aussi paralleles;

CG

### 310 ELEMENS D'EUCLIDE.

CG est un Parallelogramme. Maintenant, puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bases, par la 1. Prop. C'est à dire que AB est à BG, comme le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG. Si donc au lieu du Parallelogramme DB on prend le Parallelogramme BF, qui lui est égal, par supposition: il s'ensuivra que AB sera à BG, comme le Parallelogramme BF est au Parallelogramme CG. Or ces deux Parallelogrammes étant de même hauteur, BF est à CG, comme EB est à BC. Partant (par la 11. Prop. du 5.) AB est à BG, comme EB est à BC; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes ABCD, & BEFG, ayent l'Angle ABC égal à l'Angle EBG, & que le Côté AB soit au Côté BG, comme le Côté EB est au Côté BC. Cela étant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver,

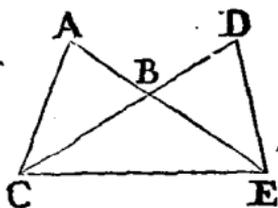
La même préparation que dessus étant supposée: puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de même hauteur; le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG, comme AB est à BG, par la 1. Prop. Or AB est à BG, comme EB est à BC, par supposition. Partant DB est à CG, comme EB est à BC. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes BF, CG, sont aussi de même hauteur: comme EB est à BC, ainsi BF est à CG. Partant comme DB est à CG, ainsi BF est encore à CG. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Parallelogrammes DB, BF, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XV.

## THEOREME X.

*Si deux Triangles égaux ont un Angle égal à un Angle, les Côtés alentour des Angles égaux seront réciproquement proportionnaux: Et si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Côtés alentour des Angles égaux réciproquement proportionnaux, ils seront égaux.*

JE suppose 1°. que les deux Triangles ABC, DBE, soient égaux, & que les Angles ABC, DBE, soient aussi égaux. Cela étant, je dis que les Côtés



alentour de ces Angles sont réciproquement proportionnaux; c'est à dire que comme AB est à BE, ainsi DB est à BC. Pour le prouver,

Disposez les deux Triangles ABC, DBE, en sorte, que leurs Côtés AB & BE se rencontrent directement au Point B; & du Point C au Point E menez la Ligne droite CE. Cela posé:

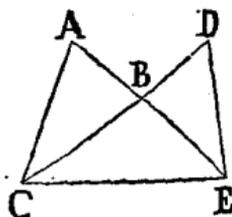
Puisque les Angles ABC & DBE sont égaux, par supposition; les Côtés CB & DB concourent directement, par la Remarque de la 15. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ABC & BCE sont de même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bases,

zes,

## 312 ELEMENS D'EUCLIDE.

zes, par la 1. Prop. Et partant  $AB$  est à  $BE$ , comme le Triangle  $ABC$  est au Triangle  $BCE$ . Mais le Triangle  $ABC$  est au Triangle  $BCE$ , comme son égal  $DBE$  est au même Triangle  $BCE$ . Partant  $AB$  est à  $BE$ , comme le Triangle  $DBE$  est au Triangle  $BCE$ . Mais ces deux Triangles sont de même hauteur; & par conséquent le Triangle  $DBE$  est au Triangle  $BCE$ , comme la Baze  $DB$  est à la Baze  $BC$ , par la 1. Prop. D'où il suit que  $AB$  est à  $BE$ , comme  $DB$  est à  $BC$ , par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Triangles  $ABC$  &  $DBE$  ayent l'Angle  $ABC$  égal à l'Angle  $DBE$ , & que  $AB$  soit à  $BE$ , comme  $DB$  est à  $BC$ . Cela étant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



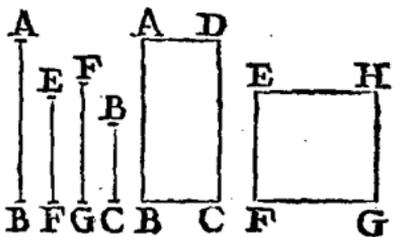
La même préparation que dessus étant supposée: puis que les Triangles  $ABC$  &  $BCE$  sont de même hauteur, le Triangle  $ABC$  est au Triangle  $BCE$ , comme  $AB$  est à  $BE$ , par la 1. Prop. Or  $AB$  est à  $BE$ , comme  $DB$  est à  $BC$ , par supposition. Donc le Triangle  $ABC$  est au Triangle  $BCE$ , comme  $DB$  est à  $BC$ , par la 11. du 5. D'ailleurs, parce que les Triangles  $DBE$  &  $BCE$  sont de même hauteur: comme  $DB$  est à  $BC$ , ainsi le Triangle  $DBE$  est au Triangle  $BCE$ . Partant, le Triangle  $ABC$  est au Triangle  $BCE$ , comme le Triangle  $DBE$  est au même Triangle  $BCE$ . D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que ces deux Triangles  $ABC$ , &  $DBE$ , sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVI.

## THEOREME XI.

Si quatre Lignes droites sont proportionnelles, le Rectangle des extrêmes sera égal au Rectangle des moyennes: Et si le Rectangle des extrêmes est égal au Rectangle des moyennes, les quatre Lignes droites seront proportionnelles.

JE suppose 1°. que les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, soient proportionnelles, en sorte que AB & BC soient les extrêmes, & que EF & FG soient les moyennes. D'ailleurs, je suppose que le Rectangle ABCD soit fait des extrêmes AB, BC; & que le Rectangle EFGH soit fait des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces deux Rectangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver,



Puisque tous les Angles de ces Rectangles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. Et de plus, il est supposé que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG Côté du second, est à BC, Côté du premier: Et partant ces deux Rectangles sont égaux, par la 14. Prop. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu les quatre Lignes droites

tes AB, EF, FG, BC; & que le Rectangle ABCD, compris des extrêmes AB, BC, soit égal au Rectangle EFGH, compris des moyennes EF, FG. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes sont proportionnelles. C'est à dire que AB est à EF, comme FG est à BC. Pour le prouver,

Puisque les deux Rectangles ABCD, EFGH, sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que les Côtés alentour des Angles égaux sont reciproquement proportionnaux; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du même second, est à BC, Côté du premier; & qu'ainsi ces quatre Lignes sont proportionnelles; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVII.

### THEOREME XII.

*Si trois Lignes droites sont proportionnelles, le Rectangle des deux extrêmes sera égal au Carré de la moyenne: Et si le Rectangle des extrêmes est égal au Carré de la moyenne, les trois Lignes droites seront proportionnelles.*

JE suppose 1°. que les trois Lignes droites AB, EF, BC, soient proportionnelles; que le Rectangle ABCD soit compris des deux extrêmes AB, BC; & que le Carré EFGH soit celui de la moyenne EF. Cela étant, je dis que le Rectangle ABCD est égal au Carré EFGH. Pour le prouver,

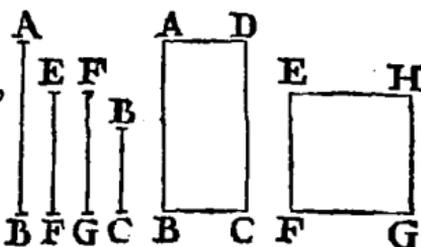
Fai-

# LIVRE SIXIÈME. 315

Faites la Ligne FG égale à EF. Cela posé :

Puisque la Ligne FG est égale à EF, les quatre Lignes droites AB, EF, FG, BC, sont proportionnelles, par supposition. Et partant (par la Prop. précédente) le Rectangle ABCD, qui est fait des deux extrêmes, sera égal au Rectangle EFGH, qui est fait des deux moyennes. Mais puisque les moyennes EF, FG, sont égales, leur Rectangle est le même que le Carré de la moyenne EF, sçavoir EFGH. Et partant le Rectangle des extrêmes est égal au Carré de la moyenne ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que le Rectangle ABCD, compris des deux extrêmes AB, BC, soit égal au Carré EFGH de la moyenne



EF. Cela étant, je dis que les trois Lignes AB, EF, BC, sont proportionnelles. Pour le prouver,

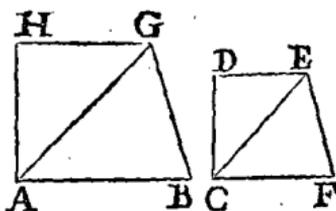
Puisque les deux Rectangles ABCD & EFGH sont égaux, & que leurs Angles sont droits, ils ont un Angle égal à un Angle. D'où il suit (par la 14. Prop.) que leurs Côtés sont réciproquement proportionnaux ; c'est à dire que AB, Côté du premier Rectangle, est à EF, Côté du second, comme FG, Côté du second, ou son égal EF, est à BC, Côté du premier. Et ainsi ces trois Lignes sont proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVIII.

## PROBLEME VI.

*Sur une Ligne droite donnée , décrire une Figure rectiligne semblable & semblablement posée à une Figure rectiligne donnée.*

JE suppose que la Ligne AB , & la Figure rectiligne CDEF , soient données ; & je propose de décrire sur la Ligne AB une Figure semblable à CDEF , & semblablement posée ; c'est à dire qui soit telle , que dans la Figure qui est à décrire , la Ligne AB soit un Côté homologue à un Côté de la Figure donnée , comme par exemple à CF. Pour le faire ,



Prenez un des Angles de la Figure donnée tel qu'il vous plaira , comme par exemple C ; & du Point C menez aux autres Angles autant de Lignes droites que vous pourrez , telle qu'est CE , pour résoudre toute la Figure en Triangles. Cela fait , menez des Points A & B les Lignes droites AG , BG , qui fassent avec AB les Angles GAB , & GBA , égaux aux Angles ECF , & EFC , chacun au sien : Puis menez des Points A & G les Lignes droites AH , GH , qui fassent avec AG les Angles HAG , & HGA , égaux aux Angles DCE , & DEC , & ainsi de suite , s'il y avoit encore d'autres Triangles dans la Figure CDEF. Cela étant , je dis que la Figure

LIVRE SIXIÈME. 317

gure ABGH, décrite sur la Ligne donnéé AB, est semblable & semblablement posée à la Figure CDEF. Pour le prouver,

Premièrement, de ce que par la construction chaque Triangle de l'une des Figures a deux Angles égaux à deux Angles d'un Triangle de l'autre Figure, le troisième Angle de chaque Triangle d'une Figure s'ensuit égal au troisième Angle de chaque Triangle de l'autre Figure; & partant tous les Angles des deux Figures étant égaux, chacun au sien, les deux Figures sont équiangles.

Deplus, puisque les Triangles ABG & CFE sont équiangles, il s'ensuit (par la 4. Prop.) que GB est à BA, comme EF est à FC; & de même, que AB est à AG, comme CF est à CE. Mais puisque les Triangles AGH & CED sont aussi équiangles: AG est à AH, comme CE est à CD. Et partant en Raison égale, AB est à AH, comme CF est à CD. De même, AH est à HG, comme CD est à DE. Donc enfin en Raison égale, GB est à GH, comme EF est à ED. Et ainsi les deux Figures ABGH & CDEF, qui sont équiangles, & qui ont leurs Côtes autour des Angles égaux proportionnaux, sont semblables, & semblablement posées; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

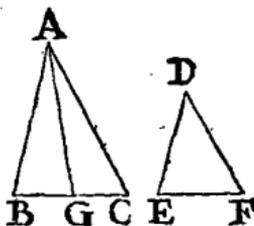


## PROPOSITION XIX,

## THEOREME XIII.

*Les Triangles semblables sont entr'eux en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison.*

JE suppose que les Triangles ABC & DEF, soient semblables ; que l'Angle BAC soit égal à l'Angle D ; l'Angle B à l'Angle E ; & l'Angle C à l'Angle F. Cela étant, je dis que les Triangles ABC & DEF sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Côtez de même Raison ; c'est à dire, qu'ayant trouvé une troisième proportionnelle aux deux Côtez BC, EF : le Triangle ABC sera au Triangle DEF, comme BC sera à cette troisième proportionnelle, par exemple à BG. Pour le prouver,



Menez du Point A au Point G la Ligne droite AG. Cela posé :

Puisque les Triangles ABC & DEF sont semblables, AB est à BC, comme DE est à EF. Et partant en Raison alterne, AB est à DE, comme BC est à EF. Mais BC est à EF, comme EF est à BG, par la construction. Donc AB est à DE, comme EF est à BG. Et ainsi les deux Triangles ABG & DEF ont un Angle égal à un Angle, sçavoir B égal à E, & les Côtez alentour de ces Angles reciproquement proportionnaux : d'où il suit qu'ils sont égaux, par la 15. Prop. Et partant le Triangle

ABC

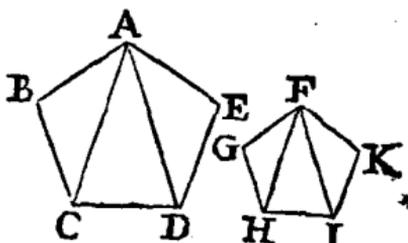
ABC sera au Triangle DEF, comme le même Triangle ABC est au Triangle ABG. Or ces deux derniers Triangles étant de même hauteur, le Triangle ABC est au Triangle ABG, comme BC est à BG, par la 1. Prop. Par conséquent le Triangle ABC est aussi au Triangle DEF, comme BC est à BG, c'est à dire en Raison doublée de BC à EF; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XIV.

*Les Polygones semblables peuvent être divisés dans un nombre égal de Triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leurs Touts : Et ces Polygones sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Côtés de même Raison.*

Je suppose que les Polygones ABCDE & FGHIK soient semblables; en sorte que l'Angle A soit égal à l'Angle F; l'Angle B à l'Angle G; l'Angle C à l'Angle H; l'Angle D à l'Angle I; & l'Angle E à l'Angle K. Et de plus, que AB soit à BC, comme FG à GH; que BC soit à CD, comme GH à HI; que CD soit à DE, comme HI à IK; & enfin que DE soit à EA, comme IK est à KF. Ou bien en Raison alterne, que AB soit à FG, comme BC est à GH; que BC

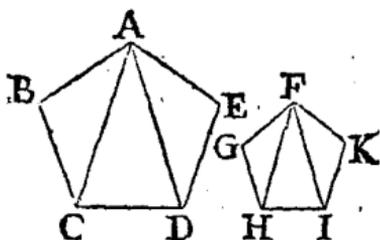


soit

O 4

soit à GH, comme CD est à HI; que CD soit à HI, comme DE est à IK; & enfin que DE soit à IK, comme EA est à KF. Cela étant, je dis premièrement qu'on peut diviser le Polygone ABCDE en autant de Triangles que le Polygone FGHIK. Pour le prouver,

Prenez dans les deux Polygones deux Angles égaux, comme l'Angle A, & l'Angle F; & tirez des Points A & F aux autres Angles,



autant de Lignes droites que vous pourrez, comme AC, AD, FH, FI. Cela posé :

Puisque le nombre des Angles du Polygone ABCDE est égal au nombre des Angles du Polygone FGHIK : il est évident qu'il n'y aura ni plus ni moins de Triangles dans l'un que dans l'autre.

Je dis en second lieu, que chaque Triangle du Polygone ABCDE est semblable à un Triangle du Polygone FGHIK; par exemple, que le Triangle ABC est semblable au Triangle FGH; le Triangle ACD au Triangle FHI; & le Triangle ADE au Triangle FIK. Pour le prouver,

Puisque l'Angle B est égal à l'Angle G, & que le Côté AB est au Côté BC, comme FG à GH, par supposition : il s'ensuit (par la 6. Prop.) que les deux Triangles ABC & FGH sont semblables, & équiangles. On prouvera de même, que les deux Triangles ADE & FIK sont aussi semblables, & équiangles. Et quant aux Triangles ACD & FHI : puisque les Angles BCD & GHI sont égaux, par supposition; si on en retranche les Angles BCA & GHF, qui ont été prouvez égaux, les Angles restans ACD & FHI seront aussi égaux entr'eux. De même, si des Angles CDE & HIK, qui sont égaux par supposition, on retranche les Angles

ADE

## LIVRE SIXIÈME. 321

ADE & FIK, qui ont été prouvez égaux, les Angles restans ADC & FHI seront aussi égaux entr'eux; & ainsi les deux Triangles ACD & FHI sont équiangles, par la 32. du 1. & par conséquent semblables. Et partant chaque Triangle d'un des Polygones, est semblable à un Triangle de l'autre Polygone; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisième lieu, que les Triangles des deux Polygones sont proportionnaux à leurs Touts; c'est à dire, que comme un Triangle est à son semblable, ainsi un des Polygones est à l'autre. Pour le prouver,

Puisque les Triangles ABC & FGH sont semblables, le premier est au second, en Raison doublée du Côté BC au Côté GH, par la Proposition précédente. Or puisque BC est à GH, comme CD est à HI, par supposition: la Raison doublée de BC à GH, est la même que la Raison doublée de CD à HI. Donc le Triangle ABC est au Triangle FGH, en Raison doublée de CD à HI. Mais le Triangle ACD étant semblable au Triangle FHI, l'un est aussi à l'autre en Raison doublée de CD à HI. Et partant le Triangle ABC est au Triangle FGH, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI. De même, le Triangle ADE étant semblable au Triangle FIK, l'un est à l'autre en Raison doublée de DE à IK: ou bien parce que DE est à IK, comme CD est à HI: le Triangle ADE est au Triangle FIK, en Raison doublée de CD à HI, c'est à dire, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI, ou comme le Triangle ABC au Triangle FGH, puisque ces Triangles sont aussi entr'eux en Raison doublée de CD à HI, comme il a été prouvé. Puis donc que nous avons d'une part plusieurs Triangles, & autant d'autres d'une autre part, qui sont entr'eux en même Raison: il suit (par la 12. du 5.) que comme chaque Triangle d'une part est à son semblable de l'autre part, ainsi tous les Triangles

O ; d'une

d'une part sont à tous les Triangles de l'autre, c'est à dire, ainsi l'un des Polygones est à l'autre Polygone; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en dernier lieu, que le Polygone ABCDE est au Polygone FGHK, en Raison doublée de leurs Côtes de même Raison; par exemple, en Raison doublée de CD à HI. Pour le prouver,

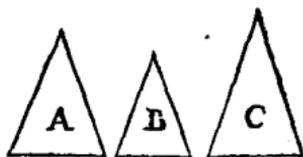
Le Polygone ABCDE est au Polygone FGHK, comme chaque Triangle est à son semblable, comme il vient d'être prouvé. Or chaque Triangle est à son semblable en Raison doublée de CD à HI, comme il a aussi été prouvé. Donc le Polygone ABCDE est au Polygone FGHK, en Raison doublée de CD à HI; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXI.

### THEOREME XV.

*Les Figures rectilignes semblables à une même, sont semblables entr'elles.*

JE suppose que la Figure rectiligne A soit semblable à la Figure rectiligne B; & que la Figure rectiligne C soit aussi semblable à la Figure rectiligne B. Cela étant, je dis que les deux Figures A & C sont semblables entr'elles. Pour le prouver,



Puisque les deux Figures A & B sont semblables, les Angles de la Figure A sont égaux aux Angles de la Figure B; par la 1. Définition. Et puisque la Figure C est semblable à la Figure B, les Angles de la Figure C sont aussi égaux aux Angles de la même Figure.

## LIVRE SIXIÈME. 323

Figure B. Et partant les Angles de la Figure A sont égaux aux Angles de la Figure C. D'ailleurs, puisque les Figures A & B sont semblables: les Côtez qui sont alentour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Côtez qui sont alentour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure B, par la 1. Définition. Et de même, puisque les Figures B & C sont semblables: les Côtez qui sont autour des Angles de la même Figure B, sont aussi proportionnaux aux Côtez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C. D'où il suit, que les Côtez qui sont autour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Côtez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C. Et partant les Figures A & C sont semblables; Ce qu'il falloit démontrer.

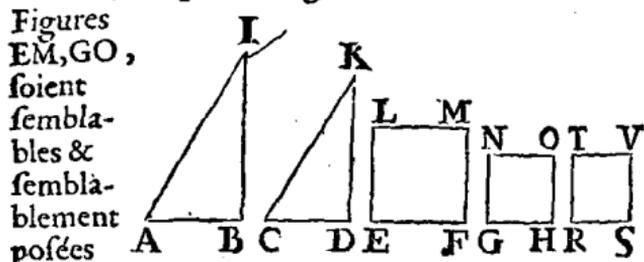


## PROPOSITION XXII.

## THEOREME XVI.

*Si quatre Lignes droites sont proportionnelles, les Figures semblables & semblablement posées sur ces Lignes, seront aussi proportionnelles: Et si quatre Figures semblables & semblablement posées sur quatre Lignes droites, sont proportionnelles, ces quatre Lignes droites seront aussi proportionnelles.*

**J**E suppose premierement que les quatre Lignes AB, CD, EF, GH, soient proportionnelles; & que les Figures ABI, CDK, & les



sur ces quatre Lignes. Cela étant, je dis que ces quatre Figures sont proportionnelles; c'est à dire que ABI est à CDK, comme EM est à GO. Pour le prouver.

Puisque les Figures ABI & CDK sont semblables: ABI est à CDK, en Raison doublée de AB à CD, par

## LIVRE SIXIÈME. 325

par la 10. Prop. Et puisque AB est à CD, comme EF est à GH, par supposition: la Raison doublée de AB à CD est la même que la Raison doublée de EF à GH. De même, puisque les Figures EM & GO sont semblables: EM est à GO, en Raison doublée de EF à GH. Partant la Figure ABI est à la Figure CDK, comme la Figure EM est à la Figure GO, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les quatre Figures ABI, CDK, EM, GO, qui sont semblables & semblablement posées sur les quatre Lignes droites AB, CD, EF, GH, soient proportionnelles. Cela étant, je dis que ces quatre Lignes sont aussi proportionnelles. Pour le prouver,

Supposons que RS soit une quatrième proportionnelle aux trois Lignes droites AB, CD, EF, par la 12. Prop. & que la Figure RSVT décrite sur cette Ligne, soit semblable & semblablement posée à la Figure EM, ou à GO, par la 18. Prop. Cela posé:

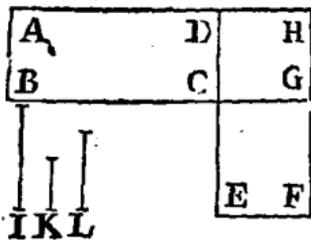
Par ce qui vient d'être démontré, comme ABI sera à CDK, ainsi EM sera à RV. Mais ABI est aussi à CDK, comme EM est à GO, par supposition. Donc EM est à RV, comme à GO. D'où il suit (par la 9. Prop. du 5.) que les Figures GO & RV sont égales. Mais elles sont aussi semblables, par la construction; partant les Lignes GH, RS, sur lesquelles elles sont décrites, sont égales. Comme donc la Ligne RS est une quatrième Proportionnelle aux trois Lignes AB, CD, EF: la Ligne GH sera aussi une quatrième proportionnelle aux mêmes Lignes; c'est à dire, que AB sera à CD, comme EF à GH; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXIII.

## THEOREME XVII.

*Les Parallelogrammes équiangles sont entr'eux en Raison composée de celles de leurs Côtés.*

JE suppose que les Parallelogrammes AC & CF soient équiangles, & que l'Angle BCD soit égal à l'Angle ECG. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AC



est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE. Pour le prouver,

Disposez ces deux Parallelogrammes en sorte que leurs Côtés BC, CG, se rencontrent directement au Point C; par même moyen les deux autres Côtés DC, CE, concourront aussi directement, par la Remarque de la 15. du 1. Prolongez les Côtés AD, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H. Puis ayant pris à discretion la Ligne I, faites (par la 12. Prop.) que comme BC est à CG, ainsi la Ligne I soit à la Ligne K; & comme DC est à CE, ainsi la Ligne K soit à la Ligne L. Cela posé:

Puisque les Lignes AH, BG, sont paralleles, & que les Lignes ED, FH, sont aussi paralleles: la Figure DG est un Parallelogramme. Et puisque les Parallelogrammes AC, DG, sont de même hauteur: AC est à DG, comme BC à CG, par la 1. Prop. Mais comme BC est à CG, ainsi I est à K, par la construction. Donc AC est à DG, comme

## LIVRE SIXIÈME. 327

me I est à K. De même, puisque les Parallelogrammes DG, CF, sont de même hauteur: DG est à CF, comme DC est à CE. Or DC est à CE, comme K est à L, par la construction. Partant DG est à CF, comme K est à L. Nous avons donc trois Grandeurs AC, DG, & CF, d'une part, & trois Grandeurs I, K, L, d'autre part, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles. Partant en Raison égale elles seront encore proportionnelles, par la 22. Prop. du 5. Et ainsi le Parallelogramme AC sera au Parallelogramme CF, comme I est à L. Mais la Raison de I à L est composée des Raisons de I à K, & de K à L, qui sont les mêmes que les Raisons de BC à CG, & de DC à CF. Donc le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE; Ce qu'il falloit démontrer.

### PROPOSITION XXIV.

#### THEOREME XVIII.

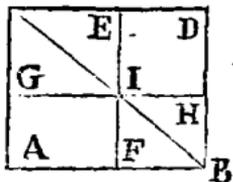
*En tout Parallelogramme, les Parallelogrammes qui sont alentour du Diametre, & qui ont un Angle commun avec lui, lui sont semblables, & semblables entr'eux.*

**J**E suppose le Parallelogramme ABDC, & que les Parallelogrammes GE, FH, soient alentour de son Diametre BC, & de plus, qu'ils aient les Angles B & C communs avec lui. Cela étant, je dis premierement que les deux Parallelogrammes GE, FH; sont semblables au Parallelogramme AD. Pour le prouver, Les

## 328 ELEMENS D'EUCLIDE.

Les Angles GCE & FBH, qui sont les oppozés dans le Parallelogramme AD, sont égaux entr'eux, par la 34. Prop. du 1. Or les Angles GIE & FIH sont égaux à ces premiers Angles, puis qu'ils leur sont aussi oppozés dans les Parallelogrammes GE & FH. Et partant ces quatre Angles sont égaux entr'eux. C

De sorte que les trois Parallelogrammes AD, GE, FH, ont déjà chacun deux Angles égaux à deux Angles. D'ailleurs,



puisque les Lignes AB, GH, sont paralleles, par supposition, & que la Ligne droite CGA tombe dessus: l'Angle extérieur CGI est égal à son opposé intérieur A, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BA tombe dessus: l'Angle extérieur IFB est encore égal à son opposé intérieur A. Et ainsi les trois Angles G, A, F, sont égaux entr'eux. Et parce que l'Angle E est égal à son opposée G; que l'Angle D est égal à son opposé A; & que l'Angle H est égal à son opposé F, par la 34. Prop. du 1: ces trois Angles E, D, H, sont aussi égaux entr'eux. Voilà donc encore les deux Angles restans d'un de ces Parallelogrammes, égaux aux deux Angles restans de chacun des deux autres. Et par conséquent ces trois Parallelogrammes sont équiangles. De plus, les Triangles CGI & CAB, qui ont déjà les Angles G & A égaux, ayant encore l'Angle GCI commun, sont équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant (par la 4. Prop.) CG est à GI, comme CA est à AB. Si bien que les Parallelogrammes GE & AD étant équiangles, & leurs Côtés alentour des Angles égaux, proportionnaux: l'un est semblable à l'autre. De même, les Triangles IFB & CAB, qui ont déjà les Angles F & A égaux, ayant encore l'Angle FBI

com-

LIVRE SIXIÈME. 329

commun, sont aussi équiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant ( par la 4. Prop. ) IF est à FB, comme CA est à AB. Si bien que les Parallelogrammes FH & AD étant aussi équiangles, & leurs Côtés alentour des Angles égaux, proportionnaux : l'un est aussi semblable à l'autre ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les Parallelogrammes GE & FH sont semblables entr'eux.

Car puis qu'ils sont tous-deux semblables au Parallelogramme AD, il s'en suit ( par la 21. Prop. ) qu'ils sont aussi semblables entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

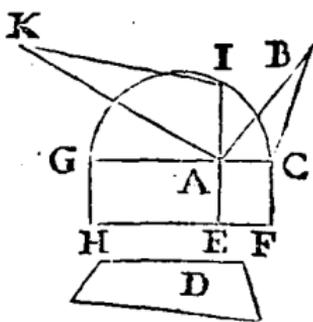
PROPOSITION XXV.

PROBLEME VII.

*Deux Figures rectilignes étant données, en décrire une troisième, semblable à l'une, & égale à l'autre.*

Je suppose que les deux Figures ABC, & D, soient données ; & je propose d'en décrire une troisième, semblable à la Figure ABC, & égale à la Figure D. Pour le faire,

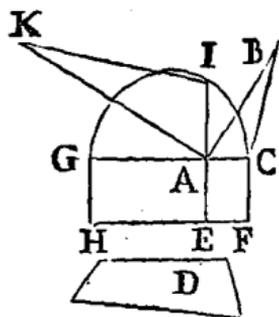
Décrivez ( par la 44. Prop. du 1. ) sur la Ligne AC le Parallelogramme Rectangle AF, égal à la Figure ABC. Puis ( par la 45. Prop. du 1. ) décrivez sur AE le Parallelogramme AH, égal à la Figure donnée D. Après cela décrivez sur GC le demi-Cer-



## 330 ELEMENS D'EUCLIDE.

Cercle GIC ; & après avoir élevé au Point A la Perpendiculaire AI, si longue, qu'elle rencontre la Circonférence au Point I: décrivez ( par la 18. Prop.) sur AI la Figure AIK, semblable à la Figure donnée ABC. Et alors je dis que cette Figure AIK sera égale à la Figure donnée D. Pour le prouver,

La Ligne AI est moyenne proportionnelle entre AC, & AG, par la 13. Prop. c'est à dire, que AC est à AI, comme AI est à AG. Et par conséquent AC est à AG, en Raison doublée de AC à AI. Or les Figures ABC & AIK étant semblables,



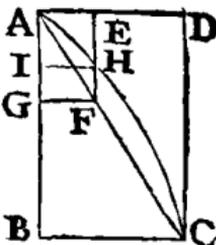
l'une est à l'autre en Raison doublée de AC à AI, par la 19. & 20. Prop. Donc la Figure ABC est à la Figure AIK, comme AC est à AG. D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes AF, AH, sont de même hauteur: comme AC est à AG, ainsi AF est à AH. Partant la Figure ABC est à la Figure AIK, comme le Parallelogramme AF est au Parallelogramme AH. Et en Raison alterne, la Figure ABC est au Parallelogramme AF, comme la Figure AIK est au Parallelogramme AH. Or la Figure ABC est égale au Parallelogramme AF, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale au Parallelogramme AH. Mais le Parallelogramme AH est égal à la Figure donnée D, par la construction. Donc la Figure AIK est aussi égale à la Figure donnée D; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XXVI.

## THEOREME XIX.

*Si d'un Parallelogramme on retranche un Parallelogramme semblable & semblablement posé au total, & ayant un Angle commun avec lui: le Parallelogramme retranché sera alentour du Diametre du Parallelogramme total.*

JE suppose que du Parallelogramme ABCD l'on ait retranché le Parallelogramme GE, qui lui est semblable & semblablement posé, & qui a l'Angle GAE commun avec lui. Cela étant, je dis que le Parallelogramme GE est alentour du Diametre du Parallelogramme total BD; c'est à dire, qu'en menant une Ligne droite du Point A au Point C, elle passera par l'Angle F. Pour le prouver,



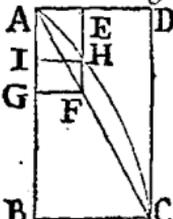
Si cela n'étoit, il faudroit que cette Ligne passât par quelqu'autre Point que par le Point F. Supposons donc, s'il est possible, que ce soit par le Point H, comme fait ici AHC. Cela posé:

En tirant la Ligne HI parallele à AE, il s'ensuivroit que le Parallelogramme IE seroit alentour du Diametre du Parallelogramme BD. Or ces deux Parallelogrammes ont l'Angle IAE commun. Et partant (par la 24. Prop.) le Parallelogramme IE seroit semblable au total BD. Mais le Parallelogramme GE est supposé semblable au total BD.

Par

## 332 ELEMENS D'EUCLIDE.

Par conséquent le Parallelogramme IE, & le Parallelogramme GE, seroient semblables, par la 21. Prop. Et partant le Côté IH seroit au Côté IA, comme le Côté GF est au Côté GA. Or IH est égal à GF, puis qu'ils sont les Côtés oppozés du Parallelogramme GH. Et partant IA seroit aussi égal à GA, par la 14. Prop. du 5; c'est à dire la partie au tout; ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne droite menée du Point A au Point C, passe par ailleurs que par le Point F. Et par conséquent, le Parallelogramme GE est alentour du Diametre du Parallelogramme BD; Ce qu'il falloit démontrer.



## PROPOSITION XXVII.

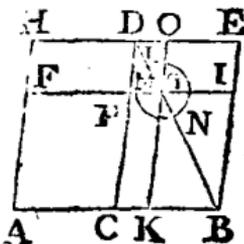
## THEOREME XX.

*Si on applique à une Ligne droite tant de Parallelogrammes que l'on voudra, chacun desquels défaille d'un Parallelogramme semblable à un autre qui est déjà décrit sur la moitié de cette Ligne: le plus grand de tous sera celui qui sera décrit sur l'autre moitié, lequel sera égal & semblable au Défaut.*

Je suppose que la Ligne droite AB soit donnée; qu'elle ait été coupée en deux également au Point C; & que sur la moitié CB l'on ait décrit le Paral-

# LIVRE SIXIÈME. 333

Parallelogramme CE ; & qu'après cela l'on ait achevé de décrire sur la Ligne AB le Parallelogramme AE. Par ce moyen, il fera vrai de dire, que le Parallelogramme AD sera appliqué à la moitié de la Ligne droite AB, & défaudra du Parallelogramme CE, décrit sur l'autre moitié, & auquel il est égal, par la 36. Prop. du 1. Cela étant, je dis que le Parallelogramme AD est le plus grand de tous ceux qui peuvent être appliquez sur la Ligne AB, & défailans d'un Parallelogramme semblable au Parallelogramme CE, qui avoit été auparavant décrit sur la moitié CB. Pour le prouver,



Tirez le Diametre DB ; & ayant pris à discretion dans ce Diametre le Point G, menez par le Point G la Ligne FGI parallele à AB, & la Ligne KGO parallele à CD. Cela posé :

Le Parallelogramme AG sera appliqué à la Ligne AB, & défaudra du Parallelogramme KI, lequel (par la 24. Prop.) sera semblable au Parallelogramme CE. Il s'agit donc de montrer que le Parallelogramme AD est plus grand que le Parallelogramme AG. Pour le prouver.

Les Supplémens GE & CG sont égaux, par la 43. du 1. Si donc on leur ajoute le Parallelogramme KI, le Parallelogramme KE sera égal au Parallelogramme CI. Or le Parallelogramme AP est aussi égal au Parallelogramme CI, par la 36. Prop. du 1. puisqu'ils sont sur Bases égales & entre mêmes Paralleles. Partant le Parallelogramme KE est égal au Parallelogramme AP. Donc en leur ajoutant le Parallelogramme commun CG, il s'en suivra que le Gnomon LNM sera égal au Parallelogramme AG. Or le Parallelogramme CE est plus grand que le Gnomon LNM, qui n'est que sa partie ; & par

con-

consequent, il est plus grand que le Parallelogramme AG. D'où il suit, que le Parallelogramme AD, qui est égal au Parallelogramme CE, est aussi plus grand que le Parallelogramme AG; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXVIII.

### PROBLEME VIII.

*Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & défail-  
lant d'un Parallelogramme semblable à un Parallelogramme donné: Mais il faut que la Figure donnée ne soit pas plus grande qu'un Parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la Ligne donnée, seroit semblable au Parallelogramme donné.*

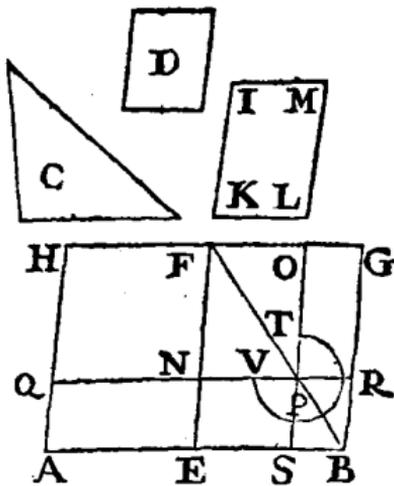
JÉ suppose que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, soient donnez; & que cette Figure ne soit pas plus grande que le Parallelogramme AF, qui est décrit sur la moitié de la Ligne AB, & qui est semblable au Parallelogramme donné D. Et je propose d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & défail-  
lant d'un Parallelogramme semblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,

Décrivez sur EB, moitié de la Ligne donnée, le Parallelogramme EG, semblable au Parallelogramme

LIVRE SIXIÈME. 335

gramme donné D. Puis achevez de décrire sur la Ligne AB le Parallelogramme AG. Par ce moyen AF sera un Parallelogramme appliqué à la Ligne AB, & défailant du Parallelogramme EG semblable au Parallelogramme donné D. Or ce Parallelogramme AF, qui est décrit sur la moitié de la Ligne AB, ou il est égal à la Figure donnée C, ou il est plus grand;

car il ne doit pas être plus petit, par la supposition. S'il est égal, on aura fait ce qu'il falloit faire; s'il est plus grand, trouvez (par la 2. Remarque de la 45. Prop. du 1.) l'excez dont cette Figure C est surpassée par le Parallelogramme AF, ou



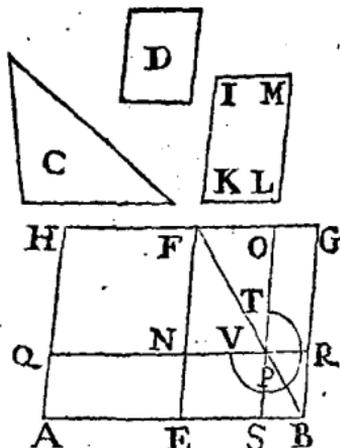
par EG, qui lui est égal, par la 36. Prop. du 1. Puis (par la 25. Prop.) décrivez le Parallelogramme KM, égal à cet excez, & qui soit semblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant pris FO égale à IM, & FN égale à IK: menez par le Point O la Ligne OS parallèle à FE, & par le Point N la Ligne QR parallèle à AB. Alors je dis que le Parallelogramme AP, qui est appliqué à la Ligne donnée AB, est égal à la Figure donnée C; & que le Parallelogramme SR, dont il est défailant, est semblable au Parallelogramme donné D. Pour le prouver,

Puisque les Parallelogrammes EG & KM ont été faits semblables au Parallelogramme donné D, ils sont semblables entr'eux, par la 21. Prop. & l'Angle NFO est égal à l'Angle KIM. D'ailleurs, les Lignes FO, FN, ayant été prises égales aux Lignes

# 336 ELEMENS D'EUCLIDE.

gnes IM, IK : le Parallelogramme NO est égal & semblable au Parallelogramme KM, & par conséquent aussi au Parallelogramme EG ; avec lequel ayant l'Angle NFO commun, il s'enfuit ( par la 26. Prop. ) que ces deux Parallelogrammes sont alentour du même Diametre. Et partant, tirant la Ligne droite FB, elle

passera par le Point P. D'ailleurs, le Parallelogramme NO étant égal au Parallelogramme KM, qui est l'excez dont le Parallelogramme EG surpasse la Figure donnée C : il s'enfuit que le Gnomon TV est égal à la Figure donnée C. Maintenant, les



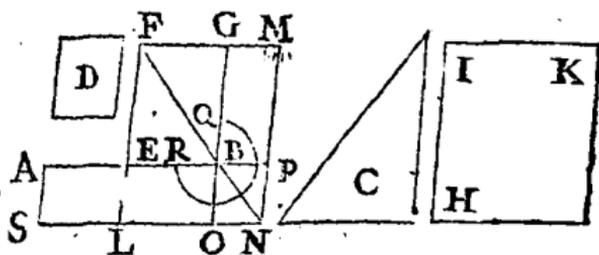
Supplémens EP & PG sont égaux, par la 43. du 1. Donc en leur ajoutant le Parallelogramme commun SR, le Parallelogramme ER sera égal au Parallelogramme SG. Or le Parallelogramme AN est égal au Parallelogramme ER, par la 36. du 1. Donc le Parallelogramme AN est aussi égal au Parallelogramme SG. Si donc on ajoute à ces deux Tous le Parallelogramme EP ; il s'enfuivra que le Parallelogramme AP sera égal au Gnomon TV. Mais le Gnomon TV a été prouvé égal à la Figure donnée C. Donc le Parallelogramme AP est aussi égal à la Figure donnée C. Deplus, le Parallelogramme SK étant alentour du Diametre du Parallelogramme EG, lui est semblable, par la 24. Prop. Il est donc aussi semblable au Parallelogramme donné D, par la 21. Prop. Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XXIX.

## PROBLÈME IX.

Une Ligne droite étant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure rectiligne donnée, & excédant d'un Parallelogramme semblable à un Parallelogramme donné.

Je suppose que la Ligne droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, soient donnez; & je propose d'appliquer à la Ligne AB un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & excédant d'un Parallelogramme semblable au Parallelogramme donné D. Pour le faire,



Coupez la Ligne AB en deux également au Point E; & sur la moitié EB décrivez (par la 18. Prop.) le Parallelogramme EG, semblable au Parallelogramme donné D. Puis ayant décrit (par la 45. Prop. du 1. & par la 25. Prop. de ce Livre) le Parallelogramme HIK, égal à la Figure donnée C & au Parallelogramme EG, pris ensemble, & semblable au Parallelogramme donné D: prolongez le Côté FG vers M, & FE vers L, en sorte que FM



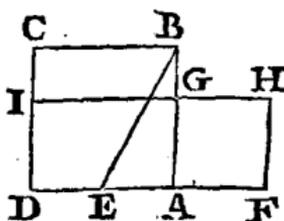
à la Figure donnée C. Maintenant, d'autant que (par la 43. du 1.) le Supplément GP est égal au Supplément EO, & que le Parallelogramme AL est égal à EO, par la 36. du 1: il s'en suit que le Parallelogramme AL est aussi égal au Supplément GP. Et partant en leur ajoutant le Parallelogramme commun LP, le Parallelogramme SP sera égal au Gnomon QR. Or ce Gnomon a été prouvé égal à la Figure donnée C. Partant le Parallelogramme SP, qui est appliqué à la Ligne droite donnée AB, est égal à la Figure donnée C. Et d'autant que le Parallelogramme OP, dont le Parallelogramme SP excède, est semblable au Parallelogramme LM, par la 24. Prop: il est aussi semblable au Parallelogramme donné D; Qui est tout ce qu'il falloit faire, & démontrer.

## PROPOSITION XXX.

### PROBLEME X.

*Couper une Ligne droite donnée, selon la moyenne & extrême Raison.*

**J**E suppose que la Ligne droite AB soit donnée; & je propose de la couper selon la moyenne & extrême Raison. Pour le faire,



Décrivez sur la Ligne AB le Carré AC. Coupez le Côté AD en deux également au Point E. Du Point E au Point B menez la Ligne droite EB. Prolongez la Ligne EA vers F, & prenez EF égale à EB. Ensuite, décrivez sur AF le Carré AH, & prolongez HG

## 340 ELEMENS D'EUCLIDE.

vers I. Cela étant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G selon la moyenne & extrême Raison, c'est à dire que AB est à AG, comme AG est à GB. Pour le prouver,

Par cette construction, & par le raisonnement de la 11. Prop. du 2. il est évident que le Rectangle IB est égal au Quarré AH. D'où il suit, par la 14. Prop. de ce Livre, que comme CB, ou AB son égale, est à AG, ainsi GH, ou AG son égale, est à GB; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

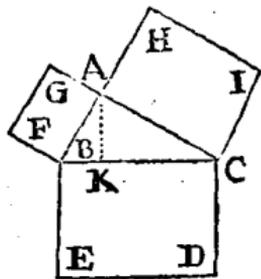
## PROPOSITION XXXI.

## THEOREME XXI.

*Si sur les trois Côtez d'un Triangle Rectangle sont décrites trois Figures semblables & semblablement posées: celle qui est décrite sur le Côté qui soutient l'Angle droit, est égale aux deux autres.*

**J**E suppose que le Triangle ABC soit Rectangle; que l'Angle BAC soit droit; & que sur les trois Côtez AB, AC, BC, soient décrites les trois Figures FA, AI, EC, qui soient semblables & semblablement posées: Cela étant,

je dis que la Figure EC, décrite sur le Côté BC, qui soutient l'Angle droit BAC, est égale aux



## LIVRE SIXIÈME. 341

aux deux autres FA & AI. Pour le prouver,

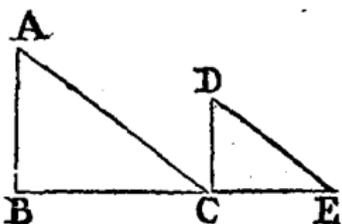
Abaissez du Point A la Ligne droite AK, perpendiculaire à la Ligne BC. Cette Ligne AK (par la 8. Prop.) divisera le Triangle ABC en deux Triangles semblables entr'eux, & au total; & les Côtés AB, BC, CA, qui soutiennent chacun un Angle droit, seront homologues, ou de même Raison. Ensuite de quoi (par la 19. Prop.) le Triangle AKB est au Triangle ABC, en Raison doublée de AB à BC. Or les Figures FA, EC, qui sont supposées semblables, sont aussi l'une à l'autre en Raison doublée de AB à BC, par la 20. Prop. de ce Livre. Et partant le Triangle AKB est au Triangle ABC, comme la Figure FA est à la Figure EC. D'ailleurs, le Triangle AKC est au Triangle ABC, en Raison doublée de AC à BC, par la 19. Prop. Mais (par la 20. Prop.) la Figure AI est aussi à la Figure EC, en Raison doublée de AC à BC. Partant le Triangle AKC est au Triangle ABC, comme la Figure AI est à la Figure EC. Nous avons donc le Triangle AKB, première Grandeur, qui est au Triangle ABC, seconde Grandeur, comme la Figure FA, troisième Grandeur, est à la Figure EC, quatrième. De plus, nous avons le Triangle AKC, cinquième Grandeur, qui est à la seconde ABC, comme la Figure AI, sixième Grandeur, est à la quatrième EC. Partant (par la 24. Prop. du 5.) comme la première Grandeur AKB, & la cinquième AKC, prises ensemble, sont à la seconde ABC; ainsi la troisième FA, & la sixième AI, prises ensemble, sont à la quatrième EC. Or la première AKB, & la cinquième AKC, prises ensemble, sont égales à la seconde ABC, puisqu'elles conviennent. Donc la troisième FA, & la sixième AI, prises ensemble, sont aussi égales à la quatrième EC; Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXXII.

## THEOREME XXII.

*Si deux Triangles, qui ont deux Côtés proportionnaux à deux Côtés, sont disposez de telle sorte qu'ils fassent un Angle, & que leurs Côtés homologues soient paralleles : les deux autres Côtés se rencontreront directement.*

**J**E suppose que dans les deux Triangles ABC, & DCE, le Côté AB soit au Côté AC, comme le Côté DC est au Côté DE; &



que ces deux Triangles soient disposez de telle sorte qu'ils fassent l'Angle ACD; & que leurs Côtés homologues soient paralleles, c'est à dire que le Côté AB soit parallele au Côté DC, & le Côté AC au Côté DE. Cela étant, je dis que les deux autres Côtés BC, CE, se rencontreront directement. Pour le prouver,

Puisque la Ligne droite AC tombe sur les Lignes AB, DC, qui sont paralleles par supposition: l'Angle ACD est égal à l'Angle A, qui lui est opposé alternativement, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque la Ligne droite CD tombe sur les deux Paralleles AC, DE: l'Angle D est égal à son opposé alternativement ACD. Et partant les deux Angles A & D sont égaux entr'eux. Et puisque les Côtés

LIVRE SIXIÈME. 343

Côtés qui sont alentour de ces Angles, sont proportionaux, par supposition: les deux Triangles ABC & DCE sont équiangles, par la 6. Prop. Par conséquent l'Angle B est égal à l'Angle DCE; & l'Angle ACB égal à l'Angle E. Maintenant, puisqu'il est égal à l'Angle B: si l'on ajoute à l'un l'Angle ACD, & à l'autre l'Angle A, qui sont égaux: les deux Angles DCE & ACD, ou bien l'Angle seul ACE, seront égaux aux deux Angles B & A; & en leur ajoutant derechef l'Angle commun ACB, ils s'ensuivra que les deux Angles ACE & ACB seront égaux aux trois Angles du Triangle ABC, c'est à dire à deux droits, par la 32. du 1. D'où il suit (par la 14. Prop. du 1.) que les deux Lignes BC, CE, se rencontrent directement; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXIII.

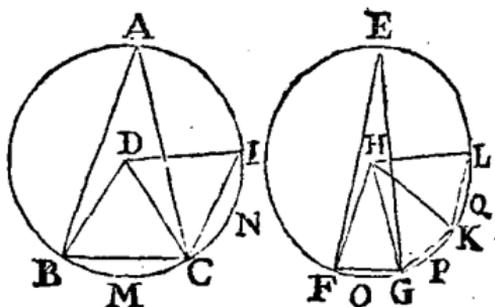
*Aux Cercles égaux, les Angles constituez au Centre, ou à la Circonférence, sont entr'eux comme les Arcs qui les soutiennent; & les Secteurs sont aussi entr'eux comme ces Arcs.*

**J**E suppose que les deux Cercles ABC, & EFG, soient égaux; & que les Angles BDC & FHG soient constituez aux Centres de ces deux Cercles. Cela étant, je dis que l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG. Pour le prouver,

Menez une Ligne droite du Point B au Point C,

& une autre Ligne droite du Point F au Point G. Puis appliquez à la Circonférence du Cercle ABC autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à BC, telle qu'est par exemple la Ligne CI. De même, appliquez à la Circonférence du Cercle EFG autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à FG, telles que sont GK, KL; & tirez les Lignes droites DI, HK, KL. Cela posé :

Puisque les Lignes droites BC, CI, sont égales : les Arcs BC, CI, dont elles sont les Soutendantes,



font égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite de quoi, les Angles BDC & CDI sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle BDI est autant multiple de l'Angle BDC, qui est la première des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc BCI est multiple de l'Arc BC, qui est la troisième de ces mêmes Grandeurs. D'ailleurs, puisque les Lignes droites FG, GK, KL, sont égales : les Arcs FG, GK, KL, dont elles sont les Soutendantes, sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite de quoi, les Angles FHG, GHK, KHL, sont aussi égaux, par la 27. Prop. du même Livre. Desorte que l'Angle FHL est autant multiple de l'Angle FHG, qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatrième de ces mêmes Grandeurs. Or si l'Angle BDI est égal à l'Angle FHL, l'Arc BCI s'ensuit égal à l'Arc FGKL, par la 26. Prop. du 3. Et si l'Angle BDI est

est

## LIVRE SIXIÈME. 345

est plus grand que l'Angle FHL, l'Arc BCI est aussi plus grand que l'Arc FGKL. Et enfin si l'Angle BDI est moindre que l'Angle FHL, l'Arc BCI est aussi moindre que l'Arc FGKL. Et partant ( par le 2. Axiome du 5. ) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; c'est à dire, que l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, que les Angles BAC & FEG, qui sont constituez aux Circonférences de ces Cercles sont encore entr'eux comme l'Arc BC est à l'Arc FG. Pour le prouver,

Les Angles BAC & FEG sont les moitez des Angles BDC & FHG, par la 20. Prop. du 3. Et par conséquent ( par la 15. Prop. du 5. ) l'Angle BAC est à l'Angle FEG, comme l'Angle BDC est à l'Angle FHG. Or l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG, comme il a été prouvé. Et partant, l'Angle BAC est à l'Angle FEG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisième lieu, que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG. Pour le prouver,

Puisque les Lignes BC, CI, sont égales, & que les Arcs BC, CI, qu'elles soutiennent, sont égaux: il s'ensuit que les Segmens BMC, & CNI, sont aussi égaux entr'eux. Aquoy si on ajoute les Triangles BDC & CDI, qui sont égaux, par la 4. Prop. du 1. les Secteurs DBMC & DCNI seront aussi égaux entr'eux. Desorte que le Secteur DBCI est autant multiple du Secteur DBMC, qui est la première des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer être proportionnelles; que l'Arc BCI est multiple de l'Arc BC, qui est la troisième de ces mêmes Grandeurs. On prouvera de même, que le Secteur HFGKL est autant multiple du Secteur HFOG, qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il

qu'il s'agit de montrer être proportionnelles, que l'Arc FGKL est multiple de l'Arc FG, qui est la quatrième de ces mêmes Grandeurs. Or si le Secteur DBCI est égal au Secteur HFGKL, l'Arc BCI est aussi égal à l'Arc FGKL; Si le Secteur est plus grand que le Secteur, l'Arc est plus grand que l'Arc; Et si le Secteur est moindre que le Secteur, l'Arc est aussi moindre que l'Arc. Donc (par le 2. Axiome du 5.) ces quatre Grandeurs sont proportionnelles; c'est à dire que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG; Ce qui restoit à démontrer.

### I. COROLLAIRE.

Puisque l'Angle d'un Secteur est à l'Angle d'un autre Secteur, comme l'Arc de l'un est à l'Arc de l'autre; & que l'Arc est à l'Arc, comme le Secteur est au Secteur: il s'ensuit que comme l'Angle est à l'Angle, ainsi le Secteur est au Secteur.

### II. COROLLAIRE.

De plus, puisque le Cercle est composé de tous les Secteurs qui peuvent être autour de son Centre: il est évident que comme la quantité des quatre Angles droits qui peuvent être autour du Centre, est à la quantité de l'Angle du Secteur, ainsi la quantité de tout le Cercle est à la quantité du Secteur.

*Fin des Elemens d'Euclide.*