ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΚΑΙ ΔΕΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΘΕΩΝΟΣ συνουσιῶν τὸ πρῶτον.

EVCLIDIS QVINDEcim Elementorum Geometriæ primum: ex Theonis Commentariis Græcè, & Latinè.

Ex Bibliotheca Minimorum
...emensium Cui accesserunt sub lit. N.

Scholia, in quibus quæ ad percipienda Geometriæ Elementa spectant, breuiter & dilucidè explicantur, authore Cunrado Dasypodio, Scholæ Argentinensis professore.

N.° 404.

Mochlis

ARGENTORATI EXCVdebat Christianus Mylius,

M. D. LXIIII.

CVNRADVS DASYPODIVS

LECTORI S. D.

ANNIS viginti sex nostri Gymnasij cõsuetudo fuit: vt qui ex classibus ad publicas lectiones promouentur, primum audiant Euclidis librum: quò præcepta τῆς ἀποδείξεως exercere, & ad vsum aliquem accommodare possint: siquidem nemo facilius vim, & efficatiam eorum, quæ in libro de demonstratione explicantur: aut etiam ab ipso Aristotele in suo organo traduntur, intelliget: quàm qui in puluerem descenderit Geometricũ. Idcirco in nostra schola prudẽter hoc est institutum: vt post linguarum & artiũ cognitionem, in disciplinis Mathematicis adolescentes exerceantur: præsertim verò hoc probandum, & laudandum, quod in ipso disciplinarũ vestibulo, cognitionem rerum Geometricarum sibi comparent, & in ijs quæ certissimis nituntur rationibus, sua exacuant ingenia: vt assuescant eò facilius naturæ & cæterarum artium, atque disciplinarum abstrusiora comprehendere. Nam & Pythagoricorũ hoc quoque fuit σχῆμα, καὶ βῆμα: quo dicto volebant significare, pueros esse quàm primum deducendos ad Geometriæ cognitionem, & ita gradatim per mathematicas disciplinas ad altiora ascendendum. sicuti & Plato neminem aptum & idoneum iudicauit ad percipienda Philosophiæ præcepta: nisi instructus esset rebus Geometricis, cum diceret: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Itaque cum hanc studiorum rationem omnibus eruditis, etiam antiquissimis Philosophis probari viderem, tanquam studiosis adolescentibus vtilem, & valdè necessariam: fui & ego quoque nostro Typographo author, & suasor, vt cum nulla amplius extarent

exem-

exemplaria, hunc libellum imprimeret; ne bona, & fructuosa scholę nostrę constitutio intercideret. quoniam verò plerosque audiebam de difficultate demonstrationum Geometricarũ solere conqueri, meis quibuscunque illustrare volui scholijs. Idque eo feci consilio, nõ vt egregij & magni quid cogitarem edere. Sciebam enim rem esse paruam, neque vllius ingenij aut industriæ ex Proclo, aut alijs decerpere ea quæ propriè ad hanc tractationẽ pertinent: sed vt in assequendis hisce disciplinis, bonos adolescentes Geometrię imperitos aliquantulum mea iuuarem opera. Nam Geometrię elementa nuda, atque sterilia vidẽtur, & prima fronte nullum peculiarẽ præ se ferunt fructum; sed si aditus ad ea percipienda præparetur, aut si quis diligentius consideret, & intueatur ipsam οἰκονομίαν τ̃ γεωμετρικῶν λόγων: atque perpendat exactius ipsam τομίαν, καὶ συνέχειαν τῶν προ-

 τάσεων,

τάσεων, cæteraq; omnia, quæ Geometria tractat, ad amussim examinet: tum abundè se ostendunt vtilitates in res humanas sese diffundentes: quas hoc loco enumerare prolixũ esset. Quantum igitur in me fuit, simplici & aperto sermonis genere, latinis verbis Græca interpretor: deinde breuibus scholijs, non nisi conor ea explicare, quæ difficiliora sunt: neq; omnia, sed præcipua tantum, & maximè necessaria, propediem certè plura, auxiliãte Deo Opt. Max. sum editurus, cùm in hunc, tum in alios Euclidis libros. Inter cætera verò etiam explicabo secundum Euclidis librum, qui de potentia lineę rectæ demonstrationes habet Geometricas. Quia verò τομὴ, καὶ διαίρεσις commune est σύμπτωμα linearum, corporum, & numerorum: idcirco statui demonstrationes illarum ipsarum secundi libri propositionum addere, petitas ex Arithmeticæ & Stereometrię princi-

principijs. Imò si commodè fieri poterit, publicabo etiam ὀνομαστικὸν γεωμετρικόν: in quo explicabuntur vocabula huius scientiæ propria, quo studiosi possint terminos, vt vocant, artis intelligere, & sensum verborum assequi. Erit sanè dictionarium hoc, omnibus Philosophiæ studiosis vtilissimū, & valdè iucundum. Sunt nōnulla penes me, quæ cum confidam doctis viris grata & accepta fore, aliquando etiam in lucē emittam.

Calendis Aprilis,
Anno 1564.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ, ΕΚ ΤΩΝ τοῦ Θέωνος συνουσιῶν.

ΟΡΟΙ.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Γραμμὴ δέ, μῆκος ἀπλατές.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

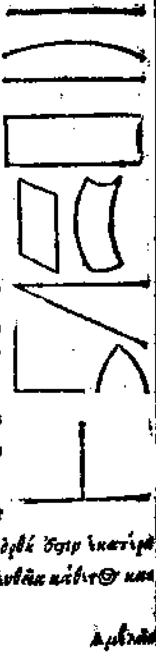
Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.



Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἀμβλεῖα

EVCLIDIS ELEMENTVM primum ex Theonis Commentarijs.

Definitiones.

PVnctum est, quod partem non habet.

Linea est, longitudo absq; latitudine.

Termini lineæ sunt puncta.

Linea recta est, quæ ex æquo posita est inter sua puncta.

Superficies est, quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

Termini superficiei sunt lineæ.

Plana superficies est, quæ ex æquo posita est inter suas lineas rectas.

Angulus planus est, duarũ linearũ sese in plano tangentiũ, & nõ ex aduerso positarum mutua inclinatio.

Rectilineum vocamus angulum, quem lineæ rectæ continent.

Cum recta super rectam stans, angulos vicinos inter se fecerit æquales: rectus est vterq; æqualium illorum angulorum.

Recta verò linea angulos illos æquales faciens: perpendicularis dicitur ad eam lineam, super qua consistit.

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

Σχῆμα ἐστὶ, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Κέντρον δὲ, τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Ἡμικύκλιον δέ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα

Obtusus angulus est, qui recto est maior.

Acutus verò, qui recto est minor.

Terminus est, quod alicuius finis est.

Figura est, quæ termino aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

Circulus est figura plana, vna linea contenta, quam vocamus circumferentiam: ad quam ab vno aliquo ex punctis, quæ intra ipsam sunt, omnes lineæ rectæ procidentes, inter se sunt æquales.

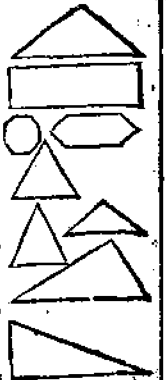
Centrum verò circuli, vocatur hoc in circulo medium.

Dimetiens circuli est, recta quædam linea, per Centrum circuli ducta, vtrinque ad circumferentiam circuli desinens: ipsumque circulum in duas partes æquales diuidens.

Semicirculus est figura, quam dimetiens circuli, & intercepta à dimetiente circumferentia continet.

Segmentum circuli est, figura, quam linea recta, & circuli circumferentia continet.

Rectilineæ figuræ sunt, quas rectæ lineæ ambiunt.



Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον.

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Τὰ

Trilateræ quidem, quas ambiunt tres rectæ.

Quadrilateræ verò, quas plures, quàm quatuor rectæ ambiunt.

Ex trilateris autē figuris. Triangulus æquilaterus est, qui tria habet æqualia latera.

Æquicrurus, qui duo tantum habet æqualia latera.

Scalenus triangulus, qui tria habet inæqualia latera.

Item ex trilateris figuris, triangulus rectangulus est: qui angulum habet rectum.

Amblygonius, qui angulū habet obtusum.

Oxygonius qui angulos tres acutos habet.

Ex quadrilateris figuris, quadratū est, quod æquilaterum est, & rectangulum.

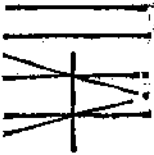
Quadrangulum oblōgum, quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.

Rhombus, quod æquilaterum quidem est, sed non rectangulum.

Rhomboides, quod latera è regione posita habet æqualia, ac etiam angulos: non tamen est æquilaterum, neq; rectangulum.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Η ΤΗΣΘΩ, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

ΤΑ ΤΩ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

Καὶ

Omnes reliquæ præter has quadrilatera figuræ, Trapezia vocentur.

Æquedistantes rectæ lineæ sunt, quæ in eodē plano sitæ: & in infinitum ex vtraq; parte extēnsæ: in neutra tamen concurrunt.

POSTVLATA.

Petatur. A quouis puncto, ad quoduis punctum rectam lineam describere.

Item, lineam rectam finitam, in infinitum vsq; extendere.

Item, quouis centro, & interuallo describere circulum.

COMMVNES NOTIONES,

seu sententiæ.

Quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia.

Si æqualibus æqualia fuerint adiecta, etiam tota sunt æqualia.

Si ab æqualibus æqualia fuerint ablata, etiā quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Si inæqualibus æqualia fuerint adiecta: etiā tota sunt inæqualia.

Si ab inæqualibus æqualia fuerint sublata: quæ relinquuntur sunt inæqualia.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύω ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Que

Quæ ſunt eiuſdem dupla, inter ſe ſunt æqualia.

Quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.

Quæ applicata inter ſe conueniunt, ſunt æqualia.

Totum eſt maius ſua parte.

Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales.

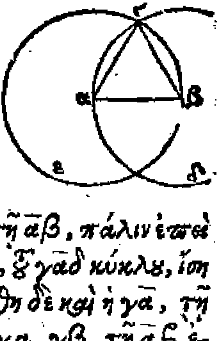
Cum in duas rectas, recta incidens linea, duos internos ex vna parte angulos, duobus rectis facit minores: productæ iſtæ duæ lineæ rectæ in infinitum, ex ea parte concurrent, vbi ſunt illi duo anguli duobus rectis minores.

Duæ lineæ rectæ figuram non faciunt.

Πρότασις α. πρόβλημα.

ΕΠΙ ΤΗΣ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ ᾱβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ᾱβ εὐθείας, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Κέντρῳ μὲν τῷ ᾱ, διαστήματι δὲ, τῷ ᾱβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ βγε. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βᾱ, κύκλος γεγράφθω, ὁ αγδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ ᾱ, β, σημεῖα, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ γᾱ, γβ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ ᾱ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ



γεβ κύκλου: ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ ᾱβ, πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ, τοῦ γαδ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βᾱ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γᾱ, τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ, τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἡ γᾱ ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ

γᾱ

Propositio prima. problema.

SVper data linea recta finita, triangulum æquilaterum constituere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita αβ. (Explicatio quæsiti.) Oportet super linea recta αβ, triangulum æquilaterum constituere. (Delineatio.) Centro α, interuallo αβ, describatur circulus βγε. Item centro β, interuallo βα, describatur circulus αγδ. Ducantur deniq; lineæ rectæ αγ, γβ, (Demonstratio.) Quoniam punctum α, est centrum circuli γεβ: idcirco recta αγ, est æqualis rectæ αβ, rursusquoniam punctum β, est centrum circuli γαδ: idcirco recta βγ, æqualis est rectæ βα. Verum demonstratum est, quod recta γα, etiam æqualis sit rectæ αβ. Ergo vtraq; rectarum γα, γβ, est æqualis rectæ αβ. Quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiam inter se sunt æqualia. Ergo γα recta, etiam æqualis est rectæ γβ. Tres igitur lineæ rectæ γα, αβ, βγ, sunt inter

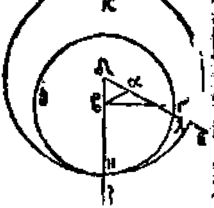
ter

γα, αβ, βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β. πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ βγ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ β σημεῖον, εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δαβ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ, εὐθεῖαι, αἱ αε, βζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ ηκλ. (Ἀπόδειξις.)



ter se æquales. (Conclusio.) Triangulus itaq; $\alpha\beta\gamma$, est æquilaterus: & consistit super data linea recta finita $\alpha\beta$. Quod faciendum erat.

Propositio secunda. Problema.

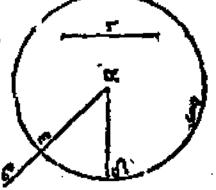
AD punctum datum, lineæ rectæ datæ, æqualem lineam rectam ponere.

Explicatio dati.) Sit punctum datum α, & data recta linea $\beta\gamma$. (*Explicatio quæsiti*) Ad punctum datum α, datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$, ponenda est recta linea æqualis. (*Delineatio.*) Ab α puncto, ad punctum β, ducatur linea recta $\alpha\beta$, & super linea $\alpha\beta$ statuatur triangulus æquilaterus $\alpha\delta\beta$. Extendantur etiam lineæ rectæ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ versus puncta ε, ζ, & fiant rectæ $\alpha\varepsilon$, $\beta\zeta$. Centro quoq; β, interuallo $\beta\gamma$, describatur circulus $\gamma\eta\theta$. Item Centro δ, interuallo $\delta\eta$, describatur circulus $\eta\kappa\lambda$ (secans lineã rectã $\delta\zeta$, in puncto η.)

Demonξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ ηκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δλ, τῇ δη, ὧν ἡ δα, τῇ δβ ἴση ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ αλ, λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ βη ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ, βγ, τῇ βη ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ αλ ἄρα, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ, ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ. πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. (Κατασκευή.) Κεί-

σθω

Demonstratio.) *Quoniam punctum β est centrum circuli $\gamma\eta\theta$: idcirco recta $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\beta\eta$. Item quoniam punctum δ, est centrum circuli $\eta\kappa\lambda$: igitur recta $\delta\lambda$ est æqualis rectæ $\delta\eta$, ex quibus $\delta\alpha$ fuit æqualis rectæ $\delta\beta$. reliqua igitur $\alpha\lambda$, reliquæ $\beta\eta$ est æqualis. Vtraq; idcirco rectarum $\alpha\lambda$, $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\beta\eta$. quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiã inter se sunt æqualia. quare recta $\alpha\lambda$, etiam erit æqualis rectæ $\beta\gamma$. (Conclusio.) Ad datum igitur punctum α, datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$: æqualis posita est recta linea $\alpha\lambda$, quod faciendum erat.*

Propositio tertia. Problema.

DVabus rectis inæqualibus datis: ex maiore minori æqualem rectã lineam auferre.

Explicatio dati.) *Sit data linea recta maior $\alpha\beta$, minor verò γ. (Explicatio quæsiti.) Ex maiore linea $\alpha\beta$, tollenda est recta æqualis lineæ γ. (Delineatio.) Ponatur* θω πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ γ εὐθείᾳ, ἴση ἡ αδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω ὁ δεζ. (Απόδειξις) Καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ αδ. ἀλλὰ καὶ ἡ γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αε, γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ αε τῇ γ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν αβ, γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴση ἀφῄρηται ἡ αε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

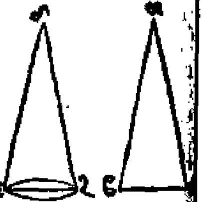
Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ *tur ad punctum α, lineæ γ, æqualis recta linea αδ. deinde centro α, interuallo αδ, describatur circulus δεζ (secans rectam αβ, in puncto ε. (Demonstratio.) Quoniã punctum α, centrũ est circuli δεζ. idcirco recta αε, est æqualis rectæ αδ. Verũ recta γ, etiã est æqualis rectæ αδ. Vtraque igitur rectarũ αε, γ, est æqualis rectæ αδ. Quare αε etiã est æqualis rectæ γ Duabus igitur rectis datis inæqualibus αβ, γ: ex maiore αβ, ablata est αε, æqualis minori γ. Quod faciendum erat.*

Propositio quarta. Theorema.

SI duo trianguli duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterũ alteri: & angulum angulo æqualem, qui ęqualibus rectis lineis continetur: etiam basim basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt ęquales, alter alteri, quos latera subtẽdũt ęqualia.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ, habentes duo latera αβ, αγ æqualia,

δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε,
δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκάτεραν
ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ
δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ
γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ,
γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην.



(Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ βάσις ἡ βγ, βά-
τῇ εζ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δε
τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, τα
λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατ
ρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.
μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγ
τῇ ὑπὸ δζε. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοζομέ-
νου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνο
καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν α σημείου, ἐπὶ τὸ δ σημεῖ-
ον, τῆς δὲ αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσ
καὶ τὸ β ἐπὶ τὸ ε. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ
τῇ δε. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ ἐπὶ τὴν δ
ἐφαρμόσει καὶ ἡ αγ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν δζ. διὰ
τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ
εδζ. ὥστε καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ σημεῖον ἐ-
φαρμόσει. διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν αγ
τῇ δζ.

duobus lateribus δε, δζ alterum alteri: latus αβ, æquale lateri δε: & latus αγ, æquale lateri δζ: & angulum βαγ, æqualem angulo εδζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd basis βγ, sit æqualis basi εζ: & triangulus αβγ, sit æqualis triangulo δεζ, & reliqui anguli, reliquis angulis sint æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus etiam αβγ, sit æqualis angulo δεζ: angulus denique αγβ, sit æqualis angulo δζε. (Demonstratio.) Quando enim triangulus αβγ, applicatur triangulo δεζ. Punctum α, ponitur super puncto δ: & recta αβ, applicatur rectæ δε. Cadet etiam punctum β, super puncto ε. quia αβ est æqualis rectæ δε. Deinde si recta αβ, applicatur rectæ δε: etiam recta αγ, applicabitur rectæ δζ. quoniam angulus βαγ, proponitur æqualis angulo εδζ. quare & punctum γ, applicabitur puncto ζ. cum recta αγ, æ-

τῇ δζ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε ἐφηρμόκει. ὥστε βάσις ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ, μὲν β ἐπὶ τὸ ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ ζ, ἡ βγ βάσις ἐπὶ τὴν εζ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν; ὅπερ ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ βγ βάσις, ἐπὶ τὴν εζ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται, ὥστε καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ἐπὶ ὅλον τὸ δεζ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ τῇ ὑπὸ δζε. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται: καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε. θεώρημα.

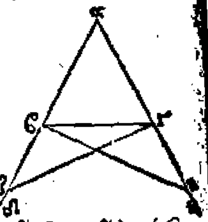
Τῶν

qualis sit rectæ $\delta\zeta$. Verum punctum β, applicabatur puncto ϵ. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ applicabitur. Nam si punctum β, applicetur puncto ζ, & basis $\beta\gamma$, non applicetur basi $\epsilon\zeta$: tum duæ rectæ figuram facient, quod est impoßibile. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ applicatur, & est ei æqualis. Vnde & totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\delta\epsilon\zeta$ applicabitur, & ei erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis applicabuntur, eisq́ erunt æquales: angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$: & angulus $\alpha\gamma\beta$, angulo $\delta\zeta\epsilon$. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: etiam basin basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. quod erat demonstrandum.

Propositio quinta. Theorema.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ ἴσην ἔχον τὴν αβ πλευρὰν, τῇ αγ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς αβ, αγ, εὐθεῖαι αἱ βδ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγβ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ βγε. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς βδ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αε, τῇ ἐλάττονι τῇ αζ ἴση ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ, ηβ εὐθεῖαι. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αζ, τῇ αη, ἡ δὲ αβ, τῇ αγ, δύο δὴ αἱ ζα, αγ, δυσὶ ταῖς ηα, αβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ζαη. βάσις ἄρα ἡ ζγ, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αζγ τρίγωνον, τῷ αηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται.



καὶ

TRiangulorum, qui duo æqualia habẽt latera, anguli ad basim sunt æquales. Et productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales.

Explicatio dati.) Sit triangulus æquicrurus αβγ, habens latus αβ, æquale lateri αγ: & producantur lineæ αβ, αγ, ἐπ' εὐθείας, (hoc est, vt continuè extendatur secundum lineam rectam) & fiant rectæ βδ, γε. (Explicatio quæsiti) Dico quod angulus αβγ, sit æqualis angulo αγβ. Et quòd angulus γβδ, sit æqualis angulo βγε. (Delineatio.) Sumatur in linea βδ, punctum quoduis ζ. deinde tollatur à maiore linea αε, minori αζ, æqualis linea recta αη. deniq; ducantur rectæ ζγ, ηβ. (Demonstratio.) Quoniam recta αζ, est æqualis rectæ αη: & recta αβ, æqualis rectæ αγ: duæ igitur rectæ ζα, αγ, duobus rectis ηα, αβ sunt æquales, altera alteræ: & cõmunem ambiunt ζαη angulum. quare basis ζγ, basi ηβ est æqualis, & triangulus αζγ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αγζ, τῇ ὑπὸ αβη, ἡ δὲ ὑπὸ αζγ, τῇ ὑπὸ αηβ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αζ, ὅλῃ τῇ αη ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ αβ τῇ αγ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βζ λοιπῇ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, τῇ ηβ ἴση. δύο δὴ αἱ βζ, ζγ, δυσὶ ταῖς γη, ηβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γηβ ἐστὶν ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ, ἡ βγ. καὶ τὸ βζγ ἄρα τρίγωνον, τῷ γηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ, ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ γβη, τῇ ὑπὸ βγζ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει, τοῦ αβγ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα ἰσοσκε-

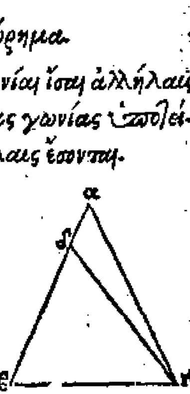
λῶν

triangulo $\alpha\eta\beta$ æqualis est: reliqui etiam anguli, reliquis angulis æquales sunt, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus $\alpha\gamma\zeta$, angulo $\alpha\beta\eta$: & angulus $\alpha\zeta\gamma$, angulo $\alpha\eta\beta$. Cũ verò tota recta $\alpha\zeta$, toti rectæ $\alpha\eta$ sit æqualis, & recta $\alpha\beta$ ablata, sit æqualis rectæ $\alpha\gamma$ ablatæ. idcirco reliqua linea recta $\beta\zeta$, reliquæ rectæ $\gamma\eta$ etiam erit æqualis. Verum recta $\zeta\gamma$ demonstrata est æqualis esse rectæ $\eta\beta$. duæ igitur rectæ $\beta\zeta$, $\zeta\gamma$, duabus rectis $\gamma\eta$, $\eta\beta$ sunt æquales altera alteræ: & angulus $\beta\zeta\gamma$, æqualis est angulo $\gamma\eta\beta$: basis etiam eorum communis est recta $\beta\gamma$: triangulus igitur $\beta\zeta\gamma$, triangulo $\gamma\eta\beta$ etiam erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis æquales: quos æqualia illa latera subtendũt. angulus $\zeta\beta\gamma$, æqualis angulo $\eta\gamma\beta$: & angulus $\beta\gamma\zeta$, angulo $\gamma\beta\eta$. Quoniam nunc totus angulus $\alpha\beta\eta$, toto angulo $\alpha\gamma\zeta$ demonstratus est æqualis: quorũ ablatus angulus $\gamma\eta\beta$, ablato angulo $\beta\gamma\zeta$ est æqualis: ergo reliquus $\alpha\beta\gamma$ angulus, reliquo $\alpha\gamma\beta$ angulo est æqualis, & sunt anguli ad basim trianguli $\alpha\beta\gamma$.

λων τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ αγβ γωνίᾳ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αβ, πλευρᾷ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. (Κατασκευή.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ αγ, ἴση ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ αγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ: δύο δὴ αἱ δβ, βγ δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑ-

πὸ

Angulus verò $\zeta\beta\gamma$, angulo $\eta\gamma\varepsilon$ demonstratus est æqualis esse: & sunt sub basi. (Conclusio.) Triangulorum igitur, qui duo habent æqualia latera, anguli ad basim sunt æquales, & productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio sexta. Theorema.

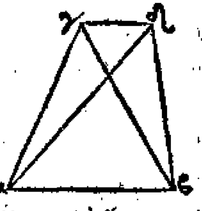
SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendunt, erũt inter se æqualia.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, habens angulum $\alpha\beta\gamma$, æqualem angulo $\alpha\gamma\beta$. Explicatio quæsiti.) Dico quòd latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\alpha\gamma$. (Delineatio cum hypothesi.) Si enim recta $\alpha\beta$, nõ est æqualis rectæ $\alpha\gamma$: altera illarum erit maior, sit recta $\alpha\beta$ maior. ex recta $\alpha\beta$ maiore: lineæ rectæ $\alpha\gamma$ minori auferatur linea recta $\beta\delta$ æqualis: & ducatur recta $\delta\gamma$. (Demonstratio.) Quoniã latus $\delta\beta$, æquale est lateri $\alpha\gamma$, & cõmune latus $\beta\gamma$: duo igitur latera $\delta\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$

τὸ δβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ δγ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. τὸ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον. ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ: ἴση ἄρα. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ. θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Ἔκθεσις.) Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς αγ, γβ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αδ, δβ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ *sunt æqualia alterũ alteri: & angulus* $\delta\beta\gamma$, *angulo* $\alpha\gamma\beta$ *est æqualis. Basis igitur* $\delta\gamma$, *basi* $\alpha\beta$ *est æqualis: & triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *triangulo* $\delta\gamma\beta$ *est æqualis: maior minori. quod est absurdum. Quare recta* $\alpha\beta$, *non est inæqualis rectæ* $\alpha\gamma$, *itaq; erit ei æqualis. (Conclusio.) Si ergo trianguli, duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendũt, erunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio septima. Theorema.

SVper eadẽ linea recta, duabus eisdem rectis, aliæ duę rectæ æquales altera alteri, non statuentur ad aliud, atq; aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ.

Explicatio dati.) Si enim est possibile, sit linea recta $\alpha\beta$, *& super ea duabus rectis* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, *constitutis: aliæ duæ lineæ rectæ* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *constituantur æquales altera alteri: ad aliud*

atq;

μείῳ, τῷ τε γ, καὶ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὸ γδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, τὰ α, β, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, ὥστε ἴσην εἶναι, τὴν μὲν γα, τῇ δα, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ α, τὴν δὲ γβ τῇ δβ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ β. (Κατασκευή.) Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ αδγ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ δγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δγβ, πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ τῇ δβ, ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγβ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς, καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (Συμπέρασμα.) Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

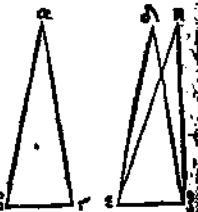
Πρότασις η. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην, καὶ *atq; aliud punctum γ & δ, in easdem partes γ, & δ: eosdē habentes terminos α, & β: quos lineæ rectæ primæ: ita ut γα æqualis sit δα: et eundem habeat terminū α: recta verò γβ, sit æqualis rectæ δβ, & eundem cum ea habeat terminū β. (Delineatio.) Et ducatur recta γδ. (Demōstratio.) Quoniā αγ recta est æqualis rectæ αδ: etiam angulus αγδ, erit æqualis angulo αδγ. verum angulus αδγ, maior est angulo δγβ: multò ergo angulus γδβ maior est angulo δγβ. Item, quoniam latus γβ, est æquale lateri δβ: erit etiam angulus γδα, angulo δγβ æqualis. Verum ille ipse angulus γδα demonstratus est esse multò maior angulo δγβ, quod est impoßibile. (Cōclusio.) Super eadem igitur recta, duabus eisdem rectis, aliæ duæ rectæ æquales altera alteri: non statuentur ad aliud atq; aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio octaua. Theorema.

SI duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, habuerint verò etiam basin, æqualem basi: etiā

anguτὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν βγ, βάσει τῇ εζ ἴσην. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση. (Κατασκευή.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν β σημείου ἐπὶ τὸ ε σημεῖον, τῆς δὲ βγ εὐθείας ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόσει, καὶ τὸ γ σημεῖον ἐπὶ τὸ ζ: διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ τῇ εζ. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς βγ, ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόζουσι, καὶ αἱ βα, γα, ἐπὶ τὰς εδ, δζ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ, οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ εη, ηζ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς

αὐτῆς

angulum angulo habebunt ęqualem, quem æquales illæ lineæ rectæ continent.

Explicatio dati.) Sint duo triãguli αβγ, δεζ: habentes duo latera αβ, αγ: duobus lateribus δε, δζ æqualia, alterum alteri, latus scilicet αβ, æquale lateri δε: & latus αγ, æquale lateri δζ: item basim βγ, æqualem basi εζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus βαγ, sit æqualis angulo αδζ. (Delineatio.) Quando enim triangulus αβγ, applicatur triangulo δεζ, & punctum β, ponitur super puncto ε: linea quoq; recta βγ, applicatur rectæ εζ: tum punctum γ, etiam applicabitur puncto ζ: quia recta βγ, est æqualis rectæ εζ. (Demonstratio.) Quando verò recta βγ, applicatur rectæ εζ: applicabuntur etiã rectæ βα, αγ, rectis εδ, δζ. Si enim basis βγ, applicatur basi εζ, & latera βα, αγ, non applicẽtur lateribus εδ, δζ. Verũ diuersum habuerint sitũ, vt rectæ εη, ηζ Constituentur su-

D per

αὐτῆς εὐθείας, δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς βγ, βάσεως ἐπὶ τὴν εζ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ. ἐφαρμόσουσι ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, δίχα τεμεῖν.

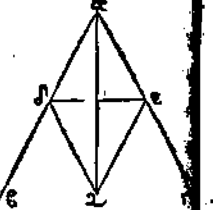
Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἀφῃρή-

σθω

per eadē linea recta, duabus eisdē rectis aliæ duæ rectæ æquales altera alteri, ad aliud, atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. sed non statuentur ad diuersum punctum. Quare falsum est, quòd applicata basi $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$: non applicētur $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, latera, lateribus $\epsilon\delta$, $\delta\zeta$. applicabuntur ergo. Unde sequitur, quòd angulus $\beta\alpha\gamma$, applicabitur angulo $\epsilon\delta\zeta$, & ei erit æqualis. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri: habuerint verò etiam basim basi æqualem: etiam angulum angulo habebunt æqualem, quem æquales illæ rectæ lineæ cōtinent. Id quod erat demonstrandum.

Propositio nona. Problema.

DAtum angulũ rectilineũ per medium secare, vel in duas partes ęquales secare. Explicatio dati.) Sit datus angulus rectilineus $\beta\alpha\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Angulus $\beta\alpha\gamma$ secādus est in duas partes æquales. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\beta$, punctũ quod-



φθω ἀπὸ τῆς αγ, τῇ αδ ἴση, ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐ
θείας. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α
τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αζ, δύο δὴ αἱ δα, αζ, δυ
ταῖς εα, αζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ β
σις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑ
πὸ δαζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαζ, ἐστὶν ἴση. (Συμ
πέρασμα.) Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύ
γραμμος ἡ ὑπὸ βαγ, δίχα τέτμηται ὑ
πὸ τῆς αζ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι. Πρόβλημα.

ΤΗν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμέν
δίχα τεμεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασ
μένη, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τὴν αβ, δί
χα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Συνεστάτω ἐπ' α

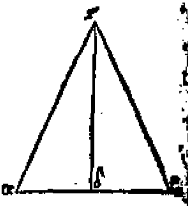
τῆς

nis δ, & tollatur ex linea $\alpha\gamma$, lineæ $\alpha\delta$, æqualis recta linea $\alpha\epsilon$: postea ducatur linea $\delta\epsilon$: & statuatur super linea $\delta\epsilon$, triangulus æquilaterus $\delta\zeta\epsilon$: deniq; ducatur linea $\alpha\zeta$. (Explicatio iam factæ delineationis.) Dico quòd linea $\alpha\zeta$, in duas partes æquales secet angulũ $\beta\alpha\gamma$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\delta$, æqualis est rectæ $\alpha\epsilon$, et communis sit recta $\alpha\zeta$: idcirco duo latera $\delta\alpha$, $\alpha\zeta$, duobus lateribus $\epsilon\alpha$, $\alpha\zeta$ sunt æqualia alterum alteri: & basis $\delta\zeta$ æqualis basi $\epsilon\zeta$. Angulus igitur $\delta\alpha\zeta$, angulo $\epsilon\alpha\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Datus igitur angulus rectilineus $\beta\alpha\gamma$, per lineam rectam $\alpha\zeta$, est dissectus in duas partes æquales. Id quod faciendum erat.

Propositio decima. Problema.

DAtam lineam rectam finitam in duas partes æquales secare.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita $\alpha\beta$. (Explicatio quæsiti.) Linea recta finita $\alpha\beta$, dissecanda est in duas partes æquales. (Delineatio.) Statuatur super recta



τῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αβγ γωνία δίχα, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ αβ εὐθεία, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ σημεῖον. (Απόδειξις.) Επεὶ γὰρ ἴσ ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, δύο δὴ αἱ α γδ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκα τέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπ βγδ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ β ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Η ἄρα δοθεῖσ εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ, δίχα τέτμη κατὰ τὸ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια. πρόβλημα.

ΤΗ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ θέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθ αν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εκθεσις.) Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ α τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. (Δι ρισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ θείᾳ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμ

ἀγ

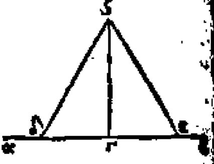
αβ triangulus æquilaterus $\overline{\alpha}\beta\gamma$: & secetur angulus $\alpha\beta\gamma$ in duas partes æquales, per lineam rectam $\gamma\delta$. (Explicatio factæ delineationis) Dico quòd recta $\alpha\beta$, secta sit in duas partes æquales in puncto δ. (Demonstratio.) Quoniam recta $\overline{\alpha}\gamma$, est æqualis rectæ $\overline{\gamma}\beta$, & communis recta $\gamma\delta$: duo igitur latera $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ duobus lateribus $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\overline{\alpha}\gamma\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\delta$. Ergo basis $\alpha\delta$, est æqualis basi $\beta\delta$. (Conclusio.) Data igitur linea recta finita, $\alpha\beta$, secta est in duas partes æquales in puncto δ. Id quod faciendum erat.

Propositio vndecima. Problema.

DAtæ lineæ rectę, à dato in ea puncto: ducere lineam rectam ad angulos rectos, id est, rectos facientem angulos.

(Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$, & datum in ea pũctum γ. (Explicatio quæsiti.) Ducenda est à puncto γ, linea recta re-

ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.)



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αγ, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ γδ ἴση, ἡ γε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ζδε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δγ, τῇ γε, κοινὴ δὲ ἡ ζγ, δύο δὴ αἱ δγ, γζ, δυσὶ ταῖς εγ, γζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγζ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα, τῶν ὑπὸ δγζ, ζγε. (Συμπέρασμα.) Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸ ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται, ἡ ζγ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

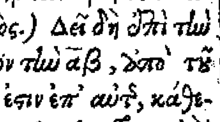
Πρότασ

ctos faciens angulos cum linea $\alpha\beta$. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\gamma$, quoduis punctum δ: & fiat lineæ $\gamma\delta$, æqualis linea $\gamma\varepsilon$. Et statuatur super linea $\delta\varepsilon$, triangulus æquilaterus $\delta\zeta\varepsilon$. deniq; ducatur recta $\zeta\gamma$. (Explicatio factæ delineationis.) Dico, quod datæ lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato in ea pũcto γ, ad angulos rectos ducta sit recta linea $\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\delta\gamma$, est æqualis rectæ $\gamma\varepsilon$, communis verò recta $\zeta\gamma$. Duo igitur latera $\delta\gamma$, $\delta\zeta$, duobus lateribus $\varepsilon\gamma$, $\gamma\zeta$, sunt æqualia alterum alteri, & basis $\delta\zeta$, æqualis est basi $\varepsilon\zeta$. ergo angulus $\delta\gamma\zeta$, æqualis est angulo $\varepsilon\gamma\zeta$, (& sunt ἐφεξῆς, id est, vicini) Quando verò recta super rectam stans, angulos vicinos æquales fecerit inter se: vterq; æqualium angulorum est rectus. Ergo vterq; angulorum $\delta\gamma\zeta$, $\zeta\gamma\varepsilon$, est rectus. (Conclusio.) Datæ igitur lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato, quod in ea est puncto γ: ad angulos rectos ducta est recta $\zeta\gamma$. Id quod faciendum erat.

Πρότασις ιβ. πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ εὐθείας, τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ, κύκλος γεγράφθω ὁ εζη, καὶ τετμήσθω ἡ εη δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γη, γθ, γε. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηθ τῇ θε, κοινὴ δὲ



ἡ θγ,

Propositio duodecima. Problema.

AD lineam rectam datã infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta infinita αβ, & punctum quod in ea non est datum γ. (Explicatio quæsiti.) A puncto dato γ, ad datam lineam rectam infinitam αβ: ducenda est linea recta perpendicularis. Delineatio.) Sumatur ex altera parte lineæ αβ, punctum quoduis δ: & centro γ, interual lo γδ, describatur circulus εζη, secans lineam αβ, in punctis ε, & η. Postea disseceтur linea recta εη, in duas partes æquales in puncto θ. & ducantur lineæ γη, γθ, γε. (Explicatio iã facta delineationis.) Dico quod ad lineam rectam datã infinitam αϐ, à puncto γ dato, quod in ea non est, perpendicularis ducta sit recta linea γϑ. (Demonstratio.) Quoniam recta ηθ, æqualis est rectæ ϑε: & communis

recta

ἡ θγ, δύο δὴ αἱ ηθ, θγ, δύσι ταῖς εθ, θγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ γη, βάσει τῇ γε, ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ γθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθγ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. (Συμπέρασμα) Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον, τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ. Θεώρημα.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Ἔκθεσις.) Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ σταθεῖσα, γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ γβα, αβδ. (Διορισμός) Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, γω-

νίαι

recta θγ. ergo duo latera ηθ, θγ, duobus lateribus εθ, θγ, sunt æqualia alterum alteri: & basis γη, basi γε, est æqualis. quare angulus γθη, angulo εθγ est æqualis: & sunt vicini. Quando verò recta super recta stans, angulos vicinos æquales inter se fecerit: vterq; æqualium illorũ angulorum est rectus, & recta super recta stans, perpendicularis ad eam dicitur. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam infinitam αβ, à puncto γ dato quod in ea non est: perpendicularis ducta est recta γθ. Id quod faciendum erat.

Propositio decima tertia: Theorema.

VT vt recta super recta stans, angulos fecerit: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales eos faciet.

Explicatio dati.) Recta quædam αϐ, stans super recta γδ, faciat angulos γβα, αβδ. Explicatio q̃siti.) Dico ꝙ anguli γϐα, αϐδ,

vel

νίαι ἢ δύο ὀρθαὶ εἰσὶν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας
(Κατασκευή.) Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γβα
τῇ ὑπὸ αβδ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω
ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ γδ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βε. αἱ
ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ
ὑπὸ γβε δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε ἴση ἐστί,
κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ εβδ. αἱ ἄρα ὑπὸ
γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, εβδ
εἰσὶν ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα δυσὶ ταῖς
ὑπὸ δβε, εβα ἴση ἐστὶ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ
ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δβα, αβγ
τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι εἰσίν. ἐδεί-
χθησαν δὲ, καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς
αὐταῖς ἴσαι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλή-
λοις ἐστὶν ἴσα. καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ ἄρα, ταῖς
ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ γβε,
εβδ, δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ ἄ-
ρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (Συμπέρασμα.)
Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνί-
ας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας
ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

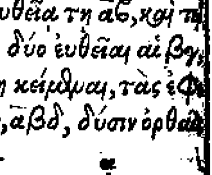
Πρό-

vel sint duo recti, vel duobus rectis æquales. Delineatio cũ hypothesi.) Si igitur angulus γβα, æqualis est angulo αϐδ: tum sunt duo recti. quòd si verò non, tum ducatur à puncto β, rectæ lineæ γδ, ad angulos rectos linea recta ϐα. (Demonstratio.) Anguli igitur γβε, εβδ sunt duo recti. & cùm angulus γβε, sit æqualis duobus angulis γβα, αβε. Communis addatur angulus εβδ. quare duo anguli γβε, εϐδ, tribus angulis γβα, αβε, εβδ, sunt æquales. Rursus quoniam angulus δϐα æqualis est duobus angulis δϐε, εβα, communis addatur angul⁹ αϐγ. anguli igitur δϐα, αβγ, tribus angulis δβε, εβα, αϐγ sunt æquales. Verum demonstratum est, angulos γϐε, εβδ tribus ijsdem angulis esse æquales. Quæ verò eidẽ sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia. ergo anguli γϐε, εϐδ, sunt duobus angulis δβα, αβγ, æquales. sed anguli γϐε, εϐδ, sunt duo recti: ergo δϐα, αϐγ, anguli, sunt æquales duobus rectis. (Cõclusio.) Vt ut igitur recta super recta stans, fecerit angulos: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet. Id quod erat demonstrandum.

Πρότασις ιδ'. θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-
μείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴ-
σας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἀλλήλαις αἱ
εὐθεῖαι.

Ἔκθεσις.) Πρὸς γὰρ τίνι εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ
πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, δύο εὐθεῖαι αἱ βγ,
βδ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφε-
ξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς
ἴσας ποιείτωσαν. (Διο-
ρισμός.) Λέγω ὅτι ἐπ'
εὐθείας ἐστὶ τῇ γβ ἡ βδ.
Κατασκευή.) Εἰ γὰρ μὴ ἐ-
στὶ τῇ βγ ἐπ' εὐθείας ἡ
βδ, ἔστω τῇ γβ ἐπ' εὐθεί-
ας ἡ βε. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ
ἐπ' εὐθείαν τὴν γβε ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ
αβγ, αβε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰ-
σὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι,
αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβε, ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ
ἴσαι εἰσὶ κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβγ, λοι-



Propositio decimaquarta. Theorema.

SI ad lineam quandam rectã, & punctum in ea datum, duæ rectę non in easdem partes sitæ, angulos (ἐφεξῆς) vicinos, duobus rectis angulis æquales fecerint: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας, altera alteri erunt.

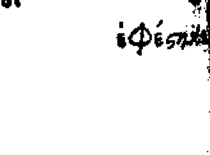
Explicatio dati.) Nam ad lineam quandã rectam αϐ: & ad punctum in ea datum ϐ: duæ rectæ lineæ βγ, ϐδ, non in easdem partes sitæ faciant angulos ἐφεξῆς (vicinos) αϐγ, αϐδ, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd rectæ γβ, sit ἐπ' εὐθείας recta βδ. (Delineatio.) Si enim ϐγ non est ἐπ' εὐθείας recta βδ: sit recta βε, rectæ γβ, ἐπ' εὐθείας. (Demonstratio.) Quoniam recta αβ, constituta est super recta γβε: anguli igitur αβγ, αβε, sunt æquales duobus rectis. Verum anguli αβγ, αβδ etiam sunt æquales duobus rectis. anguli igitur γβα, αβε, angulis γβα, αβδ sunt æquales. Communis auferatur angulus αβγ. reliquus igi-

πῇ ἄρα ἡ ὑπὸ ᾱβε, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ᾱβδ
ἐστὶν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἐστὶν ἀδ
νατον, οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βε, τῇ β
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλ
τῆς βδ. (Συμπέρασμα.) Ἐπ' εὐθείας ἄρα
ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ. Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ,
καὶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τ
αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δ
σὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσον
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε. θεώρημα.

ΕΑν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τ
κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλα
ποιήσουσι.

Ἔκθεσις.) Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ᾱβ, γ̄δ, τ
νέσθωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. (Διορι
μός.) Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ
μὲν ὑπὸ ᾱεγ γωνία, τῇ
ὑπὸ δεβ, ἡ δὲ ὑπὸ γ̄εβ,
τῇ ὑπὸ ᾱεδ. (Ἀπόδει-
ξις.) Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ
ᾱε, ἐπ' εὐθείαν τὴν γδ ἐπ



ἐφέστη

tur angulus αβε, reliquo angulo αβδ est æqualis, minor maiori, quod est impossibile. Quare recta βε, non est ἐπ' εὐθείας rectæ βγ. Similiter etiam demonstrabimus, quòd nulla alia præter rectam βδ, sit ἐπ' εὐθείας rectæ γβ. (Conclusio.) Ergo recta γβ, est ἐπ' εὐθείας rectæ βδ. Si igitur ad lineam quandã rectam, & punctum in ea datum, duæ rectæ non in easdem partes sitæ angulos ἐφεξῆς, duobus rectis angulis fecerint æquales: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας erunt altera alteri. Id quod erat demonstrandum.

Propositio decimaquinta. Theorema.

SI duæ lineæ rectę, sese mutuo secãt: faciẽt angulos ad verticem inter se æquales.

Explicatio dati.) Duæ lineæ rectæ enim αβ, γδ: sese mutuo secent in puncto ε. (Explicatio quæsiti) Dico quòd angulus αεγ, angulo δεβ sit æqualis, & angulus γεβ, angulo αεδ etiam æqualis. (Demonstratio.) Quoniam recta αε, super rectã γδ, constituta est, ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ γεα, αεδ, αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ δε, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ αεδ, δεβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αεδ, δεβ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γεα, αεδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ, ταῖς ὑπὸ αεδ, δεβ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ αεδ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεα λοιπῇ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ γεβ, δεα, ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

Πρότασις ις. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

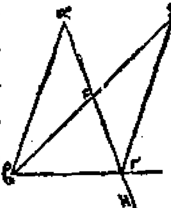
Ἐκθε-

& facit angulos γεα, αεδ. anguli igitur γεα, αεδ, duobus rectis sunt æquales. Item quoniam recta δε, super recta αβ est constituta, faciatq; angulos αεδ, δεβ, anguli igitur αεδ. δεβ, sunt æquales duobus rectis. Verum anguli γεα, αεδ duobus rectis sunt æquales. quare duo anguli γεα, αεδ, sunt æquales duobus angulis αεδ, δεβ. Communis auferatur angulus αεδ. reliquus igitur angulus γεα, reliquo angulo βεδ est æqualis. Simili demonstratione probabimus angulum γεβ, angulo δεα esse æqualem. (Conclusio.) Si igitur duæ rectæ sese mutuò secent: facient angulos ad verticem inter se æquales. Id quod erat demonstrandum.

Corolarium. Ex hoc est manifestum, quòd quæcunq; lineæ rectæ sese mutuò secant, faciunt angulos ad punctum sectionis quatuor rectis æquales.

Propositio decimasexta. Theorema.

Omnis trianguli, vno ex lateribus protracto: angulus extraneus, vtroq; eorũ, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur, est maior.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ὑπὸ γβα, βαγ γωνιῶν. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. καὶ διήχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ η. (Ἀπόδειξις) Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εγ. ἡ δὲ βε, τῇ εζ. δύο αἱ αε, εβ, δυσὶ ταῖς γε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ ἴση ἐστίν. κατὰ κορυφὴν γάρ. βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζεγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ εγζ. μείζων δ᾽ ἐστὶν ἡ ὑπὸ εγδ, τῆς ὑπὸ εγζ. μείζων

ἄρα

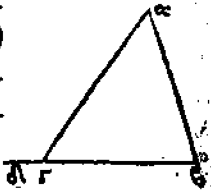
Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\delta$, est maior angulo $\gamma\beta\alpha$, interno sibi opposito: & maior angulo $\beta\alpha\gamma$, interno sibi opposito. (Delineatio.) Dissecetur latus $\alpha\gamma$, in duas partes æquales in puncto ε. deinde ducatur linea $\beta\varepsilon$, & producatur ad punctum ζ. Fiat etiam lineæ $\beta\varepsilon$, æqualis linea $\varepsilon\zeta$. denique ducatur linea $\zeta\gamma$, & extendatur recta $\alpha\gamma$, ad punctum vsque η. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\varepsilon$, æqualis est rectæ $\varepsilon\gamma$: & recta $\beta\varepsilon$, æqualis rectæ $\varepsilon\zeta$. duo igitur latera $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ duobus lateribus $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\alpha\varepsilon\beta$, æqualis est angulo $\zeta\varepsilon\gamma$. quia sunt anguli ad verticem. Basis igitur $\alpha\beta$, basi $\zeta\gamma$ erit æqualis, & triangulus $\alpha\beta\varepsilon$, æqualis erit triangulo $\zeta\varepsilon\gamma$: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. itaque angulus $\beta\alpha\varepsilon$, æqualis est angulo $\varepsilon\gamma\zeta$. Verum angulus $\varepsilon\gamma\delta$, maior est angulo $\varepsilon\gamma\zeta$. quare angulus $\alpha\gamma\delta$, angulo $\beta\alpha\varepsilon$

ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ τῆς ὑπὸ βαε. ὁμοίως δὲ τῆς βγ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ βγη, τουτέστιν ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.



(Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ αβγ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ, αγδ, αγβ, τῶν *etiam est maior. Similiter demonstrabitur quando recta* $\beta\gamma$, *dissecta fuerit in duas partes æquales: quod angulus* $\beta\gamma\eta$, *hoc est* ζ, *angulus* $\alpha\gamma\delta$ *maior sit angulo* $\alpha\beta\gamma$. *(Conclusio.) Omnis igitur trianguli vno ex lateribus protracto: extraneus angulus, vtroq; eorum, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur est maior. Id quod erat demonstrandũ.*

Propositio decimaseptima. Theorema.

OMnis trianguli, quiuis duo anguli: duobus rectis angulis sunt minores.

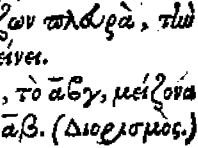
Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$. *(Explicatio quæsiti) Dico quòd trianguli* $\alpha\beta\gamma$, *duo anguli sint minores duobus rectis, quouis modo sumpti. (Delineatio.) Producatur linea* $\beta\gamma$, *ad punctum* δ. *(Demonstratio.) Quoniam trianguli* $\alpha\beta\gamma$, *angulus extraneus* $\alpha\gamma\delta$: *maior est angulo* $\alpha\beta\gamma$, *interno sibi opposito. Communis addatur angulus* $\alpha\gamma\beta$. *anguli igitur* $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, *sunt maio-*

τῶν ὑπὸ $\overline{αβγ}$, $\overline{βγα}$ μείζονες εἰσὶν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ $\overline{αγδ}$, $\overline{αγβ}$, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. αἱ ἄρα ὑπὸ $\overline{αβγ}$, $\overline{βγα}$, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $\overline{βαγ}$, $\overline{αγβ}$, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ $\overline{αγβ}$, $\overline{αβγ}$. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Εκθεσις.) Εστω τρίγωνον, τὸ $\overline{αβγ}$, μείζονα ἔχον τὴν $\overline{αγ}$ πλευρὰν, τῆς $\overline{αβ}$. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{αβγ}$, μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ $\overline{βγα}$. (Κατασκευή.) Επεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ $\overline{αγ}$ τῆς $\overline{αβ}$, κείσθω τῇ $\overline{αβ}$ ἴση ἡ $\overline{αδ}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{βδ}$. (Απόδειξις.) Καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ $\overline{βδγ}$ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{αδβ}$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ $\overline{δγβ}$. ἴση δὲ ἡ ὑ-



πὸ

res angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$. Verum anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, sunt duo recti. ergo anguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\alpha$, sunt minores duobus rectis. Simili ratione demonstrabimus angulos $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\beta$, duobus rectis esse minores. Item & angulos $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\beta\gamma$ duobus rectis esse minores. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli quiuis duo anguli, minores sunt duobus angulis rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propositio decima octaua. Theorema.

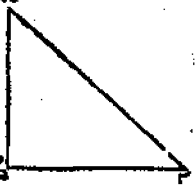
VT quoduis latus trianguli est maius: ita maiorem subtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, habens latus $\alpha\gamma$, maius latere $\alpha\beta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\gamma$, maior sit angulo $\alpha\gamma\beta$. (Delineatio.) Cum enim latus $\alpha\gamma$ sit maius latere $\alpha\beta$: fiat lineæ $\alpha\beta$, æqualis recta $\alpha\delta$: & ducatur recta $\beta\delta$. (Demonstratio.) Quoniam trianguli $\beta\delta\gamma$, angulus $\alpha\delta\beta$ externus, maior est angulo $\delta\gamma\beta$ interno sibi oppo-

πὸ αδβ, τῇ ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, τῆς ὑπὸ αγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ αγβ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῆς ὑπὸ βγα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αγ, πλευρᾶς τῆς αβ μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μὴ ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ αγ τῇ αβ. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς

αβ,

opposito: & angulus αδβ, sit æqualis angulo αβδ: cum latus αβ, lateri αδ sit æquale. idcirco angulus αβδ, maior est angulo αγβ. Ergo angulus αβγ, multo est maior angulo αγβ. (Conclusio.) Vt quoduis igitur latus trianguli est maius: ita maiorem subtendit angulum. id quod erat demonstrandum.

Propositio decima nona. Theorema.

VT Triangulus aliquis, angulum quemuis habuerit maiorem: ita etiam maiorem habebit eam lineam rectam, quæ illum subtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ, habens angulum αβγ, maiorem angulo αγβ. Explicatio quæsiti.) Dico quod trianguli αβγ, latus αγ, maius sit latere αβ. (Demonstratio.) Si enim non fuerit maius, tum vel erit ei æquale, vel erit eo minor. sed recta αγ, nõ est æqualis rectæ αβ. nam & angulus αβγ, angulo αγβ esset æqualis. id quod tamen nõ est. quare neq; latus αγ, lateri αβ, erit æquale: neq; etiam latus αγ, poterit esse minus la-

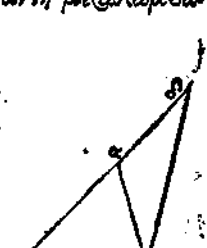
tere

αβ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί, μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ αγ, τῆς αβ. (Συμπέρασμα) Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ αβγ. (Διορισμός.) λέγω ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν βα, αγ, τῆς βγ, αἱ δὲ αβ, βγ, τῆς αγ, αἱ δὲ, βγ, γα, τῆς αβ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ γα ἴση ἡ δα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Απόδειξις) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αγ. ἴση ἐστὶν καὶ γω-



νία

tere αϐ. quia etiam angulus αϐγ, minor eßet angulo αγϐ: Cum tamen non sit. Quare neq; latus αγ, minus est latere αϐ. antea autẽ demonstratum est, quod ei non sit æquale. Erit ergo αγ latus, maius latere αϐ. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit quicunq; sumatur. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima, Theorema.

OMnis trianguli, quæuis duo latera sunt maiora reliquo.

Explicatio dati.) Sit triangulus αϐγ, Explicatio quæsiti.) Dico quod triãguli αϐγ queuis duo latera, sint maiora reliquo. latera ϐα, αγ, maiõra latere ϐγ: Item latera αϐ, ϐγ maiora latere αγ: deniq; latera ϐγ, γα, maiora latere αϐ. (Delineatio.) Producatur linea ϐα, ad punctum δ: & fiat linea αγ, æqualis lineæ αδ: deniq; ducatur linea γδ. (Demõstratio.) Quoniã latus δα, æquale est lateri αγ.

etiam

νία ἡ ὑπὸ αδγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ γωνία, τῆς ὑπὸ αγδ μείζων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον ἐστὶ τὸ δβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῆς ὑπὸ αδγ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἡ δβ ἄρα, τῆς βγ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ δβ, ταῖς αβ, αγ. μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν αβ, βγ, τῆς γα μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ βγ, γα, τῆς αβ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βγ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν β, γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθωσαν αἱ βδ,

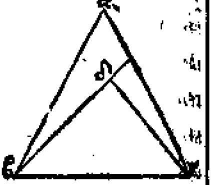
δγ.

etiã angulus $\alpha\delta\gamma$, est æqualis angulo $\alpha\gamma\delta$. Verum angulus $\beta\gamma\delta$, maior est angulo $\alpha\gamma\delta$. quare & angulus $\beta\gamma\delta$, angulo $\alpha\delta\gamma$ maior erit. & quia triangulus $\delta\gamma\beta$, angulũ $\beta\gamma\delta$ maiorẽ habet angulo $\alpha\gamma\delta$: atq; maius latus subtendat angulũ maiorem: idcirco & latus $\delta\beta$, maius est latere $\beta\gamma$. Sed $\delta\beta$ latus, æquale est $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ lateribus. quare $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, duo latera, sunt maiora latere $\beta\gamma$. Similiter demonstrabimus, quòd latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sint maiora latere $\alpha\gamma$, & $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ latera sint maiora latere $\alpha\beta$. Conclusio.) Omnis igitur trianguli, quæuis duo latera sunt maiora reliquo, id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima prima. Theorema.

SI à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis duæ rectę lineę intra triangulum ad punctum idem statuantur: erunt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent.

Explicatio dati.) Sup latere enim $\beta\gamma$ trianguli $\alpha\beta\gamma$: à finib. β, et γ duæ lineæ rectæ $\beta\delta$, δγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι αἱ βδ, δγ, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν βα, αγ, ἐλάσσονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε. (Ἀπόδειξις.)



Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. τοῦ αβε ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ αβ, αε, τῆς βε μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ. αἱ ἄρα βα, αγ, τῶν βε, εγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ τοῦ γεδ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ γε, εδ, τῆς γδ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ, αἱ γε, εβ ἄρα τῶν γδ, δβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν βε, εγ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, πολλῷ ἄρα αἱ βα, αγ, τῶν βδ, δγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. τοῦ γδε ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γεδ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ

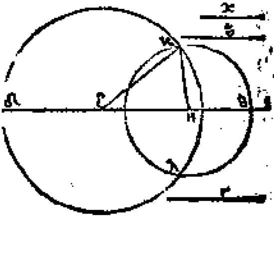
αβε

δγ statuentur intra triangulū.) Explicatio quæsiti.) Dico quod duæ rectæ βδ,δγ, minores quidem sint reliquis duobus trianguli lateribus βᾱ, ᾱγ: verum angulum βδγ, maiorem angulo βᾱγ, contineant. (Delineatio.) Producatur enim linea βδ, ad punctum vsq; ε. (Demonstratio.) Quoniam omnis trianguli duo latera maiora sunt reliquo: idcirco trianguli αϐε, duo latera αβ, αε sunt maiora latere ϐε. Cōmune addatur latus εγ. latera igitur βα, αγ, maiora sunt lateribus βε,εγ. Item quia trianguli γεδ, duo latera γε,εδ maiora sunt latere γδ. Commune addatur latus δβ. quare latera γε, εβ maiora sunt lateribus γ̄δ,δβ. Verum latera ϐα,αγ, demonstrata sunt maiora lateribus ϐε,εγ, ergo ϐα, αγ̄ latera longe erunt maiora laterib⁹ ϐδ,δγ. Rursus quoniam omnis trianguli angulus extraneus, angulo intra triangulum sibi opposito est maior: idcirco trianguli γδε, angulus ϐδγ extraneus, angulo γεδ interno sibi opposito est maior. Per eadem demonstra-

αβε τριγώνου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ γεβ μεί-
ζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ γεβ
μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ βδγ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑ-
πὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. (Συμπέ-
ρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν
πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐν-
τὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ
τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μέν εἰσι,
μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖ-
ξαι.

Πρότασις κβ. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.



Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α, β, γ, ὧν αἱ δύο, τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μετα-

bitur quòd trianguli $\alpha\beta\epsilon$, angulus $\gamma\epsilon\beta$, maior sit angulo $\beta\alpha\gamma$. verùm angulo $\gamma\epsilon\beta$ maior est demonstratus angulus $\beta\delta\gamma$. Ergo angulus $\beta\delta\gamma$, multò est maior angulo $\beta\alpha\gamma$. (Conclusio.) Si igitur à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis, duæ rectæ lineæ intra triangulũ, ad punctum idem statuãtur: erunt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima secunda. Problema.

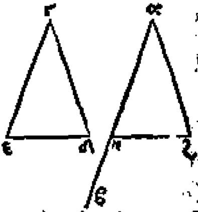
EX tribus lineis rectis, quæ sunt æquales tribus rectis lineis datis: triangulũ cõstituere. Oportet uerò quasuis duas reliqua esse maiores: propterea quod in omni triãgulo quęuis duo latera maiora sunt reliquo.

Explicatio dati.) Sint tres lineæ rectæ datæ α, β, γ: & sint quæuis duæ maiores quàm λαμβανόμεναι, αἱ μὲν α, β, τῆς γ, αἱ δὲ α, γ, τῆς β, καὶ ἔτι αἱ β, γ, τῆς α. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Ἐκκείσθω τὶς εὐθεῖα ἡ δε, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση, ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἴση ἡ ηθ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δκλ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ, κη. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνέστηκε τὸ κζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζδ, τῇ ζκ, ἀλλὰ ἡ ζδ τῇ α ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ α ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ἐστὶν τοῦ λκθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ηκ. ἀλλὰ ἡ ηθ, τῇ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κη ἄρα, τῇ γ ἐστὶν, reliqua: scilicet α & β maiores quàm γ, & α, atque γ maiores quàm β: denique β & γ, maiores quàm α. (Explicatio quæsiti.) Oportet igitur ex tribus lineis rectis, quæ datis tribus α, β, γ, sunt æquales triangulum componere. (Delineatio.) Sumatur recta aliqua linea $\delta\epsilon$: finita quidem ad punctum δ: infinita verò ad punctum ϵ. deinde fiat lineæ rectæ α, æqualis linea recta $\delta\zeta$. Itē rectæ β, æqualis recta $\zeta\eta$. præterea rectæ γ, æqualis recta $\eta\theta$. Ad hæc centro ζ, interuallo $\zeta\delta$, describatur circulus $\delta\kappa\lambda$. centro etiam η, interuallo $\eta\theta$, describatur circulus $\kappa\lambda\theta$: secans circulum $\delta\eta\lambda$, in puncto κ. Denique ducātur lineæ rectæ $\zeta\kappa$, $\kappa\eta$. (Delineationis factæ explicatio.) Dico quòd ex lineis rectis tribus, quæ sunt æquales trib9 rectis datis, compositus sit triangulus $\kappa\zeta\eta$. (Demonstratio.) Quoniam punctum ζ, centrum est circuli $\delta\kappa\lambda$. idcirco recta $\zeta\delta$, æqualis est rectæ $\zeta\kappa$: verū recta $\zeta\delta$ est æqualis rectæ α: itaque & $\kappa\zeta$ recta, æqualis est rectæ α. Item quoniam punctum η, est centrum circuli $\kappa\lambda\theta$: idcirco recta $\eta\theta$, est æqualis rectæ $\eta\kappa$. verū $\eta\theta$

γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζη, τῇ β ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ κζ, ζη, ηκ τρισὶ ταῖς α, β, γ ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν κζ, ζη, ηκ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνίσταται, τὸ κζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ. πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ δγε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, τῇ ὑπὸ δγε, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν γδ, γε, τυχόντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ

ἐπεζεύ-

æqualis est γ rectæ. ergo & $\eta\kappa$ recta, æqualis est rectæ γ. Verum $\zeta\eta$, etiam est æqualis rectæ β. Tres igitur rectæ $\kappa\zeta$, $\zeta\eta$, $\eta\kappa$, tribus rectis α, β, γ, sunt æquales. (Conclusio.) Ex tribus igitur rectis $\kappa\zeta$, $\zeta\eta$, $\eta\kappa$, quæ sunt æquales tribus datis α, β, γ, rectis: triangulus est factus $\kappa\zeta\eta$. Quod faciendum erat.

Propositio vigesima tertia. Problema.

AD datam lineam rectam, & datũ in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum statuere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: sit datum in ea punctum α. sit angulus rectilineus datus $\delta\gamma\varepsilon$. (Explicatio quæsiti.) Ad lineam rectam datam $\alpha\beta$, & punctum in ea datum α, statuendus est angulus rectilineus, æqualis angulo $\delta\gamma\varepsilon$ rectilineo dato. (Delineatio.) Sumantur in lineis rectis $\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon$, puncta quævis δ, ε. Ducatur etiam linea ἐπεζεύχθω ἡ δε. καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς γδ, δε, γε, τρίγωνον συνεστάτω τὸ αζη, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ, τῇ αζ, τὴν δὲ γε, τῇ αη, καὶ ἔτι τὴν δε, τῇ ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ δγ, γε, δύσι ταῖς ζα, αη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δε, βάσει τῇ ζη ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζαη ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα) Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ δγε, ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται, ἡ ὑπὸ ζαη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ. θεώρημα

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ

πλευ-

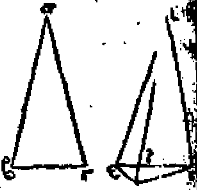
recta $\delta\epsilon$. Postea ex talibus lineis rectis, quæ sunt æquales tribus rectis $\gamma\delta$, $\delta\epsilon$, $\gamma\epsilon$, componatur triangulus $\alpha\zeta\eta$: sic vt lineæ $\gamma\delta$, sit æqualis linea $\alpha\zeta$: & lineæ $\gamma\epsilon$ linea $\alpha\eta$, item lineæ $\delta\epsilon$ æqualis linea $\zeta\eta$. (Demonstratio.) Quoniam duo latera $\delta\gamma$, $\gamma\epsilon$, duobus laterib. $\zeta\alpha$, $\alpha\eta$, sunt æqualia alterum alteri, & basis $\delta\epsilon$, æqualis sit basi $\zeta\eta$. Erit igitur angulus $\delta\gamma\epsilon$, æqualis angulo $\zeta\alpha\eta$. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam $\alpha\beta$, & ad punctum in ea datum α, dato angulo rectilineo $\delta\gamma\epsilon$, constitutus est angulus rectilineus $\zeta\alpha\eta$. Id quod erat faciendum.

Propositio vigesimaquarta. Theorema.

SI fuerint trianguli vnius, duo latera æqualia duobus lateribus alterius trianguli, alterum alteri: sed angulus vnius maior angulo alterius, quē æquales rectæ lineę comprehendunt: etiam basis basi maior erit.

Explicatio dati.) Sint duo triãguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, quorum duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, duobus lateribus

πλευραῖς, ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέρ
ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ
δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, γω-
νία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, γω-
νίας τῆς ὑπὸ εδζ μείζων
ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω
ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ, βά-



σεως τῆς εζ, μείζων ἐστίν. (Κατασκευή.)
πεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τ
ὑπὸ εδζ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ δε
θείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ δ, τῇ ὑπ
βαγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ εδη, καὶ κείσθω ὁποτ
ρα τῶν αγ, δζ, ἴση ἡ δη, καὶ ἐπεζεύχθωσ
αἱ ηε, ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μ
αβ, τῇ δε, ἡ δὲ αγ, τῇ δη, δύο δὴ αἱ βα, α
δυσὶ ταῖς εδ, δη, ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ,
καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδη, ἴ
ἐστί, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εη, ἐστὶν ἴση. πά
λιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δη, τῇ δζ, ἴση ἐστὶ καὶ γω
νία ἡ ὑπὸ δζη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, μείζων ἄ
ρα ἡ ὑπὸ δζη, τῆς ὑπὸ εηζ. πολλῷ ἄρα με
ζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, τῆς ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ τρ
γωνόν ἐστι, τὸ εζη, μείζονα ἔχον τὴν ὑπ

ribus δε, δζ sint æqualia, alterum alteri latus αβ, lateri δε, & latus αγ, lateri δζ: sed angulus βαγ sit maior angulo εδζ.

(Explicatio quæsiti.) Dico quod basis βγ, basi εζ sit maior. (Delineatio.) Quoniam angulus βαγ maior est angulo εδζ. Statuatur ad lineam rectam εδ, & ad punctum in ea δ, angulus εδη æqualis angulo βαγ: & fiat alterutri linearum αγ, δζ æqualis linea recta δη. & ducantur lineæ rectæ ηε, ζη.

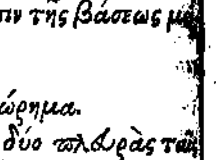
(Demonstratio.) Quoniam latus αβ, æquale est lateri δε, & latus αγ æquale est lateri δη: duo igitur latera βα, αγ, duobus lateribus εδ, δη sunt æqualia, alterum alteri, & angulus βαγ, æqualis est angulo εδη. Ergo basis βγ, basi εη est æqualis. Item quoniam latus δη, est æquale lateri δζ: erit etiā angulus δζη, æqualis angulo δηζ, ergo angulus δζη maior est angulo εηζ. quare angulus εζη, longè maior est angulo εηζ. Cum etiam triangulus εζη, habeat angulum

εζη γωνίαν τῆς ὑπὸ εηζ, ὑπὸ δὲ τὴν μεί-
να γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μεί-
ζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εη, τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ
τῇ βγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ βγ, τῆς εζ. (Συμπέ-
ρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δ-
πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκ-
τέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνί-
μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν π-
ριεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μεί-
ζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέ-
ρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ,
τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑ-
πὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρί-
γωνα τὰ αβγ, δεζ, τὰς
δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ
ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς
δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέ-
ραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ,



τῇ δε

gulum εζη, maiorem angulo εηζ: ac maiorem angulum maius latus subtendat. idcirco latus εη, maius est latere εζ. verum latus εη, æquale est lateri βγ. ergo & βγ latus maius esse latere εζ. (Conclusio.) Si ergo duo fuerint trianguli, habentes duo latera, duobus lateribus æqualia, alterum alteri: angulum verò angulo maiorem, qui æqualibus illis lateribus continetur: etiam basin basi maiorem habebunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesimaquinta. Theorema.

SI trianguli vnius, duo latera fuerint æqualia duobus lateribus trianguli alterius, sed basis vnius fuerit maior basi alterius: erit etiam angulus vnius maior angulo alterius, quem æquales illæ rectæ lineæ comprehendunt.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ: quorũ duo latera αβ, αγ, sint æqualia duobus laterib. δε, δζ, alterũ alteri, latus αβ, æquale τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, βάσις δὲ ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ μείζων ἔσω. (Διορισμός.) λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων. ἐλάσσων ἦν καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία τῆς ὑπὸ εδζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς. θεώρημα.

Ἐὰ

æquale lateri δε, & latus αγ, æquale lateri δζ, sed basis βγ, sit maior basi εζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus βαγ, maior sit angulo εδζ. (Demonstratio.) Quod si enim nõ fuerit maior, aut erit ei æqualis, aut eo minor. sed angulus βαγ, non est æqualis angulo εδζ. nam & basis βγ, etiam eßet æqualis basi εζ: Verùm non est ei æqualis. quare nec angulus βαγ, est æqualis angulo εδζ: sic etiam non est eo minor: siquidem & basis βγ, basi εζ minor eßet: quod tamen nõ est. quare nec angulus βαγ, angulo εδζ minor est. demonstratum verò antea fuit, quòd ei non sit æqualis. Erit igitur angulus βαγ, angulo εδζ maior. (Conclusio.) Si ergo fuerint trianguli vnius duo latera æqualia duobus lateribus triãguli alterius, alterum alteri, sed basis vnius maior basi alterius: erit etiam angulus vnius, maior angulo alterius, quem æquales rectæ lineæ comprehendunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima sexta. Theorema.

 Quo-

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας, τα
δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρ
καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴ
πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσ
ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰ
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξε
ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τ
λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔκθεσις πρώτη.) Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεζ, εζδ, ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ εζδ. ἐχέτω δὲ καὶ μία
πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸ
ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν βγ, τῇ εζ. (Διορισμὸς πρῶτος.) Λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰ
πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξε
ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δ
αγ, τῇ δζ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοι

πῇ

QVorum triangulorum duo anguli vnius fuerint æquales duobus angulis alterius: alter alteri: & latus vnum, æquale vni: siue illud appositũ sit æqualibus illis angulis; siue subtendat vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus reliquo angulo erit æqualis.

Prima explicatio dati.) *Sint duo trianguli* $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, *quorum duo anguli* $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$ *sint æquales duobus angulis* $\delta\epsilon\zeta$, $\epsilon\zeta\delta$, *alter alteri: angulus* $\alpha\beta\gamma$, *æqualis angulo* $\delta\zeta\epsilon$, *&* *angulus* $\beta\gamma\alpha$, *angulo* $\epsilon\zeta\delta$: *habeant etiam vnum latus vni lateri æquale, & primo loco latus quod positum est ad æquales illos angulos, latus* $\beta\gamma$, *lateri* $\epsilon\zeta$. *(Prima explicatio quæsiti.)* *Dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus habebunt æqualia, alterum alteri, latus* $\alpha\beta$, *lateri* $\delta\epsilon$, *& latus* $\alpha\gamma$, *æquale lateri* $\delta\zeta$: *& reliquum angulum reliquo an-*

τῇ γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. (Κα
σκευὴ πρώτη.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τ
δε, μία αὐτῶν μείζων ἐστί. ἔστω μείζων
αβ, καὶ κείσθω τῇ δε ἴση ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω
ἡ ηγ. (Ἀπόδειξις πρώτη.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν
μὲν βη, τῇ δε, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, δύο δὴ αἱ β
βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκα
τέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ γωνίᾳ τῇ ὑ
δεζ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ δζ ἴ
ἐστί. καὶ τὸ ηγβ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγών
σον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπα
γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ'
αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑ
ηγβ γωνία, τῇ ὑπὸ δζε, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε, τ
ὑπὸ βγα ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βγη ἄρ
τῇ ὑπὸ βγα ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζ
ὅπερ ἀδύνατον. (Συμπέρασμα πρῶτον.) Ο
ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ κ
ἡ βγ, τῇ εζ ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δύσι τα
δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γω
ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, βά

gulo æqualem, nempe angulum $\beta\alpha\gamma$, æqualem angulo $\epsilon\delta\zeta$. (Prima delineatio.) Si enim $\alpha\beta$, latus, inæquale fuerit lateri $\delta\epsilon$, vnum ex istis sit maius. sit igitur latus $\alpha\beta$, maius, & fiat rectæ $\delta\epsilon$, æqualis recta $\beta\eta$, & ducatur recta $\eta\gamma$. (Prima demonstratio.) Cum itaq; latus $\beta\eta$, sit æquale lateri $\delta\epsilon$, & latus $\beta\gamma$ æquale lateri $\epsilon\zeta$: duo igitur latera $\beta\eta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\eta\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$ æqualis: ergo basis $\eta\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\eta\gamma\beta$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis, & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt angulus $\eta\gamma\beta$, æqualis angulo $\delta\zeta\epsilon$, sed angulus $\delta\zeta\epsilon$, ꝓponitur æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, erit igitur angulus $\beta\gamma\eta$, etiam æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, minor maiori, quod fieri nequit. (Conclusio prima.) Ergo latus $\alpha\beta$, nō est inæquale lateri $\delta\epsilon$. ergo erit ei æquale, verum latus $\beta\gamma$ etiam est æquale lateri $\epsilon\zeta$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$

σις ἄρα ἡ $\overline{αγ}$, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ λοι-
γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ
ἴση ἐστίν. (Ἔκθεσις δευτέρα.) Ἀλλὰ δὴ πάλ-
ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ
τείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ $\overline{αβ}$, τῇ δε. (Διορισμ-
δεύτερος.) Λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπ-
πλευραὶ, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσον-
ται, ἡ μὲν $\overline{αγ}$, τῇ δζ ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, καὶ ἔτι
λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ
ἴση ἐστίν. (Κατασκευὴ δευτέρα.) Εἰ γὰρ ἄνι-
σός ἐστιν ἡ βγ, τῇ εζ, μία αὐτῶν μείζων ἐστ-
ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων, ἡ βγ, καὶ κείσθω τ-
εζ, ἴση ἡ γθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{αθ}$. (Ἀπόδει-
δευτέρα.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βθ τῇ εζ,
δὲ $\overline{αβ}$ τῇ δε, δύο δὴ αἱ $\overline{αβ}$, βθ, δυσὶ ταῖς δε,
εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας
σας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ $\overline{αθ}$, βάσει τῇ δ-
ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $\overline{αβθ}$ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγών-
ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖ-
γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ'
ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστ-
ἡ ὑπὸ βθ$\overline{α}$ γωνία, τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλὰ ἡ ὑπ-

ζδ

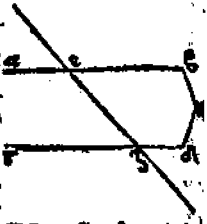
æqualis. basis itaq; $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ erit æqualis, & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\varepsilon\delta\zeta$ æqualis. (Secũda explicatio dati.) Verũ iterũ statuantur latera æquales angulos subtendẽtia æqualia, vt $\alpha\beta$ latus, æquale lateri $\delta\varepsilon$. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod etiã reliqua latera, reliquis laterib. sint æqualia, latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$, et latus $\beta\gamma$, æquale lateri $\varepsilon\zeta$: deniq; reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\varepsilon\delta\zeta$ æqualis. (Secũda delineatio.) Si enim latus $\beta\gamma$, nõ fuerit æquale lateri $\varepsilon\zeta$: sed alterum ex eis fuerit maius. sit latus $\beta\gamma$, si poterit fieri, maius latere $\varepsilon\zeta$: & fiat lateri $\varepsilon\zeta$, æquale latus $\beta\theta$, & ducatur recta $\alpha\theta$. (Secunda Demonstratio.) Quoniam latus $\beta\theta$, æquale est lateri $\varepsilon\zeta$, & latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\varepsilon$: duo itaq; latera $\alpha\beta$, $\beta\theta$, duobus laterib. $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ sunt æqualia alterum alteri: & angulos comprehendunt æquales: basis igitur $\alpha\theta$, est æqualis basi $\delta\zeta$: & triangulus $\alpha\beta\theta$, triangulo $\delta\varepsilon\zeta$ est æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus $\beta\theta\alpha$, æqualis εζδ, τῇ ὑπὸ βγα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βθα ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἐστὶν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ αθγ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βθα ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ βγα, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν. (Συμπέρασμα δεύτερον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ βγ. τῇ εζ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. (Συμπέρασμα καθόλου.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

angulo $\epsilon\zeta\delta$. Verum angulus $\epsilon\zeta\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. ergo angulus $\beta\theta\alpha$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. Trianguli igitur $\alpha\theta\gamma$, angulus $\beta\theta\alpha$ externus, angulo $\beta\gamma\alpha$ interno sibi opposito est æqualis, quòd fieri nequit. Quare latus $\beta\gamma$, non est inæquale lateri $\epsilon\zeta$: erit igitur ei æquale. sed & $\alpha\beta$ latus, est æquale lateri $\delta\epsilon$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sunt æqualia duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$ alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\epsilon\zeta$: & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\epsilon\delta\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Quorum ergo triangulorum duo anguli vnius, fuerint æquales duobus angulis alterius, alter alteri: & latus vnum vni lateri æquale: siue illud appositum sit æqualibus illis angulis: siue subtendat vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus, reliquo angulo erit æqualis. Id quod erat demonstrandum.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ
ΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις κζ. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αεζ, εζδ, ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ αγ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ μέρη κατὰ τὸ η. (Ἀπόδειξις.) Τριγώνου δὴ τοῦ ηεζ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αεζ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ εζη, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αβ, γδ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ βδ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθή-

σονται,

PARS ALTERA HVIVS PRIMI ELEMENTI.

Propositio vigesimaseptima. Theorema.

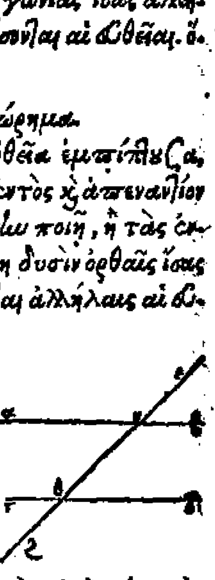
SI in duas lineas rectas, recta incidēs linea, angulos alternos æquales inter se fecerit: æquedistantes inter se erunt rectæ illæ duæ lineæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ incidens linea recta $\epsilon\zeta$, angulos alternos $\alpha\epsilon\zeta$, $\epsilon\zeta\delta$, æquales inter se faciat. (Explicatio quæsiti.) Dico quod recta $\alpha\beta$, recta $\gamma\delta$, æquedistet. (Hypothesis.) Si enim nō æquedistant, tum protractæ linea recta $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ concurrunt vel ex partibus β & δ: vel ex partibus α, & γ. protrahantur & concurrant ex partibus β, & δ: in puncto η. (Demōstratio.) Trianguli igitur $\eta\epsilon\zeta$ angulus $\alpha\epsilon\zeta$, externus, angulo $\epsilon\zeta\eta$ interno opposito est maior: verum etiam est ei æqualis. quod fieri non potest. quare rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, si protrahantur, non concurrent ex partibus β, & δ. similiter demonstra-

σιται, ὅτι οὐ δὲ ἐπὶ τὰ α γ. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή. θεώρημα.

ΕΑν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Διορισμός.)

monstrabitur, quod neque ex partibus α, & γ. concurrant. rectæ verò, quæ ex neutra parte concurrunt, si protrahantur, sunt inter se æquedistantes. quare recta αϐ, æquedistat rectæ γδ. (Conclusio.) Si igitur in duas lineas rectas, recta incidat linea, ac faciat angulos alternos inter se æquales: rectæ istæ lineæ inter se sunt æquedistantes. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima octaua. Theorema.

SI linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur ex eadem parte fecerit æqualem: vel si duos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistantes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas αϐ, γδ, incidens linea recta εζ: angulum extraneum εηϐ, interno opposito ex eadem parte angulo ηθδ faciat æqualem: & faciat duos angulos internos ex eadem parte ϐηθ, ηθδ, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio μός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. (Απόδειξις.) Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εηζ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηθ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ζηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, ζηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ, λοιπὴ ἄρα, ἡ ὑπὸ αηθ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Εὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ. θεώρημα.

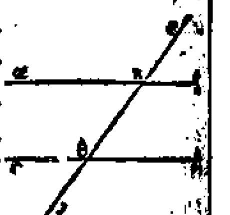
Η εἰς

quæsiti.) Dico quod recta $\alpha\beta$, æquedistet recte $\gamma\delta$. (Demonstratio.) Cum enim angulus $\epsilon\eta\beta$, sit æqualis angulo $\eta\theta\delta$: & angulus $\epsilon\eta\beta$, etiam sit æqualis angulo $\alpha\eta\theta$: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, etiam est æqualis angulo $\eta\theta\delta$, & sunt anguli alterni. quare recta $\alpha\beta$, recte $\gamma\delta$, est æquedistans. Rursus, quoniam anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt æquales: & duo anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$, etiam duobus rectis æquales: idcirco anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$ sunt duobus angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ æquales: communis auferatur angulus $\beta\eta\theta$. reliquus igitur angulus $\alpha\eta\theta$, reliquo angulo $\eta\theta\delta$ est æqualis, & sunt anguli alterni. ergo recta $\alpha\beta$, æquedistat recte $\gamma\delta$. (Conclusio.) Si igitur linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur, ex eadem parte fecerit æqualē: vel si duos angulos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistātes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima nona. Theorema.

Linea

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπιπτέτω, ἡ εζ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηθ, ηθδ, ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ηθδ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Ἀπόδειξις μετὰ τῆς ὑποθέσεως.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθδ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ αηθ, καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ, τῶν ὑπὸ βηθ, ηθδ,

Linea recta in duas rectas æquedistantes lineas incidens, facit angulos alternos inter se æquales: & angulum externum interno opposito ex eadem parte facit æqualem: item duos angulos internos ex eadem parte facit æquales duobus rectis.

Explicatio dati.) Sint duæ lineæ rectæ æquedistantes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$*: & in eas incidat linea recta* $\varepsilon\zeta$*. (Explicatio quæsiti.) Dico quod faciat angulos* $\alpha\eta\vartheta$, $\eta\theta\delta$*, qui sunt alterni, inter se æquales: & angulum externum* $\varepsilon\eta\beta$*, angulo interno opposito ex eadem parte* $\eta\theta\delta$ *æqualem: & angulos internos ex eadem parte positos* $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$*, duobus rectis æquales. (Demonstratio cum hypothesi.) Si enim angulus* $\alpha\eta\vartheta$*, nõ est æqualis angulo* $\eta\theta\delta$*: alter illorum erit maior, sit angulus* $\alpha\eta\theta$ *maior. Quoniam angulus* $\alpha\eta\theta$*, maior est angulo* $\eta\theta\delta$*: cõmunis addatur angulus* $\beta\eta\vartheta$*. ergo anguli* $\alpha\eta\theta$*,* $\beta\eta\theta$*, sunt maiores angulis* $\beta\eta\vartheta$*,* $\eta\theta\delta$*. Verum*

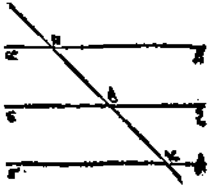
ηθδ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ,
βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ἄρα ὑ-
πὸ βηθ, ηθδ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ
ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι
εἰς ἄπειρον, συμπίπτουσιν. αἱ ἄρα αβ, γδ, ἐκ-
βαλλόμεναι, εἰς ἄπειρον, συμπεσοῦνται. οὐ συμ-
πίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑπο-
κεῖσθαι. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ
ὑπὸ ηθδ, ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ
εηβ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ
ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄ-
ρα ὑπὸ εηβ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ ἴσαι
εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴ-
σαι εἰσί, καὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ ἄρα, δυσὶν ὀρ-
θαῖς ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Η ἄρα εἰς
τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτου-
σα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναν-
τίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐν-
τὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

rum anguli $\alpha\eta\theta$, $\varsigma\eta\theta$ duobus rectis sunt aequales: ergo anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt minores: lineae verò rectae à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductae concurrunt: quare rectae $\alpha\varsigma$, $\gamma\delta$ in infinitum productae concurrent: sed quia aequedistantes proponuntur esse, non cōcurrunt: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, non est inaequalis angulo $\eta\theta\delta$, erit igitur ei aequalis. Verum angulus $\alpha\eta\theta$, angulo $\epsilon\eta\beta$ est aequalis: ideo etiam angulus $\epsilon\eta\varsigma$, angulo $\eta\theta\delta$ est aequalis: communis addatur angulus $\beta\eta\theta$: ergo anguli $\epsilon\eta\beta$, $\varsigma\eta\theta$, angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ sunt aequales: verum anguli $\epsilon\eta\beta$, $\beta\eta\theta$ duobus rectis sunt aequales, idcirco & anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ duobus rectis aequales erunt. (Conclusio.) Linea igitur recta, in duas aequedistantes lineas rectas incidens, facit angulos alternos inter se aequales: & angulum externum interno opposito ex eadem parte facit aequalem: item duos angulos internos ex eadem parte facit aequales duobus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Πρότασις λ. θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, τῇ εζ παράλληλος. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ γδ ἐστὶ παράλληλος. (Κατασκευή.) Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ηκ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν, ἡ ηκ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθζ. πάλιν ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εζ, γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ηκ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθζ, τῇ ὑπὸ ηκδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αηκ, τῇ ὑπὸ ηθζ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηκ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηκδ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐναλλὰξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότα-

Propositio Trigesima. Theorema.

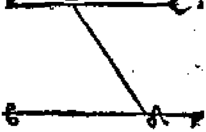
QVæ eidem lineę rectæ ęquedistāt: illæ etiam inter se æquedistant.

Explicatio dati.) Sit linea recta $\epsilon\zeta$, cui æquedistent rectæ lineæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. *(Explicatio quæsiti.)* Dico quod recta $\alpha\beta$, etiam æquedistet rectæ $\gamma\delta$. *(Delineatio.)* Incidat in prædictas lineas recta quædam linea $\eta\kappa$. *(Demonstratio.)* Quoniam in duas æquedistantes rectas $\alpha\beta$, $\epsilon\zeta$: incidit recta $\eta\kappa$: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, est æqualis angulo $\eta\theta\zeta$. Præterea quoniam in duas rectas æquedistantes $\epsilon\zeta$, $\gamma\delta$ recta incidit $\eta\kappa$: angulus $\eta\theta\zeta$, erit æqualis angulo $\eta\kappa\delta$. demonstratum verò est, quòd angulus $\alpha\eta\kappa$, angulo $\eta\theta\zeta$ sit æqualis. quare & angulus $\alpha\eta\kappa$, angulo $\eta\kappa\delta$ est æqualis, & sunt anguli alterni. Quare recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$. *(Conclusio.)* Quæ igitur rectæ eidem lineæ rectæ æquedistant: illæ etiam inter se æquedistant. Id quod erat demonstrandū.

Πρότασις λα. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ διὰ τοῦ α σημείου, τῇ γβ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ δα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ αδγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ δαε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας



τῇ αε, εὐθεῖα ἡ αζ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς βγ, εζ, εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ αδ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ, ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ βγ. (Συμπέρασμα.) Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ εαζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

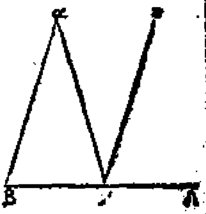
Propositio trigesima prima. Problema.

A Puncto dato, datæ lineę rectæ, rectam lineam æquedistantem ducere.

Explicatio dati.) Sit datum punctum α, et data linea recta βγ. (Explicatio quæsiti.) A dato puncto α, ducenda est linea recta æquedistans lineæ rectæ datæ, βγ. (Delineatio.) Sumatur in linea recta βγ, punctum quoduis δ, & ducatur linea recta αδ: Ad lineam rectam αδ, & punctum in ea α, angulo rectilineo αδγ, æqualis statuatur angulus rectilineus δαε, & ducatur linea αζ, ἐπ' εὐθείας lineæ εα. (Demonstratio.) Quoniam in duas lineas rectas βγ, εζ, incidens linea recta αδ angulos alternos εαδ, αδγ, æquales inter se fecit: idcirco recta εζ, æquedistat rectæ βγ. (Conclusio.) A puncto igitur dato α, datæ lineæ rectæ βγ, ducta est linea recta εαζ æquedistans. Id quod faciendum erat.

Πρότασις λβ. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί: καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ, ἡ βγ ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ σημείου τῇ αβ εὐθείᾳ, παράλληλος ἡ γε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ αγ, αἱ ἄρα ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, αγε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ

εγδ,

Propositio trigesima secunda. Theorema.

OMnis triãguli vno è lateribus ꝓtracto, exterior angulus, duobus angulis interioribus quibus opponitur, est ęqualis: & trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt ęquales.

(Explicatio dati.) Sit triangulus $\bar{\alpha\beta\gamma}$, & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ, (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\bar{\alpha\gamma\delta}$, est æqualis duobus angulis $\gamma\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$ interioribus quibus opponitur: & quod anguli tres interiores $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\beta\ddot{\gamma}\alpha$, $\bar{\gamma}\alpha\beta$ sint æquales duob⁹ angulis rectis. (Delineatio.) Ducatur à puncto $\dot{\gamma}$, lineæ rectæ $\bar{\alpha}\beta$, æquedistans linea recta $\dot{\gamma}\varepsilon$. (Demonstratio.) Quoniã recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\dot{\gamma}\varepsilon$, & in eas incidit recta $\bar{\alpha}\gamma$ Idcirco alterni anguli $\beta\ddot{\alpha}\gamma$, $\bar{\alpha}\gamma\varepsilon$ sunt inter se æquales. Item cum recta $\bar{\alpha}\beta$, æquedistet rectæ $\bar{\gamma}\varepsilon$, & in eas incidit recta $\beta\delta$: angulus

εγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ αβγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεγ, τῇ ὑπὸ βαγ ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ τρισὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αγβ, γβα, γαβ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ. θεώρημα.

ΑΙ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, αἱ αβ, γδ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ

αὐτὰ

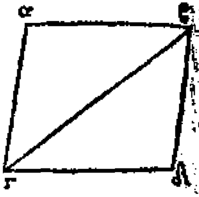
εγδ externus, est æqualis angulo αβγ interno opposito. sed demonstratum est angulum αεγ, angulo βαγ esse æqualem. totus igitur angulus αγδ externus, duob⁹ angulis internis oppositis βαγ, αβγ est æqualis. Communis addatur angulus αγε. anguli igitur αγδ αγε, tribus angulis αεγ, εγα, γαβ sunt æquales. sed duo anguli αγδ, αγβ sunt duob⁹ rectis æquales. quare tres anguli αγβ, γβα, γαε, duobus rectis erūt æquales. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli, vno è lateribus protracto: exterior angulus duobus angulis interioribus, quibus opponitur, est æqualis: et trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt æquales. Id quod erat demōstrandū.

Propositio trigesima tertia. Theorema.

Lineæ rectæ, quæ æquales, & æque distantes inter se lineas rectas ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & equedistātes inter se sunt.

Explicatio dati.) Sint lineæ rectæ αβ, γδ, æquales, & æquedistantes: easq; ex eadem

parte



αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ αγ, βδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ αἱ αγ, δβ, ἴσαι καὶ παράλληλοι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βγ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία τῇ ὑπὸ γβδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδβ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς αγ, βδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ βγ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αγβ, γβδ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῇ βδ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα

ταὶ

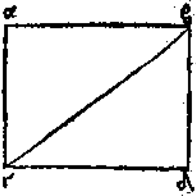
parte coniungant duæ rectæ, αγ, βδ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod rectæ αγ, βδ, æquales, & æquedistantes sint. (Delineatio.) Ducatur linea recta βγ. (Demonstratio.) Quoniam recta αβ, æquedistat rectæ γδ: & in eas incidit recta βγ: idcirco anguli αβγ, βγδ alterni: sunt inter se æquales. Et cum recta αβ, sit æqualis rectæ γδ, communis verò βγ: duo igitur latera αβ, βγ, duobus lateribus βγ, γδ sunt æqualia: & angulus αβγ, angulo βγδ est æqualis. basis igitur αγ, basi βδ est æqualis, & triangulus αβγ, triangulo βγδ est æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. angulus igitur αγβ, angulo γβδ est æqualis, & angulus βαγ, angulo γδβ. & quoniam in duas rectas αγ, βδ, recta incidens βγ, angulos alternos αγβ, γβδ, æquales inter se fecerit: idcirco recta αγ, æquedistat rectæ βδ. Verum demonstrata fuit ei esse æqualis. (Conclusio.)

Lineæ

τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταί, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ. θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.



(Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αγδβ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αγδβ παραλληλογράμμου, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ βγ, διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγβ, γβδ, ἴσαι ἀλλή-

λαις

Lineæ igitur rectæ, quæ æquales, & æquedistantes inter se lineas rectas, ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & æquedistantes inter se sunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima quarta. Theorema.

AReæ quæ æquedistantibus lineis rectis continentur, habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales: & dimetiēs ipsas medias secat.

Explicatio dati.) Sit figura æquedistantibus lineis rectis contenta $\alpha\gamma\delta\beta$: dimetiens eius linea $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod areæ $\alpha\beta\gamma\delta$, latus $\alpha\beta$, sit æquale lateri $\gamma\delta$: itē latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$. Præterea dimetiens $\beta\gamma$ ipsam figuram secet in duas partes æquales. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$, & in eas incidit recta $\beta\gamma$: anguli alterni $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$ sunt inter se æquales. Item quoniam recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$, & in eas incidit recta $\beta\gamma$: anguli igitur alterni inter se sunt æquales.

Quare

λαις εἰσί, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ αβγ, γβδ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγα δυσὶ ταῖς ὑπὸ βγδ, γβδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα. καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν, τὴν βγ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄρα ἡ μὲν αβ πλευρά, τῇ γδ, ἡ δὲ αγ τῇ βδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ βδγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ αγβ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ βδγ ἴση. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. (Δευτέρα ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς γδ, βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

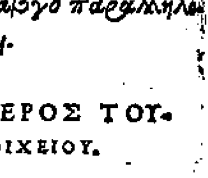
καὶ

Quare cum duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\delta$, duos angulos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, habeant duobus angulis $\beta\gamma\delta$, $\gamma\beta\delta$ æquales, alterum alteri: & vnum latus, vni lateri æquale, nempe latus $\beta\gamma$ commune quod ad angulos æquales est positum. idcirco & reliqua latera, reliquis lateribus habent æqualia, alterum alteri: & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$, & angulum $\beta\alpha\gamma$, angulo $\beta\delta\gamma$, æqualem. Quia verò angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis, & angulus $\gamma\beta\delta$, angulo $\alpha\gamma\beta$ etiam æqualis. Totus igitur angulus $\alpha\beta\delta$, toto angulo $\alpha\gamma\delta$ est æqualis. Verũ & angulus $\beta\alpha\gamma$, demonstratus est æqualis angulo $\beta\delta\gamma$. (Conclusio.) Areæ igitur, quæ æquedistãtib⁹ lineis rectis continentur: habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod diameter secet eam in duas partes æquales. (Demõstratio secunda.) Quoniã latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\beta\gamma$ cõmune, duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duob⁹ lateribus $\gamma\delta$, $\beta\gamma$ sunt æqualia καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστὶ, καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δβ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα βγ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ-
ΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις λε. θεώρημα.

ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εβζγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αζ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τῷ εβζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. διὰ τὰ αὐ-

τὰ δὴ

lia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo, $\beta\gamma\delta$ aequalis. ergo basis $\alpha\gamma$, basi $\delta\beta$ est aequalis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ etiam aequalis. (Conclusio.) Ergo diameter $\beta\gamma$, figuram $\alpha\beta\gamma\delta$ secat in duas partes aequales. Id quod demonstrandum erat.

TERTIA HVIVS ELEMENTI PARS.

Propositio trigesima quinta. Theorema.

QVę parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis; illa sunt æqualia inter se.

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\beta\gamma\zeta$: in eadem basi $\beta\gamma$: & eisdem lineis rectis aequedistantibus $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$. (Explicatio quaesiti.) Dico quod parallelogrammũ $\alpha\beta\gamma\delta$, sit aequale parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniã $\alpha\beta\gamma\delta$, figura est parallelogrãmon, idcirco latus $\beta\gamma$, est aequale lateri $\alpha\delta$. Per eadem demõstrabitur quoq;

τὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν, ὥστε καὶ ἡ αδ, τῇ εζ ἴση ἐστί. καὶ κοινὴ ἡ δε, ὅλη ἄρα ἡ αε, ὅλῃ τῇ δζ ἐστὶν ἴση, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ ἴση, δύο δὴ αἱ εα, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζδγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαβ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. βάσις ἄρα ἡ εβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ εαβ τρίγωνον τῷ ζδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δηε, λοιπὸν ἄρα τὸ αβηδ τραπέζιον, λοιπῷ τῷ εηγζ τραπεζίῳ, ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβγ τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, ὅλῳ τῷ εβγζ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ. θεώρημα.

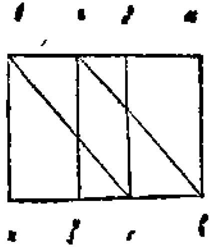
ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐκθε-

latus $\epsilon\zeta$, *æquale lateri* $\beta\gamma$. *quare & latus* $\alpha\delta$, *est æquale lateri* $\epsilon\zeta$. *communis verò est recta* $\delta\epsilon$. *totum igitur latus* $\alpha\epsilon$, *toti lateri* $\delta\zeta$ *est æquale. Verum latus* $\alpha\beta$, *est etiam æquale lateri* $\delta\gamma$: *duo itaq; latera* $\epsilon\alpha, \alpha\beta$, *duobus lateribus* $\zeta\delta$, $\delta\gamma$ *sunt æqualia alterum alteri, & angulus* $\zeta\delta\gamma$, *æqualis angulo* $\epsilon\alpha\beta$, *externus interno. basis igitur* $\epsilon\beta$, *basi* $\zeta\gamma$ *est æqualis, & triangulus* $\epsilon\alpha\beta$, *triangulo* $\zeta\delta\gamma$ *æqualis; communis auferatur triãgulus* $\delta\eta\epsilon$. *quare reliquum trapezion* $\alpha\beta\eta\delta$, *reliquo trapezio* $\epsilon\eta\gamma\zeta$ *est æquale. Communis addatur triangulus* $\eta\beta\gamma$: *totum igitur parallelogrammon* $\alpha\beta\gamma\delta$, *est æquale toto parallelogrammo* $\epsilon\beta\gamma\zeta$. (*Conclusio.*) *Quæ igitur parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandũ.*

Propositio trigesima sexta. Theorema.

QVæ parallelogramma æquales habent bases: & sunt in eisdem æque distantibus lineis rectis: illa sunt ęqualia inter se.

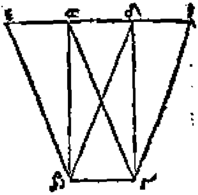


Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εζηθ, ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν βγ, ζη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον τῷ εζηθ. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γθ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ ζη, ἀλλὰ καὶ ἡ ζη, τῇ εθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ βγ ἄρα, τῇ εθ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βε, γθ. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ αἱ εβ, γθ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι, καὶ παράλληλοι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ εβγθ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ αβγδ, βάσιν τε γὰρ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ αὐτῷ, ταῖς βγ, αθ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ζηθε, τῷ αὐτῷ, τῷ εβγθ, ἐστὶν ἴσον, ὥστε καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τῷ εζηθ ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλό-

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$: habentia bases $\beta\gamma$, $\zeta\eta$ æquales: & sint inter easdem æquedistantes rectas lineas $\alpha\theta$, $\beta\eta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, sit æquale parallelogrammo $\epsilon\zeta\eta\theta$. (Delineatio.) Ducantur lineæ rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\beta\gamma$, æqualis est rectæ $\zeta\eta$: & $\zeta\eta$ est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. idcirco & $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. verum sunt lineæ rectæ æquedistantes, easq; coniungunt rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$: rectæ verò quæ æquales, & æquedistantes rectas ex eadẽ parte coniungunt: & ipsæ æquales, & æquedistantes sunt: quare rectæ $\epsilon\beta$, $\gamma\theta$ æquales & æquedistantes sunt: atq; figura $\epsilon\beta\gamma\delta$ est parallelogrammon, et est æquale parallelogrammo $\alpha\beta\gamma\delta$. quia cum eo eandem habet basim $\beta\gamma$: & in eisdem est æquedistantibus rectis $\beta\gamma$, $\alpha\theta$. Similiter demonstrabimus quod $\zeta\eta\theta\epsilon$ eidem parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\theta$ sit æquale. quare parallelogrãmon $\alpha\beta\gamma\delta$, parallelogrãmo $\epsilon\zeta\eta\theta$ est æquale. (Conclusio.) Quæ igitur parallelogramma æquales habent bases: & sunt in γραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δγβ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς αδ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν εβαγ, δβγζ. καὶ ἴσον τὸ εβγα, τῷ δβγζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, εζ. καί ἐστι τοῦ μὲν εβγα παραλληλογράμμου ἥμισυ

τὸ αβγ

eisdem æquedistantibus lineis rectis, illa sunt æqualia inter se, id quod erat demonstrandũ.

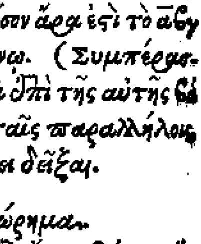
Propositio trigesima septima. Theorema.

QVi trianguli eandẽ habent basin, & sunt in eisdem ęquedistantibus lineis rectis: illi sunt inter se æquales.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\gamma\beta$, super eadem basi $\beta\gamma$: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod triangulus $\alpha\beta\gamma$, sit æqualis triangulo $\delta\gamma\beta$. (*Delineatio.*) Producatur linea recta $\alpha\delta$, in vtramq; partẽ ad puncta ϵ, & ζ: & ex puncto β, ducatur linea recta $\beta\epsilon$, æquedistans lineæ rectæ $\alpha\gamma$. præterea ex puncto γ, ducatur recta $\gamma\zeta$, æquedistãs rectæ $\beta\delta$. (*Demonstratio.*) Vtraq; igitur figura $\epsilon\beta\alpha\gamma$, & $\delta\beta\gamma\zeta$ est parallelogrammon. & parallelogrammõ $\epsilon\beta\alpha\gamma$, est æquale parallelogrammo $\delta\beta\gamma\zeta$. quia super eadẽ basi $\beta\gamma$ est, & inter easdem æquedistantes lineas rectas $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, & parallelogrãmi $\epsilon\beta\gamma\alpha$ dimidiũ ᾱβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ ᾱβ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει, τοῦ δὲ δβγζ παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ δβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ δγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ᾱβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ ᾱβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς βζ, δᾱ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ᾱβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ η, θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ

β, τῇ

est, triangulus $\alpha\beta\gamma$. nam diameter $\alpha\beta$ ipsum per medium secat. parallelogrammi verò $\delta\beta\gamma\zeta$ dimidium est triangulus $\delta\beta\gamma$. nam diameter $\delta\gamma$ ipsum per medium secat. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. triangulus igitur $\alpha\beta\gamma$, triãgulo $\delta\beta\gamma$ est æqualis. (Conclusio.) Qui igitur trianguli sunt super eadem basi, & inter easdem lineas rectas æquedistantes, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima octaua. Theorema.

QVi trianguli æquales habent bases: & sunt in eisdem equedistantibus lineis rectis, illi inter se sunt æquales.

Explicatio dati.) Sint trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, super basibus æqualibus $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, in eisdem æquedistantibus lineis rectis $\alpha\delta$, $\beta\zeta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus $\alpha\beta\gamma$, sit æqualis triangulo $\delta\epsilon\zeta$. (Delineatio.) Producatur linea recta $\alpha\delta$, in vtramq; partem ad puncta η, & θ. Ex puncto β, ducatur

linea

β, τῇ ηγα παράλληλος ἤχθω, ἡ βη, διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ δε παράλληλος ἤχθω ἡ ζθ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ηβγα, δεζθ, καὶ ἴσον τὸ ηβγα, τῷ δεζθ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσὶ τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βζ, ηθ. καί ἐστι τοῦ μὲν ηβγα παραλληλογράμμου, ἥμισυ, τὸ αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τοῦ δὲ δεζθ, παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ ζεδ τρίγωνον, ἡ γὰρ ζδ, διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ. θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εκ-

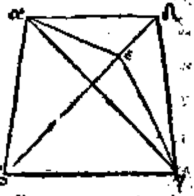
linea recta $\beta\eta$, æquedistans lineæ rectæ $\alpha\gamma$. Item ex puncto ζ ducatur linea recta $\zeta\theta$, æquedistans lineæ rectæ $\delta\epsilon$. (Demonstratio.) Vtraq; igitur figura $\eta\beta\gamma\alpha$, $\delta\epsilon\zeta\theta$ est parallelogrammon. & parallelogrammon $\eta\beta\gamma\alpha$, est æquale parallelogrammo $\delta\epsilon\zeta\theta$. quia super basibus $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\zeta$, $\eta\theta$ sunt. præterea parallelogrammi $\alpha\beta\gamma\alpha$ dimidium, est triangulus $\alpha\beta\gamma$, quoniam diameter $\alpha\beta$ ipsum secat per medium. & parallelogrammi $\delta\epsilon\zeta\theta$ dimidium, est $\zeta\epsilon\delta$ triangulus. quia diameter $\zeta\delta$, ipsum secat medium. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. quare triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Qui igitur trianguli super basibus fuerint æqualibus, & in eisdem lineis æquedistantib⁹, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima nona. Theorema.

TRianguli æquales, eandem habentes basim: & ex eadem parte, & in eisdem æquedistantibus rectis sunt.

Expli-

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ γβ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α σημείου τῇ βγ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγ, τῷ δβγ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ δβγ ἄρα τρίγωνον, τῷ εβγ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αε, τῇ βγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα, τῇ βγ ἐστὶν παράλληλος. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



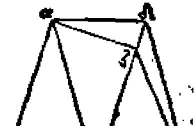
Πρότα-

Explicatio dati.) Sint trianguli $\alpha\beta\gamma$. $\delta\beta\gamma$ super eadẽ basi $\beta\gamma$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod etiam in eisdẽ sint lineis rectis æquedistantibus. (*Delineatio.*) Ducatur linea recta $\alpha\delta$: dico quod recta $\alpha\delta$, æquedistet rectæ $\beta\gamma$. si enim ei non æquedistat, ducatur per punctum α, rectæ lineæ $\beta\gamma$ æquedistans recta $\alpha\epsilon$: & ducatur linea recta $\epsilon\gamma$. (*Demõstratio.*) Triangulus igitur $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\epsilon\beta\gamma$, quia super eadem basi $\beta\gamma$ est, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\gamma$, $\alpha\epsilon$. verum triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\beta\gamma$: idcirco & triangulus $\delta\beta\gamma$, triangulo $\epsilon\beta\gamma$ est æqualis: maior minori. quod fieri nequit. Quare recta $\alpha\epsilon$, nõ æquedistat rectæ $\beta\gamma$. Simili ratione demonstrabimus, quod nulla alia præterquam $\alpha\delta$, recta, æquedistet rectæ $\beta\gamma$. recta igitur $\alpha\delta$, rectæ $\beta\gamma$ æquedistat. (*Conclusio.*) Trianguli igitur æquales, eandem habentes basin, in eisdem sunt æquedistantibus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Πρότασις μ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα, τὰ αβγ, γδε, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν βγ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ βε. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α, τῇ βε παράλληλος ἡ ζα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζγε τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, γε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ. ἀλλὰ τὸ αβγ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ, τῷ δγε τριγώνῳ, καὶ τὸ δγε τρίγωνον ἄρα, ἴσον ἐστὶ τὸ ζγε τριγώνῳ, τὸ μεῖζον, τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αζ, τῇ βε. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ

αδ ἄρα

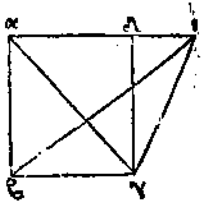
Propositio quadragesima. Theorema.

TRianguli æquales, super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus.

Explicatio dati.) Sint trianguli αϐγ, γδε super basibus βγ, γε æqualibus. (Explicatio quæsiti.) Dico quod in eisdem sint æquedistantibus lineis rectis. (Delineatio.) Ducatur recta αδ, dico quod αδ, æquedistet rectæ βε: si enim ei non æquedistat, ducatur per punctum α rectæ βε, æquedistans recta ζα: & ducatur recta ζε. Triangulus igitur αϐγ, est æqualis triangulo ζγε, quia sunt constituti super basibus βγ, γζ æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus ϐε, αζ. sed triangulus αϐγ, est æqualis triangulo δγε. quare triangulus δγε, etiam erit æqualis triangulo ζγε, maior minori: quod fieri nequit. non igitur recta αζ, æquedistat rectæ βε. Simili ratione demonstrabimus, αδ ἄρα τῇ βι παράλληλός ἐστι. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μα. θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Ἔκθεσις.) Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ αβγδ, τριγώνῳ τῷ εβγ, βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ αβγδ, παραλληλόγραμμον, τοῦ βεγ τριγώνου. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ αβγ, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ, τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς

βγ

quod nulla alia præterquam αδ recta, æquedistet rectæ βε. (Conclusio.) Trianguli igitur æquales, super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus. id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima prima. Theorema.

PArallelogrammon trianguli est duplum, si super eadem consistat basi; & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis.

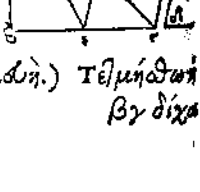
Explicatio dati.) Parallelogrāmon αβγδ, & triangulus εβγ: sint super eadem basi βγ, in eisdem æquedistantibus lineis rectis αε, βγ. (Explicatio quæsiti.) dico quod parallelogrammon αβγδ, sit duplum trianguli βεγ. (Delineatio.) Ducatur recta αγ. (Demonstratio.) Triangulus αβγ, est æqualis triangulo εβγ, quia super eadem basi sunt βγ: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis

 βγ,

βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ γὰρ αγ διάμετρος, αὐτὸ δίχα τέμνει. ὥστε τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τοῦ εβγ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μβ. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ βγ δίχα *βγ,αε. sed parallelogrammon αβγδ, est duplum trianguli αβγ: quia αγ diameter ipsum medium secat. quare & parallelogrammon αβγδ, trianguli εβγ duplum erit. (Conclusio.) Parallelogrammon igitur trianguli est duplum: si super eadem consistat basi, & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio quadragesima secunda.
Problema.

DAto triangulo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit triangulus datus αβγ: & datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Dato triangulo αβγ, statuendum est parallelogrammon æquale: in angulo qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. (Delineatio.) Dissecetur linea recta βγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εγ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε, τῇ δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ γεζ. καὶ διὰ μὲν τοῦ α, τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ αη, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ ζε παράλληλος ἤχθω ἡ γη, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζεγη. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ αεγ τριγώνῳ. ἐπίπερ γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βε, εγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αη. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τοῦ αεγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, διπλάσιον τοῦ αεγ τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, τῷ αβγ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ γεζ γωνίαν, ἴσην τῇ δ. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ αβγ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ζεγη, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

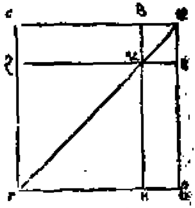
Πρό-

βγ media in puncto ε: & ducatur linea recta αε: atque ita statuatur ad lineam rectam εγ, & punctū eius ε, dato angulo rectilineo δ: æqualis angulus rectilineus γεζ: postea ducatur per punctum α, lineæ rectæ γε, æquedistans linea recta αη: & per punctum γ, lineæ rectæ εζ, æquedistans linea recta γη. Erit itaque figura ζεγη parallelogrammon. (Demōstratio.) Quoniam βε est æqualis εγ: idcirco & triangulus αβε, triangulo αεγ est æqualis: sunt enim super basibus æqualibus βε, εγ, & in eisdem lineis rectis βγ, αη æquedistantibus. Quare αβγ triangulus, duplus est trianguli αεγ: verum parallelogrammon εζγη, etiam est duplum trianguli αεγ: quia eandem habent basin εγ: & in eisdem sunt æquedistantib⁹ lineis rectis εγ, ζη. Quare parallelogrammon εζγη, est æquale triangulo αβγ, & habet angulum γεζ, æqualem angulo δ. (Conclusio.) Dato igitur triangulo αβγ, statutum est æquale parallelogrāmon εζγη in angulo ζεγ, qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. Quod faciendum erat.

Πρότασις μγ. θεώρημα.

ΠΑντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ, περὶ δὲ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ εθ, ζη, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα, τὰ βκ, κδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ βκ παραπλήρωμα, τῷ κδ παραπληρώματι. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ εκθα παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ακ, ἴσον ἐστὶ τὸ εακ τρίγωνον τῷ αθκ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ κζγ τρίγωνον, τῷ κηγ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν αεκ τρίγωνον, τῷ αθκ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ κζγ τῷ κηγ, τὸ αεκ τρίγωνον μετὰ τοῦ κηγ, ἐστὶν



ἴσον

Propositio quadragesima tertia. Theorema.

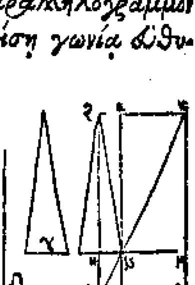
OMnis parallelogrammi eorum quę circa eandem sunt dimetientem parallelogrammôn supplementa: æqualia sunt inter se.

Explicatio dati.) Sit parallelogrammon αβγδ, dimetiens eius αγ, & circa αγ, sint parallelogramma εθ, ζη: & quæ vocantur supplementa sint βκ, κδ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod supplementum βκ, sit æquale supplemēto κδ. (Demonstratio.) Quoniā αβγδ parallelogrammon, diametrum habet αγ: idcirco triangulus αβγ, est æqualis triangulo αδγ. Rursus quoniam εκθα parallelogrammon, diametrum habet ακ lineā rectam: ideo εακ triangulus, est æqualis triangulo αθκ. per eadem demonstrabitur triangulum κζγ, triangulo κηγ esse æqualem. Cum igitur triangulus αεκ, triangulo αθκ sit æqualis: & triangulus κζγ, æqualis triangulo κηγ: erit itaq; triangulus αεκ cum triāgulo κηγ æqualis tri-

ἴσον τῷ αθκ τριγώνῳ μετὰ τοῦ κζγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αδγ ἴσον. λοιπῷ ἄρα τῷ κδ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ, τὸ βκ παραπλήρωμα. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ. (Κατασκευή.) Συνεστάτω *lis triangulo $\alpha\theta\kappa$, cum triangulo $\kappa\zeta\gamma$. verū totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\alpha\delta\gamma$ est æqualis: quare reliquum supplementum $\beta\kappa$, reliquo supplemento $\kappa\delta$ est æquale. (Conclusio.) Omnis igitur parallelogrammi eorum quæ circa eandem sunt dimetientem parallelogrammωn supplementa æqualia sunt inter se. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio quadragesima quarta. Problema.

AD datam líneam rectam, dato triangulo, æquale statuere parallelogrāmon, in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: datus vero triangulus γ: datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Ad datam lineam rectam $\alpha\beta$, statuendum est parallelogrammon æquale triangulo dato γ: in angulo, qui est æqualis angulo δ dato. (Delinea-

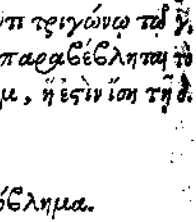
στάτω τῷ γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ βεζη, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εβη, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν βε τῇ αβ, καὶ διήχθω ἡ ζη, ἐπὶ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν βη, εζ παράλληλος ἤχθω ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θβ. (Απόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αθ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ θζ, αἱ ἄρα ὑπὸ αθζ, θζε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ βθη, ηζε δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, συμπίπτουσιν, αἱ θβ, ζε ἄρα ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦνται. (Κατασκευῆς τὸ ἕτερον μέρος.) Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ κ σημείου, ὁποτέρᾳ τῶν εα, ζθ, παράλληλος ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ θα, ηβ, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα. (Ἀποδείξεως τὸ ἕτερον μέρος.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θλκζ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θκ. περὶ δὲ θκ, παραλληλόγραμμα μὲν, τὰ αη, με, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα λβ, βζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ λβ, τῷ βζ. ἀλλὰ καὶ

τὸ βζ

ratio.) Fiat triangulo γ æquale parallelogrammon βεζη: in angulo εβη, æquali angulo δ dato, & sit linea recta βε ἐπ' εὐθείας rectæ αβ: atq; producatur linea recta ζη, ad punctum θ. per punctum etiam α ducatur alterutri linearum βη, εζ æquedistans linea recta αθ: deniq; ducatur linea recta θβ. (Demonstratio.) Quoniam in duas rectas æquedistantes αθ, εζ recta linea θζ incidit: idcirco anguli αθζ, θζε duobus rectis sunt æquales, atq; ideo anguli βθη, ηζε duobus rectis sunt minores. verum lineæ rectæ à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductæ concurrunt. quare θβ, ζε productæ concurrent. (Altera delineationis pars.) Producantur duæ lineæ rectæ ζε, θβ, & concurrant in puncto κ, & per punctum κ, alterutri linearum εα, ζθ ducatur κλ æquedistans: atq; producantur lineæ rectæ ηβ, θα ad puncta vsq; λ, μ. (Demonstrationis altera pars.) Est igitur figura θλκζ parallelogrammon: eiusq; diameter θκ: circa dimetientem verò parallelogramma sunt αη, με: dicta verò supplementa λβ, βζ. quare λβ τὸ βζ, τῷ γ̄ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ λε ἄρα τῷ γ̄ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθε γωνία, τῇ ὑπὸ αβμ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ηβε τῇ δ̄ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, τῇ δ̄ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ̄, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ λε, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβμ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ̄. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις με. Πρόβλημα.

ΤΩ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ αβγδ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγδ εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ ε. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δβ, καὶ συ-

νεστά-

supplementum est æquale $\beta\zeta$ *supplemento. verum* $\beta\zeta$ *supplementum, est æquale triangulo* γ *: ergo & $\lambda\beta$ supplementum triangulo* γ *est æquale. præterea quoniam angulus* $\eta\beta\epsilon$ *est æqualis angulo* $\alpha\beta\mu$ *: & angulus* $\eta\beta\epsilon$ *etiã est æqualis angulo* δ *: idcirco & angulus* $\alpha\beta\mu$ *etiam est æqualis angulo* δ*. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam* $\alpha\beta$ *: dato triangulo* γ*: æquale cõstitutum est parallelogrammon* $\lambda\beta$*, in angulo* $\alpha\beta\mu$*, qui est æqualis angulo* δ*. Id quod erat faciendum.*

Propositio quadragesima quinta.
Problema.

DAto rectilineo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit datum rectilineum $\alpha\beta\gamma\delta$ *: & datus angulus rectilineus* ϵ*. (Explicatio quæsiti.) Dato rectilineo* $\alpha\beta\gamma\delta$*, statuendum est æquale parallelogrammon in angulo rectilineo, qui est æqualis angulo* ϵ *dato. (Delineatio.) Ducatur linea recta* $\beta\delta$*, &*

consti-

νεστάτω τῷ αβδ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλό-
γραμμον, τὸ ζθ, ἐν τῇ ὑπὸ θκζ γωνίᾳ, ἥ ἐ-
στιν ἴση τῇ ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν
ηθ εὐθεῖαν τῷ δβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλ-
ληλόγραμμον, τὸ ημ, ἐν τῇ ὑπὸ ηθμ γωνίᾳ,
ἥ ἐστιν ἴση τῇ ε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἡ ε γω-
νία, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ θκζ, ηθμ ἐστιν ἴση, καὶ
ἡ ὑπὸ ηθμ ἄρα τῇ ὑπὸ θκζ ἐστιν ἴση, κοινὴ
προσκείσθω, ἡ ὑπὸ κθη. αἱ ἄρα ὑπὸ ζκθ,
κθη ταῖς ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑ-
πὸ ζηθ, κθη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑ-
πὸ κθη, ηθμ ἄρα δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς
δή τινι εὐθείᾳ, τῇ ηθ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ
τῷ θ, δύο εὐθεῖαι αἱ κθ, θμ. μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρ-
θαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ κθ,
τῇ θμ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς κμ, ζη,
εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θη, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ
ὑπὸ μθη, θηζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσ-
κείσθω ἡ ὑπὸ θηλ. αἱ ἄρα ὑπὸ μθη, θηλ,
ταῖς ὑπὸ θηζ, θηλ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ
μθη, θηλ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ

θηζ

constituatur triangulo $\alpha\beta\delta$ æquale parallelogrammon $\zeta\theta$: habens angulum $\theta\kappa\zeta$, æqualem angulo ϵ. statuatur etiam ad lineam rectam $\eta\theta$, parallelogrammon $\eta\mu$, æquale triangulo $\delta\beta\gamma$, habens angulum $\kappa\theta\mu$ æqualem angulo ϵ. (Demonstratio.) Quoniam angulus ϵ alterutri angulo $\theta\eta\zeta$, $\eta\theta\mu$ est æqualis: idcirco & angulus $\eta\theta\mu$, angulo $\theta\kappa\zeta$ est æqualis. communis addatur angulus $\kappa\theta\eta$: ergo duo anguli $\zeta\kappa\theta$, $\kappa\theta\eta$, duob. angulis $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ sunt æquales. verum duo anguli $\zeta\eta\theta$, $\kappa\theta\eta$ duobus rectis sunt æquales: quare & anguli $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ duobus rectis sunt æquales. ad lineam rectam $\eta\theta$, & punctum in ea datum θ in diuersas partes ductæ sunt lineæ rectæ $\kappa\theta$, $\theta\mu$: atque faciunt angulos ἐφεξῆς æquales duobus rectis: quare recta $\kappa\theta$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\theta\mu$. Et quia in lineas rectas æquedistantes $\kappa\mu$, $\zeta\eta$ recta quædam $\theta\eta$ incidit: anguli idcirco alterni sunt inter se æquales, angulus $\mu\theta\eta$, æqualis angulo $\theta\kappa\zeta$. Communis addatur angulus $\theta\eta\lambda$. anguli igitur $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$, angulis $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ sunt æquales, verum $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$ anguli sunt æquales duo-θηζ, θηλ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ἡ κζ τῇ θη, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ θη τῇ μλ, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ μλ ἴση τέ καὶ παράλληλός ἐστιν, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι, αἱ κμ, ζλ. καὶ αἱ κλ, ζμ, ἴσαι τέ καὶ παράλληλοι εἰσί. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ κζλμ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν αβδ τρίγωνον, τῷ θζ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ δβγ, τῷ ημ, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ εὐθύγραμμον, ὅλῳ τῷ κζλμ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγδ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τῷ κζλμ, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ζκμ ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μϛ. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τετράγω-

bus rectis. quare & anguli $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ duobus rectis sunt æquales. quare recta $\zeta\eta$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\eta\lambda$. Cum vero $\kappa\zeta$ recta, rectæ $\theta\eta$ sit æqualis, & æquedistans: item $\theta\eta$ recta, rectæ $\mu\lambda$ æqualis & æquedistans: idcirco & $\kappa\zeta$ recta, rectæ $\mu\lambda$ æqualis & æquedistans est: easq́ cōiungunt rectæ $\kappa\mu$, $\zeta\lambda$, quare & $\kappa\lambda$, $\zeta\mu$ æquales & æquedistantes sunt, vnde fit, quod figura $\kappa\zeta\lambda\mu$ sit parallelogrammon. Cum autē triangulus $\alpha\beta\delta$, sit æqualis parallelogrammo $\theta\zeta$: & triangulus $\delta\beta\gamma$ parallelogrammo $\eta\mu$. totum igitur rectilineum $\alpha\beta\gamma\delta$: toto parallelogrammo $\kappa\zeta\lambda\mu$ est æquale. (Cōclusio.) Dato igitur rectilineo $\alpha\beta\gamma\delta$, constitutum est parallelogrammon $\kappa\zeta\lambda\mu$ æquale, in angulo $\zeta\eta\mu$, qui est æqualis dato angulo ϵ. Id quod faciendum erat.

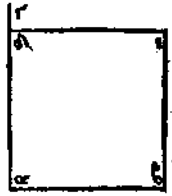
Propositio quadragesima sexta. Problema.

A Data linea recta describere quadratum.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$.
Explicatio quæsiti.) A data linea recta $\alpha\beta$,

 descri-

νον ἀναγράψαι. (Κατασκευή.) Ἤχθω τῇ αβ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ α, πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση, ἡ αδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ δ σημείου, τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δε, διὰ δὲ τοῦ β σημείου τῇ αδ παράλληλος ἤχθω,



ἡ βε. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ αδ, τῇ βε. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστιν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ βα, αδ, δε, εβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ παραλληλόγραμμον. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δε εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ αδ, αἱ ἄρα ὑπὸ βαδ, αδε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδε. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπ' ἐναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίων τῶν ὑ-

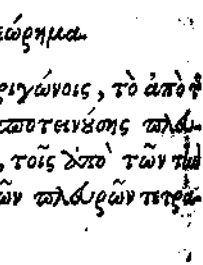
πὸ

describendum est quadratum. (Delineatio.) Ducatur ex puncto α lineæ rectæ αϐ, ad angulos rectos recta linea αγ: & fiat rectæ αβ æqualis recta αδ: per punctum etiam δ, lineæ rectæ αϐ ducatur æquedistans linea recta δε: deniq; per punctum β lineæ rectæ δε, ducatur æquedistans linea recta ϐε. (Demonstratio.) Figura igitur αϐδε, est parallelogrammon: & αϐ est æqualis δε, atq; αδ rectæ βε: sed & αβ etiam est æqualis rectæ αδ. quatuor igitur rectæ αϐ, αδ, δε, ϐε sunt inter se æquales, atq; idcirco parallelogrammon αδεϐ est æquilaterum. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αδεϐ etiã sit rectangulum. (Demonstratio.) Cum in duas rectas æquedistantes αϐ, δε recta quædam αδ inciderit, anguli ϐαδ, αδε duobus rectis sunt æquales. verum angulus ϐαδ, est rectus, idcirco & angulus αδε etiam est rectus, parallelogramma vero angulos oppositos, & latera opposita habẽt æqualia: quare vterq; angulorũ

 oppoπὸ αβε, βεδ γωνιῶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. (Συμπέρασμα.) Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μζ. θεώρημα.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. (Κατασκευή.) Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τετράγωνον, τὸ βδγε, ἀπὸ δὲ τῶν βα, αγ, τὰ ηβ, θγ, καὶ διὰ τοῦ α, ὁπότερα τῶν βδ, γε, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, ζγ. (Ἀποδειoppositorum $\alpha\beta\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ est rectus: ideoq; $\alpha\delta\varepsilon\beta$ parallelogrammon, est rectangulum, sed & æquilaterum esse fuit demonstratum. (Conclusio.) Quare $\alpha\beta\varepsilon\delta$ figura, est quadratū: & est descriptum à linea recta data $\alpha\beta$. id quod erat faciendum.

Propositio quadragesima septima. Theorema.

IN triangulis rectāgulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

Explicatio dati.) Sit triangulus rectangulus $\alpha\beta\gamma$, habens angulum $\beta\alpha\gamma$ rectum. (*Explicatio quæsiti.*) dico quod quadratum lateris $\beta\gamma$, sit æquale quadratis laterum $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$. (*Delineatio.*) Describatur à linea $\beta\gamma$, quadratum $\beta\delta\varepsilon\gamma$: & à linea $\beta\alpha$ quadratum $\beta\eta$. Præterea à linea $\alpha\gamma$ quadratum $\gamma\theta$. Ducatur etiam per punctum α, alterutri linearum $\beta\delta$, $\gamma\varepsilon$ æquedistans recta linea $\alpha\lambda$. deniq; ducantur duæ lineæ rectæ $\alpha\delta$, $\zeta\gamma$. (De-

πόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν
ὑπὸ βαγ, βαη γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ,
τῇ βα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, δύο
εὐθεῖαι, αἱ αγ, αη, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κεί-
μεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύσιν ὀρθαῖς ἴσας
ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γα, τῇ αη. διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ, τῇ αθ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας.
καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία τῇ ὑπὸ
ζβα ὀρθὴ γὰρ ἑκάτερα. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑ-
πὸ αβγ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ δβα, ὅλῃ τῇ ὑπὸ
ζβγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, βα. δυσὶ ταῖς
βζ, βγ ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γω-
νία ἡ ὑπὸ δβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ, ἴση ἐ-
στίν· βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, καὶ
τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ ζβγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.
καί ἐστι τοῦ μὲν αβδ τριγώνου, διπλάσιον τὸ
βλ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν
αὐτὴν ἔχουσι τὴν βδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ
παραλλήλοις, ταῖς βδ, αλ. τοῦ δὲ ζβγ τρι-
γώνου, διπλάσιον τὸ ηβ τετράγωνον. βάσιν τε
γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι, τὴν ζβ. καὶ ἐν
ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ, ταῖς ζβ, ηγ.

τὰ δὲ

monstratio.) Quoniam vterq; angulorũ $\beta\alpha\gamma$, $\beta\alpha\eta$ est rectus: idcirco ad rectam quandam $\beta\alpha$, & ad punctum quod in ea est α, duæ rectæ $\alpha\gamma$, $\alpha\eta$ in diuersas partes ductæ, faciunt angulos vicinos inter se æquales: quare recta $\gamma\alpha$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\eta$. per eadem ista demonstrabitur, quod recta $\alpha\beta$, est ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\theta$. quoniam verò angulus $\delta\beta\gamma$, æqualis est angulo $\zeta\beta\alpha$, quia vterq; est rectus. communis addatur angulus $\alpha\beta\gamma$: totus igitur an gulus $\delta\beta\alpha$, toto angulo $\zeta\beta\gamma$ est æqualis. cum verò duo latera $\delta\beta$, $\beta\alpha$, duobus lateribus $\beta\zeta$, $\beta\gamma$ sint æqualia, alterum alteri: & angulus $\delta\beta\alpha$, angulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis. basis igitur $\alpha\delta$, basi $\zeta\gamma$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\delta$ triangulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis: verum trianguli $\alpha\beta\delta$ parallelogrammon $\beta\lambda$ est duplum, quia habent eandem basin $\beta\delta$, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\delta$, $\alpha\lambda$. Item trianguli $\zeta\beta\gamma$, duplum, est quadratum $\eta\beta$, quia habent eandem basin $\zeta\beta$, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\zeta\beta$, $\eta\gamma$. Quæ verò æτὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ βλ παραλληλόγραμμον τῷ ηβ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν αε, βη, δειχθήσεται καὶ τὸ γλ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ θγ τετραγώνῳ, ὅλον ἄρα τὸ δβεγ τετράγωνον, δυσὶ τοῖς ηβ, θγ τετραγώνοις, ἴσον ἐστί, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν βδεγ τετράγωνον, ἀπὸ τῆς βγ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ηβ, θγ, ἀπὸ τῶν βα, αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Συμπέρασμα.) Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μη. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Ἐκθε-

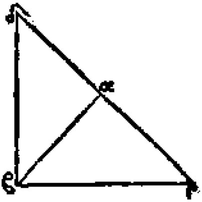
qualiũ sunt dupla, illa inter se sunt æqualia. ideoq; parallelogrammon ϛλ, æquale est quadrato ηϛ. Simili ratione quando αε, βη rectæ coniunguntur: demonstrabitur quod parallelogrammon γλ sit æquale quadrato θγ. totum igitur quadratum δβεγ, duobus quadratis ηβ, θγ est æquale. sed βδεγ quadratum, est descriptum à latere ϛγ, & quadrata ηϛ, θγ sunt descripta à lateribus βα, αγ. Quadratum igitur lateris ϛγ, est æquale quadratis laterum ϛα, αγ. (Conclusio.) In triangulis igitur rectangulis quadratum lateris rectum angulum subtendentis, est æquale quadratis laterum rectum angulum continentium. quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima octaua.
Theorema.

SI quadratum vnius lateris trianguli fuerit ęquale quadratis reliquorum duorum laterum: erit angulus quem reliqua illa duo trianguli latera continent, rectus.

Expli-

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, ἡ αδ, καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ αδ,



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ, αγ, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δα τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αβ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν δα, αβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ δαβ γωνία, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ ὑπόκειται γάρ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δβ, τῇ βγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, δυσὶ ταῖς βα, αγ ἴσαι

αἱ

Explicatio dati.) Sit quadratum lateris $\beta\gamma$, trianguli $\alpha\beta\gamma$ æquale quadratis laterũ $\beta\alpha, \alpha\gamma$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$ sit rectus. (*Delineatio.*) Ducatur à puncto α, lineæ rectæ $\alpha\beta$, ad angulos rectos linea recta $\alpha\delta$: & fiat lineæ $\alpha\gamma$ æqualis recta linea $\alpha\delta$: deniq; ducatur linea recta $\delta\beta$. (*Demonstratio.*) Quoniam recta $\delta\alpha$, est æqualis rectæ $\alpha\gamma$: idcirco & quadratum à recta $\delta\alpha$ descriptum, erit æquale, quadrato à recta $\alpha\gamma$ descripto. Commune addatur quadratum rectæ $\alpha\beta$. quare quadrata rectarũ $\delta\alpha$, $\alpha\beta$ sunt æqualia quadratis rectæ $\beta\alpha, \alpha\gamma$. verum quadratis rectarum $\delta\alpha, \alpha\beta$, æquale est quadratum rectæ $\delta\beta$, quia angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus. quadratis verò rectarum $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ æquale proponitur esse quadratũ rectæ $\delta\beta$. Quare quadratum rectæ $\delta\beta$, æquale est quadrato rectæ $\beta\gamma$. vnde etiam latus $\delta\beta$ lateri $\beta\gamma$ est æquale. Quoniam vero latus $\alpha\delta$, est æquale lateri $\alpha\gamma$, commune verò latus $\alpha\beta$: duo latera $\delta\alpha$, $\alpha\beta$, duobus lateribus $\beta\alpha, \alpha\gamma$ sunt æqualia, &

basis

εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δϐ, βάσει τῇ ϐγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαϐ, γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ϐαγ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δαϐ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ϐαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΕΛΟΣ.

basis $\delta\beta$. est æqualis basi $\beta\gamma$: idcirco & angulus $\delta\alpha\beta$, angulo $\beta\alpha\gamma$ est æqualis. Verum angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus, quare & angulus $\beta\alpha\gamma$ etiam erit rectus. (Conclusio.) Si igitur quadratum vnius lateris trianguli fuerit æquale quadratis reliquorum duorum laterũ: erit angulus quem reliqua duo trianguli latera continent rectus. Id quod erat demonstrandum.

FINIS.

Scholia in hoc primum Euclidis elementum, autore Cunrado Dasypodio.

De scientijs Mathematicis.

Mathematicas scientias sic dictas volunt, quòd cum alias artes etiam absq; præceptore intelligere, & addiscere possimus: has tamen non nisi instituti, & edocti, imò in illis exercitati percipere queamus: vt à discendo disciplinæ, à μαθήσει ἐπιστῆμαι μαθηματικαὶ dicantur. Pythagorici autem mathematicæ nomen, duabus tantum scientijs Arithmeticæ, & Geometriæ imposuerunt: quoniam in his potissimum τὸ ἐπιστημονικὸν, & ipsa μάθησις cerni potest. postea tamen nonnulli latius sumpto vocabulo, alias scientias hisce cognatas appellarunt mathematicas, Astronomiam, Musicam, & quæ huius sunt generis. Hinc fit, vt mathematica definiatur scientia contemplationē habens rerū, non tantum abstractarum, vt sunt numeri, & figu-

& figuræ: sed & sensibus ipsis subiectarum, vtpote cœli, terræ, stellarum, sonorum, tonorum, & quæcunque his sunt similia.

Hanc verò vniuersalem mathesin in duas potissimum partes diuidunt: altera enim versatur circa res mēte & ratione perceptas, quæ Græcis nominantur τὰ νοητὰ, & διανοητὰ. altera verò τῶν αἰσθητῶν, rerum sensu subiectarum habet perceptionem: illa Geometriam, & Arithmeticam cōplectitur: hæc verò in sex est diuisa scientias, Geodæsiam, & Opticam, quæ ex Geometria nascuntur: Logisticam & Canonicam prognatas ex Arithmetica: denique Mechanicam, & Astronomiam, quas ad vtramque referri tradunt. Est & alia mathematicæ diuisio, in quatuor partes tantum facta. quoniam μάθησις habet perceptionem quantitatis cōtinuæ, vel quantitatis discretæ. Geometria enim, & Astronomia sibi habent subiectas ipsas magnitudines: Geometria quidem eam, quæ est sine motu: Astronomia eam, quæ mouetur. sic etiam

M mul-

multitudinis & numerorũ fit cõtemplatio, Arithmetica, & Musica: illa enim numeros per se considerat, eorumq́; proprietates inuestigat: hæc verò numeros tractat relatos, quos etiam harmonicos appellant. Itaq; vniuersalis quædam mathematica cognitio & doctrina est statuenda, sub se complectens reliquas disciplinas omnes, suaq́; principia, & vniuersales propositiones omnibus communicans, non quatenus numeris, aut figuris, vel deniq; motibus illa insunt: sed quatenus eorũ vniuersalis est natura, & talis, quæ singularibus illis disciplinis attribui potest. Sunt autem eiusmodi principia τὸ πέρας, καὶ τὸ ἄπειρον, *finitum, & infinitum: quia numerus incipit ab vnitate, & in infinitũ [illegible] crescit: is verò qui sumitur, finitus semper est: sic etiam magnitudines in infinitum vsque diuidi possunt: cum tamen ea, quæ diuiduntur, sint finita, & terminata. Propositiones verò mathematicæ communes sunt istæ, in quibus cõtemplamur* λόγους, ἀναλογίας, συνθέσεις

διαιρέ-

διαιρέσεις, ἀναστροφὰς, ἐναλλαγὰς, τὸ ἴσον, τὸ ἄνισον, id est, rationes, proportiones, compositiones, diuisiones, conuersiones, alternas permutationes, æquale, & inæquale. deinde τὸ κάλλος, καὶ τάξις, ipsaq; μέθοδος. præterea ὁμοιότης, καὶ ἀνομοιότης, similitudo, & dißimilitudo rerum in figuris, numeris, & motibus vniuersaliter considerantur. hæc inquam omnia, & his similia vnaquæq; disciplina ad suam accomodat rem subiectam, eaq; ei inesse proprijs confirmat rationibus. Præterea Mathematicarum disciplinarum fastigium & vertex quasi est ipsa ἀποδεικτική, quia per ipsam hæ scientiæ perficiuntur, dum definitionibus, diuisionibus, demonstrationibus, & quicquid harũ rerũ est, vtuntur.

De Geometria, & eius elementis.

Proclus Geometriam sic definit: γεωμετρία ἐστὶ γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων: ἔτι δὲ καὶ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτὰ, καὶ τῶν παντοίων θέσεων, καὶ κινήσεων. Geo-

metria est scientia, vel cognitio magnitudinum, & figurarum, atque etiam terminorum quibus illæ clauduntur: quæque proportiones, & rationes, atque etiam passiones his accidentes demonstrat: positionum denique, & motuum varietates explicat. Hæc scientia duplex est: altera nominatur θεωρία τῶν ἐπιπέδων: altera στερεομετρία. Planorum contemplatio tanquam simplicior præcedit, siquidem ex superficierum contemplatione nascitur corporum & solidorum cognitio. in vtraque vero tria (sicuti in omnibus scientijs) considerantur. Primum τὸ ὑποκείμενον γένος, res ipsa, de qua doctrina est instituta: alterum τὸ καθ' αὑτὸ ὑπάρχον, id quod rei per se inest, & τὰ πάθη, rerum affectiones: tertium ἀξιώματα, καὶ αἰτήματα, propositiones, per quas rebus subiectis inesse aliquid demonstratur. illa itaque in Geometria consideranda veniunt: nam vt ex definitione Geometriæ licet videre: subiecta sunt trianguli, quadrata, circuli, sphæra, Cylindri, & vt sum-

matim

matim dicam, figuræ planæ, corpora solida, denique omnes magnitudines immobiles, & harum termini. quæ verò his per se insunt, διαιρέσεις, συστάσεις, ἁφαὶ, παραβολαὶ, ὑπεροχὴ, ἔλλειψις, ἰσότης, καὶ ἀνισότης, id est, diuisiones, constitutiones, contactus, applicationes, excessus, defectus, æqualitas, & inæqualitas: cum alijs quibusdam huius generis. Axiomata, & petitiones, quibus singula rebus subiectis demonstrantur inesse: sunt huiusmodi, quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: item à puncto ad punctum ducere lineam rectam. Hæc verò cum latè pateant, & ipsarum rerum subiectarum, atque propositionum geometricarum magna, variaque sit copia: necesse est, vt delectus habeatur, & in tradendo, atque docendo incipiamus à simplicioribus, ac principalioribus: ex quibus tanquam notissimis extruamus demonstrationes rerum in geometria abstrusarum. quas quidem simpliciores propositiones στοιχεῖα, earumque doctrinam στοιχείωσιν Græci nominant. sunt enim στοιχεῖα, seu elementa Geometriæ, propositiones simplicissimæ, in quas compositæ resoluuntur, & à quibus tanquam principijs omnes Geometricæ demonstrationes egressæ sunt: tales sunt hæ propositiones Euclidis, quibus Archimedes, Apollonius, & cæteri geometræ tanquam principijs, & notissimis elementis vtuntur: ita tamen hæc prima, & simplicissima Geometriæ principia ab Euclide conscripta sunt, vt nemo satis possit hominis & ingenium, & industriam mirari. quæ enim ab antiquis fuerunt inuenta, in optimum redegit ordinem: delectum etiam in tanta copia, & varietate propositionum habuit talem, vt non omnia quæ dici poterant, assumeret: sed ea tantum, quæ elementari institutioni conueniebant. deinde omnes modos, omniaq; genera syllogismorum adhibuit, quæcunq; ab ipsis apodicticis recipiuntur. Præterea vtitur diuisionibus in inueniendis rerum speciebus, item definitionibus in substantiali rerum subiectarum expli-

catio-

catione. adhæc demonstratione in ijs, quæ à principijs fiunt ad quæsita. deniq; resolutione cum à quæsitis ad ipsa principia sit reditus. Taceo de varijs, quibus vtitur conuertendi modis, continuatione, & dispositione singulari ipsorum elementorum: vt vnum absq; altero videatur esse non posse. Quæ cum ita sint, meritò omnes studiosi philosophiæ, & bonarũ artium, sibi hæc Euclidis elemẽta familiaria reddere debebant, vt ad altiores capescendas scientias fierent paratiores.

De Propositionibus Geometriæ.

Solent Geometræ duo præcipua propositionum genera habere: vnum est τῶν ἀρχῶν principiorum: alterum τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς προτάσεων: id est, propositionum, quæ principia sequuntur, principia ipsa quia per se manifesta, & simplicia sunt nulla adhibita demonstratione primo explicantur loco: subsequuntur propositiones demonstrat one indigentes, & ex ipsis demanantes principijs: & nisi hic ordo teneatur, verum permisceantur omnia, tum & ipsa cognitio perturbatur: & quæ natura sunt distincta, coniunguntur. Illud ipsum facit Euclides, & principiorũ facta enumeratione, absq; vlla demonstratione: transit ad propositiones dem●strabiles. diuidit verò ipsa in ὑποθέσεις αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα ἢ κοινὰς ἐννοίας. Est autem ὑπόθεσις, cum aliquis rei propositæ cognitionem nondum habet, quæ per se fidem rei faciat, verum concedit assumenti illud verum esse. eiusmodi sunt ipsæ definitiones Euclidis. Postulatum verò in genere est, cum neq; cognitũ quid est, neq; ab audiente concessum, tamen petitur ab aliene, vt assumi concedatur. sicuti cum peto mihi concedi omnes angulos rectos æquales inter se esse. Axioma, vel pronunciatum est quando quid cognitum est, & tam manifestum, vt per sese fidem habeat. vt quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: totum maius est sua parte. Geometræ tamen hypothesein vocant etiam ὅρους definitiones rerum subiectarum: vt si definiam

line-

lineam, angulos, figuras, & similia: quo sciatur, quibus de rebus sermo sit institutus. deinde αἴτημα, seu postulatum non sic sumunt vt Philosophi: sed postulatum vocant propositionem immediatam, in qua petitur aliquid quod factu est facile, & nulla indiget varia aut prolixa delineatione, vt si dicam, à puncto ad punctum ducatur linea recta. Communis deniq; sententia Geometris dicitur propositio immediata, quæ per se manifesta, & cognitu perfacilis est, sine vlla demonstratione recepta: & communi omnium consensu concessa. Itaq; tria ista propositionum genera in eo conueniunt, quòd principiorum naturam habeant, ac per se sint manifesta. differunt verò, quòd hypothesis sit rerum subiectarum explicatio: postulatũ proponit aliquid, quod factu sit facile: axioma rei per se manifestæ sit cognitio. Quidam verò petitiones dicunt tantum ad Geometriam spectare: axioma vero ad omnes disciplinas. Alij diuidunt hoc modo ipsas communes sententias, vt quasdã

Geometriæ, nonnullas Arithmeticæ proprias esse dicant: alias deniq; communes. atq; hęc sint paucis dicta de principijs. Propositiones verò, quæ principia sequuntur, & demonstrari possunt ac debent: aliæ sunt προβλήματα, aliæ θεωρήματα. Problemata dicuntur propositiones, in quibus aliquid nobis ad agendū proponitur: vt quando figurarum ortus & constitutiones, sectiones, subtractiones, additiones, & similia proponuntur. Theoremata autem sunt, in quibus ad contemplandum quiddam proponitur, vt si ea, quæ rebus per se insunt, aut accidunt, consideramus. cuiusmodi dicuntur esse τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα ἢ συμβεβηκότα, vel etiam συμπτώματα, aut deniq; τὰ πάθη. Differunt itaq; inter se, sed non aliter quàm petitio, & axioma. Euclides vtroq; genere vtitur. nam interdum tantum habet problemata, vt in quarto libro, interdū verò solum theoremata, sicuti in quinto: nonnunquam deniq; theoremata problematibus commiscet, vt in reliquis facit libris.

De primo Libro.

Proposuit sibi Euclides in hoc primo elemento principia figurarum rectilinearũ tradere: nam triangulus & parallelogrammon sunt in figuris rectilineis omnium primæ, & simplicissimæ. Diuisit verò librum in partes tres: in prima, post explicationem principiorum, docet quomodo triangulus sit constituendus, quæ sint eius proprietates, cùm quoad angulos, tum etiam latera: præterea eosdem comparat inter se, & vnumquodq; accidens per se considerat: in altera de lineis æquedistantibus, & parallelogrammis doctrinam instituit, demonstrans quæ eis per se insint, & quomodo ipsa fiant parallelogramma. in postrema, parallelogramma & triangulos inter se confert, primum seorsim, deinde coniunctim. Atq; hæc breuiter sint dicta, & explicata de vniuersali illa rerum mathematicarum & Geometriæ cognitione: nunc subiungemus perbreues locorum difficiliorum expositiones, & si quid forsan occurret, quod latius sit explicandum, & ad vniuersam Geometriæ *metriam spectare videbitur, id fusius exponemus. cuiusmodi est ille locus περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐπιστάσεως ἀπαγωγῆς, & de ijs, quæ his similia.*

Σημεῖον.) *Alij sic definiunt: σημεῖον ἐστὶ μονὰς θέσιν ἔχουσα, punctum est vnitas quæ positionem habet. solum punctum in Geometria diuidi non potest: sicut in Arithmetica vnitas non admittit diuisionem. sunt enim vnius, eiusdemq́ naturæ: quum duarum scientiarum omniũ prima, & simplicissima sint principia; differunt tamen in eo, quòd punctum dari & poni possit: vnitas verò puncto simplicior existens non ponatur: cum ab omni interuallo, omniq́ materia, ac loco sit abstracta. Vtitur autem definitione negatiua, quoniam negationes maximè conueniunt principijs.*

Γραμμή.) *Principium omnium magnitudinum sola negatione definiuit: lineam verò nunc describit affirmando, & negando: quia affirmatione excedit naturam puncti, & minus est simplex puncto, cum sit longitudo diuisionem admittens: negatione verò est*

princi-

principium respectu superficiei, & corporis. sunt enim tres dimensiones: longitudinis quæ attribuitur lineæ, longitudinis & latitudinis simul, quæ ad superficiem refertur: deniq; longitudinis & latitudinis, atq; profunditatis coniunctim in corpore. cum itaq; in definitione ponit ἀπλατὲς latitudine carens: vnà cum latitudine adimit quoq; profunditatem, atq; eam ob causam non addidit καὶ ἀβαθὲς, cum superfluum esset. Alij sic definiunt lineam: γραμμὴ ἐςὶ ῥύσις τῦ σημείυ, id est, linea fit ex fluxu puncti: nonnulli γραμμὴν μέγεθ@ ἐφ' ἓν διαςατὸν nominant, magnitudinem vno contentam internallo. Euclidis tamen definitio perfectior est, essentiam & substantiam lineæ explicans. Possumus autem lineam hoc modo cognoscere, si longitudines parietum, aut itinerum spatia dimetiamur, quia tum neq; latitudinem, neque crassitiem subiungimus, sed vnicam considerамus distantiam, sicuti cum metimur prata, & campos, videmus ipsam tantum superfi-

perfi-

perficiem, id est, longitudinem & latitudinem, tantum eius loci, vel agri. Cùm verò puteos, tũ est solidum, quia omnes distantiæ, omniaq́; interualla ibi coniunguntur: dicimus enim longitudinis, latitudinis, profunditatis ipsius putei, tantum vel tantum esse spatium, melius tamen cognoscemus lineam, quando obseruamus quomodo lucidum ab obscuro, illuminatum ab obumbrato distinguatur.

Εὐθεῖα.) *Duæ simplicissimæ, ac præcipuæ linearum species sunt, recta & circularis: reliquæ omnes sunt mixtæ: & vel in superficiebus planis, vel in corporibus solidis considerantur. Plato lineam rectam definit sic:* εὐθεῖα γραμμή ἐστι, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ: *cuius media obumbrant extrema: quod licet videre in Eclipsi Solis, quando in vna linea recta sunt Sol, Luna, & oculus noster, Luna media inter nos & Solem existente. Archimedes definit lineam rectam sic:* εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν, *est breuissima earum*

rum linearum, quæ eosdem habent terminos. atq; hæc definitio explicat Euclideam, & vicissim illa declarat hanc.

Ἐπιφάνεια.) Post punctum & lineam sequitur superficies, quæ duplici interuallo distat longitudine, & latitudine: caret verò crassitudine: atq; eam ob causam addidit particulam μόνον.

Ἐπιφανείας δὲ.) sicut corpus solidum clauditur, & terminatur superficie, sic & superficies linea finitur, & linea puncto, quod quidē est omnium magnitudinū communis, & simplicissimus, atq; externus terminus.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά.) Omnis superficies vel est plana, vel circularis, & sphærica. vnam igitur geometra delegit, eamq; definit, nempe planam. possunt ei etiam congruere definitiones lineæ rectæ supra positæ: in hac autem plana superficie nos tanquam in aliquo subiecto contemplamur figuras, & figurarum affectiones. nam in plana superficie nos ducimus lineas rectas, circulares, & figu-

ras

ras omnis generis: item linearum, circulorum: & figurarum sectiones, contactus, applicationes angulorum, constitutiones, & quicquid harum est rerum: sed planam superficiem idcirco elegit, quoniã in alijs superficiebus ista omnia non possunt ita intelligi aut describi, quemadmodum in plana. Vocat itaq; hic planum id, quod nobis ante oculos est positum, & in quo mente atq; cogitatione omnia describimus, & delineamus, atq; firmis rationibus confirmamus.

Ἐπίπεδ☉ γωνία.) Genus definitionis est κλίσις, inclinatio: locus autem in quo describitur angulus, est τὸ ἐπίπεδον, planum ipsum: ortus verò eius est, quòd ad minimum duæ debẽt esse lineæ rectæ: sicuti in solido angulo lineæ tres: deinde illæ duæ lineæ rectæ debent sese mutuo tangere, neq; sitæ esse in directo, illud enim est ἐπ' εὐθείας, quando duæ lineæ rectæ ita collocatæ sunt, vt protractis istis lineis rectis, & concurrentibus vna ex duabus fiat linea recta.

Omni

Οἵαν δὲ.) *Enumerat species substantiales anguli rectilinei. definitionibus acuti & obtusi anguli est addendum genus, quod scilicet vterq; sit rectilineus, alter maior recto, alter vero recto minor. Verum non absolute illud est sumendum, quod omnis angulus recto minor sit acutus, quia sunt anguli nonnulli etiã non rectilinei, & tamen non acuti: sicut neq; illud simpliciter sumitur, quod obtusus sit recto maior, & idcirco omnes recto angulo maiores sunt obtusi, quoniam sunt anguli recto maiores, qui non sunt obtusi.*

Σταθεῖσα.) *Rectam super recta constituit in definitione anguli recti, non autem in anguli obtusi aut acuti descriptione: quia angulus rectus est angulorum non rectorum mensura: sicuti æqualitas est regula & norma inæqualitatis.*

ἀλλήλαις.) *Possunt enim æquales esse, sed si inter se æquales sint, necesse est vt sint recti.*

Ἐφεξῆς.) *Indicat causam rectitudinis, quia si anguli contigui inter se sunt æquales,* *rectus erit vterq́ illorum æqualium angulorum: nam stans illa recta in neutrum inclinat partem, & idcirco causa est non æqualitatis tãtum, sed & rectitudinis. Traditur verò hic de angulis, qui sunt in vno eodemq́ plano, sicuti & perpendicularis non quælibet hic definitur, sed illa tantum, quæ in vno, eodemq́ est plano.*

Κύκλος.) *Prima simplicissima, atq́ perfectissima figura plana est circulus, vt in corporibus solidis sphæra.*

Σχῆμα.) *quia vno comprehenditur termino.* ἀφ᾽ ἑνός.) *sunt enim infinita in circulo puncta, quorum omnium vnum tantum centri nomen & naturam retinet.* Ἐντός.) *ad differentiam eius puncti, quod extra circulum sumitur, & polus dicitur: omnia enim in vno sunt plano. idcirco etiam statim definitionem illius puncti subiungit, vt sciamus nõ polum, sed centrum intelligi.*

Διάμετρος.) *Circulo propriè conuenit: nam ἄξων vel axis est ipsius sphæræ,* διαγώ-

νιος

νος vero figurarum quadrilaterarum.

ἡμικύκλιον.) *Semicirculum inquit circuli diametro & circumferentia comprehendi propter τμήματα segmenta circulorum, quorum alterum μείζων maius, alterum ἔλαττον minus dicitur.*

Εὐθύγραμμα.) *à figura quæ vno termino ad eam quæ duobus comprehenditur, est progressus: nunc ad alias pergit explicandas: idq; iuxta ordinem numerorũ, binarium, & ternarium, & ita deinceps, quamuis vltra quadrilateras figuras, quæ in elementis locum habent, non progreditur specialiter: verum sub vno vocabulo comprehendit: & eas nominat τὰ πολύπλευρα, multi lateras figuras. Omnis igitur figura rectilinea, vel est trilatera: vel quadrilatera, vel gradatim multilatera: : sed non è contra omnis trilatera, quadrilatera, aut multilatera est rectilinea.*

Τριπλεύρων. *Triangulorum duplex est diuisio: vna per se manifesta, & cognita sumpta ab ipsis lateribus: altera quæ eam subse-*

quitur est propria ab ipsis angulis facta.

τετραπλεύρων.) *Præcipua diuisio quadrilaterarum figurarum hæc est: aliæ dicuntur parallelogramma, aliæ nõ parallelogramma: quæ verò parallelogramma dicuntur: aliæ rectangula, & æquilatera sunt, vt* τετράγωνον *quadratum: aliæ verò horum neutrũ habent, vt* τὸ ῥομβοειδὲς, *Rhombi speciem habens. nonnulla verò sunt quidem rectangula, sed non æquilatera, vt* τὸ ἑτερομηκὲς, *parallelogrammon altera parte longius: denique sunt parallelogramma, quæ æquilatera quidem, sed non rectangula sunt, vt est* ῥόμβος, *Rhombus. Figuræ verò quadrilateræ, quæ non sunt parallelogramma, aut duo tantum habent parallela latera, & sunt* τραπέζια, *trapezia: aut nulla prorsus parallela latera, & nominantur* τραπεζοειδῆ, *speciem trapezij habentia. Verum Euclides hanc diuisionem facere non potuit, cum de parallelis lineis aut figuris hisce lineis contentis nulla sit facta mentio: idcirco simpliciorem illam*

facit

facit diuisionem τετραπλεύρων.

Καὶ πᾶσαι ὀρθαί.) *Quidam iuxta Peripateticos volunt hanc propositionem esse αἴτημα, petitionem: alij verò & melius ἀξίωμα pronunciatum. Cum nunc paucis absoluerimus principia: restant propositiones demonstrabiles. omnis enim scientia vel versatur in principiorum explicatione, quas sine vlla demonstratione adhibita recipit: vel in doctrina propositionum earum, quæ ex ipsis demanant principijs: & per ea demonstrantur: quare & nos illas aggrediamur.*

De partibus problematis, atque Theorematis.

Propositiones quæ demonstrationem admittunt, suprà duplices constituimus esse: vel enim sunt προβλήματα, problemata: in quibus ea, quæ quodammodo nondum existunt comparare, & constituere proponitur: vel θεωρήματα, theoremata, in quibus id quod iam constitutum est, & in rerum natura existit, cognoscere, & perspicere statuimus. Geo-

metria enim, vt & aliæ ſcientiæ, habet omnes quatuor quæſtiones: an ſit, quid ſit, quale ſit, & quare ſit: de quibus quidem omnibus ſermonem inſtituit ipſa Geometria, vt apud Euclidem videbimus. Omne verò problema, omneq́ theorema, quod ſuis perfectum, & abſolutum eſt partibus, hæc in ſe habet: πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὴν, ἀπόδειξιν, καὶ συμπέρασμα, id eſt, propoſitionem, in qua eſt δεδομένον, datum, & ζητούμενον, quæſitum: deinde explicationem dati: tertio explicationem quæſiti: quarto delineationẽ: quinto demonſtrationem: ſexto & poſtremo concluſionem totius. Nam in propoſitione quid de re ſubiecta, vel ipſo dato quæratur, proponitur. perfecta enim propoſitio, & datum, & quæſitum habet, quamuis nonnulla ſint, quæ altero careant: poſtea ἔκθεσις ipſum datum per ſeſe cõſiderat, & ipſo quæſito quaſi præparat & ſtruit viam. διορισμὸς ſeorſim proponit quid de ſubiecto quæratur. Delineatio verò ſolet ea addere, quæ ad inueſtigatio-

nem

nem quæsiti pertinent: ipsa autem demonstratio adhibitis certis atq; firmis, priusq; concessis & affirmatis rationibus id de subiecto dici, quod proponitur, confirmat. tandem facta ipsa demonstratione, conclusio redit ad ipsam propositionem, eamq; confirmatam, & demonstratam iam esse colligit: solet verò interdum duplex esse, vna specialis in ipsa delineatione, & demonstratione facta: altera generalis, quæ totam confirmationem propositionis datæ colligit vniuersaliter.

Ex his vniuscuiusq; problematis, aut theorematis partib. maximè necessariæ sunt istæ tres: Propositio, demonstratio, & conclusio: reliquæ interdum adhibentur, & id vt plurimum, interdũ non adhibentur, vt in Arithmeticis fit, & in decimo Euclidis libro.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ.) Sunt quædam in Geometria, quæ nobis solent in medio demonstrationis cursu occurrere: qualis etiam in hac propositione est πτῶσις, casus. dicitur autem casus nihil aliud esse, quàm delineationis *transpositio, quæ fit propter diuersas positiones. ab hoc casu quædam propositiones dicuntur Græcis ἄπτωτα προβλήματα, problemata quæ carẽt casu, quando vna tantum est positio, & delineatio, siquidem casus respiciunt ipsam delineationem: quædam verò nominantur πολύπτωτα, problemata multos casus habentia, in quibus aliter atq; aliter fieri possunt delineationes. Hoc itaq; secundum problema multos habet casus, varias etiam delineationes. nam cum punctum detur positione, illa fieri potest varijs modis: vel enim ponitur extra datam lineam rectam, vel in ipsa linea recta, & si in ipsa, aut erit alterũ extremorum, aut inter ipsa extrema: & si extra ipsam, aut à latere, ita vt recta protracta à puncto ad datam lineam rectam, angulum faciat, aut è directo. Euclides sumpsit casum difficiliorem, & punctum extra lineam rectam datam à latere eius ponit.*

Δοθείσῃ εὐθείᾳ.) *Omne datum vel datur* θέσει, *positione, uel* λόγῳ, *ratione, vel* μεγέθει, *magni-*

magnitudine, vel εἴδει, specie. positione tantum datur ipsum punctum, linea verò, & reliqua Geometriæ subiecta omnib⁹ modis. hoc tamen in loco linea recta datur εἴδει specie, est enim linea recta & θέσει positione.

Δύο δοθεισῶν.) In hac propositione lineæ dantur magnitudine: ipsa delineatio multos habet casus, nam aut distāt inter se, vt apud Euclidem, aut in vno puncto coniunguntur, aut sese mutuo secant: aut altera alteram in extremo alterius puncto tantum secat: & vel maior minorem, vel minor maiorem, & quicunq; eiusmodi fieri possunt casus. veruntamen ad omnes huiusmodi casus Euclidis demonstratio se accommodat.

Ἐὰν δύο τρίγωνα.) Prius docuit trianguli constitutionem, quàm ea explicaret, quæ per se triangulis accidunt: præterea duabus propositionibus ostēdit viam & methodum, qua lineæ rectæ facienda sit alia recta æqualis. altera quidem non existentem facit per σύστασιν, constitutionem, & θέσιν positionem æ-

qualem. altera verò per ἀφαίρεσιν, ablatio-nẽ, idq; fecit vt latera laterib⁹ posset æqualia proponere. dantur in hac propositione duo, æqualitas laterum duorum, & angulus angulo æqualis: idq; datum ratione dari dicitur: quæruntur tria, basis basi, triangulus triangulo æqualis: reliqui denique anguli reliquis angulis æquales.

Ἑκάτεραν ἑκατέρα.) *quia aliâs Theorema verum non esset, idcirco nõ simpliciter inquit latus lateri æquale, sed alterum alteri. possent enim duo latera simul iuncta duobus simul iunctis esse æqualia: sed non idcirco triangulus esset triangulo æqualis.*

Ὑπὸ τῶν ἴσων.) *hoc addidit ne sumeremus basin, nam in triangulis duo latera dicuntur angulum aliquem comprehendere περιέχειν, tertium verò ὑποτείνειν subtendere: nam latera quæ angulis opponuntur è regione, sunt ὑποτείνουσαι πλευραὶ, latera subtendentia, & interdum βάσεις bases dicuntur, quòd tanquam fundamento figura ipsa bos nitatur latere.*

ὅμ

Τρίγωνον.) Intelligit aream ipsam triangularem, seu spatium ipsum, quod à trianguli lateribus intercipitur.

Demonstratio tota facta ex his duabus propositionibus, quæ inter se applicata conueniunt: æqualia erunt: & vicißim. Quæ inter se sunt æqualia: si applicentur, conuenient etiam inter se.

Τῶν ἰσοσκελῶν.) Theoremata apud Geometras magnam habent varietatem. alia enim sunt ἁπλᾶ, simplicia, in quibus vnum est datum, & vnum quæsitum: quorum & data, & quæsita diuidi & seiungi non possunt. Vt si dicat Euclides, omnis triangulus æquicrurus, habet angulos ad basin æquales. alia composita σύνθετα, quæ ex pluribus vel datis, vel quæsitis constant: vt data sint plura, & vnum quæsitum: vel plura quæsita, & vnum datum, vel deniq; plura data, & plura quæsita. composita sunt duplicia: quædam dicuntur συμπεπλεγμένα, quæ possunt in alia

alia simplicia theoremata diuidi: vt cum dico trianguli, & parallelogramma sub eadem altitudine existentia: eam habent rationem, quam basis ad basin. de vtroq; enim, & triangulo, & parallelogrammo seorsim eadem dici possũt. Quædam verò ἀσύμπλεκτα, quæ cũm sint composita, in simplicia tamen theoremata diuidi non possunt: quale est præcedens theorema quartum. Est & alia diuisio theorematum, de qua alibi. Hoc theorema ex vtraq; parte, dati nempe, & quæsiti compositum est, idcirco etiam distinxit quæ data sunt & quæ quæsita.

Ἐὰν τριγώνου.) *In hac propositione duo nobis occurrunt explicanda: primum est* ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων*: alterum* ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. *Est autem* ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων*, quando ex dato alicuius propositionis, fit quæsitum: & ex quæsito datum. vt triangulus æquicrurus, id est, habens duo æqualia latera: etiam angulos ad basim habet æqua-*

æquales, per ἀναστροφὴν conuerſionem ſic. Triangulus qui angulos ad baſim habet æquales, etiam eſt æquicrurus, id eſt, duo habet æqualia latera: nam propoſitio quinta hic cõuertitur iam dicto modo. Eſt etiam alia conuerſionis ratio in propoſitionibus compoſitis obſeruata, quæ fit permutatione partium, etſi non omnium, tamẽ aliquarum: vt fit in octaua propoſitione: quæ cõuertitur cum quarta. Quare notemus hic eſſe duo genera propoſitionum: vnum eſt τῶν προηγουμένων, quãdo id quod natura ſubiectum eſt, datur: quodue illi per ſe ineſt, quæritur de eodem: alterum τῶν ἀντιστροφῶν, cum è cõtrario σύμπτωμα ſeu accidens quoddam datur: et id, cui hoc accidit, in quæſtionem adhibetur, vt in his duobus licet videre propoſitionibus, quinta, & ſexta. Proximum eſt, vt dicamus de ἀπαγωγῇ εἰς τὸ ἀδύνατον, de reductione ad impoſsibile. ſciendum itaque eſt, quòd omnis demõſtratio mathematica, vel fit ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, quæ ab ipſis principijs ad ea, quæ ex his dema-

demanant, progreditur: vel ἐπὶ τὰς ἀρχάς, dum à re proposita regressus fit ad principia. vtraq; verò est duplex: illa enim vel ex principijs rem propositam confirmat, vel ex rebus antea affirmatis, & concessis: hæc autem vel est θετικὴ, & nominatur ἀνάλυσις, cui opponitur σύνθεσις: vel ἀναιρετικὴ, & dicitur ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. est autem reductio ad impossibile, quando in aliquod manifestum absurdum, & impossibile desinimus: & cuius contrarium omnes fatentur esse verum: eam quoq; faciunt bifariam: vel enim nos deducit ad ea, quæ principijs, ipsisq; axiomatibus manifestè repugnant, vt si quis sua argumentatione eò deueniat, totum esse æquale parti: vel ad id, quod demonstratis, & affirmatis è directo opponitur: sicuti facit in demonstratione propositionis octauæ. fit igitur reductio ad impossibile, cum id quod quæsito repugnat, accipimus pro vero, & ita progrediendo tandem in manifestum absurdum incidimus: quo deniq; sublato, id confirmamus,

mus, quod ab initio erat propositum, verum esse. Hæc demonstrandi forma syllogismis vtitur hypotheticis, quemadmodum in directis demonstrationibus vtimur categoricis. Hoc in loco Euclides conuersione est vsus in propositionis partibus: deductione verò in ipsa delineatione, ac demonstratione.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς.) in Geometria, & Arithmetica, vt plurimum sunt propositiones vniuersales affirmatiuæ: verum Euclides hic posuit negatiuam, sed omnibus additamentis ita eam muniuit, & tam certam, atq; indubitatam reddidit, vt minimè conuinci possit. quamuis non magnum in Geometria vsum habeat: tamen præcipuè posita est ad confirmandam octauam propositionem.

Τὴν δοθεῖσαν.) Angulus hic datur specie tantum: potest enim omnibus quatuor modis dari, nempe positione, cum ad certum quoddam punctum constituitur: forma deinde, vt si ponatur esse rectilineus: ratione verò, quando duplum triplumúe statuo: deniq; magnitudine.

dine, si dicam eam esse tertiam recti partem.

Πεπερασμένην.) *Omnis enim linea recta aut est finita ex vtraq; parte, aut ex altera tantum finita, et ex altera infinita: aut deniq; ex vtraq; parte infinita.*

Κάθετον ἀγαγεῖν.) κάθετος *perpendicularis etiam dicitur* γνώμων, *& eandem habet naturam cum ea, quæ nominatur* ἡ πρὸς ὀρθὰς γωνίας. *est autem duplex: vna plana, altera solida. plana perpēdicularis est, quando à puncto aliquo ad lineam rectam in eodē plano existentem alia linea recta ducitur, vt anguli contigui sint æquales, quam in hoc loco antea ducere præcipit. solida, quæ in Stereometria consideratur, dicitur quando punctum in alio fuerit plano, & non ad rectam, sed ad aliud planum ducitur linea quædam ad angulos rectos. differunt igitur inter se, quia perpendicularis est in eodē plano, & ducitur ad lineam rectam: solida verò nō in vno eodemq; plano, nec etiam ad rectam, verum ad planum ducitur: deniq; in solida id consideran-*

derandum, quòd ad omnes quæ in eo sunt plano rectas, non ad vnam tantum, vt plana, debet esse perpendicularis.

Ἄπειρον.) quæ pro nostro sumitur arbitrio satis longa vel breuis, longior vel breuior, vt visum fuerit necessarium esse ad rei demonstrationem.

Κατὰ κορυφὴν.) Differunt anguli ἐφεξῆς, & anguli κατὰ κορυφὴν, quòd anguli ἐφεξῆς contigui sunt per lineam, quæ alteram non secat: sed anguli κατὰ κορυφὴν per lineas duas sese secantes, sic dicti sunt, quod vertices in vno coniungant puncto.

Ἐκ δὴ τούτου.) Locus hic expostulat vt aliquid dicamus de corollario. in elementis igitur πορίσματα, seu corollaria sunt propositiones, quæ dum aliæ demonstrantur, simul apparent, & manifestæ fiunt, nobis etiam quærentibus, aut inuestigantibus eas. quale est hoc præsens πόρισμα. dum enim proponitur, quòd duabus lineis rectis sese secantibus, anguli ad verticem sint inter se æquales, &

O firmis

firmis demõstratur rationib⁹, in ipsa occurrit nobis demõstratione quatuor illos angulos esse æquales quatuor rectis. Itaq; lucrifecimus per ipsam hanc propositionẽ, hoc πόρισμα. tripliciter verò diuidũtur: primũ enim omne corollarium vel est Geometricum, vel Arithmeticum, vel alterius scientiæ, vt iam dictũ, proprium esse Geometriæ. In septimo verò Euclidis libro, propositione secunda, esse Arithmeticum. deinde quædam corollaria sequuntur ipsa problemata: quædam verò theoremata: nam in hoc loco theorematis corollarium habemus: verum in libro secundo problematis. tertio alia corollaria sunt demonstrationis directæ, alia vero indirectæ, sicuti hoc præsens porisma natum est ex demonstratione directa: sed in propositione prima libri tertij facta demonstratione per reductionem ad impossibile, nascitur corollarium. possunt & alia porismatum discrimina tradi, nobis tamen hæc monstrasse satis esse.

Ἐκτὸς γωνία.) *In definitionibus mentio-*

nem

nem fecit diuisionis angulorum substãtialis: nunc alia est facienda eorum diuisio per accidens. omnis angulus vel est ἐντος, vel ἐκτος. id est, omnis angulus vel est intra ipsam figuram, vel extra eam. deinde anguli quidam sunt ἐφεξῆς, quidam ἀπ' ἐναντίον, id est, contigui, aut oppositi. in triangulis igitur sic feres habet, quando aliquod trianguli latus extenditur: nascitur angulus qui ad ipsam trianguli substantiam non pertinet, & cum extra figuram existat: nominatur externus. Verum ex illis tribus, qui ad triãgulum pertinent: vnus qui ei est proximus, nominatur contiguus, reliqui verò duo oppositi, respectu eius, qui extra triangulum est.

Πάντη μεταλαμβανόμενα.) Est Geometrica phrasis, qua vtimur, dũ volumus ostendere, quouis modo sumi vel latera, vel aliquod aliud Geometriæ subiectũ, aut accidẽs per se.

Explicauit Euclides quæcunq; in primis illis elementis poterant dici, de triangulorum constitutione, æqualitate, aut inæqualitate

O 2 eorun-

eorundem, aut etiam laterum, & angulorũ: nunc pergit de quadrilateris figuris enarrare ea, quæ ad eorum contemplationem elementarem pertinẽt. Cum verò ex lineis æque distantibus fiant eiusmodi figuræ: prius earũ proprietates docet, & parallelogramma constituit: postea persequitur doctrinam de figuris quadrilateris, seu parallelogrammis. est autem παραλληλόγραμμον figura quæ circumscribitur lineis rectis æquedistantibus, atq; oppsitis inter se.

Tria itaq; in lineis parallelis sunt consideranda, quæ eis per se insunt, & ita attribuuntur, vt inde cognoscere poßimus lineas rectas esse æquedistantes. Primum est, vt anguli ἐναλλὰξ alterni (qui fiunt per lineam rectam in alias duas rectas incidentem) sint inter se æquales. Alterum, recta linea incidente in duas alias rectas, si anguli interni fuerint duobus rectis æquales, tũ propositæ duæ rectæ sunt æquedistantes. Postremum, Recta linea secante alias duas rectas, si externus

angu-

angulus, angulo interno sibi opposito ex eadem parte, fuerit æqualis, iterum erunt illæ rectæ æquedistantes.

ἢ εἰς τὰς.) *Hoc Theorema conuertitur cum ambobus præcedentibus. in demonstratione vtitur propositione, quæ inter principia est relata, sed principium non est.*

Παντὸς τριγώνου.) *Ea quæ decima sexta, & decima septima propositione erant omissa, in hac præsenti addit, & quanto minores sint, explicat, nempe tertio, & huius propositionis maxima est vtilitas.*

Αἱ τὰς ἴσας.) *Hæc propositio finit doctrinam linearum æquedistantium, & incipit parallelogrammorum traditionem.*

Τῶν παραλληλογράμμων.) *Postquam constituit parallelogrammon, inuestigat tria quæ parallelogrammis per se insunt. Primum latera opposita esse æqualia. Secundum, angulos oppositos esse æquales. Tertium, diametrum per medium ipsam secare figuram. Ita fit, vt à lateribus ab angulis, & ab ipsis* *areis proprietates inquirat parallelogrammorum.*

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν.) *Tria sunt apud Geometras vocabula: παραβολὴ, ὑπερβολὴ, & ἔλλειψις. cum enim figura applicatur ad lineam rectam, vt neque excedat, neque deficiat, est tum παραβολὴ applicatio. quando verò excedit ὑπερβολὴ, cum deficit ἔλλειψις, atque in Conicis figuris maximè considerantur ista.*

Ἀπὸ τῆς.) *Videtur Euclides voluisse præstantiores figuras rectilineas describere, in triangulis, eum quem æquilaterum nominamus: in quadrilateris figuris ipsum quadratum.*

Ἀναγράψαι.) *Vtitur hoc verbo, quoniam ab vno latere describitur: συστήσασθαι verò est, cum ex multis constituitur.*

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις.) *In hoc, & sequenti theoremate vtitur λήμμασι, id est, assumptiuis propositionibus, vtpote: Quæ ab æqualibus rectis lineis descripta sunt quadrata, illa sunt æqualia inter se. item æqualium quadratorum æqualia sunt latera.*

In qui-

In quibusdam etiam propositionibus vtitur alijs λήμμασι, assumptionibus, quas hic subiungam.

I. Si prima magnitudo fuerit æqualis magnitudini secundæ, & secunda maior sit tertia: erit etiam prima maior quàm tertia.

II. Si prima magnitudo fuerit maior secunda, & secunda sit æqualis tertiæ; erit etiam prima maior quàm tertia.

III. Si prima magnitudo fuerit maior quàm secunda: et secunda maior sit quàm tertia: erit etiam prima longè maior quàm tertia. Sunt & alia huius generis, de quibus aliâs.

FINIS.

Errata.

Pag. 1. linea 19. rectam, lege recta. pag. 2. 9. τὸν ἐντὸς, lege τῶν. pag. 4. 12. τῶν πλευρων, lege τῶν τριπλεύρων. pag. 5. 2. quadrilatera verò, lege quadrilateræ verò quas quatuor, multilateræ deniq. quas. Reliqua si quæ sunt, quiuis facile emendare poterit.