EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI SEX.
Ex traditione Federici Commandini.

NEAPOLI,

Typis Novelli de Bonis Typograph. Archiep. 1679.
Superiorum facultate.

Sumptibus Cosmi Fioravanti.

ILLUSTRISSIMO,
ET EXCELLENTISS. DOMINO

D. DOMINICO MARTIO CARAFÆ

MAGDALUNENTIUM DUCI,
ARGENTII MARCHIONI,
CERRETI COMITI, &c.

HAud multùm dubitatio me tenuit, Princeps Excellentissime, cuinam hosce Euclideos Libros non immeritò dicarem. Statìm enim atque Typographis excudendos eos tradidi, eæ meæ fuerunt cogitationes, ut tui nominis claritate illustrati, ornatique

tique viderentur. Et ſanè quidem, ſi ea animaduerterim conſilia, quibus ſapientes etiā homines ſuis ſolent opuſculis præſtantiſſimos viros donare; ſi ea, inquam, inſpexerim, quantò id ego erga te ſapientius efficiam, in quo ſanè ſplēdeſcere ea omnia munera videmus, quæ immortalitatis teſtimonium ex ſe exhibent. Nec id mihi propoſitum nunc ſit credas inter cætera, quæ habes ornamenta tuorum quoque facta me connumerare; cum vix tua, quibus illorum laudes obſcuraſſe quodammodo videris, enarrare mihi nunc liceat. Adde quod nec id facilis mihi foret negotii, et ſexcenties commemorata rediceterem, quodque etiam perperam facerē. Quis eſt etenim, qui in te uno non videat quæque

bel-

belli, domique majores tui probè, ſtrenuèque geſſerunt? plures inquã Diomedes, et penè innumeri Thomas, Martii, aliique, et pietate inſignes, et omni militari ingenio præditi. Quin etiam in te uno vigent virtutes omnes, quarũ ſingulæ optimum quemque decorarent. Quippè, ſi aliquarum meminiſſe velimus, in te admodum humanitas, et majeſtas benè convenerunt, ut ad tui amorem, et obſervantiam an allicias potiùs, dubium ſit, an potius impellas noſtrum omnium animos. Munificentia autem tua quid jucundius? Qui te enim in ipſa exercenda antecellat nemo eſt, ne dicam, quem tecũ parem conferamus; tam largè, tam ſapienter tua impertiris beneficia optimis ſcilicet viris, ac de bonis artibus benè meritis, quos inter ſæpenumero tibi libet otium conſumere, unde Philoſophos inter, Mathematicos, atque Poetas ſummam tibi dignitatem es aſſequutus. O aurea, ò feliciora tempora, in quibus dominantur ſapientes, philoſophătur Principes! Auguſti haud equidem invideremus ætati, ſi par animo, & imperiū inclyto Martio Fato conceſſum eſſet. Sed cum tuas laudes, quarum maxima eſt, Princeps Sapientiſſime, in contemptione, ac deſpicientia laudem te poſuiſse, referri non patiaris ob tui animi magnitudinem, illas iccirco ſilentio prætercam. Tu tamen quod tibi humili, ac devoto animo munuſculum offero, humaniter ſuſcipias in meæ erga te obſervantiæ teſtimonium. Quod ſi

ſefeceris, mei voti compotem ſatis ſuperque me efficies. Vale igitur ſummum ætatis noſtræ Decus.

Excell. Veſtræ

Obſequentiſs. ſeruus
Coſmus Fioravanti.

An-

Antonii à Capua
DE D. DOMINICO MARTIO
Magdalunentium Duce

Carmen

Ad Julium Accianum.

FErt animus laudes, Juli, partosque triumphos,
Alta quibus nomen se tollit Martii ad astra
Ordiri. Neget Italico quis carmina Marti
Insigni pietate simul, belloque potenti?
Quem meritò, vt clarum Siren decus Vrbis, & Orbis,
Sebethusque colit. Mens deficit ast, animusque
Grandia sectanti mihi, nec deterrita captis

Mu-

Musa aspirat, nequicquam vestigia calcans,
Quæ post Argolicas Latiæ pressere Camenæ.
Tu tamen, ò Patria, ò secli lux unica nostri,
Quem cithara, quemque arte sua donavit Apollo,
Maxime Iuli vatum, suscipe viribus æquam
Materiam, resonetque immensis Martii olympus
Laudibus æternus; lumenque ut clarius edit
Fax geminata; tuis poterit sic maximus Heros
Versibus æternum sic tu fulgere vicissim
Virtute illius: mihi namque siluisse licebit.

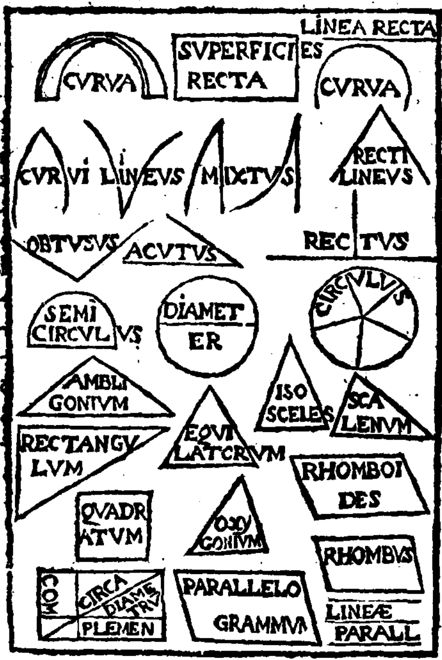
Studiosis Geometriæ S. P. D.

Cosmus Fioravanti.

MIrabitur fortè aliquis, quod ad Elementorum Geometricorum impressionem animum appulerim, quando satis magna eorundem copia ubique venalis extat. Verùm duo potissimùm mihi animum addidere, ut pecuniam in hos sumptus erogarem: alterum est, quod tanta errorum illuvies in Veneto Codice reperitur, qui ut plurimùm tyronum manibus teritur, ut ne legi quidem, nedùm intelligi possit; alterum ejusdem libelli necessitas, sine quo frustrà scientiarum fores pulsantur, unde clarissimus Galilæus, qui primus Philosophiam Mathematicæ sociavit, in Epistola sivè mavis libello, cui nomen fecit *il Saggiatore* ait: *La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che*

con-

continuamente ci sta aperto innanzi à gl'occhi (io dico l'universo) ma non si può intendere se prima non s'impara à intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto: egli è scritto in lingua matematica, & i caratteri sono triangoli, cerchi, & altre figure geometriche, senza quali mezzi è impossibile à intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un'oscuro laberinto. Atque hinc desinant plerique insulsè quærere, cui bono hæc addiscantur, ne illis contingat, quod & olim mihi Florentià discedenti, nàm ubi primùm Liburni navigia prospexi altissimis malis aliisque quam multis instrumentis instructa, mecum rebar ad hoc parata esse omnia, ut animi levandi gratia liceret Nautis malorum vertices scandere, quò latiores Maris tractus cernerent, & frigidiusculam auram captarent, nec alii præterea usui esse. Cum verò vela aptari vidi, & tam variorum instrumenmentorum ope navium cursus regi, tùm primùm sensi aliquid majoris momenti, quam quod suspicabar in tanto apparatu subesse. Similiter Geometriæ necessitatem atque admirandos usus iis spontè manifestos futuros auguror, quibus contigerit his elementis feliciter perceptis ad scientiæ culmen pervenire, secùs profectò ignotæ artis mysteria perspecta habere velle insania est. Commandini versionem præ cæteris selegimus, cum ea per quam breuis sit, & græco codici quasi ad verbum respondeat. Addidimus Corollaria, ne Lectores in illis proprio marte eruendis cruciarentur. Prætereà quam in correctione adhibuimus diligentiam, vobis cognoscendum relinquimus, ne longa oratione id probare conemur, quod res ipsa demõstrat. Verum si hæc curiosis placuerint, breui eàdem forma reliquos elementorum libellos imprimi curabimus. Valete.


LINEA RECTA
CVRVA
SVPERFICIES
RECTA
CVRVA
CVRVI LINEVS
MIXTVS
RECTI LINEVS
OBTVSVS
ACVTVS
RECTVS
SEMI CIRCVLVS
DIAMETER
CIRCVLVS
AMBLI GONIVM
ISO SCELES
SCA LENVM
RECTANGV LVM
EQVI LATERVM
RHOMBOI DES
QVADR ATVM
OXY GONIVM
RHOMBVS
COM PLEMEN
CIRCA DIAME TRV
PARALLELO GRAMMVM
LINEÆ PARALL

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER PRIMUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

1. Punctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.
2. Linea verò est longitudo latitudinis expers.
3. Lineæ fines sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquali suis interjjcitur punctis.
5. Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.
6. Superficiei fines sunt lineæ.
7. Plana superficies est, quæ ex æquali suis interjjcitur lineis.
8. Planus angulus est, duabus lineis in plano se se contingentibus, & non in directum jacentibus, alterius ad alteram inclinatio.
9. Quando autem quæ angulum continent rectæ li-

neæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.
10. Cum verò recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.
11. Obtusus angulus est, qui major est recto.
12. Acutus autem, qui recto est minor.
13. Terminus est, qui alicujus est finis.
14. Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.
15. Circulus est figura plana una linea cõtenta, quæ circumferentia appellatur, ad quam, ab uno puncto intra figuram existente, omnes rectę lineæ pertinentes sunt æquales.
16. Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.
17. Diameter circuli est recta quædam linea per cētrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem & bifariam circulum secat.
18. Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea, quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.
19. Portio circuli est figura, quæ, recta linea, & circuli circumferentia continetur.
20. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.
21. Trilateræ quidem, quæ tribus.
22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Mul-

23. Multilateræ verò, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur,

24. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

25. Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

26. Scalenum verò est, quod tria inæqualia habet latera.

27. Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

28 Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

29. Acutangulum verò, quod tres acutos angulos habet.

30. Quadrilaterarum figurarũ quadratum est, quod & æquilaterum est, & rectangulum.

31. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera verò non est.

32. Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

33. Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia vocentur.

35. Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

Postulata.

1. POstuletur à quovis puncto ad quodvis punctũ rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.
3. Quovis centro, & intervallo circulum describere.
4. Omnes angulos rectos inter se æquales esse.
5. Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas inter se convenire ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.

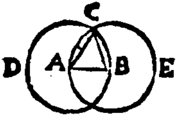
Axiomata, seu Communes notiones.

1. QUæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.
2. Et si æqualibus æqualia adijciantur tota sũt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Et si inæqualibus æqualia adijciantur, tota sunt inæqualia.
5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Et quæ ejusdem dupla, inter se sunt æqualia.
7. Et quæ ejusdem dimidia, inter se sunt æqualia.
8. Et quæ sibi ipsis congruunt, inter se sunt æqualia.
9. Totum est sua parte majus.
10. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

PRO-

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

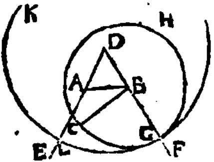


SIt data recta linea terminata AB. oportet in ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur BCD. Et rursus centro B, intervalloq; BA describatur circulus ACE, & à puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad AB ducantur rectæ lineæ CA, CB. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi AB æqualis; (1) rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA. ostensa est autem & CA æqualis AB. utraque igitur ipsarum CA, CB ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sũt. (2) Ergo CA ipsi CB est æqualis, tres igitur CA, AB, BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC, & constitutum est in data recta linea terminata AB, quod fecisse oportebat.

(1) diff. 15. (2) Com. not. 1.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctum data recta linea æqualem rectam lineam ponere.

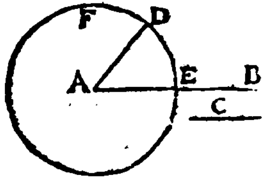


Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineā ponere. Ducatur à pūcto A ad B recta linea A B:(1) & in ipsa constituatur triangulum æquilaterum D A B,(2) producanturque in directū ipsis D A D B rectæ lineæ A E B F.(3) & centro quidem B, intervallo autē B C circulus C G H describatur. Rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B centrum est C G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis.(4) Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L. erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D B. reliqua igitur A L reliquæ G B est æqualis. (5) Ostensa autem est B C æqualis B G. Quare utraq; ipsarum A L B C est æqualis ipsi B G. Quæ autem eidē æqualia sunt, & inter se sunt æqualia (6) Ergo, & A L est æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis posita est A L. Quod facere oportebat.

Pro-

(1) Postul. 1. (2) Prima hujus. (3) Postul. 2. (4) Diffin. 15. (5) Com. no. 3. (6) Com. no. 1.

Problema 1. Propositio 3. Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abscindere.



Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, C; quarũ major sit AB. oportet à majori AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctũ ipsi C æqualis recta linea AD,(1) & centro quidẽ A, intervallo autẽ AD circulus describatur DEF.(2)Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. utraq; igitur ipsarũ A E, C ipsi AD æqualis erit. (3) Quare & AE ipsi C est æqualis. Duab. igitur datis rectis lineis inæqualibus AB, C, à majori AB minori C æqualis abscissa est AE. Quod fecisse oportebat.

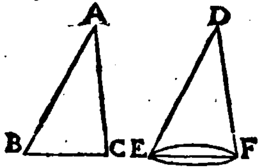
---

(1) Ex antecedente. (2) post.3. (3) Com.no.1.

Theorema 1. Propositio 4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera

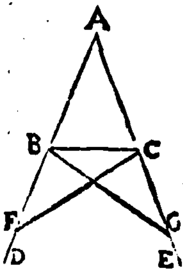
A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus verò A C ipsi D F; & angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico, & basim B C basi E F æqualem esse, & triangulum A B C æquale triangulo D E F, & reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur; nempè angulum A B C angulo D E F: & angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, & puncto quidem A posito in D, recta verò linea A B in ipsa D E: & punctum B puncto E cōgruet; quod A B ipsi D E sit æqualis, Congruente autem A B ipsi D E; congruet, & A C recta linea, rectæ lineæ D F cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. Quare, & C congruet ipsi F: est enim rursus recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis B C basi E F congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C verò ipsi F; basis B C basi E F non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod fieri non potest. (1) Congruet igitur B C basis, basi E F, & ipsi æqualis erit. Quare, & totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipsi erit æquale; & reliqui



(1) Com.no.10.

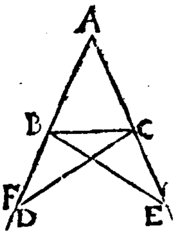
liqui anguli reliquis angulis congruent , & ipsis æquales erũt. Videlicet angulus A B C angulo D E F, & angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

Theorema 2. Propositio 5. Æquicrurium triãgulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus, lateri A C æquale, & producantur in directum ipsis A B, A C rectæ lineæ B D, C E. Dico angulum quidem A B C angulo A CB, angulum verò C B D angulo B C E æqualem esse. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum F: atquè à majori A E minori A F æqualis auferatur A G: (1) junganturque F C, G B. Quoniam igi-

(1) tert. Hujus.

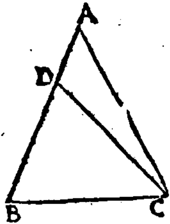


igitur A F quidem est æqualis A G; A B verò ipsi A C; duæ F A AC, duabus G A A B æquales sunt, altera alteri; & angulum F A G communem continet. Basis igitur F C basi G B est æqualis; & triangulum A F C æquale triangulo A G B; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus ęqualia latera subtenduntur (2) Videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G, angulus verò A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G est æqualis; quarum A B est æqualis A C; erit & reliqua B F reliquæ C G æqualis. (3) Ostensa est autem F C æqualis G B; duæ igitur B F, F C duabus CG G B æquales sunt, altera alteri; & angulus B F C æqualis angulo C G B: estque basis ipsorum BC communis; ergo & triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur. (4) Angulus igitur F B C est æqualis angulo G C B; & angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis ostensus est, quorum angulus C B G est æqualis ipsi B C F: erit reliquus A B C reliquò A C B ęqualis: (5) & sunt

(2) Ex præcedente. (3) Axioma. 3. (4) Ex præcedente. (5) Axioma. 3.

& sunt ad basim A B C trianguli: ostensus autem est, & F B C angulus æqualis angulo G C B, qui sunt sub basi. Æquicrurium igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

Theorema 3. Propositio 6. Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

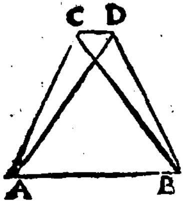


Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse; si enim inæqualis est AB ipsi AC; altera ipsarum est major. Sit major AB; atquè à majori AB, minori AC æqualis auferatur DB; (1) & DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB. Basis igitur DC basi AB est æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB (2) minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod demonstrasse oportuit.

Theo-

(1) tert. hujus. (2) quart. hujus.

Theorema 4. Propositio 7. In eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituentur ad aliud, atque aliud punctũ, ad easdem partes, eosdem, quos prima recta linea, terminos habentes.



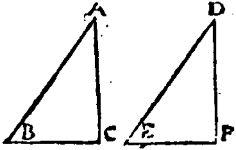
SI enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud, atque aliud punctum C, D, ad easdem partes, ut ad C, D, eosdem habentes terminos A, B, quos primę rectæ lineæ, ita vt C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B verò sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, & angulus A C D angulo A D C æqualis. (1) Major igitur est A D C angulus angulo D C B. Quare angulus C D B angulo D C B multo major erit. Rursus quoniam C B est ęqualis D B, & angulus C D B ęqualis erit angulo D C B: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud,

(1) quint. hujus.

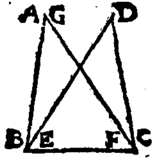
aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdẽ, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

Theorema 5. Propositio 8. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualem: angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

SInt duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri; vt sit A B quidem æquale D E; A C verò ipsi D F: habeant autem, & basim B C basi EF æqualem. Dico angulũ quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC congruente ipsi DEF triangulo, & pũcto quidem B posito in E; recta verò linea BC in EF: congruet, & C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est æqualis. Itaque cõgruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed permutantur; ut EG, GF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad easdẽ



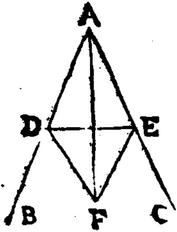
par-



partes, eosdem habentes terminos: non constituuntur autem, vt demonstratum est; (1) non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent, & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualē: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

(1) In antecedente.

Problema 4. Propositio 9. Datum angulum rectilineum bifariam secare.



Sit datus angulus rectilineus BAC itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC, ipsi AD æqualis auferatur AE; (1) junctaque DE, cōstituatur in ea triangulum æquilaterum DEF; (2) & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE;

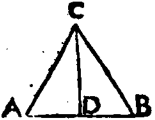
com-

(1) tert. hujus. (2) pr. hujus.

communis autem AF: duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF, angulus igitur DAF angulo EAF est æqualis. (3) quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est: quod facere oportebat.

(3) Ex antecedente.

Problema 5. Propositio 10. Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.



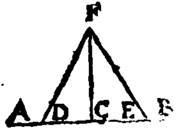
SIt data recta linea terminata AB, oportet ipsam bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum ABC; (1) & secetur ACB angulus bifariam recta linea CD. (2) dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri: & angulus ACD æqualis angulo BCD basis igitur AD basi BD est æqualis. (3) Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

Problema 6. Propositio 11. Data recta linea à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

SIt data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C, oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos re-

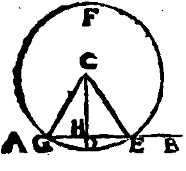
(1) pri. hujus. (2) Ex antecedente. (3) quart. hujus.

rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD æqualis ponatur CE, (1) & in DE constituatur triangulum æquilaterum FDE, (2) & FC jungatur. Dico datæ rectę lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam



enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE. angulus igitur DCF angulo ECF est æqualis, (3) & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus est uterque æqualium angulorum, (4) ergo uterque ipsorum DCF, FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

Problema 7. Propositio 12. Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.



Sit data quidem recta linea infinita AB, datum verò punctum C, quod in ea non est. Oportet super datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam du-

(1) sec. hujus. (2) pr. (3) oct. hujus. (4) Diff. 10.

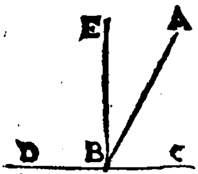
ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem CD, circulus describatur EFG: (1) & EG in H bifariam secetur. (2) junganturque CG, CH, CE. Dico super datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH, HC æquales sunt, altera alteri; & basis CG est æqualis basi CE. Angulus igitur CHG angulo EHC est æqualis, (3) & sunt deinceps; cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum, & quæ insistit recta linea, perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit, (4) ergo super datam rectam lineam infinitam AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Quod facere oportebat.

---

(1) Postul. 3. (2) 10. hujus (3) oct. hujus. (4) D. ff. 10.

Theorema 6. Propositio 13. Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA, ABD. Dico CBA ABD angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales, si enim CBA est æqualis ipsi ABD, duo recti



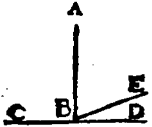
sunt; (1) sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti, & quoniã CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD. ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt æquales. Rursus quoniã DBA angulus est æqualis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensũ est angulos quoque CBE, EBD eisdẽ tribus æquales esse: quæ verò eidẽ sunt æqualia, & inter se æqualia sunt, (2) ergo, & anguli CBE, EBD ipsis DBA ABC sunt æquales, suntque CBE EBD duo recti anguli; igitur DBA, ABC duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

---

(1) Diffin. 10. (2) Axioma. 1.

Theorema 7. Propositio 14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

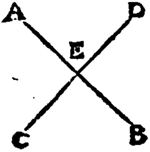
AD aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC, BD non ad ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. Si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit, anguli ABC ABE duobus rectis sunt æquales. (1) Sed & anguli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD ęquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.



(1) Ex antecedente.

Theorema 8. Propositio 15. Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB, CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum verò CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt



hi duobus rectis æquales. (1.) Rursus quoniam recta linea DB super rectam AB consistens facit angulos AED DEB, erunt AED DEB anguli æquales duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus CEA reliquo BED est æqualis. (2) Simili ratione, & anguli CEB, DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat.

(1) 13. hujus. (2) 3. com. not.

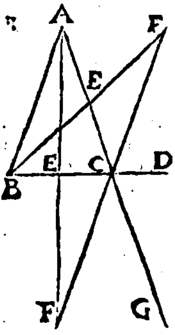
COROLLARIUM.

Ex hoc manifestè constat rectas lineas, quotquot se invicem secant, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Theorema 9. Propositio 16. Omnis trianguli, uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & opposito est major.

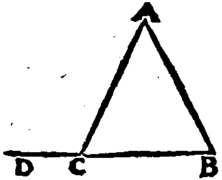
Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utro-

utroque interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam in E, (1) & juncta BE producatur ad F; ponaturq; ipsi BE æqualis EF. jungatur præterea FC, & ducta AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE verò ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sũt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis est basi FC; & ABE triangulum, triangulo FEC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (2) Ergo angulus BAC est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est AGD angulo ABC major. Omnis igitur trianguli, uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



(1) 10.hujus. (2) 4.hujus.

Theorema 10. Propositio 17. Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.



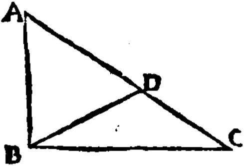
Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC triãguli duos angulos quomodocũque sũptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major est interiore, & opposito ABC: (1) communis apponatur ACB. Anguli igitur AC D, ACB, angulis ABC BCA majores sunt. Sed ACD ACB sunt æquales duobus rectis. (2) Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB, itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti; quod demonstrare oportebat.

(1) 16. hujus. (2) 13. hujus.

Theorema 11. Propositio 18. Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem

jorem esse. Quoniam enim AC majus est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et

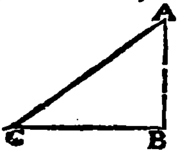


quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major interiore, & opposito DCB. (1) sed ADB æqualis est ipsi ABD, quòd & latus AB lateri AD sit æquale, (2) major igitur est & ABD angulus, angulo ACB. quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulũ subtendit: quod oportebat demonstrare.

---

(1) 16.hujus. (2) 5.hujus.

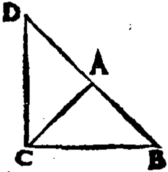
Theorema 12. Propositio 19. Omnis trianguli major angulus maus latus subtendit.



Sit trianguli ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. dico, & latus AC latere AB majus esse. Si enim non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus. Æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis esset; non est autem: non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus, esset enim, &

angulus ABC angulo ACB minor: atqui non est. non igitur AC minus est ipso AB. ostensum autem est neque æquale esse. ergo AC ipso AB est majus. omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit, quod oportebat demonstrare.

Theorema 11. Propositio 20. Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumque sumpta.

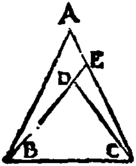


Sit enim triangulum ABC. dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta; videlicet latera quidem BA, AC majora latere BC; latera verò AB BC majora latere AC: & latera BC CA majora ipso AB. producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD; & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AC, erit & angulus ADC angulo ACD æqualis. (1) Sed BCD angulus major est angulo ACD. angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BCD: majorem autem angulum majus latus subtendit: (2) erit latus DB latere BC majus; Sed DB est æquale ipsis BA AC, quare latera BA AC ipso BC majora sunt. Similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse

(1) 5. hujus. (2) Ex antecedente.

se latere CA : latera verò BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumque sumpta; quod ostendere oportebat.

Theorema 14. Propositio 21. Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt.



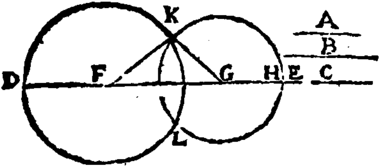
TRianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B, C duæ rectæ lineæ intra cõstituantur BD, DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, majorem verò continere angulum BDC angulo BAC. producatur enim BD ad E. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora (1) erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipsis BE EC majora sunt. Rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major: (2) erit trianguli CDE exterior

(1) Ex antecedente. (2) 16. hujus.

rior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione, & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major. Sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.

Problema 8. Propositio 22. Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocumquè sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumquè sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A,B,C, quarum duę reliqua majores sint, quomodocumque sumptæ, ut scilicet A,B quidem sint majores quam C; A, C verò majores quàm B; & præterea B, C majores quàm A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A,B,C



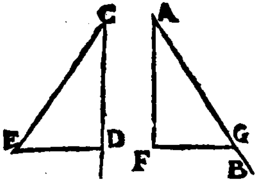
triangulum constituere. Exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita verò ad E, & ponatur ipsi quidem A æqualis DF, ipsi vero B æqualis ilis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus describatur DKL (1) Rursusque centro G, & intervallo GH, alius circulus KLH describatur, & jungantur KF, KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum KFG constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis FK, Sed FD est æqualis A. ergo, & FK ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circnli LKH, erit GH æqualis GK. Sed GH. est æqualis C. ergo, & GK ipsi C æqualis erit; est autem & FG æqualis B tres igitur rectæ lineæ KF, FG, GK tribus A, B, C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF, FG, GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. quod facere oportebat.

---

(1) tert. postul.

Problema 9. Propositio 23. Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum verò in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utraque ipsarum C D, C E quævis puncta D, E, jungaturque D E, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus C D, D E, E C triangulum con-

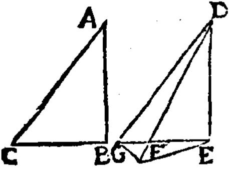


constituatur A F G, ex præcedenti ita ut C D sit æqualis AF, & CE ipsi A G, & D E ipsi G F. Itaque quoniam duæ D C,C E duabus FA,AG æquales sunt, altera alteri; & basis D E est æqualis basi F G: erit, & angulus D C E angulo F A G æqualis, (1) Ad datam igitur rectam lineam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G, quod facere oportebat.

(1) oct. hujus.

Theorema 15. Propositio 24. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulũ autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur, & basim basi majorem habebunt.

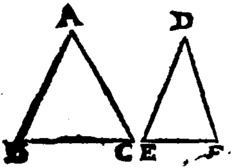
Sint duo triãgula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC duobus lateribus DE,DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE,latus verò AC æquale DF:& angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. Quoniam enim angulus BAC major est angulo EDF; constituatur ad rectam lineam DE, & ad pũctum in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG,



EDG, (1) ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis DG, & GE, FG jungantur. Itaque quoniam AB quidem est æqualis DE; AC verò ipsi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angulo EDG. Ergo basis BC basi EG est æqualis. (2) Rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; & angulus DFG angulo DGF: (3) erit DFG angulus angulo EGF major. Multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. Et quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori autem angulo majus latus subtenditur, (4) erit, & latus EG latere EF majus. Sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

(1) Ex antecedente (2) quart. hujus. (3) 5 hujus. (4) 19 hujus.

Theorema 16. Propositio 25. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim verò basi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

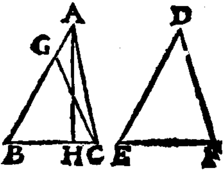


Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis. (1) Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. Minor enim esset, & basis BC basi EF. (2) Atqui non est. non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. Ostensum autem est, neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessariò major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim verò basi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.

Theo-

(1) quart. hujus. (2) Ex antecedente.

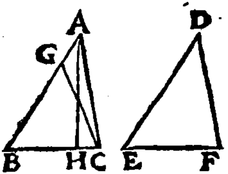
Theorema 17. Propositio 26. Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



SInt duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterũ alteri, videlicet angulũ quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum verò BCA angulo EFD. Habeant autem & unum latus uni lateri æquale, & primum quod æqualibus adjacet angulis; nempè latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturq; GB æqualis DE, & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC verò ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sũt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. Basis igitur GC basi DF est æqualis; & GBC triangu-

lum

lum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (1) Ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. Quare, & BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur



inæqualis est AB ipsi DE. Ergo æqualis erit. Est autem & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis angulo DEF. Basis igitur AC basi DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est ęqualis. (2) Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, æqualia, vt AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC verò ipsi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF ęqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est. Sit major BC, si fieri potest; ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniã igitur BH quidem est æqualis EF, AB verò ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent. Ergo basis AH basi DF est ęqualis, & ABH triangulum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis

(1) quart. hujus. (2) quart. hujus.

gulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (3) Æqualis igitur est angulus BHA angulo EFD Sed EFD est æqualis angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est æqualis. Triãguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiore, & opposito BCA , quod fieri non potest. Quare non inæqualis est BC ipsi EF. Æqualis igitur. Est autem, & AB æqualis DE. Duæ igitur AB,BC duabus DE,EF æquales sunt, altera alteri, angulosq; æquales continent. Quare basis AC æqualis est basi DF, & ABC triangulum æquale triangulo DEF ,& reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumq; latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

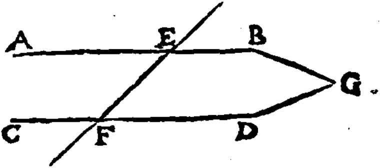
---

(3) quart.hujus

Theorema 18. Propositio 27. Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

IN duas enim rectas lineas AB,CD , recta linea EF incidens alternos angulos AEF ,EFD æquales inter se faciat. Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ AB,CD, vel ad partes B,D conuenient, vel ad partes A,C. producantur, conveniantque ad partes B,D in puncto G. Itaque GEF trianguli exterior angulus

AEF major est interiore, & opposito EFG (1) Sed & æqualis, quod fieri non potest: non igitur AB, CD

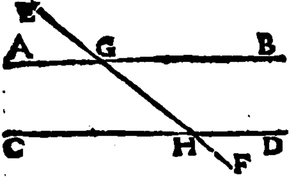


productę ad partes B, D convenient. Similiter demonstrabitur neq; convenire ad partes A, C. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ inter se sunt. (2) Parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

(1) 16. *hujus.* (2) *Diff.* 35.

Theorema 19. *Propositio* 28. *Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.*

IN duas enim rectas lineas A B, C D recta linea EF incidens exteriorem angulũ EGB interiori, & opposito G H D æqualem faciat; vel interiores, & ad easdem partes BGH, GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam .n. EGB angulus æqualis est angulo GHD,



GHD, angulus autē EGB angulo AGH. (1) erit, & angulus AGH angulo GHD æqualis, & sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi CD. (2) Rursus quoniā anguli BGH, GHD duobus rectis sunt æquales, & sunt AGH BGH æquales duobus rectis (3) erunt anguli AGH, BGH angulis BGH GHD æquales. Communis auferatur BGH. Reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD: & sunt alterni. Ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

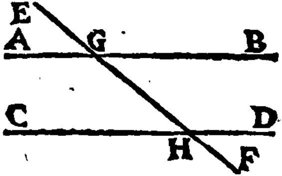
---

(1) 15. hujus. (2) Ex antecedente (3) 13. hujus.

Theorema 20. Propositio 29. In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

IN parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH, GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB, interiori, & ad easdem partes GHD æqualem:

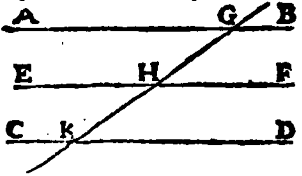
& interiores, & ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. Sit major AGH. Et quoniam AGH angulus major est angulo GHD; cõmunis apponatur BGH. Anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. Sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis. (1) Ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quam sint duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ inter se conveniunt (2) Ergo rectæ lineæ AB, CD in infinitum productæ convenient inter se. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. Quare necessario est æqualis. Angulus autem AGH æqualis est angulo EGB (3) Ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. Communis apponatur BGH. Anguli igitur EGB, BGH sunt æquales angulis BGH, GHD. Sed EGB, BGH æquales sunt duobus rectis. Ergo, & BGH, GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem par-



(1) 13. hujus. (2) post 5. (3) 15. hujus.

partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 21. Propositio 30. Quæ eidem recta lineæ sunt parallelę, & inter se parallelæ erunt.

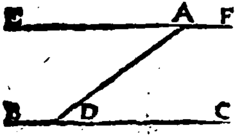


Sit utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallela. Dico, & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis; ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit, & sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi CD. Ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt, quod oportebat demonstrare.

Problema 10. Propositio 31. Per datum punctum data recta linea parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC. Oportet per A punctum ipsi BC rectæ li-

lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC, quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturq; ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE. (1) & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. Quoniã igitur in duas

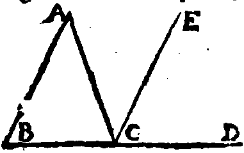


rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit (2) Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.

---

(1) 23. hujus. (2) 27. hujus.

Theorema 22. Propositio 32. Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D. producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC, æqualem esse; & trianguli tres in-

interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. Ducatur.n. per punctum C ipsi AB rectæ lineæ, parallela CE. (1) Et quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter se æquales sunt. (2) Rursus quoniam AB parallela est CE, & in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori, & opposito ABC est æqualis. (3) Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC, ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BCA, CAB æquales sunt. Sed anguli ACD, ACB sunt æquales duobus rectis. (4) Ergo & ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

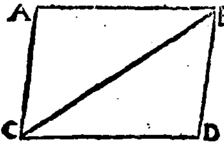
---

(1) Ex antecedente. (2) 29. hujus. (3) 29. hujus (4) 13. hujus.

Theorema 23. Propositio 33. Quæ æquales, & parallelas ad easdē partes conjungunt recta linea, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt æquales, & parallelæ AB, CD: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC, BD. Dico AC BD æquales, & parallelas esse. Iungatur

tur enim BC. Et quoniam AB parallela est CD, in ipsasq; incidit BC, alterni anguli ABC, BCD æquales sunt. (1) Rursus quoniã AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus BC, CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. Basis igitur AC basi BD



est æqualis: triangulũq; ABC triãgulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur (2) Ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD æquales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD. (3) Ostensa autem est, & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales; & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

---

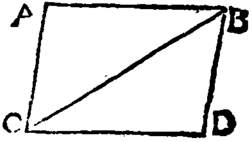
(1) 29. hujus. (2) 4. hujus. (3) 27. hujus.

Theorema 24. Propositio 34. Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ACDB, cujus diameter BC. Dico AC, DB parallelogrammi latera, quæ

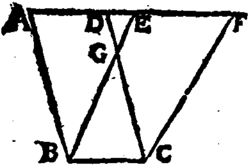
ex

ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifar.am secare. Quoniam .n. parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC, BCD inter se æquales sunt. Rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB, CBD æquales sunt inter se. Duo igitur triangula sunt ABC, CBD, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, utriq; commune BC. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. Et quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB, erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. Ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. Parallelogrammorum igitur spatiorũ latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam.n. æqualis est AB ipsi CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus DC, CB æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis est angulo BCD. Basis igitur AC basi DB æqualis. Quare, & triã-



gulum ABC triangulo BCD æquale erit. Ergo diameter BC parallelogrāmum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 25. Propositio 35. Parallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

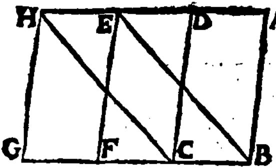


Sint parallelogramma ABCD, EBCF in eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF, BC cōstituta. Dico ABCD parallelogrammū parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammū est ABCD, æqualis est AD ipsi BC. Eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC; quare & AD ipsi EF æqualis erit: & communis DE; tota igitur AE toti DF est æqualis, est autem, & AB æqualis DC. Ergo duæ EA, AB duabus FD, DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori; basis igitur EB basi FC est æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC (1) cōe auferatur DGE. Reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EG CF est æquale. Commune apponatur GBC triangulum. Ergo totum parallelogrammum

(1) 4. hujus.

mum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogrāma igitur in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 26. Propositio 36. Parallelogramma in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

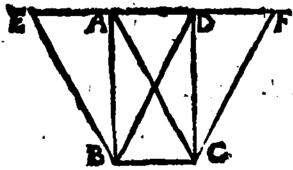


Sint parallelogrāma ABCD, EFGH in æqualibus basibus BC, FG, & in eisdem parallelis AH, BG constituta. dico parallelogrāmum ABCD parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE, CH: & quoniā æqualis est BC ipsi FG, & ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis; suntq; parallelæ, & ipsas conjungunt BE, CH. Quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt (1) ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD; basim enim eandem habet BC, & in eisdem parallelis BC, AD constituitur (2) Simili ratione, & EFGH parallelogram-

(1) 33. hujus. (2) Ex antecedente.

grammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. Ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 27. Propositio 37. Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.



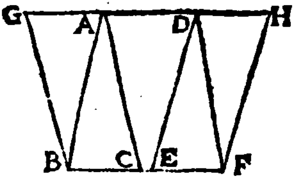
Sint triangula ABC, DBC in eadem basi BC, & in eisdem parallelis AD, BC constituta, dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, per C vero ipsi BD parallela CF: parallelogrammũ (1) igitur est utrumq; ipsorum EBCA, DBCF, & parallelogrammum EBCA est æquale parallelogrammo DBCF, etenim in eadem sunt basi BC, & in eisdem parallelis BC, EF, (2) estq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipsum

(1) 31. hujus. (2) 35. hujus.

sum bifariam secet;(3) parallelogrammi vero DB CF dimidium triangulum DBC; diameter .n. DC ipsum bifariam secat. Quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt (4) Ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur in eadē basi, & in eisdem parallelis cōstituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

(3) 34. hujus. (4) 7. com.not.

Theorema 28. Propositio 38. Triangula in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint triangula ABC,DEF in æqualibus basibus,BC,EF,& in eisdem parallelis BF,AD cōstituta. Dico ABC triangulum triãgulo DEF æquale esse. producatur enim AD ex utraque parte in G,H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG (1) per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorū GBCA,DEFH. Atq; est parallelogrammum GBCA æqua-

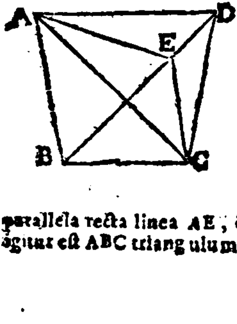
(1) 31. hujus.

æquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus .n. sunt basibus BC,EF,& in eisdem BF,GH parallelis. (2) Parallelogrami vero GBCA dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat (3) Et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF, diameter enim DF ipsum secat bifariam; quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt. (4) Ergo ABC triangulum triangulo DEF est æquale. Triangula igitur in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

---

(2) 35. hujus. (3) 34. hujus. (4) 7.com. not.

Theorema 29. Propositio 39. Triangula æqualia in eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

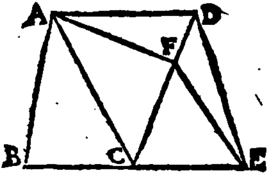


Sint æqualia triangula ABC, DBC in eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. Dico, & in eisdem parallelis esse. Iungatur .n. AD. Dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC jungatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC. in eadem

.n.

.n. est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. Sed ABC triangulum triangulo DBC est æquale. Ergo, & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. Non igitur AE ipsi BC parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD. ergo AD ipsi BC est parallela. Triangula igitur æqualia in eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 30. Propositio 40. Triangula æqualia in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

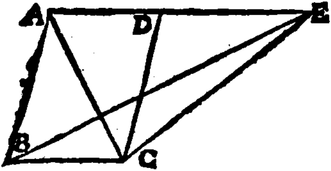


Sint æqualia triangula ABC, CDE in æqualibus basibus BC, CE constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. conjungatur enim AD, dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF, & FE jungatur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale, cum in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis BE, AF constituantur (1) sed triangulum ABC æqua-

(1) 38. hujus.

æquale est triangulo DCE, ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. Similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BF parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

Theorema 31. Propositio 41. Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemquè sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eãdem BC, & in eisdem sint parallelis BC, AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Iungatur .n. AC. triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale; namque in eadem basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis constituitur. (1) Sed ABCD parallelogrammum

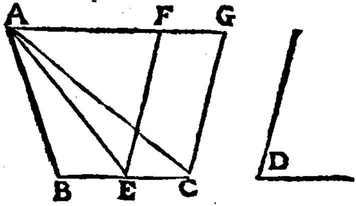
(1) 37. hujus.

mum duplum est trianguli ABC, cum diameter AC ipsum bifariam secet (2) Quare, & ipsius EBC trianguli duplum erit Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli, quod demonstrare oportebat.

(2) 34. hujus.

Problema 11. *Propositio* 42. *Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.*

SIt datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. Secetur BC bifariam

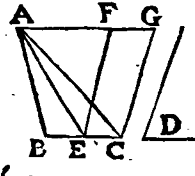


in E, (1) & juncta AE, ad rectam lineã EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus CEF æqualis

D

(1) 10. hujus.

lis ipsi D. (2) & per A quidem ipsi BC parallela, ducatur AG: (3) per C verò ipsi FE ducatur parallela, CG. parallelogrammum igitur est FECG. Et quoniam BE est æqualis EC, erit, & ABE triangulum triangulo AEC æquale; in æqualibus .n. sunt basibus BE, EC, & in eisdem BC, AG parallelis.



(4) Ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplū. Est autem, & parallelogrammum FECG duplum trianguli AEC, basim .n. eandem habet, & in eisdem est parallelis: (5) æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetq; CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

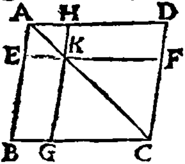
(2) 23. hujus. (3) 31. hujus. (4) 38. hujus (5) 41. hujus.

Theorema 32. Propositio 43. Omnis parallelogrammi spatij, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, & circa ipsam AC parallelogramma quidem sint EH, FG, quæ verò supplementa dicuntur BK, KD.

Di-

Dico BK supplementum suplemẽto KD æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus



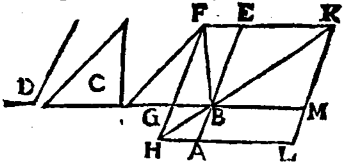
diameter AC, æquale est ABC triangulum triangulo ADC. (1) Rursus quoniam EKHA parallelogrammum est, cujus diameter AK, triãgulum AEK triãgulo AHK æquale erit. Eadem ratione, & triangulum KGC triangulo KFC est æquale. Cum igitur triangulum quidẽ AEK æquale sit triangulo AHK: triangulum verò KGC ipsi KFC; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC æquale triangulo AHK una cum KFC triangulo. Est autem, & totum triangulum ABC æquale toti ADC. reliquum igitur BK supplementum reliquo supplemento KD est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatij, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum suplementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare:

---

(1) 34. hujus.

Problema 13. Propositio 44. Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum verò triangulum C: & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Cõstituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG, in angulo EBG, (1) qui est æqualis D, & ponatur BE in directum ipsi AB, producaturq; FG, ad H: & per A alterutri ipsarum

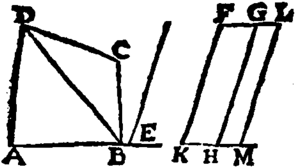


BG, EF parallela ducatur AH, (2) & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli AHF, HFE duobus rectis æquales sunt. (3) Quare BHG, GFE duobus rectis sunt minores, quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt inter se. (4) Ergo HB, FE productæ convenient. producantur & conveniant in K; perque K alterutri ipsarum EA, FH parallela ducatur KL, (5) & HA, GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem sunt AG, ME; ea vero, quæ supplementa dicuntur, LB, BF: ergo LB ipsi BF est æquale. (6) Sed, & BF æquale est triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. Et quoniam GBE angulus æqualis est angulo ABM, (7) sed & æqualis angulo D,

(1) 42. hujus (2) 31. hujus. (3) 29. hujus. (4) 5. post. (5) 31. hujus. (6) Ex antecedẽte. (7) 15. hujus.

D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

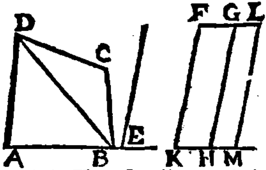
Problema 13. Propositio 45. Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. Itaq; oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali, conjungãtur enim DB, & constituatur tria ngulo ADB æquale parallelogrammum FH, in angulo HKF. (1) qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM. (2) qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utriq; ipsorum HKF, GHM, erit, & HKF angulo GHM æqualis; communis apponatur KHG. anguli igitur FKM, KHG angulis KHG, GHM æquales sunt. Sed FKH, KHG sũt æquales duobus rectis (3) Ergo, & KHG, GHM duo-

(1) 42. hujus. (2) Ex antecedente. (3) 29. hujus.

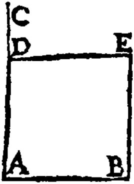
duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H, duæ



rectæ lineæ KH, HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis ęquales efficiūt. In directū igitur est KH ipsi HM. (4) Et quoniam in parallelas KM, FL recta linea HG incidit, alterni anguli MHG, HGF æquales sunt. (5) Communis apponatur HGL. anguli igitur MHG, HGL angulis HGF, HGL sunt æquales. At anguli MHG, HGL æquales sunt duobus rectis (6) Quare, & anguli HGF, HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG, & æqualis est, & parallela; sed, & HG ipsi ML; erit KF ipsi ML, & æqualis, & parallela, (7) ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM, FL. Ergo, & KM, FL æquales, & parallelæ sunt. (8) Parallelogrammum igitur est KFLM, Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

(4) 14. hujus. (5) 29. hujus (6) 34. hujus.
(7) 30 hujus. (8) 33. hujus.

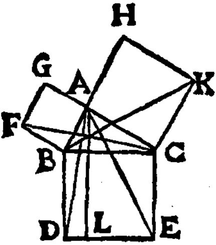
Problema 14. Propositio 46. A data recta linea quadratum describere.



Sit data recta linea AB, oportet ab ipsa AB quadratum describere. Ducatur rectæ lineæ AB à puncto in ea dato A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis ponatur AD; perque pũctum D ducatur DE ipsi AB parallela, & per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB, & AB quidem est æqualis DE, AD verò ipsi BE: Sed, & BA ipsi AD est æqualis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD, ADE duobus rectis sunt æquales. (1) Rectus autem est BAD. Ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum verò spatiorum, quæ ex opposito sunt latera, & anguli inter se æqualia sunt (2) Rectus igitur est uterq; oppositorum ABE, BED angulorum: & ob id rectangulum est ADEB. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atq; est à recta linea AB descriptum, quod ipsum facere oportebat.

(1) 29. hujus. (2) 34. hujus.

Theorema 33. Propositio 47. In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratū descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quę ab ipsis AB, AC describūtur. Describatur enim à BC quidē quadratū BDEC, ab ipsis verò BA, AC quadrata GB, HC, perq; A alterutri ipsarum BD, CE parallela ducatur AL; & AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC, BAG rectus est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC, AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt. In directum igitur est CA ipsi AG. (1) Eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. Et quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA, rectus .n. uterque est, & communis apponatur ABC: totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis. Quod cum duæ AB, BD duabus FB, BC æquales sint, altera al-

(1) 14. hujus.

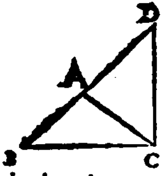
alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit, & basis AD basi FC æqualis, & ABD triangulum triangulo FBC æquale (2) estque trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim .n. eandem habent BD, & in eisdem BD, AL sunt parallelis (3) trianguli verò FBC duplum est GB quadratum ; rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB , GC. Quæ autem æqualium dupla, inter se æqualia sunt . Ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. Similiter junctis AE, BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC . Totum igitur BDC quadratum duobus quadratis GB , HC est æquale . Et describitur quidem BDEC quadratum à recta linea BC; quadrata verò GB, HC ab ipsis BA, AC. quadratū igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis , quæ describuntur à lateribus BA, AC . Ergo in rectangulis triangulis quadratum , quod describitur à latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

(2) 4. hujus, (3) 41. hujus.

Theorema 34. Propositio 48. Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus triāguli lateribus contentus rectus erit .

TRianguli enim ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum, æquale sit quadratis quæ

quæ à reliquis trianguli lateribus BA, AC describuntur. Dico angulum BAC rectum esse. Ducatur.n. à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, (1) ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit, & quadratum, quod describitur ex DA, æquale quadrato, quod ex



AB, commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quę ex DA, AC æqualia sunt quadratis, quæ ex BA, AC describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex DA, AC, æquale est, quod ex DC quadratum; rectus.n. angulus est DAC: quadratis verò, quæ ex BA, AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC. quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. Ergo, & latus DC lateri CB est æquale. Et quoniam DA est æqualis AB. communis autem AC, duæ DA, AC duabus BA, AC æquales sunt, & basis DC est æqualis basi CB. angulus igitur DAC angulo BAC est æqualis (2) Rectus autem est DAC. ergo, & BAC rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

(1) 11.hujus. (2) 8.hujus.

Finis Libri Primi.

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

Ex traditione Federici Commandini.

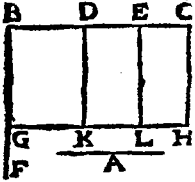
DIFFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.
2. Omnis parallelogrammi spatij unumquodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis Gnomon vocetur.

Theorema 1. Propositio 1. Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcumque in punctis D, E. dico rectangulum rectis lineis

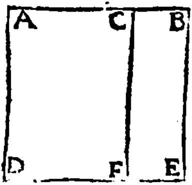
neis A, BC contentum æquale esse rectangulo, quod continetur A, BD, & rectangulo, quod A, DE, & ei, quod A, EC continetur. Ducatur .n. à puncto B, ipsi BC ad rectos angulos BF: (1) atque ipsi A ponatur æqualis BG: (2) & per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH: (3) per D,E,C verò ducantur DK, EL,CH parallelæ ipsi BG rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK, DL, EH: atque est BH quidem, quod A, BC continetur; etenim continetur GB, BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK, est quod continetur ipsis A,BD; continetur .n. GB, BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL, est quod continetur A,DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectãgulum EH, est quod A, EC continetur, ergo rectangulum contentum A, BC est æquale rectangulo contento A, BD, & contento A, DE, & adhuc contento A, EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est equale eis, quæ recta linea insecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.



Theo-

(1) 11.primi. (2) 2.primi. (3) 31.primi.

Theorema 2. Propositio 2. Si recta linea secta fuerit utcumque; rectangula, quæ tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.



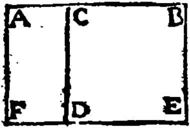
Recta enim linea AB secta sit utcumque in puncto C dico rectangulum, quod AB, BC continetur, una cum contento BA, AC æquale esse quadrato, quod fit ex AD. describatur n. ex AB quadratum ADEB, (1) & per C ducatur alterutri ipsarum AD, BE parallela CF (2) æquale igitur est AE rectangulis AF, CE atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum BA, AC; etenim DA, AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis, & rectangulum CE continetur AB. BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum BAC una cum rectangulo ABC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit, rectangula, quæ tota, & singulis partibus continētur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato. Quod demonstrare oportebat.

---

(1) 46. primi. (2) 31. primi.

Theo-

Theorema 3. Propositio 3. Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum aquale est, & rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à predicta parte fit, quadrato.

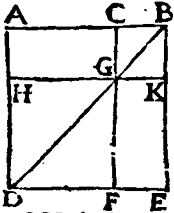


Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C. Dico ABC rectangulū æquale esse rectangulo ACB unà cum quadrato, quod fit ex BC. describatur .n. ex BC quadratum CDEB (1) producaturque ED in F; & per A alterutri ipsarum CD, BE parallela ducatur AF (2) æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD, CE: & est AE quidem rectangulum contentum AB, BC; etenim AB, BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum verò AD est quod continetur AC, CB, cum DC ipsi BC sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum ABC est æquale rectangulo ACB una cum quadrato, quod ex BC. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum, æquale est rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

(1) 46. primi. (2) 31 primi.

Theo-

Theorema 4. Propositio 4. Si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur, rectangulo.

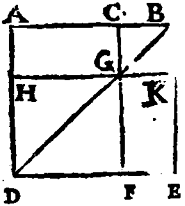


Recta .n. linea AB secta, sit utcumque in C. dico quadratum, quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC, CB, & ei rectãgulo, quod bis AC, CB continetur. describatur .n. ex AB quadratum ADEB; (1) jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD, BE parallela ducatur CGF; (2) per G vero alterutri ipsarum AB, DE ducatur parallela HK. Et quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori, & opposito ADB æqualis: (3) angulus autem ADB est æqualis angulo ABD, quod, & latus BA æquale est lateri AD (4) quare CGB angulus angulo GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale. (5) Sed, & latus CB æquale est lateri GK, & CG ipsi BK. (6) ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam .n. CG est parallela ipsi BK, & in ipsas incidit GB; anguli KBC, GCB duobus rectis

sunt

(1) 46 primi. (2) 31. primi. (3) 29. primi. (4) 5. primi. (5) 6. primi (6) 34. primi.

sunt æquales. (7) rectus autem est KBC angulus. ergo, & rectus GCB, & anguli oppositi CGK, GKB



recti erunt. (8) rectangulum igitur est CGKB. Sed ostensum fuit, & æquilaterum esse. quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione, & HF est quadratum, quod fit ex HG hoc est ex AC. ergo HF, CK ex ipsis AC, CB quadrata sunt, & quoniam rectangulum AG est æquale rectangulo GE (9) atque est AG, quod AC, CB continetur, est .n. GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei, quod continetur AC,CB, quare rectangula AG, GE æqualia sunt ei, quod bis AC, CB continetur. Sunt autem, & HF, CK quadrata ex AC, CB. quatuor igitur HF, CK, AG, GE, & quadratis ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur rectangulo sunt æqualia, sed HF,CK, AG, GE sunt totum ADEB quadratum, quod fit ex AB quadratum igitur ex AB æquale est, & quadratis ex AC, CB, & ei, quod bis AC, CB cōtinetur rectangulo; quare si recta linea utcunque secta fuerit, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo, quod bis partibus continetur, atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex AB æquale esse, & qua-

(7) 29. primi. (8) 34. primi. (9) 43. primi.

& quadratis ex AC, CB, & ei rectangulo, quod bis AC, CB. continetur: quoniam .n. in eadem figura æqualis est BA ipsi AD; & angulus ABD angulo ADB æqualis erit: (10) & cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis sint æquales; (11) erunt trianguli ABD tres anguli ABD, ADB, BAD æquales duobus rectis. rectus autem est angulus BAD, ergo reliqui ABD, ADB sunt uni recto æquales, & sunt æquales inter se se. uterque igitur ipsorum ABD, ADB est recti dimidius. Sed rectus est BCG, æqualis namque est angulo opposito, qui ad A (12.) reliquus igitur CGB dimidius est recti: ac propterea CGB angulus angulo CBG est æqualis, & latus BC æquale lateri CG. (13). Sed CB est æqualis GK, & CG ipsi BK. (14) æquilaterum igitur est CK, & cum habeat rectum angulum CBK, etiam est quadratum; quod quidem fit ex CB. eadem ratione, & HF quadratum est, & æquale quadrato, quod ex AC. quadrata igitur sūt CK, HF, & quadratis ex AC, CB æqualia. Rursus quoniam rectangulum AG est æquale ipsi GE (15) atque est AG id quod AC, CB continetur, est enim CG ipsi CB æqualis: erit & GE æquale contento AC, CB. quare AG, GE æqualia sunt ei, quod bis AC, CB continetur. Sunt autem, & CK, HF æqualia quadratis ex AC, CB, ergo CK, HF, AG, GE æqualia sunt, & quadratis ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur. Sed CK. HF. & AG, GE sunt totum AE, quod fit ex AB quadratum. quadratum igitur ex AB æqua-

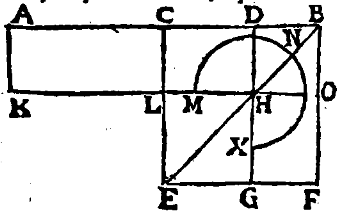
(10) 5. primi. (11) 32. primi. (12) 29. primi. (13) 6. primi. (14) 34. primi. (15) 43. primi.

le est, quadratisquè ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur rectangulo: Quod ostēdere oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spatijs parallelogrāma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

Theorema 5. Propositio 5. Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato.



Recta .n. linea quædam AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum AD, DB unà cum quadrato, quod fit ex CD æquale esse ei, quod ex CB, quadrato. Describatur .n. ex BC quadratum CEFB: (1) jungaturque BE; & per D quidem alterutri ipsarum CE, BF parallela ducatur DHG; (2) per H verò ducatur KLO parallela alterutri ipsarum CB, EF, & rursus per A ducatur alterutri CL, BO parallela AK. & quoniam CH supplementum æquale est supplemento HF, (3) com-

(1) 46. primi. (2) 31. primi (3) 43. primi.

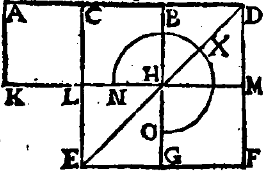
commune apponatur DO; totum igitur CO toti DF est æquale, sed CO est æquale AL; quoniam & AC ipsi CB (4) ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD, DL æquale erit. Sed AH quidẽ est quod AD DB cõtinetur etenim DH ipsi DB est æqualis; FD, DL verò est gnomõ MNX. gnomon igitur MNX æqualis est ei, quod AD, DB continetur, commune apponatur LG, æquale sc.licet quadrato, quod ex CD. ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur AD, DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. Sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB, ergo rectangulum ADB una cum quadrato, quod ex CD æquale est ei, quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale esse ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat.

(4) 36. primi.

Theorema 6. Propositio 6. Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adjiciatur quadam recta linea; rectangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum, una cum quadrato dimidia, æquale est quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, & adjecta constat tãquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quædam AB secetur bifariam in puncto C, adjiciaturque ipsi in rectum BD.

Dico rectangulum ADB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei, quod fit ex CD quadrato. Describatur .n. ex CD quadratum CEFD, (1) & jungatur DE; perque B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur BHG: (2) & per H ducatur KLM parallela alterutri ipsarum

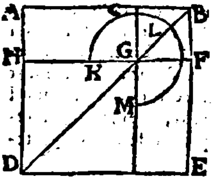


AD, EF; & adhuc per A alterutri CL, DM parallela AK. Itaque quoniam AC est æqualis CB; erit., & rectangulum AL rectangulo CH æquale. (3) Sed CH æquale est HF. (4) Ergo, & AL ipsi HF æquale erit. Commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO est æquale: atque est AM, quod AD, DB continetur. etenim DM est æqualis DB Ergo, & gnomon NXO æqualis est rectangulo ADB. Rursus commune apponatur LG, æquale scilicet quadrato, quod ex CB. rectangulum igitur ADB unà cum quadrato, quod ex BC æquale est gnomoni NXO & ipsi LG. Sed gnomon NXO, & LG totum sunt CEFD quadratum; quod quidem fit ex CD. Ergo rectangulum ADB una cum quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in rectum quædam recta linea; rectan-

(1) 46. primi. (2) 31. primi. (3) 36. primi. (4) 43. primi.

ctangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum unà cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tamquam ab una linea describitur. quod oportebat demonstrare.

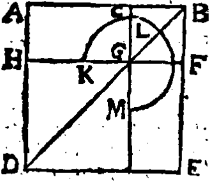
Theorema 7. Propositio 7. Si recta linea utcumque secta fuerit, quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit quadrato.



Recta enim linea quædam AB secta sit utcumque in puncto C. Dico quadrata ex AB, BC æqualia esse, & rectangulo, quod bis AB, BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Describatur enim ex AB quadratum ADEB (1) & figura construatur: Itaque quoniam AG rectangulum æquale est rectangulo GE, (2) commune apponatur CF, quare totum AF toti CE est æquale; rectangula igitur AF, CE dupla sunt rectanguli AF. Sed AF, CE sunt KLM gnomon, & quadratum CF, ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id quod bis AB,

(1) 46. primi. (2) 43. primi.

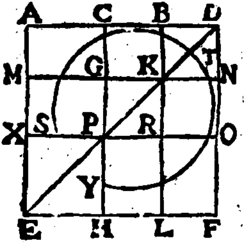
BC continetur duplum ipsius AF; etenim BF est æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF



æqualia sunt, ei quod bis AB, BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, & quadrata BG, GD æqualia sunt ei, quod bis AB, BC continetur, & quadrato ex AC. at gnomō KLM, & quadrata BG, GD totum sunt ADEB, & CF; quæ sunt ex AB, BC quadrata. quadrata igitur ex AB, BC æqualia sunt rectangulo, quod bis AB, BC continetur unà cū eo, quod fit ex AC quedrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt rectanguloque, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

Theorema 8. Propositio 8. Si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tamquam ex una linea describitur.

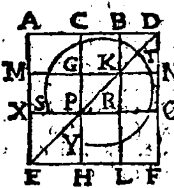
Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB, BC contentum, una cum quadrato, quod ex AC, æquale esse quadrato, quod ex AB, BC. tamquam ex una linea describitur. Producatur .n. recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD. atque est CB ipsi GK æqualis; BD verò ipsi KN: erit, & GK æqualis KN (1) eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis, & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum quidem CK rectangulo



KD (2) rectangulum verò GR ipsi RN æquale. Sed CK est æquale RN, (3) supplementa .n. sunt parallelogrammi CO. Ergo & KD æquale est GR, & quatuor rectangula DK, KC. GR, RN inter se æqualia: ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. Rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB verò ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autē & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectāgulum PL ipsi RF æquale erit. Sed MP est æquale PL; (4) supplementa enim sunt ML parallelogrammi. Quare, & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur

(1) 34. primi. (2) 36. primi. (3) 43. primi.
(4) 43. primi.

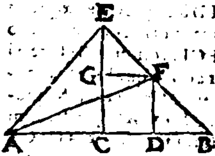
AG, MB, PL, RE inter se æqualia sunt: ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est, & quatuor CK, KD, GR, RN quadrupla esse CK. Quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. Et quoniam AK est quod AB, BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater AB, BC, ipsius AK quadruplum. At demonstratus est gnomon STY quadruplus



AK. Quod igitur quater AB, BC continetur æquale est gnomoni STY. Commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est æquale; Ergo quod quater AB, BC continetur unà cum quadrato ex AC, æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. Sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. Rectangulum igitur quater AB, BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB, BC tamquam ex vna linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater tota, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato, quod ex tota, & dicta parte tamquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

Theo-

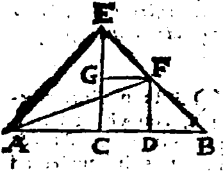
Theorema 9. Propositio 9. Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur.



Recta .n. linea quædam AB secta sit in partes æquales, ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD, DB, quadratorum ex AC, CD dupla esse. Ducatur .n. à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, (1) & utrique ipsarum AC, CB æqualis ponatur, junganturque EA, EB, ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur DF; (2) per F verò ipsi AB parallela FG, & AF jungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE; erit, & angulus EAC angulo AEC æqualis. (3) Et cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto æquales erunt. (4) & sunt æquales inter se se; uterque igitur ipsorum AEC, EAC recti est dimidius. eadem ratione, & recti dimidius est uterque ipsorum CEB, EBC, ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidius est recti, re- Ctus

(1) 11. primi. (2) 31. primi. (3) 5. primi. (4) 32. primi.

ctus autem EGF; æqualis .n. est interiori, & opposito ECB; (5) erit, & reliquus EFG recti dimidius: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG, quare, & latus FG lateri GE est æquale. (6) Rursus quoniã angulus ad B dimidius est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori, & opposito ECB: reliquus BFD recti

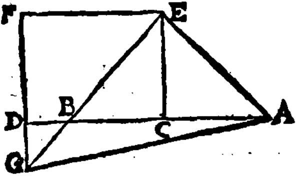


erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoque latus DF lateri DB æquale, & quoniam AC est æqualis CE, erit, & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE quadrata igitur ex AC, CE dupla sunt quadrati ex AC quadratis autem ex AC, CE æquale est quadratum ex EA, si quidem rectus est angulus ACE (7) ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF; & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG, GF dupla sũt quadrati ex GF: at quadratis ex EG, GF æquale est quod ex EF quadratum. Ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum, ergo quadrata ex AE, EF dupla sunt quadratorum ex AC, CD. quadratis verò ex AE, EF æquale est ex AF qua-

(5) 29. primi. (6) 6. primi. (7) 47. primi.

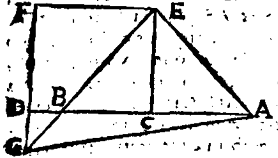
quadratum, quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD est duplum. Sed quadrato ex AF ęqualia sunt ex AD, DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD, DF quadráta dupla sunt quadratorum ex AC, CD, est autem DF ipsi DB æqualis quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur. quod ostendere oportebat.

Theorema 10. Propositio 10. Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in rectum quadam recta linea adjiciatur, quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidia, & quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.



Recta enim linea AB secetur bifariam in C, & ipsi in rectum adjiciatur quædam recta linea BD. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla esse. ducatur enim à puncto

cto C ipsi AB ad rectos angulos CE, (1) & utrique ipsarum AC, CB æqualis ponatur; junganturq; AE, EB, & per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; (2) per D verò ducatur DF parallela ipsi CE. & quoniam in parallelas, EC, FD, recta quædam



linea EF incidit, anguli CEF, EFD æquales sunt duobus rectis. (3) anguli igitur FEB, EFD duobus rectis sunt minores, quæ autem à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producuntur, conveniũt inter sese. (4) Ergo EB, FD productæ ad partes BD convenient; producantur, & conveniant in puncto G, & AG jungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis erit: (5) atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum EAC, AEC est recti dimidius. eadem ratione, & recti dimidius est uterque CEB, EBC. ergo AEB est rectus, & quoniam EBC est dimidius recti; erit, & recti dimidius DBG; (6) cum sit ad verticem, Sed, & BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. (7) reliquus igitur DGB dimidius est recti. & ob

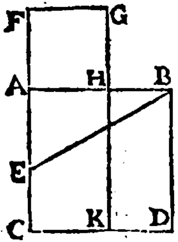
(1) 11. primi. (2) 31. primi. (3) 29. primi.
(4) Ex demonstratis ad 29. primi. (5) 5. primi.
(6) 15. primi. (7) 29. primi.

ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD æquale lateri DG (8) rursus quoniam EGF est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidius, & æqualis ipsi EGF. quare & latus GF lateri EF est æquale. & cum EC sit æqualis CA; & quadratum ex EC æquale est ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC, CA dupla sunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC, CA æquale est quadratum ex EA. quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniā GF est æqualis FE, æquale est & ex GF quadratum quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF, FE, æquale est, quod ex EG quadratum, ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est. quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE, EG quadrata quadratorum ex AC, CD sunt dupla. quadratis verò ex AE, EG æquale est quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG æqualia sunt ex AD, DG quadrata. ergo quadrata ex AD, DG sunt dupla quadratorum ex AC, CD. Sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiūt utraq; qua-

(8) 5. primi.

quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat tamquam ab una linea describitur. quod ostendere oportebat.

Problema 1. Propositio 11. Datam rectam lineam secare ita ut, quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.



Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, ut quod tota, & altera parte contineatur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur .n. ex AB quadratum ABDC: seceturque AC bifariam in E, & BE jungatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA: & GH ad K producatur. Dico AB sectam esse in H, ita ut ABH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam .n. recta linea AC bifariam secatur in E; adjiciturq; ipsi in rectum AF, rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale erit quadrato ex EF. (1) Sed EF est æqualis EB rectangulum igitur CFA una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadra-

(1) 6. hujus.

drato. quadrato autem ex EB æqualia sunt quadrata ex BA, AE (2) etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA, AE. commune auferatur, quod ex AE quadratum. reliquum igitur rectangulum CFA æquale est quadrato ex AB: est autem CFA quidem rectangulum FK. si quidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK, ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum ABH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut ABH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

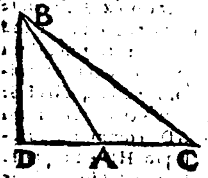
(2) 47. primi.

Theorema 12. Propositio 12. In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC. obtusum angulum habens BAC: & ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. (1) Dico quadra-

(1) 12. primi.

dratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA, AC, rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Quoniam

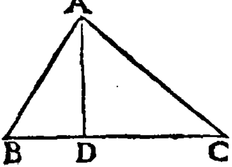


enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, & quadratis ex CA, AD, & ei quod bis CA, AD continetur rectangulo. (2) Commune apponatur ex DB quadratum. Quadrata igitur ex CD, DB æqualia sunt, & quadratis ex CA, AD, DB, & rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Sed quadratis ex CD, DB æquale est quadratum ex CB (3) Rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. Quadratis verò ex AD, DB æquale est quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA, AB, & rectangulo bis CA, AD contento. Ergo quadratum ex CB majus est, quàm quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis CA, AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, majus est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

Theo-

(2) 4. hujus. (3. 47. primi.

Theorema 12. Propositio 13. In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.



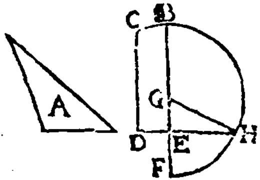
Sit acutangulum triangulum ABC acutum habens angulum ad B: & ducatur à puncto A, ad BC perpendicularis AD. (1) Dico quadratum, quod fit ex AC minus esse, quam quadrata, quæ ex CB, BA, rectangulo, quod bis CB, BD continetur. Quoniam enim recta linea CB secta est utcumque in D, erunt quadrata ex CB, BD æqualia & rectangulo, quod bis CB, BD continetur, & quadrato ex DC. (2) commune apponatur, quod ex AD quadratum. Quadrata igitur ex CB, BD, DA æqualia sunt, & rectangulo bis CD, BD contento, & quadratis ex AD, DC. Sed quadratis ex BD, DA æquale est quod ex AB quadratum; (3) rectus enim angulus est qui ad D. quadratis verò ex AD, DC æquale est quadratum ex AC. quadra-

F ta

(1) 12. primi. (2) 7. hujus. (3) 47. primi.

ta igitur ex CB, BA sunt æqualia quadrato ex AC, & ei, quod bis CB, BD continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo, quod bis CB, BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.

Problema 2. Propositio 14. Dato rectilineo æquale quadratum constituere.



Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. constituatur rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. (1) Si igitur BE est æqualis ED factum jam erit, quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum cōstitu-

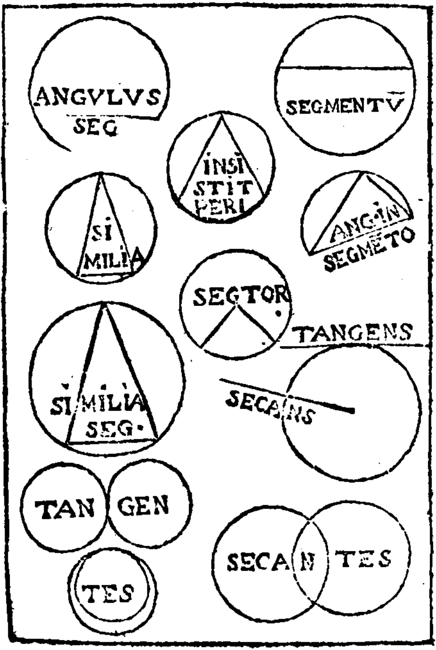
(1) 45. primi.

ſtitutum eſt BD: ſin minus, una ipſarum BE, ED major eſt. ſit BE major, & producatur ad F, ponaturque ipſi ED æqualis EF. deinde ſecta FB bifariam in G centro quidem G, intervallo autem una ipſarum GB, GF ſemicirculus deſcribatur BHF; producaturq; DE in H, & GH jungantur. Quoniam igitur recta linea BF ſecta eſt in partes æquales ad G, & inæquales ad E; erit rectangulum BEF unà cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. (1) eſt autem GF æqualis GH. Rectangulum igitur BEF una cum quadrato ex GE æquale eſt quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia ſunt ex HE, EG quadrata. Ergo rectangulum BEF una cum quadrato ex EG æquale eſt quadratis ex HE, EG. Commune auferatur ex EG quadratum. Reliquum igitur rectangulum BEF eſt æquale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF eſt ipſum BD parallelogrammum, quoniam EF eſt æqualis ED. Ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH eſt æquale. Parallelogrammum autem BD eſt æquale rectilineo A. Rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſa EH deſcribitur. Quod facere oportebat.

Finis Libri Secundi.

Elli-

(1) 5. hujus.


ANGVLVS
SEG
SEGMENTV
INSI
STIT
PERI
SI
MILIA
ANG·IN
SEGMETO
SEGTOR
TANGENS
SI MILIA
SEG·
SECANS
TAN
GEN
TES
SECA N
TES

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER TERTIUS.

Ex traditione Federici Commandini

DIFFINITIONES.

1. AEquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris sunt æquales.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipsum non secat.
3. *Circuli contingere sese dicuntur, qui contingentes se ipsos non secant.*
4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.
5. Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam major perpendicularis cadit.
6. Portio circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

 For-

7. Portionis autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.

8. In portione angulus est, quando in circumferentia portionis sumitur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ ejus, quæ basis est portionis, rectæ lineæ ducuntur: angulus vero ductis lineis sit contentus.

9. Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

10. Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumpta.

11. Similes circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

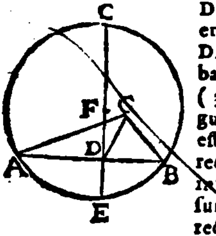
PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum invenire.

SIt datus circulus ABC. oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcumque, & in puncto D bifariam secetur. (1) à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ducta DC (2) in E producatur; & secetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli ABC centrum

(1.) 10. primi. (2.) 11. primi.

trum esse, Non .n: sed, si fieri potest, sit G, & GA, GD, GB junganrur, itaque quoniam AD est æqualis



DB, communis autem DG, erunt duæ AD, DG duabus GD, DB, æquales altera alteri: & basis GA æqualis est basi GB (3) sunt .n. ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB est æqualis. (4) Cum autem recta linea super rectam lineã insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. (5) Ergo angulus GDB est rectus. Sed, & rectus FDB. æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrũ. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. quod facere oportebat

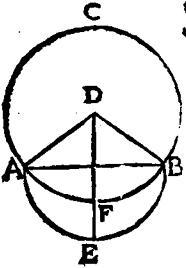
---

(3) Diff. 15. primi. (4) 8. primi. (5) Diff. 10. pr.

COROLLARIUM.

Ex hoc pespicuum est, si in circulo quædam recta linea rectam lineam quandam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante circuli centrum inesse.

Theorema 1. Propositio 2. Si in circumferentia circuli, duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

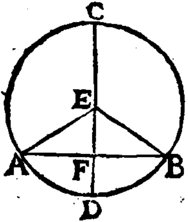


Sit circulus ABC, & in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A, B. dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Non n: sed, si fieri potest, cadat extra, ut AEB, & sumpto circuli ABC centro, quod sit D, jungantur DA, DB, & producatur DF in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB; erit & angulus DAE angulo DBE æqualis. (2) & quoniam trianguli DAE unum latus AEB protenditur, angulus DFB angulo DAE major erit. (3) angulus autem DAE æqualis est angulo DBE, ergo DEB, angulus angulo DBE est major. Sed majori angulo majus latus subtenditur. (4) major, igitur est DB ipsa DE, est aũt DB æqualis DF. Ergo DF est major DE, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto A ad B ducta recta linea extra circulum cadet. Similiter ostendemus neque in

(1) Exanteced. (2.) 5. primi. (3.) 16. primi (4.) 18. primi.

in ipsam cadere circumferentiam. Ergo extra cadat necesse est. Si igitur in circumferentiam circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet. quod oportebat demonstrare.

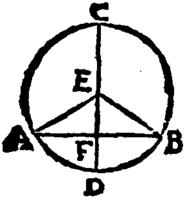
Theorema 2. Propositio 3. Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.



Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. Dico & ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur .n. circuli ABC centrum, (1) quod sit E, & AE, EB jungantur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis, ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis erit. Cum autem recta linea super rectam insistens, angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium an-

(1) 1. hujus.

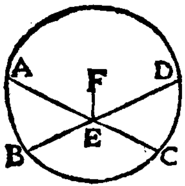
angulorum. (2) uterque igitur AFE, BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Sed CD secet AB ad rectos angulos. Dico, & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem .n. constructis, quoniam EA, quæ ex centro, est æqualis EB, & angulus EAF angulo EBF æqualis erit. (3) est autem, & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF, EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune, scilicet utrisque quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. (4) Atq; erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. quod oportebat demonstrare.



Theo-

(2) Diff. 10. primi. (3) 5. primi. (4) 26. primi.

Theorema 3. Propositio 4. Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt.

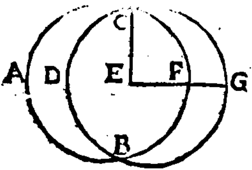


Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC, BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum, Dico eas se se bifariam non secare. Si .n. fieri potest, secent se se bifariam, ita ut AE sit æqualis EC, & BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, (1) quod sit F, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus, rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam secabit. (2) rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus, & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur AC, BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.

Theo-

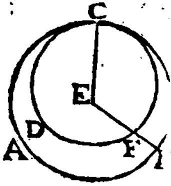
1) 1. hujus. (2) Ex antecedente.

Theorema 4. Propositio 5. Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.



Duo enim circuli se invicem secent ABC, CDG in punctis B, C. Dico ipsorum idẽ centrum non esse. Si .n. fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcumque ducatur; Et quoniam E centrum est circuli ABC erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC, CDG. quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

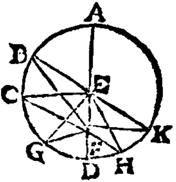
Theorema 5. Propositio 6. Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.



Duo .n. circuli ABC, CDF contingant se se intra in puncto C. Dico ipsorum non idem centrum. si enim fieri potest, sit E, jungaturque EC, & EFB utcumque ducatur. quoniã igitur E centrum est circuli ABC æqualis est CE ipsi EB: rursus quoniam E centrum est circuli CDF.

CDF, erit CE æqualis FE. ostensa autem est CE æqualis EB, ergo, & EF ipsi EB est æqualis, minor majori quod fieri non potest. non igitur E punctum centrum est circulorum ABC, CDF. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. quod demonstrare oportebat.

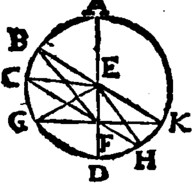
Theorema 6. Propositio 7. Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ; maxima quidem erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.



SIt circulus ABCD, cujus diameter AD: & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F intra circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB, FC, FG. Dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum verò FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur.n. BE, CE, GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora; (1) erunt BE, EF ma-

(1.) 20. primi.

majores quàm BF. eſt aũt AE æqualis EB. Ergo BE, EF ipſi AF ſunt æquales. major igitur eſt AF, quàm



FB. rurſus quoniam BE eſt æqualis EC, communis autem FE, duæ BE, EF duabus CE, EF æquales ſunt. Sed BEF angulus major eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt major (2) eadem ratione, & CF major eſt quam FG. rurſus quoniam GF, FE majores ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur EF. Ergo reliqua GF major eſt quam reliqua ED. maxima igitur eſt FA, & FD minima: major verò BF quàm FC, & CF quàm FG major. dico, & à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad utraſque partes minimæ FD. conſtituatur .n. ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH. (3) & FH jungatur. quoniam igitur GE eſt æqualis EH, communis autem EF, duæ GE, EF duabus HE, EF æquales ſunt: & angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis erit. (4) dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat FK. & quoniam FK eſt æqualis FG, eſtque ipſi FG æqualis FH; erit, & FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqua-

(2) 24. primi. (3) 23. primi. (4) 4. primi.

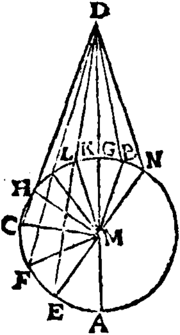
æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Vel hóc modo, jungatur EK, & quoniam GE ipſi EK eſt æqualis, communis autem FE, & baſis GF æqualis baſi FK; erit, & angulus GEF æqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF eſt æqualis: angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipſi GF. Ergo una tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & reliqua, quæ ſequuntur. quod demonſtrare oportebat.

Theorema 7. Propoſitio 8. Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quadam recta linea, quarum una per centrum tranſeat, alia verò utcumque: earum quidem, qua in concavam circumferentiam cadunt, maxima eſt, qua per centrum tranſit; aliarum autem propinquior ei, qua per centrũ, ſemper remotiore major eſt. at earum, qua in curvam circumferentiam cadunt minima eſt, qua inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum verò, quę propinquior minima ſemper remotiore eſt minor. dua autem tantum aquales à puncto in circulum cadunt ad utraſq; partes minima.

Sit circulus ABC, & extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA, DE, DF, DC: ſitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam

eſſe

esse DA, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D, & diametrum AG interjicitur, videlicèt DG: majorem autem DE quam DF, & DF majorem quam DC: earum verò, quæ in curvam circumferentiã HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG semper remotiore esse minorem, hoc est DK minorem, quam DL, & DL minorem quam DH. Sumatur .n. centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME, MF, MC, MH, ML, MK. & quoniam AM est æqualis ME, & communis apponatur MD. ergo AD est æqualis ipsi EM, MD. Sed EM, MD sunt majores quàm ED. (1) ergo & AD quam ED



est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF communis apponatur MD. erunt EM, MD ipsi MF, MD æquales; & angulus EMD major est ãgulo FMD. Basis igitur ED basi FD major erit. (2) Similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major aũt DE quàm DF, & DF quàm DC major, Præterea quoniam MK, KD sunt majores quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quàm reliqua GD major. quare GD minor quam KD, & id.

---

(1) 20. primi. (2) 24. primi.

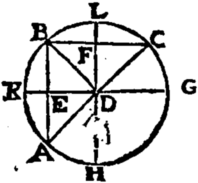
& idcircò GD, minima eſt; & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK, KD, intra conſtituuntur, erunt MK, KD minores ipſi ML LD, (3) quarum MK eſt æqualis ML, reliqua igitur DK minor eſt, quàm reliqua DL. Similiter oſtendemus & DL, quàm DH minorem eſſe. Ergo DG minima eſt; minor verò DK quam DL, & DL minor, quàm DH. Dico etiam duas tantùm æquales à puncto D, in circulum cadere ad utraſq; minimæ partes; conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M, angulo KMD æqualis angulus DMB, (4) & DB jungantur; itaque quoniam MK eſt æqualis MB, communis autem MD, duę KM, MD duabus BM, MD æquales ſunt, altera alteri, & angulus KMD, æqualis angulo BMD, baſis igitur DK baſi DB eſt æqualis. (5) Dico à puncto D, nullã aliam ipſi DB æqualem in circulum cadere, ſi enim fieri poteſt, cadat DN, & quoniam DK eſt æqualis DN, & DK ipſi DB eſt æqualis; erit, & DB æqualis DN, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Vel & aliter. Iungatur MN, & quoniam æqualis eſt KM ipſi MN, communis autem MD; & baſis DK baſi DN æqualis erit, & proptereà angulus KMD æqualis angulo DMN. Sed KMD angulus eſt æqualis angulo BMD; angulus igitur BMD angulo NMD æqualis erit, minor majori quod fieri non poteſt. Quare, non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D, in circulum ABC ad utraſque partes mi-

G ni-

(3) 21.primi. (4) 23.primi. (5) 4.primi.

nimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & reliqua deinceps, quod ostendere oportebat.

Theorema 8. Propositio 9. Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales, punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

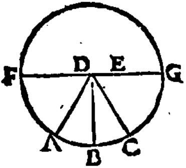


SIt circulus ABC, & intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet DA, DB, DC. Dico punctum D, circuli ABC centrum esse. Iungantur enim AB, BC. secēturq; bifariam in punctis E, F: & junctæ ED, DF, ad puncta G, K, H, L producātur, quoniam igitur AE est æqualis EB, communis autē ED, erunt duæ AE, ED, duabus BE, ED, æquales; & basis DA, est æqualis basi DB, angulus igitur AED, angulo BED æqualis erit, (1) & idcircò uterq; angulorum AED, BED est rectus. (2) Ergo GK bifariam secans AB, & ad angulos rectos secat. & quoniam si in circulo quędam recta linea, rectam lineā quandam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum; (3) erit in GK centrum circuli ABC,

(1) 8. primi. (2) 13. primi. (3) Coroll. 1. hujus.

ABC. Eadem ratione,& in HL centrum est ABC circuli, & nullum aliud commune habent rectæ lineæ GK,HL, nisi punctum D.Ergo D circuli ABC est cẽtrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atq; ab eo in circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit.

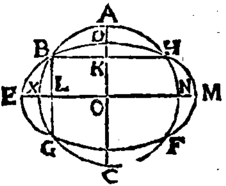
ALITER.



Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D, in circulum ABC cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales DA, DB, CD. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum, non enim; sed si fieri potest, sit E, & juncta DE in FG producatur, ergo FG diameter est ABC circuli, itaq; quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit DG, major autem DC, quàm DB, & DB, quàm DA major. (1) Sed, & æquales, quod fieri non potest, non igitur E centrum est circuli ABC. Similiter ostendemus, neque aliud punctum centrum esse preter ipsum D, ergo D circuli ABC, centrum erit, quod oportebat demonstrare.

(1 (7.hujus.

Theorema 9. Propositio 10. Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

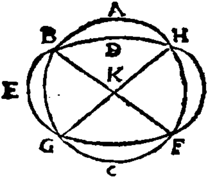


SI enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus pũctis, quã duobus, videlicet in E, G, H, F; & jũctę BG, BH bifariam secentur in K, L, atq; à pũctis K, L ipsis BG, BH ad rectos angulos ductæ KC, LM in puncta A, E producantur. Quoniam igitur in circulo ABC quædam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariã, & ad angulos rectos secat, in ipsa AC circuli ABC erit centrum. (1) Rursus quoniam in eodem circulo ABC, quædam recta linea NX rectam lineam quandam BG bifariam secat, & ad rectos angulos; in ipsa NX centrum erit circuli, ostensum autem est, & in ipsa AC centrum esse, & in nullo alio puncto conveniunt inter se rectæ lineæ AC, NX, præter quàm in O, ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus punctum O, centrum esse circuli DEF, ergo duorum circulorum se se secãtium ABC, DEF, idem erit centrum O, quod fieri non potest. (2) non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus.

ALI-

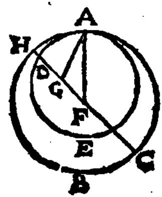
(1) Coroll. 1. hujus. (2) 5. hujus.

ALITER.



Circulus enim ABC rursus circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nēpè in B, G, F, H, & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K, & KB, KG, KF jungantur. quoniā igitur intra circulū DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineę KB, KG, KF, erit punctum K, circuli DEF centrum: est autem, & circuli ABC centrum K, duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K, centrum, quod fieri non potest, quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, quod oportebat demonstrare.

Theorema 10. Propositio 11. Si duo circuli se se intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens, & producta in circulorum contactum cadet.



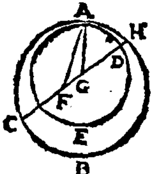
Duo enim circuli ABC, ADE, se se intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F, circuli verò ADE centrum G. Dico rectam lineā à puncto G, ad F, ductam, si producatur in punctum A, cadere. Non enim: sed si fieri po-

 test,

test, cadat vt FGDH. Et AF, AG, jungantur, Itaque quoniam AG, GF, majores sunt, quàm FA, (1) hoc est quàm FH, communis auferatur FG, reliqua igitur AG major est, quàm reliqua GH. Sed AG est ęqualis GD. Ergo GD ipsa GH, est major, minor majore quod fieri non potest. Non igitur à puncto F, ad G, ducta recta linea extra contactum A cadet, quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant; recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur in contactum circulorum cadet, quod oportebat demonstrare.

(1) 20. primi.

ALITER.



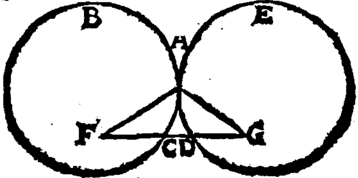
Sed cadat, ut GFC, & producatur in directum CFG, ad punctum H: junganturque AG, AF. Quoniã igitur AG, GF, majores sunt, quàm AF, (1) & AF, est æqualis FC, hoc est ipsi FH, communis auferatur FG, reliqua igitur AG, reliqua GH est major: hoc est DG major ipsa GH, minor majore, quod fieri non potest. Similiter, & si extra circulum paruum sit centrum majoris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

Theo-

(1) 20. primi.

Theorema 11. Propositio 12. Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

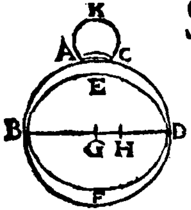
Duo enim circuli ABC, ADE, se se extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem



ABC centrum, quod sit F: circuli verò ADE centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F, ad G, ducitur, per contactum A, transire. Non enim: sed si fieri potest, cadat, ut FCDG: & FA, AG, jungantur. Quoniam igitur F, centrũ est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G, centrum est ADE circuli, erit AG, ipsi GD æqualis, ostensa est autem, & AF æqualis FC, sunt igitur FA, AG, ipsis FC, DG, æquales. Ergo tota FG, major est, quàm FA, AG. Sed & minor, (1) quod fieri non potest. Non igitur à puncto F, ad G, ducta recta linea per contactum A, non transibit, quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit, quod oportebat demonstrare.

(1) 20. primi.

Theorema 12. Propositio 13. Circulus circulum non contingit in pluribus punctis, quàm uno, sivè intus sivè extra contingat.

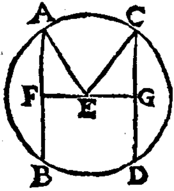


SI enim fieri potest, circulus ABDC circulum EBFD cõtingat primum intus in pluribus punctis, quàm uno, videlicet in B,D: & sumatur circuli quidem ABDC cẽtrum G; circuli verò EBFD centrũ H, ergo recta linea, quę à puncto G, ad H, ducitur, in pũcta BD cadet. cadat, ut BGHD, & quoniam G, centrum est circuli ABDE, erit BG ipsi GD æqualis, major igitur est BG, quàm HD; & BH, quàm HD, multo major. Rursus quoniã H, centrum est EBFD circuli, ęqualis est BH ipsi HD, atqui ostensa est ipsa multo major, quòd fieri non potest, non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm uno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABDC extra cõtingat in pluribus punctis, quàm uno, videlicet in A,C, & AC, jungatur. Itaq; quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABDC, ACK, sumpta sunt duo quævis puncta A, C; recta linea, quæ ipsa conjungit intra utrumque ipsorum cadet. Sed intra circulum quidẽ ABDC cadit, extra circulum verò ACK, quod est absurdum, non

igi-

igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis, quàm uno: ostensum autem est neque intus contingere, circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis; quàm uno, sivè intus, sivè extra contingat, quod oportebat demonstrare.

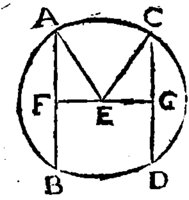
Theorema 13. Propositio 14. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant; & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.



SIt circulus ABDC, & in ipso æquales rectę lineæ AB, CD. dico eas à centro ęqualiter distare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod sit E, & ab ipso ad AB, CD, perpendiculares ducantur EF, EG, & AE, EC, jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF, rectam lineam quandam AB, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit. (1) Quare AF, est æqualis FB, ideòque AB, ipsius AF, dupla. eadem ratione, & CD, dupla est CG, atque est AB ipsi CD æqualis, æqualis igitur, & AF ipsi CG. Et quoniam AE, est æqualis EC, erit, & quadratum ex AE, quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē ex AE, *æqualia sunt ex* AF, FE, *quadrata* (2) rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia

(1) 3. hujus. (2) 47 primi.

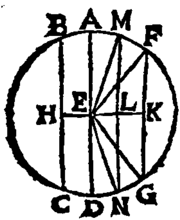
lia sunt quadrata ex EG, GC, cum angulus ad G, sit rectus. Quadrata igitur ex AF, FE, æqualia sunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG est æquale, etenim ęqualis est AF ipsi CG, reliquum igitur, quod fit ex FE, quadratum, æquale est reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est ęqualis: in circulo autem æqualiter



distare à centro rectæ lineæ dicũtur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt, ergo AB, CD, à centro æqualiter distant; sed AB, CD, æqualiter distent à centro, hoc est æqualis sit FE ipsi EG, dico AB, ipsi CD, æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB, duplam esse ipsius AF, & CD, duplam ipsius CG. Et quoniam æqualis est AE, ipsi EC, erit, & ex AE, quadratum quadrato ex EC, æquale. Sed quadrato quidem ex AE, æqualia sunt quadrata ex EF, FA: quadrato autẽ ex EC, æqualia quadrata ex EG, GC, quadrata igitur ex EF, FA, quadratis ex EG, GC, æqualia sunt, quorum quadratum ex EG, æquale est quadrato ex EF; est enim EG, ipsi EF æqualis, reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG, ergo AF ipsi CG est æqualis, atque est AB, ipsius AF dupla, & CD, dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

Theo-

Theorema 14. Propositio 15. In circulo maxima quidem est diameter; aliarum verò semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.



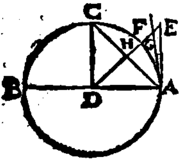
Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E, & propinquior quidē diametro AD, sit BC, remotior verò FG. dico AD maximam esse, & BC majorem, quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC, FG, perpendiculares EH, EK. & quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrū transit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH major. ponatur ipsi EH, æqualis EL, & per L, ipsi EK. ad rectos angulos ducta LM in N, producatur, & jungantur EM, EN, EF, EG. Quoniam igitur EH, est æqualis EL, erit, & BC ipsi MN, æqualis. (1) rursus, quoniam æqualis est AE, ipsi EM, & DE, ipsi EN, erit, & AD, ipsis ME. EN, æqualis. Sed ME, EN, majores sunt, quàm MN, ergo, & AD, major est, quàm MN, & MN, est æqualis BC, est igitur AD, quā BC, major. Quòd cum duæ EM, EN, duabus FE, EG, æquales sint, angulusque MEN, major angulo FEG, & basis MN, basi FG major erit, (2) ostensa autem est MN, æqualis BC, ergo, & BC, quàm FG, est major.

Ma-

(1) Ex antecedente. (2) 24. primi.

Maxima igitur est AD diameter, & BC major, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum verò semper propinquior ei, quę per centrum transit remotiore est major. Quod demostrare oportebat.

Theorema 15. Propositio 16. Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum, qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC, circa centrum D, & diametrum AB, dico rectam lineam, quæ à puncto A, ipsi AB, ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Non enim, sed, si fieri potest, cadat intus, vt AC, & DC jungatur. Itaque quoniã æqualis est DA, ipsi DC, erit, & angulus DAC angulo ACD æqualis, (1) rectus autem est DAC, ergo, & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC, ACD, duobus rectis æquales sunt, quod fieri nõ potest, (2) non igitur à pũcto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus, neque in circumferentiam cadere, extra igitur cadat necesse est. cadat, ut AE, dico in locum, qui inter rectam li-

(1) 5. primi. (2) 17. primi.

lineam AE,& circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam nõ cadere. Si enim fieri potest, cadat, ut FA, & à puncto D, ad FA, perpendicularis ducatur DG; & quoniam rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit DA, quàm DG major, (3) æqualis autem est DA, ipsi DH, major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico prætereà angulum semicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum verò contentum circumferentia CHA, & recta linea AE, omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus major quidem contento recta linea BA,& CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiã CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorẽ quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem verò contento circumferentia CHA, & AE recta linea: non cadit autem, non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA, circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, & AE, recta linea.

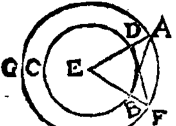
CO-

(3) 19. primi.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

Problema 2. Propositio 17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



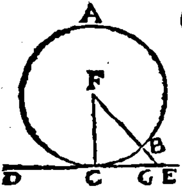
Sit datum quidem punctũ A, datus autem circulus BCD, oportet à puncto A, rectam lineam ducere, quæ circulũ BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA, circulus AFG, describatur: & à puncto D, ipsi EA, ad rectos angulos ducatur DF: junganturque EBF, AB. Dico à puncto A, ductam esse AB, quæ circulum BCD, contingit. Quoniam enim E, centrum est circulorum BCD, AFG, erit EA, æqualis EF, & ED, ipsi EB. Duæ igitur AE, EB, duabus FE, ED, æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E, ergo basis DF, basi AB, est æqualis; triangulumque DEF, æquale triangulo EBA, & reliqui anguli, reliquis angulis, (1) æqualis igitur est angulus EBA, angulo EDF, & EDF, rectus est, quare, & rectus EBA: atque est EB, ex centro,

(1) 4. primi.

tro, quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit, (2) ergo AB, contingit circulum. A dato igitur puncto A, ducta est recta linea AB, quæ circulum BCD contingit, quod facere oportebat.

(2) Ex antecedente.

Theorema 16. Propositio 18. Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad cõtingentem perpendicularis erit.

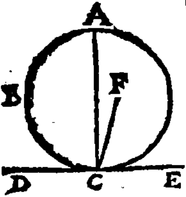


Circulum enim ABC, contingat quædam recta linea DE, in puncto C: & circuli ABC, centrum sumatur F, à quo ad C, ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE, perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F, ad DE, perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC, rectus est, erit GCF acutus, (1) ac proptereà FGC, angulus major angulo FCG, majorem autem angulum majus latus subtendit, (2) major igitur est FC, quàm FG, æqualis autem FC, ipsi FB, ergo FB, ipsa FG, est major, minor majore, quod fieri non poteſt, non igitur FG, est perpendicularis ad DE. Similiter oſtendemus neq; aliam quampiam

(1) 17. primi. (2) 19. primi.

piam esse præter ipsam FC, ergo FC, ad DE, est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit, quod oportebat demonstrare.

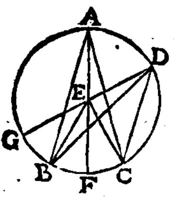
Theorema 17. Propositio 19. Si circulum contingat, quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.



Circulum enim ABC cōtingat quædam recta linea DE, in C, & à puncto C, ipsi DE, ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC, circuli centrum esse. Non enim: sed, si fieri potest, sit F, centrũ, & jungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC, contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum, ducta est FC; erit FC ad ipsam DE, perpendicularis; rectus igitur angulus est FCE; est autē, & ACE rectus, ergo FCE, angulus est æqualis angulo ACE, minor majori, quòd fieri non potest. Non igitur F, centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat, quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum; quod demonstrare oportebat.

Theo-

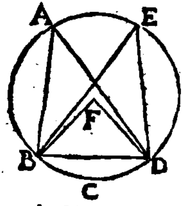
Theorema 18. Propositio 20. In circulo angulus, qui ad centrum, duplus est ejus, qui ad circumferentiam, quãdo circumferentiam eandem pro basi habeant.



SIt circulus ABC, ad cujus cẽtrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam verò BAC, & eandem circumferentiam BC, pro basi habeant; dico BEC angulum, anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE, & ad F, producatur. Itaq; quoniam EA, est æqualis EB, erit, & angulus EAB angulo EBA æqualis; (1) anguli igitur EAB, EBA, dupli sũt ipsius anguli EAB, sed angulus BEF est æqualis angulis EAB, EBA; (2) ergo BEF angulus, anguli EAB est duplus. Eadem ratione, & angulus FEC duplus est ipsius EAC; totus igitur BEC, totius BAC, duplus erit. Rursus inflectatur, & sit alter angulus BDC, junctaque DE, ad G producatur. Similiter ostendemus angulum GEC, anguli EDC, duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC, reliqui BDC est duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est ejus, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeant, quod oportebat demonstrare.

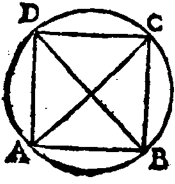
(1) 5. primi. (2) 32. primi.

Theorema 19. Propositio 21. In circulo, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt.



SIt circulus ABCDE, & in eadem portione BAED, anguli sint BAD, BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum, quod sit F: junganturque BF, FD; & quoniam angulus quidem BFD, est ad centrum, angulus verò BAD ad circumferentiã, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus, anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD, duplus est etiã anguli BED. Ergò angulus BAD, angulo BED, æqualis erit. In circulo igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare

Theorema 20. Propositio 22. Quadrilaterorum, quæ in circulis describũtur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

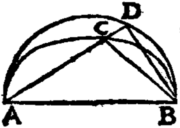


SIt circulus ABCD, & in ipso quadrilaterum ABCD Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Iungãtur AC, BD. Quoniam igitur omnis (1) trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, (1) erunt

(1) 32. primi.

erunt trianguli ABC, tres anguli CAB, ABC, BCA, æquales duobus rectis. Sed angulus CAB, est æqualis angulo BDC, in eadem enim sunt portione BADC; & angulus ACB, æqualis ipsi ADB, quod sint in eadẽ ADCB portione; totus igitur angulus ADC, angulis BAC, ACB, est æqualis; communis apponatur ABC, angulus duobus angulis, qui sunt ad A, & C, & seorsum uni angulo, qui est ad D; eũt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ABC, ADC, æquales. Sed ABC, BAC, ACB, sũt ęquales duobus rectis; ergo, & anguli ABC, ADC, duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD, DCB, duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describũtur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 21. Propositio 23. In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales ex eadem parte non constituentur.



SI enim fieri potest, in eadem recta linea AB, duæ circulorũ portiones similes, & inæquales cõstituantur ex eadem parte ACB, ADB; ducaturque ACD, & CB, BD jungantur. Itaque quoniam portio ACB, similis est portioni ADB, similes autem circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales; (1)

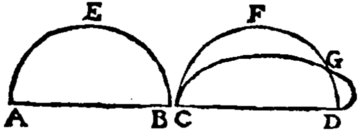
 erit

(1) Diff. 11. hujus.

erit ACB angulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea, duæ circulorum portiones similes, inæquales ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

Theorema 22. Propositio 24. In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.

Sint enim in æqualibus rectis lineis AB, CD, similes circulorum portiones AEB, CFD. Dico portionem AEB, portioni CFD æqualem esse; congruẽ-

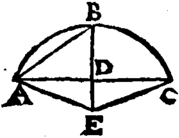


te enim AEB portione, portioni CFD, & posito puncto quidem A, in C, recta verò linea AB, in CD; cõgruet, & B, punctum puncto D, propterea quod AB, ipsi CD, sit æqualis; congruente autem recta linea AB rectę CD; congruet, & AEB portio, portioni CFD. Si enim AB congruet ipsi CD, portio autem AEB, portioni CFD, non congruet, sed permutabitur, ut CGD, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis secabit; etenim circulus CGD, circulum CFD secat in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod rursus fieri non potest.

Non

Non igitur congruente recta linea AB, rectæ CD, nõ congruet, & ACB portio, portioni CFD; quare congruet, & ipsi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

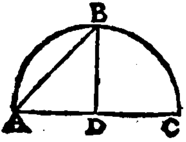
Problema 3. Propositio 25. Circuli portione data describere circulum, cujus ea portio est.

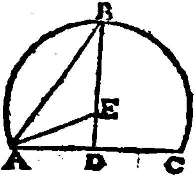


Sit data circuli portio ABC, itaque oportet portionis ABC, describere circulum cujus est portio. Secetur AC, bifariam in D: & à puncto D, ipsi AC, ad rectos angulos ducatur DB, & AB jungatur; vel igitur angulus ABD, major est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primùm major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A, constituatur angulus BAE, æqualis angulo ABD; (1) & BD, ad E, producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE, est æqualis angulo BAE, erit, & BE recta linea ipsi EA æqualis; (2) & quoniã AD, est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD, DE, duabus CD, DE, ęquales sunt, altera alteri; & angulus ADE, æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est; ergo, & basis AE, basi EC, est æqualis. Sed ostẽsa est AE, æqualis EB; quare, & BE, ipsi EC, est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EC,

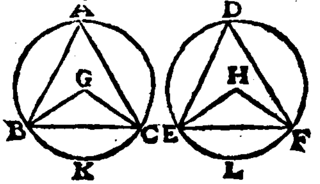
(1) 23. primi. (2) 6. primi.

inter se æquales sunt; centro igitur E, intervallo autem una ipsarum AE, EB, EC, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus; cujus ea portio est. Sed, & illud constat, portionem ABC, semicirculo minorem esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter, & si angulus ABD, sit æqualis angulo BAD, facta AD, æquali utrique ipsarum BD, DC, erunt tres rectæ lineę AD, DB, DC, inter se æquales, atque erit D, circuli descripti cẽtrum, & portio ABC, semicirculus. Si verò angulus ABD, minor sit angulo BAD, constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD, æqualis angulus BAE, intra portionem ABC; erit centrũ in ipsa DB, atque erit ABC, portio semicirculo major. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cujus portio est; quod facere oportebat.





Theorema 23. Propositio 26. In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentijs, sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistant.

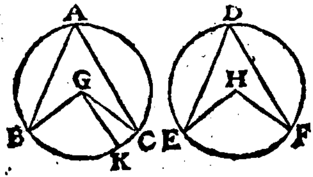


Sint æquales circuli ABC, DEF, & in ipsis æquales anguli ad cētra quidem BGC, EHF, ad circūferētias verò BAC, EDF. Dico BKC circumferentiam, circumferentiæ ELF, æqualem esse. Iungantur enim BC, EF. Et quoniam æquales sunt ABC, DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales; duæ igitur BG, GC, duabus EH, HF, æquales sunt: & angulus ad G, æqualis angulo ad H; ergo, & basis BC, basi EF, est æqualis. (1) Rursus quoniam æqualis est angulus ad A, angulo ad D, portio BAC, similis erit portioni EDF. (2) & sunt in æqualibus rectis lineis BC, EF. Quæ autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones, inter se æquales sunt; (3) portio igitur BAC, portioni EDF, est æqualis. Sed, & totus ABC, circulus æqualis est toti DEF; ergo, & reliqua circumferentia BKC, reliqua ELF, æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentijs, sivè ad centra, sivè ad cir-

(1) 4. primi. (2) Diff. 11. hujus. (3) 24. hujus.

cumferentias insistant; quod oportebat demonstrare.

Theorema 24. Propositio. 27. In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferẽtiis, inter se æquales sunt, sivè ad centra, sivè ad circũferentias insistant.



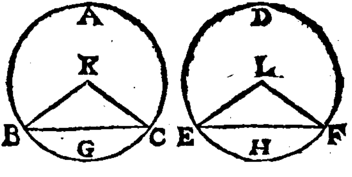
IN æqualibus enim circulis ABC, DEF, æqualibus circũferẽtiis BC, EF, insistant anguli ad centra quidẽ BGC, EHF, ad circũferentias verò BAC, EDF. Dico angulum BGC, angulo EHF, & angulum BAC, angulo EDF, æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC, æqualis sit angulo EHF; manifestum est angulum quoque BAC, angulo EDF, esse æqualem. Sin minus, unus ipsorum est major; sit major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF, æqualis angulus BGK; (1) æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentijs, quando ad cẽtra fuerint. (2) Ergo circumferentia BK, æqualis est circumferentiæ EF. Sed circũ ferentia EF, æqualis est ipsi BC; ergo, & BK, ipsi BC, est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus BGC, angulo EHF; ergo est æqualis.

(1) 23. primi. (2) Ex antecedente.

lis. Atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli verò EHF, dimidius qui ad D; angulus igitur qui ad A, angulo qui ad D, est æqualis. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt, sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistant; quod oportebat demonstrare.

Theorema 25. Propositio 28. In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori.

Sint æquales circuli ABC, DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC,EF,quę circumferentias,quidem BAC, EDF, majores auferant, circumferentias



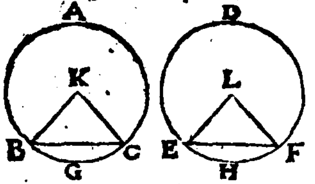
verò BGC, EHF, minores. Dico circumferentiam BAC majorem, majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC, minori EHF æqualē esse. Sumātur enim centra circulorum K,L, (1) junganturque BK,KC,EL,LF. Et quoniam circuli æquales sunt, erunt, & quæ ex centris æquales. (2) duæ igi-

(1) 1.hujus. (2) Diff, 1.hujus.

igitur BK, KC, sunt æquales duabus EL, LF: & basis BC, æqualis est basi EF. Ergo angulus BKC, angulo ELF est æqualis; (3) æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentijs, (4) quando ad centra fuerint; quare circumferentia BGC, æqualis est circumferentiæ EHF. Sed & totus ABC, circulus, toti DEF est æqualis; reliqua igitur circumferentia BAC, reliqua EDF, æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori, quod demonstrare oportebat.

(3) 8. primi. (4) 26. hujus.

Theorema 26. Propositio 29. In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.



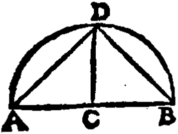
Sint æquales circuli ABC, DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC, EHF, & BC, EF, jungantur. Dico rectam lineam BC, rectæ EF, æqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K, L, (1) & jungantur BK, KC, BL, LF; quoniam igitur circumfe-

(1) 1. hujus.

ferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit, & angulus BKC, angulo ELF, æqualis. (2) Et quoniam circuli ABC, DEF, sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt; (3) duæ igitur BK, KC, sunt æquales duabus EL, LF; & æquales angulos continent; quare basis BC, basi EF, est æqualis (4) In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt; quod oportebat demonstrare.

(2) 26. hujus. (3) Diff. 1 hujus. (4) 4. primi.

Problema 4. Propositio 30. Datam circumferentiam bifariam secare.

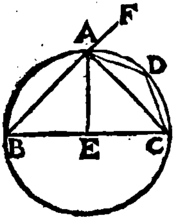


SIt data circumferentia ADB; oportet ADB, circumferentiã bifariam secare. Iungatur AB, & in C, bifariam secetur: (1) à puncto autem C, ipsi AB, ad rectos angulos ducatur CD; & jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC, est æqualis CB, cõmunis autem CD, duæ AC, CD, duabus BC, CD, æquales sunt: & angulus ACD, ęqualis angulo BCD, rectus enim uterque est: ergo basis AD, basi DB, est æqualis; (2) æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori; (3) & est utraque ipsarum AD,

(1) 10. primi. (2) 4. primi. (3) 28. hujus.

AD, DB, circumferentiarum semicirculo minor; quare circũferentia AD, circumferentiæ DB, æqualis erit; data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

Theorema 27. Propositio 31. In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui verò in majori portione, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem portionis angulus recto major est, minoris verò portionis angulus recto minor.



Sit circulus ABCD, cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA, AC, AD, DC. Dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC, rectum esse, qui verò in portione ABC, majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, & qui in portione ADC, minore semicirculo, hoc est angulũ ADC, recto majorem; jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaque quoniam BE, est æqualis EA, erit, & angulus EAB, angulo EBA, æqualis. (1) Rursus quoniam AE, est æqualis EC, & angulus ACE, angulo CAE, æqualis erit; totus igitur angulus BAC, est æqualis duobus ABC, ACB, angulis; est autem, & angulus FAC extra triangulũ ABC, duo-

(1) 5. primi.

duobus ABC, ACB, æqualis; (2) angulus igitur BAC, est æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipsorum rectus. (3) Quare in semicirculo BAC, angulus BAC, rectus est; & quoniam trianguli ABC, duo anguli ABC, BAC, duobus rectis sunt minores. (4) rectus autem BAC: erit ABC, angulus recto minor, atque est in portione ABC, majore semicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum sit ABCD, quadrilaterorum verò, qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint æquales: (5) erunt ABC, ADC, anguli æquales duobus rectis; & angulus ABC, minor est recto; reliquus igitur ADC, recto major erit, atque est in portione ADC, minore semicirculo. Dico præterea majoris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC, recto majorem esse; angulum verò minoris portionis contentum circumferentia ADC, & recta linea AC, recto minorem; quod quidem perspicuè apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA, AC, cōtinetur, rectus est, erit, & contentus ABC, circumferentia, & recta linea AC, recto major. Rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA, AF, rectus est, erit qui cōtinetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo rectus est, qui verò in majori portione minor est recto, & qui in minori major recto; & insuper majoris quidem portionis angulus recto major est: minoris verò recto minor. Quod demonstrare oportebat.

ALI-

(2) 32. primi. (3) 13. primi. (4) 17. primi. (5) 22. hujus.

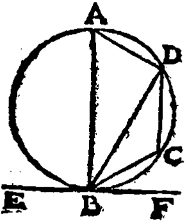
ALITER.

Demonstrabitur angulum BAC, rectum esse. Quoniam enim angulus AEC, duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus, & oppositis est æqualis: est autem, & AEB, duplus ipsius EAC: anguli AEB, AEC, anguli BAC, dupli erunt. Sed, & AEB, AEC, anguli duobus rectis sunt æquales; ergo angulus BAC, rectus est; quod demõstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit equalis duobus, eum rectum esse; propterea quòd, & qui deinceps est, iisdem est æqualis; quando autẽ anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt.

Theorema 28. Propositio 32. Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



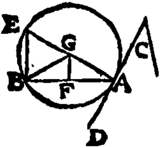
Circulum enim ABCD, contingat quædam recta linea EF, in B, & à puncto B, ad circulum ABCD, ducatur recta linea BD, ipsum utcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, equales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistũt, hoc est angulum FBD, esse æqualem angulo, qui cõstituitur

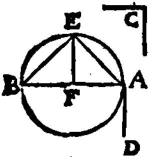
tur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum verò EBD, æqualem angulo DCB, qui in portione DCB, constituitur. Ducatur enim à puncto B, ipsi EF, ad rectos angulos BA: (1) & in circumferentia BD, sumatur quodvis punctum C; junganturque AD, DC, CB. Quoniam igitur circulum ABCD, contingit quædam recta linea EF, in puncto B: & à contactu B, ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA, centrum ABCD, circuli, (2) quare BA, ejusdem circuli diameter est, & angulus ADB, in semicirculo est rectus; (3) reliqui igitur anguli BAD, ABD, uni recto æquales sunt. (4) Sed, & ABF, est rectus; ergo angulus ABF, æqualis est angulis BAD, ABD; communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales sunt duobus rectis; (5) erunt DBF, DBE, anguli angulis BAD, BCD, æquales; quorum BAD, ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu verò in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt; quod oportebat demonstrare.

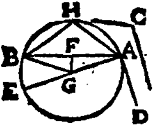
Pro-

(1) 11. primi. (2) 19. hujus. (3) Ex antecedente. (4) 32. primi. (5) 22. hujus.

Problema 5. Propositio 33. In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.







SIt data recta linea A*B*, datus autem angulus rectilineus, qui ad C; itaque oportet in data recta linea A*B*, describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C; vel igitur angulus ad C, acutus est, vel obtusus. Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam A*B*, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus *B*AD, angulo, qui est ad C, æqualis; (1) acutus igitur angulus est *B*AD, & à puncto A, ipsi AD, ad rectos angulos ducatur AE; (2) secetur autem A*B*, bifariam in F, (3) atque à puncto F, ducatur FG ad rectos angulos ipsi A*B*; & G*B* jungatur. Quoniam igitur AF, est æqualis F*B*, communis autem FG, duæ AF, FG, duabus *B*F, FG, æquales sunt: & an-

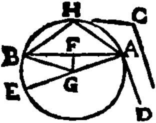
(1) 23. primi. (2) 11. primi. (3) 10. primi.

& angulus AFG, æqualis angulo GFB; ergo basis AG, basi GB, est æqualis. (4) Itaque centro G, intervallo autem AG, circulus descriptus transibit etiã per B: (5) describatur, & sit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A, ipsi AE, ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD, circulum continget; & quoniam circulum ABE, contingit quædam recta linea AD, & à contactu, qui est ad A, in circulum ABE, ducta est recta linea AB: erit angulus DAB, æqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, (6) videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C, est æqualis; ergo, & angulus ad C, angulo AEB. æqualis erit. In data igitur recta linea AB, portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB, dato angulo, qui ad C, æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C, rectus, & oporteat rursus in recta linea AB, describere circuli portionem, quæ suscipiat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C; constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C, æqualis angulus BAD, (7) ut in secunda figura, seceturque AB, bifariam in F, & centro F, intervallo autem alterutra ipsarum AF, FB, circulus describatur AEB; ergo AD, recta linea circulum ABE contingit, (8) propterea quod rectus est, qui ad A angulus, & angulus BAD, æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim, & ipse est, in semicirculo consistens; sed BAD, æqua-

lis

(4) 4. primi. (5) Corol. 16. hujus. (6) Ex antecedente. (7) 23. primi. (8) Corol. 16. hujus.

lis est ei, qui ad C. Ergo, & quod in portione AEB ei, qui ad C, est æqualis; descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C, æqualem. Denique

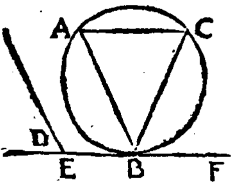


sit angulus ad C, obtusus, & ad rectam lineam AB, & ad punctum A, constituatur ipsi æqualis angulus BAD, ut habetur in tertia figura, & ipsi AD, rectæ lineæ ad rectos angulos ducatur AE: seceturque rursus AB, bifariam in F; ipsi verò AB, ducatur ad rectos angulos FG, & GB jungatur. Et quoniam AF, est æqualis FB; communis autem FG; duæ AF, FG, duabus BF, FG, æquales sunt, & angulus AFG, angulo BFG, æqualis; basis igitur AG, est æqualis basi GB. (9) Quare centro G, intervallo autem AG, circulus descriptus etiam per B, transibit; transeat, ut AEB. Et quoniam diametro AE, ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD, circulum AEB, continget: (10) & à contactu, qui ad A, ducta est AB; quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB, constituitur est æqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C; angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C, æqualis erit. Ergo in data recta linea AB, descripta est AHB, circuli portio, suscipiens angulum æqualem ei, qui est ad C; quod facere oportebat.

Pro-

(9) 4. primi. (10) Corol. 16. hujus.

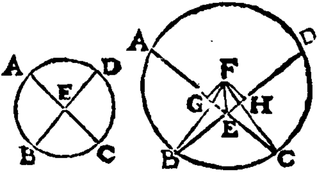
Problema 6. Propositio 34. A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



SIt datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D; oportet à circulo ABC, portionem abscindere, quæ suscipiat angulum angulo, qui ad D, æqualem. Ducatur recta linea EF, circulum ABC, in puncto B, contingens: (1) & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, constituatur angulus FBC angulo, qui est ad D, æqualis. (2) Quoniam igitur circulum ABC, contingit quædam recta linea EF, in B puncto, & à contactu B, ducta est BC, erit angulus FBC, æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur. Sed FBC angulus, angulo, qui ad D, est æqualis; ergo, & angulus, qui in portione BAC, angulo, qui ad D, æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC, suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

(1) 17. hujus. (2) 23. primi.

Theorema 29. Propositio 35. Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, rectangulum portionibus unius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.



IN circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC, BD, se se mutuò in puncto E, secent. Dico rectangulum contentũ AE, EC, æquale esse ei, quod DE, EB, continetur. Si igitur AC, BD, per centrum transeant, ita ut E, sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE, EC, DE, EB, & rectangulum contentum AE, EC, æquale esse ei, quod DE, EB, continetur. Itaque AC, DB, non transeant per centrum: & sumatur centrum circuli ABCD, quod sit F: & ad F, ad rectas lineas AC, DB, perpendiculares ducantur FG, FH: junganturque FB, FC, FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit; (1) quare AG, ipsi GC, est æqualis. Et quoniam recta linea AC, secta est in partes æquales in pu[illegible] G, &

in

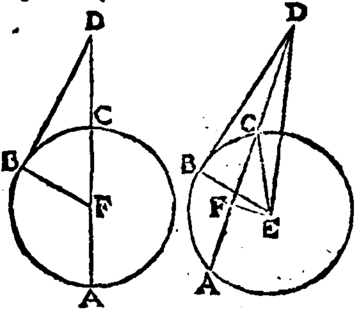
(1) 3. hujus.

in partes inæquales in E, erit rectangulum AE, EC, contentum, unà cum ipsius EG quadrato, æquale quadrato ex GC; (2) commune addatur ex GF quadratum; ergo rectangulum AEC, una cum iis quæ ex EG, GF quadratis, æquale est quadratis ex CG, GF. Sed quadratis quidem ex EG, GF, æquale est quadratum ex FE; (3) quadratis verò ex CG, GF, æquale, quod ex FC, quadratum; rectangulum igitur AEC, unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC; est autem CF, æqualis FB; ergo rectangulum AEC, una cum quadrato ex EF, æquale est ei, quod ex FB, quadrato. Eadem ratione & rectangulum DEB, una cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB; ostensum autem est, & rectangulum AEC, una cum quadrato ex FE, æquale ei, quod ex FB, quadrato; ergo rectãgulum AEC, una cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo DEB, una cũ quadrato ex FE; commune auferatur, quod ex FE, quadratum; reliquum igitur rectangulum AEC, reliquo DEB rectãgulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, rectangulum portionibus unius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demonstrare oportebat.

(2) 5. secundi. (3) 47. primi.

Theorema 30. Propositio 36. Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò contingat; rectangulum, quod tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circum-

ferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.



Extra circulum enim ABC, sumatur aliquod pũctum D, & ab eo ad dictũ circulum cadãt duę rectæ lineę DCA, DB: & DCA, quidem circulum ABC, secet; DB verò contingat. Dico rectangulum ADC, quadrato, quod fit ex DB, æquale esse. Vel igitur DCA, per centrum transit, vel nõ. transeat primum per centrum circuli ABC, quod sit F, & FB jungatur; erit angulus FBD, rectus. (1) Itaque quoniam recta linea AC, bifariam secta est in F, & ipsi adjicitur CD, rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FC, æquale erit ei, quod fit ex FD, quadrato, (2) æqualis autem est CF, ipsi FB, ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FB, æquale est quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD,

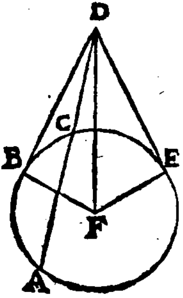
(1) 18. hujus. (2) 6. secundi.

FD, est æquale quadratis ipsarum FB, BD, rectus enim angulus est FBD; rectāgulum igitur ADC, una cum quadrato ex FB, æquale est ipsarum FB, BD, quadratis. Commune auferatur quadratum, quod ex FB; ergo reliquū ADC rectangulum, quadrato, quod fit à contingente DB, æquale erit. Sed DCA, non transeat per centrum ABC circuli: sumaturque centrum E, & ab ipso E, ad AC, perpendicularis agatur EF, & jungantur EB, EC, ED, rectus igitur est EFD, angulus. Et quoniam recta linea quædam EF, per centrum ducta, rectam lineam quandam AC, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit; (3) quare AF, ipsi FC, est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC, bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum ADC, una cum quadrato ex FC, æquale quadrato, quod ex FD; (4) commune apponatur, quod ex FE quadratum; rectangulum igitur ADC, una cum quadratis ex CF, FE, est æquale quadratis ex DF, FE; sed quadratis quidem ex DF, FE, æquale est, quod ex DE, quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis verò ex CF, FE, æquale est quadratum ex CE; ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex CE, est æquale quadrato ex ED, ęqualis autē est CE, ipsi EB; rectangulum igitur ADC, una cum quadrato ex EB, æquale est ei, quod ex ED quadrato; sed quadrato ex ED, æqualia sunt quadrata ex EB, BD: si quidem rectus est angulus EBD; ergo rectan-

(3) 3. hujus. (4) 6. secundi.

gulum ADC, una cum quadrato ex EB, æquale est eis, quæ ex EB, BD, quadratis; commune auferatur quadratum ex EB; reliquum igitur ADC rectangulum, quadrato, quod fit ex DB, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & quæ deinceps sunt; quod oportebat demonstrare.

Theorema 31. Propositio 37. Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò incidat, sit autem quod tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extra circulum enim ABC, sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA, quidem circulum secet, DB verò incidat, sitque rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipsam DB, circulum ABC, contingere. Ducatur enim recta linea DE, contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum, quod sit F, junganturque FE, FB, FD; ergo angulus FED, rectus est.

(1) Et quoniam DE, circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ADC, æquale erit quadrato, quod ex DE; sed rectangulū ADC, ponitur æquale quadrato, quod ex DB; quadratum igitur, quod ex DE, quadrato ex DB, æquale erit, ac propterea linea DE, ipsi DB æqualis; est autem, & FE, æqualis FB; duæ igitur DE, EF, duabus DB, BF, æquales sunt; & basis ipsarum communis FD; angulus igitur DEF, est æqualis angulo DBF; (2) rectus autem DEF; ergo, & DBF est rectus; atque est FB, producta diameter; quæ verò ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit; ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur, & si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod pūctum, & reliqua; quod demonstrare oportebat.

---

(1) 18. hujus. (2) 8. primi.

Finis Libri Tertij.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

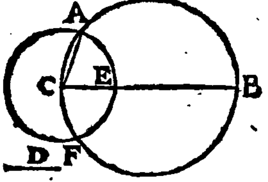
1. Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus unumquodque latus ejus, in qua describitur, contingit.
2. Figura similiter circa figuram describi dicitur quando unumquodque latus descriptæ unũquemque angulum ejus, circa quam describitur, contingit.
3. Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptę figurę angulus circuli circumferentiam contingit.
4. Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descripti circuli circumferentiam contingit.
5. Circulus similiter in figura rectilinea describi di-

dicitur, quando circuli circumferētia unumquodque latus ejus, in qua describitur contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam describitur, contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema ad circuli circumferentiam se applicant.

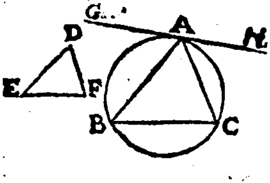
Problema 1. Propositio 1. In dato circulo data recta linea, qua diametro ejus major non sit, aequalem rectam lineam aptare.



Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D; oportet in circulo ABC, rectæ lineæ D, æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC, diameter BC. Si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D, factum jam erit, quod proponebatur; etenim in circulo ABC, aptata est AC, rectæ lineæ D, æqualis. Sin minus, major est BC, quam D, ponaturque ipsi D, æqualis CE: & centro quidem C, intervallo autem CE, circulus describatur AEF: & CA jungatur. Itaq; quoniam punctum C, centrum est AEF circuli; erit CA, ipsi CE, æqualis. Sed D est æqualis CE, ergo, & D, ipsi

D, ipsi AC, æqualis erit. In dato igitur circulo ABC, datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC; quod facere oportebat.

Problema 2. Propositio 2. In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

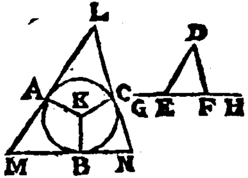


SIt datus circulus ABC, datum autem triãgulum DEF; oportet in ABC circulo describere triangulũ triangulo DEF, ęquiangulum. Ducatur recta linea GAH, contingens circulum ABC, in puncto A: (1) & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF, æqualis angulus constituatur HAC; (2) sursus ad rectam lineam AG; & ad punctum in ipsa A, angulo DFE, æqualis constituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC, contingit quędam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC, angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione consistit, (3) videlicet ipsi ABC. Sed HAC, angulus æqualis est angulo DEF, ergo, & angulus ABC, angulo DEF, est æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB, est æqualis angulo

(1) 17. tertij (2) 23. primi. (3) 32. tertij.

lo DFE; reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF, æqualis erit; ergo triangulum ABC, triangulo DEF, est æquiangulum; & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est; quod facere oportebat.

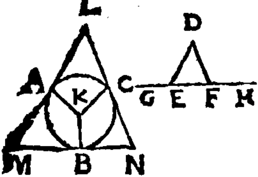
Problema 3. Propositio 3. Circa datum circulum, triangulo dato æquiangulum triangulum describere.



SIt datus circulus ABC: datum autē triangulum DEF; oportet circa circulū ABC, describere triãgulum, triangulo DEF, æquiangulum; protrahatur ex utraque parte EF, ad puncta H, G, & sumatur circuli ABC, centrum K: & recta linea KB utcumque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG, æqualis angulus BKA, (1) angulo autē DFH, æqualis angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL, circulum ABC, contingentes. (2) Quoniam igitur circulum ABC, cōtingunt LM, MN, NL, in punctis A, B, C, à cētro autem K, ad A, B, C, puncta ducuntur KA, KB, KC; erunt anguli ad puncta A, B, C recti; (3) & quoniam

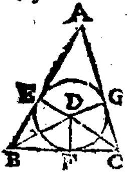
(1) 23. primi. (2) 17. tertij. (3) 18. tertij.

niam quadrilateri AMBK anguli quatuor, quatuor rectis æquales sunt, etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM, KBM, sunt recti; erunt reliqui AKB, AMB, duobus rectis æquales. Sunt autẽ, & DEG, DEF, æquales duobus rectis; anguli igitur AKB, AMB, angulis



DEG, DEF, æquales sunt, quorum AKB, ipsi DEG, est æqualis; ergo reliquus AMB, reliquo DEF, æqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus LNB, ipsi DFE, æqualis; ergo, & reliquus MLN, est æqualis reliquo EDF; æquiangulum igitur est LMN, triangulum triangulo DEF, & descriptum est circa circulum ABC. *Quare circa datum circulum triangulo* dato æquiangulum triangulum descriptum est; quod facere oportebat.

Problema 4. Propositio 4. In dato triangulo circulum describere.



Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC, circulum describere. Secentur anguli ABC, BCA, bifariam rectis lineis BD, CD, (1) quæ conveniant inter se in D, pun-

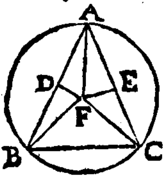
(1) 9. primi.

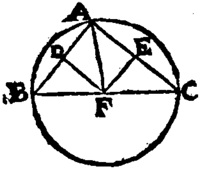
puncto, & à puncto D, ad rectas lineas AB, BC, CA, perpendiculares ducantur DE, DF, DG. (2) Et quoniam angulus ABD, est æqualis angulo CBD, est autẽ & rectus BED, recto BFD, æqualis: erunt duo triangula EBD, DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, (3) atque erit DE, æqualis DF; & eadem ratione DG, æqualis DF; ergo, & DE, ipsi DG, est æqualis; tres igitur rectæ lineæ DE, DF, DG, inter se æquales sunt; quare centro D, intervallo autem una ipsarum DE, DF, DG, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB, BC, CA, continget; propterea, quòd recti sunt ad EFG, anguli. Si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod est absurdum; (4) non igitur centro D, intervallo autem una ipsarum DE, DF, DG, circulus descriptus secabit rectas lineas AB, BC, CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC, circulus EFG, descriptus est; quod facere oportebat.

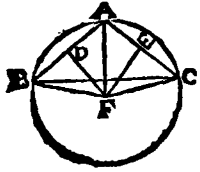
Pro

(2) 12. primi. (3) 26. primi. (4) 16. tertij.

Problema 5. Propositio 5. Circa datum triangulum circulum describere.







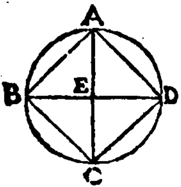
Sit datum triangulũ ABC; oportet circa datum triãgulũ ABC, circulum describere; secentur AB, AC, bifariam in D, E pũctis: (1) & à pũctis D, E, ipsis AB, AC, ad rectos angulos ducãtur DF, EF; (2) quæ quidẽ vel intra triãgulum ABC, convenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conveniãt primum intra triãgulum in puncto F: & BF, FC, FA, jungãtur. Quoniã igitur AD, est æqualis DB, cõmunis autẽ, & ad rectos angulos DF; erit basis AF, basi FB, æqualis. (3) Similiter ostendetur, & CF, æqualis FA; ergo, & BF, est æqualis FC; tres igitur FA, FB, FC, inter se æquales sunt; quare centro F, intervallo autem una ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus etiã per reliqua pun-

1) 10. primi. (2) 11. primi. (3) 4. primi.

puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC; & describatur, ut ABC. Sed DF, EF, conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut habetur in secũda figura, & AF jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F, centrum esse circuli circa triangulum ABC, descripti. Postremo DF, EF, conveniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF, FB, FC. Et quoniam rursus AD, est æqualis DB, communis autem, & ad rectos angulos DF, basis AF, basi FB, æqualis erit. Similiter demonstrabimus, & CF, ipsi FA, æqualem esse; quare, & BF, est æqualis FC. Rursus igitur centro F, intervallo autem una ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus, & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus; & describatur, ut ABC. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est; quod facere oportebat.

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC, existentem in portione semicirculo majore minorem esse recto, quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd sit in semicirculo, rectum esse, & quando extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse majorem. Quare, & quando datus angulus minor sit recto, DF, EF, intra triangulum convenient: quando autem rectus in ipsa BC, & quando major recto, extra BC; quod ostendere oportebat.

Problema 6. Propositio 6. In dato circulo quadratum describere.



Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducãtur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD: & AB, BC, CD, DA, iungantur. Quoniam igitur BE, est æqualis ED, etenim centrum est E. communis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis basi AD. Et eadem ratione utraque ipsarum BC, CD, utrique BA, AD, æqualis; æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico, & rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD, diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus; quare angulus BAD, rectus est. (1) Et eadem ratione unusquisque ipsorum ABC, BCD, CDA, est rectus; rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum; ostensum autem est, & æquilaterum esse; ergo quadratũ necessariò erit, & descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD, descriptum est; quod facere oportebat.

---

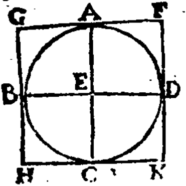
(1) 31. tertii.

Problema 7. Propositio 7. Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD, oportet circa ABCD circulum quadratum describere; ducantur circuli

ABCD,

ABCD, duæ diametri AC, BD, ad rectos inter se angulos, & per pūcta A, B, C, D, ducātur circulū ABCD, contingentes FG, GH, HK, KF.

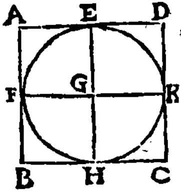


(1) quoniam igitur FG, contingit circulum ABCD, à centro autem E, ad contactum, qui est ad A, ducitur EA; erunt anguli ad A, recti. (2) Eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D, recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG; erit GH, ipsi AC, parallela. (3) Eadem ratione, & AC, parallela est FK. Similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GF, HK, ipsi BED, parallelam esse; quare, & GF, est parallela HK; parallelogramma igitur sunt GK, GC, AK, FB, BK, ac propterea GF quidem est æqualis HK, GH, verò ipsi FK. (4) Et quoniam AC, æqualis est BD: Sed AC quidem utrique ipsarum GH, FK, est æqualis; BD verò æqualis utrique GF, HK, & utraque GH, FK, utrique GF, HK, æqualis erit. Æquilaterū igitur est FGHK quadrilaterum. Dico, & rectangulum esse; quoniam enim parallelogrāmum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiam, qui ad puncta H, K, F, rectos esse; rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK: demonstratum autem est, & æqui-

(1) 17. tertij. (2) 18. tertij. (3) 28. primi. (4) 34. primi.

æquilaterum; ergo quadratum ſit neceſſe eſt; & deſcriptum eſt circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt; quod facere oportebat.

Problema 8. Propoſitio 8. In dato quadrato circulum deſcribere.



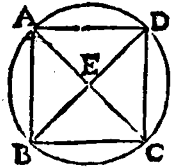
Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD, circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum AB, AD, bifariam in punctis F, E; (1) & per E quidem alterutri ipſarū AB, CD, parallela ducatur EH; (2) per F verò ducatur FK, parallela alterutri AD, BC; parallelogrāmum igitur eſt unūquodque ipſorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD: & latera ipſorum, quæ ex oppoſito ſunt, ęqualia. (3) Et quoniam DA eſt æqualis AB; & ipſius quidem AD, dimidia eſt AE; ipſius verò AB, dimidia AF; erit AE, ipſi AF æqualis; quare, & oppoſita latera æqualia ſunt; ergo FG, eſt æqualis GE. Similiter demonſtrabimus, & utramque ipſarum GH, GK, utrique FG, GE, æqualem eſſe; quatuor igitur GE, GF, GH, GK, inter ſe ſunt æquales. Itaque centro quidē G, intervallo autem una ipſarum GE, GF, GH, GK, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DA, continget prope-

(1) 10. primi. (2) 31. primi. (3) 34. primi.

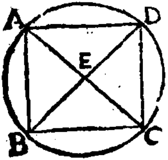
pterea̓,quòd anguli ad E,F,H,K,recti ſunt.Si enim circulus ſecabit rectas lineas AB, BC, CD, DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod eſt abſurdum; (4) non igitur centro quidem G, intervallo autem una ipſarum GE, GF, GH, GK, circulus deſcriptus rectas lineas AB, BC, CD, DA, ſecabit; quare ipſas neceſſario continget: atque erit deſcriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt; quod facere oportebat.

(4) 16. tertij.

Problema 9. Propoſitio 9. Circa datum quadratum circulum deſcribere.



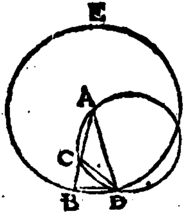
Sit datum quadratū ABCD; oportet circa ABCD, quadratum circulum deſcribere: jungantur enim AC, BD, quæ ſe invicem in puncto E, ſecent. Et quoniā DA eſt æqualis AB, communis autem AC; duæ DA, AC, duabus BA, AC, æquales ſunt; & baſis DC, æqualis baſi CB; erit angulus DAC, angulo BAC, æqualis; angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt recta linea AC. Similiter demonſtrabimus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA, rectis lineis AC, DB, bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB, angulo ABC, eſt æqualis; atque eſt anguli quidem DAB, dimidius angulus EAB, anguli verò ABC, dimidius EBA; & EAB, angulus angulo EBA, æqualis erit; quare, & latus EA, lateri EB, est æquale. Similiter demonstrabimus, & utramque



rectarum linearum EC, ED, utrique EA, EB, æqualem esse; ergo quatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED, inter se sũt æquales; centro igitur E, intervallo autem una ipsarum EA, EB, EC, ED, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa ABCD quadratum; describatur, ut ABCD; circa datum igitur quadratum circulus descriptus est; quod facere oportebat.

Problema 10. Propositio 10. Æquicrure triangulum constituere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB, & secetur in C, puncto, ita ut rectangulum contentum AB, BC, æquale sit ei, quod ex CA, describitur quadrato: (1) & centro quidẽ A, intervallo autem AB, circulus describatur BDE; apteturque



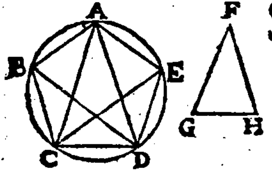
(1) 11. secundi.

turque in BDE circulo recta linea BD, æqualis ipsi AC, quæ non sit major diametro circuli *BDE*; (2) & junctis DA, DC, circa ADC triangulum circulus ACD describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod fit ex AC; æqualis autem est AC ipsi BD; erit ABC rectangulum quadrato, quod ex BD, æquale. Et quoniam extra circulũ ACD, sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B, in circulum ACD, cadunt duæ rectæ lineæ BCA, BD, quarum altera quidem secat, altera verò incidit, atque est rectangulum ABC æquale quadrato, quod ex BD, recta linea BD, circulum ACD, continget. (3) Quoniam igitur BD contingit, & à contactu, qui ad D, ducta est DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur, (4) videlicet angulo DAC. Quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA, est æqualis duobus angulis CDA, DAC. Sed ipsis CDA, DAC, exterior angulus BCD, est æqualis; (5) ergo, & BDA æqualis est ipsi BCD. Sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale; ergo, & DBA, ipsi BCD, æqualis erit. Tres igitur anguli BDA, DBA, BCD, inter se æquales sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD, lateri DC, est æquale. (6) Sed BD, ponitur æqualis ipsi CA, ergo, & AC, est æqualis CD; quare, & angulus CDA, æqua-

(2) 1. hujus. (3) ult. tertij. (4) 32. tertij.
(5) 32. primi. (6) 6. primi.

lis est angulo DAC; anguli igitur CDA, DAC, ipsius anguli DAC dupli sunt; est autem & BCD, angulus angulis CDA, DAC æqualis, ergo, & BCD, duplus est ipsius DAC. Sed BCD, est æqualis utrique ipsorum BDA, DBA; quare, & uterque BDA, DBA, ipsius DAB, est duplus; æquicrure igitur triangulum constitutum est ADB, habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui; quod facere oportebat.

Problema 11. *Propositio* 11. *In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.*



Sit datus circulus ABCDE, oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens utrumque eorũ, qui sunt ad G, H, angulorum duplum anguli, qui est ad F: (1) & describatur in circulo ABCDE, triangulo FGH, æquiangulum triangulum ACD, (2) ita ut angulo quidem, qui est ad F, æqualis sit angulus CAD: utrique verò ipsorum, qui ad G, H, sit æqualis uterque ACD, CDA, & uterque igitur ACD, CDA, anguli CAD, est duplus; secetur uterque ipsorum ACD, CDA, bifariam rectis lineis CE, DB: (3) &

AB,

(1) Ex antecedente (2) 2. hujus. (3) 9. primi.

AB, BC, CD, DE, EA, jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum ACD, CDA, duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE, DB, quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA, inter se sunt æquales; æquales autem anguli in æqualibus circumferentijs insistunt; (4) quinque igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt; (5) ergo, & quinque rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA, inter se æquales sunt; æquilaterum igitur est ABCDE, pentagonum. Dico, & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB, æqualis est circumferentiæ DE, cōmunis apponatur BCD; tota igitur ABCD, circumferentia toti circumferentiæ EDCB, est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD, insistit angulus AED, in circumferentia verò EDCB, insistit BAE. Ergo, & BAE, angulus est æqualis angulo AED. Eadem ratione, & unusquisque angulorum ABC, BCD, CDE, unicuique ipsorum BAE, AED, est æqualis; æquiangulum igitur est ABCDE, pentagonum: ostensum autem est, & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est; quod facere oportebat.

(4) 26. tertij. (5) 29. tertij.

Problema 12. Propositio 12. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE, pentagonum æquilaterum, & æquiangu-

gu-

gulũ describere; intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorũ pũcta A,B,C,D,E, (1) ita ut circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA, sint æquales; & per puncta A,B,C,D,E, ducantur circulũ cõtingentes GH, HK, KL, LM, MG, (2). & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB, FK, FC, FL, FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE, in puncto C, & à centro F, ad contactum, qui est ad C, ducta est FC, erit FC, ad ipsam KL, perpendicularis. (3) Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C; eadem ratione, & anguli, qui ad puncta B, D, recti sunt; & quoniam rectus angulus est FCK, quadratum, quod fit ex FK, æquale est quadratis, quæ ex FC, CK; & ob eandem causam quadratis ex FB, BK, æquale est, quod ex FK, quadratum. Quadrata igitur ex FC, CK, quadratis ex FB, BK, æqualia sunt, quorum, quod ex FC, ei, quod ex FB, est æquale. Ergo reliquum, quod ex CK, reliquo, quod ex BK, æquale erit; æqualis igitur est BK, ipsi CK. Et quoniam FB, est æqualis FC, communis autem FK, due BF, FK, duabus CF, FK, æquales sunt: & basis BK, est æqualis basi KC; erit angulus quidem BFK, angulo KFC, æqualis, (4) angulus verò BKF, angulo FKC; duplus

plus

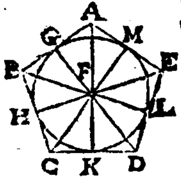
(1) Ex antecedente. (2) 17. tertii. (3) 18. tertii. (4) 8. primi.

plus igitur est angulus BFC, anguli KFC, & angulus BKC, duplus ipsius FKC. Eadem ratione, & angulus CFD, anguli CFL, est duplus: angulus verò CLD, duplus anguli CLF; & quoniam circumferentia BC, circumferentiæ CD, est æqualis, & angulus BFC, angulo CFD, æqualis erit; (5) atque est angulus quidem BFC, anguli KFC duplus: angulus verò DFC, duplus ipsius LFC, æqualis igitur est angulus KFC, angulo CFL. Itaque duo triangula sunt FKC, FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipsis cõmune est FC. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. & reliquum angulum reliquo angulo æqualem (6) recta igitur linea KC, est æqualis rectæ CL, & angulus FKC, angulo FLC. Et quoniam KC, est æqualis CL, erit KL, ipsius KC, dupla. Eadem ratione, & HK, ipsius BK, dupla ostẽdetur. Rursus quoniam BK, ostensa est æqualis ipsi KC, atque est KL, quidem dupla KC. Hk, verò ipsius Bk, dupla: erit Hk, ipsi kL, æqualis. Similiter, & unaquæque ipsarum GH, GM, ML, ostendetur æqualis utrique Hk, kL. Æquilaterum igitur est GHkLM, pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniã enim angulus FkC, est æqualis angulo FLC: & ostensus est ipsius quidem FkC, duplus angulus HkL, ipsius verò FLC, duplus kLM: erit, & HkL, angulus angulo kLM, æqualis. Simili ratione ostendetur, & unusquisque ipsorum kHG, HGM, GML, utrique HkL,

(5) 27. tertii. (6) 26. primi.

HkL, kLM, ęqualis. Quinque igitur anguli GHk, HkL, kLM, LMG, MGH, inter se ęquales sunt; ergo æquiangulum est GHkLM pentagonum; ostensum autem est etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa ABCDE, circulum; quod facere oportebat.

Problema 13. Propositio 13. In dato pentagono, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.



Sit datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE; oportet in ABCDE, pentagono circulum describere; secetur uterque angulorū BCD, CDE, bifariam (1) rectis lineis CF, DF; & à puncto F, in quo conveniunt inter se CF, DF, ducantur rectæ lineæ FB, FA, FE. Quoniam igitur BC, est æqualis CD, cōmunis autem CF, duæ BC, CF, duabus DC, CF, æquales sunt, & angulus BCF, est æqualis angulo DCF; basis igitur BF, basi FD, est æqualis, & BFC triangugulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur; (2) angulus igitur CBF, angulo CDF, ęqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE, angulo ABC, angulus verò CDF, angulo CBF æqualis; erit & CBA, angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus

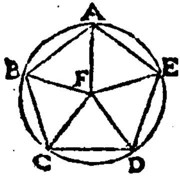
(1) 9. primi. (2) 4. primi.

lus ABF, angulo FBC æqualis; angulus igitur ABC, bifariam sectus est recta linea BF. Similiter demonstrabitur, & unumquemque angulorum BAE, AED, rectis lineis AF, FE, bifariam sectum esse. Itaque à puncto F, ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA, ducantur perpendiculares FG, FH, Fk, FL, FM. Et quoniam angulus HCF, est æqualis angulo kCF; est autẽ, & rectus FHC, recto FkC æqualis; erunt duo triangula FHC, FkC, duos angulos, duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, (3) atque erit perpendicularis FH, perpendiculari Fk, æqualis. Similiter ostendetur, & unaquæque ipsarũ FL, FM, FG, æqualis utrique FH, Fk, quinque igitur rectæ lineæ FG, FH, Fk, FL, FM, inter se æquales sunt; quare centro F, intervallo autem una ipsarum FG, FH, Fk, FL, FM, circulus descriptus, etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea quòd anguli ad G, H, K, L, M, recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdum esse ostensum est; (4) non igitur centro F, & intervallo uno ipsarũ punctorũ G, H, K, L, M, circulus descriptus rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA secabit; quare ipsas contingat necesse est; describatur, ut GHkLM. In dato igi-

(3) 26. primi. (4) 16. tertii.

igitur pentagono, quod est æquilaterum, & æquiangulũ, circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Problema 14. Propositio 14. Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.

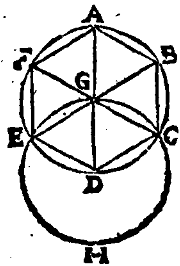


SIt datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE; oportet circa pentagonum ABCDE, circulum describere: secetur uterque ipsorum BCD, CDE, angulorum bifariam rectis lineis CF, FD: & à puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta BAE, ducantur FB, FA, FE. Similiter, ut in antecedenti, demonstrabitur unumquemque angulorum CBA, BAE, AED, rectis lineis BF, FA, FE, bifariam sectum esse. Et quoniã angulus BCD, angulo CDE, est æqualis; atque est anguli quidem BCD, dimidius angulus FCD, anguli vero CDE, dimidius CDF; erit, & FCD, angulus æqualis angulo FDC, quare, & latus CF, lateri FD, est æquale. Similiter demonstrabitur, & unaquæque ipsarũ FB, FA, FE, æqualis unicuique FC, FD; quinque igitur rectæ lineæ FA, FB, FC, FD, FE, inter se æquales sunt; ergo centro F, & intervallo una ipsarum FA, FB, FC, FD, FE, circulus descriptus etiam per reliqua transiiit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum ABCDE, quod æquilaterum est, & æquiangulum; describatur, &

sit

sit ABCDE; circa datum igitur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

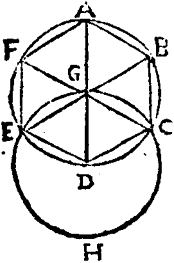
Problema 15. Propositio 15. In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF, hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere; ducatur circuli ABCDEF, diameter AD, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG, circulus describatur EGCH; iunctæ EG, CG, ad puncta B, F producantur, & iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA; dico hexagonum ABCDEF, æquilaterum, & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum, centrum est ABCDEF circuli, erit GE, ipsi GD, æqualis. Rursus quoniam D, centrum est circuli EGCH, erit DE, æqualis DG, sed GE, ipsi GD, æqualis ostensa est; ergo GE, ipsi ED, est æqualis; æquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD, GDE, DEG, inter se æquales sunt, quoniam æquicrurium triangulorum anguli ad basim inter se sunt çquales: (1) & sunt trianguli tres anguli æquales

(1) 5. primi.

les duobus rectis; (2) angulus igitur EGD, duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur, & DGC, duorum rectorum tertia;



& quoniam recta linea CG super rectam EB insistens angulos, qui deinceps sunt EGC, CGB, duobus rectis æquales efficit; (3) erit, & reliquus CGB, tertia duorum rectorum; anguli igitur EGD, DGC, CGB; inter se sunt æquales; ergo, & qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA, AGF, FGE, æquales sunt angulis EGD, DGC, CGB; quare sex anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE, inter se æquales sunt; sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt. (4) Sex igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inter se sunt æquales; æquales autē circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt; (5) ergo, & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est ABCDEF, hexagonum. *Dico*, & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF, circumferentiæ ED, est æqualis, cōmunis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD, circumferentia æqualis est toti circumferentiæ EDCBA; & circumferentiæ quidem FABCD,

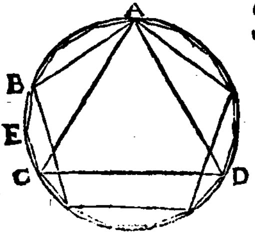
(2) 32. primi. (3) 13. primi. (4) 26. tertii.
(5) 29. tertii.

FABCD, angulus FED insistit, circumferentiæ verò EDCBA, insistit angulus AFE; angulus igitur AFE, angulo DEF, est æqualis. Similiter ostendentur, & reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim ęquales utrique ipsorum AFE, FED, ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonum; ostensum autem est, & æquilaterum esse: & descriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulũ descriptum est. Quod facere oportebat.

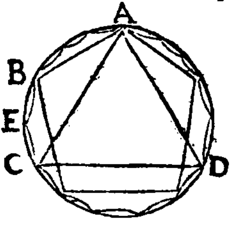
COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei, quæ est ex cẽtro circuli, ęquale esse. Et si per pũcta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum cõsequenter ijs, quæ in pentagono dicta sunt, & pręterea similiter in dato hexagono circulum describemus, & circumscribemus; quod facere oportebat.

Problema 16. Propositio 16. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum ęquilaterum, & æquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD, trianguli quidẽ ęquilateri in ipso describi latus AC, pentagoni verò æquilateri latus AB. Quarum igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidē ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferētia verò AB, quæ quinta est circuli, erit trium; ergo reliqua BC est duarum; secetur BC bifariam in puncto E; quare utraque ipsarum BE, EC circumferētiarū, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur jungentes BE, EC, æquales ipsis in continuum rectas lineas, in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum erit; quod facere oportebat.



Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum, & equiangulum. Et insuper dato quindecagono æquilatero, & æquiangulo circulum describemus, & circumscribemus.

Finis Libri Quarti.

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.
2. Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.
3. Proportio est duarum magnitudinum ejusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.
4. Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.
5. In eadem proportione magnitudines esse dicũtur prima ad secundam, & tertia ad quartã, quando primæ, & tertiæ æque multiplices, secundæ, & quartæ æque multiplices iuxtà quamuis multiplicationem utraque utramque, vel unà superant,

vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt inter se comparatæ.

6. Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundę, multiplex verò tertiæ non superaverit multiplicē quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartã.

8. Analogia est proportionum similitudo.

9. Analogia verò in tribus minimis terminis consistit.

10. Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur ejus, quàm habet ad secundam.

11. Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur ejus, quam habet ad secundam, & semper deinceps una plus, quoad analogia processerit.

12. Homologæ, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

13. Permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. Conversa ratio est sumptio consequentis, ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad consequentē.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis, unà cum consequente tamquam unius ad ipsam consequentem.

16. Di-

16. Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

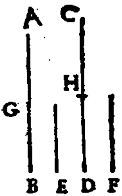
17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. Æqua ratio, sivè ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, fueritque, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Ordinata analogia est quando fuerit, ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata verò analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & alia ipsis numero æqualibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliā quampiam: ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

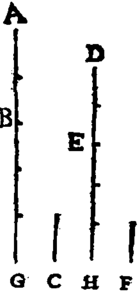
Theorema 1. *Propositio* 1. *Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinū æqualium numero singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo univ[...]uplices erunt, & omnes omnium.*



SInt quotcũque magnitudines AB, CD, quotcumque magnitudinum E,F æqualium numero, singulæ singularũ æque multiplices. Dico quotuplex est AB, ipsius E, totuplices esse, & AB,CD, ipsarum E,F. Quoniam enim AB, æque multiplex est ipsius E, & CD, ipsius F, quot magnitudines sũt in AB æquales ipsi E, tot erũt, & in CD, æquales ipsi F; dividatur AB, quidem in partes ipsi E æquales, quę sint AG, GB: CD verò diuidatur in partes ęquales ipsi F, videlicet CH, HD; erit igitur multitudo partium CH, HD æqualis multitudini ipsarum AG, GB; & quoniam AG, est æqualis E, & CH, ęqualis F, erunt, & AG, CH, æquales ipsi E, F; eadem ratione quoniam GB est æqualis E, & HD, ipsi F, erunt, & GB, HD ęquales ipsis E, F; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt, & in AB, CD, æquales ipsis EF; ergo quotuplex est AB, ipsius E, totuplices erunt, & AB, CD, ipsarum EF; si igitur fuerint quotcũque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum ęque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium; quod demonstrare oportebat.

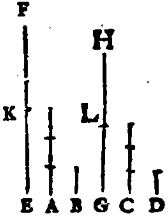
Theorema 2. Propositio 2. Si prima secunda aque multiplex fuerit, ac tertia quarta, fuerit autem, & quinta secunda aque multiplex, ac sexta quarta; erit etiam composita prima, & quinta secunda aque multiplex, ac tertia, & sexta quarta.

Pri-



PRima enim AB, secundæ C æque multiplex sit, ac tertia DE, quartæ F; si autẽ, & quinta BG, secundæ C, æque multiplex, ac sexta EH, quartæ F. Digo, & compositam primam, & quintam AG, secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam, & sextam DH, quartæ F. Quoniam enim AB, æque multiplex est C, ac DE, ipsius F; quot magnitudines sunt in AB, æquales C, tot erunt, & in DE, æquales F; eadẽ ratione, & quot sũt in BG, æquales C, tot & in EH, erunt æquales F; quot igitur sunt in tota AG, æquales C, tot erunt, & in tota DH, æquales F; ergo quotuplex est AG, ipsius C, totuplex est, & DH, ipsius F; & composita igitur prima, & quinta AG, secundæ C æque multiplex erit, ac tertia, & sexta DH, quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autẽ, & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ: erit composita quoque prima, & quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, & sexta quartæ; quod oportebat demonstrare.

Theorema 3. Propositio 3. Si prima secunda æque multiplex fuerit, ac tertia quarta; sumantur autem æque multiplices prima, & tertia, erit, & ex æquali sumptarũ utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secunda, altera verò quarta.



PRima enim A, secũdæ B æque multiplex sit, ac tertia C, quartæ D: & sumantur ipsarum A, C, ęque multiplices EF, GH. Dico EF, æque multiplicem esse ipsius B ac GH ipsius D. Quoniam enim EF, æque multiplex est ipsius A, ac GH, ipsius C; quot magnitudines sũt in EF, ęquales A, tot erunt, & in GH, ęquales C. Dividatur EF, quidẽ in magnitudines ipsi A, æquales EK, KF; GH verò dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL, LH; erit igitur ipsarũ EK, KF multitudo æqualis multitudini ipsarũ GL, LH; & quoniam æque multiplex est A, ipsius B, ac C, ipsius D, æqualis autẽ EK, ipsi A, & GL, ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL, ipsius D; eadẽ ratione æque multiplex erit KF, ipsius B, & LH, ipsiũs D; quoniã igitur prima EK, secũdæ B æque multiplex est, ac tertia GL, quartæ D: est autem, & quinta KF, secundæ B æque multiplex, ac sexta LH, quartæ D: erit, & composita prima, & quinta EF, secũdæ B æque multiplex, ac tertia, & sexta GH, quartæ D. (1) Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ, sumantur autem primæ, & tertiæ æque multiplices: erit, & ex æquali sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ; quod ostendisse oportuit.

Theo-

(1) Ex antecedente.

Theorema 4. Propositio 4. Si prima ad secundam eandem habent proportionem, quam tertia ad quartã, & aque multiplices prima, & tertia ad aque multiplices secunda, & quarta, iuxtà quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt inter se comparata.

PRima enim A, ad secundam B eandem proportionem habeat, quàm tertia C, ad quartam D: & sumantur ipsarum, quidem A,C aliæ utcumque æque multiplices E,F, ipsarum verò B,D alię utcũque æque multiplices G, H; dico E ad G ita esse, ut F, ad H; sumantur enim rursus ipsarum E,F, æque multiplices K,L,& ipsarũ G,H, ęque multiplices M,N. Quoniam igitur E, æque multiplex est ipsius A, atque F, ipsius C; sumuntur autem ipsarum E,F, ęque multiplices K,L: erit K ęque multiplex ipsius A, atque L, ipsius C; (1) eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N, ipsius D; & quoniam est ut A, ad B; ita C, ad D; sumptæ autem sunt ipsarũ A,C, æque multiplices K,L; & ipsarum B,D aliæ utcumque æque multiplices M,N: si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqua-

(1) Ex antecedente.

æqualis: & si minor minor. (2) Suntque K,L, quidem ipsarum E,F æquè multiplices; M,N verò ipsarum G,H aliæ utcumque æquè multiplices; ut igitur E ad G, ita erit F ad H; (3) quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & æquè multiplices primæ, ac tertiæ ad æque multiplices secundæ, ac quartæ iuxtà quamvis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter se comparatæ; quod demonstrare oportebat.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; (4) ac propterea, ut G ad E, ita esse H ad F.

(2) Per conversam quintæ diffin. (3) 5.diffin. (4) 5.diffinit.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est si quatuor magnitudines sint proportionales, & contra proportionales esse.

Theo-

Theorema 5. Propositio 5. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

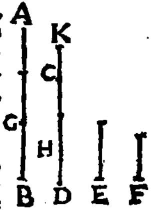
Magnitudo enim AB magnitudinis CD æque multiplex sit, atque ablata AE, ablatæ CF; dico, & reliquam EB reliquæ FD æquè multiplicem esse, atque totam AB totius CD; quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat, & EB ipsius CG; & quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE æquè multiplex CF, & AB ipsius GF, (1) ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, & AB ipsius CD; æque multiplex igitur est AB, utriusque GF, CD; ac propterea GF ipsi CD est æqualis; communis auferatur CF, reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. (2) Itaque quoniã AE æque multiplex est CF, & EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, & EB ipsius FD; æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, & AB ipsius CD; ergo EB est æque multiplex FD, & AB ipsius CD; & reliqua igitur EB reliquę FD æque multiplex est, atq; tota AB totius CD; quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atq; ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, atq; tota totius. Quod oportebat demonstrare.

---

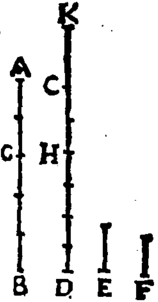
(1) 1. hujus. (2) 2. com. not.

Theorema 6. Propositio 6. Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam

dam sint earumdẽ æque multiplices, erunt & reliqua vel ejusdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.



Duæ enim magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum E, F æque multiplices sint, & ablatę AG, CH earũdẽ sint æque multiplices; dico, & reliquas GB, HD, vel ipsis EF ęquales esse, vel ipsarũ ęque multiplices; sit enim primum GB, æqualis E; dico, & HD, ipsi F esse æqualẽ; ponatur ipsi F, æqualis CK; & quoniam AG æque multiplex est E, & CH, ipsius F; estq; GB, quidẽ æqualis E; CK verò æqualis F: erit AB æque multiplex E, & KH, ipsius F; (1) æque autẽ multiplex ponitur AB, ipsius E, & CD, ipsius F; ergo KH æque multiplex est F, & CD, ipsius F; quoniam igitur utraque ipsarum KH, CD est æque multiplex F, erit KH æqualis CD; communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliqua HD est æqualis. (2) Sed KC est æqualis F; & HD igitur ipsi F est ęqualis; ideoque GB, ipsi E, & HD ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F æque multi-



ti-

(1) 1. hujus. (2) 1. com. not.

tiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinũ æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earumdem æque multiplices erunt, & reliquę vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.

Theorema 7. Propositio 7. Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

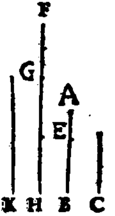
Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipsarum A, B, ad C, eandem proportionem habere: & C, ad utramque A, B, similiter eandem habere proportionẽ. sumantur enim ipsarum A, B, æque multiplices D, E, & ipsius C, alia utcumque multiplex F. Quoniã igitur æquè multiplex est D, ipsius A, & E, ipsius B, estque A, ipsi B æqualis, erit & D æqualis E, (1) alia autem utcumque est F; ergò si D superat F, & E ipsã F superabit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; & sunt DE, quidẽ ipsarum A, B æquè multiplices: F verò alia utcumque multiplex ipsius C; erit igitur, ut A ad C, ita B ad C. (2) Dico insuper C ad utramque ipsarum A, B, eandem habere proportionẽ; iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam verò quandam F; si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqua-

(1) 1. com. not. (2) 5. diff.

æqualis & si minor, minor; atque est F, quidem ipsius C multiplex; DE verò aliæ utcũque æque multiplices ipsarum AB; ergo, ut C ad A, ita erit C ad B; (3) æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

(3) 5. diff.

Theorema 8. Propositio 8. Inæqualium magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem majorem proportionem habet, quam ad majorem.



Sint inæquales magnitudines AB, C: & sit AB major: alia verò utcumq; D; dico AB ad D majorem habere proportionẽ, quod C ad D: & D ad C majorem habere, quam ad AB; quoniam enim AB major est, quam C, ponatur ipsi C æqualis BE. Itaque minor ipsarũ AE, EB, multiplicata major aliquando erit, quod D. (1) Sit primum AE minor, quam EB, & multiplicetur AE, quo ad fiat major, quàm D, sitque ipsius multiplex FG, quæ ipsa D sit major: quotuplex autem est FG, ipsius AE, totuplex fiat, & GH ipsius EB, & K ipsius C; sumaturque ipsius D dupla, quidem L, tripla verò M, & deinceps una plus, quo

(1) 4. diff.

quo ad ea, quæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, & primo major, quã K sumatur, sitque N ipsius D quadrupla, & primo major quam K; quoniam igitur K primo minor est, quam N, non erit K minor, quam M; & cum æque multiplex sit FG ipsius AE, & GH ipsius EB, erit, & FG æque multiplex AE, & FH ipsius AB; (2) æque autẽ multiplex est FG ipsi AE, & K ipsius C; ergo FH æque multiplex est AB, & K ipsius C, ac proptereà FH, K ipsarum AB, C æque multiplices erunt; rursus quoniam GH æque multiplex est EB, & K ipsius C, estque EB æqualis C, erit, & GH ipsi K æqualis. (3) Sed K non est minor, quam M; non igitur GH minor est, quam M, major autem FG, quam D; ergo tota FH utrisque DM major erit. Sed utræque D, M sunt æquales N, est enim M tripla ipsius D, & utræque MD ipsius D quadruplæ, est aũt, & N quadrupla D; utræque igitur MD ipsi N æquales sunt, sed FH major est quam MD. Quare FH superat N, K verò ipsam N non superat, & sunt FH, K æque multiplices ipsarum AB, C, & N, ipsius D, alia utcũque multiplex; ergo AB, ad D majorem proportionẽ habet, quam C, ad D. (4) Dico prætereà, & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB; iisdẽ enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam verò FH non superare, atque est N multiplex ipsius D, & FH, K, aliæ utcumq; ipsarum AB, C æque multiplices; ergo D ad C majorem proportionem habet, quàm D ad AB. Sed sit AE major, quam EB; erit mi-

(2) 1. hujus. (3) 1. com. not. (4) 7. diff.

minor EB multiplicata aliquando major, quàm D; multiplicetur, & sit GH multiplex quidem ipsius EB, major verò, quam D; & quotuplex est GH, ipsius EB, totuplex fiat, & FG, ipsius AE, & K ipsius C; simili ratione ostendemus FH, K ipsarũ AB, C æque multiplices esse; sumatur deinde N multiplex D, primo autẽ major, quam FG, ergo rursus FG non est minor, quã M: major autem FG, quam D, tota igitur FH superat DM, hoc est N; & K ipsam N nõ superat: quoniam EG major existens, quam GH, hoc est quam K, nõ superat N; & similiter, ut in iis, quę superius dicta sunt, demonstrationem absolvemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor, & eadem ad minorem majorem proportionẽ habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

Theorema 9. Propositio 9. Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter se æquales sunt; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsa inter se sunt æquales.

HAbeat enim utraque ipsarum A, B ad C eãdem proportionem. Dico A, ipsi B, æqualem esse, nam si non esset æqualis, non haberet utraque ipsarũ

A, B

A, B ad eandem proportionem. (1) habet autem; æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eãdem proportionem. Dico A æqualem esse ipsi B; nisi enim ita sit, nõ habebit C ad utramque A, B eandem proportionem; (2) habet autẽ; ergo A ipsi B necessario est æqualis; quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales; quod demonstrare oportebat.

(1) Ex antecedente. (2) Ex antecedente.

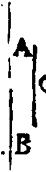
Theorema 10. *Propositio* 10. *Ad eandem proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam verò eadem majorem habet proportionem, illa minor est.*

HAbeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. Dico A, quam B majorem esse; si enim non est major, vel æqualis est, vel minor; æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad C eandem haberet proportionem; (1) atqui eandem non habet; non igitur A ipsi B est æqualis. Sed neque minor est A quam B; haberet enim A ad C minorẽ proportionem, quã B; (2)

M atqui

(1) 7. hujus. (2) 8. hujus.

atqui non habet minorem, non igitur A minor est, quam B; ostensum autem est neque esse æqualem; ergo A quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem proportionem, quam C ad A. Dico B minorem esse, quam A; si enim non est minor, vel æqualis est, vel maior; æqualis utique non est B ipsi A; etenim C ad utramque ipsarum A, B eandem proportionem haberet; (3) non habet autem; ergo A ipsi B non est æqualis. Sed neque major est B, quam A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quã ad A; (4) atqui non habet; non igitur B quam A est major. Ostensum autem est neque æqualem esse; ergo B minor erit, quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est: & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est; quod oportebat demonstrare.



(3) 7. hujus. (4) 8. hujus.

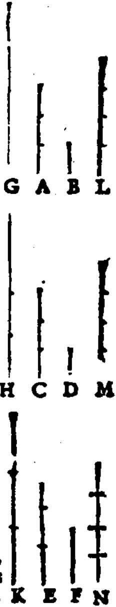
Theorema 11. Propositio 11. Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

Sit enim, ut A ad B, ita C ad D: ut autem C ad D, ita E ad F. Dico, ut A ad B, ita esse E ad F; sumantur enim ipsarũ, quidem A, C, E æque multiplices G, H, K; ipsarum verò B, D, F aliæ utcũque æque multiplices L, M, N. Quoniã igitur est, ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C æque multiplices G,H,& ipsarum B,D aliæ utcumque æque multiplices L,M, si G superat L,& H ipsã M superabit,& si æqualis, æqualis;& si minor,minor;(1) Rursus quoniã est, ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarũ C, E ęque multiplices H,K; ipsarum verò D,F aliæ utcumque æque multiplices M,N, si H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; sed si H superat M,& G superabit L;& si æqualis,æqualis; & si minor minor; quare si G superat L,& K ipsam N superabit;& si æqualis, æqualis & si minor, minor; & sunt G,K quidem ipsarum A,E æque multiplices; L,N verò ipsarũ B,F aliæ utcumque æque multiplices; ergo, ut A ad B, ita erit E ad F, (2) quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt, quod ostendisse oportuit.

(1) Ex conversa 5. diff. (2) 5.diff.

Theorema 12 *Propositio* 12. *Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una ante edentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.*

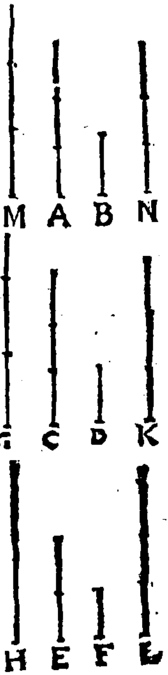
SInt quotcũque magnitudines proportionales A,B, C,D,E,F,& ut A ad B,ita sit C ad D,& E ad F. Dieo, ut A ad B; ita esse A,C,E ad B,D,F; sumãtur enim ipsarũ A,C,E æq; multiplices G,H,K,& ipsarũ B,D,F aliæ utcũq; ęque multiplices L,M,N. Quoniã igitur, ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sũptæ sunt ipsarum, quidem A,C,E æque multiplices G,H,K, ipsarũ verò B,D,F aliæ utcũque ęque multiplices L,M,N; si G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; (1) quare, & si G superat L, superabũt, & G,H,K ipsas L,M,N, & si æqualis, æquales; & si minor, minores; suntque G, & G,H,K ipsarum A, & A,C,E æque multiplices: quoniam si fuerint quotcũque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium; (2) eadẽ ratione, & L, & L,M,N ipsarum B, & B,D,F sũt æque multiplices; est igitur, ut A ad B, ita A,C,E ad B,D,F; (3) quare si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentiũ, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes; quod demonstrare oportebat.



Theo-

(1) Per conversam. 5. diff. (2) 1. hujus. (3) 5. diff.

Theorema 13. Propositio 13. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat, quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem, quã quinta ad sextam.



PRima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem, quam quinta E ad sextam F. Dico, & primam A ad secundam B, majorem proportionem habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet, quam E ad F, sunt quædam ipsarũ C, E æque multiplices, & ipsarum D, F aliæ utcumque æque multiplices: & multiplex quidẽ C superat multiplicem D; multiplex verò E nõ superat multiplicem F. (1) Sumãtur, & sint ipsarum C, E ęque multiplices G, H, & ipsarum D, F

M 3 aliæ

(1) Per conversam. 7. diff.

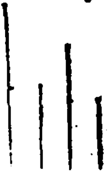
aliæ utcumque æque multiplices K, L, ita ut G, quidē superet K: H verò ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit, & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit, & N ipsius B; & quoniam est, ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C æque multiplices M, G, & ipsarū B, D aliæ utcumque æque multiplices N, K: si M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. (2) Sed G superat K; ergo, & M ipsam N superabit, H verò non superat L, suntque M, H ipsarum A, E æque multiplices, & N, L ipsarū B, F aliæ utcumque æque multiplices; ergo A ad B majorem proportionem habebit, quàm E ad F; (3) si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam majorem proportionem habeat, quam quinta ad sextā, & prima ad secundam majorem babebit proportionem, quam quinta ad sextam: quod ostendere oportebat.

(2) Per conversam. 5. diff. (3) 7. diff.

Theorema 14. Propositio 14. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem major sit, quam tertia, & secunda quam quarta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: ma-

major autem ſit A quàm C. Dico, & B quàm D majorem eſſe. Quoniam enim A major eſt quam C, & alia utcumque magnitudo B, habebit A ad B majorem proportionem, quàm C ad B. (1) Sed, ut A ad B, ita C ad D; ergo, & C ad D majorem habebit proportionem, quàm C ad B; (2) ad quã verò eadem majorem proportionem habet, illa minor eſt. (3) Quare D eſt minor, quàm F, ac proptereà B quam D major erit. Similiter demonſtrabimus, & ſi A æqualis ſit ipſi C, & B ipſi D eſſe æqualem, & ſi A ſit minor, quam C, & B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, prima autem major ſit, quàm tertia, & ſecunda, quàm quarta major erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor, quod demonſtrare oportebat.



A B C D

(1) 8. hujus. (2) Ex antecedente. (3) 10. hujus.

Theorema 15. Propoſitio 15. Partes eodem modo multiplicium inter ſe comparatæ eandem habent proportionem.

Sit enim AB æque multiplex C, & DE ipſius F. Dico, ut C ad F, ita eſſe AB ad DE; Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius C, & DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi C, totidem erunt, & in DE æquales F; dividatur AB in

magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG, GH, HB, & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK, KL, LE; erit igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo æqualis multitudini DK, KL, LE; & quoniam æquales sunt AG, GH, HB, suntque DK, KL, LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, & HB ad LE; atque erit, ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia, (1) *est* igitur, ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F; ergo, ut C ad F, *ita erit* AB ad DE; partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionẽ; quod ostendendum fuit.

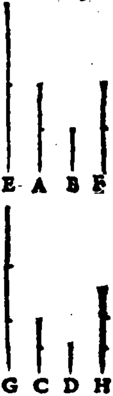
---

(1) 12. hujus.

Theorema 16. Propositio 16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutata proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, sitque, ut A ad B, ita C ad D. Dico, & permutatas proportionales esse, videlicet, ut A ad C, ita esse B ad D. Sumãtur enim ipsarum, quidem A, B ęque multiplices E, F, ipsarum verò C, D alię utcumque æque multiplices G, H; & quoniam æque multiplex

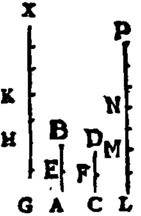
plex est E ipsius A, & F ipsius B, partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem: (1) erit, ut A ad B, ita E ad F, *ut autem A ad B, ita C ad D*; ergo, & ut C ad D, ita E ad F; rursus quoniam G,H sunt ipsarum C,D æque multiplices, partes autem eodem modo multiplicium eandem proportionẽ habent inter se comparatæ, (2) erit, ut C ad D, ita G ad H; sed, ut C ad D, ita E ad F; ergo, & ut E ad F; ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit, quàm tertia; & secunda quã quarta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. (3) Si igitur E superat G, & F ipsã H superabit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor: suntque E, F ipsarũ A, B æque multiplices, & C,H ipsarum C,D, aliæ utcumque æque multiplices, ergo, ut A ad C, ita erit B ad D. (4) Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.



Theo-

(1) Ex antecedente (2) 11. hujus. (3) 14 hujus. (4) 5. diff.

Theorema 17. Propositio 17. Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.



Sint cōpositæ magnitudines proportionales AB, BE, CD, DF; sitque, ut AB ad BE, ita CD ad DF; dico etiā divisas ptoportionales esse; videlicet, ut AE ad EB, ita esse CF ad FD; sumātur enim ipsarum, quidem AE, EB, CF, FD, æque multiplices GH, HK, LM, MN, ipsarum verò EB, FD, aliæ utcumque æque multiplices KX, NP; & quoniā æque multiplex est GH ipsius AE, & HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque multiplex, & GK ipsius AB; (1) æque autem multiplex est GH ipsius AE, & LM ipsius CF; (2) ergo GK æque multiplex est AB, & LM ipsius CF; rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, & MN ipsius FD; erit LM æque multiplex CF, & LN ipsius CD. (3) Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB; æque igitur multiplex est GK ipsius AB, & LN ipsius CD; (4) quare GK, LN, ipsarum AB, CD æque multiplices erunt. Rursus quoniā æque multiplex est HK ipsius EB, & MN ipsius FD, est autem, & KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque

(1) 1.hujus. (2) 11.hujus. (3) 8.hujus.
(4) 11.hujus.

æque multiplex eſt,& MP ipſius FD; *(5)* quod cum ſit, ut AB ad BE, ita CD ad DF, & ſumptæ ſint ipſarum, quidem AB, CD, æque multiplices GK, LN, ipſarum verò EB, FD aliæ utcumque æque multiplices HX, MP; ſi GK ſuperat HX,& LN ſuperabit MP, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor (6) ſuperet igitur GK ipſam HX, communique ablata HK,& GH ipſam KX ſuperabit; ſed ſi GK ſuperat HX, & LN ſuperat MP; itaque ſuperet LN, ipſam MP, communique MN ablata, & LM ſuperabit NP; quare ſi GH ſuperat KX, & LM ipſam NP ſuperabit. Similiter demonſtrabimus, & ſi GH ſit æqualis KX, & LM ipſi NP eſſe æqualem, & ſi minor, minorem; ſunt autem GH, LM ipſarum AE, CF æque multiplices, & ipſarum EB, FD aliæ utcumque æque multiplices KX, NP; ergo, ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. (7) Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diuiſæ proportionales erunt. Quod demonſtrare oportebat.

---

(5) 2.hujus. *(6)* Ex conversa 5.diff. (7) 5.diff.

Theorema 18. Propoſitio 18. Si diviſa magnitudines ſint proportionales, & compoſita proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines proportionales AE, EB, CF, FD: & ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compoſitas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad BE, ita eſſe CD ad DF. Si enim non eſt, ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit, ut AB ad BE, ita CD

vel

vel ad minorem, quàm DF, vel ad majorem. Sit primum ad minorem, nempè ad DG; & quoniam est, ut AB ad BE, ita CD ad DG compositæ magnitudines sũt proportionales; ergo, & divisæ proportionales erunt; (1) est igitur, ut AE ad EB, ita CG ad GD; ponitur autem, & ut AE ad EB, ita CF ad FD; quare, & ut CG ad GD, ita CF ad FD; (2) at CG prima major est, quam tertia CF; ergo, & secũda DG, quàm quarta DF major erit; (3) sed, & minor, quod fieri non potest; non igitur est, ut AB ad BE, ita CD ad DG; similiter ostendemus neque esse ad majorem, quàm DF; ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demostrare.

(1) Ex antecedente. (2) 11. hujus. (3) 14. hujus.

Theorema 19. Propositio 19. Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

Sit enim, ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF; dico, & reliquam EB ad reliquã FD ita esse, ut tota AB ad totam CD; quoniam enim est, ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF, & permutando erit, ut BA ad AE, ita DC ad CF; (1) quoniam

(1) 16. hujus.

niam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ proportionales erunt, (2) ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC, rursusque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. Sed, ut AE ad CF, ita posita est AB ad CD; & reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD; (3) quare si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.

Et quoniam ostensum est, ut AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit permutãdo, ut AB ad BE, ita CD ad DF; ergo compositæ magnitudines proportionales sunt; ostensum autem est, ut BA ad AE, ita DC ad CF, quod est per conversionẽ rationis.

(2) 17. hujus. (3) 11. hujus.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur perspicuum est si composita magnitudines sint proportionales, & per conversionem rationis proportionales esse.

Factæ autem sunt proportiones, & in æque multiplicibus, & in analogiis; nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartæ, erit, & ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam; sed non item

item ex contrario convertitur. Si enim sit, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, non omnino erit prima, quidem secundæ æque multiplex, tertia verò, quartæ, velut in sesquialteris, vel in sesquitertiis proportionibus, vel aliis ejusmodi. Quod demonstrare oportebat.

Theorema 20. Propositio 20. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, ex æquali autem prima major sit, quàm tertia, & quarta quàm sexta major erit; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

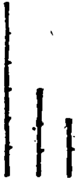
Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æquales D, E, F binæ sũptæ, & in eadem proportione, sitque ut A, ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F, ex æquali autẽ major sit A, quod C Dico, & D quam F majorem esse, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem. Quoniam enim A major est, quàm C, alia vero utcumque B, & major ad eandem majorem habet proportionem, quàm minor, (1) habebit A ad B majorem proportionem, quam C ad B. Sed, ut A ad B, ita D ad E, & convertendo, ut C ad B; ita F ad E; ergo, & D ad E majorem habet proportionem, quàm F ad E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ majorem ha-

(1) 8. hujus.

habet proportionem, illa major est; (2) major igitur est D quam F. similiter ostendemus, & si A sit æqualis C, & D ipsi F æqualem esse, & si minor, minorem. *S*i igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, ex æquali autem prima major sit, quam tertia, & quarta quam sexta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.

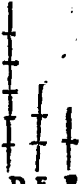
(2) 10. hujus.

Theorema 21. Propositio 21. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia; & quarta quā sexta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.



A B C

SInt tres magnitudines proportionales A, B, C, & aliæ ipsi numero æquales D, E, F, binæ sūptę, & in eadē proportione. Sit aūt perturbata earū analogia, videlicet, ut A quidem ad B; ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit, quam C. Dico, & D quam F majorem esse; & si æqualis, ęqualem, & si minor, minorē. Quoniam enim major est A, quam C, alia vero B; habebit A ad B majorem proportio-



D E F

tionem quam C ad B. (1) Sed,ut A ad B,ita E ad F, & convertendo,ut C ad B,ita E ad D. Quare, & E ad F majorem habebit proportionem, quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionẽ habet, illa minor est; (2) minor igitur est F, quàm D; ac propterea D quam F major erit. Similiter ostendemus, & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta, quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; quod demonstrare oportebat.

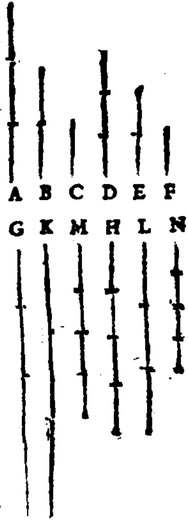
(1) 8.hujus. (2) 10.hujus.

Theorema 22. Propositio 22. Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcumque magnitudines A,B,C,& aliæ ipsis numero æquales D,E,F binæ sumptæ in eadẽ proportione, sitque, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico, & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A,D ęque multiplices G,H; ipsarum vero B,E aliæ utcumque æque multiplices K,L, & ipsarum C,F aliæ utcumque æque

mul-

multiplices M,N Quoniã igitur est, ut A ad B, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A, D, æque multiplices G, H, & ipsarum B, E, aliæ utcumque ęque multiplices K, L; erit, ut G ad K, ita H ad L. (1) Eadem quoque ratione erit, ut K ad M, ita L ad N. Et cũ sint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipsis numero æquales H, L, N, binæ sumptæ, & in eadem proportione, ex æquali si G superat M, & H ipsam N superabit; & si æqualis, ęqualis; & si minor, minor (2) suntque G, H, ipsarum A, D æque multiplices, & M, N ipsarum C, F alię utcumque æque multiplices. Ut igitur A ad C, ita erit D ad F. (3) Quare si sint quotcũque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, in eadem proportione, & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

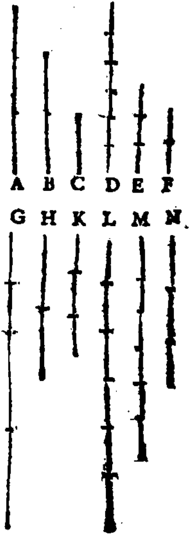


N *Theo-*

(1) 4 hujus. (2) 20. hujus. (3) 5. diff.

Theorema 23. Propositio 23. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A,B, C, & aliæ ipsis numero æquales binæ sumptæ in eadē proportione D,E,F; sit autem perturbata earum analogia, & sit, ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico, ut A ad C, ita esse D ad F; sumantur ipsarum quidem A,B,D, æque multiplices G,H,L, ipsarum verò C,E,F, aliæ utcumque æque multiplices K,M,N; & quoniam G, H æque multiplices sunt ipsarum A, B, partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem; (1) erit, ut A ad B, ita G ad H; & simili ratione, ut E ad F, ita M ad N; atque est, ut A ad B, ita E ad F; ut igitur G ad H, ita M ad N; (2) rursus quoniam est, ut B ad C, ita D ad



(1) 15.hujus. (2) 11.hujus.

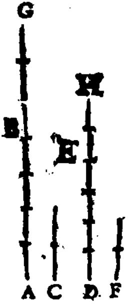
ad E, & sumptæ sunt ipsarum B, D, æque multiplices H, L, ipsarum vero C, E aliæ utcumque æque multiplices K, M: erit, ut H ad K, ita L ad M; (3) ostensum autem est, & ut G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G,H,K, & aliæ ipsis numero æquales L,M,N binæ sumptæ in eadem proportione, estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali si G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. (4) sunt autem G,K ipsarum A,C æque multiplices, & L, N æque multiplices ipsarum D, F, ut igitur A ad C, ita erit D ad F; (5) quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt: quod demonstrare oportebat.

(3) 4.hujus. (4) 21.hujus. (5) 5.diff.

Theorema 24. Propositio 24. Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem, & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima, & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

PRima enim AB, ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem, & quinta BG ad secundam C proportionem eandem, quam sexta EH ad quartam F. dico,

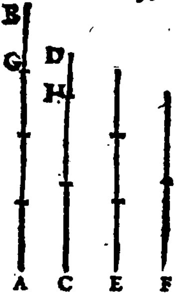
& compositam primam, & quintam AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & sextam DH ad quartam F: quoniam enim est, ut BG ad C, ita EH ad F: erit convertendo, ut C ad BG, ita F ad EH: & quoniam, ut AB ad C, ita est DE ad F, ut autem C ad BG, ita F ad EH: erit ex æquali, ut AB ad BG, ita DE ad EH: (1) quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt: ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE: sed, & ut GB ad C, ita EH ad F: ergo ex æquali, ut AG ad C, ita erit DH ad F: si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam: habeat autem, & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima, & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.



(1) 22. hujus.

Theorema 25. Propositio 25. Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis majores erunt.

SInt quatuor magnitudines proportionales AB, CD, EF: & sit ut AB ad CD, ita E ad F: sit au-



autem maxima ipsarum AB, & F minima: dico AB, F ipsis CD, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita E ad F estque AG æqualis E, & CH æqualis F: erit, ut AB ad DC, ita AG ad CH, & quoniam ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH: & reliqua GB ad reliquam HD erit, ut tota AB ad CD totam. (1) major autem est AB, quàm CD: ergo, & GB, quàm HD major: quòd cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F: erunt AG, F ipsius CH, E æquales: si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt: ergo GB, HD inæqualibus existentibus, quippè cum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG, F, ipsi verò HD addantur CH, E, fient AB, F ipsis CD, F necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.

(1) 19. hujus.

Theorema 26. Propositio 26. Si prima ad secundam majorem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & convertendo secunda ad primam minorem propor-

tionem habebit, quam quarta ad tertiam.

HAbeat AB ad BC majorem proportionẽ, quam DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quam FE ad ED; ut enim AB ad BC, ita sit DE ad aliam

aliquam, ut ad G; ergo DE ad G majorem habebit proportionem, quam DE ad EF, (1) ac propterea G minor erit, quam EF; ponatur ipsi G æqualis EH. Quoniam igitur est, ut AB ad BC, ita DE, ad EH; erit convertendo, ut CB ad BA, ita HE ad ED. Sed HE ad ED minorem proportionem habet, quam FE ad ED, ergo, & CB ad BA minorem habebit proportionem, quam FE ad ED, quod demonstrare oportebat.

Similiter autem, & si AB ad BC minorem proportionẽ habeat, quam DE ad EF; demonstrabimus convertendo CB ad

BA majorem habere proportionem, quam FE ad ED; sed, ut AB ad BC, ita sit DE ad aliam, ut ad EG quæ major erit, quàm EF; quare convertendo, ut CB ad BA, ita GE ad ED; at GE ad ED majorem habet proportionem, quam FE ad ED; ergo CB ad BA majorem proportionẽ habebit, quam FE ad ED.

(1) 8. hujus.

COROLLARIUM.

Ex his constat, si AB ad BC majorem proportionem

nem habeat, quam DE ad EF, & FE ad ED majorem habere proportionem, quam CB ad BA. Et si AB ad BC minorem habeat proportionem, quam DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quam CB ad BA.

Theorema 27. Propositio 27. Si prima ad secundam majorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam majorem habebit proportionem, quam secunda ad quartam.

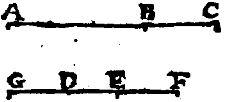
Habeat AB ad BC majorem proportionẽ, quam DE ad EF; dico AB ad DE majorem proportionem habere, quam BC ad EF; ut enim AB ad BC, ita alia quædam GE sit ad EF; manifestum est eam majorem esse, quàm DE; (1) quare permutando, ut AB ad GE, ita est BC ad EF; habet autem AB ad DE majorem proportionem, quam AB ad GE, hoc est quam BC ad EF; ergo AB ad DE majorem proportionem habebit, quam BC ad EF; quod oportebat demonstrare.

Eadem ratione, & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quam DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quam BC ad EF; erit enim, ut AB ad BC, ita alia quædam GE ad

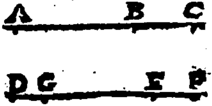
(1) 8. hujus.

EF, quæ minor sit, quàm DE. Sed AB ad DE minorem habet proportionem, quam AB ad GE, videlicet quam BC ad EF: habebit igitur AB ad DE minorem proportionem, quam BC ad EF.

Theorema 28. *Propositio* 28 *Si prima ad secundam majorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam: etiam componendo prima, & secunda, ad secundam majorem proportionem habebit, quam tertia, & quarta, ad quartam.*



Habeat AB ad BC majorem proportionem, quam DE ad EF; dico AC ad CB majorē habere proportionem, quam DF ad FE, ut enim AB ad BC, ita sit alia quædam GE ad EF; erit GE major, quàm DE; (1) quoniam igitur est, ut AB ad BC, ita GE ad EF; erit componendo, ut AC ad CB, ita GF ad FE. (2) Sed GF ad FE majorem proportionem habet, quam DF ad FE; (3) ergo, & AC ad CB majorem habebit proportionem, quam DF ad FE; quod demonstrare oportebat.



Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quam DE ad EF; habebit etiam componendo AC ad CB minorem proportionē, quam DF ad FE;

rur-

(1) 8.hujus. (2) 18.hujus. (3) 13.hujus.

rursus enim, quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quam DE ad EF, si ut AB ad BC, ita sit alia quædam ad FE, velut GB, erit ea minor quàm DE, (4) & ut AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE; ergo, & AC ad CB minorem proportionem habebit, quàm DF ad FE.

(4) 8.hujus.

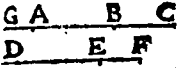
Theorema 29. Propositio 29. Si prima, & secunda, ad secundam majorem habeat proportionem, quam tertia, & quarta, ad quartam, & dividendo prima ad secundam majorem proportionem habebit, quam tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB majorem proportionem, quam DF ad FE; dico AB ad BC, majorem proportionem habere, quam DE ad EF; ut enim DF ad FE, ita sit alia quædam GC ad CB; erit utique GC minor, quàm AC: (1) & dividendo GB ad BC, ut DE, ad EF, (2) at AB ad BC majorem proportionem habet, quam GB ad BC; (3) ergo, & AB ad BC majorem habebit proportionem, quam DE ad EF.

Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quam

(1) 8.hujus. (2) 17 hujus. (3) 13.hujus.

quam DF ad FE ; & dividendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quam DE ad EF ; (4) si enim rursus sit, ut DF ad FE, ita alia quædam



GC ad CB ; erit GC quàm AC major : atque erit dividendo GB ad BC, ut DE ad EF ; (5) habet autem AB ad BC minorem proportionem, quam GB ad BC ; ergo, & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF.

(4) 8. hujus. (5) 17. hujus.

Theorema 30. *Propositio* 30. *Si prima, & secunda, ad secundam majorem proportionem habeat, quam tertia, & quarta, ad quartam; per conversiònem rationis prima, & secunda, ad primam, minorem habebit proportionem, quam tertia, & quarta ad tertiam.*

HAbeat AC ad CB majorem proportionẽ, quam DF ad FE ; dico CA ad AB minorem habere proportionẽ, quam FD ad DE : sit enim, ut

AC ad CB, ita DF ad aliam quandam, erit utique ad minorem, quàm FE, velut ad FG ; quare per conversionem rationis, ut CA ad AB, ita erit FD ad DG, (1) sed FD ad DG minorem proportionem habet, quam FD ad DE ; ergo, & CA ad AB minorem habebit proportionem, quam FD ad DE.

Si-

(1) Coroll. 19. hujus.

Similiter autem,& si AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per conversionem rationis CA ad AB majorem proportionẽ, quam FD ad DE; erit enim, ut AC ad CB, ita DF ad FG majorẽ, quàm FE; reliqua vero manifesta erunt.

Theorema 31. Propositio 31. Si prima ad tertiam majorem proportionem habeat, quam secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit majorem proportionem, quam prima,& secunda ad tertiam, & quartã.

Habeat AB ad DE majorem proportionẽ, quam BC ad EF, dico, & AB ad DE majorem proportionem habere, quam AC ad DF. Sit enim, ut AB ad DE, ita BC ad aliam; erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG; tota igitur AC ad totam DG est, ut AB ad DE. (1) Sed AC ad DG majorem proportionem habet, quam ad DF; (2) ergo AB ad DE majorem habebit proportionem quam AC ad DF, & manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quam AB ad DE, & si minor sit proportio partis, totius major erit.

Theo-

(1) 12.hujus. (2) 8.hujus.

Theorema 32. Propositio 32. Si tota ad totam majorem habeat proportionem, quam ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam majorem proportionem habebit, quam tota ad totam.

HAbeat AC ad DF majorem proportionem, quam AB ad DE. Dico, & reliquam BC ad reliquam EF majorem proportionem habere, quam AC

ad DF Sit enim, ut AC ad DF, ita AB ad DG, ergo, & reliqua BC ad reliquam GF est, ut AC ad DF. (1) Sed BC ad EF majorem proportionem habet, quam ad FG; ergo, & BC ad EF majorem habebit proportionem, quam AC ad DF.

Si vero AC ad DF minorē proportionem habeat, quam AB ad DE, & reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quam AC ad DF, quod eodem, quo suprà, modo ostendetur.

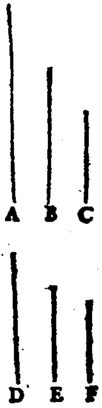
---

(1) 19. hujus.

Theorema 33. Propositio 33. Si sint tres magnitudines, & alia ipsis numero aequales, habeatque prima priorum ad secundam majorem proportionem, quam prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam majorem proportionem habeat, quam secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex aequali prima priorum ad tertiam majorem habebit proportionem, quam prima posteriorum ad tertiam.

Ha-

HAbeat A ad B majorem proportionem, quam D ad E, & B ad C majorem proportionem habeat, quā E ad F. Dico ex æquali A ad C majorem habere proportionem, quam D ad F. Quoniam enim A ad B majorem proportionem habet, quam D ad E, habebit permutando A ad D majorem proportionem, quam B ad E, (1) & eadem ratione B ad E majorem, quam C ad F; ergo A ad D majorem habet proportionem, quam C ad F; & rursus permutando A ad C majorem habebit, quam D ad F. (2) Quod oportebat demonstrare.



Quod si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionē, quam prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam minorem proportionē habeat, quam secunda posteriorum ad tertiam: similiter demonstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quam primam posteriorum ad tertiam.

---

(1) 27.hujus. (2) 27.hujus.

Finis Libri Quinti.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

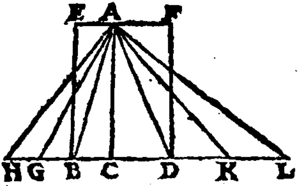
Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.
2. Reciprocæ figuræ sunt, quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationes fuerint.
3. Extrema, ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit, ut tota ad majorem portionem, ita major portio ad minorem.
4. Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.
5. Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

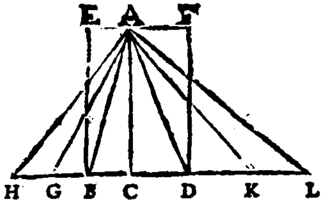
Theo-

Theorema 1. Propositio 1. Triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases.



Sint triangula quidem ABC, ACD parallelogramma vero EC, CF, quæ eandem habeãt altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad B,D ductam. Dico, ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; producatur enim BD ex utraq; parte ad puncta H, L, & ipsi quidem BC basi æquales quotcumque ponantur BG, GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcumque æquales DK, KL, & AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter se æquales sunt, erunt, & triangula AHG, AGB, ABC inter se æqualia; (1) ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est, & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis

(1) 38. primi.



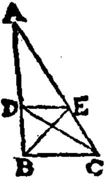
lis est HC basis basi CL, & triangulū AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulū AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC, CD, & duobus triangulis ABC, ACD, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem BC, & ABC *trianguli*, videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia utcumque æque multiplicia, nempè CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus; (2) est igitur, ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, (3) & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum: partes autem eodem modo multiplicium eandem inter se proportionem habent, (4) erit, ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensū est,

2) 5. diff. quinti. (3) 41. primi. (4) 15. quinti.

eſt, ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulũ ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammũ erit, ut BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammũ. (5) Quare triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, ut baſes; quod demonſtrare oportebat.

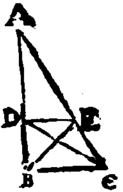
(5) 11. quinti.

Theorema 2. Propoſitio 2. Si uni laterum trianguli parallela quadam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera; & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.



TRianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE. Dico, ut BD ad DA, ita eſſe CE ad EA. Iungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi DE, & in eiſdem DE, BC parallelis; (1) aliud autem triangulum eſt ADE: ſed æqualia ad idem eandem habent proportionẽ; (2) ergo, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt BD ad

(1) 37. primi. (2) 7. quinti.

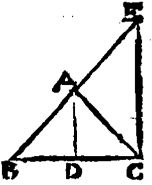


DA; nam cũ eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularẽ à puncto E ad AB ductam, inter se sunt, uti bases; (3) & ob eandem causam, ut CDE triãgulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. (4) Et ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta sint, & ut BD ad DA, ita sit CE ad EA: & jungantur DE. Dico DE ipsi BC parallelã esse; iisdem enim constructis, quoniam est, ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. (5) Quod cum utrumque triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; (6) & sunt in eadem basi DE; æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem sunt parallelis; (7) ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit; quod oportebat demonstrare.

Theo-

(3) Ex antecedente. (4) 11. quinti. (5) 11. quinti. (6) 9. quinti. (7) 40. primi.

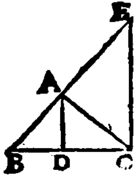
Theorema 3. Propositio 3. Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiã basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.



SIt triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. (1) dico, ut BD ad DC, ita esse BA ad AC; ducatur enim per C ipsi DA parallela CE, (2) & producta BA conveniat cum ipsa in E pũcto. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea quædam AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. (3) Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. Ergo, & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC; ostensus autem est, & angulus ACE angulo BAD æqualis; ergo, & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. (4) Et quoniã uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit, ut BD ad DC, ita BA ad AE; (5) æqualis autem est AE ipsi AC; est igitur, ut BD ad DC, ita BA ad AC. (6) Sed

O 2 sit,

(1) 9.primi. (2) 31.primi. (3) 29.primi.
(4) 6.primi. (5) Ex antecedente. (6) 7.quinti.



fit, ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD; iisdem enim constructis quoniam est, ut BD ad DC, ita BA ad AC; Sed, & ut BD ad DC, ita BA ad AE, etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, (7) erit, & ut BA ad AC, ita BA ad AE; ergo AC est æqualis AE, (8) ac propterea, & angulus AEC angulo ECA æqualis. Sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD; (9) quare, & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit; angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

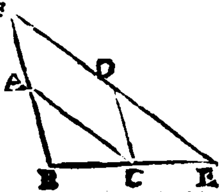
---

(7) Ex antecedente. (8) 9. quinti. (9) 29. primi.

Theorema 4. Propositio 4. Æquiangulorum triangulorũ latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt, & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, quæ angulum

qui-

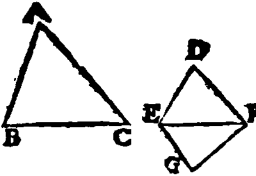


quidē ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & prætereà angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, DCE proportionalia esse latera, quę sunt circa æquales angulos, & homologa, sivè ejusdē rationis latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC, ACB duobus rectis minores sunt, (1) æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores; quare BA, ED productæ inter se convenient; producantur, & conveniant in puncto F; & quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC, erit BF ipsi DC parallela (2) Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE; parallelogrammum igitur est FACD; ac prptereà FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est æqualis. (3) Et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit, ut BA ad AF, ita BC ad CE; (4) æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur BA ad CD; ita BC ad CE, (5) & permutando, ut AB ad BC, ita DC ad CE; rursus quoniam CD parallela est BF, erit, ut BC ad CE, ita FD ad DE. (6)

(1) 17. primi. (2) 28. primi. (3) 34. primi.
(4) 2. hujus. (5) 7. quinti. (6) 2. hujus.

Sed DF est æqualis AC; ergo, ut BC ad CE, ita AC ad ED; permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED: erit ex æquali, ut BA ad AC, ita CD ad DE; æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa, sivè ejusdem rationis latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur Quod demonstrare oportebat.

Theorema 5. Propositio 5. Si duo triangula latera proportionalia habeãt, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.



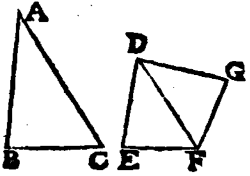
Sint duo triangula ABC, DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitque, ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF, ut autem BC ad CA, ita EF ad FD. & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiãgulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & prætereà angulum BAC angulo EDF. constituatur enim ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem

autem BCA angulus EFG. (1) Quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est æqualis. Ideòque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur; (2) ergo, ut AB ad BC, ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. Ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF (3) Quod cum utraque ipsarum DE, EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. (4) Eadem ratione, & DF æqualis FG. Itaque quoniam DE est æqualis FG, communis autem EF; duę DE, EF duabus GE, EF æquales sunt, & basis DF basi FG ęqualis; angulus igitur DEF est ęqualis angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFE est æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit, & angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D; ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triãgula latera proportionalia habeant, æquiangula erũt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

 Theo-

(1) 23. primi. (2) Ex antecedente. (3) 11. quinti (4) 9. quinti. (5) 8. primi.

Theorema 6. Propositio 6. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autē angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triāgula, & æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habētia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, sitque ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulū ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulū vero ACB angulo DFE. constituatur enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC, EDF æqualis angulus FDG, angulo autē ACB æqualis DFG; (1) reliquus igitur, qui ad B reliquo, qui ad G est æqualis; ergo triangulum ABC triangulo DGF, æquiangulum est, ac propterea, ut BA ad AC, ita est GD ad DF: (2) ponitur autem, & ut BA ad AC, ita ED ad DF. Ut igitur ED ad DF, ita GD ad DF; (3) quare ED æqualis est ipsi DG, (4) & com-

(1) 32 primi. (2) 4. hujus. (3) 11. quinti. (4) 9. quinti.

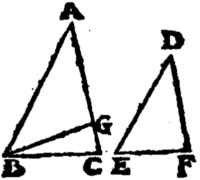
& communis DF; ergo duæ ED, DF duabus GD, DF æquales sunt, & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus DFG æqualis est angulo ACB; & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis: ponitur autem, & BAC angulus æqualis angulo EDF; ergo, & reliquus, qui ad B æqualis reliquo, qui ad E; æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulũ uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

---

(5) 4. primi.

Theorema 7. Propositio 7. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorẽ, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

SInt duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos



los ABC, DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C, F, primū utrumque simul minorem recto. Dico triangulū ABC triangulo DEF æquiangulum esse, angulūque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualē. Si enim inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit. Sit major ABC: & constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B angulo DEF æqualis angulus ABG. (1) Et quoniā angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF, erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis; æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF; quare, ut AB ad BG, sic DE ad EF: (2) utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC; & ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. Quod cum AB ad utramque BC, BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: (3) ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC; (4) minor autem recto ponitur angulus, qui ad C; ergo, & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB major recto; (5) atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F; angulus igitur, qui ad F recto major est; atqui po-

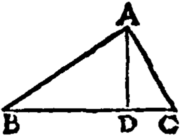
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 9. quinti.
(4) 5. primi. (5) 13. primi.

ponitur minor recto, quod est absurdum; non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF; ergo ipsi est æqualis; est autem & angulus ad A æqualis ei, qui ad D, quare, & reliquus, qui ad C æqualis reliquo, qui ad F; æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur uterque angulorum, qui ad C, F non minor recto. Dico rursus & sic, triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumque ad C angulo BGC æqualem; sed angulus qui ad C non est minor recto, non minor igitur recto est BGC; quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores, quod fieri non potest; (6) non igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF; ergo æqualis necessario erit; est autem, & qui ad A æqualis ei, qui ad D; reliquus igitur, qui ad C reliquo, qui ad F est æqualis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sũt latera. Quod oportebat demonstrare.

Theo-

(6) 17. primi.

Theorema 8. Propositio 8. Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.



SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triãgulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, *rectus enim uterque* est, & angulus, qui ad B communis duobus triãgulis ABC, ABD erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis; æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD; quare, ut BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendẽs angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulum æqualem angulo qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis; ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: (1) Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. (2) Eadem ratione demon-

(1) 4.hujus. (2) 1.diff.hujus.

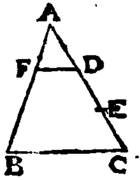
monstrabimus etiã ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare utrumque ipsorum ABD, ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed, & BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C, erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis; æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC; ergo, ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulũ, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se, similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; ductam basis partium mediam proportionalem esse, & adhuc basis, & uniuscujusque partium latus, quod ad partem, medium esse proportionale. Quod demonstrare oportebat.

Pre-

Problema 1. Propositio 9. A data recta linea imperatam partem abscindere.



Sit data recta linea AB, oportet ab ipsa AB imperatam partẽ abscindere. Imperetur pars tertia, & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC, quodvis punctum D, & ipsi AD æquales ponantur DE, EC, deindè jungatur BC, & per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est FD; erit, ut CD ad DA, ita BF ad FA; (1) dupla autem est CD ipsius DA; ergo, & BF ipsius FA dupla erit; tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

---

(1) 2. hujus.

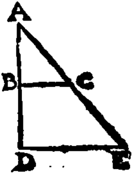
Problema 2. Propositio 10. Datam rectam lineam insectam, data recta linea secta similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC; oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D, E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, juncta-

ctaquè BC per puncta, quidem D,E ipsi BC parallelæ ducantur DF, EG; per D vero, ipsi AB ducatur parallela DHK; parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH, HB: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB (1) Et quoniã uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit ut CE ad ED, ita KH ad HD; (2) æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF, est igitur, ut CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensũ est, ut CE ad ED, ita esse BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ sectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

(1) 34. primi. (2) 2. hujus.

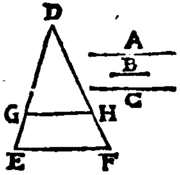
Problema 3. Propositio 11. Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.



Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; oportet ipsarum AB, AC tertiam proportionalem invenire; producantur enim AB, AC ad puncta D, E: ponaturque ipsi AC æqualis BD, & jũcta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE;

quequoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit, ut AB ad BD, ita AC ad CE; æqualis autem est BD ipsi AC; ut igitur BA ad AC, ita est AC ad CE Quare datis rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa est CE. Quod facere oportebat.

Problema 4. Propositio 12. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

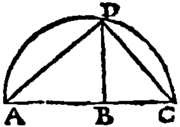


SInt datæ tres rectæ lineæ A, B, C oportet ipsarũ A, B C, quartã proportionalem invenire. Exponantur duæ rectę lineæ DE, DF angulũ quemvis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH: junctaque GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaq; quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est GH, erit, ut DG ad GE, ita DH ad HF; (1) est autẽ DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B: & DH æqualis C ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est HF. Quod facere oportebat.

Pro-

(1) 2. hujus.

Problema 5. Propositio 13. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.



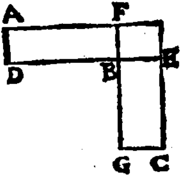
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC, oportet ipsarum AB, BC mediam proportionalē invenire; ponātur in directum, & in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD, DC jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est; (1) & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB basis partium AB, BC media proportionalis. (2) Duabus igitur datis rectis lineis AB, BC media proportionalis inventa est DB. Quod facere oportebat.

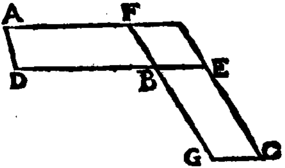
(1) 31.tertii. (2) cor.8.hujus.

Theorema 9. Propositio 14. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB, BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum

DB, BE; ergo, & in directum erunt FB, BG. Dico parallelogrammorum AB, BC latera, quæ sunt circum æquales angulos ex cõtraria parte sibi ipsis respondere: hoc est, ut DB ad BE, ita esse GB ad BF; compleatur enim parallelogrammum FE; & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC; aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit, ut AB ad FE, ita BC ad FE. (1) Sed, ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE; (2) ut autem BC ad FE, ita GB ad BF; & ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF; (3) ergo parallelogrãmorum AB, BC latera, quæ circũ æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeãt latera, quæ circum æquales angulos, sitquè, ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est, ut DB ad BE, ita GB ad BF, (4) ut autem DB ad BE, ita





(1) 7.quinti. (2) 1.hujus. (3) 11.quinti.
(4) 11.quinti.

ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE. (5) & ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit, & ut AB ad FE, ita BC ad FE; æquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC; (6) ergo æqualium, ut unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

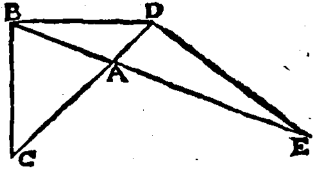
---

(5) 1.hujus. (6) 9.quinti.

Theorema 10. Propositio 15. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est, ut CA ad AD, ita esse EA ad AB; ponantur enim ita, ut in directum sit CA ipsi AD; ergo, & EA ipsi AB in directum

 erit;



erit; (1) & jũgatur BD. Quoniam igitur triangulũ ABC æquale est triãgulo ADE, aliud autem est ABD; erit, ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum ADE ad triangulum BAD. (2) Sed, ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD, (3) ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita EA ad AB; & ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. (4) Quare triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera triangulorum ABC, ADE: & sit, ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. Iuncta enim rursus BD, quoniam, ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum, erit, ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Utrumque igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale est

ABC

(1) 14. primi. (2) 7. quinti. (3) 1. hujus.
(4) 11. quinti.

ABC triangulum triangulo ADE; (5) æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

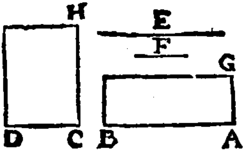
---

(5) 9. quinti.

Theorema 11. Propositio 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod mediis continetur; & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F, sitque, ut AB ad CD: ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB, F æquale esse ei, quod ipsis CD, E continetur. Ducantur enim à punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH: ponaturque ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH, & compleatur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit, ut AB ad CD, ita CH ad AG; parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondēt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circũm æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia; (1) ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH; atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur; est enim AG æqualis F, parallelogrammum vero DH, quod continetur ipsis CD, E, cum CH ipsi E sit æqualis; rectangulum igitur contentum AB, F est æquale ei, quod ipsis CD, E continetur. Sed rectangulum contentum AB, F sit æquale ei, quod CD, E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet, ut AB ad CD, ita E ad F; iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum AB, F est æquale ei, quod CD, E continetur, atque est contentum quidem AB, F rectangulum BG, etenim AG est æqualis F: contentum vero CD, E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis, erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH, & sunt æquiangula; æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria



(1) 14 hujus.

ria parte sibi ipsis respondent; (2) quare, ut AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod mediis continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

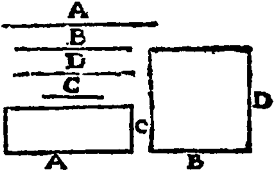
(2) 14. hujus.

Theorema 12. *Propositio* 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato; & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; & sit, ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum A, C, æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato; ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam, ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D: erit, ut A ad B, ita D ad C. (1) Si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum extremis contentum est çquale ei, quod medijs continetur, (2) er-

(1) 7. quinti. (2) Ex antecedenti.

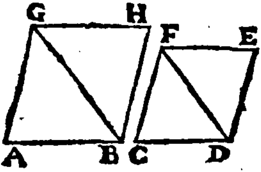


ergo rectangulum A,C cõtentum, est æquale ei, quod cõtinetur B,D. Sed rectangulum contẽtũ B,D est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D; rectangulum igitur contentum A,C est æquale ei quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum A,C æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico, ut A ad B, ita esse B ad C; iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum A, C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B est rectangulum, quod ipsis B, D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum A, C æquale ei, quod B, D continetur. Si autem rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt; (3) est igitur, ut A ad B, ita D ad C: æqualis autem B ipsi D; ergo, ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum est æquale ei, quod à media fit, quadrato, & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

Pro-

(3) Ex antecedente.

Problema 6. Propositio 18. A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positũ rectilineum describere.



Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipsa A, B, angulo quidem C æqualis angulus constituatur GAB, (1) angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est æqualis; ergo æquiãgulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea, ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. (2) Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B, G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo autem FDE æqualis GBH; ergo reliquus qui ad E, reliquo, qui ad H est ęqualis; ęquiãgulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. Quare, ut FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB; (3) ostensum autem est, & ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB; & ut igitur FC ad GA, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB; (4) itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB; angulus aũt DFE angulo BGH, erit totus CFE an-

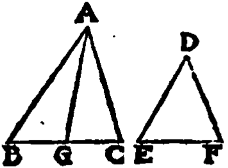
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 4. hujus. (5) 11. quinti

angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione, & CDE est æqualis ipsi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H; æquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales ipsi angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. (5) A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptũ est. Quod facere oportebat.

(5) diff, 1. hujus.

Theorema 13. Propositio 19. Similia triangula inter se sunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF habẽtia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit, ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsarum BC, EF tertia proportionalis BG, (1) ut sit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG, & jungatur GA, quoniam igitur, ut AB ad BC, ita est



(1) 11. hujus.

est DE ad EF; erit permutando, ut AB ad DE, ita BC ad EF. Sed, ut BC ad EF, ita EF ad BG; & ut igitur AB ad DE, ita EF ad BG; (2) quare triangulorum ABG, DEF latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se æqualia sunt; (3) æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF; & quoniam est, ut BC ad EF, ita EF ad BG: si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam: (4) habebit BC ad BG duplam proportionem ejus, quam habet BC ad EF. Ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG; (5) ergo, & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet ejus, quam BC ad EF; est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale; & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in dupla sunt proportione laterum homologorũ. Quod ostendere oportebat.

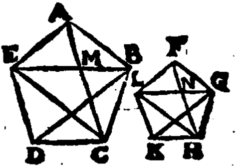
(2) 11.quinti. (3) 15.hujus (4) Diff,10.quinti. (5) 1.hujus.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triãgulum,

lum, quod fit à prima, ad triangulum, quod à secunda, simile, & similiter descriptum, quod ostensum est, ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulũ ABG, hoc est ad triangulum DEF; quod ostendere oportebat.

Theorema 14. Propositio 20. Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero aequalia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.



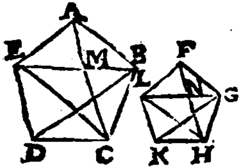
Sint similia polygona ABCDE, FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG, dico polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonũ ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere ejus, quam habet AB ad FG; jungantur BE, EC, GL, LH; & quoniã simile est ABCDE polygonũ polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est, ut BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE, FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL æqulangulum; (1) ergo, & simile; angulus

(1) 6. hujus.

lus igitur ABE æqualis est angulo FGL; est autem, & totus ABC angulus æqualis toti FGH, propter similitudinem polygonorum; ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis; & quoniam ob similitudinem triãgulorum ABE, FGL, est ut EB ad BA, ita LG ad GF. Sed, & propter similitudinem polygonorum, ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali, ut EB ad BC, ita LG ad GH; & circum æquales angulos EBC, LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH; (a) quare, & simile; eadem ratione, & ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico, & homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidè esse ABE, EBC, ECD, consequentia autem ipsorum FGL, LGH, LHK, & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologũ latus; hoc est AB ad FG; jungantur enim AC, FH. Et quoniam propter similitudinem polygonorum angulus ABC est æqualis angulo FGH; atque est, ut AB ad BC, ita FG ad GH, erit triangulum ABC triangulo FGH æquiangulum, æqualis igitur est angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF; prætereà quoniam æqualis est BAM angulus angulo GFN, ostensus autem est, & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit, & reliquus AMB reliquo FNG

(a) 6. hujus.

FNG æqualis; ergo æquiangulũ eſt ABM triangulum triangulo FGN; ſimiliter oſtẽdemus, & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum eſſe. ut igitur AM ad MB, ita eſt FN ad NG, & ut



BM ad MC, ita GN ad NH, quare, & ex æquali, ut AM ad MC, ita FN ad NH, Sed, ut AM ad MC, ita ABM triangulum ad triangulum MBC, & triangulũ AME ad ipſum EMC, inter ſe enim ſunt, ut baſes, (3) & ut unum antecedentium ad unum conſequẽtium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia; (4) ut igitur AMB triangulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipſum CBE. Sed, ut AMB ad BMC, ita AM ad MC; (5) & ut igitur AM ad MC, ita ABE triangulum ad triangulum EBC. eadem ratione, & ut FN ad NH, ita FGL triangulum ad triangulum GLH; atque eſt, ut AM ad MC, ita FN ad NH; ergo, & ut triangulum ABE ad triangulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando, ut ABE triangulum ad triangulũ FGL, ita triangulum EBC ad triangulum GHL Similiter oſtendemus junctis BD, GK, & ut BEC triangulum ad triangulum LGH, ita eſſe triangulum ECD ad triangulum LHK; & quoniam eſt, ut ABE triangulum

(3) 1.hujus. (4) 12.quinti. (5) 1.hujus.

lum ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad triangulum LGH, & adhuc triangulum ECD ad ipsũ LHK: erit, & ut unum antecedentium ad unum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, (6) ergo, ut triangulum ABE ad triãgulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet ejus, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: similia enim triangula in dupla sunt proportione laterũ homologorum; (7) ergo, & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet ejus, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygonum ad polygonum duplam habet proportionem ejus, quam habet latus homologũ ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare.

Eodem modo, & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in dupla proportione laterum homologorum; ostensum autem est, & in triangulis.

(6) 12. quinti. (7) Ex antecedente.

COROLLARIUM PRIMUM.

Ergo universæ similes rectilineæ figuræ inter se sũt in dupla proportione homologorum laterum, & si ipsarum AB, FG tertiã proportionalem sumamus, quæ sit X, habebit AB ad X duplam proportionẽ ejus, quã habet AB ad FG, habet autem, & polygonũ

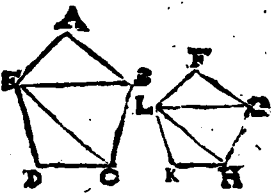
ad

ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AE ad FG; atque ostensum est hoc in triangulis.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Universè igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda, similem, & similiter descriptam; quod ostendere oportebat.

Ostendemus etiam aliter, & expeditiùs homologa esse triangula.



Exponātur enim rursus polygona ABCDE, FGHKL, & jungātur, BE, EC, GL LH. dico, ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita esse triangulum EBC ad triangulum LGH, & triāngulum CDE ad ipsum HKL; quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL; habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem ejus, quam habet BE ad GL. (1) eadem

ra-

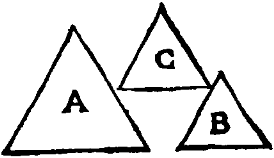
(1) Ex antecedente.

ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet ejus, quam BE ad GL; est igitur, ut ABE triangulum ad triangulum FGL ita triangulum BEC ad GLH triangulum; (2) rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplã proportionem ejus, quam recta linea CE habet ad rectam HL; eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet ejus, quam CE ad HL; est igitur, ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulũ LHK; ostensum autem est, & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triãgulum ABE ad triangulum FGL; ergo, & ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK; & ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, (3) & reliqua, ut in priori demonstratione. Quod ipsum demostrare oportebat.

(2) 11. quinti. (3) 12. quinti.

Theorema 15. Propositio 21. Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C; dico, & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æqulangulum erit, & circum

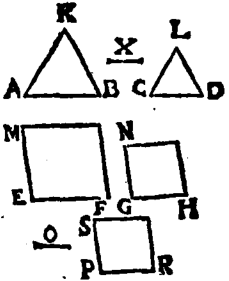


æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineū B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare, & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

Theorema 16. Propositio 22. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH; describanturque ab ipsis quidem AB, CD similia, & similiter posita rectilinea KAB, LCD: ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF, NH. (1) Dico, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH

(1) 18. hujus.



NH rectilineum. Sumatur enim ipsarum quidē AB, CD tertia proportionalis X; (2) ipsarum vero EF, GH tertia proportionalis O; & quoniam est, ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X ita GH ad O; erit ex æquali, ut AB ad X, ita EF ad O. Sed, ut AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum, (3) ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum. (4) Sed sit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineū MF ad rectilineum NH. Dico, ut AB ad CD, ita esse EF ad GH; fiat enim, ut AB ad CD, ita EF ad PR, (5) & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorū MF, NH simile, & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia, & similiter posita KAB, LCD rectilinea, ab ipsis vero EF, PR similia, & similiter posita rectilinea MF, SR, erit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineū

Q 2 MF

(2) 11. hujus. (3) Cor. 20. hujus. (4) 11. quinti.
(5) 12. hujus.

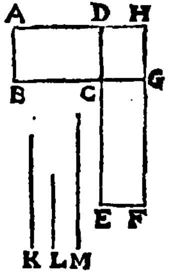
MF ad SR rectilineum, ponitur autem, & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineũ ad rectilineum NH. ergo, ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineũ SR. Quòd cum rectilineam MF ad utrumque ipsorum NH, SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale; (6) est autem ipsi simile, & similiter positũ. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam, ut AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit, ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt, & si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectę lineę proportionales erũt. Quod oportebat demonstrare.

(6) 9. quinti.

Theorema 17. Propositio 23. Æquiangula parallelogrãma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC, CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. Ponatur enim, ut BC sit in directum ipsi CG; ergo, &

DC



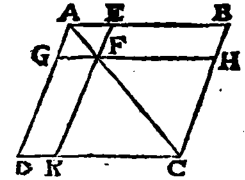
DC ipſi CE in directum erit: (1) & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat, ut BC quidem ad CG, ita K ad L, (2) ut autem DC ad CE, ita L ad M; proportiones igitur ipſis K ad L, & L ad M eædem ſunt, quæ proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, & proportione L ad M quare, & K ad M; proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt, ut BC ad CG, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; (3) ſed, ut BC ad CG, ita K ad L: erit, & ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum (4) Rurſus quoniam eſt, ut DC ad CE, ita CH *parallelogrammum ad parallelogrã*mum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M, & ut L ad M, *ita erit* parallelogrammum CH ad CF parallelogrãmum. (5) Itaque cum oſtenſum ſit, ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali, ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum CF;

 ha-

(1) 14. primi. (2) 12. hujus. (3) 1. hujus.
(4) 11. quinti. (5) 22. quinti.

habet autem K ad M proportionem ex lateribus cõpositam; ergo, & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus; æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

Theorema 18. *Propositio* 24. *Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.*



Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK, & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit, ut BE ad EA, ita CF ad FA. (1) Rursus quoniã uni laterum trianguli ACD, nempè ipsi CD ducta est parallela FG, ut CF ad FA, ita erit DG ad GA; sed, ut CF ad FA; ita ostensa est, & BE ad EA; ergo, & ut BE ad EA, ita DG ad GA, (2) componendoque, ut BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando, ut BA ad AD, ita EA ad AG; parallelogrammorum igitur ABCD, EG latera, quæ circa com-

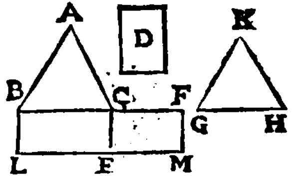
(1) 2. hujus. (2) 18. quinti.

communem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est æqualis angulo ADC,(3) angulus vero GFA æqualis angulo DCA,& angulus DAC est communis duobus triangulis ADC, AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione, & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE; (4) totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum; ergo, ut AD ad DC, ita AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & prætereà, ut CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam ostensum est, ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali, ut DC ad CB, ita GF ad FE; ergo parallelogrammoium ABCD, EG porportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, ac proptereà parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. Eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. Utrumque igitur ipsorum EG, HK parallelogrammorum parallelogrammo ABCD est simile; quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt; (5) parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrũ sunt parallelogrãma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

---

(3) 29.primi. (4) 4.hujus. (5) 21.hujus.

Problema 7. Propositio 25. Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.



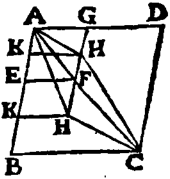
Sit datum quidē rectilineū, cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D; oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere; applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; (1) ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis; in directum igitur est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. (2) Sumatur ipsarum BC, CF media proportionalis GH, (3) & ab ipsa GH describatur triangulum KGH simile, & similiter positum triangulo ABC. (4) Et quoniam est, ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita est figura, quæ fit à prima, ad eam, quæ à secunda, similem, & similiter descriptam. (5) erit, ut BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH; sed, & ut BC ad CF, ita parallelogrammū BE ad EF parallelogrammum, & ut igitur triangulum ABC ad triangulum KGH, ita BE parallelogrammū ad parallelogrammum EF. (6) Quare permutando, ut ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita trian-

(1) 44. primi. (2) 14 primi. (3) 13. hujus.
(4) 18. hujus. (5) Cor. 19. hujus. (6) 11. quinti.

triangulum KGH ad EF parallelogrammum; est autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE; æquale igitur est, & KGH triangulum parallelogrãmo EF. Sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D; ergo, & triangulum KGH ipsi D est æquale, est autem KGH simile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

Theorema 19. Propositio 26. Si à parallelogrãmo parallelogrãmũ auferatur simile toti, & similiter positũ, cõmunem ipsi angulũ habens, circa eandẽ diametrum est toti.

A Parallelogrammo enim ABCD parallelogrãmũ AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positũ cõmunemque ipsi angulum habens DAB; dico parallelogrãmum ABCD circa eãdem esse diametrum parallelogrammo AF. Nõ enim: sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducatúrque per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrãmo KG; & erit parallelogrammum ABCD parallelogrãmo KG simile; (1) ergo, ut DA ad AB, ita GA ad AK. (2) est autem, & propter similitudinem parallelogrãmorum ABCD, EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE, & ut

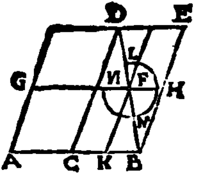


(1) 22. hujus. (2) 1. diff. hujus.

& ut igitur GA ad AE, ita GA ad AK. (3) Quòd cũ GA ad utramque ipsarum AK, AE eandem proportionem habeat, erit AE ipsi AK æqualis, (4) minor majori, quod fieri non potest; non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positũ, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

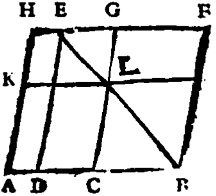
(3) 11. quinti. (4) 9. quinti.

Theorema 20. Propositio 27. Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrãmis similibus, & similiter positis ei, quæ à dimidia describitur, maximũ est, quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.



Sit recta linea AB, seceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineã applicetur parallelogrammũ AD deficiens figura parallelogramma DB, simili, & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsis AB descripta est hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectã lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur enim ad rectam lineam AB paralrallelogrammum AF, deficiens figura parallelogrãma FB simili, & similiter posita ipsi DB, dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eandem diametrum sunt. (1) Ducatur eorum diameter DB, & describatur figura; quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, (2) commune apponatur FB; totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG, quoniam, & recta linea AC ipsi CB; (3) ergo, & GC ipsi EK æquale erit; commune apponatur CF; totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare, & DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est majus; omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei, quæ à dimidia describitur, maximum est, quod ad dimidiã est applicatũ. Quod demonstrare oportebat.

(1) Ex antecedente. (2) 43. primi. (3) 36. primi.



Alitèr. Sit .n. rursus AB secta bifariam in pũcto C, & applicatum sit AL, deficiens figura LB, & rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammũ AE deficiens figura EB simili, & similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL

quod

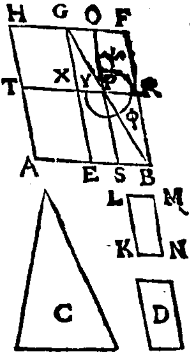
quod ad dimidiam est applicatum majus esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi LB, circa eandem sunt diametrum; (1) sit ipsorum diameter EB, & describatur figura. Et quoniam LF æquale est LH, etenim FG ipsi GH est æqualis: (2) erit LF ipso EK majus; est autem LF æquale DL. (3) majus igitur est, & DL ipso EK: cõmune apponatur KD; ergo totum AL toto AE est majus; quod oportebat demonstrare.

(1) 24. sexti. (2) 36. primi. (3) 43. primi.

Problema 8. Propositio 28. Ad datam rectam lineã dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri data; oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectã, lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existẽtibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D; oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogrãma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positũ ipsi D; (1) quod sit EBFG, & com-

(1) 18. hujus.



& cōpleatur AG parallelogrãmum. itaque AG, vel ęquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem, & si quidem AG sit ęquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammū AG applicatū est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit HE majus quàm C; atque est HE æquale GB; ergo, & GB quā C est majus; quo autē GB superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter positū idē constituatur KLMN; (2) sed D est simile GB; quare, & KM ipsi GB simile erit; sit igitur recta linea quidē KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF; & quoniam æquale est GB ipsi C, KM, erit GB ipsi KM majus; major igitur est recta linea GE ipsa KL; & GF ipsa LM; ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrãmum; æquale igitur ést, & simile GP ipsi KM; sed KM simile est GB; ergo, & GP ipsi GB est simile, (3) circa eandem igitur est diametrū GP ipsi GB; (4) sit ipsorum diameter GPB,

(2) 25. hujus. (3) 21. hujus. (4) 26. hujus.

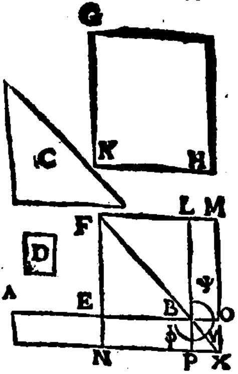
& figura describatur; itaque quoniam GB est æquale ipsis C,KM, quorum GP est æquale KM, erit reliquus YΦΨ gnomon æqualis reliquo C, & quoniam OR est æquale XS, (5) commune apponatur PB; totum igitur OB toti XB est æquale, sed XB est æquale TE, quoniam, & latus AE lateri EB; (6) quare, & TE ipsi OB æquale; commune apponatur XS; ergo totũ TS est æquale toti gnomoni YΦΨ. At YΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis; & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatũ est, deficiens figura parallelogramma PB ipsi D simili, quoniam, & PB simile est ipsi GP. Quod facere oportebat.

(5) 43. primi. (6) 36. primi.

Problema 9. *Propositio* 29. *Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.*

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C, cui autem oportet simile excedere, D; itaque oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF, (1) & utrisque quidẽ BF;

(1) 18. hujus.



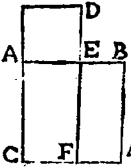
BF, C, æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH. (2) Simile igitur est GH ipsi FB. Sitque KH quidē latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH majus est ipso FB, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE; producantur FL, FE, & ipsi quidem KH æqualis fit FLM, ipsi vero KG ęqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum; ergo MN æquale est, & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL, & MN igitur ipsi EL simile erit; (3) ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. (4) Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL, C, est æquale, sed GH est æquale MN erit, & MN æqualis ipsis EL, C; cōmune auferatur EL; reliquus igitur ΨYΦ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, æquale erit, & AN parallelogrammum parallelogrāmo NB, hoc est ipsi LO; commune apponatur EX; to-

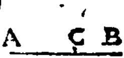
(2) 25. hujus. (3) 21. hujus. (4) 26. hujus.

totũ igitur AX æquale eſt gnomoni ϕΥΨ. Sed ϕΥΨ gnomon eſt æqualis C; ergo, & AX ipſi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatũ eſt AX, excedens figura parallelogramma PO ipſi D ſimili, quoniam, & ipſi EL ſimile eſt OP. (5) Quod fecisse oportebat.

(5) 24.hujus.

Problema 10. *Propoſitio* 30. *Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.*





Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsã AB extrema, ac media ratione ſecare. Deſcribatur enim ex AB quadratũ BC, (1) & ad AC ipſi BC æquale parallelogrãmum applicetur CD, excedens figura AD ipſi BC ſimili. (2) Quadratum autem eſt BC; ergo, & AD quadratum erit. Et quoniam BC eſt æquale CD; commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD eſt æquale: eſt autẽ, & ipſi æquiangulum; ergo ipſorum BF, AD latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, (3) ut igitur FE ad ED, ita eſt AE ad

(1) 46.primi. (2) Ex antecedente. (3) 14.hujus.

ad EB; est autẽ FE æqualis AC, (4) hoc est ipsi AB, & ED ipsi AE; quare, ut BA ad AE, ita AE ad EB. Sed AB major est, quam AE ; ergo AE quam EB est major. (5) Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E ; & major ipsius portio est AE, quod facere oportebat.

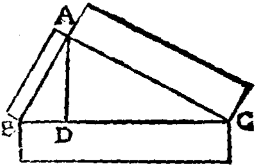
ALITER. Sit data recta linea AB; oportet ipsã AB extrema, ac media ratione secare. Secetur enim AB in C , ita ut rectangulum , quod continetur AB, BC æquale sit quadrato, ex AC. (6) Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC, erit, ut BA ad AC, ita AC, ad CB, (7) ergo AB recta linea extrema, ac media ratione secta est ; Quod facere oportebat.

---

(4) 34. primi. (5) 14. quinti. (6) 11 secund. (7) 17. hujus.

Theorema 21. Propositio 31. In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figurã, quæ fit ex BC æqualem esse eis, quæ ex BA, AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto, qui est ad A ad BC basim perpendicularis ducta est AD, erunt triangula ABD, ADC, quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se se. (1) Et quoniam simile est ABC triangulū triāgulo ABD, erit, ut CB ad BA, ita AB ad BD; quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. (2) Ut igitur CB ad BD, ita figura, quæ fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, & similiter descriptam. Eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex CA; quare, & ut BC ad ipsas BD, DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC, similes, & similiter descriptas; æqualis autem BC ipsis BD, DC; ergo figura, quæ fit ex BC æqualis est eis, quæ ex BA, AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt similibus, & similiter descriptis; quod ostendere oportebat.



ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportione laterum homologorum; (3) figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad BA; habet au-

(1) 8.hujus. (2) Coro.20.hujus. (3) 20.hujus.

autem, & quadratum ex BC, ad quadratum ex BA duplam proportionem ejus, quam BC ad BA; ergo, & ut figura quæ ex BC ad eam, quæ ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA; eadem ratione, & ut figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum, & ut igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA, AC; (4) quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA, AC quadratis; (5) ergo, & figura, quæ fit ex BC est æqualis eis, quæ ex BA, AC fiunt, similibus, & similiter descriptis; quod ostendere oportebat.

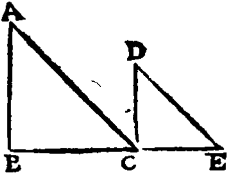
(4) 12. quinti. (5) 47. primi.

Theorema 22. Propositio 32. Si duo triangula componãtur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE, quæ duo latera BA, AC, duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut sit sicut BA ad AC; ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, & AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erũt anguli alterni BAC, ACD ęquales inter se se. (1)

 Ea-

(1) 29. primi.

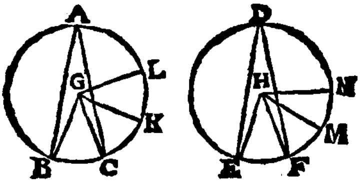


Eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD; quare, & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniã duo triãgula sũt ABC, DCE, unum angulũ, qui ad A, uni angulo, qui ad *D* æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit, ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum; (2) ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE; ostensus autem est, & angulus ACD æqualis angulo BAC; totus igitur ACE duobus ABC, BAC est æqualis; communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, CBA æquales sunt. Sed BAC, ACB, CBA anguli duobus rectis sunt æquales; & anguli igitur ACE, ACB duobus rectis æquales erunt; itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC, CE non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt ACE, ACB duobus rectis æquales efficiunt; ergo BC ipsi CE in directum erit. (3) Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat. *Theo-*

(2) 6.hujus. (3) 14.primi.

Theorema 23. Propositio 33. In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem, & sectores, quippè qui ad centra sunt constituti.

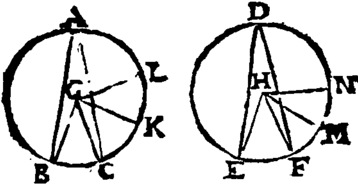
Sint æquales circuli ABC, DEF; & ad centra quidem ipsorum G,H sint anguli BGC,EHF, ad circumferentias verò anguli BAC, EDF. dico, ut circũ-



ferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse. & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem ponantur enim circumferentiæ quidẽ BC æquales quotcumque deinceps CK, KL; circumferentiæ vero EF, rursus æquales quotcumque FM, MN: & jungantur GK,GL,HM,HN; quoniam igitur circumferentiæ BC,CK,KL inter se sunt æquales, & anguli BGC, CGK, KGL inter se æquales erunt. (1) quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC,

(1) 27.tertii.

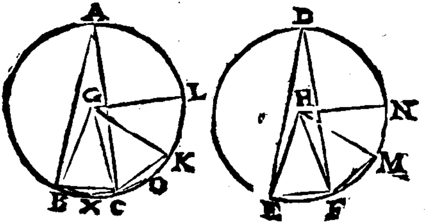
BC, totuplex eſt, & BGL angulus anguli BGC; eadē ratione, & quotuplex eſt circumferentia NE circū-



ferentiæ EF, totuplex, & EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqualis, & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit, & BGL angulus angulo EHN, & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentijs BC, EF; & duobus angulis BGC, EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli æque multiplicia, nempè circumferentia EN, & angulus EHN; atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN, & ſi æqualis, æqualem, & ſi minor, minorem eſſe. Ut igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ità angulus BGC ad angulū EHF. (2) Sed

(2) Diff. 6 quinti.

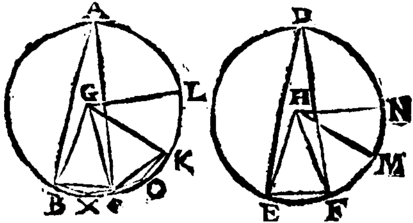
Sed, ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum; (3) uterque enim utriusque est duplus; (4) & ut igitur BC circumferentia ad circumferẽtiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum; quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siuè ad centra, siuè ad circumferentiam insistant. Dico insuper, & ut BC circumferentia ad circumferentiã EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. jungantur enim BC, CK, & sumptis in circumferentiis BC, CK: punctis X, O, jungantur, & BX, XC, CO, OK; itaque quoniam duæ BG, GC duabus CG, GK æquales sunt,



& angulos æquales continent; erit, & basis BC basi CK æqualis; æquale igitur est, & GBC triangulum triangulo GCK. (5) & quoniam circumferentia BC cir-

(3) 15. quinti. (4) 20. tertii. (5) 4. primi.

circumferentiæ CK est æqualis,& reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ,quæ eundem circulum complet;quare,& angulus BXC angulo COK est æqualis; similis igitur est BXC portio portioni COK, & sunt in æqualibus rectis lineis BC, CK, quæ autem in æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones,& inter se æqua-



les sunt ; ergo portio BXC est æqualis portioni COK: est autem,& BGC triangulum triangulo CGK æquale,& totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit : eadem ratione, & GKL sector utrique ipsorũ GKC, GCB est æqualis, tres igitur sectores BGC, CGK, KGL æquales sunt inter se. Similiter, & sectores HEF, HFM, HMN inter se sunt æquales; quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est, & GBL sector sectoris GBC; eadem ratione,& quotuplex est circumferentia NE circumferẽtiæ EF, totuplex est,& HEN sector sectoris HEF; quare si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqua-

æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat, & BGL sector sectorem EHN, & si minor minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus verò sectoribus GBC, EHF, sumpta sũt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC, & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector; circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF æque multiplicia circumferẽtię EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferẽtia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor minorem: est igitur, ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIUM.

Perspicuum etiam est, & ut sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum.

Finis Libri Sexti.