ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΚΑΙ ΔΕΚΑ ΣΤΟΙ-
ΧΕΙΩΝ, ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΘΕΩΝΟΣ
συνουσιῶν τὸ πρῶτον.

EVCLIDIS QVINDE-
cim Elementorum Geometriæ
primum: ex Theonis Commen-
tarijs Græcè, & Latinè.

Cui accesserunt
Scholia, in quibus quæ
ad percipienda Geometriæ Ele-
*menta spectant, breuiter & dilucidè ex-
plicantur, authore Cunrado Da-
sypodio, Scholæ Argenti-
nensis professore.*

*ARGENTORATI EXCV-
debat Christianus Mylius,*

M. D. LXIIII.

1564
N. O. O. P.
Sum Ioh. Georgij à Werdenstein
Empt. Wurceburgi 5. Vrsis
VIII. Idus Nouembr.

CVNRADVS DASYPODIVS

LECTORI S. D.

ANNIS viginti ſex noſtri Gymnaſij cõſuetudo fuit: vt qui ex claſsibus ad publicas lectiones promouentur, primum audiant Euclidis librum: quò præcepta τῆς ἀποδείξεως exercere, & ad vſum aliquem accommodare poſsint: ſiquidem nemo facilius vim, & efficatiam eorum, quæ in libro de demonſtratione explicantur: aut etiam ab ipſo Ariſtotele in ſuo organo traduntur, intelliget: quàm qui in puluerem deſcenderit Geometricũ. Idcirco in noſtra ſchola prudẽter hoc eſt inſtitutum: vt poſt linguarum & artiũ cognitionem, in diſciplinis Mathematicis adoleſcentes exerceantur: præſertim verò hoc probandum, & laudandum, quod in ipſo diſciplinarũ veſtibulo, cognitionem rerum Geometricarum ſibi comparent, & in ijs quæ certiſsimis nituntur rationibus, ſua exacuant ingenia: vt aſſueſcant eò facilius naturæ & cæterarum artium, atq; diſciplinarum abſtruſiora comprehendere. Nam & Pythagoricorũ hoc quoq; fuit σχῆμα, καὶ βῆμα: quo dicto volebant ſignificare, pueros eſſe quàm primum deducendos ad Geometriæ cognitionem, & ita gradatim per mathematicas diſciplinas ad altiora aſcendendum. ſicuti & Plato neminem aptum & idoneum iudicauit ad percipienda Philoſophiæ præcepta: niſi inſtructus eſſet rebus Geometricis, cum diceret; οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Itaq; cum hanc ſtudiorum rationem omnibus eruditis, etiam antiquiſſimis Philoſophis probari viderem, tanquam ſtudioſis adoleſcentibus vtilem, & valdè neceſſariam: fui & ego quoq; noſtro Typographo author, & ſuaſor, vt cum nulla amplius extarent exem-

exemplaria, hunc libellum imprimeret: ne bona, & fructuosa scholę nostrę constitutio intercideret. quoniam verò plerosq; audiebam de difficultate demonstrationum Geometricarũ solere conqueri, meis quibuscunq; illustrare volui scholijs. Idq; eo feci consilio, nõ vt egregij & magni quid cogitarem edere. Sciebam enim rem esse paruam, neq; vllius ingenij aut industriæ ex Proclo, aut alijs decerpere ea quæ propriè ad hanc tractationẽ pertinent: sed vt in assequendis hisce disciplinis, bonos adolescentes Geometrię imperitos aliquantulum mea iuuarem opera. Nam Geometrię elementa nuda, atq; sterilia vidẽtur, & prima fronte nullum peculiarẽ præ se ferunt fructum: sed si aditus ad ea percipienda præparetur, aut si quis diligentius consideret, & intueatur ipsam οἰκονομίαν τ̃ γεωμετρικῶν λόγων: atq; perpendat exactius ipsam πορείαν, ϗ συνέχειαν τῶν προτάσεων, cæteraq; omnia, quæ Geometria tractat, ad amussim examinet: tum abundè se ostendunt vtilitates in res humanas sese diffundentes: quas hoc loco enumerare prolixũ esset. Quantum igitur in me fuit, simplici & aperto sermonis genere, latinis verbis Græca interpretor: deinde breuibus scholijs, non nisi conor ea explicare, quæ difficiliora sunt: neq; omnia, sed præcipua tantum, & maximè necessaria, propediem certè plura, auxiliãte Deo Opt. Max. sum editurus, cùm in hunc, tum in alios Euclidis libros. Inter cætera verò etiam explicabo secundum Euclidis librum, qui de potentia lineę rectæ demonstrationes habet Geometricas. Quia verò τομὴ, καὶ διαίρεσις commune est σύμπτωμα linearum, corporum, & numerorum: idcirco statui demonstrationes illarum ipsarum secundi libri propositionum addere, petitas ex Arithmeticæ & Stereometrię princi-

principiis. Imò si commodè fieri pote-
rit, publicabo etiam ὀνομαστικὸν γεωμε-
τρικόν: in quo explicabuntur vocabula
huius scientiæ propria, quo studiosi
possint terminos, vt vocant, artis in-
telligere, & sensum verborum asse-
qui. Erit sanè dictionarium hoc, omni-
bus Philosophiæ studiosis vtilissimũ,
& valdè iucundum. Sunt nonulla pe-
nes me, quæ cum confidam doctis vi-
ris grata & accepta fore, aliquan-
do etiam in lucē emittam.

Calendis Aprilis,
Anno 1564.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ, ἘΚ ΤΩΝ τοῦ Θέωνος συνουσιῶν.

ΟΡΟΙ.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐδέν.

Γραμμὴ δέ, μῆκος ἀπλατές.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

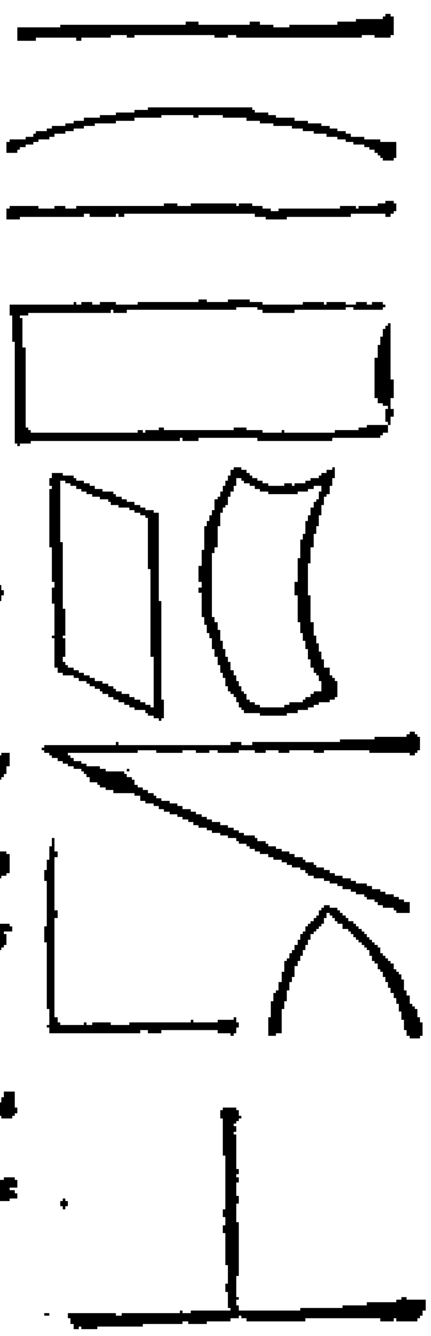
Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.



Ἀμβλεῖα

EVCLIDIS ELEMENTVM
primum ex Theonis Commentarijs.
Definitiones.

PVnctum eſt, quod partem non habet.

Linea eſt, longitudo abſq; latitudine.

Termini lineæ ſunt puncta.

Linea recta eſt, quæ ex æquo poſita eſt inter ſua puncta.

Superficies eſt, quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

Termini ſuperficiei ſunt lineæ.

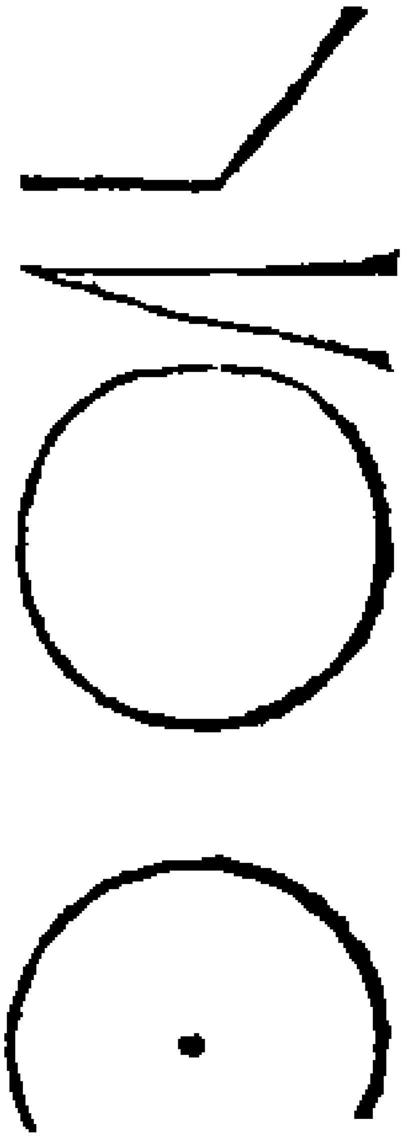
Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo poſita eſt inter ſuas lineas rectas.

Angulus planus eſt, duarũ linearũ ſeſe in plano tangentiũ, & nõ ex aduerſo poſitarum mutua inclinatio.

Rectilineum vocamus angulum, quem lineæ rectæ continent.

Cum recta ſuper rectam ſtans, angulos vicinos inter ſe fecerit æquales: rectus eſt vterq; æqualium illorum angulorum.

Recta verò linea angulos illos æquales faciens: perpendicularis dicitur ad eam lineam, ſuper qua conſiſtit.



Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Κέντρον δὲ, τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Ἡμικύκλιον δέ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα

Obtusus angulus est, qui recto est maior.

Acutus verò, qui recto est minor.

Terminus est, quod alicuius finis est.

Figura est, quæ termino aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

Circulus est figura plana, vna linea contenta, quam vocamus circumferentiam: ad quam ab vno aliquo ex punctis, quæ intra ipsam sunt, omnes lineæ rectæ procidentes, inter se sunt æquales.

Centrum verò circuli, vocatur hoc in circulo medium.

Dimetiens circuli est, recta quædam linea, per Centrum circuli ducta, vtrinq; ad circumferentiam circuli desinens: ipsumq; circulum in duas partes æquales diuidens.

Semicirculus est figura, quam dimetiens circuli, & intercepta à dimetiente circumferentia continet.

Segmentum circuli est, figura, quam linea recta, & circuli circumferentia continet.

Rectilineæ figuræ sunt, quas rectæ lineæ ambiunt.

Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν,

Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ἐστὶ, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον ἐστὶ, τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

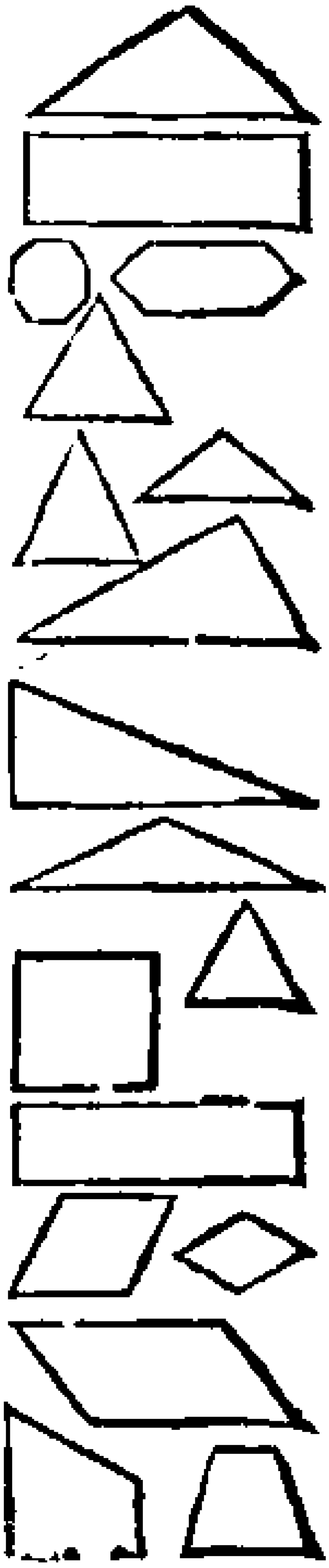
Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον.

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.



Τὰ

Trilateræ quidem, quas ambiunt tres rectæ.

Quadrilateræ verò, quas plures, quàm quatuor rectæ ambiunt.

Ex trilateris autẽ figuris. Triangulus æquilaterus est, qui tria habet æqualia latera.

Æquicrurus, qui duo tantum habet æqualia latera.

Scalenus triangulus, qui tria habet inæqualia latera.

Item ex trilateris figuris, triangulus rectangulus est: qui angulum habet rectum.

Amblygonius, qui angulũ habet obtusum.

Oxygonius qui angulos tres acutos habet.

Ex quadrilateris figuris, quadratũ est, quod æquilaterum est, & rectangulum.

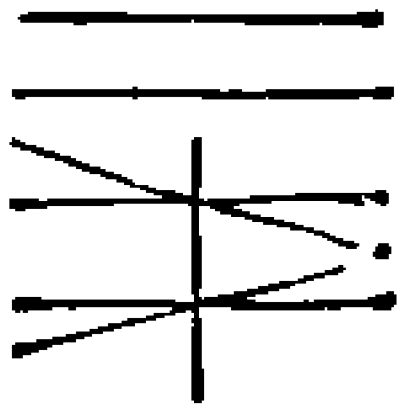
Quadrangulum oblõgum, quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.

Rhombus, quod æquilaterum quidem est, sed non rectangulum.

Rhomboides, quod latera è regione posita habet æqualia, ac etiam angulos: non tamen est æquilaterum, neq; rectangulum.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

ΗΤΗΣΘΩ, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

ΤΑ ΤΩ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

Καὶ

Omnes reliquæ præter has quadrilateræ figuræ, Trapezia vocentur.

Æquedistantes rectæ lineæ sunt, quæ in eodẽ plano sitæ: & in infinitum ex vtraq; parte extensæ: in neutra tamen concurrunt.

POSTVLATA.

Petatur. A quouis puncto, ad quoduis punctum rectam lineam describere.

Item, lineam rectam finitam, in infinitum vsq; extendere.

Item, quouis centro, & interuallo describere circulum.

COMMVNES NOTIONES,

seu sententiæ.

Quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia.

Si æqualibus æqualia fuerint adiecta, etiam tota sunt æqualia.

Si ab æqualibus æqualia fuerint ablata, etiã quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Si inæqualibus æqualia fuerint adiecta: etiã tota sunt inæqualia.

Si ab inæqualibus æqualia fuerint sublata: quæ relinquuntur sunt inæqualia.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστί.

Καὶ πάσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύω ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ᾽ ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Qua

Quæ sunt eiusdem dupla, inter se sunt æqualia.

Quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia.

Quæ applicata inter se conueniunt, sunt æqualia.

Totum est maius sua parte.

Omnes recti anguli inter se sunt æquales.

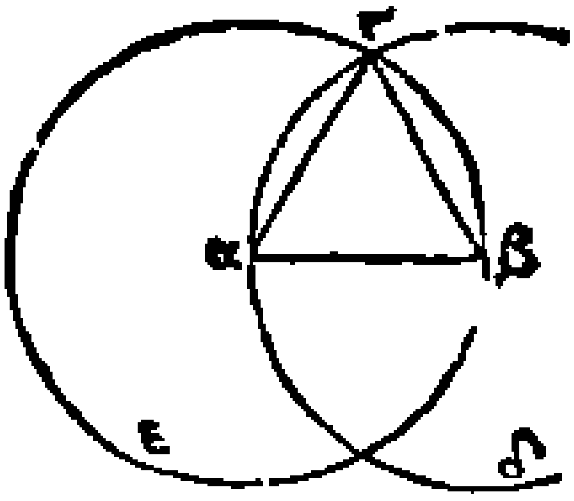
Cum in duas rectas, recta incidens linea, duos internos ex vna parte angulos, duobus rectis facit minores: productæ istæ duæ lineæ rectæ in infinitum, ex ea parte concurrent, vbi sunt illi duo anguli duobus rectis minores.

Duæ lineæ rectæ figuram non faciunt.

Πρότασις α. πρόβλημα.

ΕΠΙ ΤΗΣ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ, τῷ αβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ βγε. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω, ὁ αγδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α, β, σημεῖα, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ γα, γβ.



(Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γεβ κύκλου· ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ, πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ, τοῦ γαδ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα, τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ, τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ

γα,

Propositio prima. problema.

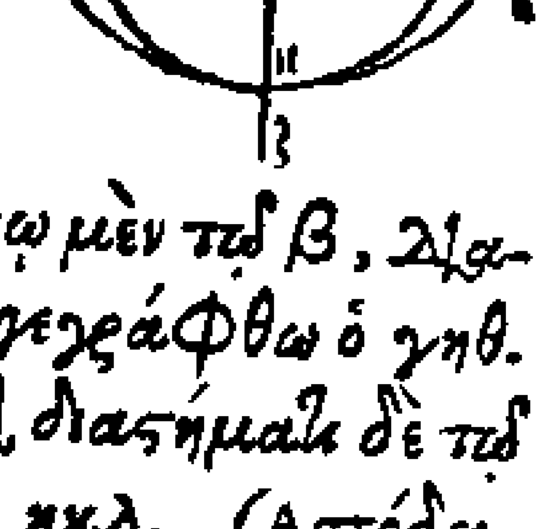
SVper data linea recta finita, triangulum æquilaterum constituere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita αβ. (Explicatio quæsiti.) Oportet super linea recta αβ, triangulum æquilaterum constituere. (Delineatio.) Centro α, interuallo αβ, describatur circulus βγε. Item centro β, interuallo βα, describatur circulus αγδ. Ducantur deniq; lineæ rectæ αγ, γβ, (Demonstratio.) Quoniam punctum α, est centrum circuli γεβ: idcirco recta αγ, est æqualis rectæ αβ. rursusquoniam punctum β, est centrum circuli γαδ: idcirco recta βγ, æqualis est rectæ βα. Verum demonstratum est, quod recta γα, etiam æqualis sit rectæ αβ. Ergo vtraq; rectarum γα, γβ, est æqualis rectæ αβ. Quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiam inter se sunt æqualia. Ergo γα recta, etiam æqualis est rectæ γβ. Tres igitur lineæ rectæ γα, αβ, βγ, sunt inter γα, αβ, βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β. πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ βγ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ β σημεῖον, εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δαβ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ, εὐθεῖαι, αἱ αε, βζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ ηκλ. (Ἀπόδειξις.)



ter se æquales. (Conclusio.) Triangulus itaq; $\alpha\beta\gamma$, est æquilaterus: & consistit super data linea recta finita $\alpha\beta$. Quod faciendum erat.

Propositio secunda. Problema.

AD punctum datum, lineæ rectæ datæ, æqualem lineam rectam ponere.

Explicatio dati.) Sit punctum datum α, & data recta linea $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti) Ad punctum datum α, datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$, ponenda est recta linea æqualis. (Delineatio.) Ab α puncto, ad punctum β, ducatur linea recta $\alpha\beta$, & super linea $\alpha\beta$ statuatur triangulus æquilaterus $\alpha\delta\beta$. Extendantur etiam lineæ rectæ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ versus puncta ϵ, ζ & fiant rectæ $\alpha\epsilon$, $\beta\zeta$. Centro quoq; β, interuallo $\beta\gamma$, describatur circulus $\gamma\eta\theta$. Item Centro δ, interuallo $\delta\eta$, describatur circulus $\eta\kappa\lambda$ (secans lineã rectã $\delta\zeta$, in puncto η.)

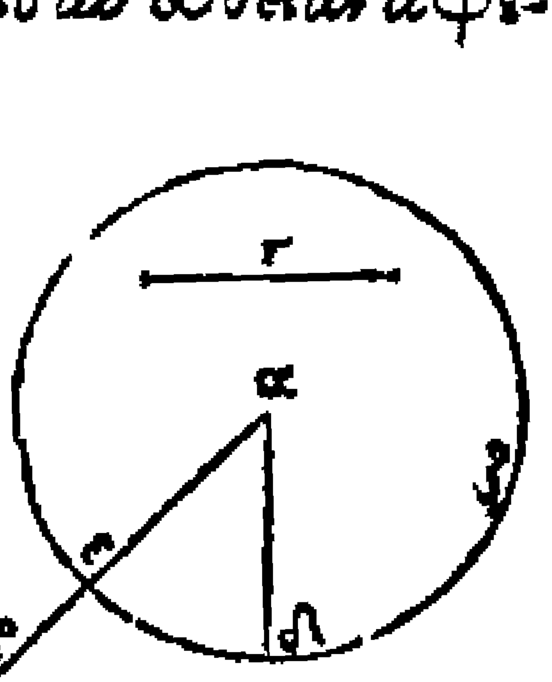
Demon-

ξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ ηκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δλ, τῇ δη, ὧν ἡ δα, τῇ δβ ἴση ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ αλ, λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ βη ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ, βγ, τῇ βη ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ αλ ἄρα, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ, ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ. πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. (Κατασκευή.) Κείσθω



Demonstratio.) Quoniam punctum β est centrum circuli γηθ: idcirco recta βγ, est æqualis rectæ βη. Item quoniam punctum δ, est centrum circuli ηκλ: igitur recta δλ est æqualis rectæ δη, ex quibus δα fuit æqualis rectæ δβ. reliqua igitur αλ, reliquæ βη est æqualis. Vtraq; idcirco rectarum αλ, βγ, est æqualis rectæ βη. quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiã inter se sunt æqualia. quare recta αλ, etiam erit æqualis rectæ βγ. (Conclusio.) Ad datum igitur punctum α, datæ lineæ rectæ βγ: æqualis posita est recta linea αλ, quod faciendum erat.

Propositio tertia. Problema.

DVabus rectis inæqualibus datis: ex maiore minori æqualem rectã lineam auferre.

Explicatio dati.) Sit data linea recta maior αβ, minor verò γ. (Explicatio quæsiti.) Ex maiore linea αβ, tollenda est recta æqualis lineæ γ. (Delineatio.) Ponatur κείσθω πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ γ εὐθείᾳ, ἴση ἡ αδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω ὁ δεζ. (Απόδειξις) Καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ αδ. ἀλλὰ καὶ ἡ γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αε, γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ αε τῇ γ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν αβ, γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴση ἀφῄρηται ἡ αε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς

δυσὶ

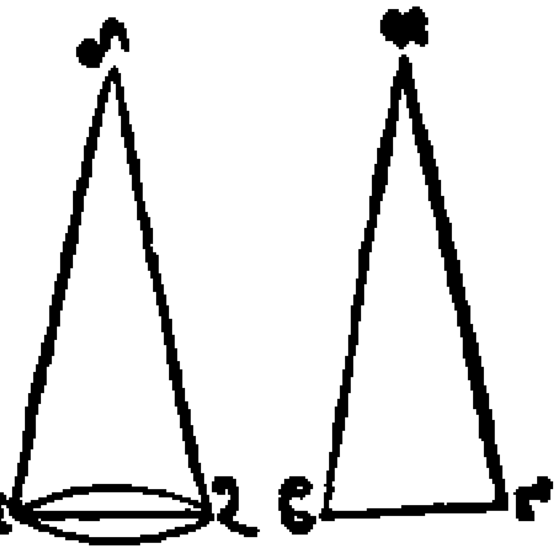
tur ad punctum α, lineæ γ, æqualis recta linea αδ. deinde centro α, interuallo αδ, describatur circulus δεζ (secans rectam αβ, in puncto ε. (Demonstratio.) Quoniã punctum α, centrũ est circuli δεζ. idcirco recta αε, est æqualis rectæ αδ. Verũ recta γ, etiã est æqualis rectæ αδ. Vtraq; igitur rectarũ αε, γ, est æqualis rectæ αδ. Quare αε etiã est æqualis rectæ γ Duabus igitur rectis datis inæqualibus αβ, γ: ex maiore αβ, ablata est αε, æqualis minori γ. Quod faciendum erat.

Propositio quarta. Theorema.

SI duo trianguli duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterũ alteri: & angulum angulo æqualem, qui ęqualibus rectis lineis continetur: etiam basim basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt ęquales, alter alteri, quos latera subtẽdũt ęqualia.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ, habentes duo latera αβ, αγ æqualia,

C duo-



δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν α σημείου, ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, τῆς δὲ αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ τὸ β ἐπὶ τὸ ε. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ, τῇ δε. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ ἡ αγ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν δζ. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ εδζ. ὥστε καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ σημεῖον ἐφαρμόσει. διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν αγ, τῇ δζ.

duobus lateribus δ ε, δ ζ alterum alteri: latus α β, æquale lateri δ ε: & latus α γ, æquale lateri δ ζ: & angulum β α γ, æqualem angulo ε δ ζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd basis β γ, sit æqualis basi ε ζ: & triangulus α β γ, sit æqualis triangulo δ ε ζ, & reliqui anguli, reliquis angulis sint æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus etiam α β γ, sit æqualis angulo δ ε ζ: angulus deniq; α γ β, sit æqualis angulo δ ζ ε. (Demonstratio.) Quando enim triangulus α β γ, applicatur triangulo δ ε ζ. Punctum α, ponitur super puncto δ: & recta α β, applicatur rectæ δ ε. Cadet etiam punctum β, super puncto ε. quia α β est æqualis rectæ δ ε. Deinde si recta α β, applicatur rectæ δ ε: etiam recta α γ, applicabitur rectæ δ ζ. quoniam angulus β α γ, proponitur æqualis angulo ε δ ζ. quare & punctum γ, applicabitur puncto ζ. cum recta α γ, æ-

τῇ δζ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε ἐφηρμό-
κει. ὥστε βάσις ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐ-
φαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ, μὲν β ἐπὶ τὸ ε ἐφαρμό-
σαντος, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ ζ, ἡ βγ βάσις ἐπὶ τὴν
εζ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέ-
ξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ
βγ βάσις, ἐπὶ τὴν εζ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται, ὥς
τε καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ἐπὶ ὅλον τὸ δεζ
τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. καὶ
αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας
ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν
ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ
τῇ ὑπὸ δζε. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα
δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ ἴ-
σας ἔχῃ ἑκάτεραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ
γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν
περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕ-
ξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· καὶ
αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι
ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευ-
ραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε. θεώρημα

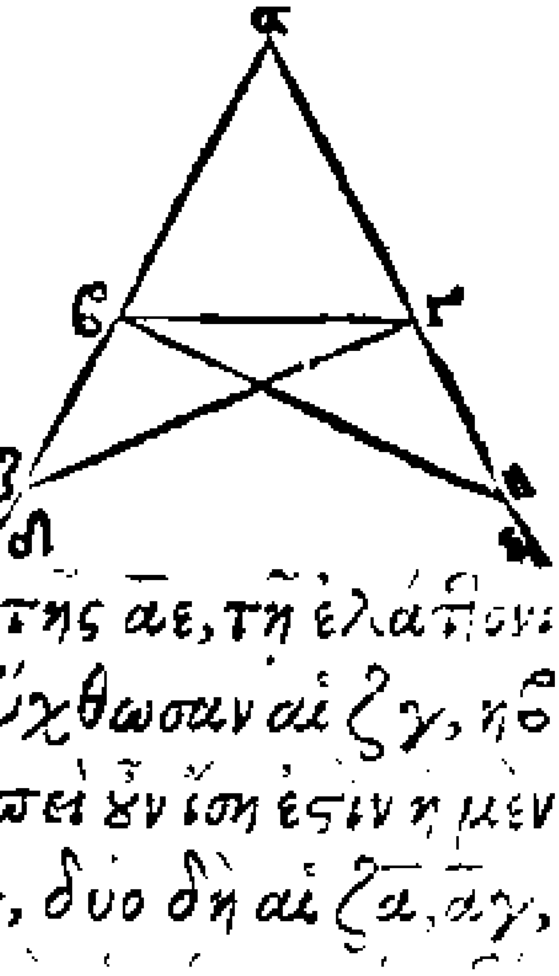
Τῶν

qualis sit rectæ $\delta\zeta$. Verum punctum β, applicabatur puncto ϵ. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ applicabitur. Nam si punctum β, applicetur puncto ζ, & basis $\beta\gamma$, non applicetur basi $\epsilon\zeta$: tum duæ rectæ figuram facient, quod est impossibile. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ applicatur, & est ei æqualis. Vnde & totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\delta\epsilon\zeta$ applicabitur, & ei erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis applicabuntur, eisq́ erunt æquales: angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$: & angulus $\alpha\gamma\beta$, angulo $\delta\zeta\epsilon$. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: etiam basin basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. quod erat demonstrandum.

Propositio quinta. Theorema.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν αβ πλευρὰν, τῇ αγ πλευρᾷ. καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς αβ, αγ, εὐθεῖαι αἱ βδ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγβ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ βγε. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς βδ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αε, τῇ ἐλάττονι τῇ αζ ἴση ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ, ηβ εὐθεῖαι. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αζ, τῇ αη, ἡ δὲ αβ, τῇ αγ, δύο δὴ αἱ ζα, αγ, δυσὶ ταῖς ηα, αβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ζαη. βάσις ἄρα ἡ ζγ, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αζγ τρίγωνον, τῷ αηβ τριγώνῳ ἴσον ἐστί.



καὶ

TRiangulorum, qui duo æqualia habẽt latera, anguli ad basim sunt æquales. Et productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales.

Explicatio dati.) Sit triangulus æquicrurus αβγ, habens latus αβ, æquale lateri αγ: & producantur lineæ αβ, αγ, ἐπ' εὐθείας, (hoc est, vt continuè extendatur secundum lineam rectam) & fiant rectæ βδ, γε. (Explicatio quæsiti) Dico quod angulus αβγ, sit æqualis angulo αγβ. Et quòd angulus γβδ, sit æqualis angulo βγε. (Delineatio.) Sumatur in linea βδ, punctum quoduis ζ. deinde tollatur à maiore linea αε, minori αζ, æqualis linea recta αη. deniq; ducantur rectæ ζγ, ηβ. (Demonstratio.) Quoniam recta αζ, est æqualis rectæ αη: & recta αβ, æqualis rectæ αγ: duæ igitur rectæ ζα, αγ, duobus rectis ηα, αβ sunt æquales, altera alteræ: & cõmunem ambiunt ζαη angulum. quare basis ζγ, basi ηβ est æqualis, & triangulus αζγ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αγζ, τῇ ὑπὸ αβη, ἡ δὲ ὑπὸ αζγ, τῇ ὑπὸ αηβ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αζ, ὅλῃ τῇ αη ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ αβ τῇ αγ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, τῇ ηβ ἴση. δύο δὴ αἱ βζ, ζγ, δυσὶ ταῖς γη, ηβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γηβ ἐστὶν ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ, ἡ βγ. καὶ τὸ βζγ ἄρα τρίγωνον, τῷ γηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ, ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ γβη, τῇ ὑπὸ βγζ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει, τοῦ αβγ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ ἴση, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα ἰσοσκε-

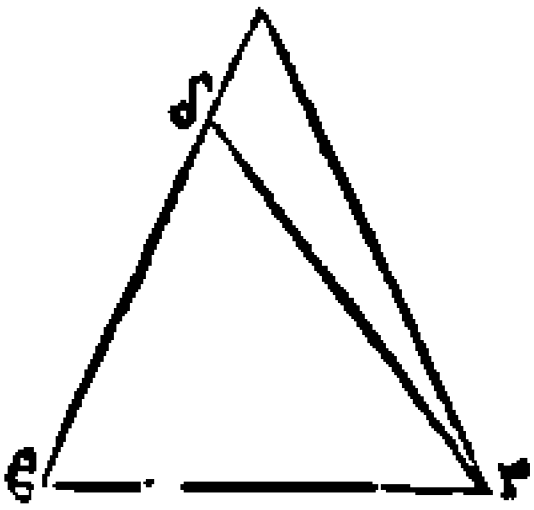
λῶν

triangulo $\alpha\eta\beta$ æqualis est: reliqui etiam anguli, reliquis angulis æquales sunt, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus $\alpha\gamma\zeta$, angulo $\alpha\beta\eta$: & angulus $\alpha\zeta\gamma$, angulo $\alpha\eta\beta$. Cũ verò tota recta $\alpha\zeta$, toti rectæ $\alpha\eta$ sit æqualis, & recta $\alpha\beta$ ablata, sit æqualis rectæ $\alpha\gamma$ ablatæ, idcirco reliqua linea recta $\beta\zeta$, reliquæ rectæ $\gamma\eta$ etiam erit æqualis. Verum recta $\zeta\gamma$ demonstrata est æqualis esse recte $\eta\beta$. duæ igitur rectæ $\beta\zeta$, $\zeta\gamma$, duabus rectis $\gamma\eta$, $\eta\beta$ sunt æquales altera alteræ: & angulus $\beta\zeta\gamma$, æqualis est angulo $\gamma\eta\beta$: basis etiam eorum communis est recta $\beta\gamma$: triangulus igitur $\beta\zeta\gamma$, triangulo $\gamma\eta\beta$ etiam erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis æquales: quos æqualia illa latera subtendũt. angulus $\zeta\beta\gamma$, æqualis angulo $\eta\gamma\beta$: & angulus $\beta\gamma\zeta$, angulo $\gamma\beta\eta$. Quoniam nunc totus angulus $\alpha\beta\eta$, toto angulo $\alpha\gamma\zeta$ demonstratus est æqualis: quorũ ablatus angulus $\gamma\eta\beta$, ablato angulo $\beta\gamma\zeta$ est æqualis: ergo reliquus $\alpha\beta\gamma$ angulus, reliquo $\alpha\gamma\beta$ angulo est æqualis, & sunt anguli ad basim trianguli $\alpha\beta\gamma$.

λῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ αγβ γωνίᾳ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αβ, πλευρᾷ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. (Κατασκευή.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ αγ, ἴση ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ αγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ· δύο δὴ αἱ δβ, βγ δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑ-

πὸ

Angulus verò $\zeta\beta\gamma$, angulo $\eta\gamma\epsilon$ demonstratus est æqualis esse: & sunt sub basi. (Conclusio.) Triangulorum igitur, qui duo habent æqualia latera, anguli ad basim sunt æquales, & productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio sexta. Theorema.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendunt, erũt inter se æqualia.

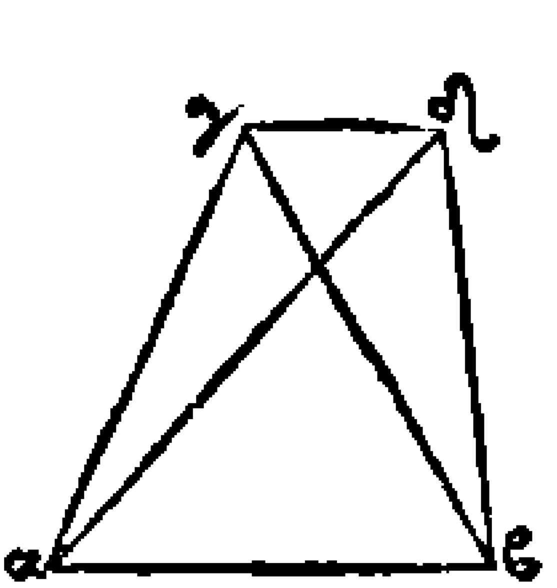
Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, habens angulum $\alpha\beta\gamma$, æqualem angulo $\alpha\gamma\beta$. Explicatio quæsiti.) Dico quòd latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\alpha\gamma$. (Delineatio cum hypothesi.) Si enim recta $\alpha\epsilon$, nõ est æqualis rectæ $\alpha\gamma$: altera illarum erit maior, sit recta $\alpha\beta$ maior. ex recta $\alpha\beta$ maiore: lineæ rectæ $\alpha\gamma$ minori auferatur linea recta $\beta\delta$ æqualis: & ducatur recta $\delta\gamma$. (Demonstratio.) Quoniã latus $\delta\beta$, æquale est lateri $\alpha\gamma$, & cõmune latus $\epsilon\gamma$: duo igitur latera $\delta\epsilon$, $\beta\gamma$, duobus laterib⁹ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$

πὸ δβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ δγ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. τὸ ἔλασσον τὸ μεῖζον. ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ: ἴση ἄρα. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ. θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἔκθεσις.) Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς αγ, γβ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αδ, δβ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ



μείῳ

sunt æqualia alterũ alteri: & angulus $\delta\beta\gamma$*, angulo* $\alpha\gamma\beta$ *est æqualis. Basis igitur* $\delta\gamma$*, basi* $\alpha\beta$ *est æqualis: & triangulus* $\alpha\beta\gamma$*, triangulo* $\delta\gamma\beta$ *est æqualis: maior minori. quod est absurdum. Quare recta* $\alpha\beta$*, non est inæqualis rectæ* $\alpha\gamma$*, itaq; erit ei æqualis. (Conclusio.) Si ergo trianguli, duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendũt, erunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio septima. Theorema.

SVper eadẽ linea recta, duabus eisdem rectis, aliæ duę rectæ æquales altera alteri, non statuentur ad aliud, atq; aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ.

Explicatio dati.) Si enim est possibile, sit linea recta $\alpha\beta$*, & super ea duabus rectis* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$*, constitutis: aliæ duæ lineæ rectæ* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$ *constituantur æquales altera alteri: ad aliud*

atq;

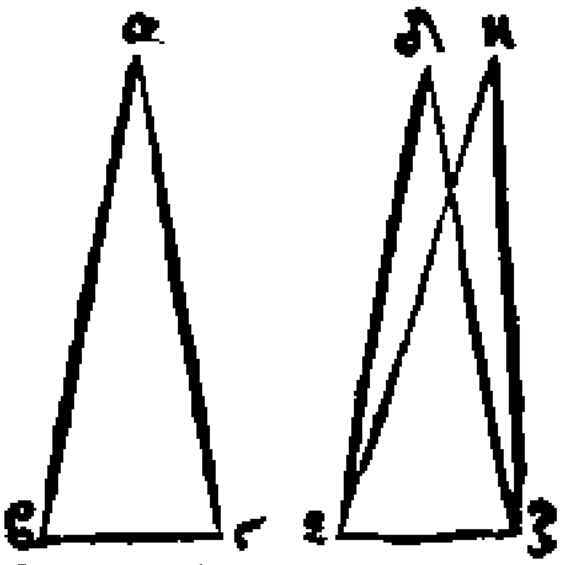
μείῳ, τῶ τε γ, καὶ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ γ, δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, τὰ α, β, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, ὥστε ἴσην εἶναι, τὴν μὲν γα, τῇ δα, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ, τὸ α, τὴν δὲ γβ τῇ δβ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ β. (Κατασκευή.) Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ αδγ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ δγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δγβ, πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ τῇ δβ, ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγβ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς, καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (Συμπέρασμα.) Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην, καὶ atque aliud punctum γ & δ, in easdem partes γ, & δ: eosdẽ habentes terminos α, & β: quos lineæ rectæ primæ: ita ut $\gamma\alpha$ æqualis sit $\delta\alpha$: et eundem habeat terminũ α: recta verò $\gamma\beta$, sit æqualis rectæ $\delta\beta$, & eundem cum ea habeat terminũ β. (Delineatio.) Et ducatur recta $\gamma\delta$. (Demõstratio.) Quoniã $\alpha\gamma$ recta est æqualis rectæ $\alpha\delta$: etiam angulus $\alpha\gamma\delta$, erit æqualis angulo $\alpha\delta\gamma$. verum angulus $\alpha\delta\gamma$, maior est angulo $\delta\gamma\beta$: multò ergo angulus $\gamma\delta\beta$ maior est angulo $\delta\gamma\beta$. Item, quoniam latus $\gamma\beta$, est æquale lateri $\delta\beta$: erit etiam angulus $\gamma\delta\alpha$, angulo $\delta\gamma\beta$ æqualis. Verum ille ipse angulus $\gamma\delta\alpha$ demonstratus est esse multò maior angulo $\delta\gamma\beta$, quod est impossibile. (Cõclusio.) Super eadem igitur recta, duabus eisdem rectis, aliæ duæ rectæ æquales altera alteri: non statuentur ad aliud atque aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio octaua. Theorema.

SI duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, habuerint verò etiam basin, æqualem basi: etiã anguτὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν βγ, βάσει τῇ εζ ἴσην. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστιν ἴση. (Κατασκευή.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν β σημείου ἐπὶ τὸ ε σημεῖον, τῆς δὲ βγ εὐθείας ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόσει, καὶ τὸ γ σημεῖον ἐπὶ τὸ ζ· διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ τῇ εζ. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς βγ, ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόζουσι, καὶ αἱ βα, γα, ἐπὶ τὰς εδ, δζ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ, οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ εη, ηζ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς

αὐτῆς

angulum angulo habebunt ęqualem, quem æquales illæ lineæ rectæ continent.

Explicatio dati.) Sint duo triãguli αβγ, δεζ: habentes duo latera αβ, αγ: duobus lateribus δε, δζ, æqualia, alterum alteri, latus scilicet αβ, æquale lateri δε: & latus αγ, æquale lateri δζ: item basim βγ, æqualem basi εζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus βαγ, sit æqualis angulo αδζ. (Delineatio.) Quando enim triangulus αβγ, applicatur triangulo δεζ, & punctum β, ponitur super puncto ε: linea quoq; recta βγ, applicatur rectæ εζ: tum punctum γ, etiam applicabitur puncto ζ: quia recta βγ, est æqualis rectæ εζ. (Demonstratio.) Quando verò recta βγ, applicatur rectæ εζ: applicabuntur etiã rectæ βα, αγ, rectis εδ, δζ. Si enim basis βγ, applicatur basi εζ, & latera βα, αγ, non applicẽtur lateribus εδ, δζ. Verũ diuersum habuerint sitũ, vt rectæ εη, ηζ, Constituentur su-

αὐτῆς εὐθείας, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ, οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς βγ, βάσεως ἐπὶ τὴν εζ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ. ἐφαρμόσουσι ἄρα. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, δίχα τεμεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἀφῃρή-

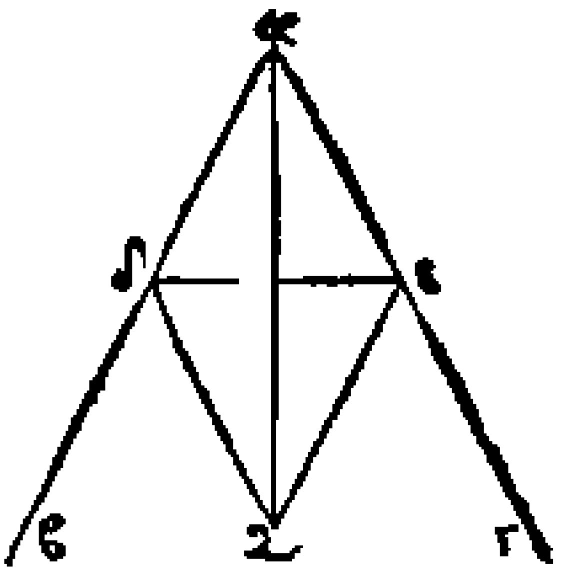
σθω

per eadē linea recta, duabus eisdē rectis aliæ duæ rectæ æquales altera alteri, ad aliud, atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. sed non statuentur ad diuersum punctum. Quare falsum est, quòd applicata basi $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$: non applicētur $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, latera, lateribus $\epsilon\delta$, $\delta\zeta$. applicabuntur ergo. Vnde sequitur, quòd angulus $\beta\alpha\gamma$, applicabitur angulo $\epsilon\delta\zeta$, & ei erit æqualis. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri: habuerint verò etiam basim basi æqualem: etiam angulum angulo habebunt æqualem, quem æquales illæ rectæ lineæ cōtinent. Id quod erat demonstrandum.

Propositio nona. Problema.

DAtum angulū rectilineū per medium secare, vel in duas partes ęquales secare.

Explicatio dati.) Sit datus angulus rectilineus $\beta\alpha\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Angulus $\beta\alpha\gamma$ secādus est in duas partes æquales. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\beta$, punctū quod-



ρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, τῇ αδ ἴση, ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αζ, δύο δὴ αἱ δα, αζ, δυσὶ ταῖς εα, αζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαζ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ βαγ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι. Πρόβλημα.

ΤΗν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τὴν αβ, δίχα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Συνεστάτω ἐπ' αὐ-

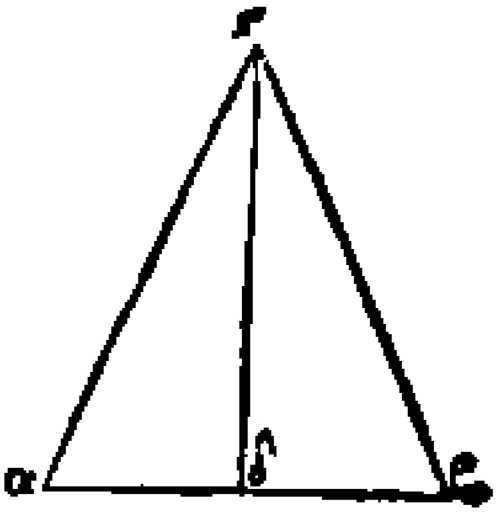
τῆς

uis δ, & tollatur ex linea αγ, linea αδ æqualis recta linea αε: postea ducatur linea δε: & statuatur super linea δε, triangulus æquilaterus δζε: deniq; ducatur linea αζ. (Explicatio iam factæ delineationis.) Dico quòd linea αζ, in duas partes æquales secet angulũ βαγ. (Demonstratio.) Quoniam recta αδ, æqualis est rectæ αε, et communis sit recta αζ: idcirco duo latera δα, αζ, duobus lateribus εα, αζ, sunt æqualia alterum alteri: & basis δζ, æqualis basi εζ. Angulus igitur δαζ, angulo εαζ est æqualis. (Conclusio.) Datus igitur angulus rectilineus βαγ, per lineam rectam αζ, est dissectus in duas partes æquales. Id quod faciendum erat.

Propositio decima. Problema.

DAtam lineam rectam finitam in duas partes æquales secare.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita αβ. (Explicatio quæsiti.) Linea recta finita αβ, dissecanda est in duas partes æquales. (Delineatio.) Statuatur super recta τῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αβγ γωνία δίχα, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ αβ εὐθεῖα, δίχα τέτμηται



κατὰ τὸ δ σημεῖον. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, δύο δὴ αἱ αγ, γδ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια. πρόβλημα.

ΤΗ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. (Διορισμὸς.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ εὐθείᾳ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγα-

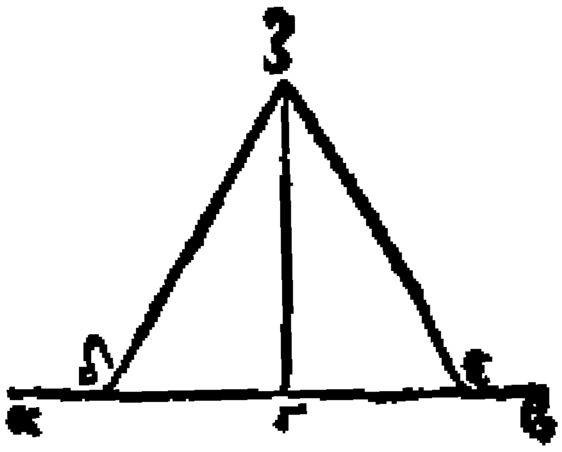
αβ triangulus æquilaterus αβγ: & secetur angulus αβγ in duas partes æquales, per lineam rectam γδ. (Explicatio factæ delineationis) Dico quòd recta αβ, secta sit in duas partes æquales in puncto δ. (Demonstratio.) Quoniam recta αγ, est æqualis rectæ γβ, & communis recta γδ: duo igitur latera αγ, γδ duobus lateribus βγ, γδ sunt æqualia alterum alteri, & angulus αγδ, est æqualis angulo βγδ. Ergo basis αδ, est æqualis basi βδ. (Conclusio.) Data igitur linea recta finita, αβ, secta est in duas partes æquales in puncto δ. Id quod faciendum erat.

Propositio vndecima. Problema.

DAtæ lineæ rectę, à dato in ea puncto: ducere lineam rectam ad angulos rectos, id est, rectos facientem angulos.

Explicatio dati.) Sit data linea recta αβ, & datum in ea punctum γ. (Explicatio quæsiti.) Ducenda est à puncto γ, linea recta re-

ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.)



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αγ, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ γδ ἴση, ἡ γε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ζδε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δγ, τῇ γε, κοινὴ δὲ ἡ ζγ, δύο δὴ αἱ δγ, γζ, δυσὶ ταῖς εγ, γζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγζ, ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα, τῶν ὑπὸ δγζ, ζγε. (Συμπέρασμα.) Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται, ἡ ζγ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

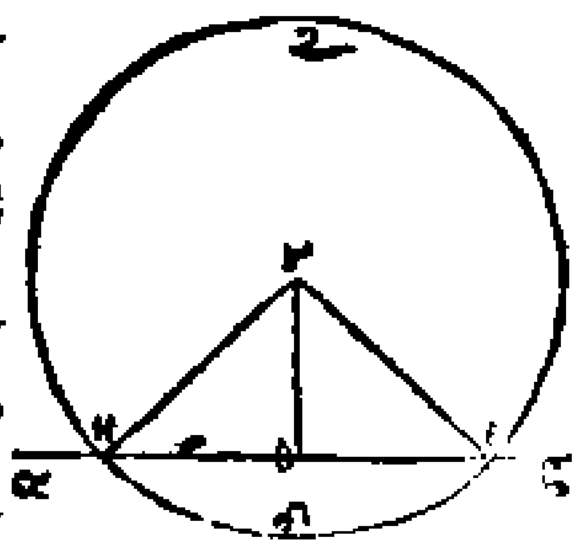
Πρότασ

ctos faciens angulos cum linea $\alpha\beta$. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\gamma$, quoduis punctum δ: & fiat lineæ $\gamma\delta$, æqualis linea $\gamma\epsilon$. Et statuatur super linea $\delta\epsilon$, triangulus æquilaterus $\delta\zeta\epsilon$. deniq; ducatur recta $\zeta\gamma$. (Explicatio factæ delineationis.) Dico, quod datæ lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato in ea pũcto γ, ad angulos rectos ducta sit recta linea $\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\delta\gamma$, est æqualis rectæ $\gamma\epsilon$, communis verò recta $\zeta\gamma$. Duo igitur latera $\delta\gamma$, $\delta\zeta$, duobus lateribus $\epsilon\gamma$, $\gamma\zeta$ sunt æqualia alterum alteri, & basis $\delta\zeta$, æqualis est basi $\epsilon\zeta$. ergo angulus $\delta\gamma\zeta$, æqualis est angulo $\epsilon\gamma\zeta$, (& sunt ἐφεξῆς, id est, vicini) Quando verò recta super rectam stans, angulos vicinos æquales fecerit inter se: vterq; æqualium angulorum est rectus. Ergo vterq; angulorum $\delta\gamma\zeta$, $\zeta\gamma\epsilon$, est rectus. (Conclusio.) Datæ igitur lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato, quod in ea est puncto γ: ad angulos rectos ducta est recta $\zeta\gamma$. Id quod faciendum erat.

Πρότασις ιβ. πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ γ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ εὐθείας, τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ, κύκλος γεγράφθω ὁ εζη, καὶ τετμήσθω ἡ εη δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γη, γθ, γε. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηθ τῇ θε, κοινὴ δὲ



ἡ θγ,

Propositio duodecima. Problema.

AD lineam rectam datã infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

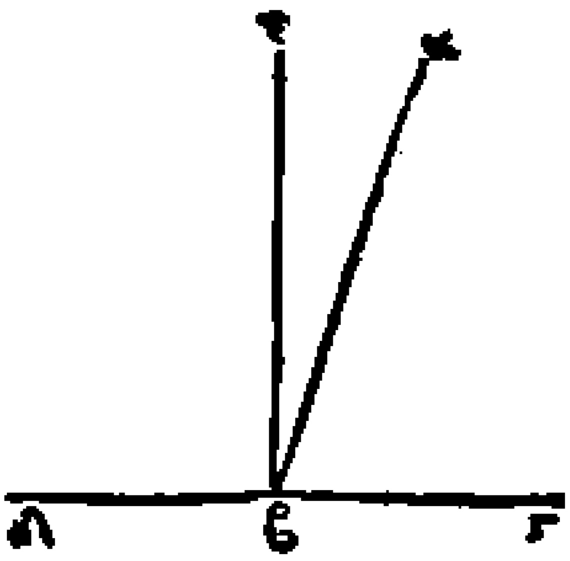
Explicatio dati.) Sit data linea recta infinita αβ, & punctum quod in ea non est datum γ. (Explicatio quæsiti.) A puncto dato γ, ad datam lineam rectam infinitam αβ: ducenda est linea recta perpendicularis. Delineatio.) Sumatur ex altera parte lineæ αβ, punctum quoduis δ: & centro γ, interuallo γδ, describatur circulus εζη, secans lineam αβ, in punctis ε, & η. Postea dissecetur linea recta εη, in duas partes æquales in puncto θ. & ducantur lineæ γη, γθ, γε. (Explicatio iã factæ delineationis.) Dico quod ad lineam rectam datã infinitam αβ, à puncto γ dato, quod in ea non est, perpendicularis ducta sit recta linea γθ. (Demonstratio.) Quoniam recta ηθ, æqualis est rectæ θε: & communis

recta

ἡ θγ, δύο δὴ αἱ ηθ, θγ, δύσι ταῖς εθ, θγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ γη, βάσει τῇ γε, ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ γθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθγ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν. (Συμπέρασμα.) Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον, τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ. θεώρημα.

ΩΣ ἂν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



Ἔκθεσις.) Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν γδ σταθεῖσα, γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ γβα, αβδ. (Διορισμός) Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, γω-

νίαι

recta $\vartheta\gamma$. ergo duo latera $\eta\vartheta$, $\vartheta\gamma$, duobus lateribus $\epsilon\vartheta$, $\vartheta\gamma$, sunt æqualia alterum alteri: & basis $\gamma\eta$, basi $\gamma\epsilon$, est æqualis. quare angulus $\gamma\theta\eta$, angulo $\epsilon\theta\gamma$ est æqualis: & sunt vicini. Quando verò recta super recta stans, angulos vicinos æquales inter se fecerit: vterq; æqualium illorũ angulorum est rectus, & recta super recta stans, perpendicularis ad eam dicitur. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam infinitam $\alpha\beta$, à puncto γ dato quod in ea non est: perpendicularis ducta est recta $\gamma\theta$. Id quod faciendum erat.

Propositio decima tertia: Theorema.

VT vt recta super recta stans, angulos fecerit: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales eos facier.

(Explicatio dati.) Recta quædam $\alpha\beta$, stans super recta $\gamma\delta$, faciat angulos $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod anguli $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$, vel νίαι ἢ δύο ὀρθαὶ εἰσὶν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (Κατασκευή.) Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γβα, τῇ ὑπὸ αβδ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ γδ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βε. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γβε δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ εβδ. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, εβδ, εἰσιν ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δβα, αβγ τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ, καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ ἄρα, ταῖς ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (Συμπέρασμα.) Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

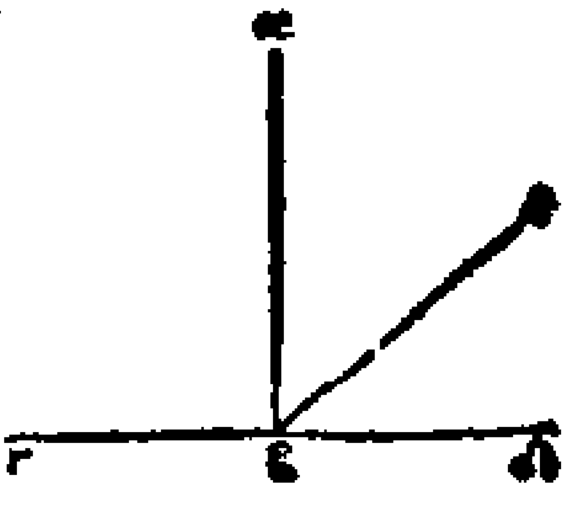
Πρό-

vel sint duo recti, vel duobus rectis æquales. (Delineatio cũ hypothesi.) Si igitur angulus $\gamma\beta\alpha$, æqualis est angulo $\alpha\beta\delta$: tum sunt duo recti. quòd si verò non, tum ducatur à puncto β, rectæ lineæ $\gamma\delta$, ad angulos rectos linea recta $\beta\epsilon$. (Demonstratio.) Anguli igitur $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$ sunt duo recti. & cùm angulus $\gamma\beta\epsilon$, sit æqualis duobus angulis $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\epsilon$. Communis addatur angulus $\epsilon\beta\delta$. quare duo anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$, tribus angulis $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$, sunt æquales. Rursus quoniam angulus $\delta\beta\alpha$ æqualis est duobus angulis $\delta\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\alpha$, communis addatur angul⁹ $\alpha\beta\gamma$. anguli igitur $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, tribus angulis $\delta\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ sunt æquales. Verum demonstratum est, angulos $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$ tribus ijsdem angulis esse æquales. Quæ verò eidẽ sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia. ergo anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$, sunt duobus angulis $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, æquales. sed anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$, sunt duo recti: ergo $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, anguli, sunt æquales duobus rectis. (Cõclusio.) Vt ut igitur recta super recta stans, fecerit angulos: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet. Id quod erat demonstrandum.

Πρότασις ιδ. θεώρημα.

ΕΑν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Ἔκθεσις.) Πρὸς γὰρ τίνι εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, δύο εὐθεῖαι αἱ βγ, βδ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ γβ ἡ βδ. Κατασκευή.) Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ βγ ἐπ' εὐθείας ἡ βδ, ἔστω τῇ γβ ἐπ' εὐθείας ἡ βε.



(Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, ἐπ' εὐθείαν τὴν γβε ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, αβε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβε, ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ ἴσαι εἰσὶ κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβγ, λοι-

πὴ

Propositio decimaquarta. Theorema.

SI ad lineam quandam rectã, & punctum in ea datum, duæ rectę non in easdem partes sitæ, angulos (ἐφεξῆς) vicinos, duobus rectis angulis æquales fecerint; duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας, altera alteri erunt.

Explicatio dati.) Nam ad lineam quandã rectam αϐ: & ad punctum in ea datum ϐ: duæ rectæ lineæ βγ, ϐδ, non in easdem partes sitæ faciant angulos ἐφεξῆς (vicinos) αϐγ, αϐδ, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd rectæ γβ, sit ἐπ' εὐθείας recta βδ. (Delineatio.) Si enim ϐγ non est ἐπ' εὐθείας recta βδ: sit recta βε, rectæ γβ, ἐπ' εὐθείας. (Demonstratio.) Quoniam recta αβ, constituta est super recta γβε: anguli igitur αβγ, αβε, sunt æquales duobus rectis. Verum anguli αβγ, αβδ etiam sunt æquales duobus rectis. anguli igitur γβα, αβε, angulis γβα, αβδ sunt æquales. Communis auferatur angulus αβγ. reliquus igi-

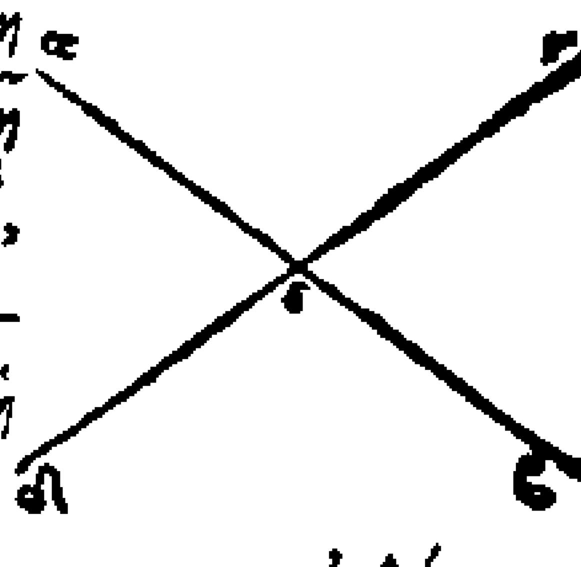
E tur

τῇ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβδ ἐ-
στὶν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-
νατον, οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βε, τῇ βγ.
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν
τῆς βδ. (Συμπέρασμα.) Ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐ-
στὶν ἡ γβ, τῇ βδ. Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ
τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ
αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυ-
σὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε. θεώρημα.

ΕΑν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσι.

Ἔκθεσις.) Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, τεμνέσθωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αεγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεβ, ἡ δὲ ὑπὸ γεβ, τῇ ὑπὸ αεδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ αε, ἐπ' εὐθείαν τὴν γδ



ἐφέστηκε

tur angulus $\alpha\beta\epsilon$, reliquo angulo $\alpha\beta\delta$ est æqualis, minor maiori, quod est impossibile. Quare recta $\beta\epsilon$, non est ἐπ' εὐθείας rectæ $\beta\gamma$. Similiter etiam demonstrabimus, quòd nulla alia præter rectam $\beta\delta$, sit ἐπ' εὐθείας rectæ $\gamma\beta$. (Conclusio.) Ergo recta $\gamma\beta$, est ἐπ' εὐθείας rectæ $\beta\delta$. Si igitur ad lineam quandã rectam, & punctum in ea datum, duæ rectæ non in easdem partes sitæ angulos ἐφεξῆς, duobus rectis angulis fecerint æquales: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας erunt altera alteri. Id quod erat demonstrandum.

Propositio decimaquinta. Theorema.

SI duæ lineæ rectę, sese mutuo secãt: faciẽt angulos ad verticem inter se æquales.

Explicatio dati.) Duæ lineæ rectæ enim $\alpha\beta$, $\gamma\delta$; sese mutuo secent in puncto ϵ. (Explicatio quæsiti) Dico quòd angulus $\alpha\epsilon\gamma$, angulo $\delta\epsilon\beta$ sit æqualis, & angulus $\gamma\epsilon\beta$, angulo $\alpha\epsilon\delta$ etiam æqualis. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\epsilon$, super recta $\gamma\delta$, constituta est, ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ γεα, αεδ, αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ δε, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ αεδ, δεβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αεδ, δεβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γεα, αεδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ, ταῖς ὑπὸ αεδ, δεβ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ αεδ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ γεβ, δεα, ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Εὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Εκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

Πρότασις ις. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

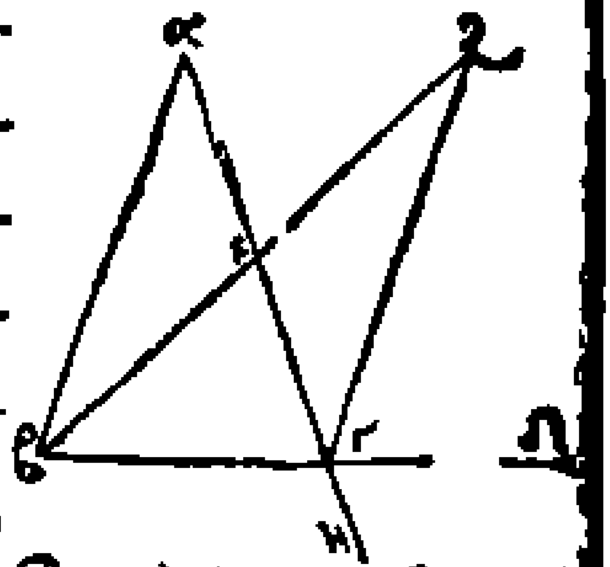
Εκθε-

[...]r facit angulos γεα, αεδ. anguli igitur γεα, [α]εδ, duobus rectis sunt æquales. Item quoni[a]m recta δε, super recta αβ est constituta, fa[c]iatq; angulos αεδ, δεβ, anguli igitur αεδ, [δ]εβ, sunt æquales duobus rectis. Verum an[g]uli γεα, αεδ duobus rectis sunt æquales. [Q]uare duo anguli γεα, αεδ, sunt æquales du[o]bus angulis αεδ, δεβ. Communis auferatur [a]ngulus αεδ. reliquus igitur angulus γεα, [r]eliquo angulo βεδ est æqualis. Simili de[m]onstratione probabimus angulum γεβ, an[g]ulo δεα esse æqualem. (Conclusio.) Si igitur duæ rectæ sese mutuò secent: facient angulos [a]d verticem inter se æquales. Id quod erat demonstrandum.

Corolarium. Ex hoc est manifestum, quòd [q]uæcunq; lineæ rectæ sese mutuò secant, faci[u]nt angulos ad punctum sectionis quatuor [r]ectis æquales.

Propositio decimasexta. Theorema.

Omnis trianguli, vno ex lateribus pro[-]tracto: angulus extraneus, vtroq; eorũ, qui intra triangulum sunt, quibus ipse op[-]ponitur, est maior.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ γβα, βαγ γωνιῶν. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. καὶ διήχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ η. (Ἀπόδειξις) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εγ. ἡ δὲ βε, τῇ εζ. δύο δὴ αἱ αε, εβ, δυσὶ ταῖς γε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ ἴση ἐστίν. κατὰ κορυφὴν γάρ. βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζεγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ εγζ. μείζων δ' ἐστὶν ἡ ὑπὸ εγδ, τῆς ὑπὸ εγζ. μείζων

ἄρα

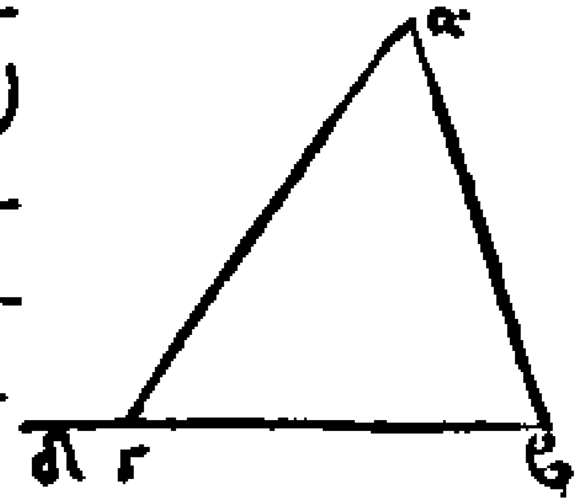
Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\delta$, est maior angulo $\gamma\beta\alpha$, interno sibi opposito: & maior angulo $\beta\alpha\gamma$, interno sibi opposito. (Delineatio.) Dissecetur latus $\alpha\gamma$, in duas partes æquales in puncto ϵ. deinde ducatur linea $\beta\epsilon$, & producatur ad punctum ζ. Fiat etiam lineæ $\beta\epsilon$, æqualis linea $\epsilon\zeta$. denique ducatur linea $\zeta\gamma$, & extendatur recta $\alpha\gamma$, ad punctum vsque η. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\epsilon$, æqualis est rectæ $\epsilon\gamma$: & recta $\beta\epsilon$, æqualis rectæ $\epsilon\zeta$. duo igitur latera $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ duobus lateribus $\gamma\epsilon$, $\epsilon\zeta$ sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\alpha\epsilon\beta$, æqualis est angulo $\zeta\epsilon\gamma$. quia sunt anguli ad verticem. Basis igitur $\alpha\beta$, basi $\zeta\gamma$ erit æqualis, & triangulus $\alpha\beta\epsilon$, æqualis erit triangulo $\zeta\epsilon\gamma$: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. itaque angulus $\beta\alpha\epsilon$, æqualis est angulo $\epsilon\gamma\zeta$. Verum angulus $\epsilon\gamma\delta$, maior est angulo $\epsilon\gamma\zeta$. quare angulus $\alpha\gamma\delta$, angulo $\beta\alpha\epsilon$

ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ τῆς ὑπὸ βαε. ὁμοίως δὲ τῆς βγ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ βγη. τουτέστιν ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



(Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ αβγ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ, αγδ, αγβ,

τῶν

etiam est maior. Similiter demonstrabitur quando recta $\beta\gamma$, dissecta fuerit in duas partes æquales: quod angulus $\beta\gamma\eta$, hoc est, angulus $\alpha\gamma\delta$ maior sit angulo $\alpha\beta\gamma$. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli vno ex lateribus protracto: extraneus angulus, vtroque eorum, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur est maior. Id quod erat demonstrandũ.

Propositio decimaseptima. Theorema.

OMnis trianguli, quiuis duo anguli: duobus rectis angulis sunt minores.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti) Dico quod trianguli $\alpha\beta\gamma$, duo anguli sint minores duobus rectis, quouis modo sumpti. (Delineatio.) Producatur linea $\beta\gamma$, ad punctum δ. (Demonstratio.) Quoniam trianguli $\alpha\beta\gamma$, angulus extraneus $\alpha\gamma\delta$: maior est angulo $\alpha\beta\gamma$, interno sibi opposito. Communis addatur angulus $\alpha\gamma\beta$. anguli igitur $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, sunt maio-

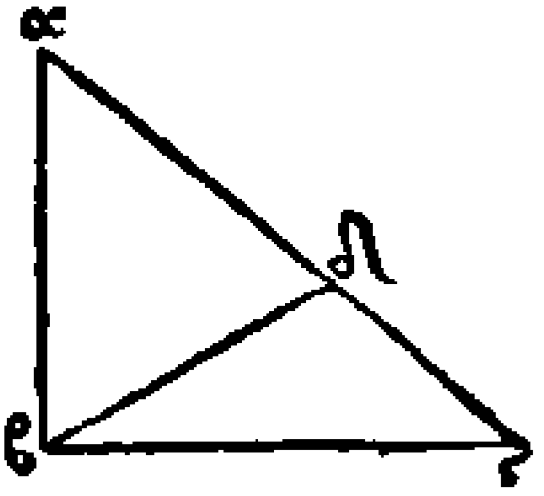
 res

τῶν ὑπὸ αβγ, βγα μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, αγβ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν αγ πλευρὰν, τῆς αβ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βγα. (Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ



βδ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ βδγ ἐκτὸς ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ δγβ. ἴση δὲ ἡ ὑ-

πὸ

res angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$. Verum anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, sunt duo recti. ergo anguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\alpha$, sunt minores duobus rectis. Simili ratione demonstrabimus angulos $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\beta$, duobus rectis esse minores. Item & angulos $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\beta\gamma$ duobus rectis esse minores. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli quiuis duo anguli, minores sunt duobus angulis rectis. Id quod erat demonstrandum.

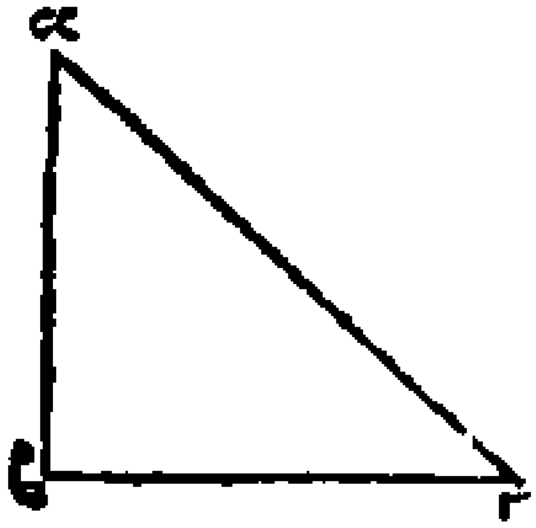
Propositio decima octaua. Theorema.

VT quoduis latus trianguli est maius: ita maiorem subtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, habens latus $\alpha\gamma$, maius latere $\alpha\beta$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quòd angulus $\alpha\beta\gamma$, maior sit angulo $\alpha\gamma\beta$. (*Delineatio.*) Cum enim latus $\alpha\gamma$ sit maius latere $\alpha\beta$: fiat linea $\alpha\beta$, æqualis recta $\alpha\delta$: & ducatur recta $\beta\delta$. (*Demonstratio.*) Quoniam trianguli $\beta\delta\gamma$, angulus $\alpha\delta\beta$ externus, maior est angulo $\delta\gamma\beta$ interno sibi oppoπὸ αδβ, τῇ ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, τῆς ὑπὸ αγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ αγβ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῆς ὑπὸ βγα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αγ, πλευρᾶς τῆς αβ μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μὴ ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ αγ τῇ αβ. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς

αβ,

oppoſito: & angulus αδβ, ſit æqualis angulo αβδ: cum latus αβ, lateri αδ ſit æquale. idcirco angulus αβδ, maior eſt angulo αγβ. Ergo angulus αβγ, multo eſt maior angulo αγβ. (Concluſio.) Vt quoduis igitur latus trianguli eſt maius: ita maiorem ſubtendit angulum. id quod erat demonſtrandum.

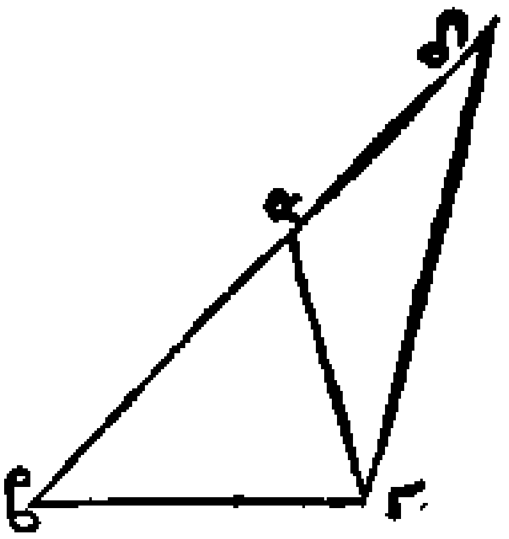
Propoſitio decima nona. Theorema.

VT Triangulus aliquis, angulum quemuis habuerit maiorem: ita etiam maiorem habebit eam lineam rectam, quæ illum ſubtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ, habens angulum αβγ, maiorem angulo αγβ. Explicatio quæſiti.) Dico quod trianguli αβγ, latus αγ, maius ſit latere αβ. (Demonſtratio.) Si enim non fuerit maius, tum vel erit ei æquale, vel erit eo minor. ſed recta αγ, nõ eſt æqualis rectæ αβ. nam & angulus αβγ, angulo αγβ eſſet æqualis. id quod tamen nõ eſt. quare neq; latus αγ, lateri αβ, erit æquale: neq; etiam latus αγ, poterit eſſe minus latere αβ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ. οὐκ ἐστὶ δὲ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶ, μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ αγ, τῆς αβ. (Συμπέρασμα) Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ αβγ. (Διορισμός.) λέγω ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν βα, αγ, τῆς βγ, αἱ δὲ αβ, βγ, τῆς αγ, αἱ δὲ, βγ, γα, τῆς αβ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ δα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αγ. ἴση ἐστὶν καὶ γω-

νία

tere $\alpha\beta$. quia etiam angulus $\alpha\beta\gamma$, minor esset angulo $\alpha\gamma\beta$: Cum tamen non sit. Quare neq latus $\alpha\gamma$, minus est latere $\alpha\beta$. antea autē demonstratum est, quod ei non sit æquale. Erit ergo $\alpha\gamma$ latus, maius latere $\alpha\beta$. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit quicunq sumatur. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima, Theorema.

OMnis trianguli, quæuis duo latera sunt maiora reliquo.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, *Explicatio quæsiti.*) Dico quod triāguli $\alpha\beta\gamma$ quæuis duo latera, sint maiora reliquo. latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, maiora latere $\beta\gamma$: Item latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ maiora latere $\alpha\gamma$: deniq latera $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, maiora latere $\alpha\beta$. (Delineatio.) Producatur linea $\beta\alpha$, ad punctum δ: & fiat linea $\alpha\gamma$, æqualis lineæ $\alpha\delta$: deniq ducatur linea $\gamma\delta$. (Demōstratio.) Quoniā latus $\delta\alpha$, æquale est lateri $\alpha\gamma$.

etiam

νία ἡ ὑπὸ αδγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ γωνία, τῆς ὑπὸ αγδ μείζων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον ἐστὶ τὸ δβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῆς ὑπὸ αδγ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἡ δβ ἄρα, τῆς βγ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ δβ, ταῖς αβ, αγ. μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν αβ, βγ, τῆς γα μείζονες εἰσίν. αἱ δὲ βγ, γα, τῆς αβ. (Συμπέρασμα) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραί, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

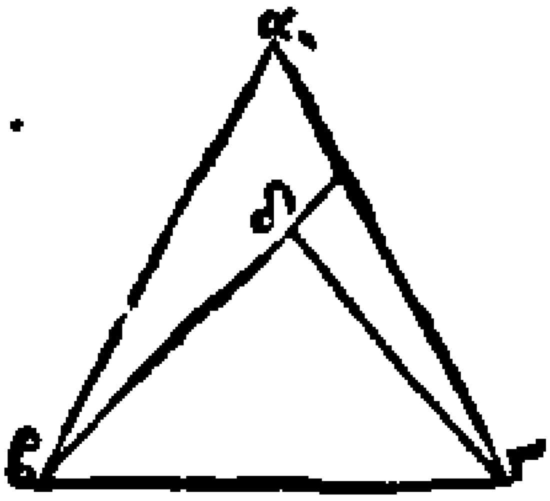
Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βγ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν β, γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθωσαν αἱ βδ, *etiã angulus αδγ, est æqualis angulo αγδ. Verum angulus βγδ, maior est angulo αγδ. quare & angulus βγδ, angulo αδγ maior erit. & quia triangulus δγβ, angulũ βγδ maiorẽ habet angulo αγδ: atq; maius latus subtendat angulũ maiorem: idcirco & latus δβ, maius est latere βγ. Sed δβ latus, æquale est αβ, αγ lateribus. quare βα, αγ, duo latera, sunt maiora latere βγ. Similiter demonstrabimus, quòd latera αβ, βγ, sint maiora latere αγ, & βγ, γα latera sint maiora latere αβ. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli, quæuis duo latera sunt maiora reliquo. id quod erat demonstrandum.*

Propositio vigesima prima. Theorema.

SI à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis duæ rectę lineę intra triangulum ad punctum idem statuantur: erunt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent.

Explicatio dati.) Sup latere enim βγ triãguli αβγ: à finib. β, et γ duæ lineæ rectæ βδ.

δγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι αἱ βδ, δγ, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν βα, αγ, ἐλάσσονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε. (Ἀπόδειξις.)



Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. τοῦ αβε ἄρα τριγώνου, αἱ δύο πλευραὶ αἱ αβ, αε, τῆς βε μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ. αἱ ἄρα βα, αγ, τῶν βε, εγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ τοῦ γεδ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ γε, εδ, τῆς γδ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ, αἱ γε, εβ ἄρα τῶν γδ, δβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν βε, εγ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, πολλῷ ἄρα αἱ βα αγ, τῶν βδ, δγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. τοῦ γδε ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γεδ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ

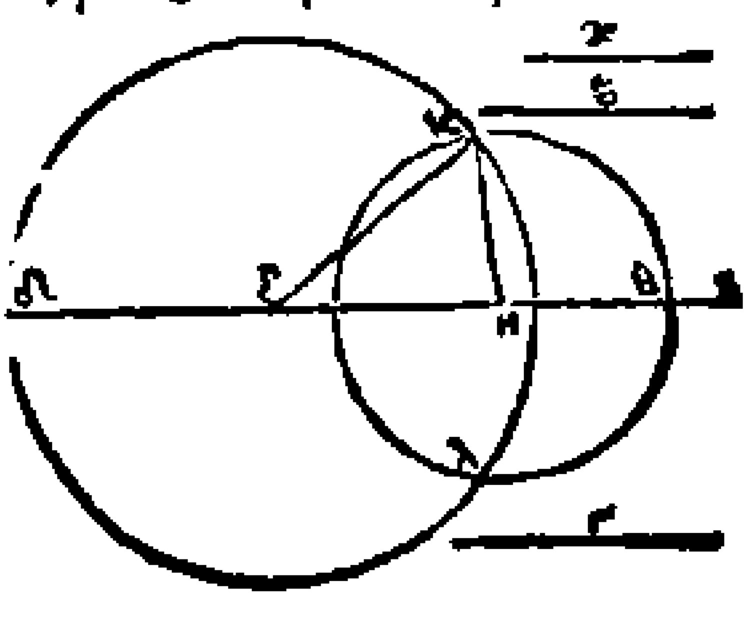
αβε

δγ statuentur intra triangulũ.) Explicatio quæsiti.) Dico quod duæ rectæ βδ, δγ, minores quidem sint reliquis duobus trianguli lateribus βα, αγ: verum angulum βδγ, maiorem angulo βαγ, contineant. (Delineatio.) Producatur enim linea βδ, ad punctum usq; ε. (Demonstratio.) Quoniam omnis trianguli duo latera maiora sunt reliquo: idcirco trianguli αβε, duo latera αβ, αε sunt maiora latere βε. Cõmune addatur latus εγ. latera igitur βα, αγ, maiora sunt lateribus βε, εγ. Item quia trianguli γεδ, duo latera γε, εδ maiora sunt latere γδ. Commune addatur latus δβ. quare latera γε, εβ maiora sunt lateribus γδ, δβ. Verum latera βα, αγ, demonstrata sunt maiora lateribus βε, εγ, ergo βα, αγ latera longe erunt maiora laterib⁹ βδ, δγ. Rursus quoniam omnis trianguli angulus extraneus, angulo intra triangulum sibi opposito est maior: idcirco trianguli γδε, angulus βδγ extraneus, angulo γεδ interno sibi opposito est maior. Per eadem demonstrabitur.

ἄβε τριγώνου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ γεβ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ γεβ, μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ βδγ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἳ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.



Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α, β, γ, ὧν αἱ δύο, τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μετα-

bitur quòd trianguli $\alpha\beta\varepsilon$, angulus $\gamma\varepsilon\beta$, maior sit angulo $\beta\alpha\gamma$. verùm angulo $\gamma\varepsilon\beta$ maior est demonstratus angulus $\beta\delta\gamma$. Ergo angulus $\beta\delta\gamma$, multò est maior angulo $\beta\alpha\gamma$. (Conclusio.) Si igitur à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis, duæ rectæ lineæ intra triangulũ, ad punctum idem statuãtur: erunt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent. Id quod erat demonstrandum.

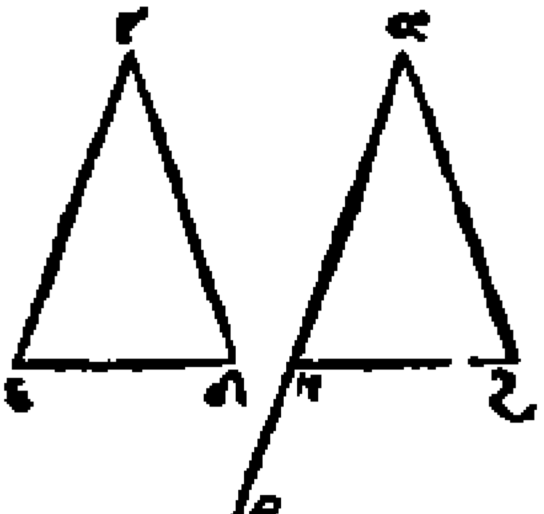
Propositio vigesima secunda. Problema.

EX tribus lineis rectis, quæ sunt æquales tribus rectis lineis datis: triangulũ cõstituere. Oportet uerò quasuis duas reliqua esse maiores: propterea quod in omni triãgulo quęuis duo latera maiora sunt reliquo.

Explicatio dati.) Sint tres lineæ rectæ datæ α, β, γ: & sint quæuis duæ maiores quàm λαμβανόμεναι, αἱ μὲν α, β, τῆς γ, αἱ δὲ α, γ, τῆς β, καὶ ἔτι αἱ β, γ, τῆς α. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση, ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἴση ἡ ηθ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δκλ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ, κη. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνέστηκε τὸ κζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζδ, τῇ ζκ, ἀλλὰ ἡ ζδ τῇ α ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ α ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ἐστὶν τοῦ λκθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ηκ. ἀλλὰ ἡ ηθ, τῇ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κη ἄρα, τῇ reliqua: scilicet α & β maiores quàm γ, & α, atque γ maiores quàm β: denique β & γ, maiores quàm α. (Explicatio quæsiti.) Oportet igitur ex tribus lineis rectis, quæ datis tribus α, β, γ, sunt æquales triangulum componere. (Delineatio.) Sumatur recta aliqua linea δε: finita quidem ad punctum δ: infinita verò ad punctum ε. deinde fiat lineæ rectæ α, æqualis linea recta δζ. Itẽ rectæ β, æqualis recta ζη. præterea rectæ γ, æqualis recta ηθ. Ad hæc centro ζ, interuallo ζδ, describatur circulus δκλ. centro etiam η, interuallo ηθ, describatur circulus κλθ: secans circulum δηλ, in puncto κ. Denique ducãtur lineæ rectæ ζκ, κη. (Delineationis factæ explicatio.) Dico quòd ex lineis rectis tribus, quæ sunt æquales trib⁹ rectis datis, compositus sit triangulus κζη. (Demonstratio.) Quoniam punctum ζ, centrum est circuli δκλ. idcirco recta ζδ, æqualis est rectæ ζκ: verũ recta ζδ est æqualis rectæ α: itaque & κζ recta, æqualis est rectæ α. Item quoniam punctum η, est centrum circuli κλθ: idcirco recta ηθ, est æqualis rectæ ηκ. verũ ηθ γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζη, τῇ β ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ κζ, ζη, ηκ τρισὶ ταῖς α, β, γ, ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν κζ, ζη, ηκ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνίσταται, τὸ κζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ. πρόβλημα.

ΠΡὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ δγε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, τῇ ὑπὸ δγε, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν γδ, γε, τυχόντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύ-

æqualis est γ rectæ. ergo & ηκ recta, æqualis est rectæ γ. Verum ζη, etiam est æqualis rectæ β. Tres igitur rectæ κζ, ζη, ηκ, tribus rectis α, β, γ, sunt æquales. (Conclusio.) Ex tribus igitur rectis κζ, ζη, ηκ, quæ sunt æquales tribus datis α, β, γ, rectis: triangulus est factus κζη. Quod faciendum erat.

Propositio vigesima tertia. Problema.

AD datam lineam rectam, & datū in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum statuere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta αβ: sit datum in ea punctum α. sit angulus rectilineus datus δγε. (Explicatio quæsiti.) Ad lineam rectam datam αβ, & punctum in ea datum α, statuendus est angulus rectilineus, æqualis angulo δγε rectilineo dato. (Delineatio.) Sumantur in lineis rectis γδ, γε, puncta quæuis δ, ε. Ducatur etiam linea ἐπεζεύχθω ἡ δε. καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς γδ, δε, γε τρίγωνον συνεστάτω τὸ αζη, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ, τῇ αζ, τὴν δὲ γε, τῇ αη, καὶ ἔτι τὴν δε, τῇ ζη. (Απόδειξις.) Επεὶ οὖν αἱ δύο αἱ δγ, γε, δύσι ταῖς ζα, αη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δε, βάσει τῇ ζη ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζαη ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα) Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ δγε, ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται, ἡ ὑπὸ ζαη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Εκθεσις.) Εστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ

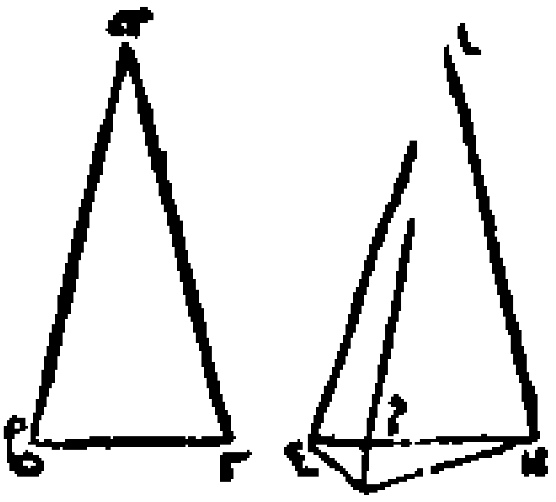
πλευ-

recta $\delta\epsilon$. Postea ex talibus lineis rectis, quæ sunt æquales tribus rectis $\gamma\delta$, $\delta\epsilon$, $\gamma\epsilon$, componatur triangulus $\alpha\zeta\eta$: sic vt lineæ $\gamma\delta$, sit æqualis linea $\alpha\zeta$: & lineæ $\gamma\epsilon$ linea $\alpha\eta$, item lineæ $\delta\epsilon$ æqualis linea $\zeta\eta$. (Demonstratio.) Quoniam duo latera $\delta\gamma$, $\gamma\epsilon$, duobus laterib. $\zeta\alpha$, $\alpha\eta$, sunt æqualia alterum alteri, & basis $\delta\epsilon$, æqualis sit basi $\zeta\eta$. Erit igitur angulus $\delta\gamma\epsilon$, æqualis angulo $\zeta\alpha\eta$. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam $\alpha\beta$, & ad punctum in ea datum α, dato angulo rectilineo $\delta\gamma\epsilon$, constitutus est angulus rectilineus $\zeta\alpha\eta$. Id quod erat faciendum.

Propositio vigesimaquarta. Theorema.

SI fuerint trianguli vnius, duo latera æqualia duobus lateribus alterius trianguli, alterum alteri: sed angulus vnius maior angulo alterius, quē æquales rectæ lineę comprehendunt: etiam basis basi maior erit.

Explicatio dati.) Sint duo triãguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, quorum duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, duobus lateribus πλευραῖς, ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, μείζων ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ δε εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ δ, τῇ ὑπὸ βαγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ εδη, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ, ἴση ἡ δη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ ηε, ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε, ἡ δὲ αγ, τῇ δη, δύο δὴ αἱ βα, αγ, δυσὶ ταῖς εδ, δη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδη, ἴση ἐστὶ, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εη, ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δη, τῇ δζ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δζη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη, τῆς ὑπὸ εηζ. πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, τῆς ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι, τὸ εζη, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ



εζη

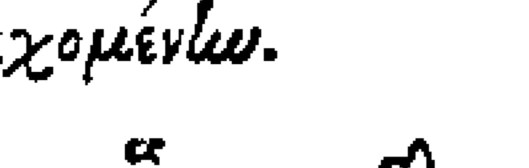
ribus $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$ sint æqualia, alterum alteri latus $\alpha\beta$, lateri $\delta\epsilon$, & latus $\alpha\gamma$, lateri $\delta\zeta$: sed angulus $\beta\alpha\gamma$ sit maior angulo $\epsilon\delta\zeta$.

(Explicatio quæsiti.) Dico quod basis $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ sit maior. (Delineatio.) Quoniam angulus $\beta\alpha\gamma$ maior est angulo $\epsilon\delta\zeta$. Statuatur ad lineam rectam $\epsilon\delta$, & ad punctum in ea δ, angulus $\epsilon\delta\eta$ æqualis angulo $\beta\alpha\gamma$: & fiat alterutri lineraum $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ æqualis linea recta $\delta\eta$. & ducantur lineæ rectæ $\eta\epsilon$, $\zeta\eta$.

(Demonstratio.) Quoniam latus $\alpha\beta$, æquale est lateri $\delta\epsilon$, & latus $\alpha\gamma$ æquale est lateri $\delta\eta$: duo igitur latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, duobus lateribus $\epsilon\delta$, $\delta\eta$ sunt æqualia, alterum alteri, & angulus $\beta\alpha\gamma$, æqualis est angulo $\epsilon\delta\eta$. Ergo basis $\beta\gamma$, basi $\epsilon\eta$ est æqualis. Item quoniam latus $\delta\eta$, est æquale lateri $\delta\zeta$: erit etiã angulus $\delta\zeta\eta$, æqualis angulo $\delta\eta\zeta$. ergo angulus $\delta\zeta\eta$ maior est angulo $\epsilon\eta\zeta$. quare angulus $\epsilon\zeta\eta$, longè maior est angulo $\epsilon\eta\zeta$. Cum etiam triangulus $\epsilon\zeta\eta$, habeat angulum εζη γωνίαν τῆς ὑπὸ εηζ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εη, τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ εη, τῇ βγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ βγ, τῆς εζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ,

τῇ δε

gulum εζη, maiorem angulo εηζ: ac maiorem angulum maius latus subtendat. idcirco latus εη, maius est latere εζ. verum latus εη, æquale est lateri βγ. ergo & βγ latus maius est latere εζ. (Conclusio.) Si ergo duo fuerint trianguli, habentes duo latera, duobus lateribus æqualia, alterum alteri: angulum verò angulo maiorem, qui æqualibus illis lateribus continetur: etiam basin basi maiorem habebunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesimaquinta. Theorema.

SI trianguli vnius, duo latera fuerint æqualia duobus lateribus trianguli alterius, sed basis vnius fuerit maior basi alterius: erit etiam angulus vnius maior angulo alterius, quem æquales illæ rectæ lineæ comprehendunt.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ: quorũ duo latera αβ, αγ, sint æqualia duobus laterib. δε, δζ, alterũ alteri, latus αβ, æquale τῇ δὲ, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, βάσις δὲ ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση γὰρ ἦ καὶ ἡ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλ' οὐ δὲ μὴν ἐλάσσων. ἐλάσσων γὰρ ἦ καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ. θεώρημα.

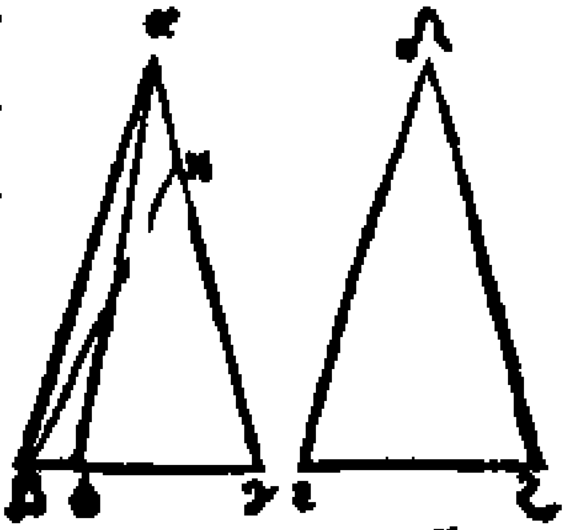
Ἐὰν

æquale lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$. ſed baſis $\beta\gamma$, ſit maior baſi $\varepsilon\zeta$. (Explicatio quæſiti.) Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$, maior ſit angulo $\varepsilon\delta\zeta$. (Demonſtratio.) Quod ſi enim nõ fuerit maior, aut erit ei æqualis, aut eo minor. ſed angulus $\beta\alpha\gamma$, non eſt æqualis angulo $\varepsilon\delta\zeta$. nam & baſis $\beta\gamma$, etiam eſſet æqualis baſi $\varepsilon\zeta$: Verùm non eſt ei æqualis. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, eſt æqualis angulo $\varepsilon\delta\zeta$: ſic etiam non eſt eo minor: ſiquidem & baſis $\beta\gamma$, baſi $\varepsilon\zeta$ minor eſſet: quod tamen nõ eſt. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\varepsilon\delta\zeta$ minor eſt. demonſtratum verò antea fuit, quòd ei non ſit æqualis. Erit igitur angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\varepsilon\delta\zeta$ maior. (Concluſio.) Si ergo fuerint trianguli vnius duo latera æqualia duobus lateribus triãguli alterius, alterum alteri, ſed baſis vnius maior baſi alterius: erit etiam angulus vnius, maior angulo alterius, quem æquales rectæ lineæ comprehendunt. Id quod erat demonſtrandum.

Propoſitio vigeſima ſexta. Theorema.

G Quo-

ΕΑν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις πρώτη.) Ἐστῶσαν δύο τρίγωνα, τὰ ᾱβγ δεζ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ᾱβγ, βγᾱ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεζ, εζδ, ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν μὲν ὑπὸ ᾱβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ βγᾱ, τῇ ὑπὸ εζδ. ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν βγ, τῇ εζ. (Διορισμὸς πρῶτος.) Λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ᾱβ, τῇ δε, τὴν δὲ ᾱγ, τῇ δζ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοι-

πῇ

QVorum triangulorum duo anguli vnius fuerint æquales duobus angulis alterius;alter alteri;& latus vnum, æquale vni: siue illud appositũ sit æqualibus illis angulis;siue subtendat vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus reliquo angulo erit æqualis.

Prima explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, *quorum duo anguli* $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$ *sint æquales duobus angulis* $\delta\epsilon\zeta$, $\epsilon\zeta\delta$, *alter alteri: angulus* $\alpha\beta\gamma$, *æqualis angulo* $\delta\zeta\epsilon$, *& angulus* $\beta\gamma\alpha$, *angulo* $\epsilon\zeta\delta$: *habeant etiam vnum latus vni lateri æquale; & primo loco latus quod positum est ad æquales illos angulos, latus* $\beta\gamma$, *lateri* $\epsilon\zeta$. *(Prima explicatio quæsiti.) Dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus habebunt æqualia, alterum alteri, latus* $\alpha\beta$, *lateri* $\delta\epsilon$, *& latus* $\alpha\gamma$, *æquale lateri* $\delta\zeta$: *& reliquum angulum reliquo an-*

τῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. (Κατασκευὴ πρώτη.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων, ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ δε ἴση ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. (Απόδειξις πρώτη.) Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βη, τῇ δε, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, δύο δὴ αἱ βη, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστί. καὶ τὸ ηγβ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ηγβ γωνία, τῇ ὑπὸ δζε, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ βγα ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βγη ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. (Συμπέρασμα πρῶτον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ εζ ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, βά-

σις

gulo æqualem, nempe angulum $\beta\alpha\gamma$, æqualem angulo $\epsilon\delta\zeta$. (Prima delineatio.) Si enim $\alpha\beta$, latus, inæquale fuerit lateri $\delta\epsilon$, vnum ex istis sit maius. sit igitur latus $\alpha\beta$, maius, & fiat recta $\delta\epsilon$, æqualis recta $\beta\eta$, & ducatur recta $\eta\gamma$. (Prima demonstratio.) Cum itaq; latus $\beta\eta$, sit æquale lateri $\delta\epsilon$, & latus $\beta\gamma$ æquale lateri $\epsilon\zeta$: duo igitur latera $\beta\eta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\eta\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$ æqualis: ergo basis $\eta\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\gamma\beta$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis, & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendũt angulus $\eta\gamma\beta$, æqualis angulo $\delta\zeta\epsilon$, sed angulus $\delta\zeta\epsilon$, pponitur æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, erit igitur angulus $\beta\gamma\eta$, etiam æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, minor maiori, quod fieri nequit. (Conclusio prima.) Ergo latus $\alpha\beta$, nõ est inæquale lateri $\delta\epsilon$. ergo erit ei æquale, verum latus $\beta\gamma$ etiam est æquale lateri $\epsilon\zeta$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\epsilon\zeta$

σις ἄρα ἡ $\overline{αγ}$, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐςὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{βαγ}$, λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $\overline{εδζ}$ ἴση ἐςίν. (Ἔκθεσις δευτέρα.) Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔςωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ $\overline{αβ}$, τῇ δε. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν $\overline{αγ}$, τῇ δζ, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ $\overline{βαγ}$, λοιπῇ τῇ ὑπὸ $\overline{εδζ}$ ἴση ἐςίν. (Κατασκευὴ δευτέρα.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐςιν ἡ $\overline{βγ}$, τῇ εζ, μία αὐτῶν μείζων ἐςιν. ἔςω εἰ δυνατὸν μείζων, ἡ βγ, καὶ κείσθω τῇ εζ, ἴση ἡ $\overline{γθ}$. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\overline{αθ}$. (Ἀπόδειξις δευτέρα.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐςὶν ἡ μὲν βθ τῇ εζ, ἡ δὲ $\overline{αβ}$ τῇ δε, δύο δὴ αἱ $\overline{αβ}$, βθ, δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ $\overline{αθ}$, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐςὶ, καὶ τὸ $\overline{αβθ}$ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐςὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ $\overline{βθα}$ γωνία, τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ

εζδ,

æqualis. basis itaq; $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ erit æqualis, & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\epsilon\delta\zeta$ æqualis. (Secūda explicatio dati.) Verū iterū statuantur latera æquales angulos subtendētia æqualia, vt $\alpha\beta$ latus, æquale lateri $\delta\epsilon$. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod etiā reliqua latera, reliquis laterib. sint æqualia, latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$, et latus $\beta\gamma$, æquale lateri $\epsilon\zeta$: deniq; reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\epsilon\delta\zeta$ æqualis. (Secūda delineatio.) Si enim latus $\beta\gamma$, nō fuerit æquale lateri $\epsilon\zeta$: sed alterum ex eis fuerit maius. sit latus $\beta\gamma$, si poterit fieri, maius latere $\epsilon\zeta$: & fiat lateri $\epsilon\zeta$, æquale latus $\beta\theta$, & ducatur recta $\alpha\theta$. (Secunda Demonstratio.) Quoniam latus $\beta\theta$, æquale est lateri $\epsilon\zeta$, & latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\epsilon$: duo itaq; latera $\alpha\beta$, $\beta\theta$, duobus laterib. $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri: & angulos comprehendunt æquales: basis igitur $\alpha\theta$, est æqualis basi $\delta\zeta$: & triangulus $\alpha\beta\theta$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus $\beta\delta\alpha$, æqualis εζδ, τῇ ὑπὸ βγα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βθα ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἐστὶν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ αθγ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βθα ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπ' ἐναντίον τῇ ὑπὸ βγα, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν. (Συμπέρασμα δεύτερον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ βγ. τῇ εζ, ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἐστίν. (Συμπέρασμα καθόλου.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

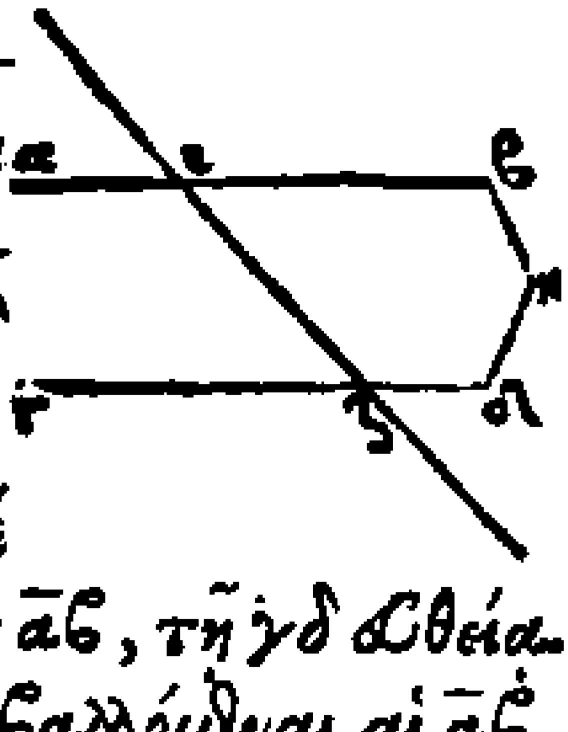
ΤΟ

angulo $\epsilon\zeta\delta$. Verum angulus $\epsilon\zeta\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. ergo angulus $\beta\theta\alpha$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. Trianguli igitur $\alpha\theta\gamma$, angulus $\beta\theta\alpha$ externus, angulo $\beta\gamma\alpha$ interno sibi opposito est æqualis, quòd fieri nequit. Quare latus $\beta\gamma$, non est inæquale lateri $\epsilon\zeta$: erit igitur ei æquale. sed & $\alpha\beta$ latus, est æquale lateri $\delta\epsilon$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sunt æqualia duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$ alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\epsilon\zeta$: & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\epsilon\delta\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Quorum ergo triangulorum duo anguli vnius, fuerint æquales duobus angulis alterius, alter alteri: & latus vnum vni lateri æquale: siue illud appositum sit æqualibus illis angulis: siue subtendat vnum èx æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus, reliquo angulo erit æqualis. Id quod erat demonstrandum.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις κζ. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αεζ, εζδ, ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ αγ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ μέρη κατὰ τὸ η. (Ἀπόδειξις.) Τριγώνου δὴ τοῦ ηεζ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αεζ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ εζη, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αβ, γδ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ βδ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται.

PARS ALTERA HVIVS PRIMI ELEMENTI.

Propositio vigesimaseptima. Theorema.

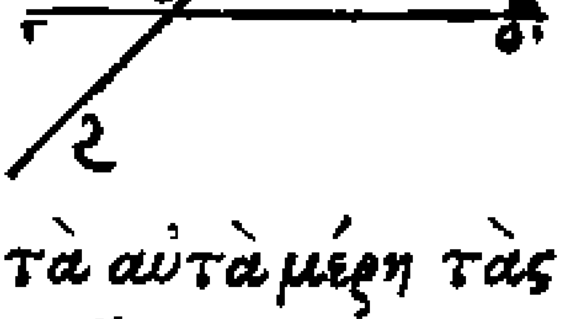
SI in duas lineas rectas, recta incidẽs linea, angulos alternos æquales inter se fecerit: æquedistantes inter se erunt rectæ illæ duæ lineæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas αϐ, γδ incidens linea recta εζ, angulos alternos αεζ, εζδ, æquales inter se faciat. (Explicatio quæsiti.) Dico quod recta αβ, rectæ γδ, æquedistet. (Hypothesis.) Si enim nõ æquedistant, tum protractæ lineæ rectæ αϐ, γδ concurrunt vel ex partibus β & δ: vel ex partibus α, & γ. protrahantur & concurrant ex partibus β, & δ: in puncto η. (Demõstratio.) Trianguli igitur ηεζ, angulus αεζ, externus, angulo εζη interno opposito est maior: verum etiam est ei æqualis. quod fieri non potest. quare rectæ αβ, γδ, si protrahantur, non concurrent ex partibus β, & δ. similiter demonstra-

ται, ὅπου δὲ ἐπὶ τὰ αγ. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Διορισμός.)

monstrabitur, quod neque ex partibus α, & γ, concurrant. rectæ verò, quæ ex neutra parte concurrunt, si protrahantur, sunt inter se æquedistantes. quare recta αϐ, æquedistat rectæ γδ. (Conclusio.) Si igitur in duas lineas rectas, recta incidat linea, ac faciat angulos alternos inter se æquales: rectæ istæ lineæ inter se sunt æquedistantes. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima octaua. Theorema.

SI linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur ex eadem parte fecerit æqualem: vel si duos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistantes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas αϐ, γδ, incidens linea recta εζ: angulum extraneum εηϐ, interno opposito ex eadem parte angulo ηθδ faciat æqualem: & faciat duos angulos internos ex eadem parte ϐηθ, ηθδ, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio μός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηθ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ, λοιπὴ ἄρα, ἡ ὑπὸ αηθ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ. θεώρημα.

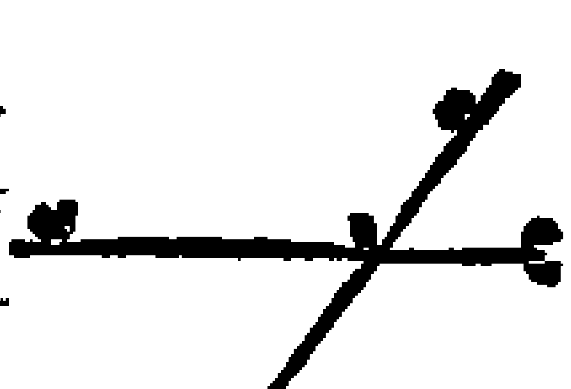
Η εἰς

quæsiti.) Dico quod recta $\alpha\beta$, æquedistet rectæ $\gamma\delta$. (Demonstratio.) Cum enim angulus $\epsilon\eta\beta$, sit æqualis angulo $\eta\theta\delta$: & angulus $\epsilon\eta\beta$, etiam sit æqualis angulo $\alpha\eta\theta$: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, etiam est æqualis angulo $\eta\theta\delta$, & sunt anguli alterni. quare recta $\alpha\beta$, rectæ $\gamma\delta$, est æquedistans. Rursus, quoniam anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt æquales: & duo anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$, etiam duobus rectis æquales: idcirco anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$ sunt duobus angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ æquales: communis auferatur angulus $\beta\eta\theta$. reliquus igitur angulus $\alpha\eta\theta$, reliquo angulo $\eta\theta\delta$ est æqualis, & sunt anguli alterni. ergo recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$. (Conclusio.) Si igitur linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur, ex eadem parte fecerit æqualē: vel si duos angulos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistātes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima nona. Theorema.

Linea

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ᾱβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπιπτέτω, ἡ ε̄ζ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ᾱηθ, ηθδ, ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ηθδ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Ἀπόδειξις μετὰ τῆς ὑποθέσεως.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ᾱηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ αηθ, καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ᾱηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ ᾱηθ, βηθ, τῶν ὑπὸ βη̄θ,

ηθδ,

Linea recta in duas rectas æquedistantes lineas incidens, facit angulos alternos inter se æquales: & angulum externum interno opposito ex eadem parte facit æqualem; item duos angulos internos ex eadem parte facit æquales duobus rectis.

Explicatio dati.) Sint duæ lineæ rectæ æquedistantes αβ, γδ: & in eas incidat linea recta εζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod faciat angulos αηθ, ηθδ, qui sunt alterni, inter se æquales: & angulum externum εηβ, angulo interno opposito ex eadem parte ηθδ æqualem: & angulos internos ex eadem parte positos βηθ, ηθδ, duobus rectis æquales. (Demonstratio cum hypothesi.) Si enim angulus αηθ, nō est æqualis angulo ηθδ: alter illorum erit maior, sit angulus αηθ maior. Quoniam angulus αηθ, maior est angulo ηθδ: cōmunis addatur angulus βηθ. ergo anguli αηθ, βηθ, sunt maiores angulis βηθ, ηθδ. Verum

 rum

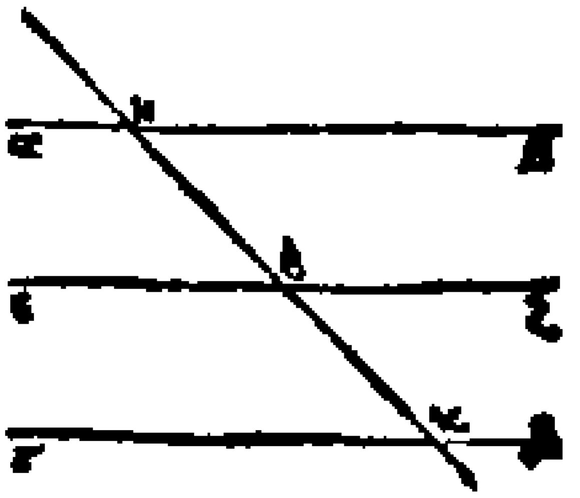
ηθδ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ βηθ, ηθδ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, συμπίπτουσιν. αἱ ἄρα αβ, γδ, ἐκβαλλόμεναι, εἰς ἄπειρον, συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι. οὐκ ἄρα ἄνισος ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ εηβ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

rum anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$ duobus rectis sunt æquales. ergo anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt minores: lineæ verò rectæ à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductæ concurrunt: quare rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ in infinitum productæ concurrent: sed quia æquedistantes proponuntur esse, non concurrunt: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, non est inæqualis angulo $\eta\theta\delta$, erit igitur ei æqualis. Verum angulus $\alpha\eta\theta$, angulo $\epsilon\eta\beta$ est æqualis: ideo etiam angulus $\epsilon\eta\beta$, angulo $\eta\theta\delta$ est æqualis: communis addatur angulus $\beta\eta\theta$: ergo anguli $\epsilon\eta\beta$, $\beta\eta\theta$, angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ sunt æquales: verum anguli $\epsilon\eta\beta$, $\beta\eta\theta$ duobus rectis sunt æquales, idcirco & anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ duobus rectis æquales erunt. (Conclusio.) Linea igitur recta, in duas æquedistantes lineas rectas incidens, facit angulos alternos inter se æquales: & angulum externum interno opposito ex eadem parte facit æqualem: item duos angulos internos ex eadem parte facit æquales duobus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Πρότασις λ. θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, τῇ εζ παράλληλος. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ γδ ἐστὶ παράλληλος. (Κατασκευή.) Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ηκ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν, ἡ ηκ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθζ. πάλιν ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εζ, γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ηκ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθζ, τῇ ὑπὸ ηκδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αηκ, τῇ ὑπὸ ηθζ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηκ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηκδ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐναλλὰξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότα-

Propositio Trigesima. Theorema.

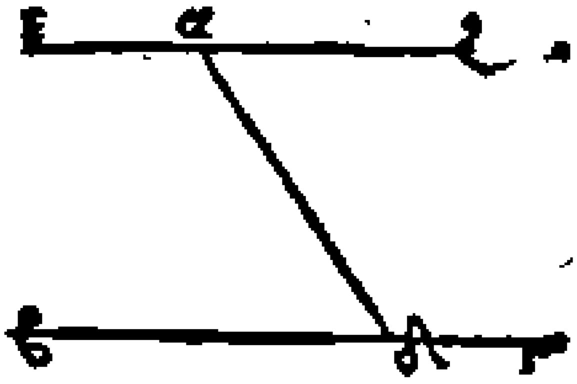
QVæ eidem lineę rectæ ęquedistāt: illæ etiam inter se æquedistant.

Explicatio dati.) Sit linea recta εζ, cui æquedistent rectæ l[illegible]æ αβ, γδ. (*Explicatio quæsiti.)* Dico quod recta αβ, etiam æquedistet rectæ γδ. (*Delineatio.)* Incidat in prædictas lineas recta quædam linea ηκ. (*Demonstratio.)* Quoniam in duas æquedistantes rectas αβ, εζ: incidit recta ηκ: idcirco angulus αηθ, est æqualis angulo ηθζ. Præterea quoniam in duas rectas æquedistantes εζ, γδ recta incidit ηκ: angulus ηθζ, erit æqualis angulo ηκδ. demonstratum verò est, quòd angulus αηκ, angulo ηθζ sit æqualis. quare & angulus αηκ, angulo ηκδ est æqualis, & sunt anguli alterni. Quare recta αβ, æquedistat rectæ γδ. (*Conclusio.)* Quæ igitur rectæ eidem lineæ rectæ æquedistant: illæ etiam inter se æquedistant. Id quod erat demonstrandū.

Πρότασις λα. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεία, ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ διὰ τοῦ α σημείου, τῇ γβ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ δα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ αδγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ δαε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας



τῇ αε, εὐθεῖα ἡ αζ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς βγ, εζ, εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ αδ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ, ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ βγ. (Συμπέρασμα.) Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ εαζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

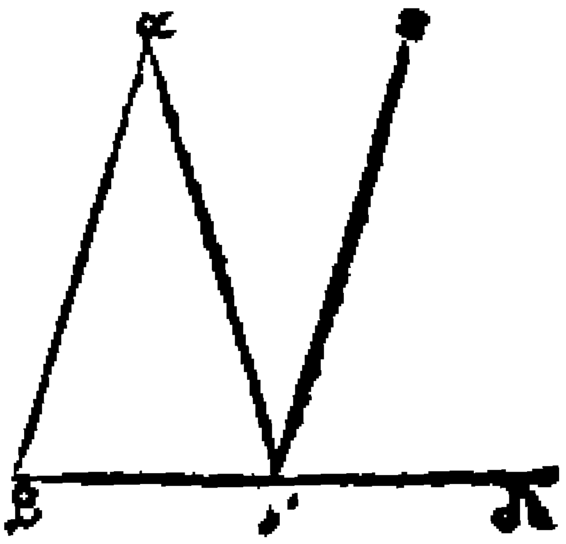
Propositio trigesima prima. Problema.

A Puncto dato, datæ lineę rectæ, rectam lineam æquedistantem ducere.

Explicatio dati.) *Sit datum punctum α, et data linea recta βγ. (Explicatio quæsiti.) A dato puncto α, ducenda est linea recta æquedistans lineæ rectæ datæ, βγ. (Delineatio.) Sumatur in linea recta βγ, punctum quoduis δ, & ducatur linea recta αδ: Ad lineam rectam αδ, & punctum in ea α, angulo rectilineo αδγ, æqualis statuatur angulus rectilineus δαε, & ducatur linea αζ, ἐπ' εὐθείας lineæ εα. (Demonstratio.) Quoniam in duas lineas rectas βγ, εζ, incidens linea recta αδ angulos alternos εαδ, αδγ, æquales inter se fecit: idcirco recta εζ, æquedistat rectæ βγ. (Conclusio.) A puncto igitur dato α, datæ lineæ rectæ βγ, ducta est linea recta εαζ æquedistans. Id quod faciendum erat.*

Πρότασις λβ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρά, ἡ βγ ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ σημείου τῇ αβ εὐθείᾳ, παράλληλος ἡ γε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ αγ, αἱ ἄρα ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, αγε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε. καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ

εγδ,

Propositio trigesima secunda.
Theorema.

OMnis triãguli vno è lateribus ꝓtracto, exterior angulus, duobus angulis interioribus quibus opponitur, est ęqualis: & trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt ęquales.

(Explicatio dati.) Sit triangulus $\overline{\alpha\beta\gamma}$, & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ, (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\overline{\alpha\gamma\delta}$, est æqualis duobus angulis $\gamma\bar{\alpha}\beta$, $\overline{\alpha\beta\gamma}$ interioribus quibus opponitur: & quod anguli tres interiores $\overline{\alpha\beta\gamma}$, $\beta\gamma\alpha$, $\bar{\gamma}\alpha\beta$ sint æquales duob⁹ angulis rectis. (Delineatio.) Ducatur à puncto γ, lineæ rectæ $\overline{\alpha\beta}$, æquedistans linea recta $\bar{\gamma}\varepsilon$. (Demonstratio.) Quoniã recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\varepsilon$, & in eas incidit recta $\overline{\alpha\gamma}$ Idcirco alterni anguli $\beta\bar{\alpha}\gamma$, $\overline{\alpha\gamma\varepsilon}$ sunt inter se æquales. Item cum recta $\overline{\alpha\beta}$, æquedistet rectæ $\bar{\gamma}\varepsilon$, & in eas incidit recta $\beta\delta$: angulus

εγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ αβγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεγ, τῇ ὑπὸ βαγ ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ τρισὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αγβ, γβα, γαβ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ. Θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, αἱ αβ, γδ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ

αὐτὰ

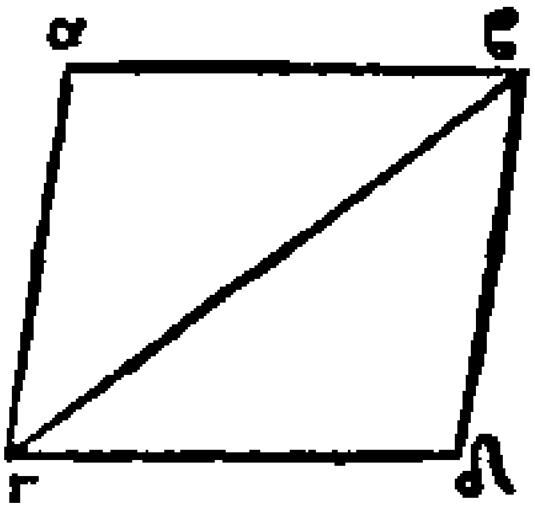
$\epsilon\gamma\delta$ externus, est æqualis angulo $\alpha\beta\gamma$ interno opposito. sed demonstratum est angulum $\alpha\epsilon\gamma$, angulo $\beta\alpha\gamma$ esse æqualem. totus igitur angulus $\alpha\gamma\delta$ externus, duob⁹ angulis internis oppositis $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ est æqualis. Communis addatur angulus $\alpha\gamma\beta$. anguli igitur $\alpha\gamma\delta$ $\alpha\gamma\beta$, tribus angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, $\gamma\alpha\beta$ sunt æquales. sed duo anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$ sunt duob⁹ rectis æquales. quare tres anguli $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\beta\alpha$, $\gamma\alpha\beta$, duobus rectis erũt æquales. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli, vno è lateribus protracto: exterior angulus duobus angulis interioribus, quibus opponitur, est æqualis: et trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt æquales. Id quod erat demõstrandũ.

Propositio trigesima tertia. Theorema.

Lineæ rectæ, quæ æquales, & æque distantes inter se lineas rectas ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & ęquedistãtes inter se sunt.

Explicatio dati.) *Sint lineæ rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales, & æquedistantes: easq́ ex eadem*

parte



αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ αγ, βδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ αἱ αγ, δβ, ἴσαι καὶ παράλληλοι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βγ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία τῇ ὑπὸ γβδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδβ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς αγ, βδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ βγ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αγβ, γβδ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῇ βδ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα

τὰς

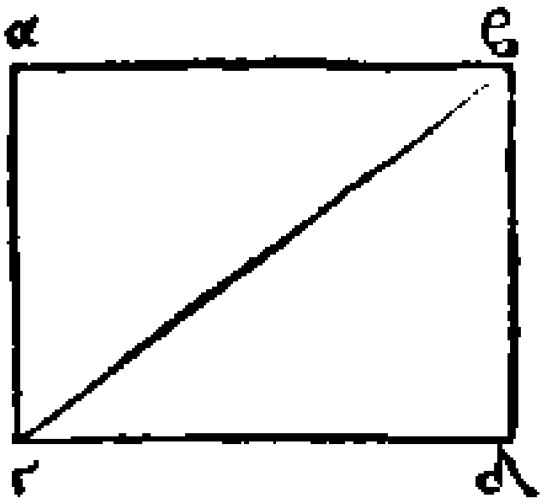
parte coniungant duæ rectæ, $\alpha\gamma$, $\beta\delta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod rectæ $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, æquales, & æquedistantes sint. (Delineatio.) Ducatur linea recta $\beta\gamma$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$: & in eas incidit recta $\beta\gamma$: idcirco anguli $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$ alterni: sunt inter se æquales. Et cum recta $\alpha\beta$, sit æqualis rectæ $\gamma\delta$, communis verò $\beta\gamma$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ sunt æqualia: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\beta\delta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. angulus igitur $\alpha\gamma\beta$, angulo $\gamma\beta\delta$ est æqualis, & angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\gamma\delta\beta$. & quoniam in duas rectas $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, recta incidens $\beta\gamma$, angulos alternos $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\beta\delta$, æquales inter se fecerit: idcirco recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$. Verum demonstrata fuit ei esse æqualis. (Conclusio.)

Lineæ

τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ. θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.



Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αγδβ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αγδβ παραλληλογράμμου, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ βγ, διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγβ, γβδ, ἴσαι ἀλλήλαις

Lineæ igitur rectæ, quæ æquales, & æquedistantes inter se lineas rectas, ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & æquedistantes inter se sunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima quarta. Theorema.

AReæ quæ æquedistantibus lineis rectis continentur, habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales: & dimetiēs ipsas medias secat.

Explicatio dati.) Sit figura æquedistantibus lineis rectis contenta $\alpha\gamma\delta\epsilon$: dimetiens eius linea $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod areæ $\alpha\beta\gamma\delta$, latus $\alpha\beta$, sit æquale lateri $\gamma\delta$: itē latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$. Praterea dimetiens $\epsilon\gamma$ ipsam figuram secet in duas partes æquales. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\epsilon$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$, & in eas incidit recta $\beta\gamma$: anguli alterni $\alpha\epsilon\gamma$, $\epsilon\gamma\delta$ sunt inter se æquales. Item quoniam recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$, & in eas incidit recta $\epsilon\gamma$: anguli igitur alterni inter se sunt æquales.

Quare

λαις εἰσὶ, δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ αβγ, γβδ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγα δυσὶ ταῖς ὑπὸ βγδ, γβδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν, τὴν βγ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄρα ἡ μὲν αβ πλευρὰ, τῇ γδ, ἡ δὲ αγ τῇ βδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ βδγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ αγβ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ βδγ ἴση. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. (Δευτέρα ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς γδ, βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

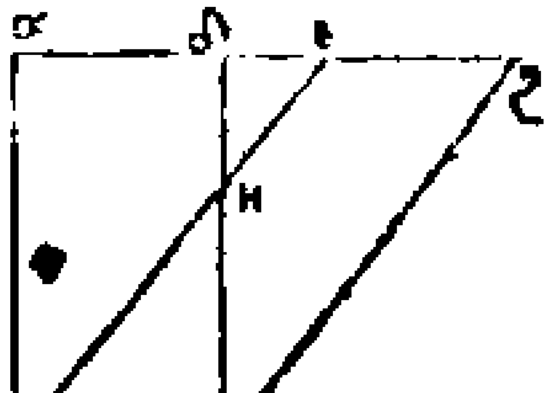
καὶ

Quare cum duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\delta$, duos angulos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, habeant duobus angulis $\beta\gamma\delta$, $\gamma\beta\delta$ æquales, alterum alteri: & vnum latus, vni lateri æquale, nempe latus $\beta\gamma$ commune quod ad angulos æquales est positum. idcirco & reliqua latera, reliquis lateribus habent æqualia, alterum alteri: & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$, & angulum $\beta\alpha\gamma$, angulo $\beta\delta\gamma$, æqualem. Quia verò angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis, & angulus $\gamma\beta\delta$, angulo $\alpha\gamma\beta$ etiam æqualis. Totus igitur angulus $\alpha\beta\delta$, toto angulo $\alpha\gamma\delta$ est æqualis. Verũ & angulus $\beta\alpha\gamma$, demonstratus est æqualis angulo $\beta\delta\gamma$. (Conclusio.) Areæ igitur, quæ æquedistãtib⁹ lineis rectis continentur: habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod diameter secet eam in duas partes æquales. (Demõstratio secunda.) Quoniã latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\beta\gamma$ cõmune, duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duob⁹ lateribus $\gamma\delta$, $\beta\gamma$ sunt æquaκαὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστὶ, καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δβ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα βγ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις λε. θεώρημα.

ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εβζγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αζ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τῷ εβζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. διὰ τὰ αὐ-

τὰ δὴ

lia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo, $\beta\gamma\delta$ æqualis. ergo basis $\alpha\gamma$, basi $\delta\beta$ est æqualis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ etiam æqualis. (Conclusio.) Ergo diameter $\beta\gamma$, figuram $\alpha\beta\gamma\delta$ secat in duas partes æquales. Id quod demonstrandum erat.

TERTIA HVIVS ELEMENTI PARS.

Propositio trigesima quinta. Theorema.

QVæ parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt æqualia inter se.

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\beta\gamma\zeta$: in eadem basi $\beta\gamma$: & eisdem lineis rectis æquedistantibus $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod parallelogrammō $\alpha\beta\gamma\delta$, sit æquale parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\zeta$. (*Demonstratio.*) Quoniā $\alpha\beta\gamma\delta$, figura est parallelogrāmon, idcirco latus $\beta\gamma$, est æquale lateri $\alpha\delta$. Per eadem demōstrabitur quoq;

τὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῇ βγ ἴση ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ αδ, τῇ εζ ἴση ἐστί. κοινὴ ἡ δε, ὅλη ἄρα ἡ αε, ὅλη τῇ δζ ἐστὶν ἴση, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ ἴση, δύο δὴ αἱ εα, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζδγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαβ ἴση ἐστίν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. βάσις ἄρα ἡ εβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ εαβ τρίγωνον τῷ ζδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δηε, λοιπὸν ἄρα τὸ αβηδ τραπέζιον, λοιπῷ τῷ εηγζ τραπεζίῳ, ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβγ τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, ὅλῳ τῷ εβγζ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λς. θεώρημα.

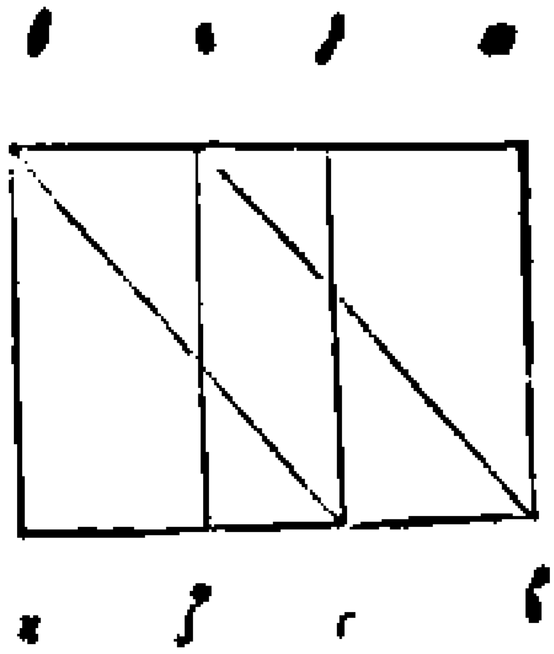
Τα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐκθε-

latus εζ, æquale lateri βγ. quare & latus αδ, est æquale lateri εζ. communis verò est recta δε. totum igitur latus αε, toti lateri δζ est æquale. Verum latus αϬ, est etiam æquale lateri δγ: duo itaq; latera εα, αϬ, duobus lateribus ζδ, δγ sunt æqualia alterum alteri, & angulus ζδγ, æqualis angulo εαϬ, externus interno. basis igitur εϬ, basi ζγ est æqualis, & triangulus εαϬ, triangulo ζδγ æqualis, communis auferatur triãgulus δηε. quare reliquum trapezion αϬηδ, reliquo trapezio εηγζ est æquale. Communis addatur triangulus ηβγ: totum igitur parallelogrammon αϬγδ, est æquale toto parallelogrammo εβγζ. (Conclusio) Quæ igitur parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandũ.

Propositio trigesima sexta. Theorema.

QVæ parallelogramma æquales habent bases: & sunt in eisdem æquedistantibus lineis rectis: illa sunt ęqualia inter se.

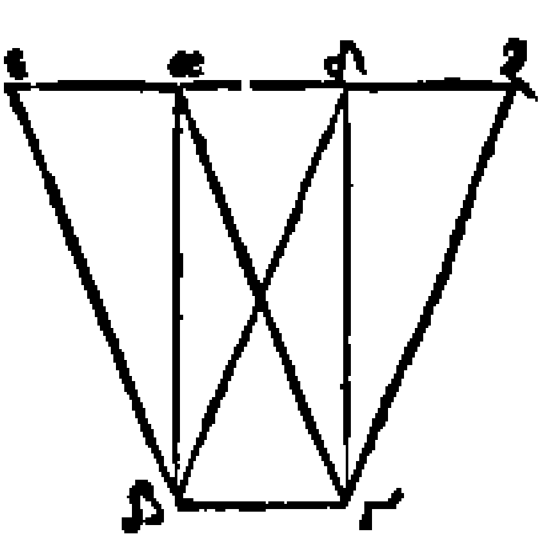


Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εζηθ, ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν βγ, ζη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον τῷ εζηθ. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γθ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ ζη, ἀλλὰ καὶ ἡ ζη, τῇ εθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ βγ ἄρα, τῇ εθ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βε, γθ. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ αἱ εβ, γθ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι, καὶ παράλληλοι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ εβγθ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ αβγδ, βάσιν τε γὰρ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς βγ, αθ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ζηθε, τῷ αὐτῷ, τῷ εβγθ, ἐστὶν ἴσον, ὥστε καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τῷ εζηθ ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλό-

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$: habentia bases $\beta\gamma$, $\zeta\eta$ æquales: & sint inter easdem æquedistantes rectas lineas $\alpha\theta$, $\beta\eta$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, sit æquale parallelogrammo $\epsilon\zeta\eta\theta$. (*Delineatio.*) Ducantur lineæ rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$. (*Demonstratio.*) Quoniam recta $\beta\gamma$, æqualis est rectæ $\zeta\eta$: & $\zeta\eta$ est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. idcirco & $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. verum sunt lineæ rectæ æquedistantes, easq; coniungunt rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$: rectæ verò quæ æquales, & æquedistantes rectas ex eadẽ parte coniungunt: & ipsæ æquales, & æquedistantes sunt: quare rectæ $\epsilon\beta$, $\gamma\theta$ æquales & æquedistantes sunt: atq; figura $\epsilon\beta\gamma\delta$ est parallelogrammon, et est æquale parallelogrammo $\alpha\beta\gamma\delta$. quia cum eo eandem habet basim $\beta\gamma$: & in eisdem est æquedistantib⁹ rectis $\beta\gamma$, $\alpha\theta$. Similiter demonstrabimus quod $\zeta\eta\theta\epsilon$ eidem parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\theta$ sit æquale. quare parallelogrãmon $\alpha\beta\gamma\delta$, parallelogrãmo $\epsilon\zeta\eta\theta$ est æquale. (*Conclusio.*) Quæ igitur parallelogramma æquales habent bases: & sunt in γραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δγβ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς αδ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν εβαγ, δβγζ. καὶ ἴσον τὸ εβγα, τῷ δβγζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, εζ. καί ἐστι τοῦ μὲν εβγα παραλληλογράμμου ἥμισυ

τὸ αβγ

eisdem æquedistantibus lineis rectis, illa sunt æqualia inter se. id quod erat demonstrandũ.

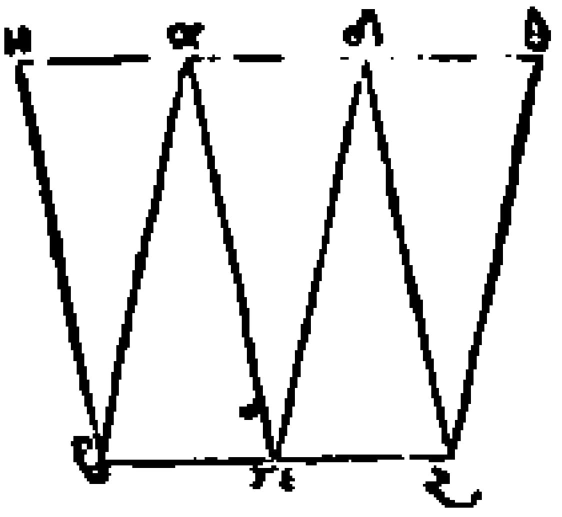
Propositio trigesima septima. Theorema.

QVi trianguli eandẽ habent basin, & sunt in eisdem ęquedistantibus lineis rectis; illi sunt inter se æquales.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\gamma\beta$, *super eadem basi* $\beta\gamma$: *& in eisdem æquedistantibus lineis rectis* $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *sit æqualis triangulo* $\delta\gamma\beta$. *(Delineatio.) Producatur linea recta* $\alpha\delta$, *in vtramq; partẽ ad puncta* ϵ, *&* ζ: *& ex puncto* β, *ducatur linea recta* $\beta\epsilon$, *æquedistans lineæ rectæ* $\alpha\gamma$. *præterea ex puncto* γ, *ducatur recta* $\gamma\zeta$, *æquedistãs rectæ* $\beta\delta$. *(Demonstratio.) Vtraq; igitur figura* $\epsilon\beta\alpha\gamma$, *&* $\delta\beta\gamma\zeta$ *est parallelogrammon. & parallelogrammũ* $\epsilon\beta\alpha\gamma$, *est æquale parallelogrammo* $\delta\beta\gamma\zeta$. *quia super eadẽ basi* $\beta\gamma$ *est, & inter easdem æquedistantes lineas rectas* $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, *& parallelogrãmi* $\epsilon\beta\gamma\alpha$ *dimidiũ* αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει, τοῦ δὲ δβγζ παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ δβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ δγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς βζ, δα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ η, θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ *est, triangulus* $\alpha\beta\gamma$. *nam diameter* $\alpha\beta$ *ipsum per medium secat. parallelogrammi verò* $\delta\beta\gamma\zeta$ *dimidium est triangulus* $\delta\beta\gamma$. *nam diameter* $\delta\gamma$ *ipsum per medium secat. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. triangulus igitur* $\alpha\beta\gamma$, *triãgulo* $\delta\beta\gamma$ *est æqualis. (Conclusio.) Qui igitur trianguli sunt super eadem basi, & inter easdem lineas rectas æquedistantes, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio trigesima octaua. Theorema.

QVi trianguli æquales habent bases: & sunt in eisdem ęquedistantibus lineis rectis, illi inter se sunt æquales.

Explicatio dati.) Sint trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, *super basibus æqualibus* $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, *in eisdem æquedistantibus lineis rectis* $\alpha\delta$, $\beta\zeta$. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *sit æqualis triangulo* $\delta\varepsilon\zeta$. *(Delineatio.) Producatur linea recta* $\alpha\delta$, *in vtramq; partem ad puncta* η, *&* θ. *Ex puncto* β, *ducatur linea* β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω, ἡ βη. διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ δε παράλληλος ἤχθω ἡ ζθ. (Απόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ηβγα, δεζθ, καὶ ἴσον τὸ ηβγα, τῷ δεζθ. ἐπὶ γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βζ, ηθ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ηβγα παραλληλογράμμου, ἥμισυ, τὸ αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τοῦ δὲ δεζθ, παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ ζεδ τρίγωνον, ἡ γὰρ ζδ, διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εκ-

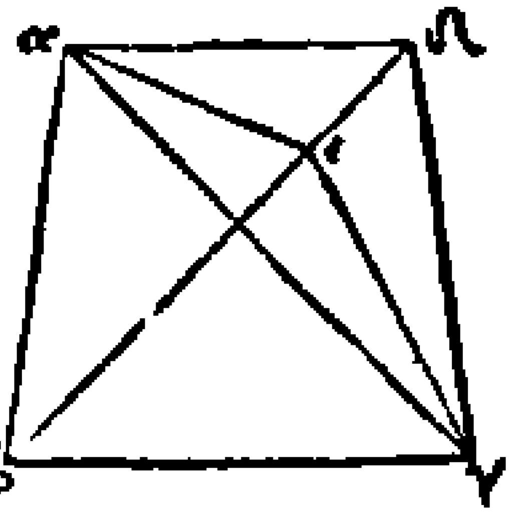
linea recta $\beta\eta$, æquedistans lineæ rectæ $\alpha\gamma$. Item ex puncto ζ ducatur linea recta $\zeta\theta$, æquedistans lineæ rectæ $\delta\epsilon$. (Demonstratio.) Vtraque igitur figura $\eta\beta\gamma\alpha$, $\delta\epsilon\zeta\theta$ est parallelogrammon. & parallelogrammon $\eta\beta\gamma\alpha$, est æquale parallelogrammo $\delta\epsilon\zeta\theta$. quia super basibus $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\zeta$, $\eta\theta$ sunt. præterea parallelogrammi $\alpha\beta\gamma\alpha$ dimidium, est triangulus $\alpha\beta\gamma$, quoniam diameter $\alpha\beta$ ipsum secat per medium. & parallelogrammi $\delta\epsilon\zeta\theta$ dimidium, est $\zeta\epsilon\delta$ triangulus. quia diameter $\zeta\delta$, ipsum secat medium. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. quare triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Qui igitur trianguli super basibus fuerint æqualibus, & in eisdem lineis æquedistantibus, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima nona. Theorema.

TRianguli æquales, eandem habentes basim: & ex eadem parte, & in eisdem æquedistantibus rectis sunt.

Expli-

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, λέγω ὅ-



τι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ γβ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α σημείου τῇ βγ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγ, τῷ δβγ ἐστιν ἴσον, καὶ τὸ δβγ ἄρα τρίγωνον, τῷ εβγ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αε, τῇ βγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα, τῇ βγ ἐστὶν παράλληλος. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

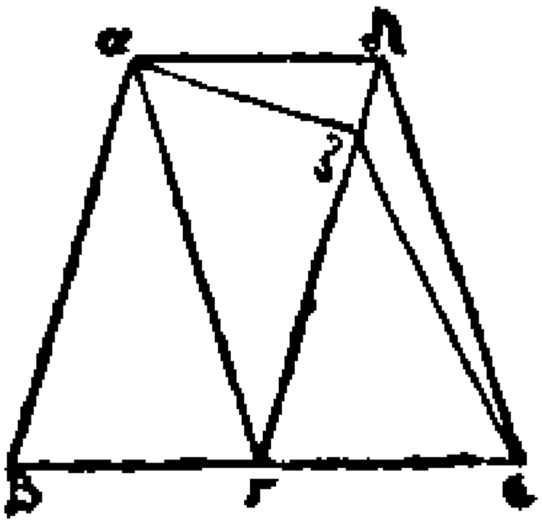
Πρότα-

Explicatio dati.) Sint trianguli αϐγ. δϐγ super eadē basi ϐγ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod etiam in eisdē sint lineis rectis æquedistantibus. (Delineatio.) Ducatur linea recta αδ: dico quod recta αδ, æquedistet rectæ ϐγ. si enim ei non æquedistat, ducatur per punctum α, rectæ lineæ βγ æquedistans recta αε: & ducatur linea recta εγ. (Demōstratio.) Triangulus igitur αϐγ, est æqualis triangulo εϐγ, quia super eadem basi ϐγ est, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus ϐγ, αε. verum triangulus αϐγ, est æqualis triangulo δϐγ: idcirco & triangulus δϐγ, triangulo εϐγ est æqualis: maior minori. quod fieri nequit. Quare recta αε, nō æquedistat rectæ ϐγ. Simili ratione demonstrabimus, quod nulla alia præterquam αδ recta, æquedistet rectæ ϐγ. recta igitur αδ, rectæ βγ æquedistat. (Conclusio.) Trianguli igitur æquales, eandem habentes basin, in eisdem sunt æquedistantibus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Πρότασις μ. θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ αβγ, γδε, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν βγ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ βε. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α, τῇ βε παράλληλος ἡ ζα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζγε τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, γε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ. ἀλλὰ τὸ αβγ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ, τῷ δγε τριγώνῳ, καὶ τὸ δγε τρίγωνον ἄρα, ἴσον ἐστὶ τὸ ζγε τριγώνῳ, τὸ μεῖζον, τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αζ, τῇ βε. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα

Propositio quadragesima. Theorema.

TRianguli æquales, super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus.

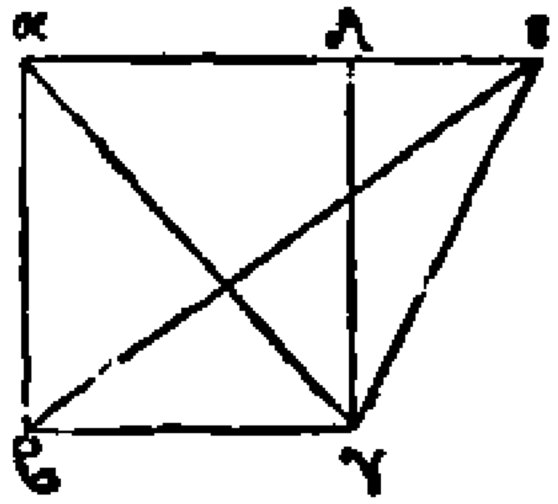
Explicatio dati.) Sint trianguli αβγ, γδε super basibus βγ, γε æqualibus. (Explicatio quæsiti.) Dico quod in eisdem sint æquedistantibus lineis rectis. (Delineatio.) Ducatur recta αδ, dico quod αδ, æquedistet rectæ βε: si enim ei non æquedistat, ducatur per punctum α rectæ βε, æquedistans recta ζα: & ducatur recta ζε. Triangulus igitur αβγ, est æqualis triangulo ζγε, quia sunt constituti super basibus βγ, γζ æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus βε, αζ. sed triangulus αβγ, est æqualis triangulo δγε. quare triangulus δγε, etiam erit æqualis triangulo ζγε, maior minori, quod fieri nequit. non igitur recta αζ, æquedistat rectæ βε. Simili ratione demonstrabimus,

K quod

αδ ἄρα τῇ βε παράλληλός ἐστι. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μα. θεώρημα.

ΕΑν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Ἔκθεσις.) Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ αβγδ, τριγώνῳ τῷ εβγ, βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ αβγδ, παραλληλόγραμμον, τοῦ εβγ τριγώνου. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον δή ἐστι τὸ αβγ, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ, τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς

βγ

quod nulla alia præterquam ad recta, æquedistet rectæ βε. (Conclusio.) Trianguli igitur æquales, super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus. id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima prima. Theorema.

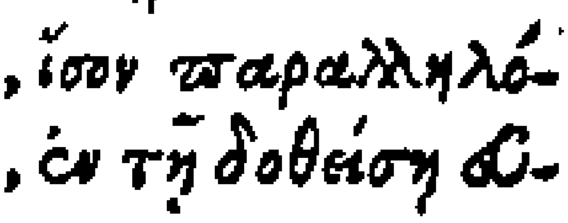
PArallelogrammon trianguli est duplum, si super eadem consistat basi: & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis.

Explicatio dati.) Parallelogrāmon αβγδ, & triangulus εβγ: sint super eadem basi βγ, in eisdem æquedistantibus lineis rectis αε, βγ. (Explicatio quæsiti.) dico quod parallelogrammon αβγδ, sit duplum trianguli βεγ. (Delineatio.) Ducatur recta αγ. (Demonstratio.) Triangulus αβγ, est æqualis triangulo εβγ, quia super eadem basi sunt βγ: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ γὰρ αγ διάμετρος, αὐτὸ δίχα τέμνει. ὥστε τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τοῦ εβγ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχει τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μβ. Πρόβλημα.

ΤΩ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ βγ δίχα



βγ,αε. sed parallelogrammon αβγδ, est duplum trianguli αβγ: quia αγ diameter ipsum medium secat. quare & parallelogrammon αβγδ, trianguli εβγ duplum erit. (Conclusio.) Parallelogrammon igitur trianguli est duplum: si super eadem consistat basi, & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima secunda. Problema.

DAto triangulo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit triangulus datus αβγ: & datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Dato triangulo αβγ, statuendum est parallelogrammon æquale: in angulo qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. (Delineatio.) Dissecetur linea recta βγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εγ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε, τῇ δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ γεζ. καὶ διὰ μὲν τοῦ α, τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ αη, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ ζε παράλληλος ἤχθω ἡ γη, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζεγη. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ αεγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βε, εγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αη. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τοῦ αεγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, διπλάσιον τοῦ αεγ τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, τῷ αβγ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ γεζ γωνίαν, ἴσην τῇ δ. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ αβγ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ζεγη, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

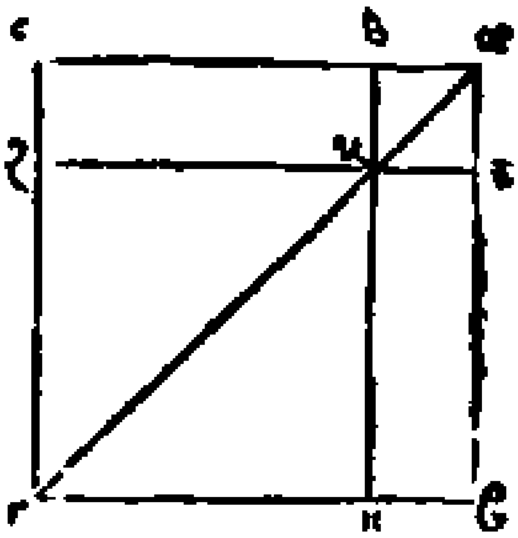
Πρό-

βγ media in puncto ε: & ducatur linea recta αε: atque ita statuatur ad lineam rectam εγ, & punctũ eius ε, dato angulo rectilineo δ: æqualis angulus rectilineus γεζ: postea ducatur per punctum α, lineæ rectæ γε, æquedistans linea recta αη: & per punctum γ, lineæ rectæ εζ, æquedistans linea recta γη. Erit itaque figura ζεγη parallelogrammon. (Demõstratio.) Quoniam βε est æqualis εγ: idcirco & triangulus αβε, triangulo αεγ est æqualis: sunt enim super basibus æqualibus βε, εγ, & in eisdem lineis rectis βγ, αη æquedistantibus. Quare αβγ triangulus, duplus est trianguli αεγ: verum parallelogrammon εζγη, etiam est duplum trianguli αεγ: quia eandem habent basin εγ: & in eisdem sunt æquedistantib9 lineis rectis εγ, ζη. Quare parallelogrammon εζγη, est æquale triangulo αβγ, & habet angulum γεζ, æqualem angulo δ. (Conclusio.) Dato igitur triangulo αβγ, statutum est æquale parallelogrãmon εζγη in angulo ζεγ, qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. Quod faciendum erat.

Πρότασις μγ. θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ, περὶ δὲ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ εθ, ζη, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα, τὰ βκ, κδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ βκ παραπλήρωμα, τῷ κδ παραπληρώματι.



(Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ εκθα παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ακ, ἴσον ἐστὶ τὸ εακ τρίγωνον τῷ αθκ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ κζγ τρίγωνον, τῷ κηγ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν αεκ τρίγωνον, τῷ αθκ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ κζγ, τῷ κηγ, τὸ αεκ τρίγωνον μετὰ τοῦ κηγ, ἐστὶν

ἴσον

Propositio quadragesima tertia. Theorema.

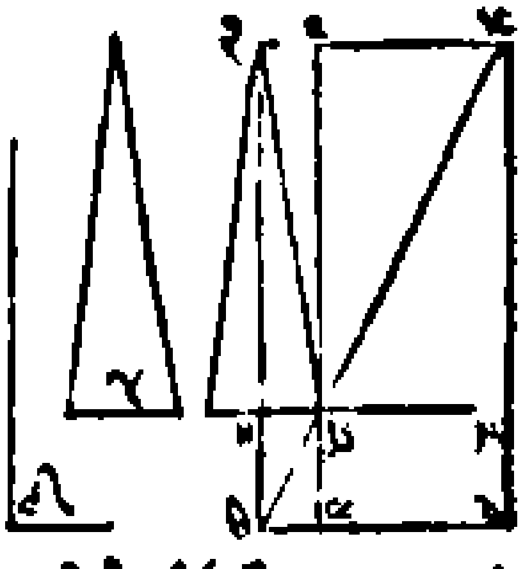
OMnis parallelogrammi eorum quę circa eandem sunt dimetientem parallelogrammôn supplementa: æqualia sunt inter se.

Explicatio dati.) Sit parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, *dimetiens eius* $\alpha\gamma$, *& circa* $\alpha\gamma$, *sint parallelogramma* $\epsilon\theta$, $\zeta\eta$ *: & quæ vocantur supplementa sint* $\beta\kappa$, $\kappa\delta$. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod supplementum* $\beta\kappa$, *sit æquale supplemẽto* $\kappa\delta$. *(Demonstratio.) Quoniã* $\alpha\beta\gamma\delta$ *parallelogrammon, diametrum habet* $\alpha\gamma$*: idcirco triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *est æqualis triangulo* $\alpha\delta\gamma$. *Rursus quoniam* $\epsilon\kappa\theta\alpha$ *parallelogrammon, diametrum habet* $\alpha\kappa$ *lineã rectam: ideo* $\epsilon\alpha\kappa$ *triangulus, est æqualis triangulo* $\alpha\theta\kappa$. *per eadem demonstrabitur triangulum* $\kappa\zeta\gamma$, *triangulo* $\kappa\eta\gamma$ *esse æqualem. Cum igitur triangulus* $\alpha\epsilon\kappa$, *triangulo* $\alpha\theta\kappa$ *sit æqualis: & triangulus* $\kappa\zeta\gamma$, *æqualis triangulo* $\kappa\eta\gamma$*: erit itaq; triangulus* $\alpha\epsilon\kappa$ *cum triãgulo* $\kappa\eta\gamma$ *æqualis tri-*

ἴσον τῷ αθκ τριγώνῳ μετὰ τοῦ κζγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αδγ ἴσον. λοιπῷ ἄρα τῷ κδ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ, τὸ βκ παραπλήρωμα. (Συμπέρασμα) Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ. (Κατασκευή.) Συνεστάτω *lis triangulo $\alpha\theta\kappa$, cum triangulo $\kappa\zeta\gamma$. verũ totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\alpha\delta\gamma$ est æqualis: quare reliquum supplementum $\beta\kappa$, reliquo supplemento $\kappa\delta$ est æquale. (Conclusio.) Omnis igitur parallelogrammi eorum quæ circa eandem sunt dimetientem parallelogrammωn supplementa æqualia sunt inter se. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio quadragesima quarta. Problema.

AD datam lineam rectam, dato triangulo, æquale statuere parallelogrãmon, in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: datus vero triangulus γ: datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Ad datam lineam rectam $\alpha\beta$, statuendum est parallelogrammon æquale triangulo dato γ: in angulo, qui est æqualis angulo δ dato. (Delinea-

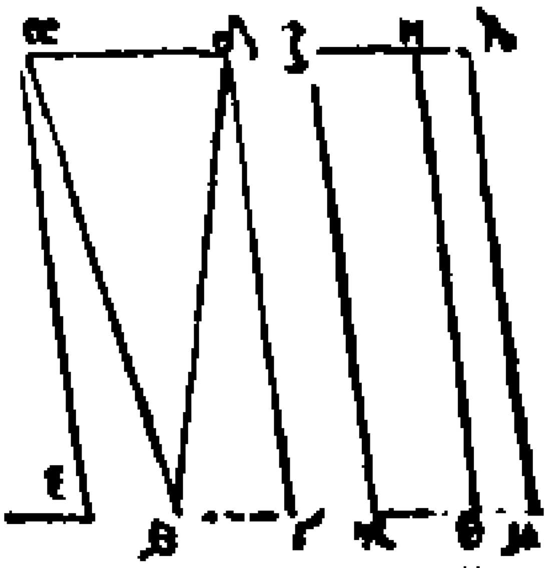
στάτω τῷ γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ βεζη, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εβη, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν βε, τῇ αβ, καὶ διήχθω ἡ ζη, ἐπὶ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν βη, εζ παράλληλος ἤχθω ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θβ. (Απόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αθ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ θζ, αἱ ἄρα ὑπὸ αθζ, θζε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ βθη, ηζε δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, συμπίπτουσιν, αἱ θβ, ζε ἄρα ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦνται. (Κατασκευῆς τὸ ἕτερον μέρος.) Εκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ κ σημείου, ὁποτέρᾳ τῶν εα, ζθ, παράλληλος ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ θα, ηβ, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα. (Αποδείξεως τὸ ἕτερον μέρος.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θλκζ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θκ. περὶ δὲ θκ, παραλληλόγραμμα μὲν, τὰ αη, με, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα λβ, βζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ λβ, τῷ βζ. ἀλλὰ καὶ

τὸ βζ,

neatio.) Fiat triangulo γ æquale parallelogrammon βεζη: in angulo εβη, æquali angulo δ dato, & sit linea recta βε ἐπ' εὐθείας rectæ αϛ: atq; producatur linea recta ζη, ad punctum θ. per punctum etiam α ducatur alterutri linearum βη, εζ æquedistans linea recta αθ: deniq; ducatur linea recta θϛ. (Demonstratio.) Quoniam in duas rectas æquedistantes αθ, εζ recta linea θζ incidit: idcirco anguli αθζ, θζε duobus rectis sunt æquales, atq; ideo anguli ϛθη, ηζε duobus rectis sunt minores. verum lineæ rectæ à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductæ concurrunt. quare θϛ, ζε productæ concurrent. (Altera delineationis pars.) Producantur duæ lineæ rectæ ζε, θϛ, & concurrant in puncto κ, & per punctum κ, alterutri linearum εα, ζθ ducatur κλ æquedistans: atq; producantur lineæ rectæ ηβ, θα ad puncta vsq; λ, μ. (Demonstrationis altera pars.) Est igitur figura θλκζ parallelogrammon: eiusq; diameter θκ: circa dimetientem verò parallelogramma sunt αη, με: dicta verò supplementa λϛ, ϛζ. quare λϛ τὸ βζ, τῷ γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ λβ ἄρα τῷ γ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηβε γωνία, τῇ ὑπὸ αβμ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ηβε τῇ δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, τῇ δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ λβ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβμ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις με. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ αβγδ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγδ εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ ε. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δβ, καὶ συ-

νεστάsupplementum est æquale $\beta\zeta$ supplemento. verum $\beta\zeta$ supplementum, est æquale triangulo γ: ergo & $\lambda\beta$ supplementum triangulo γ est æquale. præterea quoniam angulus $\eta\beta\epsilon$ est æqualis angulo $\alpha\beta\mu$: & angulus $\eta\beta\epsilon$ etiã est æqualis angulo δ: idcirco & angulus $\alpha\beta\mu$ etiam est æqualis angulo δ. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam $\alpha\beta$: dato triangulo γ: æquale cõstitutum est parallelogrammon $\lambda\beta$, in angulo $\alpha\beta\mu$, qui est æqualis angulo δ. Id quod erat faciendum.

Propositio quadragesima quinta. Problema.

DAto rectilineo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit datum rectilineum $\alpha\beta\gamma\delta$: & datus angulus rectilineus ϵ. (Explicatio quæsiti.) Dato rectilineo $\alpha\beta\gamma\delta$, statuendum est æquale parallelogrammon in angulo rectilineo, qui est æqualis angulo ϵ dato. (Delineatio.) Ducatur linea recta $\beta\delta$, & consti-

νεσάτω τῷ αβδ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλό-
γραμμον, τὸ ζθ, ἐν τῇ ὑπὸ θκζ γωνίᾳ, ἥ ἐ-
στιν ἴση τῇ ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν
ηθ εὐθεῖαν τῷ δβγ τριγώνῳ, ἴσον παράλ-
ληλόγραμμον, τὸ ημ, ἐν τῇ ὑπὸ ηθμ γωνίᾳ,
ἥ ἐστιν ἴση τῇ ε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἡ ε γω-
νία, ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκζ, ηθμ ἐστιν ἴση, καὶ
ἡ ὑπὸ ηθμ ἄρα τῇ ὑπὸ θκζ ἐστιν ἴση, κοινὴ
προσκείσθω, ἡ ὑπὸ κθη. αἱ ἄρα ὑπὸ ζκθ,
κθη ταῖς ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑ-
πὸ ζηθ, κθη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, καὶ αἱ ὑ-
πὸ κθη, ηθμ ἄρα δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς
δή τινι εὐθεία, τῇ ηθ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ
τῷ θ, δύο εὐθεῖαι αἱ κθ, θμ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρ-
θαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ κθ,
τῇ θμ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς κμ, ζη,
εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θη, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ
ὑπὸ μθη, θκζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσ-
κείσθω ἡ ὑπὸ θηλ. αἱ ἄρα ὑπὸ μθη, θηλ,
ταῖς ὑπὸ θηζ, θηλ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ
μθη, θηλ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ
θηζ

constituatur triangulo $\alpha\beta\delta$ æquale parallelogrammon $\zeta\theta$: habens angulum $\theta\kappa\zeta$, æqualem angulo ϵ. statuatur etiam ad lineam rectam $\eta\theta$, parallelogrammon $\eta\mu$, æquale triangulo $\delta\beta\gamma$, habens angulum $\kappa\theta\mu$ æqualem angulo ϵ. (Demonstratio.) Quoniam angulus ϵ alterutri angulo $\theta\eta\zeta$, $\eta\theta\mu$ est æqualis: idcirco & angulus $\eta\theta\mu$, angulo $\theta\kappa\zeta$ est æqualis. communis addatur angulus $\kappa\theta\eta$: ergo duo anguli $\zeta\kappa\theta$, $\kappa\theta\eta$, duob. angulis $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ sunt æquales. verum duo anguli $\zeta\eta\theta$, $\kappa\theta\eta$ duobus rectis sunt æquales: quare & anguli $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ duobus rectis sunt æquales. ad lineam rectam $\eta\theta$, & punctum in ea datum θ in diuersas partes ductæ sunt lineæ rectæ $\kappa\theta$, $\theta\mu$: atque faciunt angulos ἐφεξῆς æquales duobus rectis: quare recta $\kappa\theta$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\theta\mu$. Et quia in lineas rectas æquedistantes $\kappa\mu$, $\zeta\eta$ recta quædam $\theta\eta$ incidit: anguli idcirco alterni sunt inter se æquales, angulus $\mu\theta\eta$, æqualis angulo $\theta\kappa\zeta$. Communis addatur angulus $\theta\eta\lambda$. anguli igitur $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$, angulis $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ sunt æquales, verũ $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$ anguli sunt æquales duo-

L bus

θηζ, θηλ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ἡ κζ τῇ θη, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ θη τῇ μλ, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ μλ ἴση τέ καὶ παράλληλός ἐστιν, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι, αἱ κμ, ζλ. καὶ αἱ κλ, ζμ, ἴσαι τὲ καὶ παράλληλοι εἰσί. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ κζλμ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν αβδ τρίγωνον, τῷ θζ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ δβγ, τῷ ημ, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ εὐθύγραμμον, ὅλῳ τῷ κζλμ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγδ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τῷ κζλμ, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ζκμ ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μϛ. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τετράγωνον

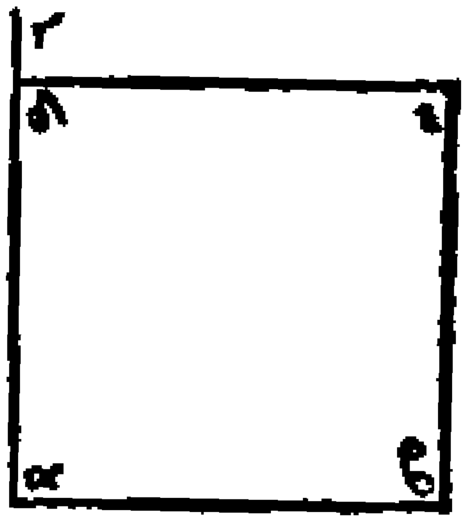
νον

bus rectis. quare & anguli $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ duobus rectis sunt æquales. quare recta $\zeta\eta$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\eta\lambda$. Cum vero $\kappa\zeta$ recta, rectæ $\theta\eta$ sit æqualis, & æquedistans: item $\theta\eta$ recta, rectæ $\mu\lambda$ æqualis & æquedistans: idcirco & $\kappa\zeta$ recta, rectæ $\mu\lambda$ æqualis & æquedistans est: easq́ coniungunt rectæ $\kappa\mu$, $\zeta\lambda$, quare & $\kappa\lambda$, $\zeta\mu$ æquales & æquedistantes sunt, vnde fit, quod figura $\kappa\zeta\lambda\mu$ sit parallelogrammon. Cum autẽ triangulus $\alpha\beta\delta$, sit æqualis parallelogrammo $\theta\zeta$: & triangulus $\delta\beta\gamma$ parallelogrammo $\eta\mu$. totum igitur rectilineum $\alpha\beta\gamma\delta$: toto parallelogrammo $\kappa\zeta\lambda\mu$ est æquale. (Cõclusio.) Dato igitur rectilineo $\alpha\beta\gamma\delta$, constitutum est parallelogrammon $\kappa\zeta\lambda\mu$ æquale, in angulo $\zeta\eta\mu$, qui est æqualis dato angulo ϵ. Id quod faciendum erat.

Propositio quadragesima sexta. Problema.

A Data linea recta describere quadratum.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$. Explicatio quæsiti.) A data linea recta $\alpha\beta$, νον ἀναγράψαι. (Κατασκευή.) Ἤχθω τῇ αβ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ α, πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση, ἡ αδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ δ σημείου, τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δε, διὰ δὲ τοῦ β σημείου τῇ αδ παράλληλος ἤχθω, ἡ βε. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ αδ, τῇ βε. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ βα, αδ, δε, εβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ παραλληλόγραμμον. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δε εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ αδ, αἱ ἄρα ὑπὸ βαδ, αδε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδε. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπ' ἐναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑ-



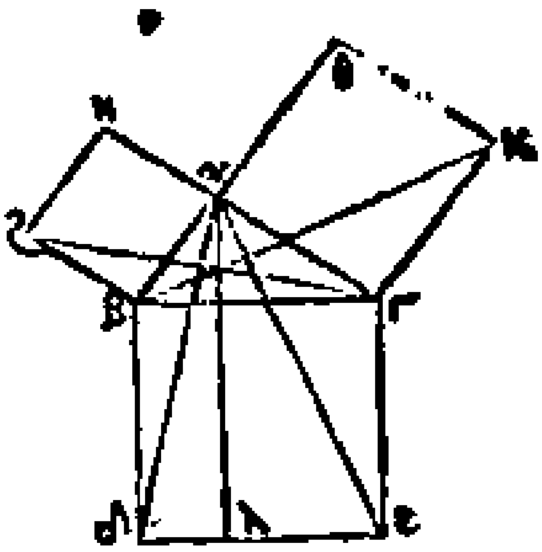
πὸ

describendum est quadratum. (Delineatio.) Ducatur ex puncto α lineæ rectæ αϐ, ad angulos rectos recta linea αγ: & fiat rectæ αβ æqualis recta αδ: per punctum etiam δ, lineæ rectæ αϐ ducatur æquedistans linea recta δε: deniq; per punctum β lineæ rectæ δε, ducatur æquedistans linea recta ϐε. (Demonstratio.) Figura igitur αϐδε, est parallelogrammon: & αϐ est æqualis δε, atq; αδ rectæ βε: sed & αβ etiam est æqualis rectæ αδ. quatuor igitur rectæ αϐ, αδ, δε, ϐε sunt inter se æquales, atq; idcirco parallelogrammon αδεϐ est æquilaterum. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αδεϐ etiã sit rectangulum. (Demonstratio.) Cum in duas rectas æquedistantes αϐ, δε recta quædam αδ inciderit, anguli ϐαδ, αδε duobus rectis sunt æquales. verum angulus ϐαδ, est rectus, Idcirco & angulus αδε etiam est rectus, parallelogramma vero angulos oppositos, & latera opposita habẽt æqualia: quare vterq; angulorũ

 oppoτῶν αβε, βεδ γωνιῶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. (Συμπέρασμα.) Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μζ. θεώρημα.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. (Κατασκευή.) Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τετράγωνον, τὸ βδγε, ἀπὸ δὲ τῶν βα, αγ, τὰ ηβ, θγ, καὶ διὰ τοῦ α, ὁπότερα τῶν βδ, γε, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, ζγ. (Ἀπόδει-

oppositorum αβε, εβδ est rectus : ideoq́ αδεβ parallelogrammon, est rectangulum, sed & æquilaterum esse fuit demonstratum. (Conclusio.) Quare αβεδ figura, est quadratũ: & est descriptum à linea recta data αβ. id quod erat faciendum.

Propositio quadragesima septima. Theorema.

IN triangulis rectãgulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

Explicatio dati.) Sit triangulus rectangulus αβγ, habens angulum βαγ rectum. (Explicatio quæsiti.) dico quod quadratum lateris βγ, sit æquale quadratis laterum βα, αγ. (Delineatio.) Describatur à linea βγ, quadratum βδεγ: & à linea βα̃ quadratum βη. Præterea à linea αγ quadratum γθ. Ducatur etiam per punctum α, alterutri linearum βδ, γε æquedistans recta linea αλ. denique ducantur duæ lineæ rectæ αδ, ζγ. (De-

πόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαγ, βαη γωνιῶν, πρός δή τινι εὐθείᾳ, τῇ βα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, δύο εὐθεῖαι, αἱ αγ, αη, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γα, τῇ αη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ, τῇ αθ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία τῇ ὑπὸ ζβα ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αβγ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ δβα, ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζβγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, βα. δυσὶ ταῖς βζ, βγ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ, ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ ζβγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι τοῦ μὲν αβδ τριγώνου, διπλάσιον τὸ βλ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν βδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς βδ, αλ. τοῦ δὲ ζβγ τριγώνου, διπλάσιον τὸ ηβ τετράγωνον. βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι, τὴν ζβ. καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ, ταῖς ζβ, ηγ.

τὰ δὲ

monstratio.) Quoniam vterque angulorum $\beta\alpha\gamma$, $\beta\alpha\eta$ est rectus: idcirco ad rectam quandam $\beta\alpha$, & ad punctum quod in ea est α, duæ rectæ $\alpha\gamma$, $\alpha\eta$ in diuersas partes ductæ, faciunt angulos vicinos inter se æquales: quare recta $\gamma\alpha$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\eta$. per eadem ista demonstrabitur, quod recta $\alpha\beta$, est ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\theta$. quoniam verò angulus $\delta\beta\gamma$, æqualis est angulo $\zeta\beta\alpha$, quia vterque est rectus, communis addatur angulus $\alpha\beta\gamma$: totus igitur angulus $\delta\beta\alpha$, toto angulo $\zeta\beta\gamma$ est æqualis. cum verò duo latera $\delta\beta$, $\beta\alpha$, duobus lateribus $\beta\zeta$, $\beta\gamma$ sint æqualia, alterum alteri: & angulus $\delta\beta\alpha$, angulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis. basis igitur $\alpha\delta$, basi $\zeta\gamma$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\delta$ triangulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis: verum trianguli $\alpha\beta\delta$ parallelogrammon $\beta\lambda$ est duplum, quia habent eandem basin $\beta\delta$, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\delta$, $\alpha\lambda$. Item trianguli $\zeta\beta\gamma$, duplum, est quadratum $\eta\beta$, quia habent eandem basin $\zeta\beta$, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\zeta\beta$, $\eta\gamma$. Quæ verò æ-τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ϛλ παραλληλόγραμμον, τῷ ηβ τετραγώνῳ. Ομοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν αε, βη, δειχθήσεται καὶ τὸ γλ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ θγ τετραγώνῳ, ὅλον ἄρα τὸ δβεγ τετράγωνον, δυσὶ τοῖς ηϛ, θγ τετραγώνοις, ἴσον ἐστὶ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ϛδεγ τετράγωνον, ἀπὸ τῆς βγ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ηϛ, θγ, ἀπὸ τῶν βα, αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ϛγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Συμπέρασμα.) Εν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μη. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Εκθε-

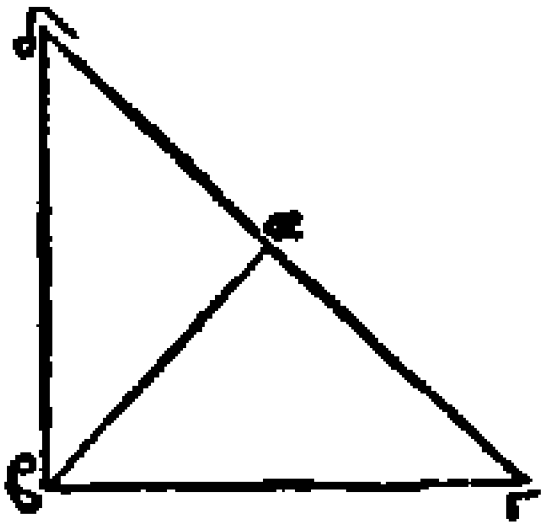
qualiũ sunt dupla, illa inter se sunt æqualia. ideoq; parallelogrammon ζλ, æquale est quadrato ηζ. Simili ratione quando αε, βη rectæ coniunguntur: demonstrabitur quod parallelogrammon γλ sit æquale quadrato θγ. totum igitur quadratum δβεγ, duobus quadratis ηβ, θγ est æquale. sed βδεγ quadratum, est descriptum à latere ζγ, & quadrata ηζ, θγ sunt descripta à lateribus βα, αγ. Quadratum igitur lateris ζγ, est æquale quadratis laterum ζα, αγ. (Conclusio.) In triangulis igitur rectangulis quadratum lateris rectum angulum subtendentis, est æquale quadratis laterum rectum angulum continentium. quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima octaua.
Theorema.

SI quadratum vnius lateris trianguli fuerit ęquale quadratis reliquorum duorum laterum: erit angulus quem reliqua illa duo trianguli latera continent, rectus.

Expli-

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, ἡ αδ, καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ αδ,



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ, αγ, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δα τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αβ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν δα, αβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ δαβ γωνία, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ ὑπόκειται γάρ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δβ, τῇ βγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, δυσὶ ταῖς βα, αγ ἴσαι

αἱ

Explicatio dati.) Sit quadratum lateris $\beta\gamma$, trianguli $\alpha\beta\gamma$ æquale quadratis laterũ $\beta\alpha, \alpha\gamma$. *(Explicatio quæsiti.)* Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$ sit rectus. *(Delineatio.)* Ducatur à puncto α, lineæ rectæ $\alpha\beta$, ad angulos rectos linea recta $\alpha\delta$: & fiat linea $\alpha\gamma$ æqualis rectæ lineæ $\alpha\delta$: deniq; ducatur linea recta $\delta\beta$. *(Demonstratio.)* Quoniam recta $\delta\alpha$, est æqualis rectæ $\alpha\gamma$: idcirco & quadratum à recta $\delta\alpha$ descriptum, erit æquale, quadrato à recta $\alpha\gamma$ descripto. Commune addatur quadratum rectæ $\alpha\beta$. quare quadrata rectarũ $\delta\alpha$, $\alpha\beta$ sunt æqualia quadratis rectæ $\beta\alpha, \alpha\gamma$. verum quadratis rectarum $\delta\alpha, \alpha\beta$, æquale est quadratum rectæ $\delta\beta$, quia angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus. quadratis verò rectarum $\alpha\beta, \alpha\gamma$ æquale proponitur esse quadratũ rectæ $\delta\beta$. Quare quadratum rectæ $\delta\beta$, æquale est quadrato rectæ $\beta\gamma$. vnde etiam latus $\delta\beta$ lateri $\beta\gamma$ est æquale. Quoniam vero latus $\alpha\delta$, est æquale lateri $\alpha\beta$, commune verò latus $\alpha\gamma$: duo latera $\delta\alpha$, $\alpha\beta$, duobus lateribus $\beta\alpha, \alpha\gamma$ sunt æqualia, & basis εἰσί, καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῇ βγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία, τῇ ὑπὸ βαγ, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δαβ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΕΛΟΣ.

basis $\delta\beta$, est æqualis basi $\beta\gamma$: idcirco & angulus $\delta\alpha\beta$, angulo $\beta\alpha\gamma$ est æqualis. Verum angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus, quare & angulus $\beta\alpha\gamma$ etiam erit rectus. (Conclusio.) Si igitur quadratum vnius lateris trianguli fuerit æquale quadratis reliquorum duorum laterũ: erit angulus quem reliqua duo trianguli latera continent rectus. Id quod erat demonstrandum.

FINIS.

Scholia in hoc primum Euclidis elementum, autore Cunrado Dasypodio.

De scientijs Mathematicis.

Mathematicas scientias sic dictas volunt, quòd cum alias artes etiam absq; præceptore intelligere, & addiscere poßimus: has tamen non nisi instituti, & edocti, imò in illis exercitati percipere queamus: vt à discendo disciplinæ, à μαθήσει ἐπιστήμαι μαθηματικαὶ dicantur. Pythagorici autem mathematicæ nomen, duabus tantum scientijs Arithmeticæ, & Geometriæ imposuerunt: quoniam in his potißimum τὸ ἐπιστημονικὸν, & ipsa μάθησις cerni potest. po[illegible]ea tamen nonnulli latius sumpto vocabulo, alias [illegible]tias hisce cognatas appellarunt mat[illegible]ematicas, Astronomiam, Musicam, & quæ huius sunt generis. Hinc fit, vt mathematica definiatur scientia contemplationẽ habens rerũ, non tantum abstractarum, vt sunt numeri, & figu-

& figuræ: sed & sensibus ipsis subiectarum, vtpote cæli, terræ, stellarum, sonorum, tonorum, & quæcunq; his sunt similia.

Hanc verò vniuersalem mathesin in duas potißimum partes diuidunt: altera enim versatur circa res mẽte & ratione perceptas, quæ Græcis nominantur τὰ νοητὰ, *&* διανοητά. *altera verò* τῶν αἰσθητῶν, *rerum sensu subiectarum habet perceptionem: illa Geometriam, & Arithmeticam cõplectitur: hæc verò in sex est diuisa scientias, Geodæsiam, & Opticam, quæ ex Geometria nascuntur: Logisticam & Canonicam prognatas ex Arithmetica: deniq; Mechanicam, & Astronomiam, quas ad vtramq; referri tradunt. Est & alia mathematicæ diuisio, in quatuor partes tantum facta. quoniam* μάθησις *habet perceptionem quantitatis cõtinuæ, vel quantitatis discretæ. Geometria enim, & Astronomia sibi habent subiectas ipsas magnitudines: Geometria quidem eam, quæ est sine motu: Astronomia eam, quæ mouetur. sic etiam* *multitudinis & numerorũ fit cõtemplatio in Arithmetica, & Musica: illa enim numeros per se considerat, eorumq́; proprietates inuestigat: hæc verò numeros tractat relatos, quos etiam harmonicos appellant. Itaq; vniuersalis quædam mathematica cognitio & doctrina est statuenda, sub se complectens reliquas disciplinas omnes, suaq́; principia, & vniuersales propositiones omnibus communicans, non quatenus numeris, aut figuris, vel deniq; motibus illa insunt: sed quatenus eorũ vniuersalis est natura, & talis, quæ singularibus illis disciplinis attribui potest. Sunt autem eiusmodi principia* τὸ πέρας, ϗ τὸ ἄπειρον, *finitum, & infinitum: quia numerus incipit ab vnitate, & in infinitũ vsq; crescit: is verò qui sumitur, finitus semper est: sic etiam magnitudines in infinitum vsque diuidi possunt: cum tamen ea, quæ diuiduntur, sint finita, & terminata. Propositiones verò mathematicæ communes sunt istæ, in quibus cõtemplamur* λόγους, ἀναλογίας, συνθέσεις,

διαιρέ-

διαιρέσεις, ἀναστροφὰς, ἐναλλαγὰς, τὸ ἴσον, τὸ ἄνισον, id est, rationes, proportiones, compositiones, diuisiones, conuersiones, alternas permutationes, æquale, & inæquale. deinde τὸ κάλλος, καὶ τάξις, ipsaq́; μέθοδος. præterea ὁμοιότης, καὶ ἀνομοιότης, similitudo, & dißimilitudo rerum in figuris, numeris, & motibus vniuersaliter considerantur. hæc inquam omnia, & his similia vnaquæq; disciplina ad suam accomodat rem subiectam, eaq́; ei inesse proprijs confirmat rationibus. Præterea Mathematicarum disciplinarum fastigium & vertex quasi est ipsa ἀποδεικτική, quia per ipsam hæ scientiæ perficiuntur, dum definitionibus, diuisionibus, demonstrationibus, & quicquid harũ rerũ est, vtuntur.

De Geometria, & eius elementis.

Proclus Geometriam sic definit: γεωμετρία ἐστὶ γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων: ἔτι δὲ καὶ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτὰ, καὶ τῶν παντοίων θέσεων, καὶ κινήσεων. Geometria est scientia, vel cognitio magnitudinum, & figurarum, atque etiam terminorum quibus illæ clauduntur: quæque proportiones, & rationes, atque etiam paßiones his accidentes demonstrat: positionum denique, & motuū varietates explicat. Hæc scientia duplex est: altera nominatur θεωρία τῶν ἐπιπέδων: altera στερεωμετρία. Planorum contemplatio tanquam simplicior præcedit, siquidem ex superficierum contemplatione nascitur corporum & solidorum cognitio. in vtraque verò tria (sicuti in omnibus scientijs) considerantur. Primum τὸ ὑποκείμενον γένος, res ipsa, de qua doctrina est instituta: alterum τὸ καθ' αὑτὸ ὑπάρχον, id quod rei per se inest, & τὰ πάθη, rerum affectiones: tertium ἀξιώματα, & αἰτήματα, propositiones, per quas rebus subiectis inesse aliquid demonstratur. illa itaque in Geometria consideranda veniunt: nam vt ex definitione Geometriæ licet videre: subiecta sunt trianguli, quadrata, circuli, sphæra, Cylindri, & vt summatim

matim dicam, figuræ planæ, corpora solida, deniq́ omnes magnitudines immobiles, & harum termini. quæ verò his per se insunt, διαιρέσεις, συστάσεις, ἁφαὶ, παραβολαὶ, ὑπεροχὴ, ἔλλειψις, ἰσότης, καὶ ἀνισότης, id est, diuisiones, constitutiones, contactus, applicationes, excessus, defectus, æqualitas, & inæqualitas: cum alijs quibusdam huius generis. Axiomata, & petitiones, quibus singula rebus subiectis demonstrantur inesse: sunt huiusmodi, quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: item à puncto ad punctum ducere lineam rectam. Hæc verò cum latè pateant, & ipsarum rerum subiectarum, atq́ propositionum geometricarum magna, variaq́ sit copia: necesse est, vt delectus habeatur, & in tradendo, atq́ docendo incipiamus à simplicioribus, ac principalioribus: ex quibus tanquam notissimis extruamus demonstrationes rerum in geometria abstrusarum. quas quidem simpliciores propositiones στοιχεῖα, earumq́ doctrinam στοιχείωσιν Græci *nominant. sunt enim στοιχεῖα, seu elementa Geometriæ, propositiones simplicissimæ, in quas compositæ resoluuntur, & à quibus tanquam principijs omnes Geometricæ demonstrationes egressæ sunt: tales sunt hæ propositiones Euclidis, quibus Archimedes, Apollonius, & cæteri geometræ tanquam principijs, & notissimis elementis vtuntur: ita tamen hæc prima, & simplicissima Geometriæ principia ab Euclide conscripta sunt, vt nemo satis possit hominis & ingenium, & industriam mirari. quæ enim ab antiquis fuerunt inuenta, in optimum redegit ordinem: delectum etiam in tanta copia, & varietate propositionum habuit talem, vt non omnia quæ dici poterant, assumeret: sed ea tantum, quæ elementari institutioni conueniebant. deinde omnes modos, omniaq; genera syllogismorum adhibuit, quæcunq; ab ipsis apodicticis recipiuntur. Præterea vtitur diuisionibus in inueniendis rerum speciebus, item definitionibus in substantiali rerum subiectarum explicatio-*

eatione. adhæc demonstratione in ijs, quæ à principijs fiunt ad quæsita. deniq; resolutione cum à quæsitis ad ipsa principia fit reditus. Taceo de varijs, quibus vtitur conuertendi modis, continuatione, & dispositione singulari ipsorum elementorum: vt vnum absq; altero videatur esse non posse. Quæ cum ita sint, meritò omnes studiosi philosophiæ, & bonarũ artium, sibi hæc Euclidis elemēta familiaria reddere debebant, vt ad altiores capescendas scientias fierent paratiores.

De Propositionibus Geometriæ.

Solent Geometræ duo præcipua propositionum genera habere: vnum est τῶν ἀρχῶν principiorum: alterum τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς προτάσεων: id est, propositionum, quæ principia sequuntur. principia ipsa quia per se manifesta, & simplicia sunt nulla adhibita demonstratione primo explicantur loco: subsequuntur propositiones demonstratione indigentes, & ex ipsis demanantes principijs: & nisi hic ordo teneatur, verum permisceantur omnia, tum & ipsa cognitio perturbatur: & quæ natura sunt distincta, coniunguntur. Illud ipsum facit Euclides, & principiorũ facta enumeratione, absq; vlla demonstratione: transit ad propositiones demonstrabiles. diuidit verò ipsa in ὑποθέσεις αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα ἢ κοινὰς ἐννοίας. Est autem ὑπόθεσις, cum aliquis rei propositæ cognitionem nondum habet, quæ per se fidem rei faciat. verum concedit assumenti illud verum esse. eiusmodi sunt ipsæ definitiones Euclidis. Postulatum verò in genere est, cum neq; cognitũ quid est, neq; ab audiente concessum, tamen petitur ab alieno, vt assumi concedatur. sicuti cum peto mihi concedi omnes angulos rectos æquales inter se esse. Axioma, vel pronunciatum est quando quid cognitum est, & tam manifestum, vt per sese fidem habeat. vt quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: totum maius est sua parte. Geometræ tamen hypotheseis vocant etiam ὅρους definitiones rerum subiectarum: vt si definiam line-

lineam, angulos, figuras, & similia: quo sciatur, quibus de rebus sermo sit institutus. deinde αἴτημα, seu postulatum non sic sumunt vt Philosophi: sed postulatum vocant propositionem immediatam, in qua petitur aliquid quod factu est facile, & nulla indiget varia aut prolixa delineatione, vt si dicam, à puncto ad punctum ducatur linea recta. Communis deniq; sententia Geometris dicitur propositio immediata, quæ per se manifesta, & cognitu perfacilis est, sine vlla demonstratione recepta: & communi omnium consensu concessa. Itaq; tria ista propositionum genera in eo conueniunt, quòd principiorum naturam habeant, ac per se sint manifesta. differunt verò, quòd hypothesis sit rerum subiectarum explicatio: postulatū proponit aliquid, quod factu sit facile: axioma rei per se manifestæ sit cognitio. Quidam verò petitiones dicunt tantum ad Geometriam spectare: axioma vero ad omnes disciplinas. Alij diuidunt hoc modo ipsas communes sententias, vt quasdā

Geometriæ, nonnullas Arithmeticæ proprias esse dicant: alias deniq; communes. atq; hæc sint paucis dicta de principijs. Propositiones verò, quæ principia sequuntur, & demonstrari possunt ac debent: aliæ sunt προβλήματα, aliæ θεωρήματα. Problemata dicuntur propositiones, in quibus aliquid nobis ad agendū proponitur: vt quando figurarum ortus & constitutiones, sectiones, subtractiones, additiones, & similia proponuntur. Theoremata autem sunt, in quibus ad contemplandum quiddam proponitur, vt si ea, quæ rebus per se insunt, aut accidunt, consideramus. cuiusmodi dicuntur esse τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα ἢ συμβεβηκότα, vel etiam συμπτώματα, aut deniq; τὰ πάθη. Differunt itaq; inter se, sed non aliter quàm petitio, & axioma. Euclides vtroq; genere vtitur. nam interdum tantum habet problemata, vt in quarto libro, interdū verò solum theoremata, sicuti in quinto: nonnunquam deniq; theoremata problematibus commiscet, vt in reliquis facit libris.

De

De primo Libro.

Proposuit sibi Euclides in hoc primo elemento principia figurarum rectilinearũ tradere: nam triangulus & parallelogrammon sunt in figuris rectilineis omnium primæ, & simplicißimæ. Diuisit verò librum in partes tres: in prima, post explicationem principiorum, docet quomodo triangulus sit constituendus, quæ sint eius proprietates, cùm quoad angulos, tum etiam latera: præterea eosdem comparat inter se, & vnumquodq; accidens per se considerat: in altera de lineis æquedistantibus, & parallelogrammis doctrinam instituit, demonstrans quæ eis per se insint, & quomodo ipsa fiant parallelogramma. in postrema, parallelogramma & triangulos inter se confert, primum seorsim, deinde coniunctim. Atq; hæc breuiter sint dicta, & explicata de vniuersali illa rerum mathematicarum & Geometriæ cognitione: nunc subiungemus perbreues locorum difficiliorum expositiones, & si quid forsan occurret, quod latius sit explicandum, & ad vniuersam Geo-

meti

metriam spectare videbitur, id fusius exponemus. cuiusmodi est ille locus περὶ τοῦ πορίσματος, ἐνστάσεως ἀπαγωγῆς, & de ijs, quæ his similia.

Σημεῖον.) Alij sic definiunt: σημεῖον ἐστὶ μονὰς θέσιν ἔχουσα, punctum est vnitas quæ positionem habet. solum punctum in Geometria diuidi non potest: sicut in Arithmetica vnitas non admittit diuisionem. sunt enim vnius, eiusdemq́ naturæ: quum duarum scientiarum omniũ prima, & simplicißima sint principia: differunt tamen in eo, quòd punctum dari & poni poßit: vnitas verò puncto simplicior existens non ponatur: cum ab omni interuallo, omniq́ materia, ac loco sit abstracta. Vtitur autem definitione negatiua, quoniam negationes maximè conueniunt principijs.

Γραμμή.) Principium omnium magnitudinum sola negatione definiuit: lineam verò nunc describit affirmando, & negando. quia affirmatione excedit naturam puncti, & minus est simplex puncto, cum sit longitudo diuisionem admittens: negatione verò est principium respectu superficiei, & corporis. sunt enim tres dimensiones: longitudinis quæ attribuitur lineæ, longitudinis & latitudinis simul, quæ ad superficiem refertur: denique longitudinis & latitudinis, atque profunditatis coniunctim in corpore. cum itaque in definitione ponit ἀπλατὴς latitudine carens: vnà cum latitudine adimit quoque profunditatem, atque eam ob causam non addidit καὶ ἀβαθὴς, cum superfluum esset. Alij sic definiunt lineam: γραμμὴ ἐστὶ ῥύσις τοῦ σημείου, id est, linea fit ex fluxu puncti: nonnulli γραμμὴν μέγεθος ἐφ' ἓν διαστατὸν nominant, magnitudinem vno contentam interuallo. Euclidis tamen definitio perfectior est, essentiam & substantiam lineæ explicans. Possumus autem lineam hoc modo cognoscere, si longitudines parietum, aut itinerum spatia dimetiamur, quia tum neque latitudinem, neque crassitiem subiungimus, sed vnicam consideramus distantiam, sicuti cum metimur prata, & campos, videmus ipsam tantum super-

perfi-

perficiem, id est, longitudinem & latitudinem tantum eius loci, vel agri. Cùm verò puteos, tũ est solidum, quia omnes distantiæ, omniaq; interualla ibi coniunguntur: dicimus enim longitudinis, latitudinis, profunditatis ipsius putei, tantum vel tantum esse spatium, melius tamen cognoscemus lineam, quando obseruamus quomodo lucidum ab obscuro, illuminatum ab obumbrato distinguatur.

Εὐθεῖα.) Duæ simplicissimæ, ac præcipuæ linearum species sunt, recta & circularis: reliquæ omnes sunt mixtæ: & vel in superficiebus planis, vel in corporibus solidis considerantur. Plato lineam rectam definit sic: εὐθεῖα γραμμὴ ἐστι, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ: cuius media obumbrant extrema: quod licet videre in Eclipsi Solis, quando in vna linea recta sunt Sol, Luna, & oculus noster, Luna media inter nos & Solem existente. Archimedes definit lineam rectam sic: εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν, est breuissima earum

rum linearum, quæ eosdem habent terminos. atq; hæc definitio explicat Euclideam, & vicissim illa declarat hanc.

Επιφάνεια.) Post punctum & lineam sequitur superficies, quæ duplici interuallo distat longitudine, & latitudine: caret verò crassitudine: atq; eam ob causam addidit particulam μόνον.

Επιφανίας δὲ.) sicut corpus solidum clauditur, & terminatur superficie, sic & superficies linea finitur, & linea puncto, quod quidē est omnium magnitudinū communis, & simplicissimus, atq; externus terminus.

Επίπεδος ἐπιφάνεια.) Omnis superficies vel est plana, vel circularis, & sphærica. vnam igitur geometra delegit, eamq; definit, nempe planam. possunt ei etiam congruere definitiones lineæ rectæ supra positæ: in hac autem plana superficie nos tanquam in aliquo subiecto contemplamur figuras, & figurarum affectiones. nam in plana superficie nos ducimus lineas rectas, circulares, & figuras

ras omnis generis: item linearum, circulorū, & figurarum sectiones, contactus, applicationes angulorum, constitutiones, & quicquid barum est rerum: sed planam superficiem idcirco elegit, quoniā in alijs superficiebus ista omnia non possunt ita intelligi aut describi, quemadmodum in plana. Vocat itaq; hic planum id, quod nobis ante oculos est positum, & in quo mente atq; cogitatione omnia describimus, & delineamus, atq; firmis rationibus confirmamus.

Ἐπίπεδος γωνία.) Genus definitionis est κλίσις, inclinatio: locus autem in quo describitur angulus, est τὸ ἐπίπεδον, planum ipsum: ortus verò eius est, quòd ad minimum duæ debēt esse lineæ rectæ: sicuti in solido angulo lineæ tres: deinde illæ duæ lineæ rectæ debent sese mutuo tangere, neq; sitæ esse in directo, illud enim est ἐπ' εὐθείας, quando duæ lineæ rectæ ita collocatæ sunt, vt protractis istis lineis rectis, & concurrentibus vna ex duabus fiat linea recta.

Ὅταν

Οἷαν δὲ.) *Enumerat ſpecies ſubſtantiales anguli rectilinei. definitionibus acuti & obtuſi anguli eſt addendum genus, quod ſcilicet vterque ſit rectilineus, alter maior recto, alter vero recto minor. Verum non abſolute illud eſt ſumendum, quod omnis angulus recto minor ſit acutus, quia ſunt anguli nonnulli etiã non rectilinei, & tamen non acuti: ſicut neque illud ſimpliciter ſumitur, quod obtuſus ſit recto maior, & idcirco omnes recto angulo maiores ſunt obtuſi, quoniam ſunt anguli recto maiores, qui non ſunt obtuſi.*

Σταθεῖσα.) *Rectam ſuper recta conſtituit in definitione anguli recti, non autem in anguli obtuſi aut acuti deſcriptione: quia angulus rectus eſt angulorum non rectorum menſura: ſicuti æqualitas eſt regula & norma inæqualitatis.*

ἀλλήλαις.) *Poſſunt enim æquales eſſe, ſed ſi inter ſe æquales ſint, neceſſe eſt vt ſint recti.*

Εφεξῆς.) *Indicat cauſam rectitudinis, quia ſi anguli contigui inter ſe ſunt æquales,*

N rectus

rectus erit vterq; illorum æqualium angulorum: nam stans illa recta in neutrum inclinat partem, & idcirco causa est non æqualitatis tãtum, sed & rectitudinis. Traditur verò hic de angulis, qui sunt in vno eodemq; plano, sicuti & perpendicularis non quælibet hic definitur, sed illa tantum, quæ in vno, eodemq; est plano.

Κύκλος.) Prima simplicißima, atq; perfectißima figura plana est circulus, vt in corporibus solidis sphæra.

Σχῆμα.) quia vno comprehenditur termino. ἀφ' ἑνός.) sunt enim infinita in circulo puncta, quorum omnium vnum tantum centri nomen & naturam retinet. Ἐντός.) ad differentiam eius puncti, quod extra circulum sumitur, & polus dicitur: omnia enim in vno sunt plano. idcirco etiam statim definitionem illius puncti subiungit, vt sciamus nõ polum, sed centrum intelligi.

Διάμετρος.) Circulo propriè conuenit: nam ἄξων vel axis est ipsius sphæræ, Διαγώνιος.

νιΘ· verò figurarum quadrilaterarum.

ἡμικύκλιον.) Semicirculum inquit circuli diametro & circumferentia comprehendi propter τμήματα segmenta circulorum, quorum alterum μείζων maius, alterum ἔλαττον minus dicitur.

Ευθύγραμμα.) à figura quæ vno termino ad eam quæ duobus comprehenditur, est progressus: nunc ad alias pergit explicandas: idq; iuxta ordinem numerorũ, binarium, & ternarium, & ita deinceps, quamuis vltra quadrilateras figuras, quæ in elementis locum habent, non progreditur specialiter: verum sub vno vocabulo comprehendit: & eas nominat τὰ πολύπλευρα, multi lateras figuras. Omnis igitur figura rectilinea, vel est trilatera: vel quadrilatera, vel gradatim multilatera: : sed non è contra omnis trilatera, quadrilatera, aut multilatera est rectilinea.

Τριπλεύρων. Triangulorum duplex est diuisio: vna per se manifesta, & cognita sumpta ab ipsis lateribus: altera quæ eam subse-

quitur est propria ab ipsis angulis facta.

Τετραπλεύρων.) *Præcipua diuisio quadrilaterarum figurarum hæc est: aliæ dicuntur parallelogramma, aliæ nõ parallelogramma: quæ verò parallelogramma dicuntur: aliæ rectangula, & æquilatera sunt, vt* τετράγωνον *quadratum: aliæ verò horum neutrũ habent, vt* τὸ ῥομβοειδὲς, *Rhombi speciem habens. nonnulla verò sunt quidem rectangula, sed non æquilatera, vt* τὸ ἑτερομηκὲς, *parallelogrammon altera parte longius: denique sunt parallelogramma, quæ æquilatera quidem, sed non rectangula sunt, vt est* ῥόμβος, *Rhombus. Figuræ verò quadrilateræ, quæ non sunt parallelogramma, aut duo tantum habent parallela latera, & sunt* τραπέζια, *trapezia: aut nulla prorsus parallela latera, & nominantur* τραπεζοειδῆ, *speciem trapezij habentia. Verum Euclides hanc diuisionem facere non potuit, cum de parallelis lineis aut figuris hisce lineis contentis nulla sit facta mentio: idcirco simpliciorem illam*

facit

facit diuisionem τετραπλεύρων.

Καὶ πᾶσαι ὀρθαί.) Quidam iuxta Peripateticos volunt hanc propositionem esse αἴτημα, petitionem: alij verò & melius ἀξίωμα pronunciatum. Cum nunc paucis absoluerimus principia: restant propositiones demonstrabiles. omnis enim scientia vel versatur in principiorum explicatione, quas sine vlla demonstratione adhibita recipit: vel in doctrina propositionum earum, quæ ex ipsis demanant principijs: & per ea demonstrantur: quare & nos illas aggrediamur.

De partibus problematis, atque Theorematis.

Propositiones quæ demonstrationem admittunt, suprà duplices constituimus esse: vel enim sunt προβλήματα, problemata: in quibus ea, quæ quodammodo nondum existunt comparare, & constituere proponitur: vel θεωρήματα, theoremata, in quibus id quod iam constitutum est, & in rerum natura existit, cognoscere, & perspicere statuimus. Geometria enim, vt & aliæ scientiæ, habet omnes quatuor quæstiones: an sit, quid sit, quale sit, & quare sit: de quibus quidem omnibus sermonem instituit ipsa Geometria, vt apud Euclidem videbimus. Omne verò problema, omneq; theorema, quod suis perfectum, & absolutum est partibus, hæc in se habet: πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὴν, ἀπόδειξιν, καὶ συμπέρασμα, id est, propositionem, in qua est τὸ δεδομένον, datum, & ζητούμενον, quæsitum: deinde explicationem dati: tertio explicationem quæsiti: quarto delineationẽ: quinto demonstrationem: sexto & postremo conclusionem totius. Nam in propositione quid de re subiecta, vel ipso dato quæratur, proponitur. perfecta enim propositio, & datum, & quæsitum habet, quamuis nonnullæ sint, quæ altero careant: postea ἔκθεσις ipsum datum per sese cõsiderat, & ipso quæsito quasi præparat & struit viam. διορισμὸς seorsim proponit quid de subiecto quæratur. Delineatio verò solet ea addere, quæ ad inuestigationem

nem quæsiti pertinent: ipsa autem demonstratio adhibitis certis atque firmis, priusque concessis & affirmatis rationibus id de subiecto dici, quod proponitur, confirmat. tandem facta ipsa demonstratione, conclusio redit ad ipsam propositionem, eamque confirmatam, & demonstratam iam esse colligit: solet verò interdum duplex esse, vna specialis in ipsa delineatione, & demonstratione facta: altera generalis, quæ totam confirmationem propositionis datæ colligit vniuersaliter.

Ex his vniuscuiusque problematis, aut theorematis partib. maximè necessariæ sunt istæ tres: Propositio, demonstratio, & conclusio: reliquæ interdum adhibentur, & id vt plurimum, interdũ non adhibentur, vt in Arithmeticis fit, & in decimo Euclidis libro.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ.) Sunt quædam in Geometria, quæ nobis solent in medio demonstrationis cursu occurrere: qualis etiam in hac propositione est πτῶσις, casus. dicitur autem casus nihil aliud esse, quàm delineationis transpositio, quæ fit propter diuersas positiones. ab hoc casu quædam propositiones dicuntur Græcis ἄπτωτα προβλήματα, problemata quæ carēt casu, quando vna tantum est positio, & delineatio, siquidem casus respiciunt ipsam delineationem: quædam verò nominantur πλύπτωτα, problemata multos casus habentia, in quibus aliter atq; aliter fieri possunt delineationes. Hoc itaq; secundum problema multos habet casus, varias etiam delineationes. nam cum punctum detur positione, illa fieri potest varijs modis: vel enim ponitur extra datam lineam rectam, vel in ipsa linea recta, & si in ipsa, aut erit alterū extremorum, aut inter ipsa extrema: & si extra ipsam, aut à latere, ita vt recta protracta à puncto ad datam lineam rectam, angulum faciat, aut è directo. Euclides sumpsit casum difficiliorem, & punctum extra lineam rectam datam à latere eius ponit.

Δοθείσῃ εὐθεία.) Omne datum vel datur θέσει, positione, uel λόγῳ, ratione, vel μεγέθει, magni-

magnitudine, vel εἴδει, specie. positione tantum datur ipsum punctum, linea verò, & reliqua Geometriæ subiecta omnib⁹ modis. hoc tamen in loco linea recta datur εἴδει specie, est enim linea recta & θέσει positione.

Δύο δοθεισῶν.) In hac propositione lineæ dantur magnitudine: ipsa delineatio multos habet casus, nam aut distāt inter se, vt apud Euclidem, aut in vno puncto coniunguntur, aut sese mutuo secant: aut altera alteram in extremo alterius puncto tantum secat: & vel maior minorem, vel minor maiorem, & quicunque eiusmodi fieri possunt casus. veruntamen ad omnes huiusmodi casus Euclidis demonstratio se accommodat.

Εὰν δύο τρίγωνα.) Prius docuit trianguli constitutionem, quàm ea explicaret, quæ per se triangulis accidunt: præterea duabus propositionibus ostēdit viam & methodum, qua lineæ rectæ facienda sit alia recta æqualis. altera quidem non existentem facit per σύστασιν, constitutionem, & θέσιν positionem æqualem. altera verò per ἀφαίρεσιν, ablatione, idq́ue fecit vt latera laterib⁹ posset æqualia proponere. dantur in hac propositione duo, æqualitas laterum duorum, & angulus angulo æqualis: idq́ue datum ratione dari dicitur: quæruntur tria, basis basi, triangulus triangulo æqualis: reliqui denique anguli reliquis angulis æquales.

Εκάτεραν ἑκατέρᾳ.) quia aliâs Theorema verum non esset, idcirco nō simpliciter inquit latus lateri æquale, sed alterum alteri. possent enim duo latera simul iuncta duobus simul iunctis esse æqualia: sed non idcirco triangulus esset triangulo æqualis.

Υπὸ τῶν ἴσων.) hoc addidit ne sumeremus basin, nam in triangulis duo latera dicuntur angulum aliquem comprehendere περιέχειν, tertium verò ὑποτείνειν subtendere: nam latera quæ angulis opponuntur è regione, sunt ὑποτείνουσαι πλευραὶ, latera subtendentia, & interdum βάσεις bases dicuntur, quòd tanquam fundamento figura ipsa hoc nitatur latere.

Τρίγωνον.) *Intelligit aream ipsam triangularem, seu spatium ipsum, quod à trianguli lateribus intercipitur.*

Demonstratio tota facta ex his duabus propositionibus, quæ inter se applicata conueniunt: æqualia erunt: & vicissim. Quæ inter se sunt æqualia: si applicentur, conuenient etiam inter se.

Τῶν ἰσοσκελῶν.) *Theoremata apud Geometras magnam habent varietatem. alia enim sunt* ἁπλᾶ, *simplicia, in quibus vnum est datum, & vnum quæsitum: quorum & data, & quæsita diuidi & seiungi non possunt. Vt si dicat Euclides, omnis triangulus æquicrurus, habet angulos ad basin æquales. alia composita* σύνθετα, *quæ ex pluribus vel datis, vel quæsitis constant: vt data sint plura, & vnum quæsitum: vel plura quæsita, & vnum datum, vel deniq; plura data, & plura quæsita. composita sunt duplicia: quædam dicuntur* συμπεπλεγμένα, *quæ possunt in*

alia

alia simplicia theoremata diuidi: vt cum dico trianguli, & parallelogramma sub eadem altitudine existentia: eam habent rationem, quam basis ad basin. de vtroq; enim, & triangulo, & parallelogrammo seorsim eadem dici possūt. Quædam verò ἀσύμπλεκτα, quæ cum sint composita, in simplicia tamen theoremata diuidi non possunt: quale est præcedens theorema quartum. Est & alia diuisio theorematum, de qua alibi. Hoc theorema ex vtraq; parte, dati nempe, & quæsiti compositum est, idcirco etiam distinxit quæ data sint & quæ quæsita.

Ἐὰν τριγώνου.) In hac propositione duo nobis occurrunt explicanda: primum est ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων: alterum ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. Est autem ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων, quando ex dato alicuius propositionis, fit quæsitum: & ex quæsito datum. vt triangulus æquicrurus, id est, habens duo æqualia latera: etiam angulos ad basin habet

æqua-

æquales, per ἀναστροφὴν conuersionem sic. Triangulus qui angulos ad basim habet æquales, etiam est æquicrurus, id est, duo habet æqualia latera: nam propositio quinta hic cõuertitur iam dicto modo. Est etiam alia conuersionis ratio in propositionibus compositis obseruata, quæ fit permutatione partium, etsi non omnium, tamẽ aliquarum: vt fit in octaua propositione: quæ cõuertitur cum quarta. Quare notemus hic esse duo genera propositionum: vnum est τῶν προηγουμένων, quãdo id quod natura subiectum est, datur: quodúe illi per se inest, quæritur de eodem: alterum τῶν ἀντιστροφῶν, cum è cõtrario σύμπτωμα seu accidens quoddam datur: et id, cui hoc accidit, in quæstionem adhibetur, vt in his duobus licet videre propositionibus, quinta, & sexta. Proximum est, vt dicamus de ἀπαγωγῇ εἰς τὸ ἀδύνατον, de reductione ad impossibile. sciendum itaq; est, quòd omnis demõstratio mathematica, vel fit ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, quæ ab ipsis principijs ad ea, quæ ex his dema-

demanant, progreditur: vel ἐπὶ τὰς ἀρχὰς, dum à re proposita regressus fit ad principia. vtraq; verò est duplex: illa enim vel ex principijs rem propositam confirmat, vel ex rebus antea affirmatis, & concessis: hæc autem vel est θεωρητική, & nominatur ἀνάλυσις, cui opponitur σύνθεσις: vel ἀναιρετική, & dicitur ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. est autem reductio ad impossibile, quando in aliquod manifestum absurdum, & impossibile desinimus: & cuius contrarium omnes fatentur esse verum: eam quoq; faciunt bifariam: vel enim nos deducit ad ea, quæ principijs, ipsisq; axiomatibus manifestè repugnant, vt si quis sua argumentatione eò deueniat, totum esse æquale parti: vel ad id, quod demonstratis, & affirmatis è directo opponitur: sicuti facit in demonstratione propositionis octauæ. fit igitur reductio ad impossibile, cum id quod quæsito repugnat, accipimus pro vero, & ita progrediendo tandem in manifestum absurdum incidimus: quo deniq; sublato, id confirmamus,

mus, quod ab initio erat propositum, verum esse. Hæc demonstrandi forma syllogismis vtitur hypotheticis, quemadmodum in directis demonstrationibus vtimur categoricis. Hoc in loco Euclides conuersione est vsus in propositionis partibus: deductione verò in ipsa delineatione, ac demonstratione.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς.) in Geometria, & Arithmetica, vt plurimum sunt propositiones vniuersales affirmatiuæ: verum Euclides hic posuit negatiuam, sed omnibus additamentis ita eam muniuit, & tam certam, atque indubitatam reddidit, vt minimè conuinci possit. quamuis non magnum in Geometria vsum habeat: tamen præcipuè posita est ad confirmandam octauam propositionem.

Τὴν δοθεῖσαν.) Angulus hic datur specie tantum: potest enim omnibus quatuor modis dari, nempe positione, cum ad certum quoddam punctum constituitur: forma deinde, vt si ponatur esse rectilineus: ratione verò, quando duplum triplumue statuo: denique magnitudine,

dine, si dicam eam esse tertiam recti partem.

Πεπερασμένην.) Omnis enim linea recta aut est finita ex vtraq; parte, aut ex altera tantum finita, et ex altera infinita: aut deniq; ex vtraq; parte infinita.

Κάθετον ἀχθεῖσαν.) κάθετος perpendicularis etiam dicitur γνώμων, & eandem habet naturam cum ea, quæ nominatur ἡ πρὸς ὀρθὰς γωνίας. est autem duplex: vna plana, altera solida. plana perpẽdicularis est, quando à puncto aliquo ad lineam rectam in eodẽ plano existentem alia linea recta ducitur, vt anguli contigui sint æquales, quam in hoc loco antea ducere præcipit. solida, quæ in Stereometria consideratur, dicitur quando punctum in alio fuerit plano, & non ad rectam, sed ad aliud planum ducitur linea quædam ad angulos rectos. differunt igitur inter se, quia perpendicularis est in eodẽ plano, & ducitur ad lineam rectam: solida verò nõ in vno eodemq; plano, nec etiam ad rectam, verum ad planum ducitur: deniq; in solida id consideran-

derandum, quòd ad omnes quæ in eo sunt plano rectas, non ad vnam tantum, vt plana, debet esse perpendicularis.

Ἄπειρον.) *quæ pro nostro sumitur arbitrio satis longa vel breuis, longior vel breuior, vt visum fuerit necessarium esse ad rei demonstrationem.*

Κατὰ κορυφὴν.) *Differunt anguli ἐφεξῆς, & anguli κατὰ κορυφὴν, quòd anguli ἐφεξῆς contigui fiunt per lineam, quæ alteram non secat: sed anguli κατὰ κορυφὴν per lineas duas sese secantes, sic dicti sunt, quod vertices in vno coniungant puncto.*

Ἐκ δὴ τούτου.) *Locus hic expostulat vt aliquid dicamus de corollario. in elementis igitur πορίσματα, seu corollaria sunt propositiones, quæ dum aliæ demonstrantur, simul apparent, & manifestæ fiunt, nobis etiam quærentibus, aut inuestigantibus eas. quale est hoc præsens πόρισμα. dum enim proponitur, quod duabus lineis rectis sese secantibus, anguli ad verticem sint inter se æquales, &*

firmis demõstratur rationib⁹, in ipsa occurrit nobis demõstratione quatuor illos angulos esse æquales quatuor rectis. Itaq; lucrifecimus per ipsam hanc propositionẽ, hoc πόρισμα. tripliciter verò diuidũtur: primũ enim omne corollarium vel est Geometricum, vel Arithmeticum, vel alterius scientiæ, vt iam dictũ, proprium est Geometriæ. In septimo verò Euclidis libro, propositione secunda, est Arithmeticum. deinde quædam corollaria sequuntur ipsa problemata: quædam verò theoremata: nam in hoc loco theorematis corollarium habemus: verum in libro secundo problematis. tertio alia corollaria sunt demonstrationis directæ, alia vero indirectæ, sicuti hoc præsens porisma natum est ex demonstratione directa: sed in propositione prima libri tertij facta demonstratione per reductionem ad impossibile, nascitur corollarium. possunt & alia porismatum discrimina tradi, nobis tamen hæc monstrasse satis est.

Ἐκτὸς γωνία.) In definitionibus mentionem

nem fecit diuisionis angulorum substãtialis: nunc alia est facienda eorum diuisio per accidens. omnis angulus vel est ἐντὸς, vel ἐκτὸς. id est, omnis angulus vel est intra ipsam figuram, vel extra eam. deinde anguli quidam sunt ἐφεξῆς, quidam ἀπ' ἐναντίον, id est, contigui, aut oppositi. in triangulis igitur sic se res habet, quando aliquod trianguli latus extenditur: nascitur angulus qui ad ipsam trianguli substantiam non pertinet, & cum extra figuram existat: nominatur externus. Verum ex illis tribus, qui ad triãgulum pertinent: vnus qui ei est proximus, nominatur contiguus, reliqui verò duo oppositi, respectu eius, qui extra triangulum est.

Πάντῃ μεταλαμβανόμενα.) Est Geometrica phrasis, qua vtimur, dũ volumus ostendere, quouis modo sumi vel latera, vel aliquod aliud Geometriæ subiectũ, aut accidẽs per se.

Explicauit Euclides quæcunq; in primis illis elementis poterant dici, de triangulorum constitutione, æqualitate, aut inæqualitate eorundem, aut etiam laterum, & angulorũ: nunc pergit de quadrilateris figuris enarrare ea, quæ ad eorum contemplationem elementarem pertinẽt. Cum verò ex lineis æque distantibus fiant eiusmodi figuræ: prius earũ proprietates docet, & parallelogramma constituit: postea persequitur doctrinam de figuris quadrilateris, seu parallelogrammis. est autem παραλληλόγραμμον figura quæ circumscribitur lineis rectis æquedistantibus, atq; oppsitis inter se.

Tria itaq; in lineis parallelis sunt considerãda, quæ eis per se insunt, & ita attribuuntur, vt inde cognoscere possimus lineas rectas esse æquedistantes. Primum est, vt anguli ἐναλλὰξ alterni (qui fiunt per lineam rectam in alias duas rectas incidentem) sint inter se æquales. Alterum, recta linea incidente in duas alias rectas, si anguli interni fuerint duobus rectis æquales, tũ propositæ duæ rectæ sunt æquedistantes. Postremum, Recta linea secante alias duas rectas, si externus angu-

angulus, angulo interno sibi opposito ex eadem parte, fuerit æqualis, iterum erunt illæ rectæ æquedistantes.

ἡ εἰς τάς.) Hoc Theorema conuertitur cum ambobus præcedentibus. in demonstratione vtitur propositione, quæ inter principia est relata, sed principium non est.

Παντὸς τριγώνου.) Ea quæ decima sexta, & decima septima propositione erant omissa, in hac præsenti addit, & quanto minores sint, explicat, nempe tertio, & huius propositionis maxima est vtilitas.

Αἱ τὰς ἴσας.) Hæc propositio finit doctrinam linearum æquedistantium, & incipit parallelogrammorum traditionem.

Τῶν παραλληλογράμμων.) Postquam constituit parallelogrammon, inuestigat tria quæ parallelogrammis per se insunt. Primum latera opposita esse æqualia. Secundum, angulos oppositos esse æquales. Tertium, diametrum per medium ipsam secare figuram. Ita fit, vt à lateribus ab angulis, & ab ipsis *areis proprietates inquirat parallelogrammorum.*

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν.) *Tria sunt apud Geometras vocabula:* παραβολή, ὑπερβολή, *&* ἔλλειψις. *cum enim figura applicatur ad lineam rectam, vt neq; excedat, neq; deficiat, est tum* παραβολή *applicatio. quando verò excedit* ὑπερβολή, *cum deficit* ἔλλειψις, *atq; in Conicis figuris maximè considerantur ista.*

Ἀπὸ τῆς.) *Videtur Euclides voluisse præstantiores figuras rectilineas describere, in triangulis, eum quem æquilaterum nominamus: in quadrilateris figuris ipsum quadratũ.*

Ἀναγράψαι.) *Vtitur hoc verbo, quoniã ab vno latere describitur:* συστήσασθαι *verò est, cum ex multis constituitur.*

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις.) *In hoc, & sequenti theoremate vtitur* λήμμασι, *id est, assumptiuis propositionibus, vtpote: Quæ ab æqualibus rectis lineis descripta sunt quadrata, illa sunt æqualia inter se. item æqualium quadratorum æqualia sunt latera.*

In qui-

In quibusdam etiam propositionibus vtitur aliis λήμμασι, assumptionibus, quas hic subiungam.

I. Si prima magnitudo fuerit æqualis magnitudini secundæ, & secunda maior sit tertia: erit etiam prima maior quàm tertia.

II. Si prima magnitudo fuerit maior secunda, & secunda sit æqualis tertiæ: erit etiam prima maior quàm tertia.

III. Si prima magnitudo fuerit maior quàm secunda: et secunda maior sit quàm tertia: erit etiam prima longè maior quàm tertia. Sunt & alia huius generis, de quibus aliâs.

FINIS.

Errata.

Pag. 1. linea 19. rectam, lege recta. pag. 2. 9. τὸν ἐκτὸς, lege τῶν. pag. 4. 12. τῶν πλευρων, lege τῶν τριπλεύρων. pag. 5. 2. quadrilateræ verò, lege quadrilateræ verò quas quatuor, multilateræ deniq; quas. Reliqua si quæ sunt, quiuis facile emendare poterit.