

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

O E U V R E S
P O S T H U M E S
D E
M^r R O H A U L T.

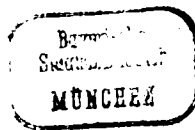


A P A R I S,

Chez GUILLAUME DESPREZ, rue S. Jacques,
à S. Prosper, & aux trois Vertus, au dessus
des Mathurins.

M. DC. LXXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROT.

CLIP





A MONSEIGNEUR
D'ESTRÈS
 EVESQUE, ET DUC DE LAON,
 PAIR DE FRANCE,
 COMTE D'ANISY.



ONSEIGNEUR,

Entre toutes les connoissances auxquelles l'Esprit humain se peut appliquer, il n'y en a point qui ayent plus de raport à la Religion que les Mathématiques. Toutes les Sciences se proposent également la recherche de la vérité, mais il n'y a qu'elles seules qui se puissent vanter incontestablement de l'avoir atteinte. En effet, si la Religion, par les lumieres surnaturelles de la foy, nous fait jour à ce qui est au-dessus de la portée de nos esprits; Les Mathématiques, par le moyen de ce Flambeau interieur & naturel que Dieu a allumé en nous, & à la faveur des premieres veritez generales qui sautent d'abord aux yeux de tout le monde,

E P I S T R E.

nous introduisent dans une longue suite de plusieurs autres veritez, qui en dépendent, & qui ne sont pas moins certaines que leurs principes. Cette raison seule doit suffire, MONSEIGNEUR, pour satisfaire le Public, sur le choix que j'ay fait d'un des plus illustres Princes de l'Eglise, pour luy consacrer un Ouvrage tout consacré luy-mesme à la verité ; Et qui appliquant nostre esprit à des objets qui n'ont rien qui flatte les sens, mais que nous ne laissons pas de trouver infiniment agreables, à cause des veritez qu'on y découvre, peut mesme contribuer en quelque façon au reglement de nos mœurs, en nous détachant des choses sensibles, qui sont les causes les plus ordinaires de leur corruption. Dès cette premiere ouverture que je donne de ma pensée, chacun sans doute y applaudit, & enchérissant mesme par-dessus, me prévient déjà sur tout ce que je puis avoir à dire à vostre gloire. Vostre illustre Nom, MONSEIGNEUR, comme un nouveau flambeau qui surprend & qui brille, fait voir tout d'un coup les nobles convenances qui se rencontrent en mon dessein, de mettre cet Ouvrage sous une si glorieuse protection. Le passage est aisé du rang à la Personne ; Et l'on n'a pas plutôt approuvé, de voir les veritez Mathematiques sous l'azile favorable d'un des plus sacrez depositaires de celles de la Foy, qu'on les félicite, & moy avec elles, d'estre à l'abry d'un si beau Nom, où tout est également grand & solide, majestueux & éclatant. Une Ambassade dans la premiere Cour du Monde Chrestien, prolongée pour la quatrième fois au delà des termes ordinaires, fait voir à tout l'univers, en la personne de Monseigneur vostre Pere, une fidelité sans reproche, une sagesse consommée, une capacité sans bornes. Ces Négociations reiterées de Monseigneur le Cardinal d'Estrées, vostre oncle, à Rome, par ordre de Sa Majesté, dans les

E P I S T R E.

conjonctures les plus délicates, où la Politique, aussi bien que la Nature, demande deux yeux, non pour voir plus clair, mais pour voir plus sûrement, & avec plus d'étendue, ne marquent-elles pas une distinction particulière de mérite, & une confiance entière en la force & en la prudence de son génie. Et ne dirait-on pas, que le Monarque le plus éclairé que la France ait jamais eu, pleinement content & satisfait des services de ces deux illustres Freres, semble, au milieu de tant de grands sujets, n'en trouver pas-un digne de leur succéder, jusques à ce qu'associé à la Pourpre de l'un, & remplissant le mérite de tous les deux, vous alliez vous-mesme continuer à soutenir la gloire de la France, & celle de vos Ancestres, sur cet auguste Théâtre, uniquement destiné, ce semble, à ceux de vostre Nom. D'ailleurs, ces grands & fameux Exploits, par où Monseigneur le Marechal, vostre Oncle, commença à se signaler, aussi tost que Sa Majesté l'eût honoré de la charge de Vice-Amyral, & que le bruit de ses canons a fait retentir par tout ; Et sur tout ce prodige de valeur & de prudence qu'il fit paroistre à Tabako, (où tout ce qui sembloit devoir concourir à sa perte, la disposition des lieux, le grand nombre des Ennemis, celui de leurs vaisseaux, la difficulté de les aborder, le canon pointé pour leur deffense, toute une Isle en un mot armée contre luy, ses blessures mesmes & ses naufrages, n'ont ser-vy qu'à rendre sa vie plus illustre, & sa victoire plus glorieuse) font voir en sa personne tant de courage & d'intrépidité, de conduite & de bonne fortune tout ensemble, que ce monde-cy semble ne pas suffire aux grands & vastes desseins, & à toutes les genereuses & hardies entreprises de ceux de vostre Maison. Pardonnez, MONSIEIGNEUR, cette double saillie de mon zele, qui ne sçauroit déplaire qu'à vostre modestie ; mais qui

E P I S T R E.

agréera sans doute à ces premieres testes de tous les Ordres de l'Estat, qui vous ont veu soutenir & présider avec tant d'éclat, dans la plus celebre Escole du monde ; où vous avez commencé à jeter les premiers fondemens , & faire concevoir les premieres esperances de cette grandeur & dignité que vous possédez , & de toutes les autres qui vous attendent , & auxquelles vous pouvez si legitimement aspirer. J'ose mesme dire , que l'on a déjà veu briller en vous par avance, toutes les marques & tous les caracteres de cette future grandeur, dans ces premiers essais de generosité, de justice, & de graces, que vous avez fait paroistre, dès l'entrée de vostre Episcopat. Il est bon, MONSEIGNEUR qu'il en reste quelque marque à la posterité; & que ceux qui honoreront dans les siecles à venir la memoire de feu Monsieur Robault, (que Messieurs vos Freres, les Marquis de Cœuvres & de Temines, avec les plus grands de la Cour, n'ont pas autrefois dedaigné d'avoir pour maistre) sçachent, qu'elle a esté assez chere à un Prélat de vostre rang, non seulement pour agréer que ses Ouvrages posthumes parussent sous son nom ; mais pour donner aussi accez à ses plus proches, pour se justifier devant vous , & pour vous obliger à marquer de la joye de leur innocence. J'en avois entrepris la deffense, comme beau-pere du deffunt, & j'en devrois partager la reconnaissance avec les vivans, si vos bontez ne m'engageoient à estre entierement & sans partage, & avec une veneration tres profonde.

MONSEIGNEUR,

De vostre Grandeur

Le tres-humble & tres-obeïssant
Serviteur, CLERSELIER,



P R E F A C E.



NE ne doute point qu'il n'y ait bien des gens qui trouveront à redire au titre que j'ay mis à la teste de ce Livre , *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault* , & à qui ce frontispice ne plaira pas. Et si par hazard vous qui lisez cecy estiez de ce nombre , comme cela pourroit bien-estre , je veux bien vous avertir icy dès l'entrée , que ny vous , ny tous ceux qui pourroient vous ressembler , ne serez pas les premiers qui y auront trouvé à redire , puis que moy-mesme je l'ay condamné , & qu'il ne m'a pas plu.

Mais aussi à dire le vray , ce n'est pas une chose si facile que l'on pourroit peut-estre s'imaginer , que de donner à un Livre un titre qui luy convienne , & qui luy convienne justement ; Et mesme j'ose dire , qu'après s'estre bien donné de la peine pour en chercher un , il est presque impossible de pouvoir jamais rencontrer au gré de tout le monde.

C'est donc comme une nécessité que le titre d'un Livre soit contrôlé ; mais qu'il le soit à la bonne heure ; pourveu que d'ailleurs le corps en soit bon , & ne contienne rien que de vray & de raisonnable , l'on ne doit pas s'en mettre fort en peine , ny chicaner beaucoup là dessus.

Or je puis assurer qu'en prés de cent feüilles que ce Livre contient , & par consequent en prés de huit cens pages , il n'y a rien qui ne soit entierement conforme à la raison , & qui la puisse choquer le moins du monde. Chaque page , chaque ligne , chaque mot , sont autant de veritez , dont nous sommes convaincus par la lumiere naturelle , comme

P R E F A C E.

estant les réponses vives & nettes de cette lumiere interieure, qui ne manque jamais de nous éclairer & de nous instruire, toutes les fois que nous la consultons, par l'attention que nous sommes obligez de prester aux choses que nous voulons bien concevoir, & que nous ne sommes point honteux d'apprendre. Aussi, n'est-ce que faute de cette attention (comme l'a fort bien dit un celebre Auteur de ce temps) que nous tombons tous les jours en de lourdes fautes, soit en approuvant ce que nous n'entendons point, soit en contredisant les veritez les plus certaines, mais que nous ne voulons pas sçavoir, & auxquelles nous ne donnons pas toute l'application qu'il faut pour les comprendre; parce qu'elles sont contraires à d'anciens préjugés dont nous ne voulons pas nous deffaire, & dans la possession desquels nous sommes bien aises de nous maintenir, pour jouir paisiblement de nostre maistrise, & couvrir par ce moyen nostre ignorance.

Ce n'est pas que je ne sceusse fort bien quel titre il auroit fallu mettre à ce Livre, pour qu'il luy convinst justement; Mais ce titre n'auroit pas esté au gré du Libraire; Et comme pour l'ordinaire il arrive de la contestation entre les Libraires & les Auteurs sur la disposition du titre, ceux-cy n'ayant en veüe que la conformité qu'il doit avoir avec le texte, afin que l'un ne démente pas l'autre, & ceux-là au contraire ne se souciant pas beaucoup de cette conformité, mais voulant quelque chose de specieux, qui puisse exciter la curiosité des Lecteurs, & leur en attirer plusieurs, il ne faut pas s'estonner si l'un est quelquefois obligé de céder à l'autre, pour s'ajuster ensemble, & accorder leurs differens.

Or personne ne peut douter que tout l'interest que peut avoir un Libraire dans l'impression d'un Livre, ne soit son interest propre & particulier, qui est, que le Livre dont il entreprend l'impression ait du debit, qu'il ait cours dans le monde, & qu'il ne luy demeure pas sur les bras, renfermé dans un magazin, pour estre rongé des vers, & mangé par la poussiere, plutôt que dévoré par l'avidité d'un grand nombre de curieux; comme sans doute il se le promet
quand

P R E F A C E.

quand il commence une impression ; C'est pourquoy il a esté juste de le contenter icy ; Et c'est ce que j'ay prétendu faire par le titre que j'ay mis à la teste de ce Livre.

Mais quelqu'un tournant là dessus icy le feüillet, pour voir donc ce titre specieux que je dis avoir mis à la teste de ce Livre, (ne se ressouvenant plus quel il est) & ne trouvant que trois ou quatre mots fort simples & fort communs, croira peut-estre que je me suis oublié de mon dessein, ou que j'ay retenu, comme un secret que je n'ay pas voulu divulguer, ce titre specieux dont je parle ; ou bien peut-estre qu'après luy avoir ingenuement confessé que je n'en sçay point d'autre que celui qu'il porte, il ne pourra pas s'empescher de s'emporter contre moy, en m'accusant de mauvaise foy & d'ignorance ; de mauvaise foy, en ce que sçachant, comme j'ay dit, le juste titre que l'on devoit mettre à ce Livre, je ne l'y ay pas voulu mettre ; Et dignorance, en ce qu'il n'est pas possible que tout autre titre que l'on y auroit pû mettre, ne fust pour le moins aussi specieux que celui que j'y ay mis, & peut-estre mesme plus au goust de tout le monde ; Où enfin, peut-estre qu'après estre un peu revenu de son emportement, pour m'en faire une espece d'excuse, & me rendre quelque justice, ayant appris par le bruit commun que je ne passe pas dans le monde pour un homme de mauvaise foy, ny tout à fait ignorant, il me priera de bonne grace que je luy développe donc le mystere qu'il juge devoir estre renfermé dans ce titre, pour meriter sous des termes si simples le nom de specieux ; Et en cela je confesse qu'il aura quelque raison ; Et c'est aussi ce que je vais tâcher de faire dans la suite, pour le retirer de la peine où cela l'aura mis.

La réputation que Monsieur Rohault s'estoit acquise de son vivant estoit devenuë si grande, & son nom si celebre, qu'il estoit connu non seulement dans tout ce Royaume, mais mesme dans toute l'Europe. Et quoy que depuis sa mort jusqu'au jourd'huy il se soit écoulé près de dix années, pendant lesquelles il semble que sa memoire auroit dû se

P R E F A C E.

perdre , n'ayant rien parû de luy depuis ce temps-là ; néanmoins comme l'estime qu'il avoit laissée de luy en mourant , faisoit aisément croire à tout le monde , qu'il n'estoit pas possible qu'un homme comme luy se fust tenu sans rien faire , en sorte qu'il ne fust rien resté , & qu'on eust , pour ainsi dire , tout ensevely & enterré avec luy en le mettant dans le tombeau ; cela a fait que les plus curieux & les plus vigilans se sont aussi-tost soigneusement informez s'il n'avoit point laissé quelques écrits après sa mort ; Et le bruit s'estant répandu par tout qu'il en avoit laissé quelques-uns ; j'ay depuis ce temps-là esté si souvent & si puissamment sollicité par les instantes prieres d'une infinité de personnes de toutes sortes de conditions , & par les lettres fréquentes que j'ay reçues de toutes parts , d'en vouloir faire part au public , que je n'ay pû m'en deffendre , ny me délivrer mesme de leurs pressantes sollicitations & importunitéz , qu'en satisfaisant à leur desir.

C'est donc ce Livre , ou plutôt ce Recueil de plusieurs divers petits Traitez de Mathématique , qui paroist aujourd'huy ; Mais si j'avois mis à sa teste , ce titre qu'il devoit porter , cela luy auroit fait perdre une bonne partie de l'estime qu'on en avoit conceu auparavant sans le voir , & auroit de beaucoup refroidy l'ardeur & la curiosité de plusieurs. Car il y a par tout un si grand nombre de Livres de Mathématique , & où tout ce que l'on sçauroit dire touchant cette matiere est si bien & si amplement déduit , qu'il ne semble pas possible qu'on puisse là dessus rien desirer davantage. C'est pourquoy pour ne pas tant se découvrir d'abord , & laisser à deviner aux curieux quels peuvent estre ces ouvrages de Monsieur Rohault , il a fallu déguiser un peu le titre ; & au lieu de nommer chaque Traitté par son nom , on a esté obligé de les comprendre tous ensemble sous ce titre general & specieux , d'*Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault* : Or ces termes generaux d'*Oeuvres posthumes* emportent avec soy , & font concevoir quelque chose de grand , quand celuy qui en est l'Auteur est d'un grand nom , comme est sans doute celuy de Monsieur

P R E F A C E.

Rohault ; particulièrement chez les Estrangers ; où la jalousie ne regne point, & qui pour cela en ont toujours fait beaucoup d'estime ; Et ce sont eux qu'un Libraire a principalement à ménager, à cause que le plus souvent c'est d'eux qu'il tire son plus grand profit.

Au reste, ce n'est pas sans peine & sans travail que Monsieur Rohault s'estoit acquis cette grande réputation. Il est vray que la Nature par un avantage tout singulier luy avoit donné un esprit tout à fait mécanique, fort propre à inventer & à imaginer toutes sortes d'Arts & de Machines ; & avec cela des Mains artistes & adroites, pour executer tout ce que son imagination luy pouvoit représenter. Aussi se faisoit-il un plaisir d'aller dans les boutiques de toutes sortes d'ouvriers, pour les voir travailler chacun de leur mestier, & pour y considerer avec attention les divers outils dont ils se servoient pour l'exécution de leurs ouvrages ; Et c'estoit une des choses qu'il admiroit le plus, & enquoy l'industrie de l'esprit humain luy paroissoit plus merveilleuse, d'avoir pû inventer tant de sortes d'instrumens, qui rendent le travail aisé, & sans quoy il seroit impossible de venir à bout d'aucun ouvrage. Mais comme son génie surpassoit de beaucoup en invention & en adresse celui de la plus-part des ouvriers, aussi leur donnoit-il souvent de bons avis, soit pour la construction de leurs outils, soit pour faciliter leur travail & diminuer leur peine ; & il ne leur disoit rien de particulier, qu'il ne mist aussi-tost la main à l'œuvre, pour leur apprendre luy-mesme à le mettre en pratique.

Ce naturel ingenieux & pénétrant dont la nature l'avoit doué, luy rendoit si facile tout ce à quoy il s'appliquoit, qu'il n'avoit presque trouvé aucune difficulté à apprendre les Mathématiques ; & pour cela il ne luy avoit point fallu de Maître ; C'est pourquoy les ayant, pour ainsi dire, comme inventées de luy-mesme, il les possédoit parfaitement. Aussi est-ce ce qui luy donnoit un grand avantage par dessus tous ceux qui comme luy faisoient profession de les enseigner, & qui faisoit qu'on le préféreroit aux autres, à cause de la netteté & facilité que cela luy donnoit pour

P R E F A C E.

s'expliquer ; Je le pourrois icy certifier moy-mesme, ayant esté son disciple comme les autres, si je ne craignois que mon témoignage ne passast pour suspect ; Mais il en a eu tant d'autres de toutes conditions, & des plus qualifiez du Royaume, soit de la robbe, soit de l'épée, soit de la Cour, qui ne feroient pas de difficulté de le certifier comme moy, s'il en falloit venir à cette preuve de fait, que je ne feins point de dire icy hardiment, que l'usage & l'exercice luy avoient ouvert l'esprit à une maniere d'enseigner, si aisée, si claire, & avec cela si particuliere, qu'il n'y en avoit point qui approchast de luy, & qui luy fust en cela comparable,

Aussi s'il m'est icy permis de faire entrer dans ses loüanges une chose qui n'a esté qu'en projet, mais qui n'a point eu d'exécution ; Si la mort ne nous l'eust pas si-tost ravy, il estoit sur le point de recevoir le plus grand honneur qu'il pouvoit jamais avoir en sa vie, puisqu'on le destinoit à estre le Précepteur de Monseigneur le Dauphin, pour luy enseigner les Mathematiques & la Philosophie, aussi-tost que le cours de ses Estudes l'auroit conduit jusques-là. Et ce que je dis icy à sa gloire, & que j'avance sans autre preuve que ma bonne foy, n'est pourtant pas une chose si difficile à croire ; L'exemple de Messieurs les Princes de Conty, qu'on luy avoit mis entre les mains dès leur bas âge, pour leur former l'esprit de bonne-heure, & fortifier leur raison, avant qu'elle se pust corrompre par les fausses idées d'une vaine Philosophie, & qui donnoient à la Cour de si belles marques de cette ouverture d'esprit, & du progrès qu'ils faisoient tous les jours sous sa conduite, pouvoit bien estre un motif capable de faire venir cette pensée à ceux qui avoient alors la direction sur les Estudes de Monseigneur.

Mais quand bien mesme ce que je dis n'auroit esté qu'une vaine présomption de Monsieur Rohault, & une fausse imagination dont il se seroit laissé flatter sur de trop légères conjectures, il me suffit pour moy que je n'avance icy rien de moy mesme, & que je n'aye appris de fort bonne part, Et à l'égard de Monsieur Rohault, quand il se seroit trompé dans sa pensée, cela ne pourroit rien faire contre luy, ny

P R E F A C E.

porter aucun préjudice à sa réputation ; puis que cela même en supposeroit une en luy assez bien établie, pour que l'on pust jetter les yeux sur luy, comme sur une personne capable de remplir un poste si honorable. Et de vray, quoy que cela n'ayt point eu d'effet, soit parce que la mort l'a prévenu, soit parce que cela ne devoit point estre, cela neantmoins n'a pas empesché que sa réputation ne se soit estenduë fort loin, & n'a rien diminué de l'estime qu'on en avoit.

Mais après tout, il n'est pas fort mal-aisé de deviner d'où luy est venu cette grande estime ; les causes en sont trop publiques pour pouvoir estre ignorées ; Chacun sçait qu'il avoit l'honneur d'enseigner la plus grande partie des jeunes gens de la premiere qualité ; ce qui le faisoit connoistre à la Cour ; Et comme les esprits y sont beaucoup plus raffinez qu'ailleurs, que l'on y épargne moins les gens, & que les défauts y sont plus relevez ; Si sa Methode d'enseigner n'en avoit esté tout à fait exempte, il seroit bien-tost devenu la fable & la risée de la Cour, & n'auroit pas manqué d'estre baffoué & meprisé de tout le monde. Mais quand on a veu que les plus grands, à l'envy les uns des autres, luy confioient l'instruction de leurs Enfans, cela a fait que chacun à leur exemple l'a voulu avoir pour maistre ; jusques-là même, que plusieurs qui portoient le bonnet, & qui professoient publiquement dans les Colleges, n'ont point eu honte de devenir ses disciples ; Bien plus, sa réputation ayant passé les limites de ce Royaume, & s'estant répanduë dans les pays estrangers, il luy en venoit de toutes parts, & en si grand nombre, qu'il ne pouvoit plus suffire à tous.

Toutesfois ce n'est pas encore de là qu'il a tiré sa plus grande gloire. Les Conférences publiques qu'il faisoit une fois toutes les semaines, où se trouvoient des personnes de toutes sortes de qualitez & conditions, Prélats, Abbez, Courtisans, Docteurs, Médecins, Philosophes, Géometres, Regens, Escoliers, Provinciaux, Estrangers, Artisans, en un mot des personnes de tout âge, de tout sexe, & de toute

P R E F A C E.

profession, & où il prononçoit presqu'autant d'oracles; qu'il faisoit de réponses aux difficultez qui luy estoient proposées indifferemment par toutes sortes de personnes, l'avoient mis dans une si grande réputation, qu'il s'en est trouvé plusieurs, les uns par curiosité, pour se donner la satisfaction de l'entendre, les autres par jalousie, pour juger de sa doctrine & tâcher de la combattre, qui ont quitté leur païs, & entrepris de grands voyages.

La Méthode que Monsieur Rohault gardoit dans ses Conférences, estoit d'y expliquer l'une apres l'autre toutes les questions de Physique, en commençant par l'establissement de ses principes, & descendant ensuite à la preuve de ses effets les plus particuliers & les plus rares. Pour cela il faisoit d'abord un discours d'environ une heure, lequel n'estoit point étudié, & où il disoit simplement ce que son sujet luy fournissoit sur le champ; C'est pourquoy il permettoit à un chacun de l'interrompre, quand il arrivoit que ce qu'il avoit dit, ou n'avoit pas esté assez bien compris, ou que quelqu'un trouvoit quelque objection à y faire; Et alors avec une patience & moderation que j'ay cent fois admirée, & dont luy seul estoit capable, il écoutoit paisiblement tout ce qu'on luy vouloit objecter, pour extravagant qu'il pust-estre, sans jamais interrompre celui qui parloit; & apres avoir satisfait à ses objections, il reprenoit le fil de son discours où il l'avoit quitté, & continuoit à expliquer le reste de la matiere qu'il avoit entreprise. Apres quoy la dispute estoit ouverte à tout le monde, non pas une dispute tumultueuse, qui se passast simplement en bruit, mais une dispute paisible & honneste, où chacun proposoit modestement & nettement les difficultez qu'il avoit remarquées sur la matiere qui avoit esté agitée ce jour là, afin de s'en instruire, & de remporter du fruit de ces Conférences; Et pour l'ordinaire la dispute finissoit dès la premiere réponse qu'il y faisoit; Car apres avoir reconnu par les difficultez qu'on luy avoit proposées, ce qui avoit manqué à sa premiere explication, il résponoit si bien & dans un si bel ordre tout ce qu'on luy avoit objecté, &

P R E F A C E.

y répondoit avec tant de netteté & de lumière, que ceux qui les luy avoient proposées, & tous les autres spectateurs de la dispute, n'ayant rien à répliquer, s'en retournoient si satisfaits de ses réponses qu'il s'attiroit l'admiration de tout le monde. J'en appelle icy à témoin des milliers de personnes qui ont assisté plusieurs-fois à ses Conférences, & qui ayant alors esté charmez de la justesse & de la beauté de ses réponses, & n'en ayant pas encore perdu le souvenir, le regrettent encore tous les jours.

Mais ce qui a rendu son nom plus recommandable & plus celebre, est cette Méthode simple & facile dont il se servoit pour expliquer les plus difficiles & plus curieuses questions de Physique; comme la Lumiere, les Couleurs, l'Arc-en-ciel, les Lunettes, le flux & reflux de la Mer, les proprietétez de l'Ayman, la pezanteur de l'Air, les questions du Vuide, & quantité d'autres; Car à l'entendre parler là dessus, vous eussiez dit qu'il estoit de concert avec la Nature, & qu'elle prenoit plaisir à luy découvrir ses secrets; qu'elle luy avoit fait voir les différentes parties dont les corps sont composez, & luy avoit appris quels effets devoient suivre de la communication de leurs mouvemens; Car il fesoit comme toucher au doigt tout ce qu'il disoit sur ces matieres; Et afin qu'il n'en pust rester aucun doute, il y joignoit pour preuves quantité de belles experiences, qu'il fesoit devant tout le monde, & dont le plus souvent il fesoit prévoir les effets à chacun (ensuite des principes qu'il avoit auparavant établis) avant mesme que d'en venir à l'épreuve.

C'est ainsi qu'après avoir prouvé & étably pour principe la pezanteur de l'Air, il fesoit voir que tous ces effets que l'on a coutume d'attribuer à la crainte du Vuide, n'en sont que de simples dépendances, dont les consequences se tirent d'elles-mesmes, & sans beaucoup de raisonnement. Et pour le faire comprendre, & toucher, pour ainsi dire, au doigt & à l'œil, il avoit fait faire tout expres quantité de Tuyaux de verre, de toutes sortes de façons, qu'il remplissoit de diverses liqueurs, selon les differens effets qu'il vou-

P R E F A C E.

loit prouver ; mais celle dont il se servoit le plus, & qui luy estoit la plus commode pour ses experiences, estoit le Vif-argent ; Car comme une fort petite quantité contrepeze à beaucoup d'eau , & à une bien plus grande quantité d'Air, il pouvoit commodement, & avec des tuyaux d'une médiocre grandeur, faire voir par experience la plus grande partie des effets qui résultent de cette pezanteur.

Or entre tous ces Tuyaux, il en avoit inventé un d'une construction tout à fait ingenieuse & particuliere, semblable à peu près à la figure dont les Anatomistes se servent pour représenter la grande Artere ascendante & descendante ; par le moyen duquel il faisoit voir en mesme temps deux effets tout contraires, & pour cela mesme fort surprenans, de la pezanteur de l'Air : Car après avoir rempli ce tuyau de Vif-argent, & fait toutes les cérémonies requises pour faire qu'en se vidant d'une partie dans un vaisseau, il en restast dedans la hauteur de deux pieds trois pouces, comme il arrive d'ordinaire, on avoit le plaisir de voir en mesme temps monter le Vif-argent dans un petit tuyau renfermé dans la branché d'enhault , & descendre celui qui estoit resté dans la branche d'embas, aussi-tost que par une fort petite ouverture, faite seulement avec la pointe d'une épingle, on avoit donné moyen à l'Air grossier d'entrer dans ce tuyau. Or cette seule experience est une preuve si manifeste de la pezanteur de l'Air, & prouve en mesme temps si manifestement que c'est cette pezanteur qui produit tous ces effets merveilleux qu'on attribué ordinairement à la crainte du Vuide, qu'il faut se boucher les yeux, ou n'en avoir point, pour en douter.

Sa maniere d'expliquer la Lumiere & les Couleurs estoit aussi admirable ; & si ceux qui veulent que les Couleurs soient des Accidens Réels, & qui voudroient mesme en faire un article de nostre foy, luy avoient fait l'honneur d'assister eux mesmes à ses explications, & veu les experiences dont il se servoit pour en découvrir la nature, & faire voir que ce ne sont que des modifications différentes de la Lumiere, selon qu'elle tombe sur des Corps dont les parties ont

P R E F A C E.

ont diverses figures & differens mouvemens , & que de là elle rejaillit vers nos yeux avec les diverses modifications qu'elle a receuës des Corps sur lesquels elle est tombée , je doute fort qu'ils eussent voulu après cela traiter d'heretiques ceux qui ne les regardent du costé des objets , que comme des differentes modifications de la matiere , & du costé de celuy qui les aperçoit , que comme des sentimens en luy , qu'il raporte aux objets qui les ont excitez.

Ce principe supposé , il ne rendoit pas seulement raison , mais des preuves sensibles , de tout ce qu'il y a de plus singulier & de plus merveilleux dans l'Arc-en-ciel , & que M^r Descartes avant luy a expliqué si admirablement dans ses Méteores ; Car par le moyen de certaines fioles , ou bouteilles de verre , pleines d'eau , il fesoit remarquer les endroits par où les rayons de lumiere , qui se changent en couleur , entrent dans le verre , les lieux où ils se réfléchissent , & ceux par où ils sortent pour venir de là fraper nos yeux , avec les modifications qu'ils ont reçu de ces diverses reflexions & refractions , d'où résulte en nous le sentiment des Couleurs. Quelquefois mesme il avoit l'industrie de faire paroistre dans sa chambre un Arc-en-ciel artificiel , par le moyen d'une pluye qu'il avoit l'adresse de répandre aux lieux où il devoit paroistre , selon l'endroit où le Soleil estoit alors ; & de le recevoir sur une toile bien blanche & bien unie ; où ses Couleurs se peignant fort exactement , donnoient le moyen aux spectateurs de les pouvoir considerer avec soin & exactitude.

Je n'aurois jamais fait , si je voulois parcourir toutes les diverses experiences dont il se servoit pour justifier ses raisonnemens. Mais entre toutes celles qu'il communiquoit au public , il n'y en avoit point qui surprist avec plus d'estonnement l'esprit des spectateurs , qui leur donnast davantage d'admiration , & qui excitast plus vivement leur curiosité , que celle de l'Ayman. Aussi quand on sçavoit qu'il en devoit expliquer les propriétés , & en faire les experiences , il y accouroit tant de monde , que non seulement la salle où il les faisoit , mais toute sa maison , n'estoit pas capable de le contenir.

P R E F A C E.

Il avoit pour cela une boiste, où estoit renfermé tout ce qui luy estoit nécessaire pour faire ses experiences ; d'où il tiroit chaque piece l'une après l'autre , selon l'effet où la propriété qu'il vouloit prouver , & l'experience que pour cela il avoit à faire. Et quoy qu'il ne dist rien en cela que ce qu'il avoit appris de Monsieur Descartes ; neanmoins , comme il rendoit les choses sensibles par le moyen de ses experiences , & que sa Methode de les expliquer estoit différente de la sienne , cela fesoit que l'on eust dit qu'il en eust esté l'inventeur. Car Monsieur Descartes s'est simplement contenté de rendre raison de toutes les propriétés de l'Aiman qui luy estoient connues , & que les curieux avant luy avoient observées ; mais il ne s'est pas mis en peine de les mettre dans un ordre qui en fit connoître la liaison & la dépendance ; Or c'est ce que Monsieur Rohault fesoit dans ses explications publiques ; où après avoir rendu raison de trois ou quatre propriétés les plus communes de l'Ayman , il en déduisoit toutes les autres par une suite si nécessaire , qu'il n'y avoit personne dans l'assemblée qui ne les remarquast aussi bien que luy , & qui n'en prévist l'effet , avant que d'en venir à l'experience.

Ces sortes de preuves si claires , si convaincantes , & si sensibles , fort différentes de ces vertus & qualitez occultes dont les autres Philosophes ont coûtume de se servir pour rendre raison de ce qu'ils ignorent , justifient ce me semble bien clairement la verité des principes dont elles dépendent ; car le moyen de pouvoir tirer un si grand nombre de consequences justes , & que les effets verifient , d'un si petit nombre de Principes , si ces Principes n'estoient véritables. Et n'est-ce pas une chose bien étrange , que ces principes estant clairs à l'esprit , que la raison en estant convaincuë , & que personne n'ayant pû découvrir le moindre effet de la nature auquel ils contrarient , depuis tant de temps qu'on les examine , il y ait cependant aujourd'huy des gens assez imprudens pour se servir du plus auguste & du plus incomprehensible de nos misteres pour les combattre , & pour tâcher d'en déduire , s'ils pouvoient ,

P R E F A C E.

la fausseté. Ces personnes ne prennent pas garde sans doute aux inconveniens qui s'en ensuivent ; puis que contre leur dessein , ce qu'ils font ne sert qu'à fournir des armes à nos adversaires ; & peut même estre capable d'ébranler la foy des Fideles , & de faire chanceler ceux qui ne sont pas encore bien affermis dans leur croyance : Car comme nous sommes tous hommes , c'est à dire raisonnables , avant que d'estre Chrestiens , ce qui persuade la raison , entre plutôt dans l'esprit , que ce qui nous est enseigné par la Foy. Outre que tout ce qu'ils disent n'estant fondé que sur des suppositions fausses , il n'y a rien de plus injuste & de plus dangereux , que de faire combattre la verité contre la verité , c'est à dire la Foy contre la raison bien éclairée , puis que l'une n'est jamais , & ne peut même jamais estre contraire à l'autre. C'est pourquoy il suffiroit pour toute réponse de leur dire en un mot qu'ils n'entendent point ce qu'ils combattent , & que tout ce qu'ils disent n'a aucun fondement de verité ; mais nous verrons tantost ce que nous aurons à leur objecter & peut-estre aussi à leur répondre.

Monsieur Rohault voyant donc sa reputation suffisamment établie , & que dans la profession qu'il faisoit , il n'avoit plus rien à ménager pour l'établissement de sa fortune , crût ne devoir plus refuser au public la satisfaction qu'il desiroit de luy , de mettre au jour son traité de Physique ; afin qu'on n'eust plus la peine de copier ses écrits , ny de faire des remarques particulieres sur ce qu'il avoit traité dans ses Conférences publiques ; comme le fesoient la plus-part de ses Auditeurs au sortir de ces Conférences , pour ne pas laisser échaper de leur memoire ce qu'ils luy avoient entendu dire , & profiter par ce moyen de ses leçons.

Ce desir même si naturel à l'homme , d'acquiescer de la gloire , desir qui n'est point blâmable , quand les moyens en sont louables & honnestes , le fit aussi résoudre à contenter là dessus le public. Bien plus , il jugea même qu'il y alloit alors de son honneur de ne pas differer davantage :

P R E F A C E.

Car voyant que ces écrits estoient entre les mains d'une infinité de personnes, & qu'estant ainsi passez de main en main ils estoient devenus méconnoissables, par les fautes que chaque copiste avoit adjouctées à celles qui s'estoient rencontrées dans son Original ; outre que n'ayant mis luy-mesme dans ces écrits, qu'autant qu'il en falloit pour donner à ses disciples l'envie d'apprendre, mais ne s'y estant pas assez expliqué & estendu, pour pouvoir d'eux-mesmes en tirer une parfaite connoissance, sans avoir besoin de l'explication du Maître, il prit enfin la résolution de faire imprimer ce Traité, & d'y mettre la dernière main.

Or comme l'on met toujours une grande difference entre ce que l'on ne fait que pour soy & pour le cabinet, & ce que l'on fait pour estre vû par le public ; Aussi ceux qui avoient vû ces écrits particuliers qui couroient de luy dans le monde, ont bien sceu remarquer qu'il y avoit bien de la difference entre son Livre & ces Ecrits. Mais il ne s'en faut pas beaucoup estonner ; car ceux-cy n'estoient que comme le projet & le brouillon de l'ouvrage parfait qu'il meditoit de faire un jour, & qu'enfin l'on a veu paroistre ; où comme il avoit deux sortes de personnes à contenter, les curieux & les difficiles, il a tâché de travailler de telle sorte, que les uns n'y pussent trouver rien à reprendre, & les autres rien à désirer.

C'est pourquoy pour satisfaire au desir & à la curiosité des premiers, il a traité dans son Livre toutes les questions les plus curieuses de la Physique ; Et en les examinant chacune à part, il s'est donné la peine de descendre jusques aux circonstances les plus particulieres, n'ayant rien oublié en chacune qui pût meriter sa réflexion, & luy ayant donné tout le jour dont elle est capable. Ce qui fait que tout le monde s'estonne comment il a pû en si peu de mots expliquer un si grand nombre de choses, traiter en si peu de pages un si grand nombre de questions, & de faire de chaque article presque autant de résolutions.

Mais comme le nombre des fâcheux l'emporte de beaucoup par dessus l'autre, qu'ils sont plus pointilleux & plus

P R E F A C E.

à craindre, & qu'il est tres-difficile de les pouvoir contenter tous, chacun ayant des veuës particulieres touchant l'examen qu'il fait d'un Livre; car les uns s'attachent à la diction, les autres à l'ornement du discours, quelques-uns vont au fond de la matiere, d'autres examinent la verité des principes, d'autres considerent l'enchaînement qu'ils ont & qu'ils doivent avoir avec les sujets ausquels on les applique, d'autres par des veuës d'interest ne remarquent que les endroits les plus foibles & les plus négligez, pour avoir dequoy le faire mépriser, & d'autres enfin par jalousie ou par un faux zele y cherchent dequoy faire decrier & rendre suspect l'Auteur & sa doctrine; Aussi ce sont eux que Monsieur Rohault a eu principalement en veuë dans la composition de ce Traité-là, afin de tâcher sinon de les contenter tous, au moins de se mettre hors de prise, & de pouvoir se rendre ce témoignage à soy-mesme, d'y avoir fait tout son possible; & heureusement il est arrivé que le succez a surpassé son attente.

Car premierement pour ce qui est de la diction, tout le monde demeure d'accord que les termes en sont propres, bien choisis, & en usage, enforte qu'il n'y en a point qui blessent l'oreille, ny qui laissent l'esprit du Lecteur en suspens sur le sens & la signification qu'ils renferment. Et pour ce qui regarde la politesse & l'ornement du discours, la matiere qu'il y traite n'en demande point d'autre, qu'une énonciation pure, nette, & qui ne soit point embarrassée; Et c'est ce qu'il est aisé d'y remarquer, chaque chose y estant en sa vraye place, où ce qui précède n'attend pas sa clarté & son intelligence de ce qui suit; & où ce qui suit est compris & contenu dans ce qui précède, comme dans son principe; & ainsi chaque chose y estant en son rang, & dans son ordre, tout y paroist avec une grace & une beauté tout à fait naturelle.

Quant à ceux qui sont capables de juger du fond de la matiere, d'examiner les principes dont elle dépend & qui la soutiennent, & de comprendre l'enchaînement & les consequences qui la prouvent, ce sont eux principalement

P R E F A C E.

que Monsieur Rohault a toujours souhaitté d'avoir pour juges ou pour arbitres. Car comme il estoit à présumer que des personnes d'esprit n'auroient pas voulu agir autrement que de bonne foy, il ne luy pouvoit arriver à leur égard que l'une de ces deux choses, ou de les avoir pour ses approbateurs, ou de les avoir pour des censeurs, & l'une ou l'autre ne luy pouvoit estre que tres-avantageuse ; Car s'il arrivoit qu'il les eust pour approbateurs, c'estoit se rendre eux-mêmes les Paranymphe de son Livre, c'estoit ouvertement & par leur exemple persuader les autres des veritez qu'il contient, c'estoit enfin leur en faire concevoir bonne opinion, & le confirmer luy-mesme dans la sienne ; Et au contraire, s'il arrivoit qu'il deust les avoir pour censeurs, c'estoit adjoûter un nouveau moyen de s'instruire à ceux dont il avoit coûtume de se servir : Et à dire la verité, il auroit fort souhaitté d'en rencontrer plusieurs qui eussent bien voulu avoir cette bonté ou cette complaisance pour luy, que de luy faire connoître ses fautes, luy montrer en quoy il se seroit mépris, & luy marquer ce qu'il auroit dû mettre dans son Livre pour le rendre plus parfait qu'il n'est.

Mais personne n'a jamais voulu luy rendre ce bon office. Tant s'en faut, tout le monde l'a reçu avec tant d'aplaudissement & d'approbation, que de son vivant une infinité de personnes de qualité & de merite luy en sont venu faire leurs complimens & conjouïssances ; Et depuis sa mort, j'ay reçu moy-mesme de toutes parts tant de témoignages de l'estime que chacun en fait, & en reçois encore tous les jours, qu'on peut dire qu'il n'y a gueres de Livre de ce genre qui soit si universellement approuvé.

Au reste, on ne scauroit gueres apporter de meilleur témoignage de cette estime generale que chacun en fait, que de voir qu'il a déjà esté icy imprimé pour la quatrième fois ; que nos libraires tâchent par tout de le contrefaire, que dans les pais estrangers il s'imprime publiquement, & que déjà on l'a traduit en plusieurs langues. Nos professeurs mesme ne font point de scrupule d'en tirer une partie de leurs plus belles démonstrations, de l'indiquer à leurs

P R E F A C E.

Ecoliers comme un des meilleurs Livres qui ayt paru depuis long-temps sur une semblable matiere, & d'en faire un des principaux ornemens de leur cabinet & bibliothèque.

Cependant, nonobstant cette generale & universelle approbation, comme la Science & la Vertu engendrent souvent l'envie & la jalousie, il s'est trouvé des personnes assez indiscrettes, ou plutôt assez malicieuses, pour faire courir de mauvais bruits, & de l'Auteur & de son Livre ; De celuy-cy, ayant eu l'effronterie & l'impudence d'écrire contre la verité, que la doctrine qu'il contient avoit esté trouvée si dangereuse & si mauvaise, qu'on l'avoit fait brûler par la main d'un boureau ; Et à l'égard de l'Auteur, certains esprits mal-faits & emportez, ont eu pour luy si peu de respect & de retenue, qu'ils n'ont pas feint, en presence de Monsieur de Blampignon Docteur de Sorbonne, Curé de saint Mederic son Pasteur, de rendre sa foy suspecte, & de le traiter d'heretique, au sujet du plus saint & du plus auguste de nos Mysteres, l'accusant de ne pas croire la Transubstantiation. Ce qui fit que Monsieur de Blampignon, qui d'ailleurs estoit assuré de la foy de Monsieur Rohault, pour s'estre plusieurs fois entretenu avec luy sur ce Mystere, se crût obligé, lorsqu'il luy porta le saint Viatique, pour avoir des témoins qui pussent comme luy répondre de sa foy, de l'interroger en presence de toute la compagnie qui assista à cette pieuse & triste ceremonie, sur les principaux articles de nostre croyance, & entr'autres sur celui de la Transubstantiation, luy demandant publiquement, s'il ne croyoit pas cette conversion miraculeuse qui se fait en ce Sacrement, de toute la substance du pain en la substance du Corps, & de toute celle du vin en la substance du Sang de Nostre Seigneur JESUS-CHRIST, que l'Eglise appelle Transubstantiation. Aquoy Monsieur Rohault répondit, qu'à la verité il estoit un tres-grand pécheur ; mais qu'il n'avoit jamais douté de tout ce que la Foy nous enseigne, & particulièrement touchant ce Mystere ; qu'il pouvoit se ressouvenir des entretiens qu'ils avoient eu autrefois là dessus ensemble, & qu'il n'ignoroit pas qu'elle estoit sur cela

P R E F A C E.

sa foy ; Mais qu'il voyoit bien que la demande qu'il luy fesoit , ne venoit que des mauvais discours qu'on luy avoit tenus de luy sur ce point ; Dequoy il s'estonnoit d'autant plus , que si ce reproche , de ne pas croire la Transubstantiation , pouvoit tomber sur quelqu'un , c'estoit moins sur luy que sur beaucoup d'autres ; puis que selon ses principes mesmes , la Transubstantiation estoit tellement renfermée dans ce mystere , que s'il n'y en avoit point , il seroit impossible que le Corps de JESUS-CHRIST y fust , ny par consequent JESUS-CHRIST mesme ; Mais qu'il confessoit avec toute l'Eglise , qu'il y avoit en ce mystere une veritable Transubstantiation du pain au Corps , & du vin au Sang de Nostre Seigneur JESUS-CHRIST , & que cet article de nostre foy , fesoit un des articles de sa croyance. Cette réponse de Monsieur Rohault , ou plutôt cette profession publique de sa foy , contenta fort Monsieur de Blampignon , tant parce que le salut de son parroissien luy estoit cher , que parce qu'il estoit bien ayse d'avoir des témoins qui comme luy eussent dequoy pouvoir confondre ou détromper ceux qu'ils pourroient encore à l'avenir entendre mal parler de luy touchant ce Mystere. Et ce qu'il avoit prévu luy arriva ainsi qu'il l'avoit pensé : Car dès le même jour , il rencontra un de ces médisans , ou du moins un de ceux que d'autres avoient séduit par leurs calomnies , lequel ayant appris qu'il avoit porté le saint Viatique à Monsieur Rohault , ne manqua pas de luy en faire reproche , & de luy dire qu'il s'estonnoit fort , qu'un homme éclairé comme luy , se fust tellement laissé surprendre & abuser , que d'avoir administré ce Sacrement à une personne qui ne croyoit pas la présence réelle du Corps de JESUS-CHRIST au saint Sacrement , puis qu'il ne croyoit pas la Transubstantiation. Aquoy il fut ayse à Monsieur de Blampignon de répondre , qu'il auroit fort souhaitté de l'avoir eu luy-mesme , il n'y avoit qu'un moment , pour témoin de la foy de Monsieur Rohault touchant ce Mystere ; qu'il ne doutoit point qu'il n'eust esté bien joyeux , & même fort édifié , de luy entendre faire là dessus sa confession de foy,

P R E F A C E.

foy , laquelle il luy avoit fait faire publiquement, avant que de luy administrer le saint Viatique ; Que sans doute cela l'auroit détrompé, & l'auroit obligé en mesme temps de détromper ceux qui pouvoient luy avoir inspiré ces mauvais sentimens. Au reste, ce que je dis icy n'est pas un conte fait à plaisir ; c'est une verité, dont il est aysé à un chacun de s'éclaircir ; puis que Monsieur de Blampignon est encore vivant ; lequel ne refusera pas de le certifier, si l'on veut se donner la peine de s'en aller informer à luy.

Puis donc que Monsieur Rohault n'a trouvé jusques-icy que des approbateurs de ses Ouvrages ; & que ceux qui ont osé mal parler de luy & de son Livre, ont esté reconnus pour des injustes calomniateurs ; ce n'est pas sans raison ny fondement, que j'ay dit au commencement de cette Préface, qu'un Livre qui porte son nom, ne peut que donner la pensée de quelque grand Ouvrage, quand d'ailleurs on ne s'en explique point. C'est pourquoy j'ay mis pour titre à ce recueil. *Oeuvres posthumes de Monsieur Rohault*, pour exciter par là la curiosité de plusieurs, les attirer chez le Libraire, & les obliger par ce moyen de le feuilletter d'un bout à l'autre, pour voir ce qu'il contient, la maniere dont les choses y sont traitées, & la difference qu'il y a entre ce Livre & les autres qui traitent de semblables matieres, car je m'assure qu'il y en aura peu, qui après l'avoir veu, s'en retournent les mains vuides.

Comme Monsieur Rohault n'est pas le seul de qui l'on a tenu de mauvais discours, & rendu la foy suspecte ; Mais qu'il y en a eu d'assez imprudens & indiscrets, que de condamner hardiment, & par des livres publics, la doctrine de Monsieur des Cartes, comme contraire à la foy, & conforme aux erreurs de Calvin, l'on ne doit pas trouver mauvais, si ayant esté mis au rang & à la teste des Cartesiens, pour lever le scandale & les mauvais soupçons que cela a pû faire naistre dans l'esprit de quelques-uns, touchant leur foy & leur doctrine, je dis icy

Premierement, pour ce qui regarde leur Religion, Que graces à Dieu ils sont fort bons Catholiques, qu'ils ne chan-

P R E F A C E.

celent point dans leur foy ; qu'ils ont pour l'Eglise, & pour les décisions des Conciles, toute la soumission que l'on scauroit desirer des Fideles les plus zelez & les plus simples ; qu'ils n'examinent jamais les veritez de la foy par leurs principes, comme pour juger ce qu'ils doivent croire ou ne pas croire ; mais qu'au contraire ils s'assurent & se confirment dans leurs principes, parce qu'ils voyent qu'ils sont plus conformes aux articles de nostre foy, aux décisions des Conciles, au sentiment des Peres, à la Tradition, & à la veritable Theologie, que ne le sont ceux qui sont communement receus ; ce qu'il ne leur seroit pas fort difficile de vérifier, si on vouloit leur permettre d'en faire la preuve.

Et pour ce qui regarde leur doctrine, je croy pouvoir dire que ceux qui l'ont publiquement décriée ne l'ont jamais bien entendue ; qu'ils leur attribuent cent absurditez dont ils ne demeurent pas d'accord, & qu'ils les font parler tout autrement qu'ils ne pensent ; Car s'ils en avoient le moins du monde de connoissance, bien loin de les blâmer, & d'invectiver comme ils font contr'eux, ils se rendroient peut-estre à leur sentiment, & seroient les premiers à approuver la maniere avec laquelle ils s'expliquent sur le mystere dont il s'agit, & dont ils veulent leur faire un crime ; laquelle maniere n'est nullement celle qu'ils combattent, & qu'ils revestent de cent extravagances, qui la rendent sans doute fort ridicule. Mais en verité, il me semble que ceux qu'ils attaquent ainsi, ont donné d'assez bonnes marques de la justesse de leur Esprit, pour ne leur pas attribuer des visions, & des chimeres, si hors de sens & de comprehension.

Aussi, bien loin de cela, l'explication que Monsieur Descartes donne luy-mesme à ce mystere, est si naturelle & si simple, & avec cela si conforme à ce que la foy nous enseigne, au sentiment des Peres, & aux décisions des Conciles ; & résout si clairement les plus grandes difficultez qui s'y rencontrent ; Que tout mystere de foy qu'il est, la raison n'en est point choquée, & ne trouve rien qui l'effarouche ; Ensorte qu'il seroit peut-estre du bien de l'Eglise

P R E F A C E.

qu'elle fust ferieusement examinée par ceux qui ont l'autorité en main, & qui ont droit d'en juger. Car si une fois elle estoit receuë, il seroit impossible que toutes les hérésies ne tombassent par terre ; & qu'il pust y avoir d'autre croyance touchant ce mystere, que celle de l'Eglise Catholique, Apostolique & Romaine ; Desorte que ny l'impagination des Lutheriens, ny la figure des Calvinistes, ny toute autre hérésie que ce puisse estre, ne pourroit résister à la force & à la clarté de cette explication.

Cependant pour faire voir par quelque exemple que ce n'est pas temerairement qu'ils avancent ces choses ; & que des principes dont ils se servent l'on en peut tirer des conséquences fort justes pour nous fortifier dans la foy, & pour la conduite & le reglement de nos mœurs ; & qu'au contraire, de ceux de ces feseurs de livres, on en peut tirer de tout opposées ; prenons pour exemple ce qui les effarouche le plus, & qui les fait tant crier contre Monsieur Descartes & sa doctrine.

S'il est vray, comme Monsieur Descartes le prétend, que l'essence de la Matiere, ou du Corps, consiste dans l'estenduë en longueur, largeur & profondeur, il n'est pas difficile de comprendre que l'Ame de l'homme, ou ce principe interieur qui est en luy capable de penser, est une substance distincte du Corps. Car il est visible que l'estenduë, de quelque maniere qu'on la conçoive taillée & remuée, ne peut jamais ny raisonner, ny vouloir, ny mesme sentir ; Ainsi, ce qui est en nous qui pense, est necessairement une Substance distinguée du Corps.

Les connoissances, les volontez, les sentimens actuels, sont actuellement des manieres d'estre de quelque Substance ; Or toutes les divisions qui arrivent à la Matiere, ou à l'estenduë, ne produisent en elle que des figures ; Et tous ses mouvemens, ne produisent autre chose que des rapports de distance ; l'Estenduë n'est pas capable d'autres modifications. Donc nostre pensée, nostre desir, nos sentimens de plaisir & de douleur, sont des manieres d'Estre d'une substance qui n'est point corps ; Donc l'Ame de l'homme est distin-

P R E F A C E.

guée du corps. Et cela posé, voicy de quelle maniere l'on peut démontrer qu'elle est Immortelle.

Jamais aucune substance ne s'aneantit par les forces ordinaires de la Nature ; car comme la Nature ne peut faire quelque chose de rien , aussi ne peut-elle réduire quelque chose à rien.

Les manieres des Estres peuvent s'aneantir, par exemple, la rondeur d'un corps se peut détruire ; car ce qui est rond peut devenir quarré ; Mais cette rondeur n'est pas un Estre, une Chose, une Substance ; ce n'est qu'un raport d'égalité, dans la distance qui est entre les parties qui terminent ce Corps, & celle qui en est le centre ; Ainsi ce raport changeant, la rondeur n'est plus ; mais la Substance ne peut-estre réduite à rien.

Or par les raisons que je viens de dire, l'Ame n'est point une maniere d'estre du corps ; Donc elle est immortelle. Et quoy que nostre corps se dissolve en une infinité de parties de différente nature, & que la construction de ses organes se rompe, l'Ame ne consistant point dans cette construction, ny dans aucune autre modification de la Matiere, il est évident que la dissolution, ny mesme l'anéantissement de la substance du corps humain (supposé que cet anéantissement fust veritable) ne peut anéantir la substance de nostre Ame.

Voicy encore une autre preuve de l'immortalité de l'ame fondée sur le mesme principe.

Quoy que le corps humain ne puisse estre réduit à rien, à cause que c'est une substance, il peut neanmoins mourir, & toutes ses parties se peuvent dissoudre, parce que l'estenduë se peut diviser. Or l'Ame estant une substance distinguée de l'estenduë, elle ne peut estre divisée ; car on ne sçauroit diviser une pensée, un desir, un sentiment de douleur & de plaisir, de mesme que l'on peut diviser un quarré en deux ou en quatre triangles ; Donc la substance de l'Ame est indissoluble, incorruptible, & par consequent immortelle ; parce qu'elle n'a point d'estenduë.

Voila de veritables démonstrations, qui convainquent l'Esprit de tout homme qui veut estre attentif ; & auxquelles il faut se rendre, ou renoncer à la raison.

P R E F A C E.

Mais si, comme le prétendent ces auteurs inconnus, l'essence du corps consiste dans quelqu'autre chose que dans l'estenduë, comment convaincront-ils les libertins, que nostre Ame n'est ny Matérielle ny Mortelle ? Ils leur soutiendront, que ce quelqu'autre chose en quoy ils disent que consiste l'essence du corps est capable de penser, & que la substance qui pense est la mesme que celle qui est estenduë. Que s'ils leur nient, ils leur feront voir que c'est sans raison, puis que selon leur principe, le corps estant autre chose que de l'estenduë, ils n'ont point d'idée distincte de ce que ce peut-estre ; Et qu'ainsi ils ne peuvent sçavoir, si cette chose inconnuë n'est point capable de penser. Ceux qui ont tant soit peu de discernement peuvent voir aysement les dangereuses consequences qui se peuvent tirer de là.

C'est pourquoy ceux qui font un crime à nos Philosophes, de ce qu'ils démontrent que l'estenduë n'est point une maniere d'estre, mais l'essence mesme du Corps, ou de la Matière, devroient penser aux fâcheuses consequences qu'on peut tirer de leurs principes ; & ne pas renverser la principale, ou mesme la seule démonstration que l'on peut avoir de la distinction qui est entre l'Ame & le Corps. Car enfin la distinction de ces deux parties de nous-mesmes, prouvée par des idées claires & distinctes, comme l'ont fait nos Philosophes en plusieurs endroits, est de toutes les veritez celle qui est la plus féconde & la plus nécessaire, soit pour la Philosophie, soit pour la Théologie, soit aussi pour la Morale chrestienne.

Il est donc bien important, lors qu'il s'agit de l'establissement de quelque principe, de prendre garde de ne rien admettre qui ne soit clair à l'esprit ; c'est la clarté qui nous persuade, qui nous convainc, & qui nous assure de la verité ; sans cela l'on ne peut s'assurer de rien. Mais quand un principe est clair, toutes les consequences le sont aussi ; l'on en voit aysement la suite & la liaison ; Et comme les veritez s'entretiennent toutes, & qu'elles ne sont point contraires les unes aux autres, l'on ne sçauroit tirer de consequence contraire à la Religion, d'un principe qui est évi-

P R E F A C E.

dent. Mais lors qu'un principe n'est pas évident, qu'il est obscur, qu'il ne porte aucune idée de foy à l'esprit, & qu'il a par conséquent la vraie marque de la fausseté, il n'y a rien de plus facile à ceux qui sçavent tant soit peu l'art de raisonner, que d'en tirer des conséquences contraires à la foy. Desorte que s'il estoit permis de rendre suspecte la foy des autres hommes, par des conséquences tirées des principes dont ils sont persuadés; comme il n'y a point d'homme qui ne se trompe en quelque chose, & qui ne prenne pour vrai ce qui ne l'est pas, il n'y en a point aussi que l'on ne pût traiter d'hérétique. Et ainsi, c'est ouvrir la porte à une infinité de querelles & de disputes, que de laisser aux hommes la liberté de rendre suspecte la foy de ceux qui en matière de philosophie ne sont pas de leur sentiment. Aussi je ne puis comprendre, comment sur des conséquences que l'on des-avoue, on se plaist de faire passer pour hérétiques, des personnes qui sont très-soumises à l'Eglise, & à toutes ces décisions.

Chacun sçait que l'on doit distinguer la Théologie d'avec la Philosophie, les articles de nostre Foy d'avec les opinions des hommes, les veritez que Dieu apprend à tous les Chrestiens par une autorité visible, de celles qu'il ne découvre qu'à quelques personnes en récompense de leur attention & de leur travail. Des choses qui dépendent de principes si différens ne doivent pas sans doute estre confonduës. L'on ne doute point aussi qu'il ne faille faire servir les sciences humaines à la Religion, chacun en demeure d'accord; mais cela se doit faire dans un esprit de paix & de charité, sans se condamner les uns les autres, tant que l'on convient des veritez que l'Eglise a décidées; car c'est ainsi que la verité se découvrira, & qu'adjoutant de nouvelles découvertes à celles des anciens, toutes les sciences se perfectionneront de plus en plus.

Mais l'imagination de la plus-part des hommes ne s'accorde pas des nouvelles découvertes; La nouveauté des sentimens, mesme les plus avantageux à la Religion, les effraye; Et ils se familiarisent facilement avec les prin-

P R E F A C E.

cipes les plus faux, & les plus obscurs, pourveu que quelque ancien les ait avancez. Et lors qu'ils se sont ainsi familiarisez avec ces principes, quelque obscurs qu'ils soient, ils les trouvent évidens, & les regardent comme tres-utiles quoy qu'ils soient tres dangereux. Ils s'accoutument mesme si bien, à dire & à écouter ce qu'ils ne conçoivent point, & à se défaire d'une difficulté réelle par une distinction imaginaire, qu'ils demeurent toujours tres-satisfaits de leurs fausses idées, & ne scauroient mesme souffrir qu'on leur parle un langage qui soit clair & distinct : Semblables en cela à ces personnes qui sortant d'un lieu obscur apprehendent la lumiere, & ne peuvent la supporter, s'imaginant qu'on les aveugle, lors mesme que l'on tâche de dissiper les tenebres qui les environnent.

Ainsi, quoy que Monsieur Rohault ait fait voir plusieurs fois dans ses Conferences publiques, par plusieurs justes raisonnemens & consequences, qu'il est dangereux de soutenir, par exemple, que les bestes ont une Ame plus noble que le Corps; cependant, comme cette opinion est ancienne, & que la plus-part des hommes sont accoutumez à la croire; & que celle qui luy est contraire, & qui ne les fait considerer que comme des machines, a le caractère de la nouveauté; ceux qui jugent de la dureté des opinions, plutôt par la frayeur & la surprise qu'elles produisent dans l'imagination, que par l'évidence & la lumiere qu'elles répandent dans l'esprit, ne manqueront pas de regarder cette opinion des Cartesiens comme dangereuse; Et ils condamneront bien plutôt ces Philosophes comme temeraires, qu'ils ne feront ceux-là mesmes qui soutiennent que les bestes sont capables de raisonner.

Delà vient, que si dans une compagnie, quelque personne un peu grave vient à dire d'un ton serieux, ou plutôt avec cet air que répand sur le visage, l'imagination, lors qu'elle est surprise & effrayée par quelque chose d'extraordinaire; *En verité les Cartesiens sont d'étranges gens, ils soutiennent que les bestes n'ont point d'Ame; j'apprehende fort que bien-tost ils n'en disent autant de l'homme; Cela seul sera suffi-*

P R É F A C E.

sant pour persuader plusieurs personnes que cette opinion est dangereuse ; il n'y a point de raisons qui puissent empêcher l'effet de ce discours sur les imaginations foibles. Et si par hazard il ne se trouve dans la compagnie quelque esprit vif & enjoté, qui en fasse voir le ridicule, & qui par un air fier & résolu ne rassure la compagnie de la peur qu'on luy aura faite, les Cartesiens auront beau se tourmenter, ils n'effaceront jamais par leurs raisonnemens l'impression qu'on aura donnée d'eux & de leur doctrine.

Cependant il n'y auroit rien de plus facile que de faire voir l'extravagance de ce discours, il n'y auroit simplement qu'à mettre la définition à la place du definy. Car si par exemple, quelqu'un disoit sérieusement, *Les Cartesiens sont d'estranges gens, ils disent que les bestes ne pensent ny ne sentent point, l'apprehende fort que bien-tost ils n'en disent autant de Nous* ; Certainement on se mocqueroit d'une personne qui avanceroit un tel discours, & chacun jugeroit aisément que son apprehension seroit fort impertinente, & fort mal-fondée. Car que les bestes soient tout ce que l'on voudra, qu'elles pensent ou qu'elles ne pensent point, qu'elles sentent ou qu'elles ne sentent point, cela ne prouve & ne conclud rien à nostre égard, & n'empêche pas que nous ne soyons ce que nous sommes, & que chacun ne soit convaincu de sa propre pensée, & de son propre sentiment.

Mais la plus-part des hommes ne sont pas capables de démesler les moindres équivoques ; principalement lors que leur imagination est effrayée par l'idée de quelque nouveauté qu'on représente comme dangereuse. Outre que l'air, & les manieres avec lesquelles on dit les choses, nous persuadent sans peine, & souvent mesme avec plaisir ; mais la verité ne se découvre point sans quelque application d'esprit, dont plus de la moitié du monde n'est pas capable.

Mais je ne m'apperçois pas que cette Préface est déjà si longue, que je crains mesme qu'elle ne soit ennuyeuse, & cependant je n'ay encore rien dit de mon sujet, n'ayant jusques icy parlé que du titre qu'il porte ; Cela pourtant ne s'est pas fait sans raison ; Car voyant que je n'avois que fort peu
de

P R E F A C E.

de choses à dire touchant le corps de ce Livre, qui néanmoins est assez gros, j'ay cru qu'il ne luy falloit pas mettre une teste qui luy fust tout à fait disproportionnée; Et pour avoir de la matiere, je me suis un peu estendu sur les loüanges de l'auteur; soit pour laisser à la posterité ce petit monument de sa gloire, soit pour deffendre sa personne & sa doctrine des insultes de ses envieux.

Je viens maintenant à mon sujet, dont je n'ay que deux mots à dire.

Ce Livre n'est autre chose qu'un Recueil de plusieurs different Traitez de Mathematique, que Monsieur Rohault avoit coûtume d'enseigner à ceux qui luy fesoient l'honneur de vouloir bien l'avoir pour Maistre. Il n'est pas necessaire que je les désigne tous icy par leur nom, puis que cela se verra cy-après par la Table; Je puis dire seulement, que bien que ces Traitez soient tres communs, les choses y sont touchées d'une maniere qui n'est pas commune. Car Monsieur Rohault avoit cela de particulier, que ne s'estant jamais appliqué a beaucoup approfondir ces parties de Mathematiques, qui estant d'une trop grande & trop profonde speculation, & abstraction, sont de peu d'usage parmy le monde (quoy que sans doute ce soient pourtant celles qui sont davantage paroistre la grandeur de l'Esprit humain, & jusques où peut aller sa capacité & son estendue) mais s'estant uniquement attaché à celles qui entrent plus dans le commerce des hommes, & dont il est presque impossible de se pouvoir passer; Aussi s'estoit-il estudié à les bien comprendre, & particulierement à trouver des manieres propres à les faire bien concevoir aux autres.

C'est ce que je me promets que l'on reconnoistra facilement icy, par les expressions simples & propres dont il se servoit pour les donner à entendre à ses auditeurs. Aussi, quoy que les divers Traitez qui sont contenus dans ce Livre soient dans les mains de plusieurs; néanmoins l'on trouvera bien de la difference entre ces mesmes Traitez, tels qu'ils sont icy, & leurs copies, ou pour mieux dire leurs premiers crayons; Car on ne les donne pas icy simplement comme il les don-

P R E F A C E.

noit luy-mesme à ses disciples , mais comme il les leur expliquoit dans ses leçons particulieres. Si bien que ceux qui voudront se rendre tant soit peu attentifs , pourront aysement d'eux-mesmes , & sans autre maistre que l'esprit de Monsieur Rohault qui y regne par tout , entendre tout ce qui est contenu dans ce gros Livre.

J'espere après cela que chacun trouvera que ce Livre ne sera pas d'une mediocre utilité pour le public , puis que toutes sortes de personnes y pourront trouver dequoy s'instruire. Les jeunes Gentils-hommes y pourront apprendre les premiers Elemens de la Géometrie ; puis passer de là aux Fortifications ; où ils verront les différentes manieres de fortifier les places , tant regulieres qu'irregulieres , les avantages qu'il y faut ménager , les égards qu'il faut avoir à toutes les choses du dedans & du dehors ; ils verront , entre ces différentes manieres , qu'elles sont les plus parfaites , en quoy elles le sont , pourquoy elles ne le sont pas toujourns , & quand l'une doit estre préférée à l'autre. Mais ils y apprendront aussi , que la maniere d'attaquer d'aujourd'huy ; les grandes ruines que font les bombes , les carcasses , & le canon ; & sur tout que la vigueur , & la generosité extraordinaire de nos Generaux , de nos Capitaines , & de nos Soldats , fait qu'il n'y a plus de places imprenables.

Ceux qui voudront se donner au Negoce ou aux affaires , & y agir en gens de bien & d'honneur , y pourront apprendre à bien tenir leurs livres , & dresser leurs comptes ; à ne se point laisser tromper , & à ne point aussi tromper les autres , par quelque erreur de calcul , ou impreveuë , ou malicieuse : Car ce n'est pas d'aujourd'huy que l'on sçait , que pour faire une grande fortune , & s'enrichir aux dépens d'autrui , il ne faut voir les choses qu'à demy , & non pas voir si clair ; Une conscience bien éclairée est un obstacle invincible & impenetrable au mal.

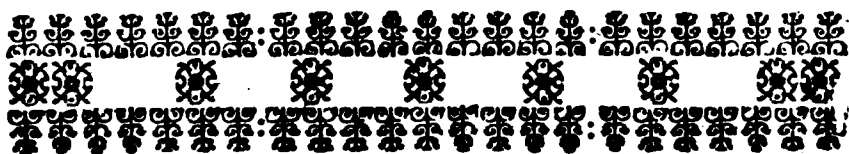
Les Artisans pourront aussi par le moyen des Méchaniques se former eux-mesmes l'esprit , & se rendre capables de bien exercer leurs Arts ; & s'ils ont un peu de génie & d'industrie , cela leur ouvrira l'esprit pour inventer de nouvelles

P R E F A C E.

Machines, fabriquer de nouveaux Instrumens, & faciliter ainsi les moyens d'exécuter leurs Ouvrages.

Je n'ay plus qu'une chose à faire observer, qui est, qu'ayant tâché de mettre chaque Traité dans l'ordre & dans le rang où il doit estre, il est arrivé néanmoins que celui qui devoit estre le premier, est icy le dernier. Dequoy je n'ay point d'autre raison à rendre, sinon que comme c'estoit celui où Monsieur Rohault s'estoit le moins estendu & expliqué, & par conséquent où il avoit laissé plus de choses, au soin de celui qui pourroit un jour travailler à le mettre en estat de paroistre au jour, je l'ay réservé pour le dernier, afin de me donner le loisir d'y pouvoir bien penser, tandis qu'on imprimeroit les autres Traitez ; Mais il n'y a rien de plus facile, que de passer par dessus les autres, & de lire ce Traité-là le premier.

Si je ne m'estois point déjà trop estendu, je pourrois icy faire remarquer les grands avantages que l'on peut tirer des Mathematiques, & particulièrement de la Géometrie ; C'estoit mesme le premier dessein que je m'estois proposé, afin de donner quelque estendue à cette Préface, & me fournir de la matiere dequoy pouvoir proportionner la teste de ce Livre avec le reste du corps ; Mais ayant depuis considéré qu'il estoit important de disculper Monsieur Rohault, & moy avec luy, des reproches qui nous estoient faits par ceux qui se donnoient la liberté de rendre publiquement suspecte la foy du Maître & des Disciples, par les mauvaises conséquences qu'ils tiroient de leurs principes, cela m'a fait changer de dessein, & m'a déterminé à celui que j'ay pris. Si j'y ay bien ou mal réussi je laisse à chacun à en juger. Mais au moins je puis assurer avec sincerité, que ce n'est que le desir de deffendre la verité, & de repousser la calomnie, en faisant connoistre la pureté de leur Foy & de leur Doctrinne, qui me l'a fait entreprendre.



T A B L E

DES TRAITÉZ CONTENUS en ce Livre.

PREMIER TRAITÉ.

Les six premiers Livres des Elemens d'Euclide , page 1

SECOND TRAITÉ

La Trigonometrie , ou la Resolution des Triangles. 303

TROISIÈME TRAITÉ.

La Geometrie Pratique. 335

QUATRIÈME TRAITÉ.

Les Fortifications. 373

CINQUIÈME TRAITÉ.

Les Mechaniques. 479

SIXIÈME TRAITÉ.

La Perspective. 595

SEPTIÈME TRAITÉ.

La Resolution des Triangles Spheriques. 617

HUITIÈME TRAITÉ.

L'Arithmetique. 643

LES

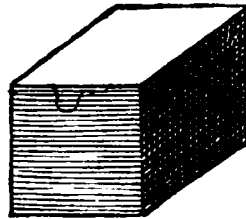


LES SIX PREMIERS LIVRES
DES ELEMENS
D'EUCLIDE.
LIVRE PREMIER.



N ne peut pas douter qu'il n'y ait des Estres étendus en longueur, largeur, & profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *Corps* ou *Solide*.

En examinant en particulier un de ces Corps, comme celui qui est icy représenté, qui ressemble à un dé à jouer, il est certain que l'on y reconnoît un Dessus, un Dessous, un Devant, un Derriere, & des Costez.



Puis ne considerant que le Dessus de ce Corps, on peut assurer, sans craindre de se tromper, qu'il a de la longueur & de la largeur, & point du tout de profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *Superficie* ou *Surface*.

Ensuite, considerant l'une des extremittez de cette superficie, l'on n'y remarque que de la longueur, sans lar-

2 ELEMENS D'EUCLIDE.

geur ny profondeur; Et c'est ce qu'on appelle *une Ligne*.

Enfin, considérant l'extrémité de l'une de ces lignes, on reconnoît que c'est une chose qui n'a ny longueur, ny largeur, ny profondeur; & c'est ce qu'on appelle *un Point*.

Ainsi, il est indubitable qu'il y a des Superficies, des Lignes, & des Points; mais il est certain aussi que c'est seulement par la pensée que les points sont séparés des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps, ou solides; Ce qu'il suffit de remarquer icy pour établir le fondement & la vérité des définitions suivantes.

Mais auparavant, comme dans les Sciences dont nous avons à traiter, on ne doit rien avancer qui ne soit clair à l'esprit, & qui ne soit fondé en preuves, & que souvent pour la preuve des propositions qu'on examine, on se sert de Définitions, de Demandes, d'Axiomes, de Theorèmes, de Problèmes, de Lemmes, & de Corollaires, il est bon d'expliquer icy ce que l'on entend par ces termes.

Définition, est une explication claire & précise de la signification des mots, ou des choses que les mots signifient.

Demande, est une proposition, qui étant claire & certaine, est supposée vraie, pour n'être pas obligé de la démontrer.

Axiome, est une proposition si évidente d'elle-même, que l'esprit n'en peut douter, & qui pour cela n'a pas besoin de preuve.

Theorème, est une proposition qui contient quelque propriété à démontrer.

Problème, est une proposition qui contient la preuve de quelque chose qui estoit à faire, ou à trouver.

Lemme, est une proposition qui n'est mise au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corollaire, est une proposition qui suit d'une autre qu'on vient de prouver.

DEFINITIONS.

1. Un Point, est ce qui n'a ny longueur, ny largeur, ny profondeur; & qui par conséquent n'a ny étendue, ny parties.

2. Une Ligne, est une étendue en longueur, sans largeur ny profondeur.

3. Les Extrémités d'une Ligne, sont les points qui la terminent.

4. Une Ligne Droite, est une ligne qui a toutes ses parties également posées entre ses extrémités; en sorte que l'une ne s'élève & ne s'abaisse point plus que l'autre.

Par exemple, la ligne AB est une ligne  droite, par ce qu'elle a toutes ses parties tellement posées entre ses extrémités A, & B, que pas une n'est plus élevée, ny plus abaissée que l'autre.

5. Une Ligne Courbe, est une ligne qui n'a pas toutes ses parties également posées entre ses extrémités.

Par exemple, la ligne CD est une ligne courbe; parce qu'elle a quelques-unes de ses parties, comme E, & F, qui ne sont pas également posées entre ses extrémités, & dont l'une s'élève ou s'abaisse plus que l'autre. 

6. Une Superficie, ou Surface, est une étendue en longueur & largeur, sans profondeur.

Par exemple, l'étendue qui est renfermée entre les lignes AB, BC, CD, & DA, est une superficie, parce qu'elle a de la longueur & de la largeur, & qu'elle n'a point de profondeur. 

7. Les Extrémités d'une Superficie, sont les lignes dont elle est bornée.

8. Une Superficie Plane, ou un Plan, est une superficie qui a toutes ses parties également posées entre ses extrémités; en sorte que l'une ne s'élève & ne s'abaisse point plus que l'autre, comme icy ABCD.

4 ELEMENS D'EUCLIDE.

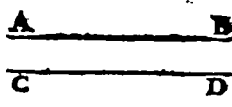
9. Une Superficie Courbe, est une superficie qui n'a pas toutes ses parties également posées entre ses extremittez, & dont l'une s'éleve ou s'abaisse plus que l'autre.

10. Une Superficie Convexe, est une superficie courbe, considerée du costé qu'elle s'éleve.

11. Une Superficie Concave, est une superficie courbe, considerée du costé qu'elle s'enfonce ou s'abaisse.

Ainsi, la superficie d'un globe est une superficie courbe, laquelle considerée par le dehors est convexe, & considerée par le dedans est concave.

12. Des Lignes Paralleles, sont des lignes droites qui sont sur un mesme plan, & qui estant prolongées de part & d'autre à l'infiny, ne se rencontrent jamais, & sont toujours également distantes.

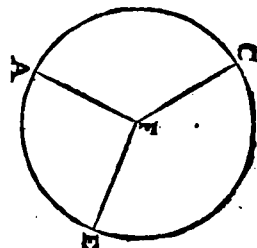
Par exemple, les lignes AB, CD, sont  paralleles, par ce qu'elles sont sur un mesme plan, & qu'estant prolongées de part & d'autre à l'infiny, elles ne se rencontreront jamais, & seront toujours également distantes.

13. Le Terme, est l'extremité de quelque grandeur.

14. Une Figure, est ce qui est environné de termes.

15. Un Cercle, est une figure plane, bornée d'une seule ligne courbe, qu'on nomme circonference, au dedans de laquelle il y a un point, qu'on nomme centre, duquel toutes les lignes droites menées à la circonference sont égales entr'elles.

Par exemple, la figure ACE est un cercle, parce que c'est une figure plane, qui est bornée d'une seule ligne courbe, à sçavoir AEC, & qu'au dedans il y a un point, à sçavoir F, duquel toutes les lignes droites, comme FA, FC, FE, qui sont menées à la circonference, sont égales entr'elles.

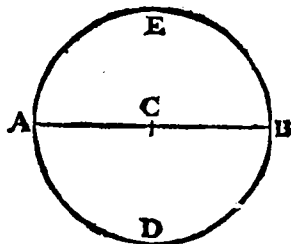


16. Le Diametre d'un Cercle, est une ligne droite qui passe par le centre, & qui se termine de part & d'autre à la circonference.

LIVRE PREMIER.

5

Par exemple, au cercle ADBE, la ligne droite AB, est un diamètre, parce qu'elle passe par le centre C, & que ses extremités A, & B, se terminent de part & d'autre à la circonférence.



17. Un Arc de Cercle, est une partie de la circonférence d'un cercle, comme BE.

Si la circonférence d'un cercle est divisée en 360. parties égales, chacune de ces parties s'appelle Degré, dont la 60. partie s'appelle Minute, &c.

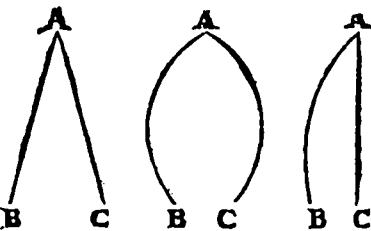
18. Un Demy Cercle, est une figure comprise du diamètre du cercle, & de la moitié de la circonférence, comme AEB.

19. Un Angle, est l'inclinaison de deux lignes qui se rencontrent en un point non directement; ou pour mieux dire, c'est l'espace qui est compris entre deux lignes ainsi inclinées.

Ainsi, les lignes BA, CA, qui sont inclinées l'une vers l'autre, & qui se rencontrent non directement au point A, forment ce qu'on appelle un angle.

20. Les Costez d'un Angle, sont les lignes qui forment l'angle.

21. La Pointe, ou le Sommet d'un Angle, est le point où se rencontrent les deux costez de l'angle.



L'on désigne quelquefois un angle par une seule lettre, que l'on met au sommet; & quelquefois par trois, & alors celle qui marque le sommet se doit mettre au milieu; Ainsi, pour désigner par trois lettres l'angle A, l'on dit l'angle BAC, ou bien l'angle CAB.

22. Un Angle Rectiligne, est un angle compris de deux lignes droites.

23. Un Angle Curviligne, est un angle compris de deux lignes courbes.

24. Un Angle Mixte, est un angle compris d'une ligne droite & d'une ligne courbe ; comme on peut voir en la figure precedente.

Comme l'angle rectiligne est d'un plus grand usage que les deux autres, c'est de luy que l'on entendra parler cy-apres, lors qu'on parlera simplement d'un angle, sans en désigner l'espece.

25. La Quantité ou la Grandeur d'un Angle, est le nombre des degrez que contient l'arc que ses costez comprennent, d'un cercle qui a son sommet pour centre.

Et ainsi, pour déterminer la quantité ou la grandeur d'un angle, il ne faut que décrire un cercle dont le sommet de l'angle soit le centre ; puis il faut sçavoir combien de degrez contient l'arc de ce cercle compris entre ses deux costez, & le nombre de ces degrez en determinera la grandeur.

D'où il suit qu'un angle est d'autant plus grand, que cet arc comprend un plus grand nombre de degrez.

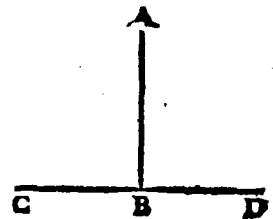
26. Une Ligne Perpendiculaire, est une ligne droite, qui tombant sur une autre ligne droite, fait de part & d'autre des angles égaux.

Ainsi, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD ; parce qu'elle tombe de telle sorte sur cette ligne, qu'elle fait les angles ABC, & ABD égaux entr'eux.

Quand une ligne droite tombe à l'extremité d'une autre ligne droite, elle ne laisse pas de luy estre perpendiculaire, si cette autre ligne estant prolongée, elle fait avec elle des angles de part & d'autre égaux entr'eux.

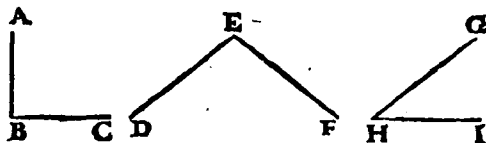
Si une ligne est perpendiculaire à une autre, cette autre reciproquement luy est aussi perpendiculaire ; ainsi, les deux lignes AB, CD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

27. Un Angle Droit, est un angle compris de deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre ; comme l'angle ABC.



LIVRE PREMIER.

28. Un Angle Obtus, est un angle plus grand qu'un droit, commel'angle DEF.



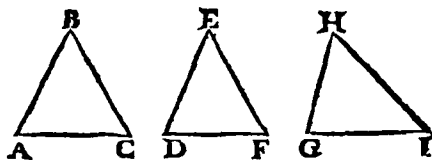
29. Un Angle Aigu, est un angle plus petit qu'un droit, comme l'angle GHI.

30. Une Figure Rectiligne, est une figure comprise ou bornée de plusieurs lignes droites; Et c'est de celle-là seule, & du cercle, dont il est parlé dans ces Elemens.

31. Les Costez d'une Figure Rectiligne, sont les lignes droites dont elle est bornée.

32. Un Triangle, est une figure comprise de trois lignes droites, comme ABC.

Le Triangle considéré selon ses Costez, se divise en trois especes, sçavoir, en Triangle Equilateral, en Isoscele, & en Scalene.



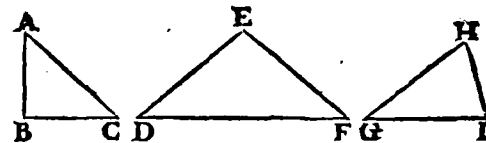
33. Un Triangle Equilateral, est un triangle qui a ses trois costez égaux, comme ABC.

34. Un Triangle Isoscele, est un triangle qui a deux de ses costez égaux, comme DEF.

35. Un Triangle Scalene, est un triangle qui a ses trois costez inégaux, comme GHI.

Le Triangle considéré selon ses angles, se divise aussi en trois especes, sçavoir, en triangle Rectangle, en Ambligone, & en Oxigone.

36. Un Triangle Rectangle, est un triangle qui a un angle droit, comme ABC.



37. Un Triangle Ambligone, ou obtus-angle, est un triangle qui a un angle obrus, comme DEF.

28. Un Triangle Oxigone, ou aigu-angle, est un triangle qui a les trois angles aigus, comme GHI.

39. La Base d'un Triangle, est le costé qui soutient l'an-

8 ELEMENTS D'EUCLID ..

gle que font les deux autres costez.

Ainsi, en tout triangle, chaque costé peut estre considéré comme la baze ; C'est ainsi que la baze d'un triangle rectangle est le costé qui soutient l'angle droit.

40. Un Parallelogramme, est une figure comprise ou bornée de quatre lignes droites, dont les costez opposez sont paralleles.

Ainsi, les figures qui sont icy marquées ABCD, sont des parallelogrammes, par ce que chacune est comprise de quatre lignes droites, dont les costez opposez, comme AB, CD, sont paralleles.

Il y a quatre sortes de Parallelogrammes, sçavoir, le Quarré, le Rectangle (ou le quarré long) le Rhombe, & le Rhomboïde.

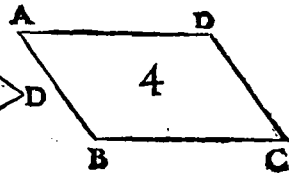
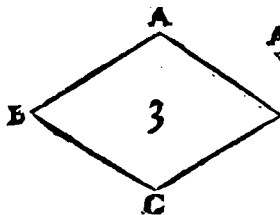
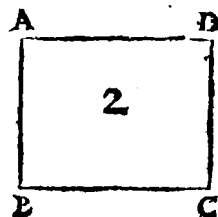
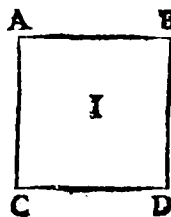
41. Un Quarré, est un parallelogramme, qui a les quatre costez égaux, & les quatre angles droits, comme ABCD. 1.

42. Un Rectangle, ou un quarré long, est un parallelogramme, qui a les quatre angles droits, & les costez opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 2.

43. Un Rhombe, est un parallelogramme, qui a les quatre costez égaux, & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 3.

44. Un Rhomboïde, est un parallelogramme, qui a les costez & les angles opposez égaux entr'eux, comme ABCD. 4.

45. La Diagonale ou le Diametre, d'un Parallelogramme,



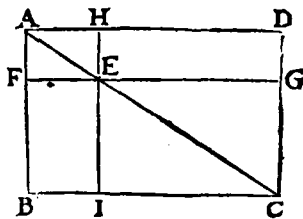
LIVRE PREMIER.

9

me, est une Ligne droite, tirée de l'un des Angles de ce Parallelogramme, à celui qui luy est opposé.

Ainsi la Ligne AC, est la Diagonale ou le Diametre du Parallelogramme ABCD.

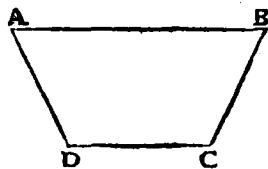
46. Les Parallelogrammes à l'entour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce sont deux Parallelogrammes, dont les Diagonales, prises chacune à part, font partie de ce Diametre, & prises ensemble, font le Diametre Total.



Ainsi les Parallelogrammes AFEH, & EICG, sont des Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre du Parallelogramme ABCD; parce que leurs Diagonales AE, EC, prises chacune à part, font partie du Diametre AC, & prises ensemble font ce Diametre Total.

47. Les Supplémens des Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre d'un autre Parallelogramme, ce sont deux Parallelogrammes, par lesquels ce Diametre ne passe point, & qui avec les deux autres qui sont allentour du Diametre, composent cet autre Parallelogramme Total; Comme sont icy les Parallelogrammes FBIE, EHDG, lesquels avec ceux qui sont allentour du Diametre font le Parallelogramme Total ABCD.

48. Un Trapeze, est une Figure comprise de quatre Lignes droites, dont les costez opposez, ou pour le moins deux de ces costez, ne sont point Paralleles; Comme ABCD est un Trapeze; parce que ses deux costez opposez AD, BC, ne sont point Paralleles.



Et ainsi un Trapeze est une Figure de quatre costez, qui n'est point Parallelogramme.

DEMANDES.

1. Que d'un Point donné à un autre Point donné l'on
B

10 ELEMENS D'EUCLIDE.

puisse mener une Ligne droite.

2. Que l'on puisse prolonger tant que l'on voudra une Ligne droite donnée & terminée.

3. Que l'on puisse décrire un Cercle de quelque Centre & de quelque Intervalle que ce soit.

4. Que toute Grandeur donnée puisse estre augmentée ou diminuée.

A X I O M E S.

1. Les Grandeurs égales à une même Grandeur sont égales entr'elles.

Ainsi les Lignes AB, EF, qui sont chacune égales à la Ligne CD, sont égales entr'elles.

2. Si à des Grandeurs égales on adjointe des Grandeurs égales, les Tous seront égaux.

A	B
C	D
E	F

3. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, les Restes seront égaux.

4. Si à des Grandeurs inégales on adjointe des Grandeurs égales, les Tous seront inégaux.

5. Si de Grandeurs inégales on retranche des Grandeurs égales, les Restes seront inégaux.

6. Les Grandeurs qui sont doubles, ou triples, ou quadruples &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.

7. Les Grandeurs qui sont moitié, ou tiers, ou quart &c. d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.

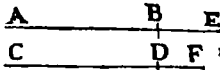
8. Les Grandeurs qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles.

C'est à dire, par exemple, que si deux Grandeurs étant mises l'une sur l'autre, se peuvent tellement ajuster, que l'une n'excede point l'autre, mais la couvre précisément, ces deux Grandeurs sont égales entr'elles.

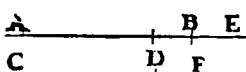
9. Le Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

10. Le Tout est plus grand qu'une de ses parties.

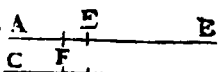
11. Les Angles droits sont égaux entr'eux.
12. Deux Lignes droites n'enferment point un espace.
13. Si deux Lignes droites se coupent l'une l'autre, elles se couperont en un Point.
14. Si deux Lignes droites se rencontrent non directement en un Point, étant prolongées, elles se couperont l'une l'autre en ce même Point.
15. Si a des Grandeurs égales, on adjoûte des Grandeurs inégales, l'excez des Toutes sera le même que l'excez des Adjoûtées.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB,  CD, sont égales, & qu'on leur adjoûte les Lignes inégales BE, DF, l'excez dont la Toute AE, surpassera la Toute CF, sera égal à l'excez, dont l'Adjoûtée BE, surpassé l'Adjoûtée DF.

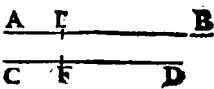
16. Si a des Grandeurs inégales on adjoûte des Grandeurs égales, l'excez des Toutes sera le même que l'excez des premières.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes  AB, CD, sont inégales, & qu'on leur adjoûte les Lignes égales BE, DF, l'excez dont la Toute AE, surpassera la Toute CF, sera le même que celui dont AB, surpassé CD.

17. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs inégales, l'excez des Grandeurs qui restent, sera égal à l'excez des grandeurs retranchées.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB,  CD, sont égales, & qu'on en retranche les parties inégales AE, CF, l'excez dont le reste FD, surpassera le reste EB, sera égal à l'excez dont AE, surpassé CF.

18. Si de Grandeurs inégales, on retranche des Grandeurs égales, l'excez des Restes sera le même que l'excez des Toutes.

Ainsi, si l'on suppose que les Lignes AB,  CD, sont inégales, & qu'on en retranche les parties égales AE, CF, l'excez dont le

12 ELEMENS D'EUCLIDE.

Reste EB, surpassera le Reste FD, sera le mesme que celuy dont la Toute AB, surpassa la Toute CD.

19. Si une Grandeur est double d'une autre, & l'Adjoû-tée de l'Adjoû-tée, le Tout sera double du Tout.

Ainsi, si a une Ligne de 8. pieds, qui est double d'une Ligne de 4. pieds, l'on ajoute une Ligne de 4. pieds, qui est double d'une Ligne de 2. pieds, le Tout 12. pieds, sera double du Tout 6. pieds.

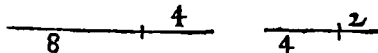
20. Si une Grandeur est double d'une autre, & la Retran-chée de la Retranchée, le Reste sera double du Reste.

Ainsi, une Ligne de 12. pieds

estant double d'une Ligne de

6. pieds, si l'on retranche 4.

pieds de la plus grande, & 2. pieds de la plus petite, les 8. pieds qui resteront en l'une, seront doubles des 4. qui res-teront en l'autre.



LIVRE PREMIER.

PROPOSITION I.

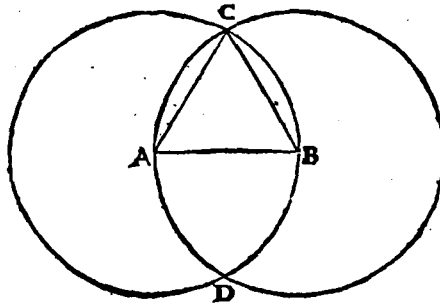
PROBLEME I.

Sur une Ligne droite donnée & terminée, décrire un Triangle Equilateral.



Je suppose que l'on donne la ligne droite AB, qui est terminée; & je propose de décrire sur cette Ligne un Triangle Equilateral. Pour le faire.

Décrivez du centre A, & de l'Intervalle AB, le Cercle CBD; décrivez aussi du Centre B, & de l'Intervalle BA, le Cercle DAC; ce Cercle coupera l'autre aux deux points C, & D; de l'un de ces points, par exemple de C, menez les deux Lignes droites CA, CB; Ces deux Lignes avec la Ligne AB, feront un Triangle; & je dis que ce Triangle sera Equilateral. Pour le prouver.

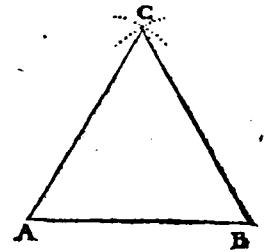


La Ligne AB, & la Ligne AC, sont les rayons du Cercle CBD; donc elles sont égales entr'elles; De même, la Ligne BA, & la Ligne BC, sont les rayons du Cercle DAC, donc elles sont aussi égales entr'elles; Par conséquent la

Ligne AC, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à ſçavoir AB, ſont égales entr'elles, par le premier Axiome. Ainſi le Triangle ABC, qui eſt décrit ſur la Ligne droite donnée AB, eſt Equilateral ; ce qu'il falloir faire, & démonſtrer.

Remarque.

Pratique de cette propoſition. Ouvrez le compas de l'Intervalle AB ; puis des points A, & B, comme Centres, décrivez deux Arcs de Cercle, qui ſ'entrecoupent au point C, & menez du Point C, les Lignes droites CA, CB, & le Triangle ABC, ſera Equilateral.



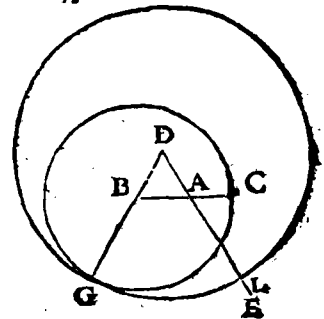
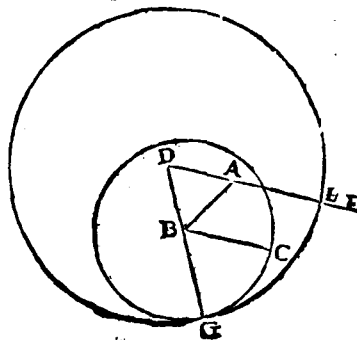
PROPOSITION II.

PROBLEME II

D'un Point donné mener une Ligne droite égale à une Ligne droite donnée.

JE ſuppoſe que l'on donne le point A, & la Ligne droite BC ; & je propoſe de tirer du Point A, une Ligne droite égale à la Ligne BC. Pour le faire.

De l'une des extremités de la Ligne BC, par exemple, du Point B comme Centre, & de



l'Intervalle BC, décrivez le Cercle CG ; puis du Point A, au point B, menez la Ligne droite AB ; décrivez ensuite sur cette Ligne, par la Proposition précédente, le Triangle Equilateral ABD ; prolongez apres cela le costé DB, jusqu'à ce qu'il rencontre la circonference du Cercle CG, en quelque point, comme G ; prolongez aussi la Ligne DA, indefiniment vers E ; enfin du Centre D, & de l'Intervalle DG, décrivez le Cercle GL ; ce Cercle coupera la Ligne indefinie DE, en quelque point, comme L ; cela estant, je dis que la Ligne AL, qui part du Point donné A, est égale à la Ligne droite donnée BC ; Pour le prouver.

La Ligne DL, & la Ligne DG, sont les rayons du Cercle GL ; donc elles sont égales entr'elles ; maintenant si de ces deux Lignes on retranche les parties DA, DB, qui sont égales, parce que ce sont les costez d'un Triangle equilateral, les restes AL, & BG, seront égaux entr'eux, par le 3. Ax. D'ailleurs, la Ligne BC, & la Ligne BG, sont les rayons du Cercle CG ; donc elles sont aussi égales entr'elles ; Par consequent la Ligne AL, & la Ligne BC, qui sont égales à une même, à sçavoir BG, sont égales entr'elles, par le 1. Ax. Nous avons donc d'un Point donné mené une Ligne droite, égale à une Ligne droite donnée ; ce qu'il falloit faire & démonstrer.

Remarque.

Pratique de cette proposition. Il faut prendre avec le compas la grandeur de la Ligne donnée, puis le transportant au point donné, y mener une Ligne égale à son ouverture.



PROPOSITION III.

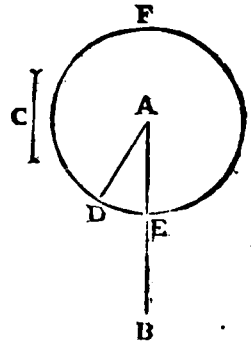
PROBLEME III.

Deux Lignes droites inegales estant données, retrancher de la plus grande une partie égale à la plus petite.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, & C, soient données, & que AB, soit la plus grande; & je propose de retrancher de AB, une partie égale à C; Pour le faire.

De l'une des extremités de la Ligne AB, par exemple du Point A, menez par la proposition precedente la Ligne droite AD, qui soit égale à C; puis du centte A, & de l'Intervalle AD, décrivez le Cercle DEF; ce Cercle coupera la Ligne AB, au Point E; cela estant, je dis que la partie AE, qui est, retranchée de AB, est égale à C; Pour le prouver.

La Ligne AE, & la Ligne AD, sont les rayons du Cercle DEF; donc elles sont égales entr'elles; mais la Ligne AD, par la construction, est égale à la Ligne C; donc la Ligne AE, qui est égale à la Ligne AD, est aussi égale à la Ligne C, par le premier Axiome; ce qu'il falloit faire & démonstrer.

*Remarque.*

Pratique de cette Proposition. Il faut prendre avec le Compas la grandeur de la plus petite, & la retrancher de la plus grande.

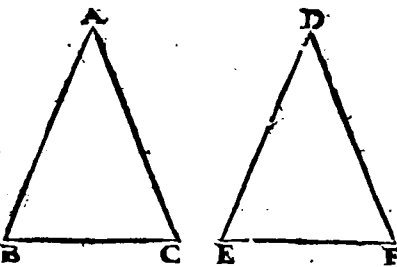
PROPOSITION

PROPOSITION IV.

THEOREME I.

Si deux Triangles ont deux Costez égaux à deux Costez, chacun au sien, & l'Angle compris de ces deux Costez égal à l'Angle ; la Baze sera égale à la Baze ; les deux autres Angles seront égaux aux deux autres Angles, chacun au sien ; & tout le Triangle sera égal, à tout le Triangle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Costé AB soit égal au Costé DE, le Costé AC au Costé DF, & que l'Angle A, compris des deux Costez AB, AC, soit égal à l'Angle D, compris des deux Costez DE, DF; Cela étant, je dis que la Baze BC, est égale à la Baze EF; que l'Angle B, est égal à l'Angle E; l'Angle C à l'Angle F; & enfin que tout le Triangle ABC, est égal à tout le Triangle DEF; Pour le prouver.



Transportez par pensée le Triangle DEF, sur le Triangle ABC, en sorte que vous fassiez tomber le Costé DE, sur le Costé AB, & les extremités D, & E, sur les extremités A, & B; ce qui se peut faire, puisque ces deux Lignes sont supposées égales. Ensuite dequoy, puis que l'Angle D, est égal à l'Angle A, par supposition, il s'ensuit que le Costé DF, tombera sur le costé AC; & puis que la Ligne DF, est supposée égale à la Ligne AC, il s'ensuit que l'extremité F, tombera sur l'extremité C; ainsi les Points E, & F, qui sont les extremités de la Baze EF,

C

tombant sur les points B & C, qui sont les extremitéz de la Baze BC, il s'ensuit que la Baze EF, tombera sur la Baze BC, par la 4. Défin. & par consequent ces deux Lignes, qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles, par le 8. Ax. D'ailleurs, puis que l'Angle E, convient avec l'Angle B, il s'ensuit qu'il luy est égal; & puis que l'Angle F, convient avec l'Angle C, il s'ensuit aussi qu'il luy est égal; & enfin puis que le Triangle DEF, convient avec le Triangle ABC, il s'ensuit que ces deux Triangles sont aussi égaux entr'eux, par le huitième Axiome; Qui est tout ce qu'il falloit démonstrer.

PROPOSITION V.

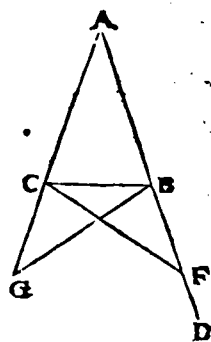
THEOREME II.

Si un Triangle est Isoscele, les Angles sur la Baze sont égaux entr'eux; & ses Costez étant prolongez, les Angles sous la Baze seront aussi égaux entr'eux.

JE suppose que le Triangle ABC, soit Isoscele, & que ses Costez AB, AC, soient égaux; cela étant, je dis premierement que les Angles ABC, & ACB, qui sont sur la Baze BC, sont égaux entr'eux; Pour le prouver.

Prolongez le costé AC, autant qu'il vous plaira, par exemple, jusqu'au Point G; puis prolongez le costé AB, indefiniment; ensuite retranchez, par la troisième Proposition, du Costé AB prolongé, la partie AF, égale à AG; menez apres cela une Ligne droite du point C au Point F, & une autre du Point B au Point G.

Cette construction supposée, comparez le Triangle BAG, avec le Triangle CAF; le Costé AB du premier Triangle, est égal au Costé AC du second, par supposition; le Costé AG



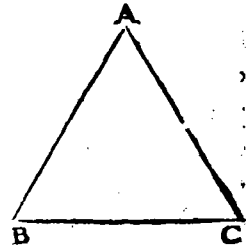
du même premier Triangle est égal au costé AF du second, par construction. Voilà donc deux Costez, sçavoir AB, AG, égaux à deux Costez, AC, AF; de plus l'Angle compris des deux Costez AB, AG, est égal à l'Angle compris des deux autres Costez AC, AF; parce que c'est l'Angle A, qui est commun aux deux Triangles. Partant il suit par la Proposition précédente, que la Baze BG est égale à la Baze CF, que l'Angle G est égal à l'Angle F, & que l'Angle ABG est égal à l'Angle ACF; Maintenant, puis que les Lignes AG, AF, ont esté faites égales, si on en retranche les parties AC, AB, qui sont supposées égales, les restes CG, BF, seront égaux entr'eux. Comparez maintenant le Triangle CGB, avec le Triangle BFC, le Costé CG, du premier Triangle, est égal au Costé BF, du second, puis que ce sont les restes de grandeurs égales; le Costé GB, est égal au Costé FC, cela a desja esté prouvé; l'Angle G, compris des deux Costez CG, GB, est égal à l'Angle F, compris des deux Costez BF, FC, cela a aussi esté prouvé; d'où il suit, par la même Proposition précédente, que l'Angle GCB, est égal à l'Angle FBC, & l'Angle GBC, égal à l'Angle FCB; si donc nous osons ces deux Angles égaux GBC, & FCB, des deux Angles ABG, ACF, qui ont esté prouvez égaux, les Angles restans ABC, & ACB, seront égaux entr'eux, par le troisième Axiome; Or ces Angles ABC, ACB, sont les Angles sur la Baze BC, du Triangle Isoscele ABC; partant, si un Triangle est Isoscele les Angles sur la Baze sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démonstrer.

Je dis en second lieu, que les Costez égaux AB, AC, du Triangle Isoscele ABC, étant prolongez, les Angles sous la Baze BC, seront aussi égaux entr'eux; car ces Angles ne sont autres que les Angles GCB, & FBC, qui ont desja esté prouvez égaux. Ainsi en tout Triangle Isoscele les Angles sur la Baze, & les Angles sous la Baze, sont égaux entr'eux; Ce qu'il falloit démonstrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition qu'un Triangle Equilateral, tel que je suppose icy le Triangle ABC, est aussi Equiangle, c'est à dire qu'il a ses trois Angles égaux.

Car puis que les Costez AB, AC, sont égaux; il s'ensuit par cette 5. Proposition que les Angles B, & C, sont égaux entr'eux; de mesme, puisque les Costez BA, BC, sont égaux, il s'ensuit aussi que les Angles A, & C, sont égaux entr'eux; Ainsi les Angles A, & B, estant égaux au troisiéme C, il s'ensuit qu'ils sont tous trois égaux entr'eux; & partant que le Triangle Equilateral ABC, est Equiangle.

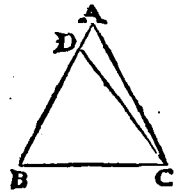


PROPOSITION VI.

THEOREME III.

Si un Triangle à deux Angles égaux entr'eux, les Costez qui les soutiennent sont aussi égaux entre eux.

JE suppose que dans le Triangle ABC, les Angles ABC, & ACB, soient égaux entr'eux; Cela estant, je dis que les Costez AB, AC, qui soutiennent ces deux Angles sont aussi égaux.



Car si ces deux Costez AB, AC, n'étoient pas égaux entr'eux, il s'ensuivroit que l'un seroit plus grand que l'autre; Posons que ce soit AB; retranchez donc, par la troisiéme Proposition, du Costé AB, la partie BD, égale à AC, & menez la Ligne CD; Comparez ensuite le Triangle DBC, avec le Triangle ACB, le costé DB du premier Triangle, est égal au Costé AC du se-

LIVRE PREMIER. 21

cond, par construction ; le Costé BC, est commun aux deux Triangles ; de plus l'Angle B, compris des deux Costez DB, BC, est égal à l'Angle ACB, compris des deux autres Costez AC, CB, par supposition ; Donc par la quatrième Proposition, le Triangle DBC, seroit égal au Triangle ABC, c'est à dire la partie au tout ; ce qui est impossible. Il est donc impossible que le Costé AB, soit plus grand que le Costé AC ; on prouvera de même que le Costé AC, ne sçauroit estre plus grand que le Costé AB ; & ainsi les deux Costez AB, AC, sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démonstrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition que tout Triangle Equiangular, c'est à dire qui a ses trois angles égaux, comme nous supposons icy le Triangle ABC, est aussi Equilateral.

Car de ce que les Angles B, & C, sont égaux, ses deux costez AB, AC, qui les soutiennent s'ensuivent égaux : De même, de ce que les Angles A & B, sont égaux, les deux Costez AC, BC, qui les soutiennent s'ensuivent aussi égaux ; d'où il suit que les deux costez AB, BC, qui sont égaux au troisième AC, sont égaux entr'eux, par le premier Axiome. Et partant que le Triangle ABC, est Equilateral.

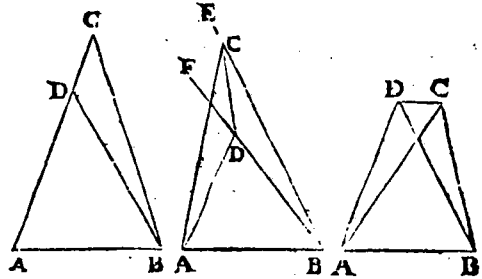


PROPOSITION VII.

THEOREME IV.

Si des extremittez d'une Ligne droite, on mène deux Lignes droites, qui se rencontrent en un Point, on ne pourra pas des mesmes extremittez, & de mesme part, mener deux autres Lignes droites égales aux deux premieres, chacune a la sienne, qui se rencontrent en un autre point.

JE suppose que des extremittez de la Ligne droite AB, on mène les deux Lignes droites AC, BC, qui se rencontrent au Point C, & je dis que des mesmes extremittez A, & B, l'on ne sçauroit mener de mesme part, à sçavoir vers C, deux autres Lignes droites égales aux deux premieres AC, BC, chacune a la sienne,



(c'est à dire, en sorte que celle qui part du Point A, soit égale à AC, & celle qui part du Point B, soit égale à BC) qui se rencontrent en un autre Point, qu'au Point C.

Car si elles se pouvoient rencontrer ailleurs qu'au Point C, il faudroit que le Point de leur rencontre fust ou sur l'un des Costez AC, BC, du Triangle ABC, ou dans ce Triangle, ou hors ce Triangle.

Premierement, ce Point de rencontre ne peut estre sur l'un des Costez AC, BC, par exemple en D, autrement il s'en suivroit que AD, seroit égal à AC, c'est à dire la partie au tout, ce qui est absurde & impossible.

Secondement, ce Point de rencontre ne peut aussi estre dans le Triangle ABC ; Car supposé qu'il püst estre en D, menez à ce Point D, les Lignes AD, BD, puis du Point D, au Point C, menez la Ligne DC ; enfin prolongez BC, BD, vers E, & vers F ; Cette construction supposée, puis que dans le Triangle ACD, les Costez AC, AD, sont supposez égaux, il s'ensuit, par la cinquième Proposition, que les deux Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle ECD, est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie, il est donc aussi plus grand que son égal ADC, & à plus forte raison que l'Angle FDC, qui n'est encore que partie de ADC ; Maintenant puis que les Costez BC, BD, du Triangle BCD, sont supposez égaux, & qu'ils sont prolongez vers E, & vers F, il s'ensuit, par la cinquième Proposition, que les Angles ECD, FDC, qui sont sous la Baze sont égaux entr'eux. Mais nous avons déjà prouvé que l'Angle ECD, estoit plus grand que l'Angle FDC ; Ainsi il s'ensuivroit que deux Angles seroient égaux & inegaux, ce qui est impossible. Il est donc impossible que ce point de rencontre puisse estre dans le Triangle ABC.

Enfin ce Point de rencontre ne peut estre hors du Triangle ABC ; Car supposé qu'il püst estre en D, menez à ce point D, les lignes AD, BD ; puis du Point D, au Point C, menez la ligne DC. Cette construction supposée, puis que les Costez AC, AD, du Triangle ACD, sont supposez égaux, il s'ensuit par la cinquième Proposition, que les Angles ACD, & ADC, sont aussi égaux. Or l'Angle BCD, est plus grand que l'Angle ACD, qui n'est que sa partie, il est donc aussi plus grand que son égal, ADC, & à plus forte raison que sa partie BDC ; Maintenant, puis que dans le Triangle BDC, les Costez BC, BD, sont supposez égaux, il s'ensuit par la cinquième Proposition que les Angles BCD, & BDC, qui sont sur la Baze sont égaux entr'eux ; mais nous venons de prouver que l'Angle BCD, estoit plus grand que l'Angle BDC ; donc il s'ensuivroit que l'Angle BCD, &

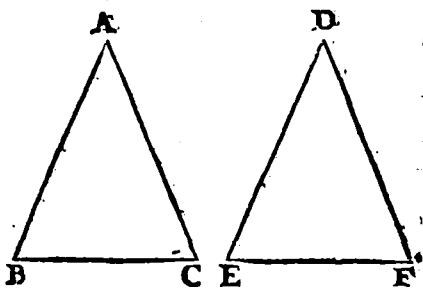
l'Angle BDC, seroient tout ensemble égaux & inégaux. Ce qui est absurde & impossible ; Il est donc impossible que ce Point de rencontre puisse estre hors du Triangle ABC, mais nous avons aussi prouvé qu'il ne peut estre ny dans le Triangle, ny sur ses Costez, excepté au Point C, il s'ensuit donc que le Point de rencontre de ces deux Lignes ne peut estre ailleurs qu'au point C, Ce qu'il falloit démonstrer.

PROPOSITION VIII.

THEOREME V.

Si deux Triangles ont deux Costez égaux à deux Costez, chacun au sien, & la Baze égale à la Baze, l'Angle compris de ces Costez égaux sera aussi égal à l'Angle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Costé AB, soit égal au Costé DE, le Costé AC, au Costé DF, & la Baze BC, à la Baze EF; cela estant, je dis que l'Angle A, compris des deux Costez AB, AC, est égal à l'Angle D, compris des deux Costez DE, DF; Pour le prouver.



Transportez par pensée le Triangle ABC, sur le Triangle DEF, en sorte que vous fassiez tomber la Baze BC, sur la Baze EF, & les extremités B, & C, sur les extremités E, & F, ce qui se peut faire, puisque BC, & EF, sont supposées égales. Cela estant, considérez que des extremités de la Ligne EF, partent deux Lignes droites ED, FD, qui se rencontrent au Point D, & que des mesmes extremités

LIVRE PREMIER. 25

extremitez partent deux autres Lignes droites BA, & CA, qui leur sont égales, chacune a la sienne, par supposition, & qui se rencontrent aussi en un Point; Partant, par la Proposition precedente, ces deux Lignes ne peuvent pas se rencontrer en un autre Point qu'au Point D; D'où il suit que le Point A, tombera sur le Point D; que la Ligne AB, tombera sur DE; la Ligne AC, tombera sur DF; & qu'ainsi l'Angle A, conviendra avec l'Angle D; & partant qu'il luy est égal; Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Puis que par la démonstration precedente il a esté prouvé que le Triangle ABC, convenoit avec le Triangle DEF, outre que nous avons conclu que les Angles A, & D, estoient égaux entr'eux, nous pouvons encore conclure que les deux Angles B, & C, sont égaux aux deux Angles E, & F, chacun au sien; & que tout le Triangle ABC, est égal à tout le Triangle DEF.

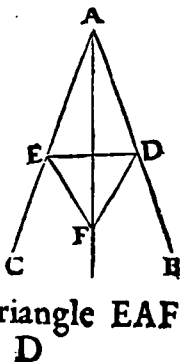
PROPOSITION IX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Angle Rectiligne donné.

JE suppose que l'Angle Rectiligne BAC, soit donné, & je propose de le couper en deux également. Pour le faire, Prenez sur les Costez AB, AC, deux parties égales AD, AE; menez du Point D, au Point E, la Ligne Droite DE; décrivez sur la Ligne DE, par la premiere Proposition, le Triangle Equilateral DEF; menez du Point A, au Point F, la Ligne Droite AF; Cela estant je dis que cette Ligne AF, coupe l'Angle BAC, en deux également. Pour le prouver.

Comparez le Triangle DAF, avec le Triangle EAF;



26 ELEMENS D'EUCLIDE.

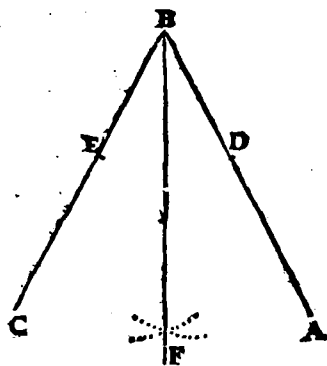
le Costé AD, est égal au Costé AE, par construction, le Costé AF, leur est commun; la Baze DF, est égale à la Baze EF, puis que ces deux Lignes sont les Costez d'un Triangle Equilateral; Partant par la Proposition précédente l'Angle DAF, est égal à l'Angle EAF; Et par conséquent l'Angle BAC, est coupé en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition qu'on peut couper un Angle Rectiligne donné en 4. 8. 16. 32. 64. & ainsi de suite en doublant toujours: Car apres l'avoir divisé en deux également, il n'y a qu'à diviser chaque moitié en deux parties égales, puis la moitié de la moitié, &c.

Remarque.

Pratique de cette proposition. Appliquez vostre compas au Point B; & l'ayant ouvert à discrétion, marquez les Points E, & D; puis avec la mesme ou autre ouverture, mettez vostre compas au Point E, & décrivez vers F, un Arc de Cercle; & sans changer d'ouverture transportez vostre compas au Point D, & décrivez un autre Arc qui coupe le premier au Point F; Enfin menez par le Point B, & le Point F, une Ligne Droite; & cette Ligne coupera l'Angle donné en deux également.



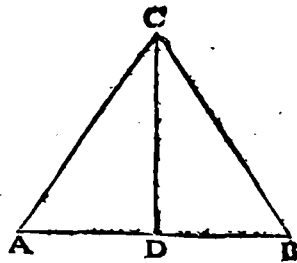
PROPOSITION X.

PROBLEME V.

Couper en deux également une Ligne Droite donnée, & terminée.

JE suppose que l'on donne la Ligne Droite AB, qui est terminée, & je propose de la couper en deux parties égales. Pour le faire.

Décrivez sur la Ligne AB, le Triangle Equilateral ACB, par la 1. Prop. puis, par la Proposition précédente, coupez l'Angle ACB, en deux également par la Ligne Droite CD, cette Ligne coupera la Ligne AB, au Point D; Cela est, je dis qu'elle sera coupée en deux parties égales. Pour le prouver.



Comparez le Triangle ACD, avec le Triangle BCD; le costé AC, est égal au costé BC, parce que ce sont les costez d'un Triangle Equilateral; le costé CD, est commun aux deux Triangles; Voila donc les deux Costez AC, CD, égaux aux deux costez BC, CD, chacun au sien; De plus l'Angle ACD, compris de ces deux costez, est égal à l'Angle BCD, compris des deux autres, par construction; Donc par la 4. Prop. la Baze AD, est égale à la Baze BD; Et ainsi la Ligne donnée AB, est coupée en deux également; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

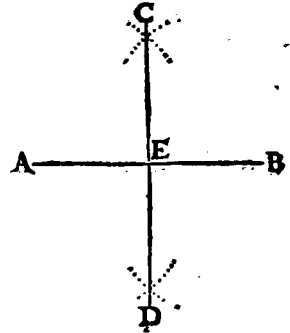
Corollaire.

Il suit de cette Proposition qu'on peut couper une Ligne Droite donnée en 4. 8. 16. 32. 64. &c. & ainsi de suite, en doublant toujours; car apres l'avoir coupée en deux également, il ne faut que couper derechef chaque

moitié en deux parties égales, puis la moitié de la moitié, &c.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vostre compas à l'une des extremitéz de la Ligne donnée ; & le tenant ouvert plus que de la moitié de cette Ligne, décrivez deux Arcs de Cercle vers C, & vers D ; Transportez vostre compas à l'autre extremité, & avec la même ouverture decrivez deux autres Arcs qui coupent les deux premiers aux Points C, & D ; puis du point C, au point D, menez une Ligne Droite ; cette Ligne coupera la Ligne AB, en deux parties égales au Point E.



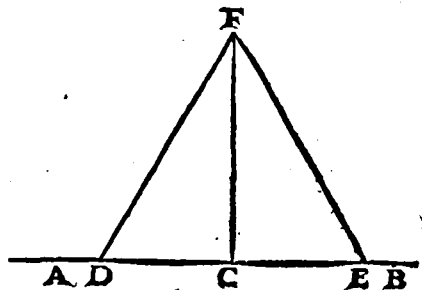
PROPOSITION XI.

PROBLEME VI.

D'un Point donné dans une Ligne Droite élever une Ligne Perpendiculaire.

JE suppose que la Ligne AB, soit donnée, & le Point C, dans cette Ligne ; Et je propose d'élever du Point C, une Ligne Perpendiculaire à AB. Pour le faire,

Prenez sur la Ligne AB, de part & d'autre du Point C, deux parties égales CD, CE ; Décrivez sur la Ligne DE, par la 1. Prop. le Triangle Equilateral DFE ; Menez du Point C, au Point F, la Ligne Droite CF ; Cela étant, je dis que cette Ligne

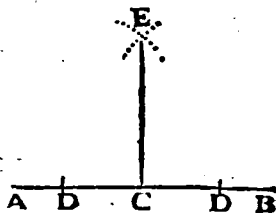


CF, qui part du Point donné C, est Perpendiculaire à la Ligne donnée AB; Pour le prouver.

Comparez le Triangle DCF, avec le Triangle ECF, le Costé CD, est égal au Costé CE, par construction, le Costé CF, est commun aux deux Triangles; Voila donc deux Costez CD, CF, égaux à deux Costez EC, CF, chacun au sien; Deplus la Baze DF, est égale à la Baze EF, parce que ce sont les Costez d'un Triangle Equilateral; Partant (par la 8. Prop.) l'Angle DCF, compris des deux Costez du premier Triangle, est égal à l'Angle ECF, compris des deux Costez de l'autre Triangle; Et ainsi la Ligne CF, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de part & d'autre égaux entr'eux, est perpendiculaire; Nous avons donc d'un Point donné dans une Ligne Droite, élevé une Perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vostre compas au Point C, & le tenant ouvert comme il vous plaira, marquez de part & d'autre de la Ligne donnée les deux Points D & D; Ouvrez apres cela un peu davantage vostre compas, & le mettant successivement aux Points D & D, décrivez avec cette ouverture deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent au Point E; puis du Point C, au Point E, menez la Ligne Droite CE; Et cette Ligne sera Perpendiculaire à la Ligne donnée.



Si le Point donné estoit à l'extrémité de la Ligne, il la faudroit prolonger, & pratiquer ensuite ce qui vient d'estre dit. Il y a encore une autre maniere d'élever une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne Droite, qui sera enseignée cy-apres,

30 ELEMENS D'EUCLIDE.

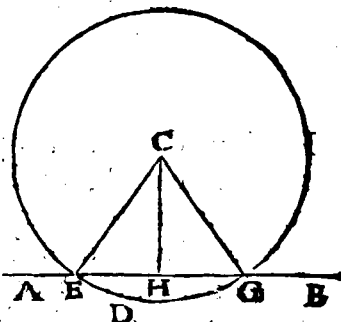
PROPOSITION XII.

PROBLEME VII.

D'un Point donné hors d'une Ligne Droite indéterminée, abaisser sur cette Ligne, une Ligne Perpendiculaire.

JE suppose qu'on donne la Ligne Droite AB, qui est indéterminée, & le Point C, hors de cette Ligne ; Et je propose d'abaisser du Point C, une Ligne Perpendiculaire à AB. Pour le faire.

Prenez au delà de la Ligne AB, un Point tel qu'il vous plaira, comme D ; puis du Centre C, & de l'Intervalle CD, décrivez un Cercle ; Ce Cercle coupera la Ligne AB, aux Points E, & G ; Coupez après cela (par la 10. Prop.) la partie EG en deux également au Point H ; Menez du Point C, au Point H, la Ligne Droite CH ; Cela étant, je dis que cette Ligne CH, qui tombe du Point donné C, sur la Ligne AB, luy est Perpendiculaire. Pour le prouver.

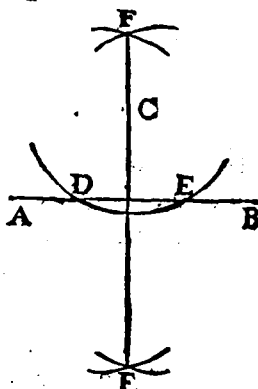


Menez les Lignes Droites CE, CG, & comparez le Triangle EHC, avec le Triangle GHC, le Costé EH, est égal au Costé GH, parce que la Ligne EG, a esté coupée en deux également ; le Costé HC, est commun aux deux Triangles ; Voila donc les deux Costez EH, HC, égaux aux deux GH, HC ; De plus la Baze CE, est égale à la Baze CG, parce que ce sont les rayons d'un mesme Cercle ; Partant (par la 8. Prop.) L'Angle CHE, compris des deux premiers Costez, est égal à l'Angle CHG, compris des deux autres. D'où il suit que la Ligne CH, qui tombe sur AB, & qui fait des Angles de

part & d'autre égaux entr'eux, est Perpendiculaire à AB, Ainsi nous avons d'un Point donné hors d'une Ligne Droite indéterminée, abaissé sur cette Ligne une Ligne perpendiculaire; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Appliquez vostre compas au Point donné C, & décrivez un Cercle de tel Intervalle qu'il coupe la Ligne AB, aux deux Points D, & E; puis ouvrant tant soit peu le compas, & l'appliquant successivement aux deux Points D, & E, Décrivez d'une part ou d'autre de la Ligne AB, deux Arcs qui s'entrecourent au Point F; enfin par le Point F, & par le Point C, menez une Ligne Droite qui rencontre la Ligne AB; & cette Ligne sera Perpendiculaire à la Ligne donnée.



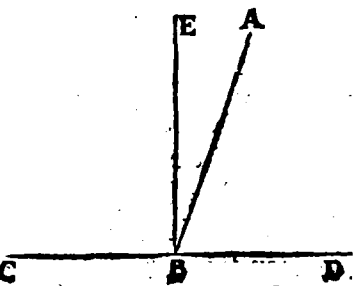
PROPOSITION. XIII.

THEOREME VI.

Quand une Ligne Droite tombe sur une autre Ligne Droite, où elle fait deux Angles Droits, ou deux Angles égaux à deux Droits.

JE suppose que la Ligne Droite AB, tombe sur la Ligne Droite CD; Cela étant, je dis que les deux Angles ABC, ABD, sont Droits, ou égaux à deux Droits.

Car, ou la Ligne Droite AB, est Perpendiculaire à CD, où elle ne l'est pas, Si elle est Per-



pendiculaire, en ce cas, il est évident que les deux Angles ABC, & ABD, sont deux Angles Droits; Si AB n'est pas Perpendiculaire à CD, élevez (par la II. Prop.) la Ligne BE, qui luy soit Perpendiculaire; Cela estant, les Angles EBC, EBD, sont deux Angles Droits; Mais les deux Angles ABC, ABD, pris ensemble sont égaux aux deux Angles EBC, EBD, avec lesquels ils conviennent; Donc ils sont égaux à deux Droits; Ce qu'il falloit démontrer.

I. Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que si la quantité de l'un des deux Angles que fait une Ligne Droite en tombant sur une autre, est connue, on connoitra facilement la quantité de l'autre; Car il n'y aura qu'à ôter la quantité connue de la valeur de deux Angles Droits, & le reste fera la quantité de l'autre; Comme par exemple, si l'Angle ABC, estoit connu de 110. degrez, en ôtant cette quantité de 180. degrez, le reste 70. degrez seroit la quantité de l'Angle ABD.

II. Corollaire.

Il suit encore de cette Proposition, que si deux Lignes Droites s'entrecoupent, les quatre Angles qu'elles feront, vaudront quatre Angles Droits; Car deux de ces Angles pris ensemble, & à costé l'un de l'autre, valent deux Droits, par cette Proposition, & les deux restans valent aussi deux Droits, par la mesme raison.

III. Corollaire.

Il suit derechef, que si d'un Point pris dans un Plan, on tiroit tant de Lignes Droites qu'on voudra sur ce Plan, tous les Angles que feroient toutes ces Lignes, pris ensemble, vaudroient quatre Angles Droits; estant certain qu'ils conviendroient tous, avec les quatre Angles que feroient deux

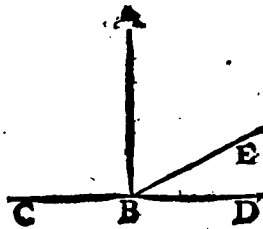
deux Lignes Droites qui s'entrecouperoient en ce même Point.

PROPOSITION XIV.

THEOREME VII.

Si a'un Point de quelque Ligne Droite se rencontrent deux autres Lignes Droites, faisant avec elle de part & d'autre deux Angles égaux à deux Droits, ces deux Lignes se rencontreront directement.

JÉ suppose, que les deux Lignes Droites CB, DB, se rencontrent au Point B de la Ligne Droite AB, & qu'elles font de part & d'autre de cette Ligne les deux Angles ABC, & ABD, égaux à deux Droits ; Cela estant, Je dis que ces deux Lignes se rencontrent directement, c'est à dire, qu'elles ne font ensemble qu'une seule Ligne Droite.



Car si CB, ne concouroit pas directement avec DB, Il s'ensuivroit que CB, estant prolongée vers D, passeroit au dessus ou au dessous de DB ; Supposons si vous voulez qu'elle passe au dessus vers E ; Cela estant, la Ligne CBE, estant Droite, & la Ligne AB, tombant dessus, il s'ensuivroit, par la precedente Proposition, que les deux Angles ABC, & ABE, vaudroient deux Angles Droits ; Mais, par la supposition les deux Angles ABC, & ABD, valent aussi deux Droits ; donc les Angles ABC, & ABE, seroient égaux aux deux Angles ABC, & ABD, c'est à dire la Partie au tout, ce qui est impossible. Il est donc impossible que la Ligne CB, estant prolongée passe au dessus de DB. On prouvera qu'il s'ensuivroit la même absurdité,

E.

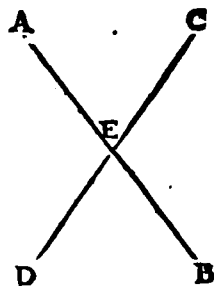
si on pretendoit que CB, estant prolongée dуст passer au dessous de DB ; Et partant les Lignes CB, DB, se rencontrent directement , ou ne font qu'une Ligne Droite ; Ce qu'il falloit demonstrier.

PROPOSITION XV.

THEOREME VIII.

Si deux Lignes Droites s'entrecoupent , les Angles opposez au Sommet seront égaux entr'eux.

JE suppose que les deux Lignes Droites AB, CD, s'entrecoupent au Point E, au tour duquel elles font quatre Angles ; Cela estant, Je dis que les Angles AEC, DEB, qui sont opposez au Sommet sont égaux entr'eux.



Car puis que la Ligne AE, tombe sur CD, Il s'ensuit, (par la 13. Prop.) que les Angles AEC, AED, sont égaux à deux Droits ; De mesme DE, tombant sur AB, les deux Angles AED, DEB, sont égaux à deux Droits ; Partant les deux Angles AEC, AED, sont égaux aux deux Angles AED, DEB ; Ostant donc l'Angle AED, qui leur est commun, les Angles restans AEC, DEB, qui sont opposez au Sommet, s'ensuivent égaux ; On prouvera par un semblable raisonnement que les Angles AED, & CEB, qui sont aussi opposez au Sommet sont égaux entr'eux ; Donc si deux Lignes s'entrecoupent, les Angles qu'elles font opposez au Sommet, sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit demonstrier.

Remarque.

Nous pouvons icy établir une Proposition, qui peut en quelque façon passer pour la Converse de la précédente, à sçavoir ; que si deux Lignes Droites, venant de part & d'autre d'une autre Ligne droite se rencontrent à un même Point de cette Ligne, & font avec elle les Angles oppo-
 sez au Sommet égaux, ces deux Lignes se rencontrent direc-
 tement. Par exemple.

Posons que les deux Lignes Droites CE, DE, viennent de part & d'autre de la Ligne Droite AB, se rencontrer au Point E, en sorte qu'elles fassent les Angles AEC, DEB, oppo-
 sez au Sommet égaux entr'eux ; Cela étant, je dis que ces deux Lignes concourent directement.

Car puisque les Angles AEC, DEB, sont supposez égaux, en leur adjoûtant l'Angle commun AED, il s'ensuivra que les deux Angles AEC, AED, pris ensemble, seront égaux aux deux autres BED, AED, aussi pris ensemble. Or puis que la Ligne DE, tombe sur la Ligne Droite AB ; Les deux Angles BED, AED, valent deux Droits, par la 13. Prop. Partant les deux Angles AEC, AED, valent aussi deux Droits ; Et par conséquent, par la Proposition précédente, les deux Lignes CE, DE, concourent direc-
 tement.

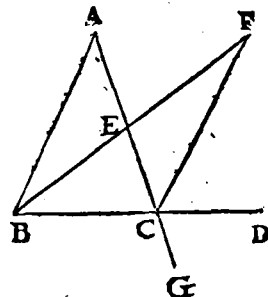


PROPOSITION XVI.

THEOREME IX.

Si le Costé d'un Triangle est prolongé, l'Angle extérieur sera plus grand que chacun des deux opposez intérieurs.

JE suppose qu'au Triangle ABC, le Costé BC, soit prolongé vers D ; Cela estant, je dis premierement que l'Angle extérieur ACD, est plus grand que l'Angle intérieur CAB, qui luy est opposé alternativement. Pour le prouver.



Coupez la Ligne AC, en deux parties égales au Point E ; Menez par le Point B, & par le Point E, la Ligne Droite indéterminée BF ; Retranchez de cette Ligne, la Partie EF, égale à EB ; & du Point C, au Point F, menez la Ligne Droite CF. Cela posé.

Comparez le Triangle CEF, avec le Triangle AEB ; Le Costé EC, du premier Triangle, est égal au Costé EA, du second, puis que la Ligne AC, a esté coupée en deux également ; Le Costé EF, a esté fait égal au Costé EB ; Voilà donc les deux Costez CE, EF, égaux aux deux Costez AE, EB, chacun au sien. De plus l'Angle CEF, compris des deux Costez CE, EF, est égal à l'Angle AEB, compris des deux autres Costez ; parce que ces deux Angles sont opposés au Sommet : Partant par la 4. Prop. la Baze sera égale à la Baze, & les autres Angles égaux aux autres Angles chacun au sien, c'est à dire que l'Angle ECF, ou ACF, sera égal à l'Angle EAB, ou CAB ; Or l'Angle ACD, est plus grand que l'Angle ACF, qui n'est que sa partie ; Il est donc aussi plus grand que l'Angle CAB ; Ce qu'il falloit démonstrer.

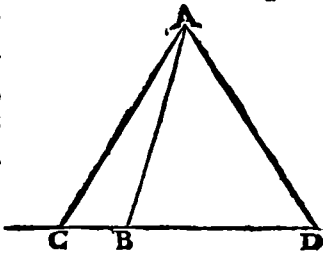
Je dis en second lieu, que le même Angle extérieur ACD , est plus grand que l'autre Angle intérieur ABC , qui luy est simplement opposé. Pour le prouver.

Continuez la Ligne AC , vers G ; l'Angle BCG , est extérieur, & son Opposé alternativement est ABC ; Donc parce qui vient d'estre dit dans la première partie de cette Proposition, l'Angle BCG , est plus grand que l'Angle ABC ; Or par la Proposition précédente, l'Angle ACD , est égal à l'Angle BCG , qui luy est opposé au Sommet ; Partant l'Angle ACD , est aussi plus grand que l'Angle ABC ; Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition que d'un même Point comme A , pris où l'on voudra hors d'une Ligne Droite, par exemple CD , on ne peut mener vers cette Ligne-là plus

de deux Lignes Droites égales entr'elles ; Car si on pretendoit qu'on en pût mener trois, comme AC, AB, AD ; de ce que les deux Lignes AB, AD , seroient égales ; il s'ensuivroit, par la 5. Prop. que l'Angle ABD , seroit égal à l'Angle D ; Mais puis que les Lignes AC , & AD , seroient aussi égales, il s'ensuivroit aussi que l'Angle ACD , seroit égal au même Angle D ; Partant les deux Angles ACD, ABD , qui seroient égaux à l'Angle D , seroient égaux entr'eux, c'est à dire qu'un Angle extérieur seroit égal à son Opposé intérieur, ce qui est impossible par la proposition précédente ; Il est donc impossible que d'un Point pris hors d'une Ligne Droite, on puisse mener sur cette Ligne-là, plus de deux Lignes Droites égales entr'elles.



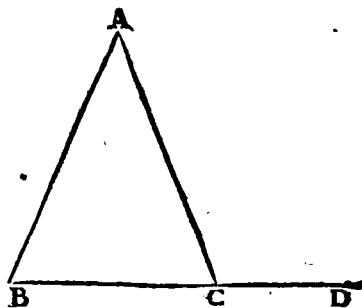
PROPOSITION XVII.

THEOREME X.

En tout Triangle, deux Angles tels que l'on voudra, pris ensemble, valent moins que deux Angles Droits.

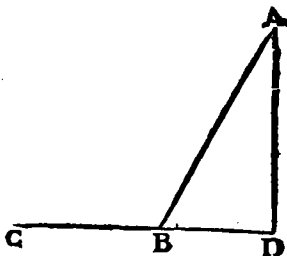
JE suppose le Triangle ABC, Et je dis que deux Angles de ce Triangle tels que l'on voudra, comme ABC, & ACB, pris ensemble, valent moins que deux Angles Droits. Pour le prouver.

Prolongez la Ligne BC, (aux extremités de laquelle sont ces deux Angles) vers tel costé qu'il vous plaira, comme vers D ; L'Angle ACD, est extérieur, & l'Angle ABC, est son Opposé intérieur ; Donc, par la Proposition précédente l'Angle ABC, est plus petit que l'Angle ACD ; Et partant les deux Angles ABC, & ACB, pris ensemble, seront moindres que les deux Angles ACD, & ACB, pris aussi ensemble ; Or par la 13. Prop. les deux Angles ACD, & ACB, valent deux Droits, Donc les deux autres ABC, & ACB, valent moins que deux Droits. On prouvera de même que ACB, & BAC, ou bien ABC, & BAC, valent moins que deux Droits ; Et partant deux Angles d'un Triangle pris comme l'on voudra, valent ensemble moins que deux Droits. Ce qu'il falloit démontrer.



I. Corollaire.

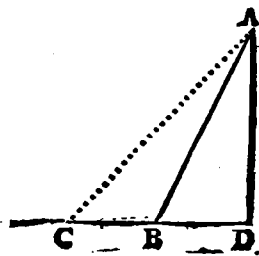
Il fuit de cette Proposition, que d'un meſme Point comme A, on ne peut faire tomber ſur une Ligne Droite, par exemple ſur CD, qu'une ſeule Perpendiculaire; Car ſ'il en pouvoit tomber deux, comme par exemple AD, AB, il ſ'enſuivroit que chacun des deux Angles ABD, & ADB, ſeroient Droits, & qu'ainſi deux Angles d'un Triangle, ne ſeroient pas moindres que deux Droits; Ce qui eſt contre la Proposition precedente.

*II. Corollaire.*

Il fuit encore, que ſi un Angle d'un Triangle eſt Droit, ou Obtus, chacun des deux autres ſera Aigu; Car chacun de ceux-cy eſtant pris avec celui qui eſt déjà Droit, ou Obtus, il ſ'en doit faire un Tout, moindre que deux Angles Droits. Partant, ſi l'on en oſte celui qui eſt Droit, ou Obtus, le reſtant ſera moindre qu'un Droit, C'eſt à dire Aigu,

III. Corollaire..

Il fuit en troiſième lieu, que ſi une Ligne Droite, comme AB, tombant ſur une autre Ligne Droite, comme CD, fait d'une part un Angle Obtus, comme ABC, & de l'autre part un Angle Aigu, comme ABD, en prenant quelque Point dans la Ligne AB, par exemple A, d'où l'on faſſe tomber une Perpendiculaire ſur CD, cette Perpendiculaire tombera de la part de l'Angle Aigu, comme vous voyez icy que



tombe la Ligne AD ; Car si l'on pretendoit que cette Perpendiculaire pût tomber de la part de l'Angle Obtus, comme tombe AC, l'Angle ACB, s'ensuivroit droit. Et d'ailleurs l'Angle ABC, étant supposé Obtus, il s'ensuivroit que deux Angles d'un même Triangle, ne seroient pas moindres que deux Droits ; Ce qui est contre la precedente Proposition.

IV. Corollaire.

Il est enfin évident que les trois Angles d'un Triangle Equilateral, ou les deux Angles égaux d'un Triangle Isocèle, sont Aigus ; Car ces Angles étant égaux, si l'un d'eux estoit Droit ou Obtus, les autres le seroient aussi ; Et ainsi deux Angles d'un Triangle ne seroient pas moindres que deux Droits ; ce qui est impossible comme il vient d'estre demonsté.

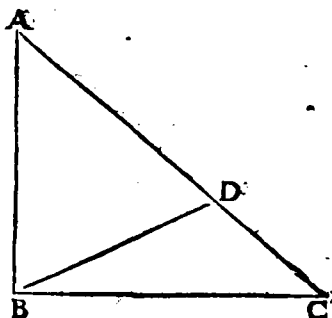
PROPOSITION XVIII.

THEOREME XI.

En tout Triangle, le plus grand Costé soutient le plus grand Angle.

JE suppose que dans le Triangle ABC, le Costé AC, soit plus grand que le Costé AB ; Cela étant, je dis que l'Angle ABC, est plus grand que l'Angle C, Pour le prouver.

Retranchez de AC, la partie AD, égale à AB, & menez la Ligne Droite BD ; le Costé CD, du Triangle BCD, est prolongé vers A, donc par la 16. Prop. l'Angle extérieur ADB, est plus grand que son Opposé intérieur



LIVRE PREMIER.

41

rieur C ; D'ailleurs, puis que AD, est égal à AB, les Angles ABD, & ADB, sont égaux, par la 5. Prop. Or l'Angle ABC, est plus grand que l'Angle ABD, qui n'est que sa Partie ; Il sera donc aussi plus grand que l'Angle ADB, & à plus forte raison que l'Angle C, qui a esté prouvé moindre que ADB ; Ce qu'il falloit démonstrer.

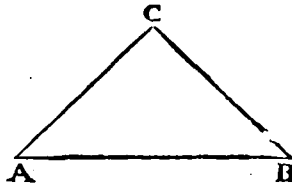
PROPOSITION XIX.

THEOREME XII.

En tout Triangle , le plus grand Angle est soutenu par le plus grand Costé.

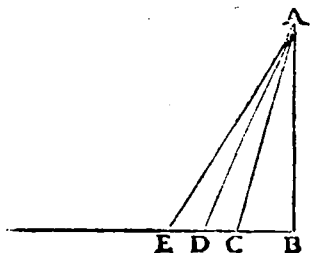
JE suppose que dans le Triangle ABC, l'Angle C, soit plus grand que l'Angle B ; Cela estant , Je dis que le Costé AB, qui soutient le plus grand Angle, est plus grand que AC, qui soutient le plus petit.

Car si AB, n'estoit pas plus grand que AC, il s'en suivroit qu'il luy seroit égal, ou moindre ; s'il luy estoit égal, les Angles B, & C, seroient égaux, par la 5. Prop. ce qui est contre la Supposition. S'il estoit plus petit, le Costé AC, seroit plus grand, & par la Proposition precedente l'Angle B, seroit plus grand que l'Angle C ; Ce qui est encore contre la Supposition ; Et partant le Costé AB, ne pouvant estre ny égal, ny plus petit que AC, il s'en suit qu'il est plus grand. Ce qu'il falloit démonstrer.



Corollaire.

Il suit de cette Proposition , que si d'un Point hors d'une Ligne Droite , on fait tomber sur cette Ligne tant de Lignes Droites que l'on voudra , comme AB, AC, AD, AE, l'une desquelles sçavoir AB, soit Perpendiculaire , cette Perpendiculaire fera la plus petite de toutes : Car elle soutiendra necessairement un Angle Aigu , comme sont C, D, E ; au lieu que les autres soutiendront un Angle Droit , comme est B.

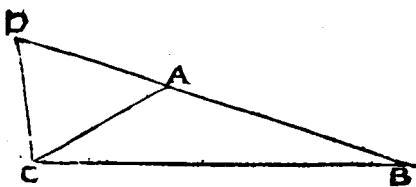


PROPOSITION XX.

THEOREME XIII.

En tout Triangle, deux Costez tels que l'on voudra, pris ensemble, sont plus grands que le troisieme.

JE suppose le Triangle ABC ; Et je dis que deux de ses Costez , tels que l'on voudra , comme AB, AC, pris ensemble , sont plus grands que le troisieme BC ; Pour le prouver.



Prolongez le Costé AB, vers D, puis ayant fait AD, égal à AC, menez la Ligne Droite DC ; Cela posé ; Au Triangle ADC, les Costez AC, AD, sont égaux , par construction ; Donc , par la 5. Prop. l'Angle ACD, est égal à l'Angle D ; Or l'Angle BCD, est plus grand que ACD, qui n'est que sa Partie ; Donc il est aussi plus grand que l'Angle D, son égal.

Maintenant, puisque dans le Triangle BDC, l'Angle BCD, est plus grand que l'Angle D, Il s'ensuit par la Proposition precedente, que le Costé BD, est plus grand que le Costé BC ; Or les deux Costez BA, AC, du Triangle ABC, sont égaux à BD, par construction ; Donc les deux Costez BA, AC, pris ensemble, sont plus grands que BC ; Ce qu'il falloit démontrer.

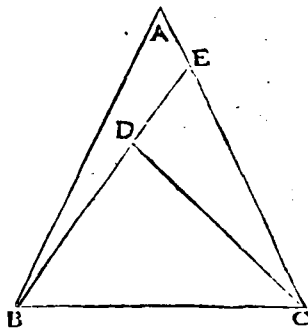
PROPOSITION XXI.

THEOREME XIV.

Si des extremités d'un Costé de quelque Triangle, on mene deux Lignes Droites qui se rencontrent au dedans d'Iceluy, ces deux Lignes seront plus petites que les deux autres Costez de ce Triangle ; Mais elles feront un plus grand Angle.

JE suppose le Triangle ABC, & ayant pris un de ses Costez à discretion, comme BC, je mene les deux Lignes Droites BD, CD, qui se rencontrent en dedans au Point D ; Cela estant, je dis, 1°. que ces deux Lignes BD, CD, sont plus petites que les deux Costez BA, AC. Pour le prouver.

Prolongez BD, jusques en E ; cela posé ; Dans le Triangle BAE, les deux Costez BA, AE, sont plus grands que le troisième BE, par la Proposition precedente ; donc en leur adjoint EC, commun, il s'ensuit que BA, AE, EC, c'est à dire BA, AC, sont plus grands que BE, EC ; De même au Triangle CED, les deux Costez CE, ED, sont plus grands que le troisième CD ; Donc en leur adjoint DB,



44 ELEMENS D'EUCLIDE.

commun, Il s'ensuit que CE, ED, DB, C'est à dire BE, EC, sont plus grands que BD, CD; Mais il a déjà esté prouvé que BA, AC, sont plus grands que BE, EC; Donc à plus forte raison BA, AC, sont plus grands que BD, CD; Ce qu'il falloit démonstrer.

Je dis en second lieu que l'Angle BDC, est plus grand que l'Angle BAC; Pour le prouver.

Le Costé ED, du Triangle CED, est prolongé vers B, & l'Angle BDC, est extérieur; donc par la 16. Prop. il sera plus grand que son Opposé interieur DEC, ou BEC; De mesme, le Costé AE, du Triangle BAE, est prolongé vers C, partant l'Angle extérieur BEC, est plus grand que son Opposé interieur BAE, ou BAC; Mais il a déjà esté prouvé que l'Angle BDC, est plus grand que l'Angle BEC; Donc à plus forte raison l'Angle BDC, est plus grand que l'Angle BAC; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

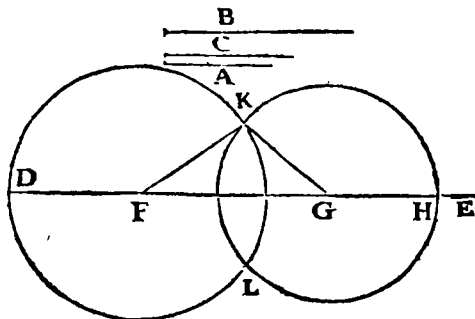
PROBLEME VIII.

Décrire un Triangle qui ait les trois Costez égaux à trois Lignes Droites données, qui soient telles que deux d'entr'elles, prises ensemble, soient plus grandes que la troisième.

JE suppose qu'on donne les trois Lignes Droites A, B, C, deux desquelles, telles que l'on voudra, comme A, & C, prises ensemble, sont plus grandes que la troisième B, Cela étant, je propose de décrire un Triangle qui ait les trois Costez égaux à ces trois Lignes données, chacun à la sienne; Pour le faire.



Menez la Ligne Droite indeterminée DE ; Prenez sur cette Ligne, la partie DF, égale à l'une de ces trois Lignes Droites données, par exemple à A ; Prenez ensuite la partie FG, égale à l'une des deux restantes, par



exemple à B ; Prenez enfin la partie GH, égale à la troisième C ; Décrivez un Cercle du centre F, & de l'Intervalle FD ; Décrivez un autre Cercle du centre G, & de l'Intervalle GH ; Ce second Cercle coupera le premier aux deux Points K, & L ; Prenez l'un de ces deux Points, par exemple K, duquel menez deux Lignes Droites aux Points F, & G ; Cela estant, je dis que le Triangle FGK, a les trois Costez égaux aux trois Lignes Droites données A, B, C ; Pour le prouver.

1° Les Lignes FK, FD, sont égales, estant les Rayons d'un mesme Cercle ; Mais FD, a esté faite égale à la Ligne A ; Donc FK, luy est aussi égale.

2° Le Costé FG, par la construction, est égal à la Ligne B.

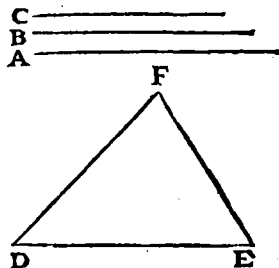
3° Les Lignes GK, GH, sont aussi égales, estant les Rayons d'un mesme Cercle ; Mais GH, a esté faite égale à la Ligne C ; donc la Ligne GK, est aussi égale à la Ligne C ; Et partant le Triangle FGK, a les trois costez égaux aux trois Lignes Droites données A, B, C ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



Remarque.

Pratique de cette Proposition. Supposons qu'on donne les trois Lignes A, B, C ; deux desquelles prises comme l'on voudra sont plus grandes que la troisième.

Prenez avec le compas la grandeur de la Ligne A, & la transportez en DE ; Prenez en suite la grandeur de la Ligne B, & appliquant le compas au Point D, décrivez un Arc de Cercle vers F ; Prenez aussi la grandeur de la Ligne C, & transportant le compas au Point E, décrivez encore un Arc de Cercle qui coupe le premier au Point F ; Enfin tirez les Lignes FD, FE, & le Triangle DEF, aura ses trois Costez égaux aux trois Lignes données.



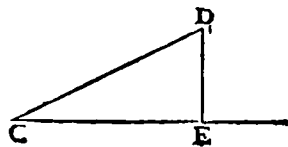
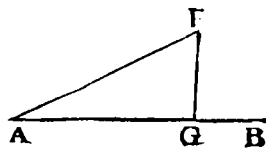
PROPOSITION XXIII.

PROBLEME IX.

Une Ligne Droite estant donnée, & un Point en icelle, tirer de ce Point une Ligne, qui fasse avec la Ligne donnée, un Angle égal à un Angle Rectiligne donné.

Je suppose que la Ligne donnée soit AB, que le Point donné en icelle soit A, & que l'Angle donné soit C ; Et je propose de tirer du Point A, une Ligne Droite qui fasse avec AB, un Angle égal à l'Angle C ; Pour le faire.

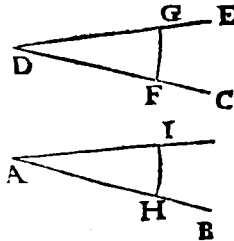
Prenez sur les Lignes CD, CE, tels Points qu'il vous plaira, comme D, & E, & menez la Ligne Droite DE ; Puis ayant pris AG, égal à CE, achevez par la proposition précédente



de décrire le Triangle AGF, qui ait les trois costez égaux aux trois costez du Triangle CDE, sçavoir les deux Costez AG, AF, égaux aux deux costez CE, CD, & la Baze FG, égale à la Baze DE ; D'où il suit, par la 8. Prop. que l'Angle A, est égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit faire.

Remarque.

Pratique de cette Proposition. Supposons que l'on donne le Point A, dans la Ligne Droite AB, avec l'Angle D, Appliquez le pied du compas au Point D, & de tel Intervalle qu'il vous plaira décrivez l'Arc FG; puis transportant le compas ainsi ouvert au Point A, décrivez l'Arc HI ; Cela fait prenez avec le compas la distance FG, & la transportez de H, en I ; Tirez enfin par le Point A, & par le Point I, la Ligne Droite AI, & alors l'Angle A, sera égal à l'Angle D.



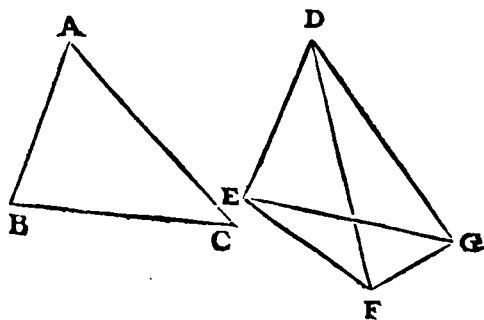
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XV.

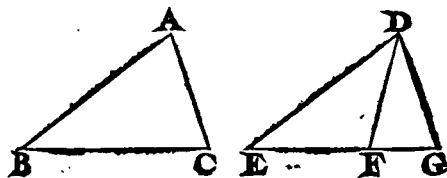
Si deux Triangles ont deux Costez égaux à deux Costez, chacun au sien, & que l'un d'iceux ait l'Angle compris de ces Costez égaux plus grand que l'autre, la Baze sera aussi plus grande que la Baze.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Costé AB, soit égal au Costé DE, le Costé AC, au Costé DF, mais que l'Angle A, soit plus grand que l'Angle EDF ; Cela étant, je dis que la Baze BC, sera plus grande que la Baze EF ; Pour le Prouver.

Tirez par la Proposition précédente la Ligne DG, qui fasse avec DE, l'Angle EDG, égal à l'Angle A ; cette Ligne DG, tombera hors le Triangle DEF, puis que l'Angle EDF, est supposé plus petit que l'Angle A ; Faites ensuite DG, égale à DF, ou à AC, son égale, & menez la Ligne Droite EG ; cette Ligne passera nécessairement ou au dessus du Point F, ou par le Point F, ou au dessous ; Pensons qu'elle passe au dessus, comme icy, & tirons la Ligne FG ; Maintenant en comparant les Triangles DEG, & ABC, les deux Costez ED, DG, sont égaux aux deux Costez BA, AC, chacun au sien, & l'Angle EDG, égal à l'Angle A, par construction ; Partant la Baze EG, est égale à la Baze BC, par la 4. Prop. De plus au Triangle DFG, les deux Costez DF, DG, sont égaux, par construction ; Donc par la 5. Prop. les Angles DFG, DGF, sur la Baze s'ensuivent égaux ; Or l'Angle EFG, est plus grand que l'Angle DFG, qui n'est que sa partie, il est donc aussi plus grand que l'Angle DGF, & à plus forte raison que l'Angle EGF, qui n'est que partie de DGF ; Cela estant, puis qu'au Triangle EFG, l'Angle EFG, est plus grand que l'Angle EGF ; Il s'ensuit par la 19. Prop. que le Costé EG, qui soutient le plus grand Angle, est plus grand que le Costé EF, qui soutient le plus petit ; Mais BC, est égal à EG, comme il a esté prouvé ; Partant BC, est plus grand que EF.



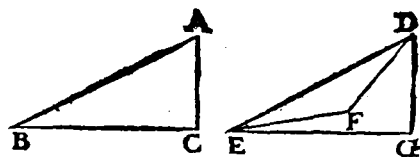
Pensons maintenant que la Ligne EG, passe par le Point F, comme dans cette Figure ; auquel cas on montrera comme cy-dessus que EG, est égal à BC ; Or



EG,

EG, est plus grand que EF, qui n'est que sa partie, donc BC, sera aussi plus grand que la Ligne EF.

Pensons en troisième lieu que la Ligne EG, passe au dessous du Point F, comme icy ; auquel cas la Ligne EG, sera toujours prouvée égale à BC ; Or les Lignes DF,



FE, qui sont menées dans le Triangle DEG, sont plus petites que les deux DG, GE, par la 21. Prop. Donc si de ces deux Tous inégaux on ôte les parties DF, DG, qui sont égales, par construction, le reste EF, s'en suivra moindre que le reste EG ; & partant moindre que son égal BC ; ainsi de quelque façon que tombe la Ligne EG, cette Ligne, ou son égal BC, sera toujours plus grande que EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

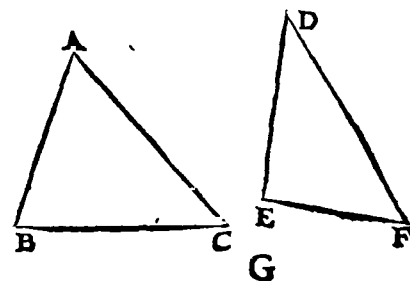
PROPOSITION XXV.

THEOREME XVI.

Si deux Triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la Baze plus grande que la Baze, ils auront aussi l'Angle compris de ces costez égaux plus grand que l'Angle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, le Costé AB, soit égal au Costé DE, le Costé AC, au Costé DF, & que la Baze BC, soit plus grande que la Baze EF ; Cela étant, je dis que l'Angle A, est plus grand que l'Angle D.

Car si cela n'étoit, il luy seroit égal, ou plus petit ;



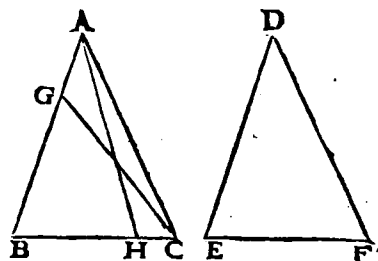
Mais il ne peut luy estre égal ; parce qu'il s'ensuivroit que la Baze BC, seroit égale à la Baze EF, par la 4. Prop. Ce qui est contre la Supposition ; Il ne peut non plus estre plus petit, car il s'ensuivroit que la Baze EF, seroit plus grande que la Baze BC, par la Proposition precedente ; ce qui est aussi contre la Supposition ; Donc l'Angle A, est plus grand que l'Angle D. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME XVII.

Si deux Triangles ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & un Costé égal à un Costé, sçavoir, ou celui aux extremittez duquel sont les Angles égaux, ou celui qui soutient l'un de ces Angles, ils auront aussi les deux autres Costez égaux, chacun au sien, & l'autre Angle égal à l'autre Angle, & tout le Triangle sera égal à tout le Triangle.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B, soit égal à l'Angle E, l'Angle ACB, à l'Angle F, & que le Costé BC, soit égal au Costé EF, aux extremittez desquels sont les Angles égaux ; Cela estant, je dis que le Costé AB, est égal au Costé DE, le Costé AC, au Costé DF, que l'Angle BAC, est égal à l'Angle D ; Et enfin que tout le Triangle ABC, est égal à tout le Triangle DEF.



Car si AB, n'estoit pas égal à DE, il s'ensuivroit que l'un de ces deux Costez seroit plus grand que l'autre ; Pensons si vous voulez que ce soit AB ; en ce cas retranchez

LIVRE PREMIER.

51

de AB, la partie BG, égale à ED ; Puis tirez la Ligne CG ; Maintenant comparant le Triangle GBC, au Triangle DEF, le Costé GB, sera égal au Costé ED, par construction, le Costé BC, est égal au Costé EF, & l'Angle B, égal à l'Angle E, par Supposition ; Donc par la 4. Prop. la Baze sera égale à la Baze, & l'Angle GCB, égal à l'Angle F ; Mais l'Angle ACB, est supposé égal à l'Angle F ; ainsi il s'ensuivroit que l'Angle GCB, & l'Angle ACB, seroient égaux entr'eux, c'est à dire la partie au tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible, que le Costé AB, soit plus grand que le Costé DE ; On prouvera de même que DE, ne sçauroit estre plus grand que AB, donc ces deux Costez AB, DE, sont égaux ; Ensuite dequoy, puis que, par la Supposition, le Costé BC, est égal à EF, & l'Angle B, égal à l'Angle E, Il s'ensuit par la 4. Prop. que la Baze AC, est égale à la Baze DF, que l'Angle BAC, est égal à l'Angle D ; Et enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF ; Ce qu'il falloit démontrer.

Supposons maintenant que le Costé AB, qui soutient l'Angle ACB, & le Costé DE, qui soutient l'Angle F, sont égaux entr'eux ; Cela estant, je dis que le Costé BC, est égal à EF, le Costé AC, égal à DF, que l'Angle BAC, est égal à l'Angle D ; Et enfin que tout le Triangle ABC est égal à tout le Triangle DEF.

Car si BC, n'estoit pas égal à EF, il s'ensuivroit que l'un de ces deux Costez seroit plus grand que l'autre. Pensons que ce soit BC ; auquel cas retranchez de BC, la partie BH, égale à EF, & tirez la Ligne AH ; Maintenant comparant le Triangle ABH, au Triangle DEF, le Costé BH, sera égal au Costé EF, par construction ; le Costé AB, est égal au Costé DE, & l'Angle B, égal à l'Angle E, par Supposition. Partant par la 4. Prop. la Baze sera égale à la Baze, & l'Angle AHB, sera égal à l'Angle F ; Or l'Angle ACB, est supposé égal à l'Angle F, donc l'Angle AHB, seroit égal à l'Angle ACB, c'est à dire l'Angle extérieur à son Opposé Interieur ; ce qui est

impossible par la 16. Prop. Il n'est donc pas vrai que le Costé BC, soit plus grand que EF ; On prouvera de même que EF, n'est pas plus grand que BC ; Partant ces deux Costez BC, EF, sont égaux ; Mais le Costé AB, étant supposé égal à DE, & l'Angle ABC, égal à l'Angle E, il s'en suit par la 4. Prop. que la Baze AC, est égale à la Baze DF, que l'Angle BAC, est égal à l'Angle D, & enfin que tout le Triangle ABC, est égal à tout le Triangle DEF ; Ce qu'il falloit démontrer.

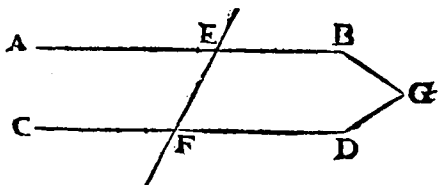
PROPOSITION. XXVII.

THEOREME XVIII.

Si une Ligne Droite tombant sur deux Lignes Droites fait les Angles opposez alternativement égaux entr'eux, ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont Droites ; & que la Ligne EF, tombant dessus fait les deux Angles CFE, & FEB, qui sont alternativement opposez, égaux entr'eux ; Cela étant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car si elles ne sont pas paralleles, ces deux Lignes étant prolongées d'une part ou d'autre se pourront rencontrer. Pensons que ce soit vers G ; En ce cas les deux Lignes EG, FG, avec la Ligne EF, formeront le Triangle EFG, dont le Costé GF, se trouve prolongé vers C ; Partant par la 16. Prop. l'Angle extérieur CFE, sera plus grand que son Opposé alternativement FEB ; Ce qui est contre la Supposition ; Donc les deux Lignes AB, CD, sont paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.



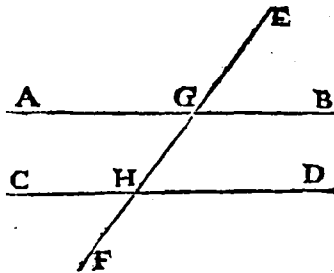
PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XIX.

Si une Ligne Droite tombant sur deux Lignes Droites fait l'Angle extérieur égal à son Opposé Interieur de mesme part, on bien les deux Interieurs de mesme part égaux à deux Droits, ces deux Lignes seront paralleles entr'elles.

JE suppose que les deux Lignes AB, CD, sont Droites, & que la Ligne EF, tombant dessus, & les coupant aux Points G, & H, fasse l'un des Angles extérieurs comme EGA, égal à l'Angle GHC, qui est son Opposé Interieur de mesme part. Cela estant, je dis que les Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car par la 15. Prop. l'Angle HGB, est égal à l'Angle EGA ; Mais l'Angle EGA, est égal à l'Angle GHC, par Supposition ; Partant l'Angle HGB, est égal à l'Angle GHC, qui est son Opposé alternativement. D'où il suit, par la Prop. precedente, que les Lignes AB, CD, sont paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu que les deux Angles AGH, & GHC, qui sont les deux Opposés Interieurs de mesme part, soient égaux à deux Droits ; Cela estant je dis encore que les deux Lignes AB, CD, sont paralleles.

Car puis que les deux Angles AGH, & GHC, sont égaux à deux Droits, il s'ensuit qu'ils sont égaux aux deux Angles AGH, & HGB, qui valent aussi deux Droits, par la 13. Prop. Donc si de ces deux Tous qui sont Egaux l'on oste

l'Angle AGH, qui leur est commun, les Angles restans GHC, & HGB, qui sont opposez alternativement seront égaux; Et partant, par la Proposition precedente, les deux Lignes AB, CD, sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Si on supposoit que la Ligne AB, inclinast tant soit peu par l'extremité A, vers la Ligne CD, & qu'ainsi l'Angle AGH, devenant un peu plus petit, les deux Angles AGH, & GHC, pris ensemble valussent moins que deux Droits; En ce cas il est évident que les Lignes AB, CD, ne seroient point paralleles, mais qu'estant prolongées elles se rencontreroient du Costé où ces deux Angles valent moins que deux Droits; Et partant nous pouvons établir icy cette verité, Que si une Ligne Droite, tombant sur deux Lignes Droites, fait les deux Angles Interieurs de même part moindres que deux Droits, ces deux Lignes ne sont point paralleles, & qu'estant prolongées elles se rencontreront du Costé où ces deux Angles valent moins que deux Droits.

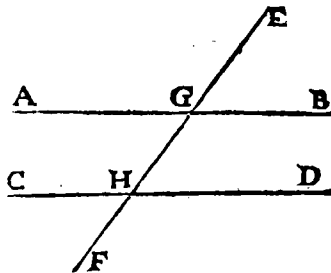


PROPOSITION XXIX.

THEOREME XX.

Si une Ligne Droite tombe sur deux Lignes Droites parallèles, elle fera les Angles opposés alternativement égaux entr'eux, l'Angle extérieur égal à son Opposé Interieur de mesme part ; Et les deux Interieurs de mesme part égaux à deux Droits.

JE suppose que les deux Lignes Droites AB, CD, soient parallèles ; & que la Ligne Droite EF, tombe dessus, & les coupe aux Points G, & H ; Cela estant, je dis premierement que les Angles opposés alternativement, tels que sont AGH, & GHD, sont égaux entr'eux.



Autrement il faudroit que l'un de ces deux Angles fust plus petit que l'autre ; Pensons que ce soit AGH ; auquel cas AGH, pris avec GHC, vaudroit moins que GHD, pris avec le mesme GHC ; Mais GHD, & GHC, valent deux Droits par la 13. Prop. Partant AGH, & GHC, vaudront moins que deux Droits ; Et ainsi il s'enfuivroit, par la remarque precedente, que ces Lignes AB, CD, ne seroient point parallèles ; Ce qui est contre la Supposition ; L'Angle AGH, ne peut donc pas estre plus petit que l'Angle GHD ; On prouvera de mesme que l'Angle GHD, ne peut pas estre plus petit que l'Angle AGH ; Donc ces deux Angles sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle Extérieur EGB, est égal à son opposé Interieur de mesme part sçavoir GHD.

Car par la 15. Prop. EGB, est égal à AGH, qui luy est opposé au Sommet ; Or par ce qui vient d'estre prouvé, AGH, est égal à GHD ; Partant EGB, est aussi égal à GHD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis enfin que les deux Angles Interieurs de mesme part, comme BGH, & GHD, sont égaux à deux Droits.

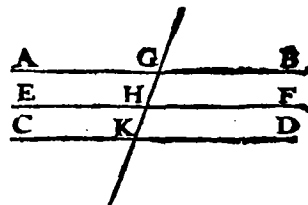
Car par ce qui vient d'estre prouvé l'Angle GHD, est égal à l'Angle AGH ; Et partant GHD, pris avec HGB, vaudra autant que AGH, pris avec HGB ; Or, par la 13. Prop. AGH, & HGB, valent deux Droits ; Donc GHD, & HGB, valent aussi deux Droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXX.

THEOREME XXI.

Les Lignes Droites paralleles a une mesme, sont paralleles entr'elles.

JE suppose que les Lignes AB, CD, sont paralleles à la Ligne EF ; Cela estant, je dis que ces Lignes sont paralleles entr'elles ; Pour le prouver.



Tirez la Ligne Droite GK, qui coupe ces trois Lignes aux Points G, H, K ; Ensuite de quoy, puis que les Lignes AB, EF, sont paralleles, par Supposition, & que GK, tombe dessus, il s'ensuit, par la 29. Prop. que les Angles AGH, & GHF, qui sont opposés alternativement, sont égaux entr'eux ; De mesme puis que les Lignes EF, CD, sont aussi supposées paralleles, & que la mesme Ligne GK, tombe dessus, il s'ensuit, par la mesme Prop. que l'Angle extérieur GHF, est égal à son Opposé Interieur HKD ; ainsi les deux Angles AGH, & HKD, qui sont égaux à un mesme, sont égaux entr'eux ; Or

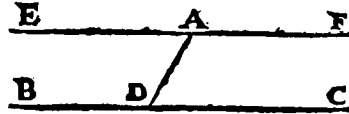
Or ces Angles sont oppoſez alternativement ; Donc par la 23. Prop. les deux Lignes AB, CD, ſont paralleles ; Ce qu'il falloit démonſtrer.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME X.

Par un Point donné mener une Ligne Droite parallele à une Ligne Droite donnée.

JE ſuppoſe que le Point donné ſoit A, & la Ligne Droite donnée, BC ; & je propoſe de mener par le Point A, une Ligne, qui ſoit parallele à BC ; Pour le faire.



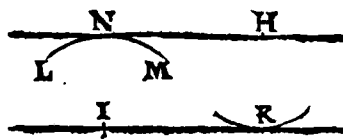
Tirez du Point A, à tel Point qu'il vous plaira de la Ligne BC, la Ligne Droite AD, qui faſſe avec BC, un Angle tel qu'il vous plaira, comme ADC ; Menez enfuite par le Point A, la Ligne Droite EAF, qui faſſe avec AD, l'Angle EAD, égal à l'Angle ADC ; Cela eſtant, je diſ que la Ligne EF, eſt parallele à BC.

Car les Angles EAD, ADC, qui ſont oppoſez alternativement, ſont égaux, par conſtruction ; Partant par la 29. Prop. les Lignes EF, BC, ſont paralleles ; Ce qu'il falloit faire, & démonſtrer.



Remarque.

Pratique de cette Proposition. Posons que la Ligne IK, soit donnée, & que le Point donné soit H ; Mettez le pied du compas au Point H, & l'ouvrez de telle sorte qu'en décrivant un Arc de Cercle, il raze la Ligne IK ; Cela fait, transportez le compas ainsi ouvert à un Point de la Ligne IK, comme I, & décrivez de la part du Point H, l'Arc LNM, puis tirez part le Point H, une Ligne Droite qui raze l'Arc LNM, & alors cette Ligne NH, sera parallèle à la Ligne IK.



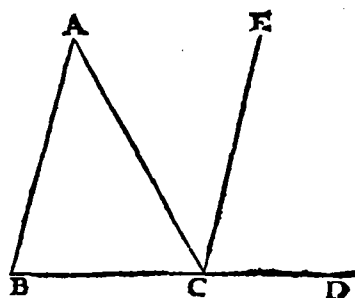
PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

En tout Triangle, un des Costez estant prolongé l'Angle Extérieur est égal aux deux Opposéz Interieurs ; & les trois Angles d'un Triangle sont égaux à deux Droits.

JE suppose que du Triangle ABC, le Costé BC, soit prolongé vers D ; Cela estant, je dis premierement que l'Angle Extérieur ACD, est égal aux deux Opposéz Interieurs A, & B, pris ensemble. Pour le prouver.

Menez par le Point C, la Ligne Droite CE, parallèle à AB, par la Prop. precedente ; Cela posé, puis que les Lignes AB, CE, sont parallèles, & que la Ligne AC, tombe



dessus ; Il s'ensuit, par la 29. Prop. que l'Angle ACE, est égal à l'Angle A, qui luy est opposé alternativement.

De mesme, puis que les Lignes AB, CE, sont parallèles, & que la Ligne BD, tombe dessus ; Il s'ensuit par la mesme 29. Prop. que l'Angle Extérieur ECD, est égal à son opposé Intérieur B ; Et partant l'Angle total ACD, est égal aux deux Angles A, & B ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu que les trois Angles du Triangle ABC, sont égaux à deux Droits.

Car il vient d'estre prouvé que les deux Angles A, & B, sont égaux à l'Angle ACD ; Or l'Angle ACD, avec l'Angle ACB, sont égaux à deux Droits, par la 13. Prop. Donc les deux Angles A, & B, avec l'Angle ACB, sont aussi égaux à deux Droits ; Ce qu'il falloit démontrer.

I. Corollaire.

Il suit premierement de cette Proposition que les trois Angles d'un Triangle pris ensemble sont égaux aux trois Angles d'un autre Triangle, pris aussi ensemble ; Car les trois Angles de l'un valent deux Droits, de mesme que les trois Angles de l'autre.

II. Corollaire.

Il suit en second lieu, que si deux Angles d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle, le troisième sera aussi égal au troisième.

III. Corollaire.

Il suit en troisième lieu, que si l'un des Angles d'un Triangle est Droit, les deux autres valent autant qu'un Droit.

IV. Corollaire.

Il suit enfin, que si deux Angles d'un Triangle sont connus, le troisième sera aussi connu ; Car ce troisième est le reste de deux Droits.

Remarque.

Par cette Proposition nous pouvons déterminer à combien d'Angles Droits sont égaux tous les Angles d'une Figure Rectiligne ; Car si de l'un des Angles de cette Figure l'on tire à tous les autres Angles autant de Lignes Droites qu'il est possible de former de Triangles, cette Figure sera divisée en plusieurs Triangles, chacun desquels valant deux Droits, l'on sçaura la valeur des Angles de cette Figure, puis qu'ils sont les mêmes que ceux de tous ces Triangles. Ainsi parce qu'une Figure de quatre costez se peut résoudre en deux Triangles ; Il s'ensuit que ses quatre Angles valent quatre Angles Droits ; Et parce qu'une Figure de cinq costez se peut résoudre en trois Triangles, ses cinq Angles valent six Angles Droits &c. Et d'autant que toute Figure de plusieurs Costez se peut résoudre en autant de Triangles qu'elle a de Costez, moins deux, nous devons conclure que tous les Angles d'une Figure Rectiligne sont égaux à deux fois autant d'Angles Droits qu'elle a de Costez, moins deux ; Ainsi les Angles d'un Decagone valent 16. Angles Droits, ceux d'un Dodecagone valent vingt Angles Droits, & ceux d'un Chiliogone, ou d'une Figure de mille Costez valent 1996. Angles Droits.



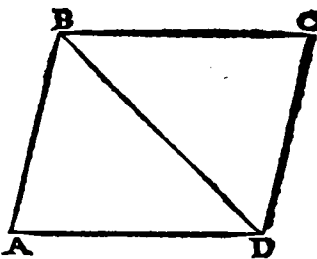
PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXIII.

Si deux Lignes Droites sont égales & paralleles, les Lignes Droites qui joignent leurs extremittez de mesme part, sont aussi égales & paralleles.

JE suppose que les Lignes AD, BC, sont égales & paralleles, & que leurs extremittez sont jointes de mesme part par les Lignes Droites AB, DC ; Cela estant, je dis que ces Lignes AB, DC, sont aussi égales & paralleles : Pour le prouver.

Du Point B, au Point D, tirez la Ligne Droite BD ; Cela posé, puis que les Lignes Droites AD, BC, sont paralleles, & que la Ligne BD, tombe dessus, il s'ensuit, par la 29. Prop. que les Angles ADB, & CBD, qui sont opposez alternativement sont égaux entr'eux ; Comparant ensuite les Triangles ABD, & CBD, le Costé AD, est égal au Costé BC, par Supposition, le Costé BD, est commun, l'Angle ABD, est égal à l'Angle CBD, comme il vient d'estre prouvé ; Partant la Baze AB, est égale à la Baze CD, & l'Angle ABD, égal à l'Angle CDB, par la 4. Prop. Or ces deux Angles ABD, & CDB, sont opposez alternativement ; Donc par la 29. Prop. les Lignes AB, DC, sont aussi paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.



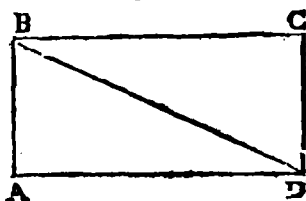
PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXIV.

En tout Parallelogramme les Costez & les Angles opposez sont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux. également.

JE suppose que AC, est un Parallelogramme, & que BD, est la Diagonale; Cela estant, je dis que le Costé AB, est égal à son Opposé CD; Le Costé AD, égal à son Opposé BC; Que l'Angle A, est égal à son Opposé C, & que l'Angle ABC, est égal à son Opposé ADC; Etenfin que le Triangle ADB, est égal au Triangle CDB, & qu'ainsi la Diagonale le coupe en deux également.

Car puis que les Lignes AB, CD, sont les Costez opposez d'un mesme Parallelogramme, il s'en suit qu'elles sont paralleles; Et par consequent la Ligne BD, tombant dessus, les Angles ABD, & BDC, qui sont opposez alternativement, sont égaux entr'eux, par la 29. Prop. Par la mesme raison, les deux Angles ADB, & CBD, qui sont opposez alternativement, sont aussi égaux entr'eux; Ainsi les deux Triangles ABD, BDC, ont deux Angles égaux à deux Angles, chacun au sien, & le Costé BD, aux extremittez duquel sont les Angles égaux, est commun. Partant par la 26. Prop. les deux autres Costez AB, AD, sont égaux aux deux autres Costez CD, CB, chacun au sien, sçavoir AB, à CD, & AD, à CB; l'Angle A, est égal à l'Angle C; Et tout le Triangle ABD, est égal à tout le Triangle CBD; Enfin puis que les deux Angles ABD, & CBD, ont esté separément prouvez égaux aux deux Angles CDB, & ADB, il est évident que l'Angle total ABC, est égal à l'Angle to-



tal ADC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition qu'en tout Parallelogramme, si un Angle est Droit, les trois autres le sont aussi. Car puis que les deux Angles Internes d'un Parallelogramme sont égaux à deux Droits, si l'un est Droit l'autre l'est aussi ; Et par conséquent aussi leurs Opposés.

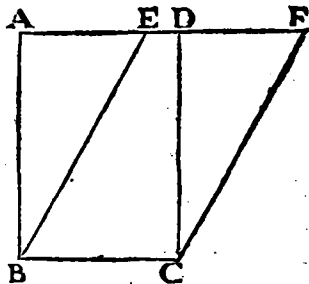
PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXV.

Les Parallelogrammes constituez sur une mesme Baze, & entre mesmes Paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Parallelogrammes AC, BF, sont sur une mesme Baze, à sçavoir BC, & entre mesmes Paralleles AF, BC; Cela estant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver.

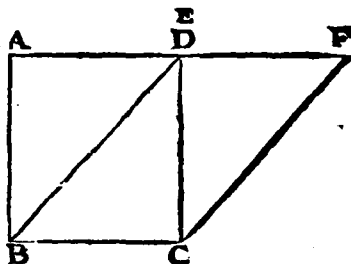
Cette Supposition peut avoir trois cas ; Car ou le Point E, tombera entre A, & D, où il tombera sur le Point D, ou au delà du Point D.



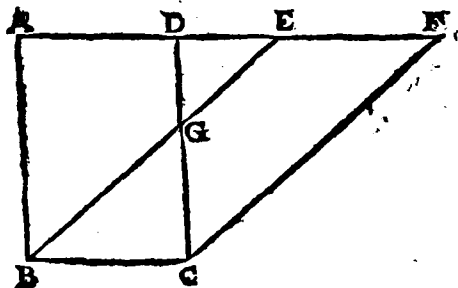
Au premier cas, le Costé AD, est égal au Costé BC, qui est son Opposé dans le Parallelogramme AC ; De mesme le Costé EF, est égal au mesme Costé BC, qui est aussi son Opposé dans le Parallelogramme BF ; Donc AD, & EF, sont égaux ; Et si l'on en oste la Partie ED, qui leur est commune, les restes AE, DF, seront égaux entr'eux ; De plus dans le mesme Parallelogramme AC, le Costé AB, est égal au Costé DC, qui est son Opposé ; Mais puis qu'ils sont paralleles, & que la Ligne AF, tombe

dessus, l'Angle Extérieur CDF, est égal à son Opposé Interieur BAE, par la 29. Prop. D'où il suit que les deux Triangles BAE, CDF, ont deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & l'Angle compris de ces costez égal à l'Angle ; Et partant par la 4. Prop. ces deux Triangles BAE, CDF, sont égaux entr'eux ; C'est pourquoy si on leur adjointe à chacun le Trapeze EBCD, il s'enfuivra que le Triangle BAE, avec ce Trapeze, sera égal au Triangle CDF, avec ce mesme Trapeze, c'est à dire le Parallelogramme AC, au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

Au second cas, où le Point E, tombe sur le Point D, on prouvera de mesme que le Costé AD, est égal au Costé EF, le Costé AB, au Costé DC, que l'Angle Extérieur CDF, est égal à son Opposé Interieur BAE, & que le Triangle BAE, est égal au Triangle CDF ; C'est pourquoy si on leur adjointe une chose commune, à sçavoir le Triangle EBC ; Il s'enfuivra que le Parallelogramme AC, sera égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.



Au troisiéme cas, on prouvera de mesme, que AD, est égal à EF ; & en leur adjointant la Partie commune DE, la toute AE, sera égale à la Toute DF ; On prouvera aussi que le Costé AB, est égal au Costé DC, que l'Angle Extérieur D, est égal à son Opposé Interieur A, & que le Triangle BAE, est égal au Triangle CDF ; Donc si on oste de ces deux Triangles, le Triangle commun DGE ; le Trapeze ABGD, restera égal au Trapeze EGCF ; A quoy si l'on



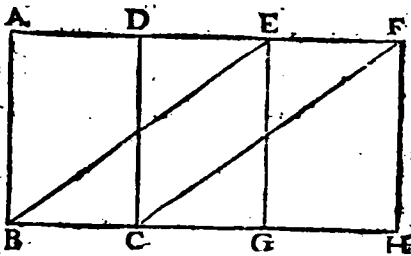
l'on adjoûte le Triangle GBC, il s'enfuivra que le Trapeze ABGD, avec ce Triangle, fera égal au Trapeze EGCF, avec ce même Triangle, c'est à dire que le Parallelogramme AC, fera égal au Parallelogramme BF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXVI.

Les Parallelogrammes constituez sur Bazes Egales, & entre mesmes Paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Parallelogrammes AC, EH, sont constituez sur Bazes Egales, sçavoir BC, GH, & entre mesmes Paralleles, AF, BH ; Cela estant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux. Pour le prouver.



Menez du Point B, au Point E, la Ligne BE, & du Point C, au Point F, la Ligne CF ; Cela posé, BC, est égal à GH, par Supposition ; EF, est aussi égal à GH, estant les Costez opposez d'un même Parallelogramme ; Donc BC, est égal à EF ; D'ailleurs BC, EF, sont supposées paralleles ; Donc par la 33. Prop. les Lignes Droites BE, CF, qui joignent leurs extremittez sont aussi égales & paralleles ; Et par consequent la Figure BF, est un Parallelogramme ; Or ce Parallelogramme est sur la même Baze, & entre mesmes Paralleles, que le Parallelogramme AC ; Donc, par la Prop. precedente les deux Parallelogrammes AC, BF, sont égaux entr'eux ; Mais ce même Parallelogramme BF, & le Parallelogramme EH, estant sur une même Baze, à sçavoir EF, & entre mesmes Paralleles, sont aussi égaux entr'eux ; Et partant les Parallelogrammes AC, EH, qui

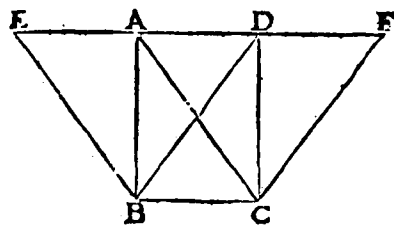
sont égaux au Parallelogramme BF, sont égaux entr'eux ;
Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXVII.

Les Triangles constituez sur une mesme Baze, & entre mesmes Paralleles, sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Triangles ABC, DBC, sont sur une mesme Baze, à sçavoir BC, & entre mesmes Paralleles EF, BC ; Cela estant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver.



Menez par le Point B, la Ligne Droite BE, parallele à AC, & par le Point C, la Ligne Droite CF, parallele à BD, par la 31. Prop. Cela posé, il s'ensuit que les Figures AB, DC, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DC, sont les Diagonales ; Et partant par la 34. Prop. les Triangles ABC, DBC, en sont les moitez ; Or les Parallelogrammes AB, DC, estant sur une mesme Baze, à sçavoir BC, & entre mesmes Paralleles EF, BC, sont égaux entr'eux, par la 35. Prop. Donc les Triangles ABC, DBC, qui en sont les moitez, sont aussi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

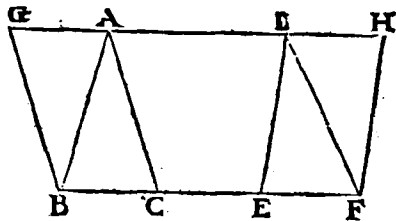


PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME XXVIII.

Les Triangles constituez sur Bases Egales , & entre mesmes Paralleles , sont égaux entr'eux.

JE suppose que les Triangles ABC, DEF, sont sur Bases Egales, savoir BC, EF, & entre mesmes Paralleles, GH, BF ; Cela estant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux. Pour le prouver.



Menez par le Point B, la Ligne Droite BG, parallele à AC, & par le Point F, la Ligne Droite FH, parallele à ED, par la 31. Prop. Cela posé, il s'ensuit que les Figures AB, DF, sont des Parallelogrammes, dont les Lignes AB, DF, sont les Diagonales ; Et partant par la 34. Prop. les Triangles ABC, DEF, en sont les moitez ; Or les Parallelogrammes AB, DF, estant sur des Bases Egales, BC, EF, & entre mesmes Paralleles BF, GH, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. Donc les Triangles ABC, DEF, qui sont leurs moitez, sont aussi égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

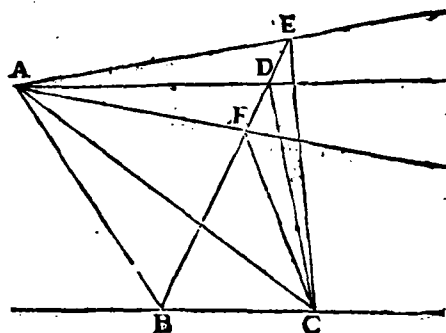


PROPOSITION XXXIX.

THEOREME XXIX.

Les Triangles Egaux constituez sur une mesme Baze & de mesme part, sont entre mesmes Paralleles.

JE suppose que les Triangles ABC, DBC, sont égaux, qu'ils sont constituez sur une mesme Baze, à sçavoir BC, & qu'ils sont de mesme part, Cela estant, je dis que ces Triangles sont entre mesmes Paralleles, c'est à dire que si par le Point A,



& le Point D, on mene la Ligne Droite AD, cette Ligne sera parallele à BC ; En voicy la preuve.

Car si elle n'estoit pas Parallele, on pourroit par le Point A, mener une autre Ligne parallele à BC, par la 31. Prop. & cette Ligne passeroit ou au dessus ou au dessous de AD. Pensons donc premierement qu'elle passe au dessus, s'il est possible, comme fait icy AE ; Puis prolongez la Ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AE, au Point E, & tirez la Ligne CE ; Cela posé les deux Triangles ABC, EBC, estant sur une mesme Baze & entre mesmes Paralleles seroient égaux entr'eux, par la 37. Prop. Mais par la Supposition le Triangle DBC, est égal au mesme Triangle ABC ; Donc le Triangle EBC, seroit égal au Triangle DBC, qui n'est que sa partie, ce qui est impossible ; Il est donc impossible qu'une Ligne menée par le Point A, parallele à la Ligne BC, passe au dessus de la Ligne AD.

Penſons maintenant que cette Parallele paſſe au deſſous de AD, comme fait icy AF, & menez la Ligne Droite CF ; Cela poſé le Triangle FBC, ſeroit égal au Triangle ABC, par la 37. Prop. Mais par la Suppoſition le Triangle DBC, eſt égal au meſme Triangle ABC ; Donc le Triangle FBC, ſeroit égal au Triangle DBC, c'eſt à dire, la Partie au Tout, ce qui eſt impoſſible. Cette Parallele ne peut donc pas paſſer au deſſous de AD, ny au deſſus, comme il a eſté prouvé ; Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD ; Et partant AD, eſt parallele à BC ; Ce qu'il falloit démonſtrer.

PROPOSITION XL.

THEOREME XXX.

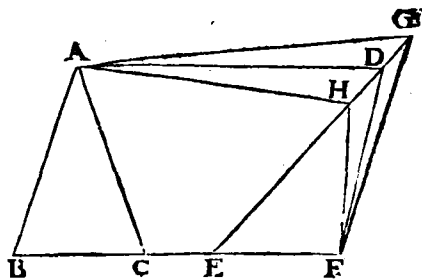
Les Triangles Egaux, conſtituez ſur Bazes Egales, & de meſme part, ſont entre meſmes paralleles.

JE ſuppoſe que les Triangles ABC, DEF, ſont égaux, qu'ils ſont conſtituez ſur Bazes Egales, à ſçavoir BC, EF, & qu'ils ſont de meſme part ; Cela eſtant, je diſ qu'ils ſont entre meſmes Paralleles ; C'eſt à dire que ſi par le Point A, & par le Point D, on mene la Ligne Droite AD, cette Ligne ſera Parallele à BF ; Envoicy la preuve.

*Voyez la
Figure cy-
deſſous.*

Car ſi elle n'eſtoit parallele, on pourroit par le Point A, mener une autre Ligne parallele à BF, par la 31. Prop. & cette Ligne paſſeroit ou au deſſus ou au deſſous de AD ; Penſons donc premierement qu'elle paſſe au deſſus, ſ'il eſt poſſible, comme fait icy AG, puis prolongez la Ligne ED, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AG, au Point G & menez la Ligne FG ; Cela poſé, les deux Triangles ABC, GEF, eſtant ſur Bazes égales, BC, EF, & entre meſmes Paralleles, ſeroient égaux entr'eux par la 38.

Prop. Mais par la Supposition le Triangle DEF, est égal au même Triangle ABC ; Donc le Triangle GEF, seroit égal au Triangle DEF, qui n'est que la Partie, ce qui est impossible ; Il est donc impossible qu'une Ligne menée par le Point A, parallèle à BF, passe au dessus de AD.



Pensons maintenant que cette Parallele passe au dessous de AD, comme fait icy AH, & menez la Ligne Droite FH ; Cela posé, le Triangle HEF, seroit égal au Triangle ABC, par la 38. Prop. Mais par la Supposition le Triangle DEF, est égal au même Triangle ABC ; Donc le Triangle HEF, seroit égal au Triangle DEF, c'est à dire la Partie au Tout, ce qui est impossible ; Cette Parallele ne peut donc pas passer au dessous de AD ; ny au dessus, comme il a esté prouvé ; Donc il ne peut pas y en avoir d'autre que AD ; Et partant AD, est parallèle à BF, Ce qu'il falloit démontrer.

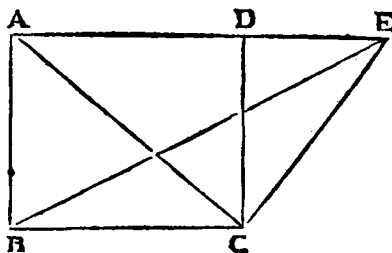


PROPOSITION XLI.

THEOREME XXXI.

Si un Parallelogramme & un Triangle sont constituez sur une mesme Baze, & entre mesmes Paralleles, le Parallelogramme sera double du Triangle.

JE suppose que le Parallelogramme AC, & le Triangle EBC, soient constituez sur une mesme Baze, à sçavoir BC, & entre mesmes Paralleles AE, BC; Cela estant, je dis que le Parallelogramme est double du Triangle. Pour le prouver.



Menez la Diagonale AC; Cela posé, puis que les Triangles ABC, EBC, sont sur la mesme Baze BC, & entre mesmes Paralleles AE, BC, ils sont égaux, par la 37. Prop. Or le Triangle ABC, est moitié du Parallelogramme AC, d'autant que la Diagonale AC, le coupe en deux également, par la 34. Prop. Donc le Triangle EBC, est aussi moitié du Parallelogramme AC; Et par conséquent le Parallelogramme AC, est double du Triangle EBC; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

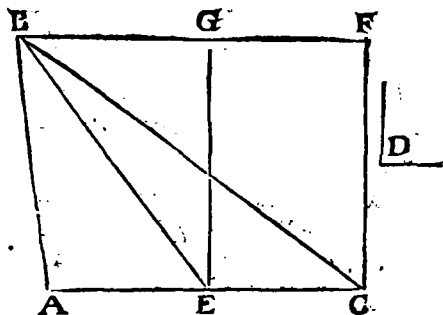
Par là il est aussi évident que si un Parallelogramme & un Triangle estoient constituez sur Bases Egales, & entre mesmes Paralleles, le Parallelogramme seroit double du Triangle.

PROPOSITION XLII.

PROBLEME XI.

*D'écrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné,
& qui ait un Angle égal à un Angle Rectiligne donné.*

JE suppose que l'on donne le Triangle ABC, & l'Angle Rectiligne D; Cela estant, je propose de décrire un Parallelogramme égal au Triangle ABC, & qui ait un Angle égal à l'Angle D; Pour le faire.



Coupez l'un des Costez de ce Triangle, par exemple AC, en deux également au Point E, & de ce Point tirez par la 23. Prop. la Ligne EG, qui fasse avec EC, l'Angle CEG, égal à l'Angle donné D; tirez aussi par la 31. Prop. du Point C, la Ligne CF, parallele à EG; Enfin menez par le Point B, la Ligne BF, parallele à AC; Cela posé, je dis que la Figure EF, est un Parallelogramme, que ce Parallelogramme est égal au Triangle ABC, & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D; Pour le prouver.

Puis que CF, est parallele à EG, & que GF, est parallele à EC, Il est évident que la Figure EF, est un Parallelogramme, qui a l'Angle CEG, égal à l'Angle donné D, par construction; si bien qu'il reste seulement à prouver qu'il est égal au Triangle ABC. Pour le prouver.

Du Point B, au Point E, menez la Ligne Droite BE; Cela posé, puis que les Triangles BAE, BEC, sont sur des Bases Egales, AE, EC, & entre mesmes Paralleles, BF, AC, ils sont égaux entr'eux, par la 38. Prop. par conséquent le Triangle ABC, qui est composé de ces deux Triangles

Triangles, est double du Triangle BEC ; Mais le Parallelogramme EF, est aussi double de ce même Triangle BEC, par la Prop. précédente, puis qu'il est sur la même Baze, & entre mêmes Paralleles ; Donc le Triangle ABC, & le Parallelogramme EF, qui sont doubles d'une même chose, sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit faire, & démontrer.

Remarque.

La pratique de cette Proposition consiste seulement à faire un Parallelogramme sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles ; C'est pourquoy nous pouvons établir comme une verité Geometrique, que tout Parallelogramme constitué sur la moitié de la Baze d'un Triangle, & entre mêmes Paralleles, est égal à ce Triangle.

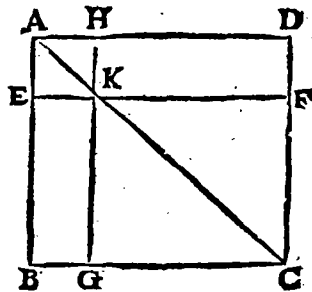
PROPOSITION XLIII.

THEOREME XXXII.

En Tout Parallelogramme, les Supplemens des Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre sont égaux entr'eux.

JE suppose que la Figure AC, est un Parallelogramme, dont le Diametre est AC, allentour duquel sont les Parallelogrammes AK, KC ; Cela estant, je dis que les Supplemens KB, KD, sont égaux entr'eux ; Pour le prouver.

Puis que par la 34. Prop. le Diametre AC, coupe le Parallelogramme AC, en deux également, le Triangle ABC, est égal au Triangle ACD ; De même, les Parallelogrammes AK,



KC, étant coupez en deux également par leurs Diametres AK, KC, le Triangle AEK, est égal au Triangle AKH, & le Triangle KGC, égal au Triangle KCF ; Si donc des Triangles ABC, ACD, qui sont égaux, nous osons choses égales, sçavoir du Triangle ABC, les deux Triangles AEK, KGC ; & du Triangle ACD, les deux Triangles AKH, KCF, les restes, qui sont les Supplemens KB, KD, seront égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

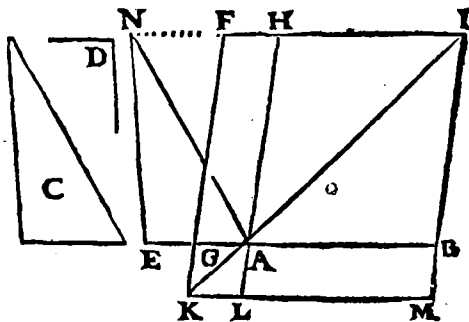
PROPOSITION XLIV.

PROBLEME XII.

Sur une Ligne Droite donnée décrire un Parallelogramme égal à un Triangle donné, & qui ait un Angle égal à un Angle Rectiligne donné.

JE suppose qu'on donne la Ligne Droite AB, le Triangle C, & l'Angle Rectiligne D ; Cela étant, je propose de décrire sur AB, un Parallelogramme égal au Triangle C, & qui ait un Angle égal à l'Angle D ; Pour le faire.

Prolongez AB, vers E, & après avoir fait AE, égal à un des costez du Triangle C, achevez par la 22. Prop. de décrire le Triangle AEN, égal au Triangle C ; puis par la 42. Prop. décrivez le Parallelogramme AF, égal au Triangle AEN, & qui ait l'Angle HAG, égal à l'Angle D ; Prolongez après cela FG, & HA, indefiniment vers K, & vers L ; Prolongez de mesme FH, indefiniment vers I ; & ayant mené par le Point B, la Ligne IBM, pa-



rallele à FG, par la 31. Prop. tirez du Point I, où les Lignes IBM, & FHL, se rencontrent, la Ligne Droite IAK, si longue, qu'elle rencontre la Ligne FGK, au Point K; Enfin menez par le Point K, la Ligne Droite KLM, parallele à AB, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure AM qui est décrite sur la Ligne Droite donnée AB, est un Parallelogramme; que ce Parallelogramme est égal au Triangle donné C; & qu'il a un Angle égal à l'Angle donné D; Pour le prouver.

Puis que les Lignes AB, LM, & les Lignes AL, BM, sont paralleles, par construction, il s'ensuit que AM, est un Parallelogramme; Et puis que FI, KM, sont paralleles à AB, elles sont paralleles entr'elles, par la 30. Prop. De plus, les Lignes IBM, FGK, ayant aussi esté faites Paralleles, il est évident que la Figure FM, est un Parallelogramme; Dans lequel les Parallelogrammes AM, AF, estant les Suppléments des Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre, il s'ensuit qu'ils sont égaux entr'eux, par la 43. Prop. Or, par la construction, AF est égal au Triangle AEN; Donc AM, est aussi égal au Triangle AEN; Mais ce Triangle a esté fait égal au Triangle C; D'où il suit que le Parallelogramme AM, est aussi égal au Triangle C; D'ailleurs, par la 15. Prop. l'Angle LAB, est égal à l'Angle HAG, qui a esté fait égal à l'Angle D; Et partant l'Angle LAB, est aussi égal à l'Angle D; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



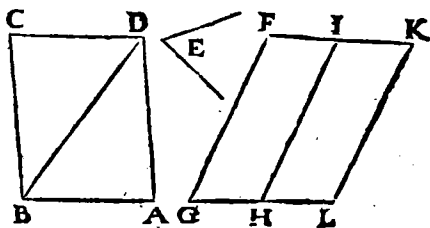
PROPOSITION XLV.

PROBLEME XIII.

Décrire un Parallelogramme égal à une Figure Rectiligne donnée, & qui ait un Angle égal à un Angle Rectiligne donné.

JE suppose qu'on donne la Figure Rectiligne ABCD, & l'Angle Rectiligne E ; Cela estant, je propose de décrire un Parallelogramme égal à la Figure ABCD, qui ait un Angle égal à l'Angle E ; Pour le faire.

Menez la Ligne Droite BD, afin de refondre la Figure ABCD, en deux Triangles ; Puis, par la 42. Prop. décrivez le Parallelogramme IG, égal à l'un des Triangles, par exemple à ABD, & qui ait



l'Angle FGH, égal à l'Angle E ; Ensuite, par la 44. Prop. décrivez sur la Ligne HI, le Parallelogramme IL, égal au second Triangle BCD, & qui ait aussi l'Angle IHL, égal à l'Angle E ; Cela posé, je dis que la Figure FL, composée de ces deux Parallelogrammes, est un Parallelogramme égal à la Figure ABCD ; & qui a un Angle égal à l'Angle donné E ; Pour le prouver.

Les Parallelogrammes qui sont les Parties de la Figure FL, estant égaux aux Triangles qui sont les Parties de la Figure ABCD, Il est évident que la Figure FL, est égale à la Figure ABCD ; Deplus, la Figure FL, a l'Angle FGL, égal à l'Angle donné E ; Il ne reste donc plus qu'à prouver que les deux Parallelogrammes IG, IL, composent ensemble un seul Parallelogramme. Pour le prouver.

Les deux Costez FG, KL, sont égaux & paralleles,

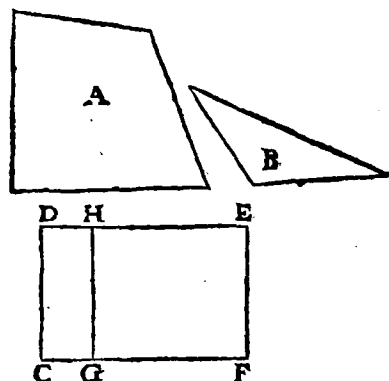
étant égaux & paralleles à IH ; Supposé donc que FK , & GL soient des Lignes Droites, elles seront aussi égales & paralleles entr'elles, par la 33. Prop. puis qu'elles joignent des Lignes Droites égales & paralleles. Or je prouve que les Lignes FK , & GL , sont des Lignes Droites. Premièrement, l'Angle G , & l'Angle IHL , sont égaux entr'eux, par const. Si donc on leur adjoute l'Angle commun GHI , les deux Angles G , & GHI , seront égaux aux deux Angles qui ont le Point H pour sommet ; Mais les deux Angles G , & GHI , sont égaux à deux Droits, par la 29. Prop. Donc les deux Angles qui ont le Point H pour Sommet sont égaux à deux Droits ; Et partant les Lignes GH , & LH , qui concourent à un même Point, font une Ligne Droite. De même, l'Angle K , & l'Angle FIH , sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont oppo-
sez aux Angles G , & IHL , qui sont égaux entr'eux ; Si donc on leur adjoute l'Angle commun HIK , les deux Angles K , & HIK , seront égaux aux deux Angles qui ont le Point I pour Sommet ; Mais les deux Angles K , & HIK , sont égaux à deux Droits, par la 29. Prop. Par conséquent les deux Angles qui ont le Point I , pour Sommet, sont égaux à deux Droits ; & partant les Lignes FI , & KI , qui concourent à un même Point, font une Ligne Droite. D'où il suit que FL , est un Parallelogramme ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. Remarque.

Si la Figure donnée eust eu plus de quatre Costez, il auroit fallu la diviser en tous les Triangles dont elle auroit pû estre composée ; Puis, après avoir fait (comme il vient d'estre dit) le Parallelogramme $FGLK$, égal à deux de ces Triangles, il auroit encore fallu décrire sur LK , un Parallelogramme égal à un autre Triangle, & ayant un Angle au Point K égal à l'Angle donné E ; & ainsi continuer autant de fois de suite qu'il y auroit eu de Triangles.

II. Remarque.

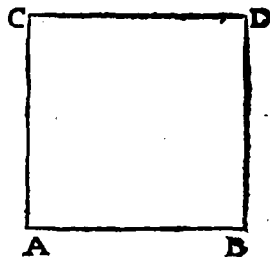
Ensuite de la Proposition précédente, si deux Figures Rectilignes Inégales sont données, l'on pourra trouver l'excez de la plus grande par dessus la plus petite ; Par exemple, si les Figures A & B, sont données, entre lesquelles A, est plus grande que B, il n'y aura qu'à décrire le Parallelogramme CE, égal à la Figure A ; puis décrire sur le costé CD, le Parallelogramme CH, égal à la Figure B ; Car alors il est évident que le Parallelogramme GE, fera l'excez de la Figure A, par dessus la Figure B.

*PROPOSITION XLVI.**PROBLEME XIV.*

Sur une Ligne Droite donnée décrire un Quarré.

JE suppose que la Ligne Droite donnée soit AB, & je propose de décrire sur cette Ligne un Quarré. Pour le faire.

Elevez au Point A, la Ligne Droite AC, Perpendiculaire à AB, par la 11. Prop. & faites AC, égale à AB ; Puis menez par le Point C, la Ligne CD, Parallele à AB, & par le Point B, la Ligne BD, parallele à AC, par la 31. Prop. Cela posé, je dis que la Figure ACDB, qui est décrite sur la Ligne Droite donnée AB, est un Quarré. Pour le prouver.



Puis que ABCD, est une Figure de quatre costez, dont les Opposez ont esté faits paralleles, il s'ensuit que c'est un Parallelogramme ; Et par consequent ses Costez opposez sont égaux, par la 34. Prop. Ainsi CD, est égal à AB ; Mais AC, est aussi égal à AB, par construction, Donc CD, est aussi égal à AC ; De même BD, est égal à AC ; & partant BD, est aussi égal aux deux autres costez AB, CD ; D'où il suit que le Parallelogramme AD, a ses quatre costez égaux. D'ailleurs, puis que les Lignes AB, CD, sont paralleles, & que AC, tombe dessus ; Il s'ensuit par la 29. Prop. que les deux Angles Interieurs A, & C, sont égaux à deux Droits ; Or l'Angle A est droit, par construction ; Donc l'Angle C, est aussi Droit ; Et parce qu'en tout Parallelogramme les Angles opposez sont égaux, les Angles B, & D, qui sont opposez à des Angles Droits, sont aussi Droits ; Et par consequent le Parallelogramme AD, est un Quarré ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

I. Remarque.

Il s'ensuit de là, que tout Parallelogramme, qui a deux costez égaux allentour d'un Angle Droit, est un Quarré.

II Remarque.

Il suit aussi de là, qu'en tout Parallelogramme un Angle estant droit, les trois autres le sont aussi.

III. Remarque.

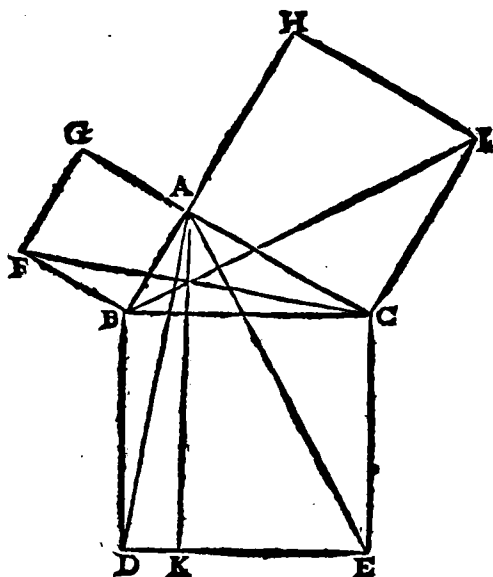
Comme les Grandeurs qui conviennent sont égales entr'elles, il suit aussi assez évidemment, que si deux Lignes sont égales, leurs Quarrez seront aussi égaux ; & que si deux Quarrez sont égaux, les Lignes sur lesquelles ils sont décrits, seront aussi égales.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME XXXIII.

Aux Triangles Rectangles, le Quarré du costé qui soutient l'Angle Droit, est égal aux Quarréz des deux autres costez.

JE suppose que le Triangle ABC, est Rectangle, que l'Angle BAC, est droit, & que sur ses trois costez on ait décrit les trois Quarréz BE, FA, AI; Cela estant, je dis que le Quarré BE, décrit sur le costé BC, qui soutient l'Angle Droit BAC, est égal aux deux autres Quarréz FA, AI, décrits sur les deux autres Costez AB, AC; Pour le prouver.



Menez par le Point A, la Ligne Droite.

AK, parallele à BD, ou à CE, & menez les Lignes Droites AD, AE, CF, BI; Cela posé, puis que l'Angle BAC, est droit, par Supposition, & que l'Angle BAG, qui est un des Angles du Quarré FA, est aussi droit, Il s'ensuit par la 14. Prop. que les Lignes GA, AC, concourent directement; De même, puis que l'Angle CAB, est droit, & que l'Angle CAH, du Quarré AI, est aussi droit, Il s'ensuit aussi que les Lignes BA, AH, concourent directement;

Maintenant;

Maintenant, puis que les Lignes BF, GC, qui sont les Costez oppoſez du Parallelogramme ou du Quarré FA, ſont Paralleles, Il ſ'enſuit par la 41. Prop. que le Parallelogramme FA, eſt double du Triangle FBC, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une meſme Baze FB, & entre meſmes Paralleles FB, GC ; De meſme, puis que les Lignes AK, BD, ſont paralleles, par conſtruction, il ſ'enſuit que le Parallelogramme BK, eſt double du Triangle ABD, eſtant tous deux conſtituez ſur la meſme Baze BD, & entre meſmes Paralleles BD, AK. Comparant maintenant le Triangle CBF, avec le Triangle ABD, le Coſté CB du premier, eſt égal au Coſté BD du ſecond, puis que ce ſont les coſtez d'un meſme Quarré, FA ; Par la meſme raiſon, le Coſté BF du premier, eſt égal au Coſté AB du ſecond ; Si bien que ces deux Triangles ont deux Coſtez égaux à deux Coſtez, chacun au ſien ; De plus l'Angle CBF, compoſé d'un Angle Droit, & de l'Angle ABC, eſt égal à l'Angle ABD, qui eſt auſſi compoſé d'un Angle droit, & du meſme Angle ABC ; Donc par la 4. Prop. le Triangle CBF, eſt égal au Triangle ABD ; Et ainſi le Parallelogramme BK, & le Quarré FA, qui ſont doubles de choſes égales, ſont égaux entr'eux, par le 6. Ax. De meſme, puis que les Lignes IC, HB, qui ſont les Coſtez oppoſez du Parallelogramme ou du Quarré AI, ſont paralleles, Il ſ'enſuit par la 41. Prop. que le Parallelogramme AI, eſt double du Triangle ICB ; De meſme, puis que les Lignes AK, CE, ſont paralleles, par conſtruction, Il ſ'enſuit que le Parallelogramme CK, eſt double du Triangle ACE, puis qu'ils ſont conſtituez ſur une meſme Baze, CE, & entre meſmes Paralleles, CE, AK. Comparant maintenant le Triangle BCI, avec le Triangle ACE, le Coſté CI du premier, eſt égal au Coſté AC du ſecond, puis que ce ſont les coſtez d'un meſme Quarré, AI ; Par la meſme raiſon, le Coſté CB du premier, eſt égal au Coſté CE du ſecond ; Deplus, l'Angle ICB, compris des deux coſtez du premier Triangle, eſt égal à l'Angle ACE, compris des deux coſtez du ſecond, chacun de ſes

82 ELEMENS D'EUCLIDE.

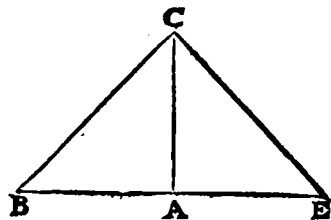
Angles estant composé d'un Angle droit , & de l'Angle ACB ; Donc par la 4. Prop. le Triangle ICB, est égal au Triangle ACE ; Et par conséquent, le Parallelogramme CK, & le Quarré AI, qui sont doubles de choses égales , sont égaux entr'eux ; Mais il a déjà esté prouvé auparavant, que le Parallelogramme BK, est égal au Quarré FA ; Donc le Quarré BE, qui convient avec les deux Parallelogrammes BK, CK, ou plutôt qui est la même chose, est égal aux deux Quarrez FA, AI, pris ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME XXXIV.

Si le Quarré de l'un des costez d'un Triangle est égal aux Quarrez des deux autres costez, l'Angle compris de ces deux autres costez est droit.

JE suppose qu'au Triangle ABC, le Quarré du Costé BC, soit égal aux Quarrez des deux autres Costez AB, AC ; Cela estant, je dis que l'Angle CAB, compris des deux Costez AB, AC, est Droit. Pour le prouver.

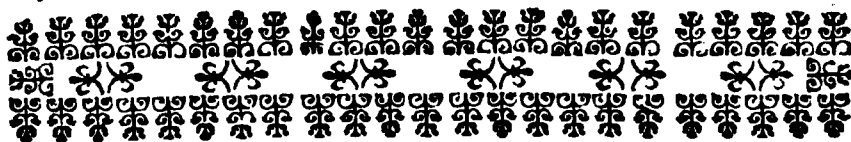


Elevez au Point A, la Ligne AE, Perpendiculaire à AC, & faites cette Ligne AE, égale à AB ; Puis tirez la Ligne Droite CE ; Cela posé.

Puis que le Triangle ACE, est Rectangle, il s'ensuit par la Proposition precedente, que le Quarré du Costé CE, qui soutient l'Angle Droit CAE, est égal aux deux Quarrez de CA, & de AE, ou de AB son égal ; Mais par la Supposition, le Quarré du Costé BC, est aussi égal aux deux Quarrez de CA, & de AB ; Donc le Quarré de BC, & le Quarré de CE, sont égaux entr'eux, par le premier

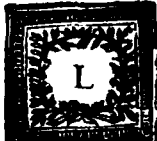
Ax. Et partant les Lignes BC, CE, qui sont leurs costez sont égales entr'elles, par la troisième Remarque de la 46. Prop. Comparant maintenant le Triangle ABC, avec le Triangle ACE, le Costé AB, est égal au Costé AE ; Le Costé AC, est commun aux deux Triangles ; Deplus la Baze BC, vient d'estre prouvée égale à la Baze CE ; Donc par la 8. Prop. l'Angle CAB, est égal à l'Angle CAE ; Mais l'Angle CAE, est droit par construction, donc l'Angle CAB, est aussi droit ; Ce qu'il falloit démontrer.





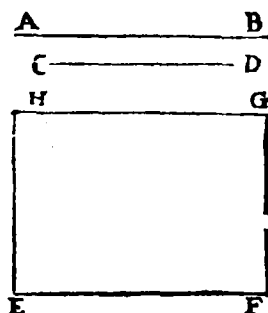
LIVRE SECOND.

DEFINITIONS.

- I.  E Rectangle de deux Lignes Droites, est un Parallelogramme, dont les deux Costez allentour de l'un de ses Angles, sont égaux à ces deux Lignes droites.

Ainsi le Rectangle des deux Lignes Droites AB, CD, est le Rectangle EG, qui à l'un de ses costez, sçavoir EF, égal à AB, & l'autre sçavoir EH, égal à CD.

Et ainsi, tout Parallelogramme Rectangle est compris de deux Lignes Droites, qui font l'Angle Droit.

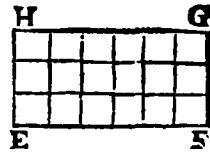


Remarque.

Pour mesurer la quantité de la Surface d'un Rectangle, il faut se servir d'une petite mesure connue, telle qu'on voudra, par exemple, d'une Toise quarrée, d'un Pié quarré, d'un Pouce quarré, & voir combien de ces Toises, de ces Piez, ou de ces Pouces quarez, contient ce Rectangle.

Ainsi, pour trouver la mesure, ou la quantité, de la Surface du Rectangle EG, il faut diviser chacun de ses costez en Toises, en Piez, ou en Pouces, & multiplier l'un par l'autre, & le produit vous donnera ce que vous cherchez.

I. Par exemple, posé que le Costé EF, contienne six Toises, & le Costé EH, en contienne trois, multipliant l'un par l'autre cela fait 18. Toises quarrées, qui est la mesure de la Surface de ce Rectangle.

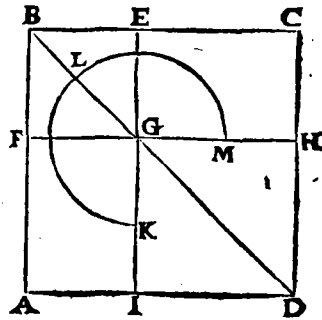


Et si le Rectangle dont on veut sçavoir la mesure est un Quarré ; Il faut sçavoir combien un de ses Costez contient de Toises, de Piez, ou de Pouces, & le multiplier par luy-mesme, & le produit vous en donnera la mesure.

II. Un Gnomon, est une partie d'un Parallelogramme, composée d'un des Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre, & des deux Supplemens.

Ainsi dans le Quarré ABCD, le Quarré FE, avec les deux Supplemens AG, GC, est un Gnomon.

Et pour le désigner, on décrit une portion de Cercle, semblable à KLM, que l'on fait passer par ce Quarré, & par ces deux Supplemens, & que l'on marque avec trois lettres, comme est icy marqué le Gnomon KLM.

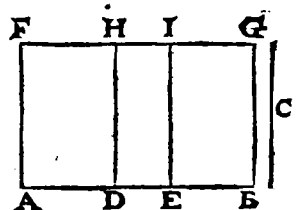


PROPOSITION I.

THEOREME I.

Si de deux Lignes Droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, les Rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au Rectangle des deux toutes.

JE suppose que des deux Lignes AB, & C, la premiere AB, soit coupée, comme l'on voudra, par exemple, aux points D, & E; Cela estant, je dis, que les Rectangles compris de la non coupée C, & de chacune des parties de la coupée, sçavoir AD, DE, EB, pris ensemble, sont égaux au Rectangle des deux Toutes AB, & C. Pour le prouver.



Elevez au Point A, la Ligne Droite AF, perpendiculaire à AB, par la 11. du 1. & égale à C, par la 3. du 1. Puis, par les Points F, & B, menez les Lignes FG, BG, parallèles à AB, & à AF, par la 31. du 1. Elevez aux Points D, & E, les Lignes Droites DH, EI, perpendiculaires à AB, qui seront aussi parallèles à AF; Cela posé.

Puisque AF, est égale à C, Il est évident que le Parallelogramme AG, est le Rectangle des deux Toutes AB, & C; Il est d'ailleurs évident que le Rectangle AH, est compris de la non-coupée C, ou de son égale AF, & de AD, qui est la premiere partie de la coupée AB. Deplus, les Lignes DH, & EI, estant égales à AF, par la 34. du 1. ou à C son égale, les Parallelogrammes DI, EG, sont les Rectangles compris de la non-coupée C, & de chacune des autres parties de la coupée AB; Or tous ces Rectangles AH, DI, EG, conviennent avec le Rectangle AG; Donc ils luy sont égaux par le 8. Axiome. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

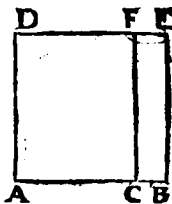
Pour verifler cecy en nombres ; Prenez par exemple les deux nombres 10. & 6. Divifez 10. en trois parties, telles qu'il vous plaira, comme 5. 3. & 2. multipliez 10. par 6. Il viendra 60. qui fera le Rectangle des deux nombres entiers ; Après cela multipliez auffi 5, 3, & 2, par 6. & il viendra 30, 18, & 12. qui feront les Rectangles du nombre entier 6. & de chacune des parties du nombre 10. Enfin adjoûtez les trois Rectangles 30, 18, & 12. & la fomme fera 60. qui est égale au Rectangle compris des deux nombres entiers 10. & 6.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si une Ligne Droite est coupée comme l'on voudra, les Rectangles compris de la Toute & de chacune de fes Parties, font égaux au Quarré de la Toute.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée comme l'on voudra, par exemple, au Point C ; Et je dis que les Rectangles compris de la Toute AB, & de chacune de fes Parties AC, CB, pris ensemble, font égaux au Quarré de AB ; Pour le prouver.



Décrivez sur AB, le Quarré AE, par la 46. du

1. & élevez au Point C, la Ligne CF, perpendiculaire à AB, qui sera auffi parallèle à AD, ou à BE ; Cela posé.

Puisque AD, est égale à AB, le Parallelogramme AF, est le Rectangle compris de la Toute AB, & de la partie AC ; De même CF, estant égale à AD, ou à son égale AB, le Parallelogramme CE, est le Rectangle compris de la Toute AB, & de son autre partie CB ; Or les Rectan-

gles AF, CE, conviennent avec le Quarré AE, qui a esté fait sur la Toute AB ; Donc ces Rectangles sont égaux à ce Quarré ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

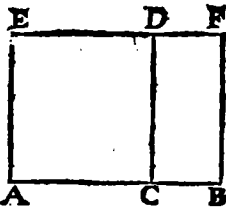
Pour verifïer cecy dans un nombre ; Prenez par exemple, 10. & le divifez en deux parties, comme 7. & 3. Cela eftant, le Rectangle du nombre entier 10. & de fa partie 7. eft 70. Le Rectangle du meſme nombre 10. & de ſon autre partie 3. eft 30. adjoutez ces deux nombres, cela fait 100. Lequel nombre eft égal au Quarré de 10.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si une Ligne Droite eft coupée comme l'on voudra, le Rectangle de la Toute, & de l'une de ſes Parties, eft égal au Rectangle des deux Parties, & au Quarré de la Partie premiere ment priſe.

JE ſuppoſe que la Ligne AB, ſoit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point C ; Cela eftant, je dis que le Rectangle de la Toute AB, & de l'une de ſes Parties, par exemple AC, eft égal au Rectangle des deux Parties AC, CB, & au Quarré de la Partie AC, qui avoit eſté premiere ment priſe. Pour le prouver.



Elevez au Point A, la Ligne AE, perpendiculaire à AB, & égale à AC ; Menez par le Point E, la Ligne EF, parallele à AB, & par le Point B, la Ligne BF, parallele à AE ; & au Point C, élevez la Ligne CD, Perpendiculaire à AB, qui fera auffi parallele à AE, ou à BF ; Cela poſé.

Puiſque AE, eft égale à AC, il ſ'enſuit que AD, eft le Quarré

LIVRE SECOND.

89

Quarré de AC ; Par la 1. Remarque de la 46. du 1. Et puis que CD, est égale à AE, ou à AC, son égale, Il s'ensuit que CF, est le Rectangle des deux Parties AC, CB ; Or le Quarré AD, & le Rectangle CF, conviennent avec AF, qui est le Rectangle de la Toute AB, & de la Partie AC ; Donc le Rectangle AF, est égal au Rectangle CF, & au Quarré AD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

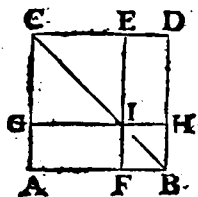
Pour verifien cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 10. divisez-le en deux Parties comme 7. & 3. Cela estant, le Rectangle des deux Parties 7. & 3. est 21. le Quarré de la premiere Partie 7. est 49. adjoutez ces deux nombres, cela fait 70. Lequel nombre est égal au Rectangle du nombre entier 10. & de sa premiere Partie 7.

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Si une Ligne Droite est coupée comme l'on voudra, le Quarré de la Toute est égal aux deux Quarrez des Parties, & a deux Rectangles faits des deux Parties.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée comme l'on voudra, par exemple au Point F ; Cela estant, je dis que le Quarré de la Toute AB, est égal aux deux Quarrez des Parties AF, FB, & à deux Rectangles faits de ces deux Parties. Pour le prouver.



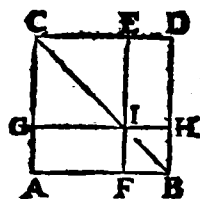
Décrivez sur la Ligne AB, le Quarré AD ; menez la Diagonale CB ; Elevez au Point F, la Ligne FE, Perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallele à AC, & à BD ; & par le Point I, où la Ligne FE, coupe la Diagonale CB.

M.

menez la Ligne Droite GIH, parallele à AB ; Cela posé

Puisque les Lignes AC, AB, qui sont les costez du Quarré AD, sont égales, Il s'ensuit par la 5. Prop. du 1. que le Triangle ABC, a les Angles ABC, & ACB, sur la Base BC, égaux entr'eux ; D'ailleurs, les Lignes GH, & AB, estant Paralleles, & la Ligne CIB, tombant dessus, l'Angle Extérieur GIC, est égal à son opposé Intérieur ABC, par la 29. du 1. Or l'Angle ACB, est égal à l'Angle ABC ; Donc l'Angle ACB, ou GCI, est égal à l'Angle GIC ; Et par conséquent dans le Triangle CGI, les Costez CG, GI, qui soutiennent ces deux Angles, sont égaux entr'eux, par la 6. du 1.

D'ailleurs, puisque dans le Parallelogramme GE, l'Angle GCE, est Droit, estant un des Angles du Quarré AD, Il s'ensuit par la 2. Remarque de la 46. Prop. du 1. que ce Parallelogramme GE, à ses quatre Angles Droits ; Et puisque les deux



Costez CG, GI, qui sont allentour d'un de ces Angles Droits, sont égaux entr'eux ; Il s'ensuit par la 1. Remarque de la mesme Prop. que ce Parallelogramme CE, est le Quarré de GI, ou de son égale AF. De mesme, puisque les Lignes AC, FE, sont paralleles, & que la Ligne BIC, tombe dessus, l'Angle Extérieur FIB, est égal à son opposé Intérieur ACB ; Mais l'Angle ABC, est égal à ACB, donc l'Angle ABC, ou FBI, est égal à l'Angle FIB ; Et par conséquent dans le Triangle BFI, les deux Costez FI, FB, qui les soutiennent sont aussi égaux entr'eux ; D'où il suit que le Parallelogramme FH, qui a deux costez égaux allentour de l'Angle Droit IFB, est le Quarré de la Partie FB. Deplus, AI, ID, sont deux Parallelogrammes Rectangles, puisque leurs Costez opposez sont paralleles, & que les Angles A, & D, estant Droits, tous les autres le sont aussi ; Or AI, est le Rectangle de AF, FI, ou bien de AF, FB ; & ID, est le Rectangle de DH, HI, ou de leurs égales AF, FB ; Mais ces deux Rectangles AI, ID, avec les deux Quarrez GE, FH, conviennent avec le Quarré

AD ; Donc ce Quarré leur est égal. Ce qu'il falloit démontrer.

I. Remarque.

Il suit de cette Proposition, Que quand deux Lignes Droites paralleles aux costez d'un Quarré coupent la Diagonale de ce Quarré en un mesme Point, les Parallelogrammes qui se font allentour du Diametre sont des Quarréz.

II. Remarque.

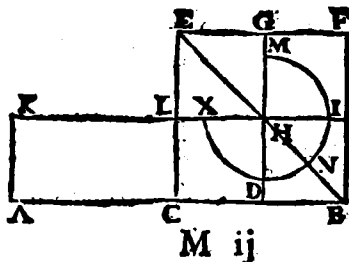
Pour verifïer cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 10. & le divisez en deux Parties comme 7. & 3. Cela estant, le Quarré de 7. est 49. le Quarré de 3. est 9. le Rectangle des deux Parties 7. & 3. est 21. Cemesme Rectangle pris encore une fois est encore 21. adjoutez ces deux Quarréz & ces deux Rectangles, cela fait 100. Lequel nombre est égal au Quarré du nombre entier 10.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une Ligne Droite est coupée en deux Parties égales, & en deux Inégales, le Rectangle compris des deux Parties Inégales, avec le Quarré de la Partie du milieu, sont égaux au Quarré de la moitié de la Toute.

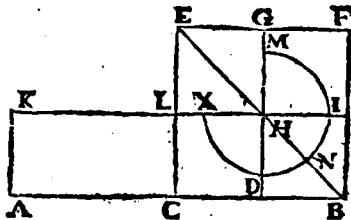
JE suppose que la Ligne Droite AB, soit coupée en deux parties égales au Point C, & en deux Inégales Point D ; Cela estant, je dis que le Rectangle compris des deux



parties Inégales AD, DB, avec le Quarré de la Partie du milieu CD, sont égaux au Quarré de la moitié de la Toute CB ; Pour le prouver.

Decrivez sur CB, le Quarré CF ; tirez la Diagonale BE, Elevez au Point D, la Ligne DG, Perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallèle à BF, & à CE ; Puis, par le Point H, ou la Ligne DG, coupe la Diagonale, menez la Ligne Droite IHK, parallèle à BA ; Enfin menez par le Point A, la Ligne AK, parallèle à CE ; Cela posé.

Il suit de la 1. Remarque sur la Proposition precedente que LG, est un Quarré, à sçavoir celui de LH, ou de son égale CD ; Par la même raison, DI est aussi un Quarré ; & partant DH, est égale à DB ; Par conséquent le Rectangle AH, est le Rectangle compris des deux Parties Inégales AD, DB ; De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Rectangle AH, avec le Quarré LG, sont égaux au Quarré CF ; Pour le prouver.



Les Rectangles CH, HF, sont égaux entr'eux par la 43. du 1. Si donc on leur adjoute le Quarré DI, les Rectangles CI, DF, seront aussi égaux entr'eux ; Mais le Rectangle AL, est égal à CI, par la 36. Prop. du 1. donc il est aussi égal à DF ; Maintenant, si à ces deux choses égales, on adjoute le Rectangle CH, le Rectangle AH, sera égal au Gnomon MNX ; Et si l'on adjoute à ce Rectangle & à ce Gnomon, le Quarré LG, le Rectangle AH, & le Quarré LG, pris ensemble, seront égaux au Gnomon MNX, & au Quarré LG, pris aussi ensemble ; Or ce Gnomon & ce Quarré composent le Quarré CF ; Donc le Rectangle AH, avec le Quarré LG, sont égaux au Quarré CF ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Pour verifier cecy dans un nombre ; Prenez par exem-

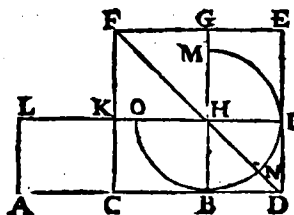
ple 20. Divisez ce nombre en deux parties égales 10. & 10. & en deux Inégales 17. & 3. Cela estant, le nombre du milieu sera 7. Multipliez maintenant 17. par 3. le Produit est 51. Quarrez le nombre 7. vous aurez 49. Ces deux nombres joints ensemble font 100. qui est le Quarré de 10. ou de la moitié de 20.

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Si une Ligne Droite est coupée en deux parties égales, & qu'on luy adjointe directement une autre Ligne Droite, le Rectangle compris de la Toute & de l'adjointée, comme d'une seule Ligne, & de l'Adjointée, avec le Quarré de la moitié de la Toute, sont égaux au Quarré de la moitié de la Toute & de l'adjointée, comme d'une seule Ligne.

JE suppose que la Ligne Droite AB, soit coupée en deux Parties égales au Point C, & qu'on luy adjointe directement la Ligne BD; Cela estant, je dis que le Rectangle compris de AD, BD, avec le Quarré de CB, sont égaux au Quarré de CD; Pour le prouver.

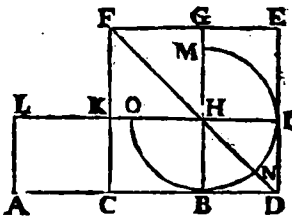


Décrivez sur la Ligne CD, le Quarré CE; tirez la Diagonale DF; Elevez au Point B, la Ligne BG, Perpendiculaire à AD, qui sera aussi parallèle à DE, & à CF; Puis, par le Point H, où la Ligne BG, coupe la Diagonale, menez la Ligne IHL, parallèle à AD; Enfin menez par le Point A, la Ligne AL, parallèle à CF; Cela posé.

Puisque par la premiere Remarque de la 4. Prop. BI est un Quarré, DI est égale à BD, & ainsi le Rectangle AI, est le Rectangle compris de AD, BD.

Par la mesme Remarque, KG est aussi un Quarré, & le Quarré de KH, ou de son égale CB ; Desorte qu'il ne s'agit plus que de montrer que le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sont égaux au Quarré CE. Pour le prouver.

Les Rectangles AK, & CH, qui sont constituez sur Bases égales, & entre mesmes Paralleles sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Mais les Rectangles HE, & CH, sont aussi égaux entr'eux par la 43. Prop. du 1. & ainsi le Rectangle AK, & le Rectangle EH, qui sont égaux à un mesme Rectangle, sont égaux entr'eux; Si donc on leur adjoute le Rectangle CI, le Rectangle AI, sera égal au Gnomon MNO; Maintenant, si on adjoute à ce Rectangle & à ce Gnomon le Quarré KG, le Rectangle AI, avec le Quarré KG, sera égal au Gnomon MNO, avec ce mesme Quarré KG ; Or ce Gnomon & ce Quarré composent le Quarré CE ; Donc le Rectangle AI, & le Quarré KG, sont égaux au Quarré CE ; Ce qu'il falloit démontrer.



Remarque.

Pour verifiser cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 10. divisez ce nombre en deux Parties égales 5. & 5. ajoutez 3. à 10. cela fera 13. Cela estant, le Rectangle de 13. & de 3. est 39. Le Quarré de la moitié 5. est 25. Or 39. & 25. font 64, qui est aussi la valeur du Quarré du nombre 8. composé de la moitié 5. & du nombre adjouté 3.

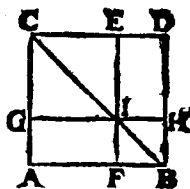


PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si une Ligne Droite est coupée comme l'on voudra, le Quarré de la Toute, & le Quarré de l'une de ses Parties, sont égaux au Quarré de l'autre Partie & a deux Rectangles faits de la Toute, & de la Partie premierement prise.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée comme l'on voudra au Point F ; Cela étant, je dis que le Quarré de la Toute AB, & le Quarré de l'une de ses Parties, par exemple de AF, sont égaux au Quarré de l'autre Partie FB, & a deux Rectangles faits de la Toute AB, & de la Partie AF, qui avoit esté premierement prise. Pour le prouver.



Décrivez sur la Ligne AB, le Quarré AD ; menez la Diagonale BC ; Elevez au Point F, la Ligne FE, perpendiculaire à AB, qui sera aussi parallèle à AC, & à BD ; Puis, par le Point I, où la Ligne FE, coupe la Diagonale, menez la Ligne GIH, parallèle à BC, Cela posé.

Puisque AD, est un Quarré, AC est égale à AB ; & par conséquent le Rectangle AE, est compris de la Toute AB, & de la Partie AF ; D'ailleurs, puisque FH, & GE, sont des Quarrés, par la premiere Remarque de la 4. Prop. le Rectangle GD, compris de CD, qui est égale à AB, & de CG, qui est égale à GI, ou à AF, est aussi compris de AB, & de AF ; De sorte qu'il ne s'agit plus que de prouver que le Quarré AD, & le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD ; Pour le prouver.

Le Quarré AD, est déjà égal au Quarré FH, & aux

96. ELEMENS D'EUCLIDE.

deux Rectangles AE, ID, pris ensemble, par le 8. Ax. Si donc on leur adjointe le Quarré commun GE, il s'ensuivra que le Quarré AD, & le Quarré GE, seront égaux au Quarré FH, au Rectangle AE, au Rectangle ID, & au Quarré GE ; Mais le Rectangle ID, & le Quarré GE, composent ensemble le Rectangle GD ; Et partant le Quarré AD, & le Quarré GE, sont égaux au Quarré FH, & aux deux Rectangles AE, & GD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Pour verifier cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 10. & le divisez en 7. & 3. Cela estant , le Quarré du nombre entier 10. est 100. Le Quarré de la Partie 7. est 49. Ces deux Quarrez font ensemble 149. D'ailleurs le Quarré de l'autre Partie 3. est 9. le Rectangle compris du nombre entier 10. & de la Partie premierement prise 7. est 70. Le mesme Rectangle pris une seconde fois est encore 70. Or 9, 70. & 70. font aussi 149.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

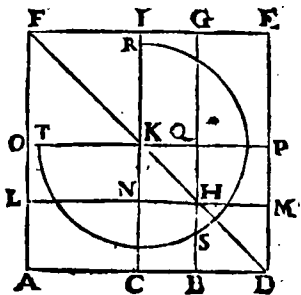
Si une Ligne Droite est coupée comme l'on voudra, quatre fois le Rectangle compris de la Toute & de l'une de ses Parties, avec le Quarré de l'autre Partie, sont égaux au Quarré de la Toute & de la Partie premierement prise comme d'une seule Ligne.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée, comme l'on voudra au Point C ; Cela estant, je dis que quatre fois le Rectangle de AB, CB, avec le Quarré de l'autre Partie AC, sont égaux au Quarré de la Toute AB, & de la Partie premierement prise CB, comme d'une seule Ligne. Pour le prouver.

Continuez.

Continuez AB, vers D, & faites BD, égale à BC, puis ayant décrit sur la Ligne AD, le Quarre AE, menez la Diagonale DF ; E'levez aux Points B, & C, les Perpendiculaires BG, & CI, qui seront aussi paralleles à AF, & à DE ; Et par les Points H, & K, où BG, & CI, coupent la Diagonale DF, menez les Lignes LHM, & OKP, paralleles à AD ; Cela posé.

Premierement par la premiere Remarque de la 4. Prop. BM, & LG, sont des Quarrez ; Ensuite dequoy NQ, & OI, sont aussi des Quarrez ; Or puisque BM, est un Quarre, la Ligne BH, est égale à BD, laquelle ayant esté faite égale à BC, Il s'en suit que la Ligne BH, est égale à BC ; Et ainsi que le Rectangle CH,



est un Quarre ; Et d'autant que les Quarrez BM, & CH, ont le Costé BH, commun, il s'en suit que ces deux Quarrez sont égaux entr'eux ; Et par la mesme raison les Quarrez CH, & NQ sont aussi égaux, puisqu'ils ont le Costé NH, commun ; D'où il suit que les Quarrez BM, NQ, sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont tous deux égaux à CH ; Cela estant, HM, est égal à HQ, puisque ce sont les costez de Quarrez égaux ; Et partant HP, est encore un Quarre égal aux trois autres ; Ensuite dequoy il est évident que les Rectangles AH, & LQ, sont compris de la Toute AB, & de sa Partie BC ; Et puisque par la 43. Prop. du 1. le Rectangle HE, est égal au Rectangle AH, il s'en suit que le Rectangle HE, est aussi compris de AB, & de BC ; D'ailleurs les Rectangles IQ, & GP, estant sur des Bases égales KQ, QP, & entre mesmes Paralleles IE, & KP, sont égaux entr'eux, par la 36. Prop. du 1. Si donc on leur adjoute les Quarrez égaux BM, & QM, Il s'en suivra que QI, pris avec BM, sera équivalent à GP, pris avec QM, c'est à dire au seul Rectangle GM, ou HE ; Et ainsi le Gnomon RST, est égal à quatre fois le Rectangle compris de AB, BC ; Maintenant si à ces

N

deux choses égales on adjoute le Quarré OI, qui est le Quarré de OK, ou de AC, son égale, il s'ensuivra que quatre fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, sont égaux au Gnomon RST, avec le Quarré OI; Or ce Gnomon & ce Quarré, composent ensemble le Quarré AE; Donc quatre fois le Rectangle de AB, BC, avec le Quarré de AC, sont égaux au Quarré AE; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

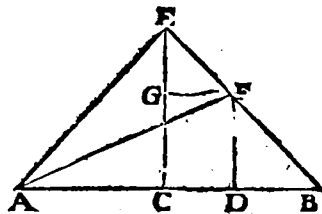
Pour verifier cecy dans un nombre; Prenez par exemple 8. & le divisez en 6. & 2. Cela estant, le Rectangle du nombre entier 8. & de sa Partie 2. est 16. & quatre fois ce Rectangle est 64. D'ailleurs le Quarré de l'autre Partie 6. est 36. Or 64. & 36. font 100. Ce que vaut aussi le Quarré du nombre 10. qui est composé du premier nombre 8. & de sa Partie premierement prise, à sçavoir 2.

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Si une Ligne Droite est coupée en deux Parties égales, & en deux Inégales, les Quarrez des deux Parties Inégales sont doubles du Quarré de la moitié de la Toute, & du Quarré de la Partie du milieu.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée en deux Parties égales au Point C, & en deux Inégales au Point D; Et que la Partie du milieu soit CD; Cela estant, je dis que les Quarrez des deux Parties Inégales AD, DB, sont doubles du Quarré de la moitié AC, & du Quarré de la Par-



tie du milieu CD ; Pour le prouver.

Elevez au Point C, la Ligne CE, Perpendiculaire à AB, & égale à AC ; Menez au Point E, les Lignes Droites AE, BE ; Elevez aussi au Point D, la Ligne DF, Perpendiculaire à AB ; & du Point F, où la Ligne DF, coupe BE, abaissez la Ligne FG, Perpendiculaire à CE, qui sera aussi Parallele à CD ; Enfin du Point A, au Point F, menez la Ligne Droite AF ; Cela posé.

Puisque par la construction le Triangle ACE, est Isoscele, les Angles AEC, & EAC, sur la Baze AE, sont égaux entr'eux ; Et puisque l'Angle ACE, est Droit, les deux Angles AEC, EAC, qui sont égaux, valent chacun un Demy-droit ; Et par la mesme raison les Angles CEB, CBE, valent aussi chacun un Demy-droit ; Par conséquent l'Angle AEB, ou AEF, qui est composé de deux de ces Angles, est droit ; Deplus, puisque dans le Triangle EGF, l'Angle EGF, est Droit, & que l'Angle GEF, vaut un demy-droit, l'Angle EFG, vaut aussi un Demy-droit ; D'où il suit que les deux Costez GE, GF, qui les soutiennent sont égaux entr'eux, par la 6. Prop. du 1. De mesme, puisque dans le Triangle FDB, l'Angle FDB, est droit, & que l'Angle B, vaut un Demy-droit ; L'Angle DFB, vaut aussi un Demy-droit ; Par conséquent les Costez DF, DB, qui les soutiennent, sont égaux entr'eux.

Ensuite dequoy, puisque le Costé AE, soutient l'Angle Droit ACE, son Quarré est égal aux Quarréz de AC, & de CE, par la 47. Prop. du 1. Et puisque ces deux Quarréz sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de AE, est double du Quarré de AC ; De mesme, puisque le Costé EF, soutient l'Angle droit EGF, son Quarré est égal aux Quarréz de EG, & de GF ; Et puisque ces deux Quarréz sont égaux, il s'ensuit que le Quarré de EF, est double du Quarré de GF, ou de son égale CD ; Et ainsi les deux Quarréz de AE, & de EF, sont doubles des deux Quarréz de AC, & de CD ; Or le Quarré de AF, qui soutient l'Angle Droit AEF, est égal aux deux Quarréz de AE, & de EF ; Donc le Quarré de AF, est double des deux Quarréz de

AC, & de CD ; Mais les deux Quarrez de AD, & de DF, qui comprennent l'Angle Droit ADF, sont égaux au Quarre de AF ; Donc les deux Quarrez de AD, & de DF, ou de BD, son égale , sont doubles des deux Quarrez de AC, & de CD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

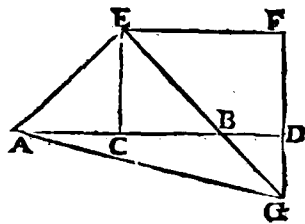
Pour verififier cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 12. Divifez ce nombre en deux Parties égales 6. & 6. & en deux Inégales 10. & 2. Cela eftant le nombre du milieu fera 4. maintenant les Quarrez des deux parties Inégales font 100. & 4. qui enfemble font 104. D'ailleurs le Quarré de la moitié 6. eft 36. le Quarré de la Partie du milieu 4. eft 16 ; 16. & 36. font 52. qui n'eft que la moitié de 104. où dont 104. eft le double.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

Si une Ligne Droite est coupée en deux Parties égales, & qu'on luy adjointe directement une autre Ligne Droite, le Quarré de la Toute & de l'adjointée comme d'une seule Ligne, avec le Quarré de l'adjointée, sont doubles du Quarré de la moitié de la Toute, & du Quarré de la moitié de la Toute & de l'Adjointée comme d'une seule Ligne.

JE suppose que la Ligne AB, soit coupée en deux Parties égales au Point C, & qu'on luy adjoute directement la Ligne BD ; Cela estant, je dis que le Quarré de AD, & le Quarré de BD, pris ensemble, sont



doubles des deux Quarrez de AC, & de CD ; Pour le prouver.

Elevez au Point C, la Ligne CE, perpendiculaire à AB, & égale à AC, ou à CB ; Du Point A, au Point E, menez la Ligne Droite AE ; Puis par le Point D, menez la Ligne FDG, parallele à EC, ou perpendiculaire à AD ; & par le Point E, la Ligne EF, parallele à CD ; tirez du Point E, par le Point B, la Ligne Droite EBG, si longue qu'elle rencontre la Ligne FDG, au Point G ; Enfin du Point A, au Point G, menez la Ligne Droite AG, Cela posé.

Puisque les Lignes AC, CE, sont égales, les Angles CAE, CEA, sur la Baze, sont égaux entr'eux ; Or l'Angle ACE, est Droit ; Donc les Angles CAE, CEA, valent chacun un Demy-droit ; De mesme, puisque dans le Triangle ECB, les Costez CE, CB, sont égaux, & que l'Angle ECB, est Droit, chacun des Angles CEB, & CBE, vaut un Demy-droit ; Et par consequent l'Angle AEB, est Droit ; Maintenant les Angles CBE, & DBG, qui sont opposez au sommet sont égaux entr'eux ; Mais l'Angle CBE, vaut un Demy-Droit ; Donc l'Angle DBG, vaut aussi un Demy-Droit ; Deplus, dans le Triangle BDG, l'Angle D, est Droit, Donc l'Angle DGB vaut aussi un Demy-droit. Et partant les Costez DB, DG, qui soutiennent les Angles DBG, DGB, sont égaux entr'eux, par la 8. du 1. De mesme, dans le Triangle EFG, l'Angle F, est droit, puisqu'il est opposé à l'Angle C ; Mais l'Angle EGF, vaut un Demy-droit ; Donc l'Angle GEF, vaut aussi un Demy-droit ; Et partant les Costez FE, FG, qui les soutiennent sont aussi égaux entr'eux, par la 6. du 1.

Ensuite dequoy, Puisque du Triangle ACE, l'Angle ACE, est droit, le Quarre de AE, est égal aux deux Quarrez de AC, & de CE, par la 47. du 1. Et puisque ces Lignes sont égales, le Quarre de AE, est double du Quarre de AC ; De mesme, puisque du Triangle EFG, l'Angle EFG, est droit, le Quarre de EG, est égal aux deux Quarrez de EF, & de FG ; Et puisque ces Lignes sont

égales, le Quarré de EG, est double du Quarré de EF, ou de son égale CD ; De sorte que les deux Quarrez de AE, & de EG, sont doubles des deux Quarrez de AC, & de CD ; Or le Quarré de AG, qui soutient l'Angle Droit AEG, est égal aux deux Quarrez de AE, & de EG ; Donc le Quarré AG, est double des Quarrez de AC, & de CD ; Mais les Quarrez de AD, & de DG, qui comprennent l'Angle Droit ADG, sont égaux au Quarré de AG ; Donc les Quarrez de AD, & de DG, ou de BD, son égale, sont doubles des Quarrez de AC, & de CD ; Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

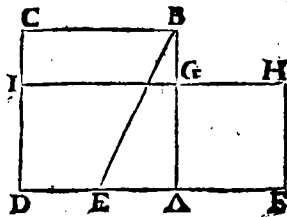
Pour verifier cecy dans un nombre ; Prenez par exemple 10. divisez ce nombre en deux Parties égales 5. & 5. Ajoutez 2. à 10. cela fera 12. Cela estant le Quarré de 12. est 144. le Quarré de 2. est 4. ces deux nombres sont ensemble 148. D'ailleurs le Quarré de 5. est 25. le Quarré de 7. est 49. Ces deux nombres sont ensemble 74. qui est la moitié de 148. ou dont 148. est le double.

PROPOSITION XI.

PROBLEME I.

Couper une Ligne Droite donnée, de telle sorte que le Rectangle de la Toute & de l'une de ses Parties soit égal au Quarré de l'autre Partie.

JE suppose que la Ligne Droite donnée soit AB ; & je propose de la couper de telle sorte que le Rectangle de la Toute AB, & de l'une de ses Parties, soit égal au Quarré de l'autre Partie ; Pour le faire.



Décrivez sur AB, le Quarré AC ; Coupez le Costé AD, en deux également au Point E ; du Point E, au Point B, menez la Ligne Droite EB ; Prolongez EA, vers F, & faites EF, égale à EB ; Décrivez sur AF, le Quarré AH, & prolongez le Costé HG, jusqu'en I ; Cela estant, je dis que la Ligne AB, est coupée au Point G, comme il a esté proposé, c'est à dire de telle sorte que le Rectangle de la Toute AB, & de sa Partie BG, est égal au Quarré de l'autre Partie AG, Pour le prouver.

Puisque la Ligne DA, est coupée en deux Parties égales au Point E, & que la Ligne AF, luy est adjointée, le Rectangle de DF, & de FA, ou de FH, son égale, C'est à dire le Rectangle DH, avec le Quarré de la moitié EA, sont égaux au Quarré de EF, ou de son égale EB, par la 6. Prop. ; Or les Quarrés de AB, & de EA, sont égaux au Quarré de EB, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle DH, & le Quarré de EA, sont égaux aux Quarrés de AB, & de EA, Oitant donc le Quarré de EA, de ces deux Tous égaux, auxquels il est commun, il restera le Rectangle DH, égal au Quarré de AB, c'est à dire au Quarré AC ; Que si maintenant de ce Rectangle & de ce Quarré, qui sont égaux, l'on oste le Rectangle DG, qui leur est commun, il restera le Quarré AH, égal au Rectangle IB ; Or le Quarré AH, est le Quarré de AG, & le Rectangle IB, est le Rectangle compris de CB, ou de AB, son égale, & de BG ; Il est donc vray de dire que la Ligne AB, a esté coupée, comme il a esté proposé ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

Remarque.

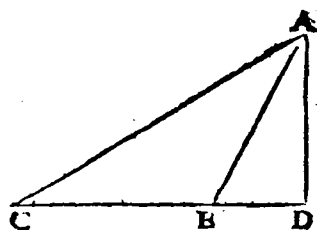
Il est impossible d'exprimer en nombre la quantité des Parties AG, GB, de la Ligne AB, coupée suivant la Prop. précédente ; parce que quelque nombre de Parties qu'on puisse attribuer à la Ligne AB, Il est impossible que AG, ou GB, contienne un nombre déterminé de ces Parties.

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Aux Triangles Ambligones , le Quarré du costé qui soutient l'Angle Obtus , est plus grand que les Quarrez des deux autres Costez , de la quantité de deux Rectangles , chacun desquels est compris de l'un des costez allentour de l'Angle Obtus , à sçavoir de celui sur lequel estant prolongé tombe la Perpendiculaire de l'Angle opposé , & de la Partie comprise entre cette Perpendiculaire , & l'Angle Obtus.

JE suppose qu'au Triangle ABC, l'Angle ABC, soit Obtus ; Cela estant , après avoir prolongé l'un des costez allentour de l'Angle Obtus , comme CB, vers D, & avoir abaissé de l'Angle A, la Ligne AD, Perpendiculaire à CD, Je dis que le Quarré de AC, est plus grand que les deux Quarrez de CB, & de BA, de la quantité de deux Rectangles , chacun desquels sera compris de CB, & de BD ; Pour le prouver.



La Ligne CD, estant coupée au Point B, il s'ensuit par la 4. Prop. que le Quarré de la Toute CD, est égal aux deux Quarrez des deux Parties CB, BD, & à deux Rectangles compris de ces deux mesmes Parties ; Donc si à ces deux Tous égaux l'on adjoute le Quarré de DA, il s'ensuivra que les Quarrez de CD, & de DA, seront égaux aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB, & de BD ; Mais le Quarré de
AC,

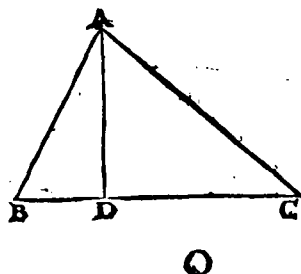
AC, par la 47. Prop. du 1. est égal aux deux Quarrez de CD, & de DA ; Donc le Quarré de AC, est égal aux trois Quarrez de CB, de BD, & de DA, & à deux Rectangles compris de CB, & de BD ; D'ailleurs le Quarré de BA, est égal aux deux Quarrez de BD, & de DA ; Prenant donc le Quarré de BA, au lieu de ces deux Quarrez, Il s'ensuivra que le Quarré de AC, sera égal aux deux Quarrez de CB, & de BA, & à deux Rectangles compris de CB, & de BD ; Et ainsi le Quarré de AC, est plus grand que les deux Quarrez de CB, & de BA, de la quantité de deux Rectangles compris de CB, & de BD ; Ce qu'il falloit demontrer.

PROPOSITION XIII.

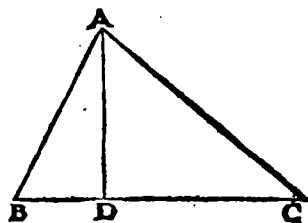
THEOREME XII.

Aux Triangles Oxigones, le Quarré du Costé qui soutient l'Angle Aigu, est plus petit que les Quarrez des deux autres Costez, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels est compris de l'un des Costez allentour de l'Angle Aigu, à sçavoir de celui sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire, & de la Partie comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle Aigu.

JE suppose qu'au Triangle ABC, l'Angle C, soit Aigu, & qu'ayant fait tomber de l'Angle A, la Ligne AD, Perpendiculaire à la Ligne BC, qui est l'un des Costez qui comprend l'Angle Aigu, cette Perpendiculaire tombe entre B, & C ;



Cela estant, je dis que le Quarré du Costé AB, qui soutient l'Angle Aigu C, est plus petit que les deux Quarrez des deux autres Costez A, BC, de la quantité de deux Rectangles, chacun desquels sera compris du Costé BC, qui est allentour de l'Angle Aigu C, & sur lequel de l'Angle opposé tombe la Perpendiculaire AD, & de la Partie DC, comprise entre cette Perpendiculaire & l'Angle Aigu; Pour le prouver.



La Ligne BC, estant coupée au Point D, Il s'ensuit par la 7. Prop. que le Quarré de la Toute BC, & le Quarré de l'une de ses Parties, à sçavoir DC, sont égaux au Quarré de l'autre Partie BD, & à deux Rectangles compris de BC, & de DC; Si donc à ces deux Tous égaux l'on adjointe le Quarré de AD, Il s'enfuivra que les trois Quarrez de BC, de DC, & de AD, seront égaux aux deux Quarrez de BD, & de AD; & à deux Rectangles compris de BC, & de DC; Donc si nous prenons le Quarré de AC, au lieu des deux Quarrez de DC, & de AD, auxquels il est égal, par la 47. Prop. du 1. Il s'enfuivra que les deux Quarrez de BC, & de AC, seront égaux aux deux Quarrez de BD, & de AD, & à deux Rectangles compris de BC, & de DC; D'ailleurs le Quarré de AB, est égal aux deux Quarrez de BD, & de AD; Prenant donc ce seul Quarré au lieu des deux autres, il s'enfuivra que les deux Quarrez de BC, & de AC, seront égaux au Quarré de AB, & à deux Rectangles compris de BC, & de DC; D'où il suit que les deux Quarrez de BC, & de AC, sont plus grands que le seul Quarré de AB, de la quantité de deux Rectangles compris de BC, & de DC; ou ce qui est la mesme chose que le Quarré de AB, est moindre que les deux Quarrez de AC, & de BC, de la quantité de deux Rectangles compris de BC, & de DC; Ce qu'il falloit démontrer.

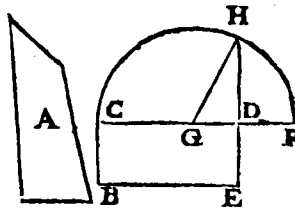
PROPOSITION XIV.

PROBLEME II.

Décrire un Quarré égal à une Figure Rectiligne donnée.

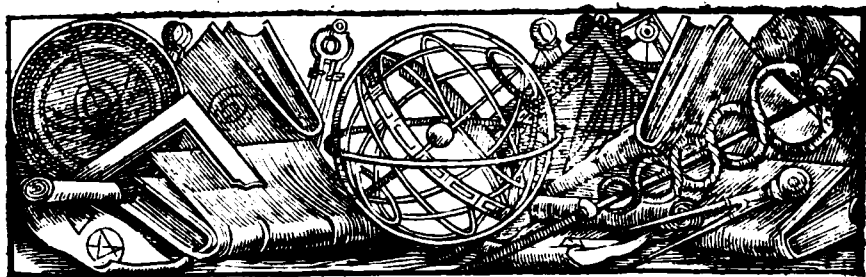
JE suppose que la Figure Rectiligne A, soit donnée ; Et je propose de décrire un Quarré égal à cette Figure. Pour le faire.

Décrivez premièrement par la 45. Prop. du 1. le Parallelogramme Rectangle BD, égal à la Figure donnée A ; Prolongez le Costé CD, vers F, & Faites DF, égal à DE ; Coupez la Ligne CF, en deux également au Point G, Décrivez un demy Cercle du Centre G, & de l'Intervalle GC, ou GF ; Enfin prolongez la Ligne ED, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Circonference du Cercle au Point H ; Cela estant, je dis que le Quarré de la Ligne DH, est égal à la Figure Rectiligne A ; Pour le prouver.



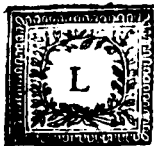
Du Point G, au Point H, menez la Ligne Droite GH ; Cela posé.

Puisque la Ligne CF, est coupée en deux Parties égales au Point G, & en deux Inégales au Point D, Il s'ensuit par la 5. Prop. que le Rectangle compris des deux Parties Inégales CD, DF, C'est à dire le Rectangle BD, & le Quarré de la Partie du milieu GD, sont égaux au Quarré de la moitié de la Toute, GF, ou de son égale GH ; Mais ce Quarré GH, est égal aux Quarrez de GD, & de DH, par la 47. Prop. du 1. Donc le Rectangle BD, & le Quarré de GD, sont égaux aux deux Quarrez de GD, & de DH ; Et partant si de ces deux Tous égaux l'on oste le Quarré de GD, qui leur est commun, les Restés à sçavoir le Rectangle BD, & le Quarré de DH, seront égaux ; Mais le Rectangle BD, a esté fait égal à la Figure Rectiligne donnée A ; Donc le Quarré de DH, est aussi égal à cette Figure ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

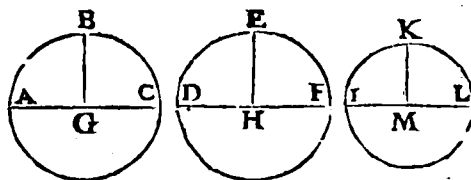


LIVRE TROISIÈME.

DEFINITIONS.

1.  Es Cercles égaux, sont des Cercles dont les Diametres sont égaux, ou dont les Lignes Droites menées du Centre à leurs Circonférences sont égales.

Ainsi les Cercles ABC, DEF, sont égaux, parce que leurs Diametres AC, DF, sont égaux ; ou parce que les Lignes Droites GB, HE, qui sont menées du Centre

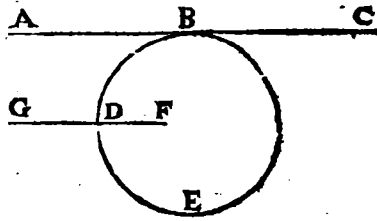


à leurs Circonférences sont égales ; Mais les Cercles DEF, IKL, sont Inégaux, parce que leurs Diametres DF, IL, sont Inégaux, ou parce que les Lignes Droites HE, MK, qui sont menées du Centre à leurs Circonférences sont Inégales.

2. La Tangente d'un Cercle, ou la Ligne qui le touche, est une Ligne Droite qui touche sa Circonférence de telle sorte, qu'étant prolongée elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.

Ainsi la Ligne AB, est la Tangente du Cercle BDE, parce qu'elle touche sa Circonférence de telle sorte au

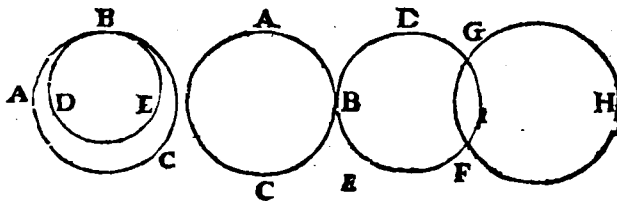
Point B, qu'estant prolongée elle ne la coupe point, & n'entre point dans le Cercle.



3. La Secante d'un Cercle, ou la Ligne qui le coupe, est une Ligne Droite qui touche tellement sa Circonference qu'estant prolongée elle la coupe, & entre dans le Cercle.

Ainsi la Ligne GD, est la Secante du Cercle BDE, parce qu'elle touche tellement sa Circonference au Point D, qu'estant prolongée, elle la coupe, & entre dans le Cercle.

4. Des Cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand leurs Circonférences se touchent sans se couper.



Ainsi les Cercles ABC, DBE, sont dits se toucher l'un l'autre, parce que leurs Circonférences se touchent tellement au Point B, qu'elles ne se coupent point.

5. Deux Cercles sont dits se couper l'un l'autre, lorsque leurs Circonférences ne se touchent pas simplement, mais qu'ils entrent réciproquement l'un dans l'autre.

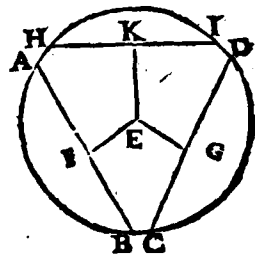
Ainsi les Cercles FGD, FGH, sont dits se couper l'un l'autre, parce que leurs Circonférences ne se touchent pas simplement, mais que ces Cercles entrent réciproquement l'un dans l'autre.

6. La distance d'une Ligne Droite au Centre d'un Cercle, est la Ligne Droite qui part du Centre de ce Cercle, & qui tombe Perpendiculairement sur cette Ligne.

Ainsi la distance de la Ligne AB, au Centre du Cercle ABD, est la Ligne EF, qui part du Centre E, & qui tombe perpendiculairement sur AB; D'où il suit que les

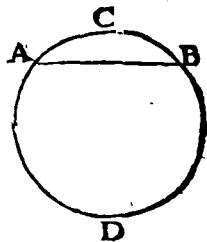
110 ELEMENS D'EUCLIDE.

deux Lignes Droites AB, CD, sont également distantes du Centre E, parce que leurs distances EF, EG, sont égales ; Mais que la Ligne HI, est plus éloignée de ce même Centre, parce que sa distance EK, est plus grande que celle des autres.



7. La Soutendante, ou la corde d'un Arc de Cercle, est la Ligne Droite bornée des deux extrémités de cet Arc.

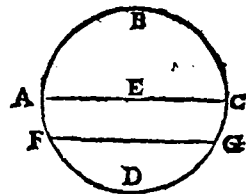
Ainsi la Ligne Droite AB, est la Soutendante, ou la corde de l'Arc ACB, parce qu'elle est bornée de ses deux extrémités A, & B.



Il est évident que la même Ligne AB, est aussi la Soutendante de l'Arc ADB ; Si bien que la Ligne Droite qui est la Soutendante d'un Arc, est aussi la Soutendante du Complément au Cercle entier de cet Arc.

8. Un Segment, ou une portion de Cercle, est une Figure comprise d'un Arc de Cercle, & de sa Soutendante.

Ainsi les Figures ABC, FBG, FDG, sont des Segmens ou des Portions de Cercles, parce chacune de ces Figures est comprise d'un Arc de Cercle & de sa Soutendante.



9. La Baze d'un Segment de Cercle, est la Ligne Droite qui soutient ce Segment & qui le borne.

Ainsi la Ligne FG, est la Baze du Segment FBG, & du Segment FDG, parce qu'elle les soutient & les borne.

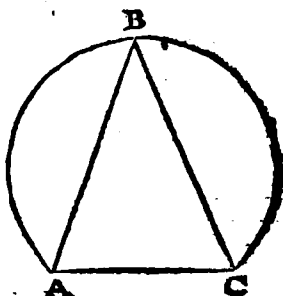
10. L'Angle du Segment, est l'Angle mixte compris de l'Arc du Segment & de sa Baze.

Ainsi l'Angle Mixte compris de l'Arc FD, & de la Ligne FG, est l'Angle du Segment FDG.

11. L'Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment est

capable, est un Angle compris de deux Lignes Droites qui partent d'un Point de l'Arc du Segment, & qui aboutissent aux deux extremittez de sa Baze.

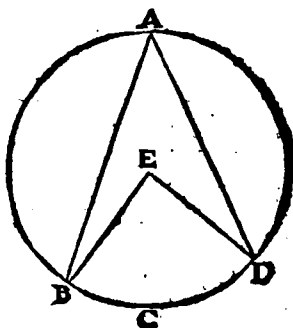
Ainsi l'Angle ABC, est un Angle au Segment, ou l'Angle dont le Segment ABC, est capable, parce qu'il est compris des deux Lignes Droites BA, BC, qui partent du Point B, de l'Arc du Segment, & aboutissent aux deux extremittez de sa Baze A, & C.



12. Un Angle au Centre d'un Cercle, est un Angle compris de deux Lignes Droites qui partent du Centre d'un Cercle, comme l'Angle BED.

13. Un Angle à la Circonference d'un Cercle, est un Angle compris de deux Lignes Droites qui partent d'un Point de la Circonference du Cercle, comme l'Angle BAD.

14. Quand l'Angle que font deux Lignes Droites qui partent du Centre d'un Cercle, ou d'un mesme Point de la Circonference, a pour Baze un Arc de ce Cercle, cet Angle est dit s'appuyer sur cet Arc.



Ainsi l'Angle BED, ou l'Angle BAD, est dit s'appuyer sur l'Arc BCD.

15. L'Arc sur lequel s'appuye un Angle, ou qui luy sert de Baze, est l'Arc compris entre les deux Costez de l'Angle.

Ainsi l'Arc BCD, est l'Arc sur lequel s'appuyent les Angles BAD, BED, ou bien est la Baze de ces Angles, parce que cet Arc est compris entre leurs Costez.

16. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux Lignes Droites qui font un Angle au Centre, & de la Partie de la Circonference que ces deux Lignes em-

112 ELEMENS D'EUCLIDE.

braissent , comme cy-dessus la Figure EBCD, est un Secteur de Cercle.

17. Des Segmens semblables , sont des Segmens qui sont capables d'Angles égaux.

Ainsi les Segmens marquez ABC, & DEF, sont des Segmens qui s'appellent semblables , parce que les

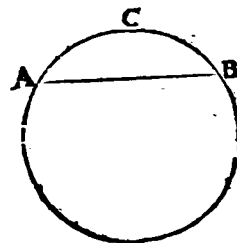
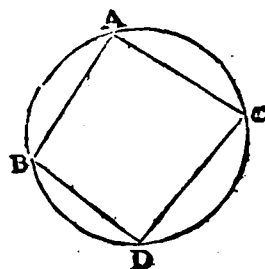
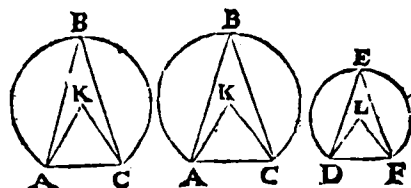
Angles ABC, & DEF, dont ils sont capables, sont égaux; Mais ces mêmes Segmens ne laissent pas d'estre Inégaux, parce que l'un est plus grand que l'autre ; Au lieu que les deux Segmens marquez ABC, sont semblables, & égaux, parce que non seulement ils sont capables d'Angles égaux, mais aussi parce que l'un n'est pas plus grand que l'autre.

18. Une Figure Rectiligne est dite Inscrite dans un Cercle, lorsque le Sommet de chacun de ses Angles est dans la Circonférence du Cercle.

Ainsi la Figure ABCD, est inscrite dans le Cercle ABCD, parce que tous les Sommets de ses Angles A, B, C, D, sont dans la Circonférence de ce Cercle.

19. Une Ligne Droite est dite estre dans un Cercle, lorsque ses extrémités se terminent à la Circonférence.

Ainsi la Ligne AB, est dite estre dans le Cercle ABC.



PROP.

PROPOSITION I.

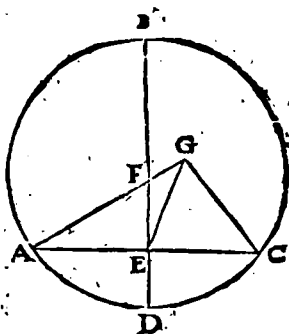
PROBLEME I.

Trouver le Centre d'un Cercle donné.

JE suppose que l'on donne le Cercle ABC, & je propose d'en trouver le Centre. Pour le trouver.

Menez dans ce Cercle la Ligne droite AC, qui coupe la Circonférence où il vous plaira, comme aux Points A, & C ; Divisez la Ligne AC, en deux également au Point E, par la 10. du 1. ; Et par ce Point menez la Ligne BED, Perpendiculaire à AC, par la 11. du premier ; Enfin coupez la Ligne BD, en deux également au Point F ; Cela estant, je dis que le Point F, est le Centre du Cercle ABC. Pour le prouver.

Premièrement il est évident que tout autre Point que F, pris dans la Ligne BD, ne peut estre le Centre, puisque cet autre Point ne diviserait pas la Ligne BD, en deux également ; C'est pourquoy si le Centre n'estoit pas au Point F, Il faudroit qu'il fust en quelque Point hors de la Ligne BD ; Pensons si vous voulez qu'il soit au Point G ; Menez donc les Lignes Droites GA, GE, GC ; Cela posé.



Comparez le Triangle AEG, avec le Triangle CEG ; le Costé AE du premier, est égal au Costé EC du second, par construction ; le Costé EG, est commun aux deux Triangles, & la Baze GA, seroit égale à la Baze GC, puisqu'elles seroient tirées du Centre à la Circonférence ; Ainsi par la 8. du 1. l'Angle AEG, seroit égal à l'Angle CEG, & la Ligne GE, seroit Perpendiculaire à AC, par la

P.

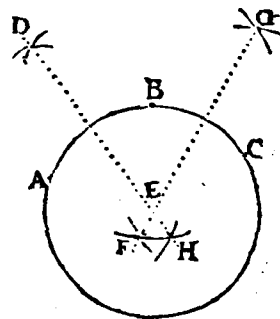
26. Definition du 1. Et partant les Angles GEA, GEC, seroient Droits ; Mais par la construction l'Angle AEB, est droit ; Donc il s'ensuivroit que l'Angle AEB, & l'Angle AEG, seroient égaux ; C'est à dire la Partie au Tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que le Centre du Cercle ABC, soit hors la Ligne BD ; Et partant le Point F, est le Centre du Cercle ABC ; Ce qu'il falloit trouver.

I. Remarque.

Il suit de-là, que si dans un Cercle, une Ligne Droite en coupe une autre qui se termine à sa Circonférence, en deux également & perpendiculairement, cette Ligne Droite passera par le Centre du Cercle.

II. Remarque.

Pratique de cette Proposition. Prenez dans la Circonférence du Cercle ABC, trois Points, tels qu'il vous plaira, comme A, B, C ; Mettez successivement vostre Compas à deux de ces Points A, & B, & de mesme Intervalle décrivez deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent aux Points D, & H, Puis par ces Points menez la Ligne Droite DH ; Cela fait, mettez derechef successivement le pied du Compas aux Points B, & C, & de mesme Intervalle décrivez encore deux Arcs de Cercle qui s'entrecoupent aux Points G, & F ; Enfin menez par ces deux Points la Ligne GF, si longue qu'elle rencontre la Ligne DH, au Point E, alors le Point E, sera le Centre qu'il falloit trouver.

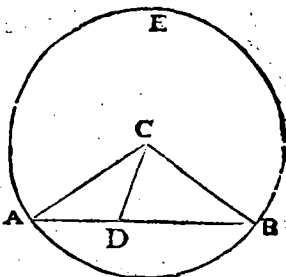


PROPOSITION II.

THEOREME I.

Si ayant pris deux Points dans la Circonference d'un Cercle, on mene de l'un à l'autre une Ligne Droite, elle tombera dans le Cercle.

JE suppose que dans la Circonference du Cercle ABE, l'on prenne deux Points tels qu'on voudra, comme A, & B, & que du Point A, au Point B, on mene la Ligne Droite AB ; Cela estant, je dis que cette Ligne tombera dans ce Cercle. Pour le prouver.



Menez du Centre C, aux extremités de la Ligne AB, les Lignes Droites CA, CB ; Puis ayant pris à discretion dans la Ligne AB, un Point entre A, & B, comme par exemple D, menez la Ligne Droite CD ; Cela posé.

Les Lignes CA, CB, qui partent du Centre C, & vont se borner à la Circonference sont égales ; Ainsi les Angles CAB, CBA, sont égaux entr'eux, par la 5. du 1. ; Mais l'Angle CDB, est extérieur au respect du Triangle ADC, Donc par la 16. du 1. il est plus grand que son Opposé Interieur CAD ; Et par consequent aussi que son égal CBD ; D'où il suit, par la 19. du premier, que le Costé CD, est plus petit que le Costé CB, qui soutient un plus grand Angle ; Et puisqu'il est plus petit son extrémité D, est dans le Cercle ; Mais d'autant que le Point D, a esté pris à discretion dans la Ligne AB, & que la mesme chose se peut prouver de tout autre Point de cette Ligne, il suit que cette Ligne toute entiere est dans le Cercle ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

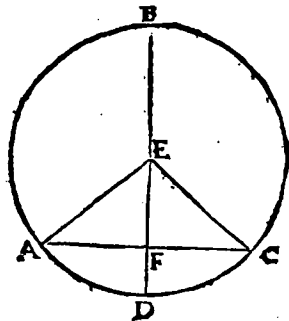
THEOREME II.

Si dans un Cercle, une Ligne Droite passe par le Centre, & coupe en deux également une autre Ligne Droite qui n'y passe point, elle la coupera Perpendiculairement ; Et si elle la coupe Perpendiculairement, elle la coupera en deux également.

JE suppose premierement que la Ligne Droite BD, qui est dans le Cercle ABC, passe par le Centre E, & qu'elle coupe en deux également au Point F, la Ligne AC, qui n'y passe point ; Cela estant, je dis que la Ligne BD, coupe la Ligne AC, Perpendiculairement. Pour le prouver.

Menez les Lignes Droites AE, EC, Cela posé.

Dans les Triangles AFE, & CFE, le Costé AF, est égal au Costé EC, par Supposition ; Le Costé FE, est commun à ces deux Triangles ; De plus la Baze EA, est égale à la Baze EC, par la definition du Cercle ; Donc par la 8. du 1. l'Angle AFE, est égal à l'Angle CFE, & la Ligne BD, est Perpendiculaire à AC, par la 26. Definition du 1. Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que la Ligne BD, qui passe par le Centre du Cercle, coupe la Ligne AC, perpendiculairement ; Cela estant, je dis qu'elle la coupe aussi en deux également. Pour le prouver.

Puisque les Lignes EA, EC, sont égales, par la definition du Cercle, les Angles EAC, & ECA, sont égaux

LIVRE TROISIEME. 117

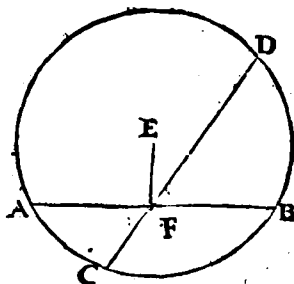
par la 5. du 1 ; D'ailleurs puisque la Ligne BF, est perpendiculaire à la Ligne AC, les deux Angles EFA, EFC, sont aussi égaux ; Si bien que les deux Triangles EFA, EFC, ont deux Angles égaux à deux Angles chacun au sien, le Costé EF, qui est commun aux deux, soutient des Angles égaux ; Partant par la 26. du 1. le Costé AF, est égal au Costé FC ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

Si dans un Cercle, deux Lignes Droites qui ne passent pas par le Centre s'entrecoupent, elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.

JE suppose que dans le Cercle ABD, les deux Lignes Droites AB, CD, qui ne passent point par le Centre se coupent l'une l'autre au Point F ; Cela étant, je dis qu'elles ne se coupent pas toutes deux en deux Parties égales. Pour le prouver.



S'il estoit possible que chacune de ces deux Lignes fust coupée en deux Parties égales, il s'ensuivroit par la Proposition précédente, qu'en menant du Centre E, au Point F, la Ligne Droite EF, cette Ligne seroit Perpendiculaire à chacune des deux autres AB, CD ; Et par conséquent que les Angles AFE, & CFE, seroient droits, & égaux entr'eux, & qu'ainsi la Partie seroit égale au tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que les Lignes AB, CD, se coupent toutes deux en deux Parties égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

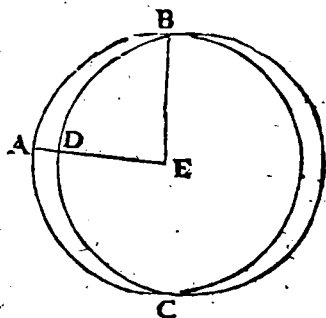
PROPOSITION V.

THEOREME IV.

Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas un mesme Centre,

JE suppose que les deux Cercles ABC, BDC, se coupent l'un l'autre aux Points B, & C, Cela estant, je dis qu'ils n'ont pas un mesme Centre. Pour le prouver.

S'il estoit possible qu'ils eussent tous deux un mesme Centre, à sçavoir E, en menant de ce Point une Ligne Droitte à l'un des Points où ces deux Cercles s'entrecoupent, par exemple au Point B, & une autre Ligne Droitte en quelque'autre Point, comme A, qui les coupast tous deux, De ce que le Point E, seroit Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes EA, EB, seroient égales; D'ailleurs, de ce que ce mesme Point seroit aussi le Centre du Cercle BDC, il s'ensuivroit que les Lignes ED, EB, seroient aussi égales; Si bien que les deux Lignes EA, ED, qui seroient égales à une mesme, à sçavoir à EB, seroient égales entr'elles; C'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que la Partie; Ce qui est impossible, Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDC, ayent un mesme Centre; Ce qu'il falloit démontrer.

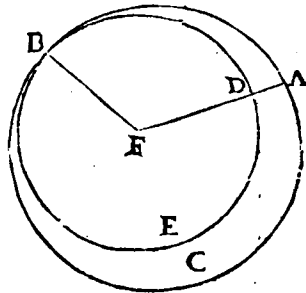


PROPOSITION VI.

THEOREME V.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre en dedans, ils n'auront pas un mesme Centre.

JE suppose que le Cercle BDE, touche le Cercle ABC, en dedans au Point B, Cela estant, je dis que ces deux Cercles n'ont pas un mesme Centre. Pour le prouver.



S'il estoit possible qu'ils eussent tous deux un mesme Centre, à sçavoir F, menant de ce Centre au Point de leur attouchement la Ligne Droite FB ; Puis une autre Ligne Droite à quelqu'autre Point de la Circonférence du Cercle ABC, par exemple au Point A ; De ce que le Point F, seroit le Centre du Cercle ABC, il s'ensuivroit que les Lignes FA, FB, seroient égales ; Et parce que ce mesme Point seroit aussi le Centre du Cercle BDE, il s'ensuivroit que les Lignes FD, FB, seroient aussi égales ; Et ainsi les Lignes Droites FA, FD, qui seroient égales à la mesme FB, seroient égales entr'elles ; C'est à dire que le Tout ne seroit pas plus grand que sa Partie, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que les deux Cercles ABC, BDE, ayent un mesme Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.



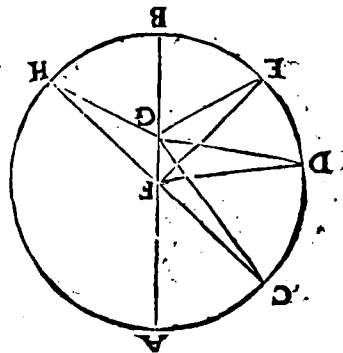
PROPOSITION VII.

THEOREME VI.

Si ayant pris un Point, autre que le Centre, dans un Cercle, on mène de ce Point tant de Lignes Droites que l'on voudra, jusqu'à la Circonférence, la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre, & la plus petite est le reste du Diametre. Quant aux autres Lignes, la plus proche de celle qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée; Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes Droites égales entr'elles.

*12^e La fig. est
renversée*

JE suppose que dans le Cercle ADB; dont le Centre est F, on ait pris à discretion le Point G, différent du Centre F, & que de ce Point on ait mené à la Circonférence plusieurs Lignes Droites comme GA, GC, GD, GE, GB, entre lesquelles GA, passe par le Centre F; Et GB, acheve le Diametre AB; Cela étant, je dis premièrement que la Ligne GA, est la plus grande de toutes. Pour le prouver.



Menez du Centre F, aux Points C, D, E, les Lignes Droites FC, FD, FE; Cela posé.

Au Triangle GFC, les deux Costez GF, FC, sont plus grands que le troisième GE, par la 20. du 1.^{er}; Donc si au lieu de FC, on prend FA, qui luy est égale par la Definition du Cercle, les deux Lignes GF, FA, ou la Toute GA,

GA, sera plus grande que GC ; On prouvera de mesme que la Ligne GA, est plus grande que les Lignes GD, GE, mais GA, est aussi plus grand que GB, puisque GA, est plus grand que le Demy-diametre du Cercle, & que GB, est plus petit ; Et partant la Ligne GA, est la plus grande de toutes.

Je dis en second lieu, que la Ligne GB, est la plus petite de toutes ; Pour le prouver.

Au Triangle EGF, les deux Costez FG, GE, sont plus grands que le troisieme FE, par la 20. du 1 ; Ils sont donc aussi plus grands que la Ligne FB, qui luy est egale ; Si donc de ces deux Tous inégaux on oste la Partie FG, qui leur est commune, Il s'ensuivra que le reste GE, sera plus grand que le reste GB, & ainsi que GB, est plus petit que GE ; On prouvera de mesme que GB, est plus petit que GD, ou GC ; Et partant la Ligne GB, est la plus petite de toutes.

Je dis en troisieme lieu, que la Ligne GC, qui est la plus proche de la Ligne GA, qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que GD, ou GE ; Pour le prouver.

Comparez les deux Triangles CFG, & DFG, le Costé CF du premier Triangle, est égal au Costé FD du second, par la Definition du Cercle, le Costé FG, est commun à ces deux Triangles ; Deplus l'Angle CFG, compris des deux Costez du premier Triangle, est plus grand que l'Angle DFG, compris des deux costez du second, puis qu'il n'est que sa Partie ; Ainsi par la 24. du 1. la Baze GC, est plus grande que la Baze GD ; On prouvera de mesme que GD, est plus grand que GE ; Et ainsi la Ligne GC, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre est plus grande qu'une autre plus éloignée.

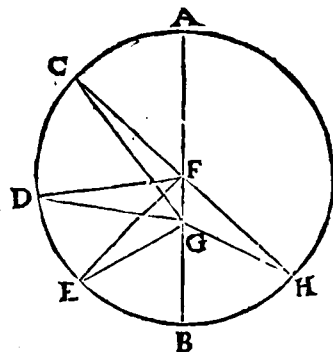
Je dis en quatrieme lieu, qu'on ne sçauroit mener du Point G, de part & d'autre de la Ligne GB, plus de deux Lignes Droittes égales entr'elles ; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisieme égale aux deux autres. Pour le prouver.

Menez du Point F, la Ligne FH, qui fasse avec FB,

Q

l'Angle BFH, égal à l'Angle BFE, & du Point G, au Point H, menez la Ligne Droite GH ; Cela posé.

Les Triangles GFH, & GFE, ont les deux Costez GF, FH, égaux aux deux Costez GF, FE, & l'Angle GFH, compris des deux Costez du premier Triangle, est égal à l'Angle GFE, compris des deux autres, par construction ; Donc la Baze GH, est égale à la Baze GE, par la 4. du 1 ; Ainsi voilà deux Lignes Droites égales menées du Point



G, depart & d'autre de la Ligne GB ; Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisième égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déjà été prouvé ; Car cette Ligne ou approchera plus près du Point B, & ainsi elle sera plus petite que GH, ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VIII.

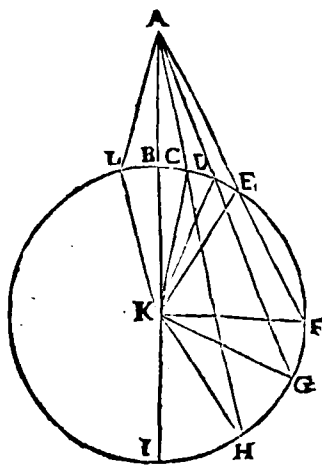
THEOREME VII.

Si d'un Point pris hors d'un Cercle on mene tant de Lignes Droittes que l'on voudra, qui se terminent à la Circonférence concave du Cercle, la plus grande de toutes est celle qui passe par le Centre ; & celle qui en est plus proche est plus grande qu'une autre qui en est plus éloignée ; Tout au contraire, de celles qui tombent sur la Circonférence convexe, celle qui estant prolongée passe par le Centre est la plus petite de toutes, & celle qui en est plus proche est plus petite qu'une autre qui en est plus éloignée ; Enfin de part & d'autre de la plus petite, on ne sçauroit mener de ce même Point plus de deux Lignes Droittes égales entr'elles.

JE suppose que du Point A, pris à discretion, hors du Cercle BCD, on ait mené plusieurs Lignes Droittes AF, AG, AH, AI, qui se vont terminer à la Circonférence concave, & que la Ligne AI, passe par le Centre K ; Cela estant, je dis premierement que la Ligne AI, est la plus grande de toutes. Pour le prouver.

Menez du Centre K, les Lignes Droittes KF, KG, KH ; Cela posé.

Au Triangle AKH, les deux Costez AK, KH, sont plus

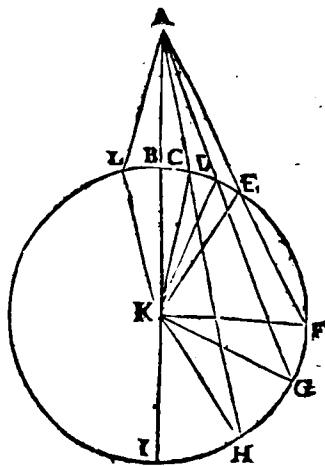


grands que le troisieme AH, par la 20. du 1 ; Or AK, & KH, sont égaux à AK, & à KI, ou à la Toute AI ; Ainsi la Ligne AI, est plus grande que la Ligne AH ; On prouvera de mesme que la Ligne AI, est plus grande que la Ligne AG, & que la Ligne AF ; Donc la Ligne AI, est la plus grande de toutes.

Je dis en second lieu, que la Ligne AH, qui est la plus proche de la Ligne AI, qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée, par exemple que AG, ou AF ; Pour le prouver.

Aux Triangles AKH, & AKG, les deux Costez AK, KH, sont égaux aux deux Costez AK, KG, chacun au sien ; Mais l'Angle AKH, est plus grand que l'Angle AKG, qui n'est que sa Partie, Donc par la 24. du 1 ; La Baze AH, est plus grande que la Baze AG ; On prouvera de mesme que la Ligne AG, est plus grande que la Ligne AF, & ainsi la Ligne AH, qui approche le plus de la Ligne qui passe par le Centre, est plus grande qu'une autre plus éloignée.

Je dis en troisieme lieu, qu'entre les Lignes AB, AC, AD, AE, qui partent du Point A, & qui tombent sur la Circonférence convexe du Cercle BCD, la plus petite de toutes est la Ligne AB, qui estant prolongée passe par le Centre K ; Pour le prouver.



Menez du Centre K, les Lignes Droites KC, KD, KE ; Cela posé.

Au Triangle AKC, le Costé AK, est moindre que les deux Costez KC, AC, par la 20. du 1 ; Donc si de ces deux Tous inégaux on oste des Parties égales, à sçavoir KB, & KC, le reste AB, sera plus petit que le reste AC ; On prouvera de mesme que la Ligne AB, est

plus petite que AD, ou AE ; Et partant elle est la plus petite de toutes.

Je dis en quatrième lieu, qu'entre les Lignes AC, AD, AE, celle qui approche de plus près de la Ligne AB, est plus petite qu'une autre plus éloignée ; Pour le prouver.

Les Lignes AC, KC, sont menées des extremitéz de la Ligne AK, qui est un des costez du Triangle AKD, & se rencontrent dans ce Triangle ; Donc par la 21. du 1. les Lignes AC, KC, sont plus petites que les Lignes AD, KD ; Si donc de ces deux Tous inégaux on oste les Parties égales KC, KD, le reste AC, sera plus petit que le reste AD ; On prouvera de mesme que AD, est plus petit que AE ; Et ainsi de toutes ces Lignes, celle qui est la plus proche de la Ligne AB, est plus petite qu'une autre plus éloignée.

Je dis enfin qu'on ne sçauroit mener du Point A, de part & d'autre de la Ligne AB, plus de deux Lignes Droites égales entr'elles ; ou bien qu'on n'en sçauroit mener une troisième égale aux deux autres. Pour le prouver.

Menez du Centre K, la Ligne KL, qui fasse avec KA, l'Angle AKL, égal à l'Angle AKC, & du Point L, au Point A, menez la Ligne Droite LA. Cela posé.

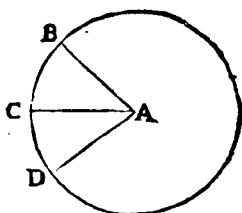
Les deux Triangles AKL, AKC, ont les deux Costez AK, KL, égaux aux deux Costez AK, KC, chacun au sien, Et l'Angle AKL, compris des deux Costez du premier Triangle, est égal à l'Angle AKC, compris des deux autres costez, par construction ; Donc la Baze AL, est égale à la Baze AC, par la 4. du 1 ; Ainsi voilà deux Lignes Droites égales menées du Point A, de part & d'autre de la Ligne AB ; Mais qu'on ne puisse pas en mener une troisième égale aux deux autres, cela est évident, par ce qui a déjà esté prouvé ; Car cette Ligne ou approchera plus près de la Ligne AB, & ainsi elle sera plus petite ; ou elle en sera plus éloignée, & ainsi elle sera plus grande ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

THEOREME VIII.

Si ayant pris un Point dans un Cercle, l'on peut mener de ce Point à la Circonference du Cercle plus de deux Lignes Droites égales entr'elles, ce Point là est le Centre du Cercle.

JE suppose que dans le Cercle BCD, l'on ait pris le Point A, & qu'ayant mené de ce Point à la Circonference les trois Lignes Droites AB, AC, AD, ces trois Lignes se trouvent égales. Cela estant, je dis que le Point A, est le Centre de ce Cercle.



Car si cela n'estoit, Il s'ensuivroit que d'un Point pris dans un Cercle, lequel Point ne feroit pas le Centre, on pourroit mener à la Circonference plus de deux Lignes Droites égales entr'elles ; Ce qui est impossible par la 7. Prop. Par consequent le Point A, est le Centre de ce Cercle ; Ce qu'il falloit démontrer.



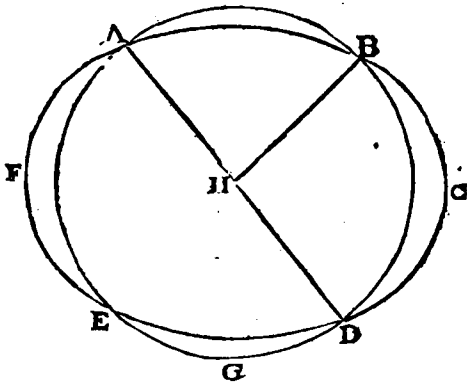
PROPOSITION X.

THEOREME IX.

Si deux Cercles se coupent l'un l'autre, ils ne se couperont pas en plus de deux Points.

JE suppose que les deux Cercles ABDGE, & ABCDEF, se coupent l'un l'autre ; Cela estant, je dis qu'ils ne se coupent pas en plus de deux Points ; Pour le prouver.

Supposons s'il est possible qu'ils se coupent l'un l'autre aux trois Points A, B, D ; Cela posé.



Trouvez par la premiere Proposition le Centre du Cercle ABDGE, & que le Centre soit H, puis de ce Centre menez à ces trois Points A, B, D, les Lignes Droites HA, HB, HD ; Cela posé.

Puisque le Point H, est le Centre du Cercle ABDGE, les Lignes HA, HB, HD, qui partent de ce Centre & se vont terminer à sa Circonference, sont égales entr'elles ; & puisque ces trois mesmes Lignes partent aussi d'un Point pris dans le Cercle ABCDEF, & qu'elles vont se terminer à sa Circonference, le Point H, est aussi le Centre du Cercle ABCDEF ; & ainsi il s'ensuivroit que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre auroient un mesme Centre, ce qui est impossible par la 5. Prop. Il est donc impossible que deux Cercles qui se coupent l'un l'autre se puissent couper en plus de deux Points ; Ce qu'il falloit démontrer.

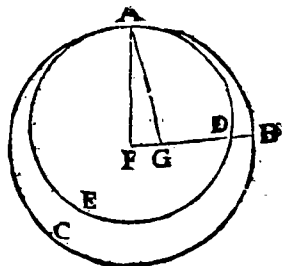
PROPOSITION XI.

THEOREME X.

Si un Cercle en touche un autre en dedans, la Ligne Droite menée par leurs Centres estant prolongée, passera par le Point de leur attouchement.

JE suppose que le Cercle ADE, touche le Cercle ABC, en dedans au Point A ; Cela estant, je dis que si on mene par leurs Centres une Ligne Droite, cette Ligne estant prolongée passera par le Point de leur attouchement ; ou ce qui est la mesme chose, que si on mene du Point F, Centre du Cercle ABC, au Point A, qui est le Point de leur attouchement, la Ligne Droite FA, le Centre du Cercle ADE, se rencontrera dans cette Ligne.

Car si cela n'estoit, le Centre du Cercle ADE, seroit en quelque Point hors de la Ligne FA ; Qu'il soit donc au Point G, s'il est possible ; En ce cas, si l'on mene par le Point F, & par le Point G, la Ligne Droite FGDB, elle coupera la Circonference des deux Cercles ailleurs qu'au Point de leur attouchement ; Puis menant du Point G, au Point A, la Ligne Droite GA, cette Ligne avec les deux autres FG, FA, composera le Triangle FGA, dont les deux Costez FG, GA, seront plus grands que le troisième FA, par la 20. du 1. Ils seront donc aussi plus grands que son égale FB ; Si donc de ces deux Tous inégaux on oste la Partie commune FG, le reste GA, sera plus grand que le reste GB ; Mais puisque le Point G, est le Centre du Cercle ADE, la Ligne GD, est égale à GA ; Et ainsi la Ligne GD, sera aussi plus grande que la Ligne GB, c'est



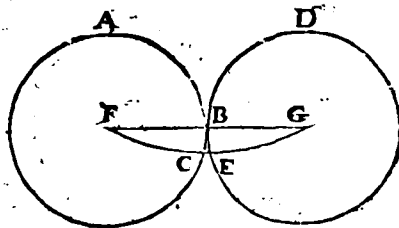
c'est à dire la Partie que le Tout ; Ce qui est impossible ; Il est donc impossible que le Centre du Cercle ADE, soit hors de la Ligne FA ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

THEOREME XI.

Si deux Cercles se touchent l'un l'autre par dehors, la Ligne Droite menée d'un Centre à l'autre passera par le Point de leur attouchement.

JE suppose que les Cercles ABC, DBE, se touchent l'un l'autre par dehors au Point B, & que du Centre de l'un au Centre de l'autre on ait mené la Ligne Droite FG ; Cela étant, je dis que cette Ligne passe par le Point de leur attouchement.



Car si cela n'estoit, elle passeroit par ailleurs ; Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les Points C, & E, & qu'ainsi la Ligne FCEG, soit une Ligne Droite ; Cela étant, les deux Lignes BF, BG, ne concourront pas directement, & ainsi feront un Angle au Point B, & avec la troisième FCEG, feront un Triangle, dont les deux Costez BF, BG, seront ensemble plus grands que le troisième FCEG, par la 20. du 1. Mais les Lignes FC, GE, sont égales à BF, BG, par la Définition du Cercle ; Donc ces mêmes Lignes FC, GE, seroient aussi plus grandes que la Ligne entière FCEG, c'est à dire la Partie que le Tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que la Ligne qui est menée par les Centres F, & G, passe par un autre Point que B ; Ce qu'il falloit démontrer.

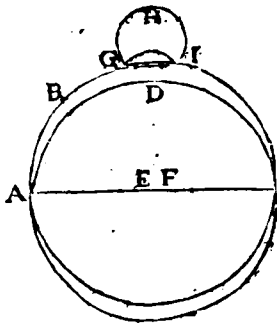
PROPOSITION XIII.

THEOREME XII.

Si un Cercle en touche un autre, soit en dedans, soit en dehors, il ne le touchera pas à plus d'un Point.

JE suppose premierement que le Cercle ADC, touche le Cercle ABC, en dedans ; Cela estant, je dis qu'il ne le touche pas à plus d'un Point.

Car si cela n'estoit, il pourroit le toucher à plus d'un Point ; Posons donc, s'il est possible, qu'il le touche aux deux Points A, & C ; Si cela est, puisque par la 6. Prop. deux Cercles dont l'un touche l'autre en dedans, n'ont pas un même Centre, les deux Cercles ABC, ADC, auront chacun leur Centre particulier, par exemple E, & F ; Et puisque par la II. Prop. la Ligne menée par les Centres de deux Cercles, dont l'un touche l'autre en dedans, estant prolongée, passe par le Point de leur attouchement, il s'ensuivra que la Ligne EF, estant prolongée de part & d'autre passera par les Points A, & C ; Ensuite dequoy, puisque le Point E, est le Centre du Cercle ABC, la Ligne EA, & la Ligne EC, sont égales ; Mais la Ligne FA, est plus grande que EA, qui n'est que sa Partie ; Donc elle est aussi plus grande que la Ligne EC ; & à plus forte raison que la Ligne FC ; D'ailleurs puisque le Point F, est le Centre du Cercle ACD, la Ligne FA, & la Ligne FC, sont aussi égales ; Si bien que les deux Lignes FA, FC, sont ensemble égales, & inégales, ce qui est impossible ; Il est donc impossible qu'un Cercle, qui en touche un autre en dedans, le touche à plus d'un Point.



Je suppose en second lieu que le Cercle GHI, touche le Cercle ABC, par dehors ; Cela estant , je dis qu'il ne le scauroit toucher à plus d'un Point.

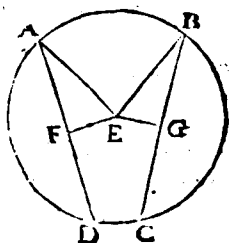
Car par exemple, s'il le pouvoit toucher aux deux Points G, & I, puisque ces deux Points seroient dans la Circonférence de ces deux Cercles, en menant du Point G, au Point I, la Ligne Droite GI, elle devroit par la 1. Prop. tomber dans l'un & dans l'autre de ces deux Cercles ; ce qui est impossible, puisque l'un est supposé hors de l'autre ; Il est donc impossible que le Cercle GHI, touche le Cercle ABC, à plus d'un Point ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME XIII.

Dans un Cercle, les Lignes Droites égales sont également distantes du Centre ; Et celles qui sont également distantes du Centre sont égales entr'elles.

JE suppose que dans le Cercle ABCD, les deux Lignes Droites AD, BC, sont égales entr'elles ; Cela estant, je dis que ces deux Lignes sont également distantes du Centre E ; C'est à dire que si du Centre E, l'on abaisse sur ces Lignes les Perpendiculaires EF, EG, par la 12. du 1. ces Perpendiculaires sont égales entr'elles ; Pour le prouver.

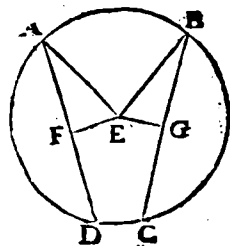


Menez les deux Lignes Droites EA, EB ; Cela posé.

Puisque les Lignes EF, EG, partent du Centre E, & qu'elles tombent perpendiculairement sur AD, & sur BC, Il s'ensuit que ces deux Lignes sont coupées par e'les en deux également, par la 3. Prop. Et partant AF, est la moitié de AD, & BG, la moitié de BC ; D'où il suit que

les deux Lignes AF, & BG, sont égales par le 7. Ax. du 1.
D'ailleurs, puisque le Triangle AFE, est Rectangle, les deux Quarrez de AF, & de FE, sont égaux au Quarré de AE, ou de son égale EB, par la 47. du 1. Mais puisque le Triangle EGB, est aussi Rectangle, les deux Quarrez de BG, & de EG, sont aussi égaux au Quarré de EB; Et partant les deux Quarrez de AF, & de FE, sont égaux aux deux Quarrez de BG, & de EG; Si donc de ces deux Tous égaux on ôte les Quarrez de AF, & de BG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont égales, les restes à sçavoir le Quarré de EF, & le Quarré de EG, seront égaux entr'eux; D'où il suit que les deux Lignes EF, EG, sont égales entr'elles; Par la 3. Remarque de la 46. du 1.

Je suppose en second lieu, que dans le mesme Cercle ABCD, les deux Lignes Droites AD, BC, sont également distantes du Centre E, C'est à dire que les Perpendiculaires EF, EG, qu'on a abaissées du Centre E, sur ces deux Lignes, sont égales; Cela estant, je dis que ces deux Lignes AD, BC, sont égales entr'elles; Pour le prouver.



Menez les deux Lignes Droites EA, EB, Cela posé.

Puisque le Triangle AEF, est Rectangle, les deux Quarrez de EF, & de FA, sont égaux au Quarré de EA, ou de son égale EB; Mais les deux Quarrez de EG, & de GB, sont aussi égaux au Quarré de EB; Donc les deux Quarrez de EF, & de FA, sont égaux aux deux Quarrez de EG, & de GB; Si donc de ces deux Tous égaux on ôte les Quarrez de EF, & de EG, qui sont égaux, puisque les deux Lignes dont ils sont les Quarrez sont supposées égales, les restes à sçavoir le Quarré de FA, & le Quarré de GB, seront égaux entr'eux; d'où il suit que les deux Lignes FA, GB, sont égales entr'elles, par la 3. Remarque de la 46. du 1. Mais par la 3. Prop. les Lignes AD, & BC, sont doubles de FA, & de GB, donc ces deux Lignes AD, &

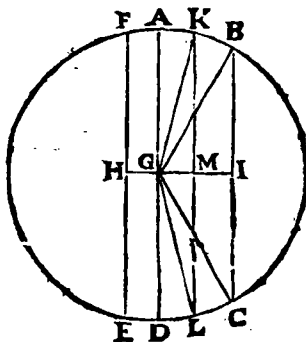
BC, sont égales entr'elles ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

THEOREME XIV.

Si on mene plusieurs Lignes Droites dans un Cercle la plus grande de toutes est le Diametre, & celle qui approche le plus près du Centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

JE suppose que dans le Cercle ABCD, on ait mené plusieurs Lignes Droites comme AD, BC, FE ; que AD, soit le Diametre, & que FE soit plus près du Centre G, que n'est la Ligne BC ; Cela estant, je dis premierement que AD, est la plus grande de toutes, Pour le prouver.



Abaissez du Centre G, sur FE, & sur BC, les Perpendiculaires GH, GI, Cela posé.

Puisque BC, est supposée plus éloignée du Centre G, que n'est pas FE, la Ligne GI, est plus grande que GH, par la 6. Definition ; Retranchez donc de GI, la Partie GM, égale à GH, & menez par le Point M, la Ligne Droite KML, Perpendiculaire à GI ; Enfin tirez les Lignes Droites KG, GB, GL, GC, Cela posé.

Au Triangle KGL, les deux Costez KG, GL, sont plus grands que le Troisième KL, par la 20. du 1 ; Or KG, & GL, sont égaux à GA, & à GD, ou au Diametre AD ; Donc le Diametre AD, est plus grand que la Ligne KL ; Mais par la Construction KL, est égale à FE, puisqu'elle est autant éloignée du Centre G, que la Ligne FE, par-

tant le Diamètre AD, est plus grand que la Ligne FE ; On prouvera de même que AD, est plus grand que BC ; Et ainsi le Diamètre du Cercle est la plus grande de toutes les Lignes qu'on peut mener dans un Cercle.

Je dis en second lieu , que la Ligne FE, ou son égale KL, qui est plus près du Centre G, que n'est pas BC, est plus grande que BC ; Pour le prouver.

Aux deux Triangles KGL, & BGC, les deux Costez KG, GL, sont égaux aux deux Costez BG, GC, chacun au sien ; Mais l'Angle KGL, est plus grand que l'Angle BGC, qui n'est que sa Partie, Donc par la 24. du 1. la Baze KL, est plus grande que la Baze BC ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

THEOREME XV.

Si on élève une Perpendiculaire à l'extrémité du Diamètre d'un Cercle elle touchera le Cercle sans le couper ; Et de l'extrémité du Diamètre on ne pourra pas mener une Ligne Droite qui soit entre la Perpendiculaire & la Circonférence. Deplus l'Angle Mixte compris de la Circonférence & du Diamètre, est plus grand que tout Angle Rectiligne Aigu ; & l'Angle Mixte, compris de la Circonférence & de la Perpendiculaire est plus petit que tout Angle Rectiligne Aigu.

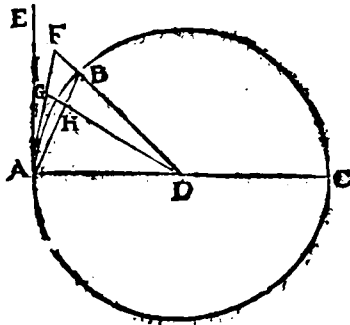
JE suppose qu'à l'extrémité A, du Diamètre AC, du Cercle ABC, on a élevé la Perpendiculaire AE ; Cela étant, je dis premièrement que cette Perpendiculaire touche le Cercle sans le couper.

Car si cette Perpendiculaire coupoit le Cercle, comme

fait icy la Ligne AB ; en menant du Centre D, au Point où cette Perpendiculaire couperoit le Cercle, par exemple au Point B, la Ligne Droite DB ; les Angles DAB, DBA, seroient égaux par la 5. du 1. Mais l'Angle DAB, est Droit, par construction, par conséquent l'Angle DBA, seroit aussi Droit ; Ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible qu'une Ligne Droite élevée perpendiculairement à l'extrémité du Diamètre d'un Cercle, coupe ce Cercle ; Et par conséquent il est vray qu'elle le touche sans le couper ; & ainsi qu'elle est hors le Cercle.

Je dis en second lieu, que de l'extrémité A, on ne peut pas mener une Ligne Droite qui soit entre la Perpendiculaire AE, & la Circonférence AB.

Car si l'on prétendoit qu'on en pût mener une, par exemple AF, comme cette Ligne ne seroit pas perpendiculaire au Diamètre AC, ce Diamètre ne luy seroit pas non



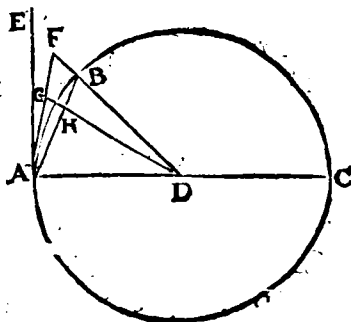
plus Perpendiculaire ; Donc en tirant du Centre D, une Ligne perpendiculaire à AF, cette Ligne tombera en quelque Point de la Ligne AF, par exemple au Point G, & ce Point sera différent du Point A, & par conséquent hors le Cercle ; D'où il s'ensuivra que la Ligne DG, qui passera au delà de la Circonférence sera plus grande que DA ; Si bien que dans le Triangle DAG, l'Angle DAG, qui est soutenu du Costé DG, sera plus grand que l'Angle DGA, qui est soutenu du Costé DA, qui est plus petit ; Or l'Angle DGA, est droit par construction, donc l'Angle DAG, sera plus grand qu'un Droit ; Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux Droits ; ce qui est impossible par la 17. du 1. Il est donc impossible de pouvoir mener du Point A, une Ligne Droite qui se trouve entre la Perpendiculaire AE, & la Circonférence AB.

Je dis en troisième lieu, que l'Angle BAD, compris de la Circonférence AB, & du Diamètre AD, est plus grand

que tout Angle Rectiligne Aigu.

Car si on mene du Point A, une Ligne Droite, & qu'on l'approche le plus près qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus grand Angle Rectiligne Aigu qu'il est possible, il s'ensuivra par ce qui vient d'estre prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec le Diametre AC, un Angle plus petit que l'Angle Mixte BAD ; Lequel par consequent est plus grand que tout Angle Rectiligne Aigu.

Je dis enfin, que l'Angle de Contingence BAE, compris de la Circonference du Cercle, & de la Perpendiculaire AE, est plus petit que tout Angle rectiligne Aigu.



Car si on mene du Point A, une Ligne Droite, & qu'on l'approche le plus près qu'il est possible de la Perpendiculaire AE, afin de faire par ce moyen le plus petit Angle Rectiligne Aigu qu'il est possible, il s'ensuivra de mesme, par ce qui a esté déjà prouvé, que cette Ligne tombera dans le Cercle, & partant qu'elle fera avec la Ligne AE, un Angle plus grand que l'Angle de Contingence BAE ; Lequel par consequent est plus petit que tout Angle Rectiligne Aigu ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



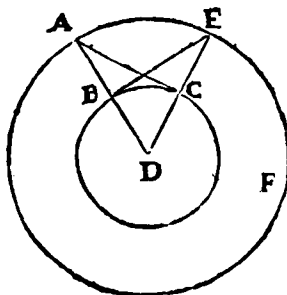
PROPOSITION XVII.

PROBLEME II.

D'un Point donné hors d'un Cercle mener une Ligne Droite qui touche le Cercle.

JE suppose qu'on donne le Point A, hors le Cercle BC, & je propose de mener du Point A, une Ligne Droite qui touche le Cercle BC ; Pour le faire.

Du Point A, au Centre D, menez la Ligne Droite AD ; & du Centre D, & de l'Intervalle DA, décrivez le Cercle AEF ; puis du Point B, où la Ligne Droite AD, coupe le Cercle BC, élevez la Ligne Droite BE, perpendiculaire à AD ; de même du Point E, où la Ligne BE, coupe le Cercle AEF, au Centre D, menez la Ligne Droite ED ; Enfin du Point A, au Point C, où la Ligne DE, coupe la Circonférence du Cercle BC, menez la Ligne Droite AC ; Cela estant, je dis que la Ligne AC, qui part du Point donné A, touche le Cercle BC ; Pour le prouver.



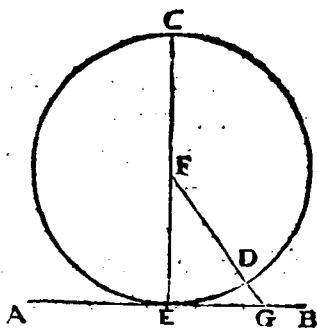
Les Triangles ADC, EDB, ont les deux Costez AD, DC, égaux aux deux Costez ED, DB, chacun au sien, & l'Angle D, compris de ces Costez égaux est commun ; Donc par la 4. du 1. la Baze est égale à la Baze, & l'Angle ACD, est égal à l'Angle EBD ; Or l'Angle EBD, est Droit par construction ; donc l'Angle ACD, est aussi Droit ; Et partant par la Proposition précédente, la Ligne AC, qui est élevée perpendiculairement à l'extrémité du Diametre DC, touche le Cercle BC ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVI.

Si une Ligne Droite touche un Cercle, & que du Centre à l'attouchement on mene une autre Ligne Droite, cette Ligne sera Perpendiculaire à la Touchante.

JE suppose que la Ligne Droite AB, touche le Cercle EDC, au Point E, & que du Centre F, on mene au Point de l'attouchement E, la Ligne Droite FE; Cela estant, je dis que la Ligne FE, est Perpendiculaire à la Touchante AB.



Car si FE, n'estoit pas Perpendiculaire à AB, on pourroit par la 12. du 1. du Point F, abaisser sur AB, une Perpendiculaire, comme FG, laquelle, allant rencontrer la Ligne AB, en un autre Point que celui de l'attouchement, passera au delà de la Circonference du Cercle, & par consequent sera plus grande que FD, qui est bornée à cette Circonference, ou que son égale FE. Si bien que dans le Triangle FEG, l'Angle FEG, qui est soutenu du Costé FG, sera plus grand que l'Angle FGE, qui est soutenu du Costé FE, qui est plus petit; Or l'Angle FGE, est Droit, par cette fausse construction; Donc l'Angle FEG, sera plus grand qu'un Droit; Et ainsi deux Angles d'un Triangle vaudroient plus de deux Droits; ce qui est impossible, par la 17. du 1. Il est donc impossible que la Ligne FE, ne soit pas Perpendiculaire à AB, Ce qu'il falloit démontrer.

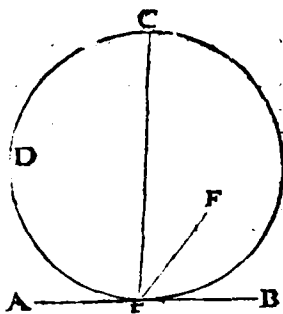
PROPOSITION XIX.

THEOREME XVII.

Si une Ligne Droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on élève une Perpendiculaire, elle passera par le Centre.

JE suppose que la Ligne Droite AB, touche le Cercle CDE, au Point E, & que de ce Point on élève la Ligne Droite EC, Perpendiculaire à AB ; Cela estant, je dis que cette Ligne passe par le Centre, ou ce qui est la mesme chose, que le Centre du Cercle se rencontre dans la Ligne EC.

Car si cela n'estoit, le Centre de ce Cercle seroit en quelque Point hors de cette Ligne, par exemple, au Point F ; Tirant donc de ce Point à celui de l'attouchement la Ligne Droite FE ; cette Ligne, par la Proposition precedente, sera Perpendiculaire à AB ; Et partant l'Angle AEF, sera Droit ; mais l'Angle AEC, est déjà Droit, par Supposition ; ainsi l'Angle AEF, seroit égal à l'Angle AEC, c'est à dire le tout à sa Partie ; ce qui est impossible ; Il est donc impossible que le Centre du Cercle CDE, soit hors de la Ligne EC ; Laquelle par consequent passe par le Centre ; Ce qu'il falloit démontrer.

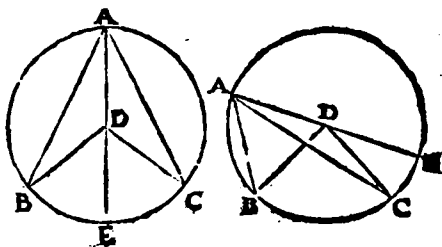


PROPOSITION XX.

THEOREME XVIII.

Au Cercle, l'Angle du Centre est double de l'Angle de la Circonférence, quand ils s'appuyent tous deux sur un mesme Arc, où qu'ils ont une mesme Portion de Circonférence pour Baze.

JE suppose que dans le Cercle ABC, l'Angle BDC, qui est au Centre D, & l'Angle BAC, qui est à la Circonférence s'appuyent tous deux sur un mesme Arc, & ont la mesme portion de Circonférence pour Baze, à sçavoir BC ; Cela estant, je dis que l'Angle BDC, est double de l'Angle BAC ; Pour le prouver.



Menez par les Points A, & D, la Ligne Droite ADE ; Cela posé.

Au Triangle ADB, les deux Costez DA, DB, sont égaux, par la Definition du Cercle ; Donc par la 5. du 1. les deux Angles DAB, & DBA, sont égaux entr'eux ; Or l'Angle extérieur BDE, est égal aux deux Angles DAB, & DBA, par la 32. du 1. donc l'Angle BDE, est double de l'Angle BAD ; de mesme, au Triangle ADC, les deux Costez DA, DC, sont égaux, par consequent les deux Angles DAC, & DCA, sont aussi égaux ; Or l'Angle EDC, est aussi égal aux deux Angles DAC, & DCA ; donc il est double de l'Angle DAC ; Si donc à l'Angle BDE, on ajoute l'Angle EDC, & à l'Angle BAD, on ajoute l'Angle DAC, l'Angle BDC, sera double de l'Angle BAC ; par le 19. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

LIVRE TROISIEME. 137

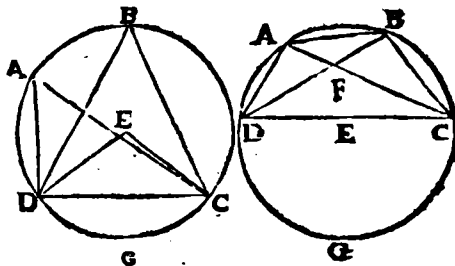
Que si le Point A, avoit esté pris comme dans cette seconde Figure, on auroit prouvé de mesme, que l'Angle BDE, est double de l'Angle BAD, & que l'Angle CDE, est double de l'Angle CAD ; Ensuite dequoy ôstant l'Angle CAD de l'Angle BAD, & l'Angle CDE, de l'Angle BDE, l'Angle restant BDC, sera double de l'Angle restant BAC, par le 20. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XIX:

Au Cercle, les Angles qui sont dans un mesme Segment, ou qui s'appuyent sur un mesme Arc, sont égaux entr'eux.

JE suppose que dans le Cercle ABCD, les deux Angles DAC, DBC, soient dans le mesme Segment DABC, ou, (ce qui est la même chose) qu'ils s'appuyent tous deux sur le mesme Arc DGC ; Cela estant, je dis que ces deux Angles DAC, DBC, sont égaux entr'eux. Pour le prouver.



Comme tout Segment de Cercle est plus ou moins grand qu'un Demy-cercle; Supposons premierement que le Segment DABC, soit plus grand que le Demy-cercle ; Cela supposé, menez du Centre E, aux extremités de la Baze du Segment D, & C, les Lignes Droittes ED, EC ; Cela posé.

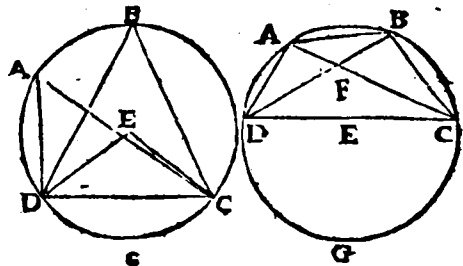
L'Angle DEC, qui est au Centre est double de l'Angle DAC, qui est à la Circonference, par la Prop. precedente, & par la mesme raison il est aussi double de l'Angle DBC ; Et partant les deux Angles DAC, & DBC, qui sont cha-

cun moitié d'un même Angle, sont égaux entr'eux.

Supposons en second lieu, que le Segment DABC, soit plus petit que le Demy-cercle ; Cela supposé, du Point A, au Point B, menez la Ligne Droite AB ; Cela posé.

Puisque le Segment DABC, est plus petit que le Demy-cercle, il s'ensuit que le Segment DGC, est plus grand que le Demy-cercle, & à plus forte raison le Segment AGB ; D'où il suit que les Angles

ADB, ACB, qui sont dans le Segment AGB, sont égaux entr'eux, par ce qui vient d'estre prouvé. D'ailleurs, les Angles AFD, BFC, sont aussi égaux entr'eux, par la 15. du 1. Par conséquent les deux Triangles AFD, BFC, ont deux Angles égaux à deux Angles chacun au sien ; Et partant le troisième DAF, ou DAC, est égal au troisième FBC, ou DBC, par le 2. Corollaire de la 32. du 1 ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXII.

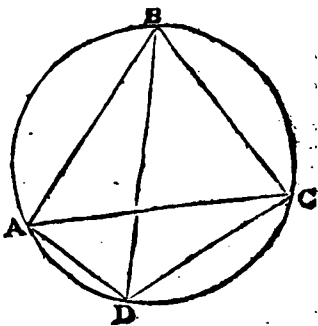
THEOREME XX.

Les Figures de quatre Costez inscrites au Cercle, ont les Angles Opposez égaux à deux Droits.

JE suppose que la Figure ABCD, soit inscrite dans le Cercle ABCD ; Cela estant, je dis que les Angles Opposez, comme BAD, & BCD, sont égaux à deux Droits ; Pour le prouver.

Menez les deux Lignes Droites AC, & BD ; Cela posé.

L'Angle BAC, & l'Angle BDC,



LIVRE TROISIÈME. 139

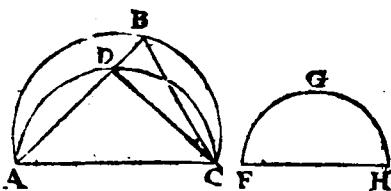
s'appuyent sur le même Arc BC, donc ils sont égaux, par la Proposition précédente ; L'Angle CAD, & l'Angle CBD, s'appuyent aussi sur un même Arc, à sçavoir DC, donc ils sont aussi égaux ; Partant les deux Angles BAC, & CAD, ou l'Angle total BAD, est égal aux deux Angles DBC, & BDC ; Mais ces deux Angles, pris avec le troisième BCD, valent deux Droits par la 32. du 1. Donc l'Angle BAD, pris avec le même Angle BCD, valent aussi deux Droits ; On prouvera par la même raison que les deux Angles ABC, & ADC, sont égaux à deux Droits ; Qui est ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXI.

*Si deux Portions de Cercles sont semblables & inégales
leurs Bases ne seront pas égales.*

IE suppose que les deux Portions de Cercles ABC, FGH, soient semblables & inégales ; Cela étant, je dis que leurs Bases AC, FH, ne sont pas égales.



Car si ces Bases estoient égales en transportant par pensée le Segment ou portion de Cercle FGH, sur le Segment ABC, on pourroit faire convenir la Base FH, avec la Base AC ; Et d'autant que le Segment FGH, est supposé inégal au Segment ABC, l'Arc FGH, ne conviendrait pas avec l'Arc ABC ; C'est pourquoy l'Arc FGH, tomberoit en quelqu'autre endroit, comme par exemple à l'endroit ADC ; Tirant donc la Ligne Droite ADB, qui coupe ces Arcs aux Points D, & B, & menant les Lignes Droites CB, CD, il s'ensuivra que puisque les Segmens ADC,

ABC, sont supposez semblables, les Angles ADC, ABC, qui sont dans ces Segmens seront égaux entr'eux, par la definition des Segmens semblables ; Et ainsi l'Angle ADC, qui est extérieur au respect du Triangle DBC, seroit égal à son Opposé Interieur DBC ; Ce qui est impossible par la 16. du 1. Donc si deux Portions de Cercles sont semblables & inégales, leurs Bazes ne seront pas égales ; Ce qu'il falloit démontrer.

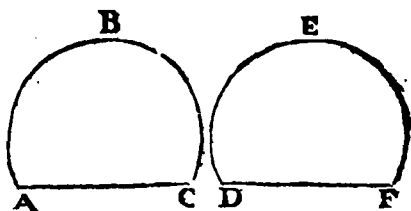
PROPOSITION XXIV.

THEOREME XXII.

Si deux Segmens, ou deux Portions de Cercles, semblables, ont pour Bazes des Lignes Droites égales, ils seront égaux entr'eux.

IE suppose que les deux Segmens ABC, DEF, soient semblables, & que leurs Bazes AC, DF, soient égales ; Cela estant, je dis que ces deux Segmens sont égaux entr'eux.

Car s'ils estoient Inégaux, il s'ensuivroit que deux Segmens semblables & inégaux auroient des Bazes égales ; Ce qui est impossible par la Prop. precedente ; Donc ces deux Segmens sont égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

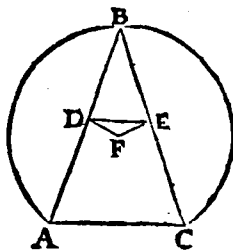


PROPOSITION XXV.

PROBLEME III.

Une Portion de Cercle estant donnée décrire le Cercle duquel elle est Portion.

JE suppose que la Portion de Cercle ABC, soit donnée, & je propose de décrire le Cercle entier, duquel elle est Portion ; c'est à dire que je propose de trouver le Centre du Cercle, duquel la Portion ABC, est donnée ; Pour le faire.



Prenez à discretion dans la Circonference ABC, trois Points, par exemple A, B, C ; Menez les deux Lignes Droites AB, BC ; Coupez chacune de ces Lignes en deux également aux Points D, & E ; De chacun de ces Points élevez une Perpendiculaire, sçavoir DF, EF ; Cela estant, je dis que ces deux Perpendiculaires se rencontreront ; & que le Point de leur Rencontre, à sçavoir F, est le Centre du Cercle, dont ABC, est une Portion ; Pour le prouver.

Du Point D, au Point E, menez la Ligne Droite DE, Cela posé.

Puisque les Angles BDF, & BEF, sont Droits, par construction, les Angles EDF, & DEF, qui n'en sont que les parties sont moindres que deux Droits ; Et partant les deux Lignes DF, EF, se doivent rencontrer, par la Remarque de la 28. 1. Ensuite dequoy, il s'ensuit par la 1. Remarque de la premiere Prop. de ce Livre, que le Point F, est le Centre cherché ; Ce qu'il falloit démontrer.

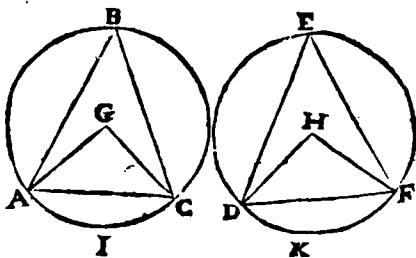


PROPOSITION XXVI.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles Egaux , les Angles Egaux s'appuyent sur Circonférences Egales , soit qu'ils soient constituez au Centre, ou à la Circonférence.

IE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux , & que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez au Centre , ou les Angles ABC, DEF, qui sont constituez à la Circonférence , soient aussi égaux entr'eux ; Cela estant , je dis que les Arcs AIC, DKF, sur lesquels ces Angles s'appuyent , sont égaux entr'eux ; Pour le prouver.



Menez les Lignes Droites AC, DF ; Cela posé.

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux, Il s'ensuit que les Costez AG, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Costez DH, HF, du Triangle DHF, Deplus l'Angle AGC, est supposez égal à l'Angle DHF ; Partant la Baze AC, est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ainsi nous avons deux Segmens de Cercles ABC, DEF, qui sont semblables , puisqu'ils sont supposez capables d'Angles égaux ; & qui d'ailleurs ont pour Bazes des Lignes Droites égales , sçavoir AC, DF ; Et partant ces deux Segmens sont égaux , par la 24. Prop. D'où il suit que si on les oste des deux Cercles entiers qui sont supposez égaux , les Arcs restans AIC, DKF, seront égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.



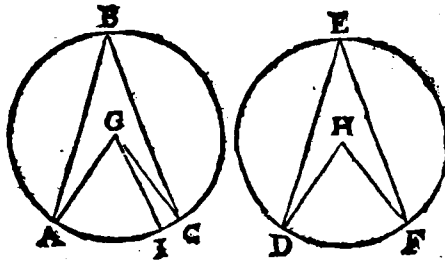
PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXIV.

Aux Cercles Egaux , les Angles qui s'appuyent sur Circonférences Egales sont égaux entr'eux , soit qu'ils soient constituez au Centre , ou à la Circonférence.

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Arcs AC, DF, soient aussi égaux ; Cela estant, je dis premierement que les Angles AGC, DHF, qui sont constituez aux Centres G, & H, & qui s'appuyent sur ces deux Arcs sont égaux entr'eux.

Car s'ils n'estoient pas égaux, il faudroit que l'un de ces Angles fust plus grand que l'autre ; Posons donc que ce soit l'Angle AGC ; si cela est, par la 23. du 1. on pourra en retrancher une partie, comme AGI, égale à DHF ; Ensuite dequoy, par la Prop. precedente, l'Arc AI, sera égal à l'Arc DF ; Mais l'Arc AC, est déjà supposé égal à l'Arc DF ; Ainsi l'Arc AI, & l'Arc AC, seroient égaux entr'eux, c'est à dire la Partie au Tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que l'Angle AGC, soit plus grand que l'Angle DHF ; On prouvera de mesme que l'Angle DHF, n'est pas plus grand que l'Angle AGC ; Et partant ces deux Angles sont égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je dis en second lieu , que les Angles ABC, DEF, qui sont à la Circonférence , & qui s'appuyent sur ces mêmes Arcs , sont égaux entr'eux.

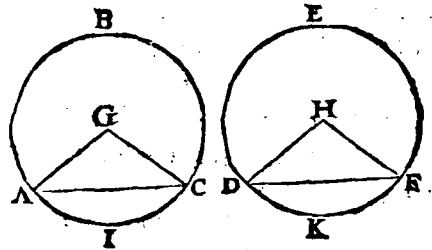
Car par la 20. Prop. ces deux Angles ABC, DEF, sont moitié des Angles AGC, DHF, qui viennent d'estre prouvez égaux ; Et partant les deux Angles ABC, DEF, sont égaux entr'eux, par le 7. Ax. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME XXV.

Aux Cercles Egaux les Lignes Droites Egales soustiennent Circonférences Egales.

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Lignes AC, DF, qui sont les Soustendantes des Arcs AIC, & DKF, soient égales ; Cela estant, je dis que les Arcs AIC, & DKF, sont égaux entr'eux. Pour le prouver.



Menez des Centres G, & H, les Lignes Droites GA, GC ; HD, HF ; Cela posé.

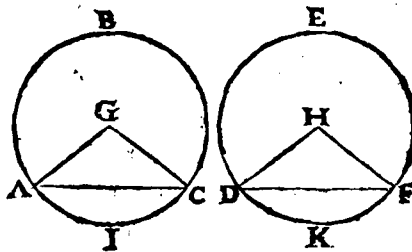
Les Costez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux Costez HD, HF, du Triangle DHF, par la Definition des Cercles égaux. Deplus la Baze AC, est égale à la Baze DF, par supposition, donc l'Angle AGC, est égal à l'Angle DHF, par la 8, du 1 ; D'où il suit par la 26. Prop. que les Arcs AIC, & DKF, sur lesquels ils s'appuyent sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer,

PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXVI.

*Aux Cercles Egaux les Circonférences Egales ont
ont leurs Soutendantes égales.*

JE suppose que les Cercles ABC, DEF, soient égaux, & que les Arcs ou Circonférences AIC, DKF, soient aussi égales ; Cela estant, je dis que les Lignes AC, & DF, qui en sont les Soutendantes sont égales entr'elles ; Pour le prouver.



Menez des Centres G, & H, les Lignes Droites GA, GC ; HD, HF, Cela posé.

Puisque les Cercles ABC, DEF, sont supposez égaux, les deux Costez GA, GC, du Triangle AGC, sont égaux aux deux Costez HD, HF, du Triangle DHF ; D'ailleurs l'Angle AGC, compris des deux Costez du premier Triangle, est égal à l'Angle DHF, compris des deux Costez du second, puisque les Arcs, sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux par supposition ; Et partant la Baze AC, est égale à la Baze DF, par la 4. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.



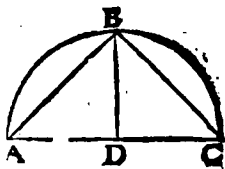
PROPOSITION XXX.

PROBLEME IV.

Couper en deux également un Arc de Cercle donné.

JE suppose que l'Arc de Cercle ABC, soit donné ; & je propose de le couper en deux parties égales ; Pour le faire.

Du Point A au Point C, menez la Ligne Droite AC, coupez cette Ligne en deux également au Point D, Elevez au Point D, la Perpendiculaire DB, qui rencontre l'Arc au Point B ; Cela étant, je dis que cet Arc est coupé en deux également , c'est à dire que l'Arc AB, est égal à l'Arc BC ; Pour le prouver.



Menez les Lignes Droites AB, BC ; Cela posé.

Le Costé AD, du Triangle ABD, est égal au costé DC, du Triangle CDB, par construction ; Le Costé BD, est commun à ces deux Triangles ; Deplus l'Angle ADB, est égal à l'Angle CDB, par construction ; Donc la Baze AB, est égale à la Baze BC, par la 4. du 1. Et par consequent les Arcs AB, BC, que ces deux Bazes soutiennent, sont égaux entr'eux , par la 28. Prop. Ce qu'il falloit faire & démontrer.

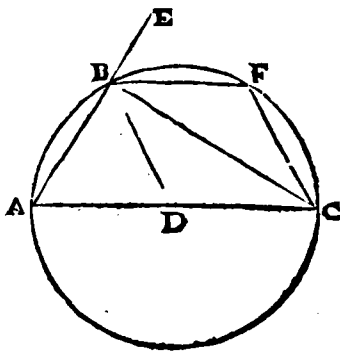


PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXVII.

Au Cercle, l'Angle qui est au Demy-cercle est droit ; celui qui est au plus grand Segment est plus petit qu'un Droit ; & celui qui est au plus petit Segment est plus grand qu'un Droit ; Deplus, l'Angle du plus grand Segment est plus grand qu'un Droit ; Et l'Angle du plus petit Segment est plus petit qu'un Droit.

JE suppose qu'au Cercle ABC, D soit le Centre, & ADC, le Diametre, & qu'ayant pris dans le Demy-cercle le Point B, à discretion, on ait mené de ce Point aux extremitéz du Diametre les deux Lignes Droites BA, BC, qui font l'Angle au Demy-cercle ABC ; Cela estant, Je dis premierement que l'Angle ABC, est Droit ; Pour le prouver.



Menez du Point D, au Point B, la Ligne Droite DB, & continuez la Ligne AB, vers E ; Cela posé.

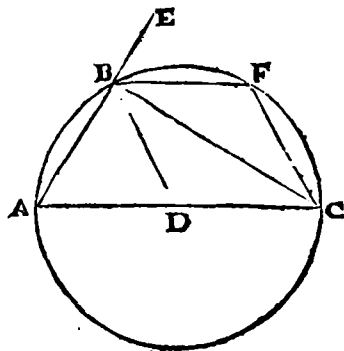
Au Triangle ABD, les Costez DA, DB, sont égaux, par la definition du Cercle ; Donc l'Angle ABD, est égal à l'Angle BAD, par la 5. du 1. De mesme, au Triangle DBC, les Costez DB, DC, estant égaux, l'Angle DBC, est égal à l'Angle BCD ; Et ainsi l'Angle total ABC, est égal aux deux Angles BAD, BCD ; D'ailleurs, l'Angle extérieur EBC, est égal à ces deux mesmes Angles BAC, BCD, parla 32. du 1. Partant l'Angle ABC, & l'Angle EBC, sont égaux entr'eux ; Et par conséquent la Ligne BC, est perpendiculaire à AE, & l'Angle ABC, est Droit ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle BAC, qui est au plus grand Segment CAB, est plus petit qu'un Droit. Pour le prouver.

Au Triangle ABC, les deux Angles ABC, & BAC, sont plus petits que deux Droits, par la 17. du 1. Or il vient d'estre prouvé que l'Angle ABC, est Droit ; Donc l'Angle BAC, est moindre qu'un Droit ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en troisième lieu, que l'Angle BFC, qui est au plus petit Segment CFB, est plus grand qu'un Droit. Pour le prouver.

La Figure de quatre Costez ABFC, est inscrite au Cercle, & ainsi les deux Angles opposéz BAC, & BFC, sont égaux à deux Droits, par la 22. Prop. Mais il vient d'estre prouvé que l'Angle BAC, est moindre qu'un Droit, donc l'Angle BFC, est plus grand qu'un Droit. Ce qu'il falloit encore démontrer.



Je dis en quatrième lieu, que l'Angle du plus grand Segment, c'est à dire l'Angle Mixte CBA, qui est compris de la Ligne Droite BC, & de la Circonference BA, est plus grand qu'un Droit ; Pour le prouver.

L'Angle Mixte CBA, est plus grand que l'Angle Rectiligne ABC, qui n'est que sa partie ; Or l'Angle ABC, est Droit, comme l'on vient de prouver ; donc l'Angle Mixte CBA, est plus grand qu'un Droit ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis enfin que l'Angle du plus petit Segment, c'est à dire l'Angle Mixte CBF, qui est compris de la Ligne Droite CB, & de la Circonference BF, est plus petit qu'un Droit ; Pour le prouver.

L'Angle Mixte CBF, est plus petit que l'Angle Rectiligne CBE, dont il n'est que partie ; Or l'Angle CBE, est Droit, comme l'on vient de prouver, donc l'Angle Mixte CBF,

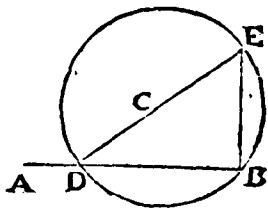
CBF, est plus petit qu'un Droit, Ce qui restoit à démontrer.

Remarque.

Cette Proposition nous donne un moyen facile pour élever une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne Droite donnée.

Supposons que la Ligne Droite donnée soit AB, & qu'à son extrémité B, il faille élever une Perpendiculaire ; Pour le faire.

Prenez quelque Point, comme C, audessus de la Ligne AB, puis du Point C, comme Centre, & de l'Intervalle CB, décrivez le Cercle EBD, ce Cercle coupera la Ligne AB, en quelque'autre Point, comme D ; Par ce Point D, & par le Centre C, menez la Ligne Droite DCE ; Enfin du Point E, au Point B, menez la Ligne Droite EB, & cette Ligne sera Perpendiculaire à AB ; Car puisque l'Angle B, est au Demy-cercle, Il est Droit.

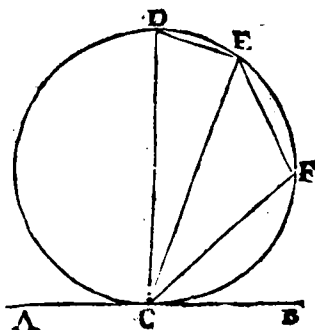


PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXVIII.

Si une Ligne Droite touche un Cercle, & que du Point de l'attouchement on mene une Ligne Droite qui le coupe, l'Angle que fait de part & d'autre la Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne est capable.

JE suppose que la Ligne AB, touche le Cercle CDE, au Point C, & que de ce Point on a mené la Ligne Droite CE, qui coupe le Cercle en deux Segmens, sçavoir CDE, & CFE ; Cela estant, je dis premierement que l'Angle BCE, que la Coupante faite d'une part avec la Touchante, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CDE, est capable ; Pour le prouver.



Elevez au Point C, la Ligne CD, perpendiculaire à AB, & du Point D, au Point E, menez la Ligne Droite DE, laquelle fera avec CD, l'Angle CDE, dont le Segment CDE, est capable ; Si bien qu'il s'agit de montrer que l'Angle CDE, est égal à l'Angle BCE ; Pour le prouver.

Puisque la Ligne AB, touche le Cercle, & que CD, a esté élevée perpendiculairement au Point de l'attouchement, Il s'ensuit par la 19. Prop. qu'elle passe par le Centre, & par conséquent qu'elle en est le Diametre, & que le Segment CFED, est un Demy-cercle ; d'où il suit que l'Angle CED, qui est au Demy-cercle est droit par la 18. Prop. Et d'autant que les trois Angles du Triangle CDE, sont égaux à deux Droits, par la 32. du 1. Il s'ensuit que les deux Angles CDE, & DCE, sont égaux à un Droit, c'est à dire à l'Angle BCD ; Si donc de ces deux Tous qui

sont égaux on ôste l'Angle DCE, qui leur est commun, il restera l'Angle BCE, égal à l'Angle CDE ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que l'Angle ACE, que la Coupante CE, fait avec la Touchante AB, est égal à l'Angle dont le Segment alterne CFE, est capable, c'est à dire que si dans l'Arc CFE, on prend à discrétion quelque Point comme F, d'où l'on mene les Lignes Droites FC, FE, l'Angle ACE, sera égal à l'Angle CFE ; Pour le prouver.

La Figure de quatre Costez CDEF, estant inscrite au Cercle, les deux Angles opposés CDE, CFE, sont égaux à deux Droits, par la 22. Prop. Mais les Angles ACE, BCE, sont aussi égaux à deux Droits par la 31. du 1. Partant les deux Angles CDE, CFE, sont égaux aux deux Angles BCE, ADE ; Si donc de ces deux Tous qui sont égaux, on ôste les Angles CDE, & BCE, qui viennent d'estre prouvez égaux, l'Angle restant CFE, sera égal à l'Angle restant ACE ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

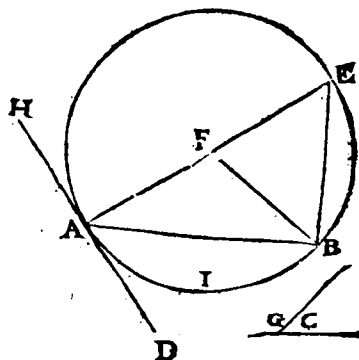
PROBLEME V.

Sur une Ligne Droite donnée, décrire une portion de Cercle capable d'un Angle Egal à un Angle Rectiligne donné.

JE suppose que la Ligne Droite AB, soit donnée, & que l'Angle Rectiligne C, soit aussi donné ; & je propose de décrire sur AB, une portion de Cercle capable d'un Angle Egal à l'Angle C ; Pour le faire.

Menez la Ligne Droite HAD, qui fasse avec AB, l'Angle BAD, égal à l'Angle C ; Elevez au Point A, la Ligne AE, perpendiculaire à HD ; Puis tirez du Point B, la Ligne Droite BF, qui fasse avec AB, l'Angle ABF, égal à l'Angle FAB ; Enfin du Centre F, & de l'Intervalle FA, décrivez un Cercle,

Cela estant, je dis que la Circonference de ce Cercle passera par le Point B, & que le Segment AEB, sera capable d'un Angle égal à l'Angle C, c'est à dire qu'ayant mené la Ligne BE, l'Angle AEB, sera égal à l'Angle C ; Pour le prouver.



Puisque les Angles FAB, FBA, sont égaux, par construction, les deux Costez FA, FB, qui les soutiennent sont aussi égaux par la 6. du 1. D'où il suit que la Circonference du Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'Intervalle FA, passe aussi par le Point B ; D'ailleurs puisque la Ligne AFE, passe par le Centre F, du Cercle AEB ; Il s'ensuit qu'elle en est le Diametre, & puisque la Ligne HAD, luy est perpendiculaire, il s'ensuit que cette Ligne HAD, touche ce Cercle, par la 16. Prop. Or la Ligne AB, part du Point de l'attouchement & coupe le mesme Cercle ; Donc par la Proposition precedente, l'Angle BAD, qu'elle fait avec la Touchante est égal à l'Angle AEB, dont le Segment alterne AEB, est capable ; Mais l'Angle BAD, a esté fait égal à l'Angle C, donc l'Angle AEB, est aussi égal à l'Angle C ; Ce qu'il falloit démontrer.

Si l'Angle donné eust esté Obtus, comme l'Angle G, il auroit toujours fallu faire la mesme construction que cy-dessus ; Mais au lieu de prendre la Portion AEB, il auroit fallu prendre la Portion AIB, comme estant celle qui est capable d'un Angle Egal à l'Angle donné G.

Si l'Angle donné eust esté droit, il n'auroit fallu que décrire un Demy-cercle sur la Ligne donnée AB, Car le Demy-Cercle est capable d'un Angle Droit, par la 31. Prop. Ainsi dans tous les cas possibles nous avons sur une Ligne Droite donnée décrit un Segment, ou une portion de Cercle, capable d'un Angle Rectiligne donné ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

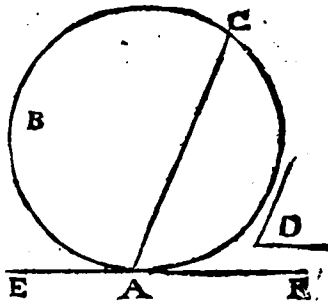
PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME VI.

D'un Cercle donné, retrancher un Segment capable d'un Angle Egal à un Angle Rectiligne donné.

JE suppose que le Cercle ABC, soit donné, & que l'Angle Rectiligne D, soit aussi donné ; Et je propose de retrancher du Cercle ABC, un Segment capable d'un Angle Egal à l'Angle D ; Pour le faire.

Menez la Ligne Droite EAF, qui touche le Cercle au Point A ; Puis par la 23. du 1. tirez du Point A, dans le Cercle la Ligne Droite AC, qui fasse avec AF, l'Angle FAC, égal à l'Angle D ; Cela estant, je dis que le Segment ABC, est capable d'un Angle Egal à l'Angle Rectiligne donné D ; Pour le prouver.



Par la 23. Prop. l'Angle dont le Segment ABC, est capable est égal à l'Angle FAC ; Or par la construction l'Angle FAC, est égal à l'Angle D ; Partant l'Angle dont le Segment ABC, est capable est égal à l'Angle D ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



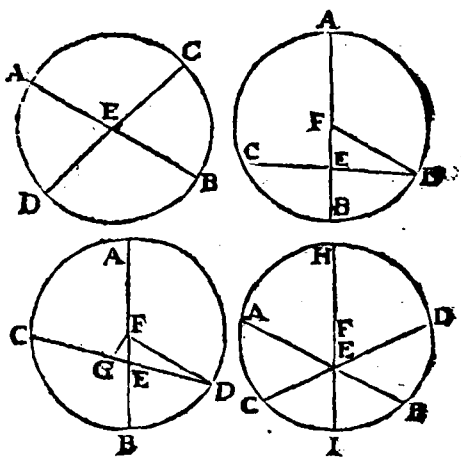
PROPOSITION XXXV.

THEOREME XXIX.

Si dans un Cercle deux Lignes Droites se coupent l'une l'autre, le Rectangle compris des deux Parties de l'une, est égal au Rectangle compris des deux Parties de l'autre.

JE suppose que dans le Cercle ACBD, les deux Lignes Droites AB, CD, se coupent l'une l'autre au Point E, Cela estant, je dis que le Rectangle compris des deux Parties AE, EB, de la Ligne AB, est égal au Rectangle compris des deux Parties CE, ED, de la Ligne CD.

Cette Prop. peut avoir quatre cas ; Car premierement il se peut faire que les deux Lignes qui s'entre-coupent passent par le Centre ; Secondement il se peut faire qu'il n'y en ait qu'une qui y passe, & qu'elle coupe l'autre en deux Parties égales ; Troisièmement il se peut faire que celle qui passe par le Centre coupe l'autre en deux Parties Inégales ; Enfin il se peut faire que ny l'une ny l'autre ne passe par le Centre.



Supposons donc 1. que les deux Lignes AB, CD, passent par le Centre ; Cela posé, comme les deux Parties AE, EB, sont égales aux deux Parties CE, ED, par la Definition du Cercle, il est évident que le Rectangle compris des deux premieres, est égal au Rectangle compris des deux autres.

Supposons en second lieu que la Ligne AB, passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui ny passe point, en deux Parties égales ; Cela estant, je dis que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED ; Pour le prouver.

Menez du Centre F, au Point D, la Ligne Droite FD ; Cela posé.

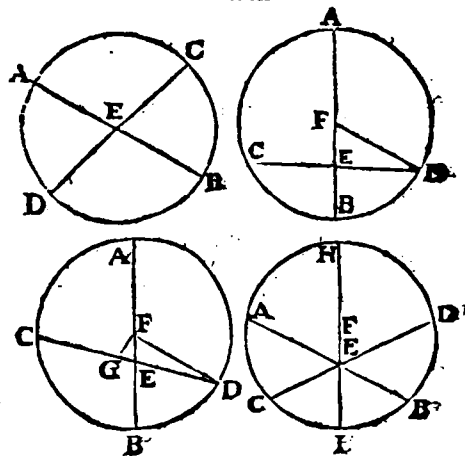
Puisque la Ligne AB, est coupée en deux également au Point F, & en deux inégalement au Point E ; Il s'ensuit par la 5. Prop. du 2. que le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal au Quarré de FB, ou de son égale FD ; Mais puisque FE, qui passe par le Centre, coupe CD, en deux également, elle la coupe aussi perpendiculairement par la 3. Proposition donc l'Angle FED, est Droit ; Par conséquent par la 47. du 1. les deux Quarrez de FE, & de ED, sont égaux au Quarré de FD ; Et ainsi le Rectangle compris de AE, EB, avec le Quarré de FE, est égal aux deux Quarrez de FE, & de ED ; Si donc de ces deux Tous qui sont égaux, on oste le Quarré de FE, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AE, EB, égal au Quarré de ED ; Mais puisque les Lignes CE, ED, sont égales, le Quarré de ED, n'est autre chose que le Rectangle, compris de CE, ED ; Et partant le Rectangle compris de AE, EB, est égal au Rectangle compris de CE, ED.

Supposons en troisième lieu, que la Ligne AB, passe par le Centre F, & qu'elle coupe CD, qui ny passe point, en deux Parties inégales ; Cela estant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED ; Pour le prouver.

Abaissez du Centre F, la Ligne FG, Perpendiculaire à CD ; au moyen dequoy, la Ligne CD, sera divisée en deux également, par la 3. Prop. Puis du Point F, au Point D, menez la Ligne Droite FD ; Cela posé.

Puisque AB. est coupée en deux Parties égales au Point F, & en deux Inégales au Point E, il s'ensuit par la 5. Prop. du 2. que le Rectangle de AE, EB, avec le Quarré de FE,

est égal au Carré de FB, ou de son égale FD; Mais par la 47. du 1. le Carré de FE, est égal aux deux Carrés de FG, & de GE; De même, le Carré de FD, est égal aux deux Carrés de FG, & de GD; Si donc au lieu du Carré de FE, on prend les deux Carrés de FG, & de GE; Et au lieu du Carré de FD, on prend les deux Carrés de FG, & de GD, il s'en suivra que le Rectangle de AE, EB, avec les deux Carrés de FG, & de GE, sera égal aux deux Carrés de FG, & de GD; Et partant ôtant de ces deux Tous qui sont égaux le Carré de FG, qui leur est com-



mun, Il restera le Rectangle compris de AE, EB, avec le Carré de GE, qui sera égal au Carré de GD; D'ailleurs puisque CD, est coupée en deux Parties égales au Point G, & en deux Inégales au Point E, le Rectangle de CE, ED, avec le Carré de GE, est égal au Carré de GD, par la 5. Prop. du 2. Et ainsi le Rectangle de AE, EB, avec le Carré de GE, est égal au Rectangle de CE, ED, avec le Carré de GE; Ôtant donc le Carré de GE, qui leur est commun; Il s'en suivra que le Rectangle de AE, EB, sera égal au Rectangle de CE, ED.

Supposons enfin que ny l'une ny l'autre de ces deux Lignes AB, CD, ne passe par le Centre; Cela étant, je dis encore que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de CE, ED; Pour le prouver.

Menez par le Centre F, & par le Point E, la Ligne Droite HFEI; Cela posé.

De quelque façon que la Ligne HI, coupe AB, Il s'en suit par ce qui vient d'être démontré que le Rectangle de AE, EB, est égal au Rectangle de HE, EI; De même
aussi

LIVRE TROISIEME. 157

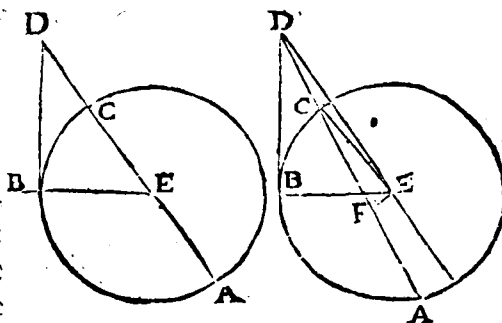
aussi de quelque façon que HI, coupe CD, Il s'ensuit que le Rectangle de DE, EC, est égal au mesme Rectangle de HE, EI ; Et ainsi le Rectangle de AE, EB, & le Rectangle de DE, EC, qui sont égaux à un mesme Rectangle, sont égaux entr'eux ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME XXX.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on tire deux Lignes Droites, dont l'une le touche, & l'autre le coupe, & se va terminer à Sa Circonference concave, le Rectangle compris de toute la Coupante, & de sa Partie hors du Cercle, sera égal au Quarré de la Touchante.

JE suppose qu'on ait pris à discretion le Point D, hors du Cercle ABC, & que de ce Point on ait tiré la Ligne Droite DB, qui touche le Cercle au Point B, & la Ligne Droite DA, qui le coupe, & va se terminer à sa Circonference concave ; Cela estant, je dis que le Rectangle compris de AD, DC, est égal au Quarré de DB.



Cette Proposition peut avoir deux cas ; Car ou la Ligne DA, passe par le Centre, ou elle n'y passe point.

Supposons donc 1. qu'elle passe par le Centre ; Cela supposé.

Menez du Centre E, au Point B, la Ligne Droite EB ;

X

158 ELEMENS D'EUCLIDE.

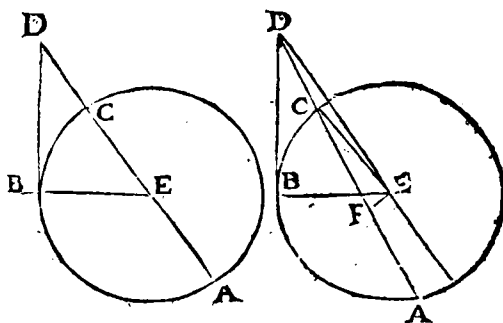
Cette Ligne par la 18. Prop. sera Perpendiculaire à la Touchante DB ; D'où il suit que l'Angle EBD, sera Droit ; Cela posé.

Puisque la Ligne AC, est coupée en deux également au Point E, & que la Ligne CD, luy est adjointe ; Il s'ensuit que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EC, ou de son égale EB, est égal au Quarré de ED, par la 6. Prop. du 2. Mais le Quarré de ED, est égal aux deux Quarrez de EB, & de DB, par la 47. du 1. Par conséquent le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, est égal aux deux Quarrez de EB, & de DB ; Si donc de ces deux Tous, qui sont égaux, on oste le Quarré de EB, qui leur est commun, il restera le Rectangle compris de AD, DC, qui sera égal au Quarré de DB ; Ce qu'il falloit démontrer.

Supposons maintenant que la Ligne DA, ne passe point par le Centre ; Cela estant, je dis encore que le Rectangle de AD, DC, est égal au Quarré de DB. Pour le prouver.

Menez du Centre E, au Point B, la Ligne Droite EB, cette Ligne par la 18. Prop. sera Perpendiculaire à DB ; De ce même Centre abaissez la Ligne EF, Perpendiculaire à AD, cette Ligne EF, par la 3. Prop. coupera la Partie AC, qui est dans le Cercle en deux également ; Enfin de ce même Point menez les deux Lignes Droites EC, ED, Cela posé.

Puisque la Ligne AC, est coupée en deux Parties égales au Point F, & que la Ligne CD, luy est adjointe ; Il s'ensuit par la 6. Prop. du 2. que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de CF, est égal au Quarré de DF ; Si donc à ces deux Tous qui sont égaux, on adjointe le Quarré de FE, Il s'ensuivra que le Rectangle de AD, DC,



& les deux Quarrez de CF, & de FE, seront égaux aux deux Quarrez de DF, & de FE ; Or les deux Quarrez de CF, & de FE, sont égaux au Quarré de EC, ou de son égale EB, par la 47. du 1. Et de même les deux Quarrez de DF, & de FE, sont égaux au Quarré de ED ; Si donc au lieu des deux Quarrez de CF, & de FE, on prend le Quarré de EB ; Et au lieu des deux Quarrez de DF, & de FE, on prend le Quarré de ED ; Il s'ensuivra que le Rectangle compris de AD, DC, avec le Quarré de EB, sera égal au Quarré de ED ; Mais les deux Quarrez de DB, & de EB, sont aussi égaux au Quarré de ED, par la 47. du 1. Donc le Rectangle de DA, DC, & le Quarré de EB, sont ensemble égaux aux deux Quarrez de DB, & de EB ; Si donc de ces deux Tous, qui sont égaux, on ôte le Quarré de EB, qui leur est commun ; Il restera le Rectangle de DA, DC, égal au Quarré de DB ; Ce qu'il falloit démontrer.

I. Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene tant de Lignes Droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent se terminer à sa Circonference concave, le Rectangle compris d'une de ces Coupantes, telle que l'on voudra, & de sa Partie hors du Cercle, sera égal au Rectangle compris de telle autre Coupante que l'on voudra, & de sa Partie hors du Cercle ; Car chacun de ces Rectangles est égal au Quarré de la Touchante, qui seroit menée de ce même Point.

II. Corollaire.

Il suit encore, que si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene deux Lignes Droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles ; Car le Quarré de chacune de ces Lignes est égal au Rectangle d'une Cou-

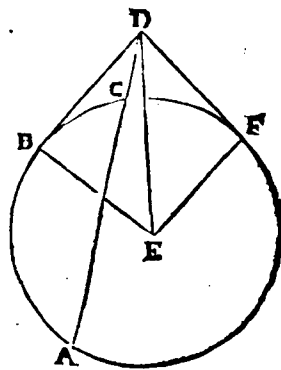
pante, & de sa Partie hors du Cercle ; Et ainsi chacun de ces Quarrez est égal à l'autre ; D'où il suit que les Lignes qui en font les Costez sont égales, par la 3. Remarque de la 46. du 1.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME XXXI.

Si d'un Point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene deux Lignes Droites, dont l'une coupe le Cercle, & va se terminer à sa Circonference concave, & l'autre atteint le Cercle, & que le Rectangle compris de toute la Coupante, & de sa Partie hors du Cercle, soit égal au Quarré de celle qui atteint le Cercle, celle-cy touchera le Cercle.

JE suppose que du Point D, pris à discretion hors du Cercle ABC, on ait mené les deux Lignes Droites DA, DB, dont l'une à sçavoir DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonference concave ; Et l'autre à sçavoir DB, atteint le Cercle, & que le Rectangle compris de DA, DC, soit égal au Quarré de DB ; Cela estant, je dis que cette Ligne DB, touche le Cercle ; Pour le prouver.



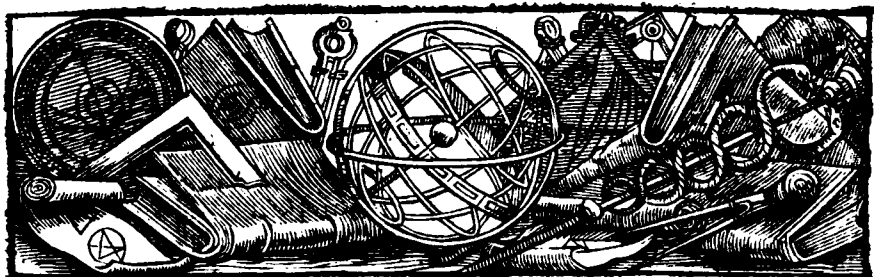
Menez du Point D, la Ligne Droite DF, qui touche le Cercle ; Puis du Centre E, menez les Lignes Droites EB, ED, EF ; Cela posé.

Puisque du Point D, partent les deux Lignes Droites DA, DF ; que DA, coupe le Cercle, & se termine à sa Circonference concave ; & que DF, le touche ; Il s'ensuit par la Proposition precedente, que le Quarré de DF,

LIVRE TROISIEME. 161

est égal au Rectangle de DA, DC ; Mais le Quarré de DB, est supposé égal au mesme Rectangle ; Partant le Quarré de DB, & le Quarré de DF, sont égaux entr'eux ; Et par consequent ces deux Lignes qui en sont les Costez sont aussi égales entr'elles : D'ailleurs la Ligne BE, est égale à la Ligne FE, par la definition du Cercle ; Si bien que les deux Triangles DBE, DFE, ont deux Costez égaux à deux Costez chacun au sien , & la Baze DE, commune ; Partant par la 8. du 1. l'Angle DBE, est égal à l'Angle DFE ; mais l'Angle DFE, est Droit, par la 18. Prop. Donc l'Angle DBE, est aussi Droit. D'où il suit par la 16. Prop. que la Ligne DB, touche le Cercle ABC ; Ce qu'il falloit démontrer.





LIVRE QUATRIÈME

DES

ELEMENS DE GEOMETRIE.

DEFINITIONS.

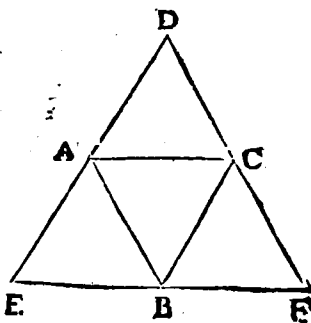


1. **N**E Figure Rectiligne est dite estre inscrite dans une autre Figure Rectiligne, quand le Sommet de chacun des ses Angles touche un des Costez de la Figure dans laquelle elle est inscrite.

Ainsi le Triangle ABC , est dit estre inscrit dans le Triangle DEF , parce que le Sommet de chacun de ses Angles A , B , C , touche un des Costez du Triangle DEF .

2. Une Figure Rectiligne est dite estre circonscrite à une autre Figure Rectiligne, quand chacun de ses Costez passe par le Sommet d'un des Angles de la Figure à laquelle elle est circonscrite.

Ainsi le Triangle DEF , est dit estre circonscrit au Triangle ABC , parce que chacun des Costez du Triangle DEF ,



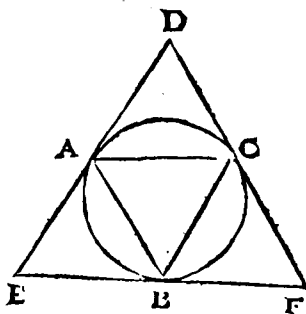
passé par le Sommet d'un des Angles du Triangle ABC.

3. Une Figure Rectiligne est dite estre inscrite au Cercle, quand le Sommet de chacun de ses Angles touche la Circonference du Cercle auquel elle est inscrite.

Ainsi le Triangle ABC, est inscrit dans le Cercle ABC.

4. Une Figure Rectiligne est dite estre circonscrite à un Cercle, quand chacun de ses Costez touche le Cercle auquel elle est circonscrite.

Ainsi le Triangle DEF, est circonscrit au Cercle ABC, parce que chacun des Costez du Triangle DEF, touche le Cercle ABC.



5. Un Cercle est dit estre inscrit dans une Figure Rectiligne, quand sa Circonference touche chacun des Costez de la Figure dans laquelle il est inscrit.

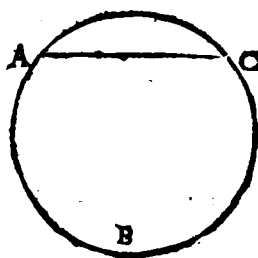
Ainsi le Cercle ABC, est inscrit dans le Triangle DEF.

6. Un Cercle est dit estre circonscrit à une Figure Rectiligne, quand sa Circonference passe par le Sommet de chaque Angle de la Figure à laquelle il est circonscrit.

Ainsi le Cercle ABC, est circonscrit au Triangle ABC.

7. Une Ligne Droite est dite estre appliquée à un Cercle, quand ses extremitéz sont dans la Circonference du Cercle.

Ainsi la Ligne AC, est appliquée au Cercle ABC.



8. Un Polygone, est une Figure comprise de plusieurs Lignes Droites.

9. Un Pantagone, est une Figure comprise de cinq Lignes Droites.

10. Un Hexagone, est une Figure comprise de six Lignes Droites.

11. Un Heptagone, de sept.

12. Un Octogone, de huit.

13. Un Enneagone, de neuf.

14. Un Decagone, de dix.

15. Un Endecagone, de onze.

16. Un Dodecagone, de douze, &c.

PROPOSITION R

PROBLEME I

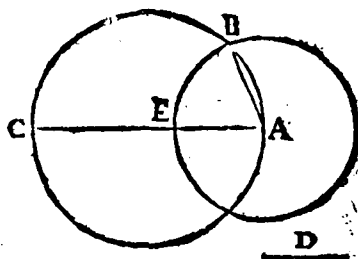
A un Cercle donné, appliquer une Ligne Droite Egale à une Ligne Droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le Diametre du Cercle.

JE suppose que le Cercle ABC, soit donné, & que la Ligne D, qui n'est pas plus grande que le Diametre du Cercle, soit aussi donnée; Et je propose d'appliquer au Cercle ABC, une Ligne Droite égale à la Ligne D; Pour le faire.

Menez dans ce Cercle le Diametre AC, lequel par la Supposition est ou égal, ou plus grand que la Ligne donnée D; Cela posé.

S'il est égal, la chose est faite, & la Ligne appliquée; puisque le Diametre AC, est supposé égal à la Ligne donnée D; S'il est plus grand, retranchez-en la Partie AE, égale à la Ligne D; Puis du Centre A, & de l'Intervalle AE, décrivez le Cercle AEB, lequel coupera la Circonférence de l'autre Cercle au Point B; Enfin du Point A, au Point B, menez la Ligne Droite AB; Cela étant, je dis que la Ligne AB, qui est appliquée au Cercle ABC, est égale à la Ligne donnée D; Pour le prouver.

La Ligne AB, & la Ligne AE, partent toutes deux du Point A, qui est le Centre du Cercle AEB, & vont se terminer à sa Circonférence, par conséquent elles sont égales entr'elles; Or la Ligne AE, est égale à la Ligne donnée D;



D, par construction ; donc la Ligne AB, est aussi égale à la Ligne D ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

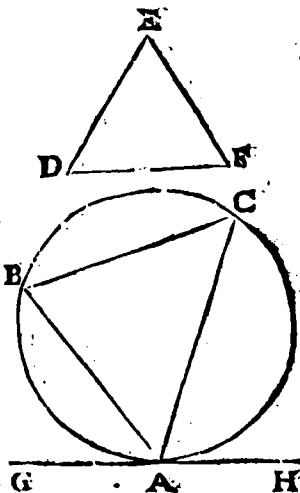
PROPOSITION II.

PROBLEME II.

Dans un Cercle donné, inscrire un Triangle Equiangle à un Triangle donné.

JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnez ; Et je propose d'inscrire dans ce Cercle, un Triangle qui soit Equiangle au Triangle DEF ; pour le faire.

Menez par la 27. du 3. la Ligne Droite GAH, qui touche le Cercle au Point A ; Puis du Point A, menez la Ligne Droite AB, qui fasse avec AG, l'Angle BAG, égal à l'Angle D, du Triangle DEF ; De ce même Point menez la Ligne Droite AC, qui fasse avec AH, l'Angle HAC, égal à l'Angle F ; Enfin du Point B, au Point C, menez la Ligne Droite BC ; Cela posé, je dis que le Triangle ABC, inscrit au Cercle ABC, est Equiangle au Triangle DEF ; Pour le prouver.



Puisque la Ligne GAH, touche le Cercle au Point A, & que la Ligne AB, qui part du Point de l'attouchement, le coupe, l'Angle GAB, que la Coupante fait avec la Touchante, sera égal à l'Angle ACB, qui est au Segment alterne, par la 32. Prop. du 3. Mais l'Angle GAB, est égal à l'Angle D, par construction ; Donc l'Angle ACB, est aussi égal à l'Angle D ; De même, la Ligne AC, coupant le Cercle, l'Angle HAC, qu'elle

Y.

fait avec la Touchante, est égal à l'Angle ABC, qui est dans le Segment alterne ; Mais l'Angle HAC, est égal à l'Angle F, par construction ; Donc l'Angle ABC, est aussi égal à l'Angle E ; Et ainsi le Triangle ABC, a deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF ; Par conséquent le troisième BAC, est égal au troisième C, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit faire & démontrer.

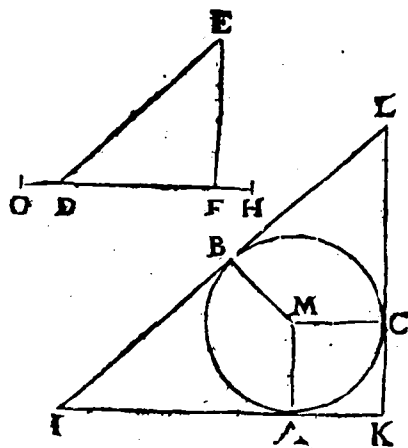
PROPOSITION III.

PROBLEME III

Allentour d'un Cercle donné, décrire un Triangle Equiangle à un Triangle donné.

JE suppose que le Cercle ABC, & le Triangle DEF, soient donnez ; & je propose de décrire allentour du Cercle ABC, un Triangle qui soit Equiangle au Triangle DEF, Pour le faire.

Prolongez de part & d'autre l'un des Costez du Triangle, par exemple DF, vers G, & vers H ; Puis du Centre M, tirez à discretion à quelque Point de la Circonférence la Ligne Droite MA ; De ce même Centre, menez la Ligne Droite MB, qui fasse avec MA, l'Angle AMB, égal à l'Angle EDG, par la 23. du 1. De ce même Point menez la Ligne MC, qui fasse avec MA, l'Angle AMC, égal à l'Angle EFH ; Cela fait, tirez par les Points A, B, C, trois Lignes Droites IAK, IBL, KCL, perpendiculaires aux Lignes MA, MB, MC ; Ces



trois Lignes formeront un Triangle ; Que je dis estre circonscrit au Cercle ABC, & estre Equiangle au Triangle DEF ; Pour le prouver.

Puisque chacune de ces Lignes IK, IL, KL, est perpendiculaire à l'extrémité du Diamètre du Cercle, ces Lignes touchent le Cercle par la 16. du 3. Et ainsi le Triangle IKL, est circonscrit à ce Cercle ; Si bien qu'il ne reste plus qu'à prouver qu'il est Equiangle au Triangle DEF ; Pour le prouver.

Les quatre Angles de la Figure AMBI, valent quatre Droits, par le Corollaire de la 32. du 1. ; Or les deux Angles MAI, MBI, sont Droits par construction ; Donc les deux Angles AMB, AIB, sont aussi égaux à deux Droits ; D'ailleurs les Angles EDG, EDF, sont égaux à deux Droits, par la 13. du 1. Partant les deux Angles AMB, AIB, sont égaux aux deux Angles EDG, EDF ; Si donc de ces deux Tous qui sont égaux, on ôte les Angles AMB, & EDG, qui sont égaux par construction, l'Angle AIB, restera égal à l'Angle EDF ; De même, les quatre Angles de la Figure AMCK, valent quatre Droits ; Or les deux Angles MAK, MCK, sont Droits par construction, donc les deux restans AMC, AKC, valent ensemble deux Droits ; Mais les Angles EFH, EFD, valent aussi deux Droits ; Ainsi les deux Angles AMC, AKC, sont égaux aux deux Angles EFH, EFD ; Si donc de ces deux Tous qui sont égaux, on ôte les Angles AMC, & EFH, qui sont égaux par construction, l'Angle AKC, restera égal à l'Angle EFD ; Et ainsi le Triangle ILK, à deux Angles égaux à deux Angles du Triangle DEF ; Par conséquent le troisième ILK, est égal au troisième DEF, par la 32. du 1. D'où il suit que le Triangle ILK, que nous avons circonscrit au Cercle ABC, est Equiangle au Triangle DEF ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



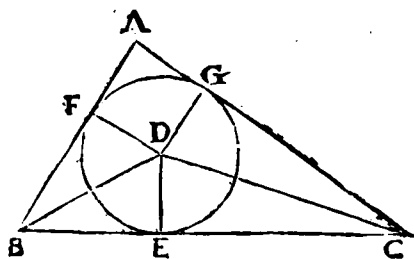
PROPOSITION IV.

PROBLEME IV.

Dans un Triangle donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Triangle ABC, soit donné ; Et je propose d'y inscrire un Cercle ; Pour le faire.

Coupez par la 9. du 1. l'un des Angles de ce Triangle, par exemple ABC, en deux également par la Ligne Droite BD ; Coupez de mesme un autre Angle, comme ACB, en deux également par la Ligne Droite CD ; Du Point D, où les deux Lignes BD, CD, se rencontrent, abaissez sur l'un des Costez de ce Triangle, par exemple sur BC, la Perpendiculaire DE ; Enfin du Centre D, & de l'Intervalle DE, décrivez un Cercle ; & je dis qu'il sera inscrit au Triangle ABC ; Pour le Prouver.



Abaissez du Point D, les Lignes Droites DF, DG, perpendiculaires aux deux autres Costez AB, AC ; Cela posé.

Aux Triangles BDE, & BDF, l'Angle EBD, est égal à l'Angle FBD, par construction ; l'Angle DEB, est égal à l'Angle DFB, étant tous deux Droits, par construction ; Deplus, le Costé BD, est commun à ces deux Triangles ; Et partant le Costé DF, est égal au Costé DE, par la 26. du 1. De mesme, aux Triangles CGD, & CED, l'Angle GCD, est égal à l'Angle ECD, par construction ; l'Angle DGC, est égal à l'Angle DEC, ces deux Angles étant droits, par construction ; Deplus, le Costé DC, est commun à ces deux Triangles ; Et partant le costé DG, est égal au Costé DE, par la 26. du 1. Et ainsi les trois Lignes

DE, DF, DG, sont égales entr'elles. Par conséquent le Cercle EFG, qui est décrit du Centre D, & de l'Intervalle DE, passe aussi par les extremités des Lignes FD, DG ; Or Puisque les Costez AB, BC, CA, du Triangle ABC, sont perpendiculaires aux extremités des trois Demy-diametres DF, DE, DG, il s'ensuit par la 16. du 3. qu'ils touchent le Cercle EFG ; Et par conséquent que ce Cercle est inscrit dans le Triangle ABC, par la 5. Définition ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

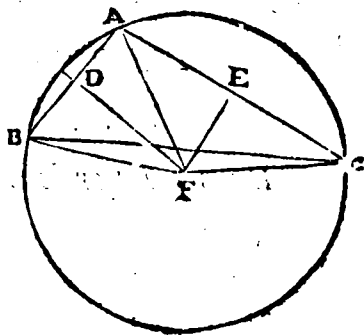
PROPOSITION V.

PROBLEME V.

Allentour d'un Triangle donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Triangle ABC, soit donné ; Et je propose de décrire un Cercle allantour de ce Triangle ; Pour le faire.

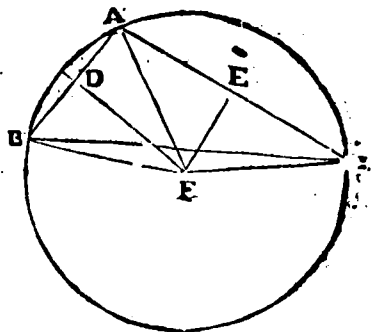
Coupez par la 10. du 1. un des Costez de ce Triangle, par exemple AB, en deux également au Point D, & de ce Point élevez la Perpendiculaire DF, par la 11. du 1 ; Coupez de mesme un autre Costé, comme par exemple AC, en deux également au Point E, & de ce Point élevez aussi la Perpendiculaire EF ; Maintenant du Point F, où les Lignes DF, EF, se rencontrent, menez la Ligne Droite FA, au Sommet de l'un des Angles de ce Triangle ; Enfin du Centre F, & de l'Intervalle FA, décrivez un Cercle ; Cela estant, je dis que ce Cercle est décrit allantour du Triangle ABC ; Pour le prouver.



Du Point F, aux Sommets des deux autres Angles B, &

C, menez les deux Lignes Droittes FB, FC ; Cela posé.

Aux Triangles BDF, & ADF, le Costé BD, est égal au Costé AD, par construction, le Costé DF, leur est commun ; Deplus, l'Angle BDF, est égal à l'Angle ADF, ces deux Angles estant Droits, par construction ; Et partant la Baze FB, est égale à la Baze FA, par la 4. du 1 ; De mesme, aux Triangles CEF, & AEF, le Costé



CE, est égal au Costé AE, par construction, le Costé EF, leur est commun, & l'Angle CEF, est égal à l'Angle AEF, ces deux Angles estant Droits, par construction ; Partant la Baze FC, est égale à la Baze FA ; Et ainsi les trois Lignes FB, FA, FC, sont égales entr'elles ; Par conséquent le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'Intervalle FA, passe aussi par les extremittez des Lignes FB, FC ; Or les extremittez des Lignes FA, FB, FC, sont les Sommets des Angles du Triangle ABC ; Et par conséquent ce Cercle est décrit allentour du Triangle ABC, par la 6. Definition ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

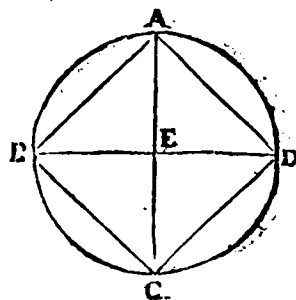
PROPOSITION VI.

PROBLEME VI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quarré.

JE suppose que le Cercle ABC, soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quarré ; Pour le faire.

Par le Centre E, menez le Diametre AEC, coupez ce Diametre à Angles Droits par un autre Diametre, comme BED ; Puis menez les Lignes AB, BC, CD, & DA, ces quatre Lignes



formeront une Figure de quatre Costez inscrite au Cercle; Cela estant, je dis que cette Figure est un Quarré. Pour le prouver.

Puisque les quatre Angles qui sont autour du Centre E, sont Droits par construction, les quatre Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux entr'eux, par la 26. du 3. Et par conséquent les quatre Soutendantes AB, BC, CD, DA, sont égales entr'elles, par la 29. du 3. D'ailleurs, chacun des Angles de la Figure ABCD, estant au Demy-cercle, est Droit, par la 31. du 3. Et par conséquent cette Figure ABCD, qui est comprise de quatre Costez Egaux, & qui a ses quatre Angles Droits, est un Quarré; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION VII.

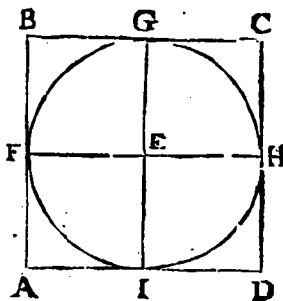
PROBLEME VII.

Allentour d'un Cercle donné, décrire un Quarré.

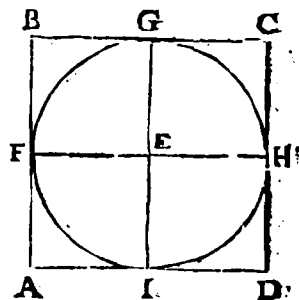
JE suppose que le Cercle FGHI, soit donné; Et je propose de décrire un Quarré allentour de ce Cercle; Pour le faire.

Menez tel Diametre qu'il vous plaira, par exemple FEH; Coupez ce Diametre à Angles Droits par un autre Diametre, comme GEI; Puis par la 31. du 1. menez par les Points F, & H, les Lignes Droites AFB, DHC, paralleles à GEI, ou perpendiculaires à FH, & par les Points G, & I, les Lignes Droites BGC, AID, paralleles à FH, ou perpendiculaires à GEI;

Ces quatre Lignes AB, BC, CD, DA, formeront une Figure de quatre Costez; Cela estant, je dis que cette Figure est un Quarré, qui est décrit allentour du Cercle FGHI; Pour le prouver.



Puisque les Lignes AB, CD, sont parallèles à GI, elles sont parallèles entr'elles ; De mesme, puisque les Lignes BC, AD, sont parallèles à FH, elles sont aussi parallèles entr'elles ; Et par conséquent les Figures ABCD, ABGI, GCDI, BCHF, & AFHD, sont des Parallelogrammes ; Et partant les Lignes BC, AD, sont égales au Diametre FH, ou à son égale GI, par la 34. du 1 ; Et de mesme, les Lignes AB, CD, sont aussi égales à GI ; D'où il suit que les quatre Costez du Parallelogramme ABCD, sont égaux entr'eux. Deplus, puisque la Figure AFEI, est un Parallelogramme, par construction, & que l'Angle FEI, a esté fait Droit ; il s'ensuit que son Opposé FAI, est aussi Droit, par la 34. du 1 ; On prouvera de mesme, que les Angles EBG, GCH, & HDI, sont aussi Droits ; Et partant la Figure ABCD, est un Quarré, qui touche le Cercle donné ; puisque par la 16. du 3. chaque Costé est perpendiculairement élevé à l'extremité du Diametre ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



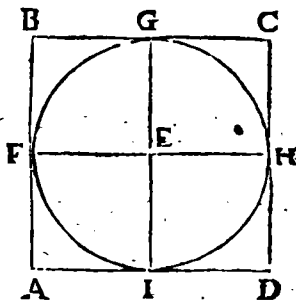
PROPOSITION VIII.

PROBLEME VIII.

Dans un Quarré, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD, soit donné, & je propose d'inscrire un Cercle dans ce Quarré ; Pour le faire.

Coupez les Costez du Quarré ABCD, en deux également, aux Points F, G, H, I ; Menez les Lignes Droittes FH, GI ; Puis du Point E, où ces deux Lignes se coupent, & de l'Intervalle EF, décrivez le Cercle FGH I ; Cela estant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD ; Pour le prouver.



Puisque les Lignes AD, BC, sont égales & parallèles, leurs Moitié AI, BG, sont aussi égales & parallèles ; D'où il suit par la 33. du 1. que les Lignes AB, IG, sont aussi égales & parallèles ; De même, puisque AB, DC, sont égales & parallèles, leurs moitié AF, DH, sont aussi égales & parallèles ; D'où il suit que les Lignes AD, FH, sont aussi égales & parallèles ; Et par conséquent les Figures EA, EB, EC, ED, sont des Parallelogrammes ; D'où il suit que la Ligne EI, est égale à AF ; Que EF, est égale à BG ; Que EG, est égale à CH ; Et que EH, est égale à DI ; Ainsi ces quatre Lignes EI, EF, EG, EH, qui sont égales à des choses égales, sçavoir aux moitié des Costez d'un Quarré, sont égales entr'elles ; Et le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'Intervalle EI, passe aussi par les Points F, G, H ; D'ailleurs, puisque l'Angle BGI, est égal à son Opposé A, par la 34. du 1 ; Que l'Angle CHF, est égal à son Opposé B ; Que l'Angle DIG, est égal à son Opposé C ; Et enfin que l'Angle AFH, est égal à son Opposé D, Ces quatre Angles sont Droits, leurs Opposés estant Droits,

par Supposition ; D'où il suit que les Lignes AB, BC, CD, DA, touchent le Cercle FGHI, par la 16. du 3. Et partant ce Cercle est inscrit dans le Quarré ABCD ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

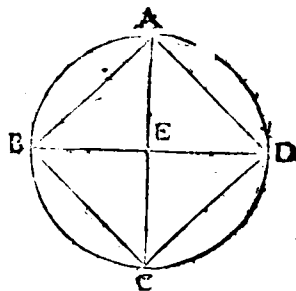
PROPOSITION IX.

PROBLEME IX.

Allentour d'un Quarré donné, décrire un Cercle.

JE suppose que le Quarré ABCD, soit donné ; Et je propose de décrire un Cercle allentour de ce Quarré ; Pour le faire.

Menez les deux Diagonales AC, BD ; Puis du Point E, où elles se coupent, & de l'Intervalle EA, décrivez un Cercle ; Cela étant, je dis que ce Cercle est décrit allentour du Quarré ABCD ; Pour le prouver.



Puisqu'au Triangle ABD, les deux Costez BA, AD, sont égaux par Supposition, les Angles ABD, ADB, sont aussi égaux, par la 5. du 1. Et puisque l'Angle BAD, est supposé Droit, les deux Angles ABD, ADB, valent chacun un Demy-droit ; On prouvera de mesme que chacun des autres Angles qui sont autour des Points A, B, C, D, est Demy-droit ; Ensuite dequoy, puisqu'au Triangle AEB, les deux Angles EAB, EBA, sont égaux, les deux Costez EA, EB, qui les soutiennent, sont aussi égaux, par la 6. du 1. On prouvera de mesme que EC, est égal à EB ; & que ED, est égal à EC ; Et partant ces quatre Lignes EA, EB, EC, ED, sont égales entr'elles ; D'où il suit que le Cercle qui est décrit du Centre E, & de l'Intervalle EA, passe par les extremitez des Lignes EB, EC, ED ; Et par conséquent qu'il est

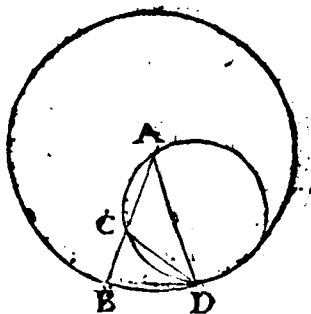
décrit allentour du Quarre ABCD, par la Definition 6.
Ce qu'il falloir faire & démontrer.

PROPOSITION X.

PROBLÈME X.

Écrire un Triangle Isocele qui ait chacun des Angles sur la Base double de l'autre.

Pour le faire. Menez une Ligne Droite de telle longueur qu'il vous plaira, comme par exemple AB, coupez cette Ligne au Point C, de telle sorte, que le Rectangle de AB, BC, soit égal au Quarté de AC, par la 11. du 2. Décrivez un Cercle du Centre A, & de l'Intervalle AB; Puis appliquez à la Circonférence de ce Cercle la Ligne Droite BD, égale à AC, par la 1. Prop. Enfin menez la Ligne Droite AD; Cela étant, je dis que le Triangle ABD, est Isoscele, & que chacun de ses Angles ABD, ADB, qui sont sur la Base BD, est double de l'Angle BAD; Pour le prouver.

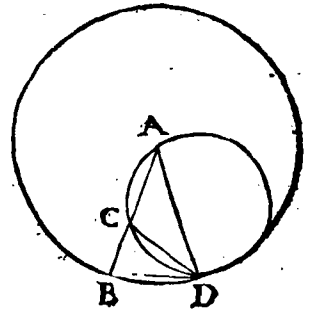


Du Point C, au Point D, menez la Ligne Droite CD; ;
Et par la 5. Prop. allentour du Triangle ACD, décrivez
un Cercle ; Cela posé.

Puisque les Lignes AB, AD, sont égales, par la définition du Cercle, le Triangle ABD, est Isoscèle ; D'ailleurs, puisque par la construction le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Carré de AC, ce même Rectangle sera aussi égal au Carré de BD, qui a été faite égale à AC ; Ainsi nous avons le Point B, hors du Cercle ACD, d'où partent les deux Lignes Droites BA, BD, l'une desquelles à savoir BA, coupe le Cercle, & l'autre à savoir BD,

Z. i.

l'atteint ; en sorte que le Rectangle compris de BA, & de la Partie BC, qui est hors du Cercle, est égal au Carré de BD, qu'il atteint ; Par conséquent par la 37. du 3. la Ligne BD, touche le Cercle ACD ; Et d'autant que la Ligne Droite DC, part du Point de l'attouchement D, & coupe le Cercle, Il s'ensuit que l'Angle CDB, que fait cette Coupante avec la Touchante, est égal à l'Angle CAD, qui est au Segment alterne, par la 32. du 3. Si donc on leur adjoint l'Angle commun ADC ; Il s'ensuivra que l'Angle total ADB, sera égal aux deux Angles ADC, CAD ; Mais par la 32. du 1. l'Angle BCD, est égal aux deux Angles ADC, & CAD ; Partant l'Angle BCD, est égal à l'Angle ADB. Maintenant, le Triangle ABD, estant Isoscele, l'Angle ABD, est égal à l'Angle ADB, par la 5. du 1. Partant l'Angle ADB, ou son égal CBD, est aussi égal à l'Angle BCD ; D'où il suit, par la 6. du 1. que le Costé CD, est égal au Costé BD ; Mais BD, a esté fait égal à AC ; Partant les deux Lignes AC, CD, sont égales entr'elles ; D'où il suit par la 5. du 1. que l'Angle CDA, est égal à l'Angle CAD, ou BAD ; Mais il a déjà esté prouvé que l'Angle CDB, estoit égal à l'Angle CAD ; Partant l'Angle total ADB, ou son égal ABD, est double de l'Angle BAD ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



Remarque.

Ensuite de cette Proposition, il est aisé de montrer, que si l'on divise le Rayon du Cercle en la moyenne & extreme raison, c'est à dire, en sorte que le Rectangle compris de tout le Rayon & de la moindre partie, soit égal au Carré de la plus grande partie, le costé du Decagone inscrit dans le Cercle, sera égal à cette plus grande partie.

Car, puisque les trois Angles d'un Triangle, valent autant

que deux Droits ; Il est évident que si on divise deux Angles Droits en cinq parties égales, deux de ces parties seront la quantité de l'Angle ABD, du Triangle ABD, de la Proposition précédente ; Que deux autres parties seront la quantité de l'Angle ADB ; & que la cinquième partie qui reste, sera la quantité de l'Angle BAD, lequel par conséquent sera la dixième partie des quatre Angles Droits que valent tous les Angles qu'on peut faire autour du Point A ; D'où il suit que l'Arc BD, est aussi la dixième partie de la Circonférence du Cercle ; Or la Ligne Droite BD, est la Soutendante de cet Arc, & elle a esté faite égale à AC, qui est la plus grande partie du Rayon AB, coupé en sorte que le Rectangle compris de AB, BC, est égal au Carré de AC ; Donc il est vray de dire que la Soutendante de la dixième partie du Cercle, ou ce qui est la même chose, le Costé du Decagone inscrit au Cercle, est égal à la plus grande partie du Rayon, divisé en la moyenne & extrême raison.



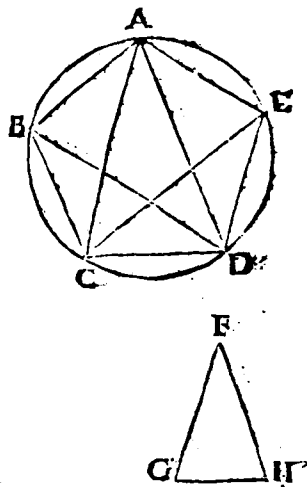
PROPOSITION XI.

PROBLEME XI.

Dans un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.

JE suppose que le Cercle ABCDE, soit donné ; Et je propose d'y inscrire un Pentagone Equilateral, & Equiangle ; Pour le faire.

Décrivez par la Proposition précédente le Triangle Isoscele FGH, qui ait chacun des Angles sur la Base double du 3. Puis par la 2. Prop. décrivez dans le Cercle ABCDE, le Triangle ACD, Equiangle au Triangle FGH ; Coupez les Angles ACD, ADC, en deux également par les Lignes Droites CE, DB, & menez les Lignes Droites CB, BA, AE, ED ; Cela estant, je dis que le Pentagone ABCDE, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver :



Puisque le Triangle FGH, est Isoscele, & qu'il a les Angles G, & H, sur la Baze, doubles de l'Angle F, & que le Triangle ACD, luy est Equiangle, Il a aussi les Angles ACD, ADC, sur la Baze double de l'Angle CAD ; Or chacun de ces Angles ayant esté coupé en deux également, les Angles DCE, ECA, ADB, BDC, qui en sont les moitez sont égaux entr'eux, & égaux aussi à l'Angle CAD ; D'où il suit par la 26. du 3. que les cinq Arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont égaux, & par la 29. du 3. que les cinq Lignes Droites AB, BC, CD, DE, EA, sont égales ; Et par conséquent que le Pentagone ABCDE, est Equilateral.

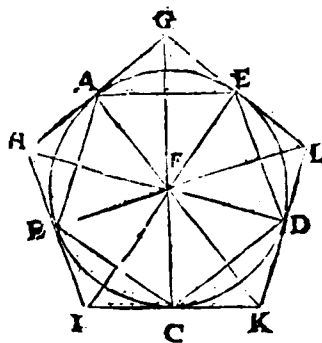
Mais ce Pentagone est aussi Equiangle, puisque par la 27. du 3. chacun de ses Angles s'appuye sur des Arcs égaux, sçavoir sur trois fois la cinquième partie de la Circonférence du Cercle ; Nous avons donc dans un Cercle donné, décrit un Pentagone Equilateral & Equiangle ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION XII.

PROBLEME XII.

Allentour d'un Cercle donné, décrire un Pentagone Equilateral & Equiangle.

Je suppose que le Cercle ABCDE soit donné ; & je propose de écrire allentour de ce Cercle un Pentagone Equilateral & Equiangle ; Pour le faire.



Décrivez premierement dans ce Cercle par la Proposition precedente le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle ; Menez du Centre F, aux Points A, B, C, D, E, les Lignes Droites FA, FB, FC, FD, FE, & par les extremités de ces Lignes, menez les Lignes Droites GH, HI, IK, KL, LG, qui leur soient perpendiculaires ; Cela estant, je dis que ces Lignes se rencontreront ; que le Pentagone qu'elles formeront sera circonscrit au Cercle donné ; & qu'il sera Equilateral & Equiangle. Pour le prouver.

Premierement, puisque les Angles GAE, & GEA, sont partie des Angles Droits GAF, GEF, ils seront moindres que deux Droits ; Et partant, par le Corollaire de la 28. du 1. les Lignes AG, EG, se rencontreront, & ainsi des autres.

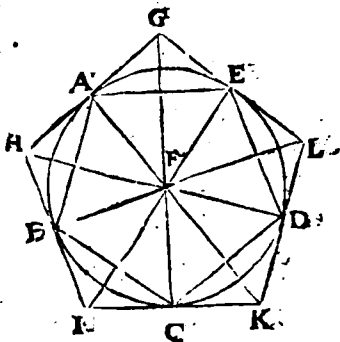
80 ELEMENS D'EUCLIDE.

Deplus, puisque les Lignes GH, HI, IK, KL, LG, sont perpendiculaires aux extremitéz du Diametre du Cercle; Il s'ensuit, par la 16. Prop. du 3. qu'elles touchent le Cercle, & qu'ainsi le Pentagone GHIKL, est circonscrit au Cercle donné.

Maintenant pour prouver que ce Pentagone GHIKL, est Equilateral, menez les Lignes Droittes FG, FH, FI, FK, FL; Cela posé.

Puisque le Pentagone ABCDE, est Equilateral, par construction; il s'ensuit que les cinq Arcs, AB, BC, CD, DE, EA, que ces Costez égaux soutiennent, sont égaux entr'eux, & que les cinq Angles AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, qui s'appuyent sur ces Arcs sont aussi égaux entr'eux; par la 27. du 3. D'ailleurs, puisque l'Angle FAG, est Droit,

par construction, les deux Quarrez de FA, & de AG, sont égaux au Quarre de FG, par la 47. du 1. Mais l'Angle FEG, estant aussi Droit, les deux Quarrez de FE, & de EG, sont égaux au mesme Quarre de FG; Partant les deux Quarrez de FA, & de AG, sont égaux aux deux Quarrez de FE, & de EG; Ostant donc de ces deux Tous, qui sont égaux, les Quarrez de FA, & de FE, qui sont égaux,



(parce que ce sont les Quarrez de deux Demy-diametres du Cercle) le Quarre de AG, sera égal au Quarre de EG; Et partant les Lignes AG, EG, sont égales entr'elles. On prouvera de mesme que la Ligne AH, est égale à HB, la Ligne BI, à IC, la Ligne CK, à KD, & la Ligne DL, à LE; Or comparant le Triangle AFG, avec le Triangle EFG, les deux Costez AF, FG, sont égaux aux deux Costez EF, FG; Et la Baze AG, égale à la Baze EG; Partant par la 8. du 1. l'Angle AFG, est égal à l'Angle EFG; De sorte que chacun des Angles AFE, & AGE, est coupé en deux également; On prouvera de mesme que les Angles AFB, BFC, CFD,

CFD, DFE, & les Angles AHB, BIC, CKD, DLE, sont coupez en deux également ; D'où il suit, que tous les Angles qui sont au tour du Point F, qui sont tous moitié de choses égales, sont égaux entr'eux. Comparant maintenant les Triangles FAG & FAH, les Angles AFG & FAH, sont égaux aux Angles AFH & FAH, chacun au sien, & le Costé AF, aux extremités duquel sont ces Angles, leur est commun ; Partant par la 16. du 1. l'Angle AGF, est égal à l'Angle AHF, & le Costé AG, au Costé AH. On prouvera de mesme, que l'Angle BHF, est égal à l'Angle BIF ; l'Angle CIF, à l'Angle CKF ; l'Angle DKF, à l'Angle DLF ; l'Angle ELF, à l'Angle EGF ; Comme aussi que la Ligne HB, est égale à IB ; la Ligne IC, à CK ; la Ligne KD, à DL ; & la Ligne LE, à EG ; Ensuite dequoy, GH & LG sont égales, estant doubles de AG, & de GE, qui ont esté prouvées égales ; GH & HI sont égales, estant doubles de AH, & de HB, qui ont esté prouvées égales ; HI & IK sont égales, estant doubles de BI, & de IC, qui ont esté prouvées égales ; IK & KL sont égales, estant doubles de CK, & de KD, qui ont esté prouvées égales ; Et enfin KL & LG sont égales, estant doubles de DL, & de LE, qui ont esté prouvées égales, si bien que le Pentagone GHIKL, est Equilateral.

D'ailleurs, puisque les Angles HGL, & GHI, sont doubles des Angles AGF, & AHF, qui ont esté prouvez égaux, Ils sont aussi égaux entr'eux. On montrera de mesme, que l'Angle GHI, est égal à l'Angle HIK ; l'Angle HIK, à l'Angle IKL ; & l'Angle IKL, à l'Angle KLG ; Et partant le Pentagone GHIKL, est Equiangle ; Nous avons donc décrit allentour d'un Cercle donné un Pentagone Equilateral & Equiangle ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



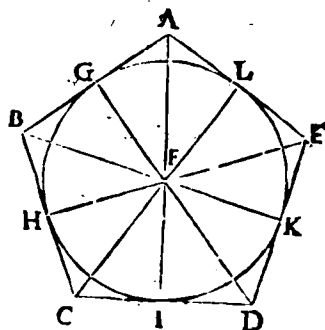
PROPOSITION XIII.

PROBLEME XIII.

Dans un Pentagone donné, qui est Equiangle & Equilateral, décrire un Cercle.

JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle, soit donné; & je propose d'y inscrire un Cercle; Pour le faire.

Coupez par la 9. du 1. les deux Angles BAE, & ABC, qui se suivent, en deux également, par les Lignes Droites AF, BF; Et du Point F, où ces Lignes se rencontrent, abaissez sur un des Costez la Perpendiculaire FG; Puis du Centre F, & de l'Intervalle FG, décrivez un Cercle; Cela estant, je dis que ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné; Pour le prouver.



Abaissez du Point F, les Lignes FH, FI, FK, FL, perpendiculairement sur les Costez BC, CD, DE, EA; Cela posé.

Puisque le Pentagone ABCDE, est supposé Equilateral, le Costé AB, du Triangle AFB, est égal au Costé BC, du Triangle CBF; le Costé FB, est commun à ces deux Triangles; & l'Angle ABF, est égal à l'Angle CBF, par Construction; Donc l'Angle BAF, est égal à l'Angle BCF; Or l'Angle BAF, est moitié de l'Angle BAE, qui est égal à BCD, puisque le Pentagone est supposé Equiangle; Partant l'Angle BCF, est aussi moitié de l'Angle BCD; Et par conséquent les deux Angles BCF, & DCF, sont égaux entr'eux. On prouvera de mesme, que l'Angle CDF, est égal à l'Angle FDE, & l'Angle DEF, à l'Angle FEA;

LIVRE QUATRIÈME. 183

Maintenant, comparant les Triangles FBG, & FBH, l'Angle FBG, vient d'estre prouvé égal à l'Angle FBH, & l'Angle FGB, est égal à l'Angle FHB, estant tous deux Droits, par construction, & le Costé FB, est commun à ces deux Triangles; Partant FH, est égale à FG, par la 26. du 1; On prouvera de même, que la Ligne FI, est égale à FH; la Ligne FK, à FI; & la Ligne FL, à FK; Par conséquent les cinq Lignes FG, FH, FI, FK, & FL, sont toutes égales, & le Cercle qui est décrit du Centre F, & de l'Intervalle FG, passe aussi par les extremitéz de toutes les autres; Et chacune d'elles est un Demy-diametre de ce Cercle; Or les Costez du Pentagone ABCDE, sont élevez perpendiculairement aux extremitéz de ces Demy-diametres; Partant par la 16. du 3. ces Costez touchent le Cercle; Et par conséquent ce Cercle est inscrit dans le Pentagone donné; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

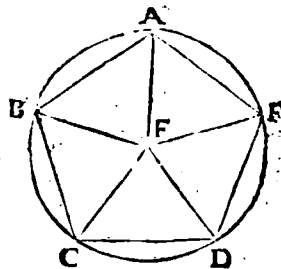
PROPOSITION XIV.

PROBLEME XIV.

*Allentour d'un Pentagone donné, qui est Equilateral
& Equiangle, décrire un Cercle.*

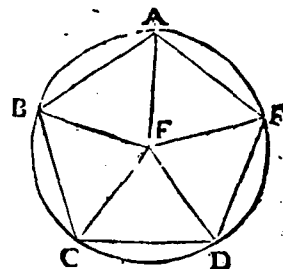
JE suppose que le Pentagone ABCDE, Equilateral & Equiangle soit donné; & je propose de décrire un Cercle allentour de ce Pentagone; Pour le faire.

Coupez les deux Angles BAE, & ABC, qui se suivent, en deux également, par les Lignes Droites AF, BF; Puis du Point F, où ces deux Lignes se rencontrent, & de l'Intervalle FA, décrivez un Cercle; Cela estant, je dis que ce Cercle est décrit allentour du Pentagone ABCDE; Pour le prouver.



Menez les Lignes Droittes FC, FD, FE ; Cela posé.
 Par un raisonnement semblable à celui de la Proposition
 précédente, on prouvera que les Angles BCD, CDE, &
 DEA, sont coupez en deux égale-

ment ; Les Angles BAE, & ABC,
 le sont aussi par construction ; Or les
 cinq Angles du Pentagone étant
 égaux, les dix Angles, qui en sont les
 moitez, sont aussi égaux ; D'où il
 suit, que puisqu'au Triangle ABF,
 les Angles FAB, FBA, sont égaux,
 les deux Costez FA, FB, qui les
 soutiennent sont aussi égaux, par la



6. du 1. On prouvera de même, que la Ligne FC, est égale
 à FB ; la Ligne FD, à FC ; la Ligne FE, à FD ; De sorte que
 les cinq Lignes FA, FB, FC, FD, FE, sont égales entr'elles ;
 Par conséquent le Cercle qui est décrit du Centre F, &
 de l'Intervalle FA, passe aussi par les extremités des Lignes
 FB, FC, FD, FE, c'est à dire par les Sommers des Angles
 du Pentagone ; Et partant ce Cercle est décrit allentour
 du Pentagone donné ; Ce qu'il falloit faire & démontrer,



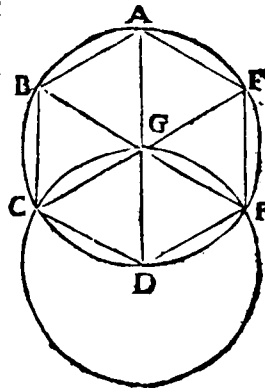
PROPOSITION XV.

PROBLEME XV.

Dans un Cercle donné, décrire un Hexagone Equilateral & Equiangle.

JE suppose que le Cercle ACE, soit donné ; & je propose d'y inscrire un Hexagone Equilateral & Equiangle ; Pour le faire.

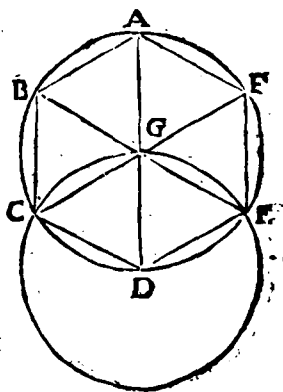
Menez un Diametre tel qu'il vous plaira , par exemple AGD ; Puis du Point D, & de l'Intervalle DG, décrivez le Cercle CGE, ce Cercle coupera le premier aux Points C, & E ; Menez par ces Points les Diametres CGF, & EGB ; Puis menez les six Lignes Droites AB, BC, CD, DE, EF, FA ; Cela estant, je dis que l'Hexagone ABCDEF, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver.



Par le raisonnement de la premiere Prop. du 1. On prouvera que les deux Triangles DGC, DGE, sont Equilateraux, & par la 5. du 1. on prouvera qu'ils sont Equiangles ; Et partant par la 32. du 1. chacun de leurs Angles vaut le tiers de deux Droits. Or par la 31. du 1. les deux Angles CGE, & EGF, valent deux Droits ; Partant si on oste l'Angle CGE, l'Angle restant EGF, vaudra aussi le tiers de deux Droits ; Et ainsi les trois Angles CGD, DGE, EGF, sont égaux entr'eux ; Mais les Angles AGF, AGB, BGC, qui leur sont opposez au Sommet, leur sont égaux, par la 15. du 1. Donc les six Angles qui sont autour du Centre G, sont tous égaux ; D'où il suit par la 26. du 3. que les six Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux ; Et par la 29. du 3.

que les six Lignes Droites AB, BC, CD DE, EF, FA, qui les soutiennent sont égales ; Par conséquent l'Hexagone ABCDEF, est Equilateral.

Maintenant, qu'il soit équiangle, cela suit de la 27. du 3. Car chacun de ces six Angles s'appuie sur un Arc qui contient quatre fois la 6. partie de la Circonference du Cercle ; Ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Hexagone Equilateral & Equiangle ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que le Costé de l'Hexagone est égal au Rayon du Cercle auquel il est inscrit ; Puisque chaque Costé a esté prouvé égal au Demy-diametre.

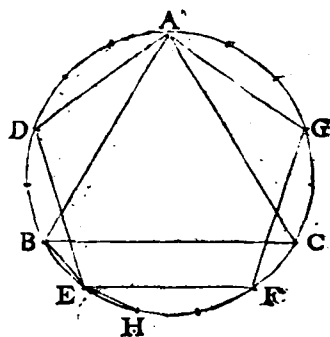
PROPOSITION XVI.

PROBLEME XVI.

Dans un Cercle donné, décrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle.

JE suppose que le Cercle ADBC, soit donné ; & je propose d'y inscrire un Quindecagone Equilateral & Equiangle ; Pour le faire.

Décrivez premierement un Triangle Equilateral ; Puis par la 2. Prop. décrivez dans le Cercle donné, le Triangle ABC, Equiangle à ce Triangle Equilateral ;



Décrivez ensuite par la 11. Prop. dans ce même Cercle le Pentagone ADEFG, Equilateral & Equiangle, & menez du Point B, au Point E, la Ligne Droite BE ; Cela étant, je dis que cette Ligne BE, est le costé du Quindecagone demandé ; Pour le prouver.

Puisque le Triangle ABC, est Equiangle, par construction, il est aussi Equilateral, par les 5. & 6. du 1. Et partant les trois Arcs ADB, BEC, & CGA, que ses Costez soutiennent sont égaux, par la 28. du 3. Et chacun d'eux est la 3. partie de la Circonference du Cercle ; D'ailleurs, puisque le Pentagone ADEFG, est Equilateral, par construction, les cinq Arcs que ses Costez soutiennent, sont aussi égaux, & chacun d'eux est la cinquième partie de la Circonference du Cercle. Or puisque l'Arc ADB, est la 3. partie de la Circonference, on peut luy appliquer cinq Costez du Quindecagone ; Et puisque l'Arc AD, en est la cinquième partie, on luy en peut appliquer trois ; Par conséquent on peut en appliquer six aux deux Arcs AD, DE ; Mais nous avons montré qu'on en peut appliquer cinq à l'Arc ADB, Par conséquent on en peut appliquer un à l'Arc BE, Et ainsi la Ligne Droite BE, qui luy est appliquée est le Costé du Quindecagone. D'où il suit, qu'en appliquant quinze Lignes égales à BE, à toute la Circonference du Cercle, on a le Quindecagone demandé ; Et ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Quindecagone Equilateral.

Deplus, puisque chacun des Angles de ce Quindecagone, comme BEH, s'appuye sur un Arc qui soutient treize fois la 15. partie de la Circonference du Cercle, tous ces Angles s'ensuivent égaux, par la 27. du 3. Et par conséquent ce Quindecagone est aussi Equiangle ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.





LIVRE CINQUIÈME

DES

ELEMENS DE GEOMETRIE

DEFINITIONS

1.  NE Grandeur est dite en mesurer une autre, lors qu'estant prise un certain nombre de fois, elle l'égale, & la mesure précisément.

Ainsi une Ligne de quatre piez, est dite mesurer une Ligne de 20. piez, parce que la Ligne de 4. piez, estant prise cinq fois, égale justement celle de 20. piez ; mais une Ligne de 6. piez n'est pas dite mesurer une Ligne de 20. piez ; parce que la Ligne de 6. piez, estant prise tant de fois que l'on voudra, ne la mesure pas précisément.

2. Une Partie *aliquote* d'une Grandeur, est une Partie de cette Grandeur qui la mesure précisément.

Ainsi une Ligne de 4. piez, est une Partie aliquote d'une Ligne de 20. piez.

La Partie aliquote prend son nom & sa dénomination du nombre de fois qu'elle mesure la Grandeur dont elle est Partie ; ou bien du nombre des Parties égales, dans lesquelles

quelles elle divise cette Grandeur.

Ainsi, une Partie qui mesure une Grandeur deux fois, s'appelle un demy, & s'écrit ainsi $\frac{1}{2}$; Une Partie qui mesure une Grandeur trois fois, s'appelle un Tiers, & s'écrit ainsi $\frac{1}{3}$; Une Partie qui mesure une Grandeur quatre fois, s'appelle un Quart, & s'écrit ainsi $\frac{1}{4}$ &c.

3. Une Partie *aliquante* d'une Grandeur, est une Partie de cette Grandeur qui ne la mesure pas précisément.

Ainsi une Ligne de six piez est une Partie Aliquante d'une Ligne de vingt piez.

Quelquefois une Partie aliquante d'une Grandeur a des Parties aliquotes qui mesurent la Grandeur dont elle est Partie, comme par exemple 8, qui est une Partie aliquante de 12, a pour Partie aliquote 4, qui est le Tiers de 12. dont 8. par conséquent sont les deux Tiers, puisqu'il contient deux fois 4. que l'on écrit ainsi $\frac{2}{3}$.

Les Parties, soit aliquotes, soit aliquantes, s'appellent fractions du Tout dont elles sont Parties ; Et en les marquant, comme nous venons de faire, le Caractere de dessus s'appelle le Numerateur de la fraction, & celui de dessous s'appelle le Dénominateur.

4. Des Parties pareilles, ou semblables, de deux Grands, ce sont des Parties, dont l'une est en comparaison de sa Grandeur, ou de son Tout, ce que l'autre est en comparaison du sien.

Ainsi 3, & 5. sont des Parties semblables de 12. & de 20. parce que comme 3. est le Quart de 12. de même 5. est le Quart de 20.

Il est bon de remarquer icy, que si on oste des Parties semblables de deux Grands, les Restes en seront des Parties semblables.

Ainsi 3. qui est le Quart de 12. estant osté de 12. & 5. qui est le Quart de 20. estant osté de 20. Les Restes 9. & 15. sont des Parties semblables de 12. & de 20. à sçavoir les trois Quarts.

5. Une Grandeur est ditte multiple d'une autre Grandeur, lorsqu'elle la contient un certain nombre de fois pré-

cifément ; & celle qui est contenuë s'appelle Sous-multiple ; laquelle sert de mesure à l'autre.

Ainsi une Ligne de 20. piez est Multiple d'une Ligne de 4. piez , & une Ligne de 4. piez est Sous-multiple d'une Ligne de 20. piez ; parce que comme l'une contient, l'autre est contenuë , justement 5. fois ; & ainsi l'une sert de mesure à l'autre.

6. Des Equimultiples de plusieurs Grandeurs, ce sont des Grandeurs qui contiennent également celles dont elles sont dites Equimultiples, ou qui sont également mesurées par elles.

Ainsi deux Lignes, dont l'une est de 20. piez , & l'autre de 15. piez , sont Equimultiples de deux autres Lignes, dont l'une est de 4. piez & l'autre de 3. piez ; parce que comme 20. est mesuré 5. fois par 4. aussi 15. est mesuré 5. fois par 3.

Il est évident que si a des Equimultiples de deux Grandeurs on adjoûte d'autres Equimultiples, les Tous seront encore Equimultiples.

De mesme si des Equimultiples de deux Grandeurs l'on ôste des Equimultiples , les Restes seront encore Equimultiples de ces Grandeurs, ou leur seront égaux.

7. Raison, c'est le raport qui est entre deux Grandeurs de mesme Genre , comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Les Grandeurs de mesme Genre , comme sont deux Lignes, deux Surfaces, deux Corps, s'appellent Homogenes.

Les Grandeurs de divers Genre , comme une Ligne & une Surface, une Surface & un Corps, s'appellent Eterogenes.

Or le rapport qui est entre deux Grandeurs de mesme Genre, lorsqu'on les compare l'une à l'autre, pour sçavoir comment & combien de fois l'une contient l'autre, ou l'autre est contenuë, s'appelle *Raison*.

Et d'autant qu'on ne peut pas dire comment & combien de fois une Grandeur est contenuë dans une autre qui n'est pas de mesme Genre, cela fait qu'il n'y a point de Raison entre des Grandeurs de divers Genre.

De mesme, d'autant que c'est une propriété particuliere aux Grandeurs finies, de pouvoir servir de mesure, & de pouvoir estre mesurées, & qu'on ne peut pas dire qu'une Grandeur infinie contienne tant de fois une grandeur finie, ny qu'une Grandeur finie soit contenuë tant de fois dans une Grandeur infinie ; De là vient aussi qu'il n'y a point de Raison entre une Grandeur finie & une infinie, encore qu'on les suppose toutes deux de mesme Genre.

8. Les Termes d'une Raison, sont les deux Grandeurs que l'on compare ensemble.

9. L'Antecedent d'une Raison, est le premier Terme des deux que l'on compare l'un à l'autre.

10. Le Consequent d'une Raison, est le second Terme des deux que l'on compare.

Ainsi comparant 15. à 10. l'Antecedent est 15. & le Consequent est 10.

11. La Raison d'Egalité, est une Raison où l'Antecedent est égal au Consequent.

12. La Raison d'inegalité, est une Raison où l'Antecedent n'est pas égal au Consequent.

13. La Raison d'inegalité Majeure, est une Raison où l'Antecedent est plus grand que le Consequent.

14. La Raison d'inegalité Mineure, est une Raison où l'Antecedent est plus petit que le Consequent.

15. La Raison Rationelle, ou la Raison de nombre à nombre, est celle où l'on peut exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Consequent, ou combien de fois il est contenu dans le Consequent. Telle est la Raison qui est entre une Ligne de 6. piez, & une Ligne de 4. piez, ou l'Antecedent contient le Consequent une fois & demy ; ou celle qui est entre une Ligne de 2. piez, & une Ligne de 4. piez, ou l'Antecedent est contenu deux fois dans le Consequent.

16. La Raison Irrationelle, ou Sourde, est celle où il est impossible d'exprimer par nombre combien de fois l'Antecedent contient le Consequent, ou combien de fois il est contenu dans le Consequent ; comme la Raison qui est en-

tre le Costé d'un Quarré & sa Diagonale ; qui est telle ; qu'encore que chaque Ligne à part ait plusieurs Parties Aliquotés, il n'y en a pourtant pas une de celles qui mesurent l'une , qui puisse mesurer l'autre ; & ainsi on ne scauroit exprimer par nombre le raport qui est entre ces deux Lignes.

17. La quantité d'une Raison d'inegalité majeure, est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent contient le Consequent.

Ainsi comparant une Grandeur de 12. piez avec une Grandeur de 6. piez, la quantité de cette Raison est 2. d'autant que 12. piez contiennent 6. piez deux fois, & cette Raison s'appelle Double ; De mesme, comparant 12. à 4. la quantité de cette Raison est 3. d'autant que 12. contient 4. trois fois, & cette raison s'appelle Triple ; De mesme encore, comparant 12. à 8. la quantité de cette Raison est un & demy, d'autant que 12. contient 8. une fois & demy, & cette Raison s'appelle Sesquialtere, &c.

18. La quantité d'une Raison d'inegalité mineure, est le nombre qui exprime comment & combien de fois l'Antecedent est contenu dans le Consequent, ou qu'elle Partie il est du Consequent.

Ainsi comparant une Grandeur de 6. piez, avec une de 12. piez, la quantité de cette Raison est un demy, parce que 6. piez, sont la moitié de 12. piez, & cette Raison s'appelle Sous-double ; De mesme, comparant 4. à 12. la quantité de cette Raison est un tiers, d'autant que 4. est le Tiers de 12. Et cette Raison s'appelle Sous-triple ; Et de mesme encore, comparant 8. à 12. la quantité de cette Raison est deux Tiers, d'autant que 8. sont les deux Tiers de 12. Et cette Raison s'appelle Sous-sesquialtere.

Par là, il paroist que deux Raisons sont égales, lorsque l'Antecedent de l'une contient son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre contient le sien ; ou bien lorsque l'Antecedent de l'une est contenu dans son Consequent, comme l'Antecedent de l'autre est contenu dans le sien.

Ainsi la Raison de 15. à 10. est égale à la Raison de 12. à 8.

parce que comme 15. contient 10. une fois & demy, de mesme 12. contient 8. une fois & demy.

Mais une Raison est plus grande qu'une autre, lorsque l'Antecedent de la premiere contient plus de fois son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne contient le sien; ou bien lorsque l'Antecedent de la premiere est une plus grande Partie de son Consequent, que l'Antecedent de la seconde ne l'est du sien.

Ainsi la Raison de 15. à 5. est plus grande que la Raison de 12. à 6. parce que l'Antecedent 15. contient son Consequent 5. trois fois, au lieu que l'Antecedent 12. ne contient son Consequent 6. que deux fois; Tout au contraire la Raison de 6. à 12. est plus grande que la Raison de 5. à 15. parce que l'Antecedent 6. est la moitié de son Consequent 12. au lieu que l'Antecedent 5. n'est que le tiers de son Consequent 15.

19. Proportion, c'est la ressemblance ou l'égalité de deux Raisons.

Ainsi il y a Proportion entre ces quatre Grandeurs

15. — 10. — 12. — 8.

Parce que la Raison de 15. à 10. est la mesme, ou est égale à la Raison de 12. à 8; ou comme l'on dit communément, parce que 15. est à 10. comme 12. est à 8.

20. Des Grandeurs Proportionelles, sont celles entre lesquelles il y a Proportion.

Ainsi les Grandeurs 15. — 10. — 12. — 8. sont proportionelles; Car comme 15. contient 10. une fois & demy, ainsi 12. contient 8. une fois & demy.

21. La Proportion continuë, est celle où le Consequent de la premiere Raison sert d'Antecedent à la seconde.

Ainsi il y a Proportion continuë entre ces trois Grandeurs 18. — 12. — 8. Parce que 18. est à 12. comme 12. est à 8. où l'on voit que 12. qui est le Consequent de la premiere Raison, est l'Antecedent de la seconde.

22. La Proportion non continuë, est celle où l'Antecedent de la seconde Raison est different du Consequent de la premiere.

Telle est la Porportion qui est entre ces quatre Grandeurs 15.—10.—12.—8. Parce que 12. qui est l'Antecedent de la seconde Raison, est différent de 10. qui est le Consequent de la premiere.

23. Les Termes homologues d'une Proportion, sont ceux qui tiennent le mesme rang, ou qui sont de mesme nom, dans une Proportion.

Ainsi dans la Proportion précédente, les deux Antecedens 15. & 12. & les deux Consequents 10. & 8, sont des Termes homologues, parce qu'ils tiennent le mesme rang, & ont un mesme nom, dans cette Proportion.

Remarquez que la Proportion, dont il a esté parlé jusques icy, s'appelle Geometrique, pour la distinguer d'une autre, qu'on nomme Arithmetique; laquelle se rencontre entre trois Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont cette seconde surpasse la troisieme, ou en est surpassée; ou bien entre quatre Grandeurs, dont la premiere surpasse la seconde, ou en est surpassée, d'une quantité égale à celle dont la troisieme surpasse la quatrieme, ou en est surpassée.

Ainsi la Porportion qui se rencontre entre ces trois Grandeurs, 16.—12.—8. est une Proportion Arithmetique, parce que comme la premiere surpasse la seconde de quatre, de mesme aussi la seconde surpasse la troisieme de quatre.

Ainsi la Proportion qui se rencontre entre ces quatre Grandeurs 15.—10.—7.—2. est encoire une Proportion Arithmetique, parce que comme la premiere surpasse la seconde de 5. de mesme aussi la troisieme surpasse la quatrieme de 5.

Comme la Proportion Geometrique est la principale, & d'un plus grand usage que la Proportion Arithmetique, c'est aussi de celle-là dont nous entendrons parler, quand nous parlerons simplement de Proportion.

24. Conclure en Raison Inverse, ou en changeant les Termes, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que le Consequent de la premiere Raison est à son Antecedent, comme le Consequent de la seconde est au sien; Ou ce qui est la mesme chose, c'est changer les

LIVRE CINQUIEME. 195

Termes des Raisons, & faire que le Consequent devienne l'Antecedent, & l'Antecedent le Consequent.

Ainsi apres avoir montré que 15. est à 10. comme 12. est à 8. si l'on vient à dire, donc 10. est à 15. comme 8. est à 12 ; Cela s'appelle conclure en Raison Inverse.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles sont encore proportionnelles en Raison Inverse ; Car s'il est vray que l'Antecedent de la premiere Raison contienne son Consequent, de mesme que l'Antecedent de la seconde contient le sien ; Il est vray aussi que le Consequent de la premiere est contenu dans son Antecedent, de mesme que le Consequent de la seconde est contenu dans le sien.

Ou bien au contraire, si l'Antecedent de la premiere Raison est contenu dans son Consequent, de mesme que l'Antecedent de la seconde est contenu dans le sien ; Il est vray aussi que le Consequent de la premiere Raison contient son Antecedent, de mesme que le Consequent de la seconde contient le sien ; Car contenir & estre contenu sont Termes relatifs, qui s'entendent & qui s'expliquent l'un par l'autre.

25. Conclure en Raison Alterne, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere raison est à l'Antecedent de la seconde, comme le Consequent de la premiere est au Consequent de la seconde.

Ainsi, apres avoir montré que 15. est à 10. comme 12. est à 8. si l'on vient à dire, donc 15. est à 12. comme 10. est à 8. Cela s'appelle conclure en Raison Alterne.

Quelques-uns estiment que supposé que quatre Grandeurs soient proportionnelles, il est évident qu'on peut conclure qu'elles sont proportionnelles en Raison Alterne.

Neanmoins, il faut remarquer qu'on ne peut valablement conclure en Raison Alterne, à moins que les quatre Grandeurs ne soient de mesme genre ; Car par exemple, si on supposoit qu'une Ligne fust à une autre Ligne, comme une Superficie est à une autre Superficie, on ne pourroit pas

pour cela conclure que la premiere Ligne seroit à la premiere Superficie, comme la seconde Ligne est à la seconde Superficie, étant évident, par ce qui a été dit cy-dessus, qu'il n'y a point de raison d'une Ligne à une Superficie.

26. Conclure en composant, c'est de quatre Grandeurs, qui sont proportionnelles, conclure que la somme de l'Antecedent & du Consequent de la premiere Raison, est au seul Consequent de cette premiere Raison, comme la somme de l'Antecedent & du Consequent de la seconde Raison, est au seul Consequent de cette seconde Raison.

Ainsi, après avoir montré que 15. est à 10. comme 12. est à 8. si l'on vient à dire, donc 25. est à 10. comme 20. est à 8. Cela s'appelle conclure en composant.

Or il est évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, on peut conclure en composant, qu'elles sont aussi proportionnelles; Car conclure en composant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Conséquens une fois plus que les premiers Antecedens ne les contenoient; Or par la supposition, les premiers Antecedens contenoient également leurs Conséquens; D'où il suit, que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également; Et ainsi ces quatre Grandeurs doivent être encore proportionnelles.

27. Conclure en divisant, c'est de quatre Grandeurs qui sont proportionnelles, conclure que l'excez du premier Antecedent par dessus son Consequent, est à son Consequent, comme l'excez du second Antecedent par dessus son Consequent, est aussi à son Consequent.

Ainsi après avoir montré que 15. est à 10. comme 12. est à 8. si l'on vient à dire, donc 5. est à 10. comme 4. est à 8. Cela s'appelle conclure en divisant.

Il est encore évident que si quatre Grandeurs sont proportionnelles, on peut conclure en divisant qu'elles sont aussi proportionnelles. Car conclure en divisant, n'est autre chose que composer de nouveaux Antecedens, qui contiennent leurs Conséquens une fois moins que les premiers Antecedens ne les contenoient. Or par la Supposition les premiers

premiers Antecedens contenoient également leurs Consequens ; D'où il suit que les nouveaux Antecedens les doivent encore contenir également ; Et ainsi ces quatre Grandezs doivent estre encore proportionnelles.

28. Conclure par conversion de Raison, C'est de quatre Grandezs qui sont proportionnelles, conclure que l'Antecedent de la premiere Raison est à son excez par dessus son Consequent, comme l'Antecedent de la seconde est à son excez par dessus le sien.

Ainsi, après avoir montré que 15. est à 10. comme 12. est à 8. si l'on vient à dire, donc 15. est à 5. comme 12. est à 4. Cela s'appelle conclure par conversion de Raison.

Il est encore évident que si quatre Grandezs sont proportionnelles, on peut conclure par conversion de Raison qu'elles sont aussi proportionnelles ; Car puisque, par Supposition, les Antecedens contiennent également les Consequens, c'est une nécessité que les Consequens soient des Parties semblables des Antecedens ; Si donc on oste les Consequens des Antecedens, les restes seront encore des Parties semblables des mêmes Antecedens ; Et par conséquent les Antecedens les contiendront également, & la Raison qui sera entr'eux sera semblable.

29. Raison composée, c'est une Raison dont la Quantité résulte de la Multiplication de la Quantité de plusieurs autres Raisons.

Pour bien entendre cette Definition, considerez par exemple ces trois Grandezs, 24. 6. 2 : Et remarquez que la premiere estant Quadruple de la seconde, & la seconde estant Triple de la troisième, & par conséquent la quantité de la Raison de la premiere à la seconde estant 4. & celle de la seconde à la troisième estant 3. Il est vray de dire que la premiere Grandeur, comparée à la troisième, en est le Quadruple du Triple, ou la contient quatre fois trois fois, c'est à dire douze fois ; Si bien que la quantité de la Raison de la premiere Grandeur à la troisième est 12. Or cette Raison Dodecuple, qui résulte de la Multiplication de la

quantité des deux Raisons particulieres 4. & 3. est ditte composée de ces deux Raisons.

Il suit delà, que si on dispose à discretion tant de Grandeurs que l'on voudra, la Raison de la premiere à la derniere, sera composée de toutes les Raisons moyennes & particulieres, qu'ont entr'elles toutes ces Grandeurs, estant comparées de suite l'une à l'autre. Ainsi, ayant disposé à discretion ces quatre Grandeurs, 12, 6, 3, 12. la Raison de 24. à 12. (qui est une Raison double) est composée de celles de 24. à 6. de 6. à 3. & de 3. à 12; Et de fait, multipliant l'un par l'autre 4. 2. & $\frac{1}{2}$ (qui sont les quantitez de ces Raisons) le produit, qui est 2. est la quantité de la Raison de 24. à 12.

Remarquez que comme le mesme produit qui resulte de la Multiplication de deux nombres, peut resulte de la Multiplication de deux autres, aussi une mesme Raison peut estre composée de plusieurs Raisons differentes; Ainsi par exemple la Raison Dodecuple que nous avons veu cy-dessus estre composée de la Quadruple & de la Triple, peut aussi estre composée de la Sextuple & de la Double.

Maintenant, si les Raisons qui se trouvent entre plusieurs Grandeurs d'une part, sont égales ou semblables à celles qui se rencontrent entre plusieurs autres Grandeurs d'une autre part, chacune à la sienne; Il est évident que la Raison composée des premieres Raisons, doit estre égale à la Raison composée des autres semblables; estant necessaire que les mesmes Quantités ou les mesmes Nombres multipliés deux fois, produisent le mesme nombre ou la mesme quantité.

Ainsi, si l'on suppose d'une part ces trois Grandeurs 24. 6. 2. & d'autre part ces trois autres Grandeurs 36. 9. 3. entre lesquelles les mesmes Raisons, sçavoir la Quadruple & Triple, se rencontrent, c'est une necessité que la Raison de 24. à 2. soit semblable à la Raison de 36. à 3. puisque la Quantité de chacune de ces Raisons resulte de la Multiplication de 4. par 3.

30. Raison doublée, c'est une Raison composée de deux Raisons semblables.

Ainsi supposant trois Grandeurs continuellement propor-

tionelles, telles que sont celles-cy, 64. 16. 4 ; Puis comparant la première à la troisième, la Raison qui se trouve entre ces deux Grandeurs, 64. & 4. (laquelle est composée des deux Raisons semblables de 64. à 16. & de 16. à 4.) s'appelle Raison doublée de 64. à 16.

31. Raison triplée, c'est une Raison composée de trois Raisons semblables.

Ainsi, supposant quatre Grandeurs continuëment proportionnelles, comme sont les suivantes 64. 16. 4. 1 ; Puis comparant la première à la quatrième, la Raison qui se trouve entre ces deux Grandeurs, 64. & 1. (laquelle est composée des trois Raisons semblables de 64. à 16 ; de 16. à 4 ; & de 4. à 1 ;) s'appelle Raison triplée de 64. à 16.

32. Proportion ordonnée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte, que la première du premier Ordre soit à la seconde, comme la première du second Ordre est à la seconde ; Puis la seconde du premier Ordre à la troisième, comme la seconde du second Ordre à la troisième ; Et la troisième du premier Ordre à la quatrième, comme la troisième du second est à la quatrième, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les quatre Grandeurs suivantes 12. 4. 2. 8. & d'autre part ces quatre autres 30. 10. 5. 20. qui sont disposées de telle sorte, que la première 12. est à la seconde 4 ; comme la première 30. est à la seconde 10 ; Que la seconde 4. est à la troisième 2. comme la seconde 10. est à la troisième 5 ; Et que la troisième 2. est à la quatrième 8. comme la troisième 5. est à la quatrième 20 ; Cet arrangement s'appelle Proportion ordonnée.

33. Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la première du premier Ordre soit à la seconde, comme la penultième du second Ordre est à la dernière ; Puis la seconde du premier Ordre à la troisième, comme l'antépénultième du second Ordre à la penultième, & ainsi de suite.

Ainsi, ayant mis d'une part les trois Grandeurs 12. 4. 2 ; & d'autre part ces trois autres 18. 9. 3. qui sont disposées de telle sorte, que la premiere 12. est à la seconde 4. comme la penultième 9. est à la dernière 3 ; Et que la seconde 4. est à la troisième 2. comme l'antépénultième 18. à la penultième 9 ; Cét arrangement s'appelle Proportion troublée.

34. Conclure en Raison égale, c'est (après avoir supposé que quelques Grandeurs d'une part, & autant d'autres d'une autre part sont proportionnelles, soit en Proportion ordonnée, soit en Proportion troublée) conclure que la premiere d'une part est à la dernière, comme la premiere de l'autre part est à la dernière.

Ainsi, dans l'exemple qui a esté cy-dessus rapporté de la Proportion ordonnée, conclure que la premiere Grandeur 12. est à la dernière 8. comme la premiere 30. est à la dernière 20 ; Ou bien, dans l'exemple de la Proportion troublée, conclure que la premiere Grandeur 12. est à la dernière 2. comme la premiere 18. est à la dernière 3 ; Cela s'appelle conclure en Raison égale.

Il est certain qu'on peut fort bien conclure en Raison égale, c'est à dire qu'on peut fort bien conclure, que la Raison de la premiere Grandeur à la dernière d'une part, est semblable à la Raison de la premiere Grandeur à la dernière de l'autre part ; Car chacune de ces Raisons est composée des Raisons moyennes & particulieres qu'il y a entre ces Grandeurs, lesquelles Raisons sont supposées égales, ou les mesmes, & qui par conséquent doivent produire une mesme quantité.

Ainsi dans cet exemple de la Proportion ordonnée 12. 4. 2. 8 ; 30. 10. 5. 20 ; La Raison de 12. à 8. est composée de la Raison triple, de la Double, & de la Sous-quadruple ; Et de mesme la Raison de 30. à 20. est composée de la Raison Triple, de la Double, & de la Sous-quadruple, qui sont les mesmes.

De mesme aussi dans cet exemple de la Proportion troublée 12. 4. 2 ; 18. 9. 3 ; La Raison de 12. à 2. est composée de la Raison Triple, & de la Double ; ou resulte de la

Multiplication 3. par 2 ; Et de même la Raison de 18. à 3. est composée de la Raison Double & de la Triple ; ou résulte de la Multiplication de 2. par 3. qui sont les mêmes, & doivent par conséquent produire une même Quantité.

Encore que toutes les manières de conclure, dont il a été parlé cy-dessus, paroissent fort justes & convaincantes à tous ceux qui les examinent avec un peu d'attention ; Neantmoins Euclide a jugé à propos de les démontrer, aussi bien que quelques autres veritez aussi faciles ; Et c'est à quoy il employe le cinquième Livre de ces Elemens ; Mais il présuppose les trois Axiomes suivans, qui à dire le vray ne sont pas plus évidens que les choses à la preuve desquelles il les employe.

Axiomes.

1. Si de quatre Grandeurs proportionnelles, l'on prend à discretion des Equimultiples des deux Antecedens, comme aussi des deux Consequens, les Equimultiples des deux Antecedens seront toujours, ou plus grands, ou plus petits, ou égaux à ceux des Consequens.

Ainsi, de ces quatre Grandeurs, qui sont proportionnelles, 15. 10. ; 12. 8 ; Prenant à discretion des Equimultiples de 15. & de 12 ; comme aussi de 10. & de 8. Si l'Equimultiple de 15. surpasse l'Equimultiple de 10. l'Equimultiple de 12. surpassera l'Equimultiple de 8 ; ou bien si l'Equimultiple de 15. est égale à l'Equimultiple de 10. l'Equimultiple de 12. sera aussi égale à l'Equimultiple de 8 ; Ou enfin si l'Equimultiple de 15. est moindre que l'Equimultiple de 10. l'Equimultiple de 12. sera aussi moindre que l'Equimultiple de 8.

2. Tout au contraire, si quatre Grandeurs sont telles, qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la première & de la troisième, c'est à dire des deux Antecedens, & de la seconde, & de la quatrième, c'est à dire des deux Consequens ; Il arrive que l'Equimultiple de la première ne puisse jamais estre égale à l'Equimultiple de la seconde,

sans que l'Equimultiple de la troisième ne soit aussi égale à l'Equimultiple de la quatrième ; Ou que l'Equimultiple de la première ne puisse jamais surpasser l'Equimultiple de la seconde , sans que l'Equimultiple de la troisième ne surpassé celle de la quatrième ; Ou enfin que l'Equimultiple de la première ne puisse jamais estre moindre que l'Equimultiple de la seconde , sans que l'Equimultiple de la troisième ne soit aussi moindre que celle de la quatrième ; alors ces quatre Grandeurs sont proportionelles. Ainsi parce que ces circonstances arrivent toujours en ces quatre Grandeurs 15. 10 : 12. 8. elles sont proportionelles..

3. Enfin , si quatre Grandeurs sont telles , qu'en prenant à discretion des Equimultiples de la première & de la troisième , comme aussi de la seconde & de la quatrième , il puisse quelquefois arriver , que l'Equimultiple de la première surpassera l'Equimultiple de la seconde , sans que l'Equimultiple de la troisième surpassé celle de la quatrième ; alors ces quatre Grandeurs ne sont pas proportionelles ; Et il y a plus grande Raison de la première à la seconde , que de la troisième à la quatrième. Ainsi ces quatre Grandeurs , 12, 6 ; 7, 5, ne sont pas proportionelles ; & il y a plus grande Raison de 12. à 6. que de 7. à 5. Car prenant à discretion des Equimultiples de 12. & de 7. par exemple 24. & 14. comme aussi de 6. & de 5. par exemple 18. & 15. Il arrive que l'Equimultiple de 12. sçavoir 24. surpassé 18. Equimultiple de 6, sans que l'Equimultiple de 7. sçavoir 14. surpassé 15. Equimultiple de 5.



PROPOSITION I.

THEOREME I.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra Equimultiples d'autant d'autres Grandeurs, chacune à la sienne, comme l'une sera Multiple de l'une, ainsi les Toutes seront Multiples des Toutes.

JE suppose qu'il y ait d'une part deux Grandeurs, sçavoir AB, CD, & d'autre part deux autres Grandeurs, sçavoir E, & F ; Et que AB, soit autant Multiple de E, que CD, est Multiple de F ; Cela estant, je dis que comme AB, est Multiple de E, ou CD, Multiple de F ; De même AB, & CD, prises ensemble, sont Multiples de E, & de F, prises aussi ensemble : Pour le prouver.



Concevez que AB, soit divisée en trois Parties égales à E, sçavoir AG, GH, HB ; & CD, en trois Parties égales à F, sçavoir CI, IK, KD, ce qui est possible, puisque AB, & CD, sont supposées Equimultiples de E, & de F ; Cela posé.

Puisque AG, est égale à E, & que CI, est égale à F ; Il s'ensuit que AG, & CI, prises ensemble seront égales à E, & à F, prises aussi ensemble ; De même GH, & IK, prises ensemble, seront aussi égales à E, & à F, prises ensemble ; Et ainsi de suite ; Et parce que AB, & CD, sont supposées Equimultiples de E, & de F, & qu'ainsi le nombre des Parties de AB égales à E, est égal au nombre des Parties de CD égales à F, autant de fois que l'on pourra prendre dans AB, une Partie égale à E, autant de fois on pourra prendre dans AB, & CD, des Parties égales à E, & à F ; Et par conséquent, comme AB, est Triple de E, ainsi AB, & CD,

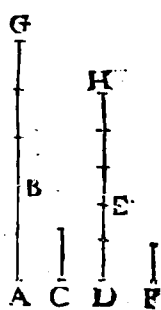
prises ensemble, sont Triples de E, & de F, prises aussi ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si la premiere Grandeur est autant Multiple de la seconde, que la troisieme l'est de la quatrieme, & la cinquieme encore autant Multiple de la seconde, que la sixieme l'est aussi de la quatrieme, la Grandeur composée de la premiere & de la cinquieme sera autant Multiple de la seconde, que la composée de la troisieme & de la sixieme le sera de la quatrieme.

JE suppose ces six Grandeurs AB, C, DE, F, BG, EH, & que la premiere AB, soit autant Multiple de la seconde C, que la troisieme DE, l'est de la quatrieme F ; Et que la cinquieme BG, soit encore autant Multiple de la seconde C, que la sixieme EH, l'est aussi de la quatrieme F ; Cela estant, je dis que la Grandeur composée de la premiere & de la cinquieme, sçavoir AG, est autant Multiple de la seconde C, que la Grandeur DH, composée de la troisieme, & de la sixieme, l'est de la quatrieme F ; Pour le prouver.



Puisque AB, & DE, sont Equimultiples de C, & de F, le nombre des Parties que AB contient égales à C, est égal au nombre des Parties que DE contient égales à F ; De mesme, puisque BG, & EH, sont encore Equimultiples de C, & de F, le nombre des Parties que BG contient égales à C, est aussi égal au nombre des Parties que EH contient égales à F ; Si donc aux nombres égaux des Parties de AB, & de DE, on ajoute les nombres égaux des Parties de

de BG, & de EH, il s'ensuivra que le nombre des Parties que la Toute AG contiendra égales à C, sera égal au nombre des Parties que la Toute DH contiendra égales à F, c'est à dire que AG, sera autant Multiple de C, que DH, le sera de F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

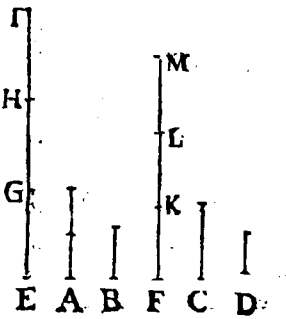
THEOREME III.

Si la premiere Grandeur est autant Multiple de la seconde, que la troisieme l'est de la quatrieme, & qu'on prenne des Equimultiples de la premiere & de la troisieme, l'Equimultiple de la premiere sera autant Multiple de la seconde, que l'Equimultiple de la troisieme le sera de la quatrieme.

Je suppose ces quatre Grandeurs A, B, C, D, dont la premiere à sçavoir A, est autant Multiple de la seconde B, que la troisieme C, l'est de la quatrieme D ; Je suppose deplus qu'on ait pris les Grandeurs EI, & FM, Equimultiples de la premiere A, & de la troisieme C ; Cela estant, je dis que EI, est autant Multiple de la seconde B, que FM, l'est de la quatrieme C ; Pour le prouver.

Concevez que EI, soit divisée en trois Parties égales à A, sçavoir, EG, GH, HI ; & FM en trois Parties égales à C, sçavoir FK, KL, LM ; Cela posé.

Puisque EG est égale à A, & FK égale à C, Il s'ensuit que EG, & FK, contiennent autant de fois B, & D, que A, & C, les contiennent ; Il en est de mesme des Parties GH, & KL, & ainsi de suite. Or puisque la premiere



Grandeur EG, est autant Multiple de la seconde B, que la troisième FK, l'est de la quatrième D ; & que la cinquième GH, est encore autant Multiple de la seconde B, que la sixième KL, l'est de la quatrième D ; Il s'ensuit, par la Proposition précédente, que la Grandeur EH, composée de la première & de la cinquième, est autant Multiple de la seconde B, que la Grandeur FL, composée de la troisième & de la sixième l'est de la quatrième D ; Ensuite dequoy prenant EH, & FL, pour la première & troisième Grandeur ; Et HI, & LM, pour la cinquième & la sixième ; On conclura de même que EI, est autant Multiple de B, que FM, l'est de D ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

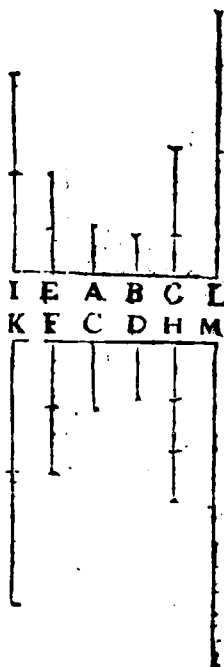
THEOREME IV.

Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, & qu'on prenne à discretion des Equimultiples de la première & de la troisième, comme aussi des Equimultiples de la seconde & de la quatrième, il y aura même Raison de l'Equimultiple de la première à l'Equimultiple de la seconde, que de l'Equimultiple de la troisième à l'Equimultiple de la quatrième.

JE suppose que A, soit à B, comme C, est à D ; & qu'on ait pris à discretion E, & F, Equimultiples de la première A, & de la troisième C ; Comme aussi G, & H, Equimultiples de la seconde B, & de la quatrième D ; Cela estant, je dis qu'il y a même Raison de E, Equimultiple de la première, à G, Equimultiple de la seconde, que de F, Equimultiple de la troisième, à H, Equimultiple de la quatrième ; Pour le prouver.

Prenez I, & K, Equimultiples de E, & de F ; Prenez aussi L, & M, Equimultiples de G, & de H ; Cela posé,

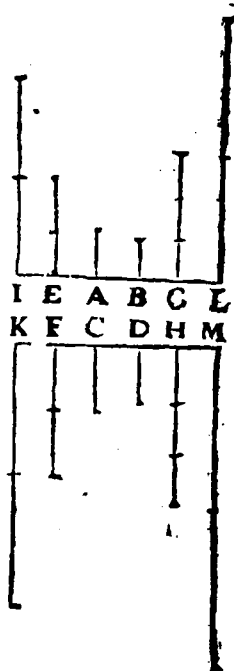
Puisque E, considérée comme première
 Grandeur, est autant Multiple de A, con-
 sidérée comme seconde, que F, troisième,
 l'est de C, quatrième, & qu'on a pris les
 Grandeurs I, & K, Equimultiples de
 E, & de F; Il s'ensuit par la Proposition
 précédente, que I, & K, sont aussi Equi-
 multiples de A, & de C, c'est à dire de la
 première & de la troisième des quatre que
 nous avons supposées Proportionnelles; De
 même G, & H, étant Equimultiples de
 B, & de D; Et L, & M, ayant été pri-
 ses Equimultiples de G, & de H, Il s'en-
 suit que L, & M, sont Equimultiples de
 B, & de D, c'est à dire de la seconde &
 de la quatrième des quatre que nous
 avons supposées proportionnelles; Par con-
 séquent, par le premier Axiome de ce Li-
 vre, si l'Equimultiple I, surpasse l'Equi-
 multiple L, l'Equimultiple K, surpassera
 l'Equimultiple M; Si elle est égale, l'aut-
 re sera égale, si elle est moindre, l'autre sera aussi moi-
 dre. Cela étant, puisque I, & K, ont été prises Equi-
 multiples de E, & de F, première & troisième des quatre
 Grandeurs qu'il s'agit de prouver estre proportionnelles; Et
 que L, & M, ont été prises Equimultiples de G, & de H,
 seconde & quatrième de ces quatre Grandeurs, il s'ensuit
 par le second Axiome qu'elles sont en effet proportionnel-
 les; & qu'ainsi il y a même Raison de E, à G, que de F,
 à H; Ce qu'il falloit démontrer.



Remarque.

Par cette même Methode on peut aisément prouver que
 si quatre Grandeurs sont proportionnelles, elles seront en-
 core proportionnelles en Raison Inverse, Par exemple si A,
 est à B, comme C, est à D, on prouvera aisément que B,

sera à A, comme D, est à C ; Car après avoir pris E, & F, Equimultiples de A, & de C, première & troisième Grandeurs des quatre qui sont supposées Proportionnelles ; Puis G, & H, Equimultiples de B, & D, seconde & quatrième ; On conclura, par le premier Axiome de ce Livre, que si E est égale à G, F sera égale à H ; Si E surpasse G, F surpassera H ; Et si E, est moindre que G, F sera moindre que H ; Or si cela est vrai, il est donc vrai aussi, que si G, est égale à E, H sera égale à F ; Si G, est moindre que E, H sera moindre que F ; Et si G, surpasse E, H surpassera aussi F ; Considerant donc maintenant B, comme première Grandeur, A comme seconde, D comme troisième, & C comme quatrième, on conclura par le second Axiome que ces quatre Grandeurs sont proportionnelles en Raison Inverse, c'est à dire que B est à A, comme D est à C ; Ce qu'il falloit démontrer.

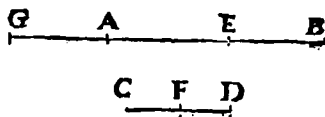


PROPOSITION V.

THEOREME V.

Si une Grandeur est autant Multiple d'une autre Grandeur, que la Retranchée l'est de la Retranchée, le Reste sera autant Multiple du Reste que la Toute l'est de la Toute.

JE suppose que AB, est autant Multiple de CD, que la Retranchée AE, l'est de la Retranchée CF ; Cela étant, je dis que le Reste EB, est autant Multiple du Reste FD,



que la Toute AB, l'est de la Toute CD ; Pour le prouver.

Posons que GA, soit autant Multiple de FD, que AE, l'est de CF ; ou que AB, l'est de CD ; Il s'ensuivra, par la 1. Prop. de ce Livre, que GE, sera autant Multiple de CD, que AE, l'est de CF ; Or AB est supposée autant Multiple de CD, que AE l'est de CF ; Donc GE, est autant Multiple de CD, que AB, l'est aussi de CD ; Et par conséquent les Grandeurs GE, & AB, qui sont Equimultiples d'une même Grandeur, sont égales entr'elles ; Si donc on ôte la Partie AE, qui leur est commune, le Reste GA, sera égal à EB ; Or GA, a été posé autant Multiple de FD, que AB, l'est de CD ; Et partant EB, est autant Multiple de FD, que AB, l'est de CD ; Ce qu'il falloit démontrer.

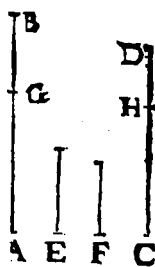
PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

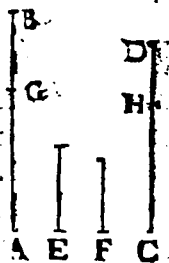
Si deux Grandeurs sont Equimultiples de deux autres Grandeurs, & qu'on en retranche des Equimultiples, les Restes seront Equimultiples de ces mêmes Grandeurs, ou ils leur seront égaux.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, CD, soient Equimultiples des deux autres Grandeurs E, & F, & qu'on en ait retranché AG, & CH, Equimultiples des mêmes Grandeurs E, & F ; Cela posé, je dis que les Restes GB, & HD, sont Equimultiples de E, & de F, ou qu'ils leur sont égaux ; Pour le prouver.

Puisque AB, & CD, sont Equimultiples de E, & de F, il y a dans AB, autant de Parties égales à E, qu'il y en a dans CD d'égales à F ; Et puisque AG, & CH, sont aussi Equimultiples de E, & de F, Il y a aussi dans AG, autant de Parties égales à E, qu'il y en a dans CH, d'égales



à F ; Si donc des deux nombres égaux de Parties qui sont contenuës dans AB, & dans CD, on oste les nombres égaux de Parties qui sont contenuës dans AG, & dans CH, Il s'ensuit qu'il restera dans GB, autant de Parties égales à E, qu'il en restera dans HD, d'égales à F ; Et par conséquent s'il en reste plusieurs dans GB, & dans HD, ces Restes seront Equimultiples de E, & de F ; Que s'il n'en reste qu'une, ces Restes leur seront égaux ; Ce qu'il falloit démontrer.

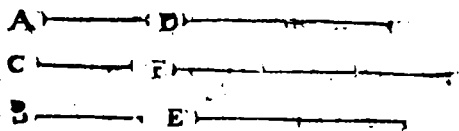


PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Les Grondeurs Egaux ont mesme Raison à une mesme Grondeur ; & une mesme Grondeur à mesme Raison à des Grondeurs Egaux.

JE suppose que les deux Grondeurs A, & B, sont égales ; Cela estant, je dis premierement que la Raison de A, à C, est la même que celle de B, à C ; Pour le prouver.



Prenez à discretion les Grondeurs D, & E, Equimultiples de la premiere Grondeur A, & de la troisieme B ; Prenez encore à discretion la Grondeur F, Equimultiple de la seconde & quatrieme C ; Cela posé.

Puisque les Grondeurs D, & E, sont Equimultiples des deux Grondeurs égales A, & B, elles sont aussi égales entr'elles ; Et par conséquent si D, est égale à F, E luy est aussi égale, Si D, est plus grande que F, E est aussi plus grande que F ; Enfin si D est moindre que F, E est aussi moindre que F ; D'où il suit que A, est à C, comme B,

est à C, par le 1. Ax. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu qu'il y a même Raison de C, à A, que de C, à B ; Car puisque A est à C, comme B est à C ; En Raison Inverse (par le Corollaire de la 4. Prop. de ce Livre) C est à A, comme C est à B ; Ce qu'il falloit aussi démontrer.

PROPOSITION VIII.

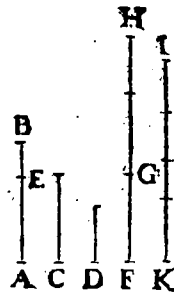
THEOREME VIII.

Si deux Grandeurs sont Inégales, la plus grande aura plus grande Raison à une même Grandeur, que la plus petite ; Et au contraire, cette même Grandeur aura plus grande Raison à la plus petite, qu'à la plus grande.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, & C soient Inégales, & que AB, soit la plus grande ; Cela étant, je dis premierement que AB, a plus grande Raison à D, que C n'a à D ; Pour le prouver.

Retranchez de AB, la Partie AE, égale à C ; Puis prenez HG, & GF, Equimultiples de AE, & de EB ; de telle sorte que chacune des deux Grandeurs HG, GF, surpasse la Grandeur D ; Prenez encore la Grandeur IK, tellement Multiple de D, qu'elle soit plus grande que HG, mais plus petite que HF ; Or cela se peut faire aisément ; Car puisque GF, surpasse D, il est aisé de multiplier D, en sorte qu'il surpasse HG, sans qu'il surpasse HF ; Cela posé.

Puisque HG, & GF, sont Equimultiples de AE, & de EB, il s'ensuit par la 1. Prop. que HF, est autant Multi-

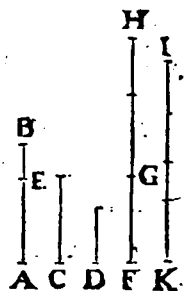


ple de la Toute AB, que HG, l'est de AE, ou de son égale C.

Considerant dont icy ces quatre Grandeurs AB premiere, D seconde, C troisieme, & derechef D quatrieme. & que les Grandeurs HF, HG, sont Equimultiples de la premiere AB, & de la troisieme C; Et que IK, est Equimultiple de la seconde & de la quatrieme D; Puisque HF, Multiple de la premiere AB, surpasse IK Multiple de la seconde D; sans que HG Multiple de la troisieme C, surpasse IK, Multiple de la quatrieme, qui est la mesme D; Il s'ensuit par le 3. Ax. que la premiere Grandeur AB, a plus grande Raison à la seconde D, que la troisieme C, n'a à la quatrieme, c'est à dire à la mesme Grandeur D; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu que la Grandeur D, a plus grande Raison à la plus petite C, qu'elle n'a à la plus grande AB; Pour le prouver.

Considerant maintenant D, comme premiere & troisieme Grandeur, C, comme seconde, & AB, comme quatrieme; Puisque IK. Multiple de la premiere D, surpasse HG Multiple de la seconde C, sans que IK Multiple de la troisieme D, surpasse HF, Multiple de la quatrieme AB; Il s'ensuit par le 3. Ax. que D, a plus grande Raison à la plus petite C, que la mesme D, n'a à la plus grande AB; Ce qu'il falloit encore démontrer.



PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

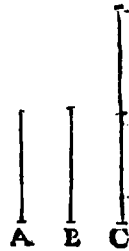
Les Grandeurs qui ont mesme Raison à une mesme Grandeur, sont égales entr'elles ; Et celles auxquelles une mesme Grandeur à mesme Raison, sont aussi égales entr'elles.

JE suppose premierement, que les deux Grands A, & B, ayent mesme Raison à la mesme Grandeur C ; Cela estant, je dis que ces deux Grands A, & B, sont égales entr'elles.

Car si cela n'estoit, il faudroit que l'une fust plus grande que l'autre ; Et cela estant, il s'en suivroit, par la Proposition précédente, que la plus grande auroit plus grande Raison à la Grandeur C, que n'auroit la plus petite ; ce qui est contre la Supposition ; l'une n'est donc pas plus grande que l'autre, Et par consequent elles sont égales.

Je suppose en second lieu, qu'une mesme Grandeur, comme C, ait mesme Raison à deux Grands, comme A, & B ; Cela estant, je dis que ces deux Grands A, & B, sont aussi égales entr'elles.

Car si cela n'estoit, il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre ; Et cela estant, il s'en suivroit, par la Proposition précédente, que la Grandeur C, auroit plus grande Raison à celle qui seroit plus petite, qu'elle n'auroit à la plus grande ; ce qui est contre la Supposition ; l'une n'est donc pas plus petite que l'autre ; Et par consequent elles sont égales ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION X.

THEOREME X.

De deux Grandeurs, celle qui a plus grande Raison à une mesme, est la plus grande ; Et au contraire, celle à laquelle une mesme a plus grande Raison, est la plus petite.

JE suppose premierement, que des deux Grandeurs A & B, A a plus grande Raison à C, que B n'a à C ; Cela estant, je dis que A, est plus grand que B ; Pour le prouver.

Si A, n'estoit pas plus grand que B, il faudroit qu'il luy fust égal, où qu'il fust plus petit que B ; s'il luy estoit égal, il s'ensuivroit, par la 7. Prop. que A, & B, auroient mesme Raison à C ; ce qui est contre la supposition ; A, n'est donc pas égal à B ; Que si A, estoit plus petit que B, il s'ensuivroit, par la 8. Prop. que A auroit moindre Raison à C, que B n'a à C ; ce qui est aussi contre la Supposition ; A n'est donc pas aussi plus petit que B ; Par conséquent A est plus grand que B ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que C a plus grande Raison à B, que C n'a à A ; Cela estant, je dis que B, est plus petit que A.

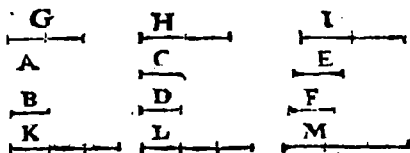
Car si cela n'estoit, il faudroit que B, fust égal à A, où qu'il fust plus grand ; S'il estoit égal, il s'ensuivroit, par la 7. Prop. qu'il y auroit mesme Raison de C à B, que de C à A ; ce qui est contre la Supposition ; B n'est donc pas égal à A ; Que si B estoit plus grand que A ; Il s'ensuivroit, par la 8. Prop. qu'il y auroit plus grande Raison de C à A, que de C à B ; ce qui est encore contre la Supposition ; B, n'est donc pas aussi plus grand que A ; Par conséquent B, est plus petit que A ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

THEOREME XI.

Les Raisons qui sont semblables à une mesme , sont semblables entr'elles.

JE suppose que A soit à B, comme C est à D ; Et de plus que comme C, est à D, ainsi E soit à F ; Cela estant, je dis que comme A, est à B, ainsi E, est à F ; Pour le prouver.



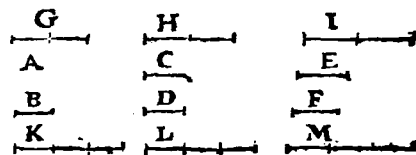
Prenez à discretion G, H, I, Equimultiples, des Antecedens A, C, E ; Prenez de mesme à discretion, K, L, M, Equimultiples des Consequens B, D, F ; Cela posé.

Puisque les quatre Grandeurs A, B, C, D, sont proportionnelles, & que G, & H, sont les Equimultiples de la premiere & de la troisieme, & que K, & L, sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrieme, Il s'ensuit, par le 1. Ax. que G ne pourra estre égal à K, que H ne soit égal à L ; ou que G ne pourra surpasser K, que H ne surpasser L ; ou enfin que G ne pourra estre moindre que K, que H ne soit aussi moindre que L ; Mais puitque les quatre Grandeurs C, D, E, F, sont aussi proportionnelles, & que H, & I, sont les Equimultiples de la premiere & de la troisieme Grandeur, & que L, & M, sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrieme, Il s'ensuit aussi, par le 1. Ax. que H ne scauroit estre égal à L, que I ne soit égal à M ; ou que H ne scauroit estre plus grand que L, que I ne soit plus grand que M, ou enfin que H ne scauroit estre moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M ; Et partant

E e ij

G ne pourra estre égal à K, que I ne soit égal à M ; ou bien G ne pourra estre plus grand que K, que I ne soit plus grand que M ; ou bien enfin G ne pourra estre moindre que K, que I ne soit aussi moindre que M.

Mais G, & I, sont les Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver estre proportionelles ; & K, & M, sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième. D'où il suit, par le 2. Ax. que ces quatre Grandeurs A, B, E, F, sont proportionelles, c'est à dire, que A est à B, comme E est à F ; Ce qu'il falloit démontrer,



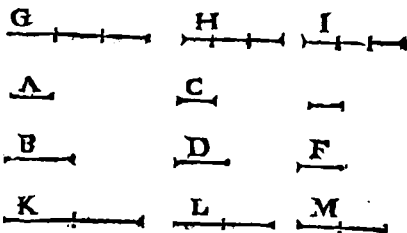
PROPOSITION XII.

THEOREME XII.

Si tant de Grandeurs que l'on voudra sont proportionelles, comme l'un des Antecedens sera à son Consequent, ainsi tous les Antecedens pris ensemble seront à tous les Consequens pris ensemble.

JE suppose que A soit à B, comme C est à D, & E à F ; Cel à estant, je dis que comme l'un des Antecedens A, est à son Consequent B, ainsi tous les Antecedens A, C, E, pris ensemble, sont à tous les Consequens B, D, F, pris aussi ensemble. Pour le prouver.

Prenez à discretion G, H, I, Equimultiples des Antecedens A, C, E ; Prenez de mesme à discretion K, L, M, Equimultiples des Consequens B, D, F ; Cela posé.



Il s'ensuit, par la 1. Prop. qu'autant que la Grandeur G est Multiple de la Grandeur A, autant aussi les Grandeurs G, H, I, prises ensemble, sont Multiples des Grandeurs A, C, E, prises aussi ensemble ; Et qu'autant que la Grandeur K, est Multiple de la Grandeur B, autant les Grandeurs K, L, M, prises ensemble, sont Multiples des Grandeurs B, D, F, prises aussi ensemble ; D'ailleurs, puisque A est à B, comme C est à D ; & que G, & H, sont Equimultiples de la première & troisième, & K, & L, Equimultiples de la seconde & quatrième ; Il suit, par le 1. Ax. que si G est égal à K, H sera égal à L ; ou que si G surpasse K, H surpassera L ; ou enfin que si G est moindre que K, H sera aussi moindre que L ; Mais puisque C est à D, comme E est à F, & que H, & I, sont Equimultiples de la première & de la troisième de ces Grandeurs, & L, & M, Equimultiples de la seconde & de la quatrième, H ne sauroit aussi être égal à L, que I ne soit égal à M ; ou bien H ne sauroit surpasser L, que I ne surpassât M ; ou enfin H ne sauroit être moindre que L, que I ne soit aussi moindre que M ; Par conséquent G ne sauroit être égal à K, que G, H, I, prises ensemble, ne soient aussi égales à K, L, M, prises aussi ensemble ; Ou bien G ne sauroit surpasser K, que G, H, I, ne surpassent K, L, M ; Ou enfin G ne sauroit être moindre que K, que G, H, I, ne soient moindres que K, L, M ; Mais G, d'une part, & G, H, I, d'autre part, sont Equimultiples de la première A, & de la troisième A, C, E, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver être Proportionelles ; Comme aussi K, d'une part, & K, L, M, d'autre part, sont Equimultiples de la seconde B, & de la quatrième B, D, F, de ces quatre Grandeurs ; D'où il suit, par le 2. Ax. qu'elles sont proportionelles ; & ainsi, que comme A est à B, ainsi A, C, E, prises ensemble, sont à B, D, F, prises aussi ensemble ; Ce qu'il falloit démontrer.

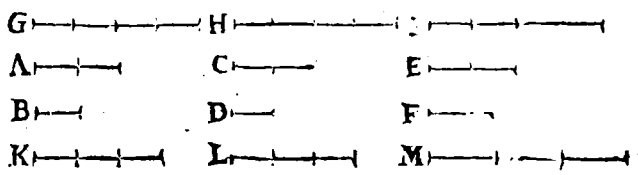
PROPOSITION XIII.

THEOREME XIII.

Si la premiere Grandeur est à la seconde ; comme la troisième est à la quatrième ; mais que la troisième ait plus grande Raison à la quatrième, que la cinquième à la sixième : Il y aura aussi plus grande Raison de la premiere à la seconde, que de la cinquième à la sixième.

JE suppose les six Grandeurs A, B, C, D, E, F, & que la premiere A, soit à la seconde B, comme la troisième C, est à la quatrième D ; mais que la Raison de C, à D, soit plus grande que celle de la cinquième E, à la sixième F ; Cela estant , je dis que A a plus grande Raison à B, que E n'a à F ; Pour le prouver.

Puisque A, est à B, comme C, est à D ; Il s'ensuit, par le 1. Ax. qu'en



prenant à discretion des Equimultiples de la premiere & troisième Grandeur, & des Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Jamais l'Equimultiple de C, ne surpassera l'Equimultiple de D, que l'Equimultiple de A, ne surpassasse aussi l'Equimultiple de B ; Mais puisqu'il y a plus grande Raison de C, à D, que de E, à F, si l'on prend à discretion des Equimultiples de la premiere & de la troisième, & des Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Il se pourra faire que l'Equimultiple de C, surpassera l'Equimultiple de D, sans que l'Equimultiple de E, surpassasse l'Equimultiple de F ; Partant il se pourra faire aussi

Qu'ayant pris à discretion des Equimultiples de A, & de E, (qui sont la premiere & la troisieme des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver n'estre pas proportionelles,) & de mesme des Equimultiples de B, & de F, qui sont la seconde & la quatrieme, il se pourra, dis-je, faire que l'Equimultiple de la premiere A, surpassera l'Equimultiple de la seconde B, sans que l'Equimultiple de la troisieme E surpassé l'Equimultiple de la quatrieme F ; D'où il suit, par le 3. Ax. qu'il y a plus grande Raison de A, à B, que de E, à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

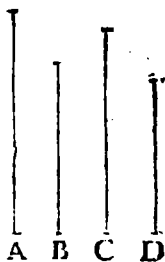
PROPOSITION XIV.

THEOREME XIV.

Si, de quatre Grandeurs Proportionelles, la premiere est plus grande que la troisieme, la seconde sera aussi plus grande que la quatrieme, si Egale égale, si Moindre moindre.

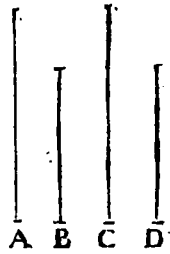
JE suppose que les quatre Grandeurs A, B, C, D, soient proportionelles, & premierement que la premiere A, soit plus grande que la troisieme C ; Cela estant, je dis que la seconde B, est aussi plus grande que la quatrieme D ; Pour le prouver.

Puisque A, est plus grand que C, il y a plus grande Raison de A, à B, que de C, à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A, à B, est la mesme que celle de C, à D, par Supposition ; Il y a donc aussi plus grande Raison de C, à D, que de C, à B ; Et partant, par la 10. Prop. D sera plus petit que B, ou B plus grand que D ; Ce qu'il falloit démontrer.



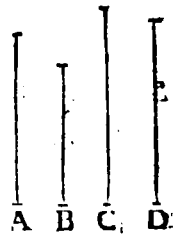
Je suppose en second lieu, que de ces quatre Grandeurs proportionelles A, B, C, D, la premiere A, soit égale à la troisieme C ; Cela estant, je dis que la seconde B, est aussi égale à la quatrieme D ; Pour le prouver.

Puisque A, est égal à C, il y a même Raison de A, à B, que de C, à B, par la 7. Prop. Or la Raison de A, à B, est la même que celle de C, à D ; Il y a donc aussi même Raison de C, à D, que de C, à B ; Et partant par la 9. Prop. les Grandeurs B, & D, sont égales ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose enfin que de ces quatre Grandeurs proportionnelles A, B, C, D, la première A, soit moindre que la troisième C ; Cela étant, je dis que la seconde B, est aussi moindre que la quatrième D ; Pour le prouver.

Puisque A, est moindre que C, il y aura moindre Raison de A, à B, que de C, à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A, à B, est la même que celle de C, à D ; Il y aura donc aussi moindre Raison de C, à D, que de C, à B ; Et partant par la 10. Prop. B sera moindre que D ; Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XV.

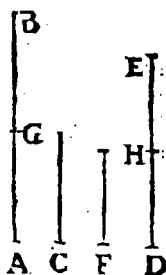
THEOREME XV.

Si deux Grandeurs sont Equimultiples de deux autres Grandeurs, elles seront entr'elles comme les Grandeurs dont elles sont Equimultiples.

JE suppose que les deux Grandeurs AB, DE, soient Equimultiples des deux autres Grandeurs C, & F ; Sçavoir AB, Equimultiple de C, & DE, Equimultiple de F ; Cela étant, je dis que AB, est à DE, comme C, est à F ; Pour le prouver.

Puisque AB, & DE, sont Equimultiples de C, & de F ; Il y a dans AB, autant de Parties égales à C, qu'il y en a dans DE, d'égales à F ; Donc, par la 7. Prop. la première des

des Parties de AB à meſme Raiſon à la premiere de DE, que la ſeconde de AB à la ſeconde de DE, & que la troiſième à la troiſième, & ainſi de ſuite, ſ'il y en a, & cette Raiſon eſt la meſme que celle de C à F ; Deplus, puis-que nous avons dans AB pluſieurs Grandeurs qui ſont toutes en meſme Raiſon à autant d'autres dans DE ; Il ſ'enſuit par la 12. Prop. que toutes les Parties de AB priſes enſemble, ſont à toutes les Parties de DE priſes auſſi enſemble (ce qui eſt la meſme choſe que la Toute AB eſt à la Toute DE) comme une ſeule Partie de AB, eſt à une ſeule Partie de DE ; Or une ſeule Partie de AB, a eſté montrée eſtre à une ſeule Partie de DE, comme C eſt à F ; Partant AB eſt à DE, comme C eſt à F ; Ce qu'il falloit démontrer..



PROPOSITION XVI.

THEOREME XVI.

Si quatre Grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en Raiſon Alterne.

JE ſuppoſe que A ſoit à B, comme C eſt à D ; Cela eſtant, je dis que ces Grandeurs ſont encore proportionnelles en Raiſon alterne ; C'eſt à dire que A eſt à C, comme B eſt à D ; Pour le Prouver..

Prenez des Equi-

multiples telles qu'il E ————— G —————

vous plaira de A & A ————— C —————

de B, comme par B ————— D —————

exemple E, & F ; F ————— H —————

Prenez encore des

Equimultiples telles auſſi qu'il vous plaira de C, & de D, comme G & H ; Cela poſé..

EE

Il s'ensuit par la Prop. precedente, que E est à F, comme A est à B ; & que G est à H, comme C est à D ; Or par la Supposition, A est à B, comme C est à D ; Partant par la 11. Prop. E est

à F, comme G est à H ; D'où il suit par la 14. Prop. que si E est plus grand que G, F sera plus

grand que H ; Si Egal, Egal ; Si Moindre, Moindre ; Or est-il que E, & F, sont les Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver estre proportionnelles ; & que G & H sont les Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Donc par le 2. Ax. ces quatre Grandeurs sont proportionnelles ; Et ainsi il y a même Raison de A à C, que de B à D ; Ce qu'il falloit démontrer.

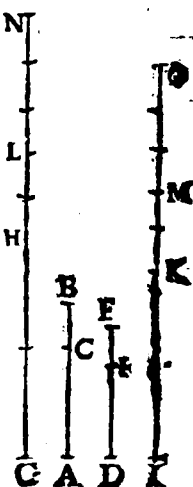
PROPOSITION XVII.

THEOREME XVII.

Si des Grandeurs composées sont proportionnelles, en divisant elles seront aussi proportionnelles.

Je suppose que AB est à BC, comme DE est à EF ; Cela étant, je dis qu'en divisant elles seront encore proportionnelles ; c'est à dire qu'il y aura même Raison de AC à CB, que de DF à FE ; Pour le prouver.

Prenez à discrétion les Grandeurs GH, & IK Equimultiples de AC, & de DF ; Puis prenez HL, & KM, Equimultiples de CB, & de FE, & autant Multiples de ces Grandeurs que GH, & IK, le font de AC, & de DF ; Prenez derechef à discrétion LN, & MO, Equimultiples de CB, & de FE ; Cela posé.



Puisque GH, & HL, sont Equimultiples de AC, & de CB ; Il s'ensuit par la 1. Prop. que GL sera autant Multiple de AB, que GH l'est de AC ; Or GH est autant Multiple de AC, que IK l'est de DF ; Donc GL est autant Multiple de AB, que IK l'est de DF ; D'ailleurs, IK & KM sont Equimultiples de DF, & de FE, donc par la 1. Prop. autant que IK est Multiple de DF, autant IM est Multiple de DE ; Et par conséquent GL & IM s'ensuivent Equimultiples de AB, & de DE, qui sont la premiere & la troisieme des quatre Grandeurs qui sont supposées proportionnelles ; Deplus HL, considérée comme premiere Grandeur, est autant Multiple de CB seconde, que KM troisieme, l'est de FE quatrieme ; Et LN, cinquieme Grandeur, est autant Multiple de CB seconde, que MO, sixieme Grandeur, l'est de FE quatrieme ; Partant par la seconde Prop. HN, sera autant Multiple de CB, que KO l'est de FE ; c'est à dire que HN, & KO, sont encore Equimultiples de la seconde & de la quatrieme Grandeur des quatre que nous avons supposé estre Proportionnelles ; Ainsi par le 1. Ax. si GL est égale à HN ; IM sera égale à KO ; Si GL, surpasse HN ; IM, surpassera KO ; & si GL est moindre que HN ; IM, sera moindre que KO ; C'est pourquoy en retranchant des deux Grandeurs GL, & HN, la Partie HL, qui leur est commune ; & des deux Grandeurs IM, & KO, la Partie KM, qui leur est aussi commune ; Il sera encore vray de dire que si GH est égale à LN, IK sera égale à MO ; Si GH surpasse LN, IK surpassera MO ; Et si GH est moindre que LN, IK sera moindre que MO ; Mais GH, & IK, sont les Equimultiples de la premiere AC, & de la troisieme DF, des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver estre proportionnelles, & LN, & MO, sont aussi les Equimultiples de la seconde CB, & de la quatrieme FE ; Donc par le second Axiome, ces quatre Grandeurs sont proportionnelles ; Et ainsi il y a mesme Raison de AC à CB, que de DF à FE ; Ce qu'il falloit démon-

trer.

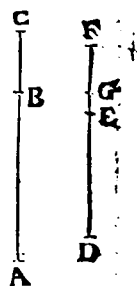
PROPOSITION XVIII.

THEOREME XVIII.

Si des Grandeurs divisées sont proportionnelles ; en composant elles seront encore proportionnelles.

JE suppose que la Grandeur AB, soit à la Grandeur BC, comme la Grandeur DE est à la Grandeur EF ; Cela estant, je dis qu'en composant ces Grandeurs seront encore proportionnelles, c'est à dire, que comme AC sera à BC, ainsi DF sera à EF.

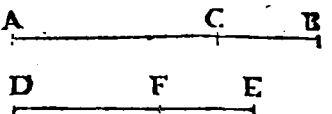
Car si cela n'estoit, il faudroit que AC fust à BC, comme DF est à une autre Grandeur que EF ; Posons, si vous voulez, que cette autre Grandeur soit GF, auquel cas par la Prop. precedente, Il s'en suivroit en divisant que comme AB est à BC, ainsi DG seroit à GF ; Mais comme AB est à BC, ainsi DE est à EF, par supposition ; Partant par la 11. Prop. DG seroit à GF, comme DE est à EF ; Or DG, qui est la premiere de ces quatre Grandeurs, est plus grande que la troisième DE ; Donc par la 14. Prop. la seconde GF seroit plus grande que la quatrième EF, & ainsi la Partie seroit plus grande que le Tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que comme AC est à BC, ainsi DF soit à une autre que EF ; Et partant AC est à BC, comme DF est à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIX.

THEOREME XIX.

*Si le Tout est au Tout, comme le Retranché au Retranché,
le Reste sera aussi au Reste, comme le Tout
est au Tout.*

JE suppose que le Tout AB soit  au Tout DE, comme le Retran-
ché AC est au Retranché DF;
Cela estant, je dis que le Reste
CB est au Reste FE, comme le
Tout AB est au Tout DE; Pour le prouver.

Puisque AB est à DE, comme AC est à DF, en Raison
alterne AB sera à AC, comme DE est à DF, par la 16.
Prop. Et en divisant CB sera à AC, comme FE est à DF;
Par la 17. Prop. & derechef en Raison alterne CB sera à
FE, comme AC est à DF; Or AC est à DF, comme AB est
à DE, par supposition; Donc CB est à FE, comme AB est
à DE; Et ainsi, si le Tout &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

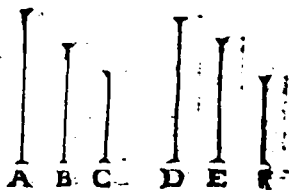
On démontre icy la verité de cette maniere de conclure,
que nous avons cy-devant appelée par conversion de Rai-
son. Supposons par exemple, que AB est à CB, comme
DE est à FE; Cela estant, je dis par conversion de Rai-
son que AB sera à AC, comme DE est à DF; Car puis-
que AB est à CB, comme DE est à FE, en divisant AC
sera à CB, comme DF est à FE; Et en Raison inverse CB
sera à AC, comme FE est à DF; Et derechef en com-
posant AB sera à AC, comme DE est à DF; Ce qu'il
falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XX.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion ordonnée, sont en mesme Raison, & qu'en Raison égale la premiere d'une part soit plus grande que la troisieme, la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisieme ; si égale, égale ; si moindre, moindre.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en proportion ordonnée ; c'est à dire, que A soit à B, comme D est à E ; & que B soit à C, comme E est à F ; Cela estant, je dis premierement que si A est plus grand C, D sera aussi plus grand que F ; Pour le prouver.



Puisque A est plus grand que C, il y aura plus grande Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de D à E, est la mesme que celle de A à B, Il y aura donc plus grande Raison de D à E, que de C à B ; Mais puisque B est à C, comme E est à F, en Raison Inverse, la Raison de C à B, est la mesme que celle de F à E ; Il y a donc plus grande Raison de D à E, que de F à E ; Et partant par la 10. Prop. D sera plus grand que F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu que A soit égal à C ; Cela estant, je dis que D sera égal à F.

Car puisque A est égal à C, il y aura mesme Raison de A à B, que de C à B ; Or la Raison de A à B, est la même que de D à E ; Donc il y aura mesme Raison de D à E, que de C à B ; Mais puisque B est à C, comme E est à F,

En Raison Inverse C est aussi à B, comme F est à E ; Il y a donc même Raison de D à E, que de F à E ; Et partant par la 9. Prop. D sera égal à F ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose enfin que A soit moindre que C ; Cela estant, je dis que D sera moindre que F.

Car puisque A est moindre que C, il y aura une moindre Raison de A à B, que de C à B, par la 8. Prop. Or la Raison de A à B, est la même que celle de D à E ; il y a donc une moindre Raison de D à E, que de C à B ; Mais puisque B est à C, comme E est à F, En Raison Inverse il y aura même Raison de C à B, que de F à E ; Il y a donc une moindre Raison de D à E, que de F à E ; Et partant par la 10. Prop. D sera moindre que F ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXL

THEOREME XXI.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en mesme Raïson, & qu'en Raïson égale la premiere d'une part soit plus grande que la troisième, la premiere de l'autre part sera aussi plus grande que la troisième; si Egale, égale; si Moindre, moindre.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles en Proportion troublée; c'est à dire, que A soit à B, comme E est à F, & que B soit à C, comme D est à E; Cela estant, je dis premierement, que si A est plus grand que C, D sera aussi plus grand que F; Pour le prouver.



Puisque A est plus grand que C, il y aura plus grande Raïson de A à B, que de C à B; Or la Raïson de A à B, est la mesme que celle de E à F; Il y aura donc plus grande Raïson de E à F, que de C à B; Mais puisque B est à C, comme D est à E; En Raïson Inverse E est à D, comme C est à B; Il y aura donc plus grande Raïson de E à F, que de E à D; Et partant par la 10. Prop. D sera plus grand que F; Ce qu'il falloit démontrer.

Par un semblable raisonnement on montrera que si A est égal à C, D sera égal à F; Et que si A est moindre que C, D sera aussi moindre que F; Si donc trois Grandeurs d'une part &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

THEOREME XXII.

Si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, prises deux à deux en proportion ordonnée, sont en mesme Raison, en Raison égale, elles seront proportionnelles.

IE suppose d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs, comme D, E, F, tellement disposées que A soit à B, comme D est à E ; & B à C, comme E à F ; Cela estant, je dis qu'en Raison égale il y aura mesme Raison de A à C, que de D à F ; Pour le prouver.

Prenez à discretion G, & H, Equimultiples de A, & de D ; Puis I, & K, Equimultiples de B, & de E ; Et enfin L & M, Equimultiples de C & de F ; Cela posé.

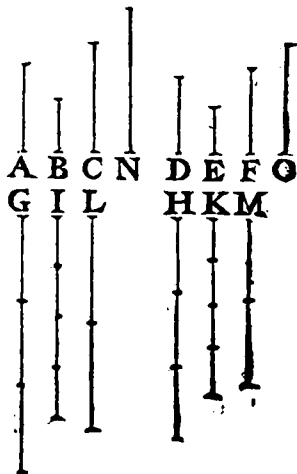
Puisque A est à B, comme D est à E, & que G & H sont Equimultiples de la premiere & de la troisieme, & I, & K, Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Il s'ensuit par la 4. Prop. que G est à I, comme H est à K ; De mesme, puisque B est à C, comme E est à F, & que I & K, sont Equimultiples de la premiere & de la troisieme, & L & M, Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Il s'ensuit aussi par la quatrième Prop. que I est à L, comme K est à M ; Si bien que nous avons d'une part trois Grandeurs G, I, L, & d'autre part trois autres Grandeurs H, K, M, lesquelles prises deux à deux en Proportion ordonnée sont proportionnelles ; Partant par la 20. Prop. si G est plus grand que L, H sera aussi plus grand



que M ; Si G est égal à L, H sera aussi égal à M ; Et si G est moindre que L, H sera aussi moindre que M ; Mais G, & H, sont les Equimultiples de la première, & de la troisième des quatre Grandeurs qu'il s'agit de prouver estre proportionnelles ; Et L, & M, sont aussi les Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Donc par le 2. Ax. ces quatre Grandeurs sont proportionnelles, & ainsi il y a même Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, s'il y avoit plus de trois Grandeurs de chaque costé, & que par exemple, il y en eût quatre d'une part & quatre d'une autre, en sorte que C fust à N, comme F est à O, on prouveroit aisément, ensuite de ce qui vient d'estre démontré de trois Grandeurs, que A seroit à N, comme D seroit à

O ; Car ne considérant point la seconde Grandeur de part ny d'autre, Et supposant, comme il vient d'estre prouvé, que A est à C, comme D est à F, & que C est à N, comme F est à O ; Comme il n'y auroit plus alors que trois Grandeurs de chaque costé, il s'ensuivroit que A seroit à N, comme D seroit à O ; Donc si tant de Grandeurs que l'on voudra d'une part, & autant d'une autre, prises deux à deux sont en même Raison, en Raison égale, elles seront proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.



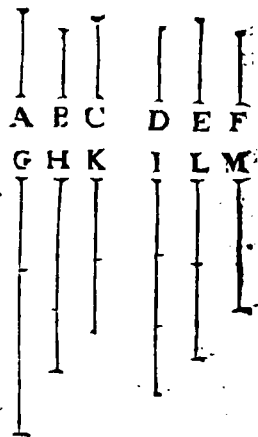
PROPOSITION XXIII.

THEOREME XXIII.

Si trois Grandeurs d'une part, & trois d'une autre, prises deux à deux en Proportion troublée, sont en mesme Raïson, en Raïson égale, elles seront proportionnelles.

JE suppose que les trois Grandeurs A, B, C, d'une part, & les trois D, E, F, d'autre part, soient proportionnelles, en proportion troublée ; C'est à dire que A soit à B, comme E est à F ; & que B soit à C, comme D est à E ; Cela estant, je dis qu'en Raïson égale, il y aura même Raïson de A à C, que de D à F ; Pour le prouver.

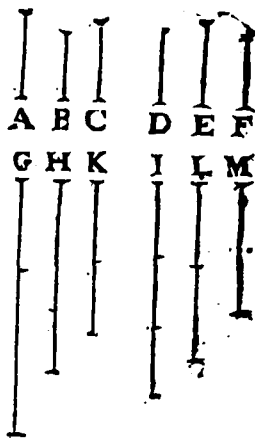
Prenez à discretion G & I Equimultiples de A, & de D ; & K & M Equimultiples de C, & de F ; Puis prenez H autant Multiple de B, que G l'est de A, & L autant Multiple de E, que M l'est de F. Cela posé.



Puisque G & H sont Equimultiples de A, & de B ; Il s'ensuit par la 15. Prop. que G sera à H, comme A est à B ; Or A est à B, comme E est à F ; Donc G sera à H, comme E est à F ; Mais puisque L & M sont Equimultiples de E & de F, E est à F, comme L est à M ; Partant G sera à H, comme L est à M ; D'ailleurs, puisque B est à C, comme D est à E, & que H, & I, ont esté prises Equimultiples de la première & de la troisième de ces quatre Grandeurs, & que K & L, ont esté prises Equimultiples de la seconde & de la quatrième ; Il s'ensuit par la 4.

Gg ij.

Prop. que H est à K, comme I est à L;
 Si bien que nous avons d'une part trois
 Grandeurs G, H, K, & d'autre part trois
 autres Grandeurs I, M, lesquelles pri-
 ses deux à deux en Proportion troublée
 sont proportionnelles ; Partant par la 21.
 Prop. si G est plus grand que K, I sera plus
 grand que M ; Si G est égal à K, I sera
 égal à M ; Ou enfin si G est moindre que K,
 I sera moindre que M ; Mais G, & I, sont
 les Equimultiples de la première & de la
 troisième des quatre Grandeurs qu'il s'a-
 git de prouver estre proportionnelles ; &
 K & M, sont aussi les Equimultiples de
 la seconde & de la quatrième ; Donc
 par le 2. Ax. ces quatre Grandeurs sont proportionnelles ;
 Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXIV.

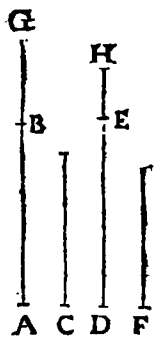
THEOREME XXIV.

*Si la première Grandeur est à la seconde, comme la troi-
 sième est à la quatrième, & la cinquième à la seconde,
 comme la sixième à la quatrième ; la Composée de la
 première & de la cinquième sera à la seconde, comme
 la composée de la troisième & de la sixième sera à
 la quatrième.*

JE suppose que la première Grandeur AB soit à la seconde
 C, comme la troisième DE est à la quatrième F ; &
 que la cinquième BG soit encore à la seconde C, comme
 la sixième EH est à la quatrième F ; Cela estant, je dis
 que la Grandeur AG, composée de la première & de la
 cinquième, est à la seconde C, comme la Grandeur DH,

Composée de la troisième & de la sixième, est à la quatrième F ; Pour le prouver.

Puisque BG est à C, comme EH est à F, En Raison Inverse C est à BG, comme F est à EH. Maintenant, AB est à C, comme DE est à F par supposition ; C est à BG, comme F est à EH, comme il vient d'estre prouvé ; Donc par la 22. Prop. en Raison égale, AB est à BG, comme DE est à EH ; Deplus, en composant AG est à BG, comme DH est à EH ; BG est à C, comme EH est à F, par supposition ; Partant en Raison égale AG est à C, comme DH est à F ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXV.

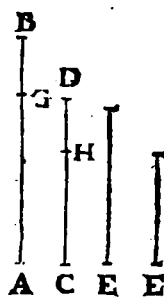
THEOREME XXV.

Si quatre Grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite prises ensemble sont plus grandes que les deux autres prises aussi ensemble.

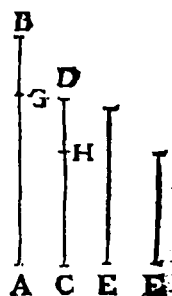
Je suppose que AB soit à CD, comme E est à F ; & que AB soit la plus grande, & par conséquent F la plus petite ; Cela estant, je dis que les Grandeurs AB & F prises ensemble, sont plus grandes que CD & E prises aussi ensemble ; Pour le prouver.

Retranchez de AB, la Partie AG égale à E, & de CD, la Partie CH, égale à F ; Cela posé.

La Toute AB sera à la Toute CD, comme la Retranchée AG est à la Retranchée CH ; Donc par la 19. Prop. le Reste GB sera au Reste HD, comme la Toute est à la Toute ; Or la Toute AB est supposée plus grande que CD ; Partant le Reste GB sera aussi plus grand que le Reste



HD ; Si donc aux deux Grandeurs égales AG & E, on adjoute les Grandeurs égales F & CH ; Il s'ensuivra que le Tout composé de AG, & de F, sera égal au Tout composé de E & de CH ; Que si maintenant on adjoute à ces deux Tous des Grandeurs Inégales, sçavoir GB d'un costé, & HD de l'autre ; Il s'ensuivra que le Tout composé de AB & de F sera plus grand que le Tout composé de CD, & de E ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXVI.

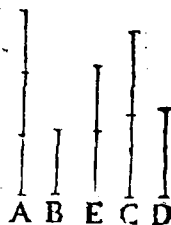
THEOREME XXVI.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde que la troisieme à la quatrieme ; En Raison Inverse tout aucontraire la seconde aura moindre Raison à la premiere que la quatrieme à la troisieme.

JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de C à D ; Cela estant, jedis qu'en Raison Inverse, tout aucontraire la Raison de B à A, est moindre que celle de D à C ; Pour le prouver.

Supposons qu'il y ait mesme Raison de E à B, que de C à D ; Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à B, que de C à D, par supposition, Il y a donc aussi plus grande Raison de A à B, que de E à B, & par consequent A est plus grand que E, par la 10. Prop. D'où il suit que la Raison de B à A, est moindre que celle de B à E, par la 8. Prop. Mais puisque par la Supposition E est à B, comme C est à D, en Raison Inverse B est à E, comme D à C, Donc la Raison de B à A, est aussi moindre que celle de D à C ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXVII.

THEOREME XXVII.

Si la premiere Grandeur a plus grande Raïson à la seconde que la troisiéme à la quatriéme ; En Raïson Alterne la premiere aura aussi plus grande Raïson à la troisiéme que la seconde à la quatriéme.

JE suppose qu'il y ait plus grande Raïson de A à B, que de C à D ; Cela estant, je dis qu'en Raïson Alterne il y a aussi plus grande Raïson de A à C, que de B à D ; Pour le prouver.

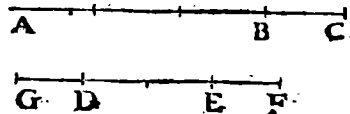
Supposons qu'il y ait mesme Raïson de E à B, que de C à D ; Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raïson de A à B, que de C à D, par Supposition, Il y a donc aussi plus grande Raïson de A à B, que de E à B ; Et par consequent A est plus grand que E, par la 10. Prop. D'où il suit qu'il y a plus grande Raïson de A à C, que de E à C ; Par la 8. Prop. Mais puisque par la Supposition E est à B, comme C est à D, en Raïson Alterne E est à C, comme B est à D ; Donc il y a aussi plus grande Raïson de A à C, que de B à D ; Ce qu'il falloit démontrer.



Si la premiere Grandeur a plus grande Raison à la seconde, que la troisieme à la quatrieme ; En composant la Composée de la premiere & de la seconde aura aussi plus grande Raison à la seconde que la Composée de la troisieme , & de la quatrieme n'aura à la quatrieme.

JE suppose qu'il y ait plus grande Raison de la premiere Grandeur AB à la seconde BC , que de la troisieme DE , à la quatrieme EF ; Cela estant, je dis qu'en composant il y a aussi plus grande Raison de la Toute AC à BC , que de la Toute DF à EF ; Pour le prouver.



Supposons que AB soit à BC , comme GE est à EF , Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raison de AB à BC , que de DE , à EF , par Supposition ; il y a donc aussi plus grande Raison de GE à EF , que de DE à EF ; & par consequent GE est plus grand que DE ; Mais puisque par la Supposition AB est à BC , comme GE est à EF ; en composant AC est à BC , comme GF est à EF ; Mais puisque GF est plus grand que DF , il y a plus grande Raison de GF à EF , que de DF à EF , par la 8. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de AC à BC , que de DF , à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.



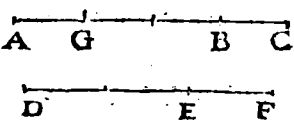
PROPOSITION XXIX.

THEOREME XXIX.

Si la Composée de la première & de la seconde a plus grande Raison à la seconde, que la Composée de la troisième & de la quatrième n'a à la quatrième ; En divisant, la première aura aussi plus grande Raison à la seconde, que la troisième à la quatrième.

JE suppose ces quatre Grandeurs :

AB première, BC seconde, DE troisième, EF quatrième, & qu'il y ait plus grande Raison de la Composée de la première & de la seconde, savoir AC, à la seconde BC, que de la Composée de la troisième & de la quatrième, savoir DF, à la quatrième EF ; Cela étant, je dis qu'en divisant il y a aussi plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF ; Pour le prouver.



Supposons que GC soit à BC, comme DF est à EF ; Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raison de AC à BC, que de DF à EF, par Supposition, Il y a donc aussi plus grande Raison de AC à BC, que de GC à BC ; Et par conséquent AC est plus grand que GC, par la 10. Prop. Ostant donc de ces deux Grandeurs Inégales BC, qui leur est commun, le Reste AB sera plus grand que le Reste GB ; Et par conséquent il y a plus grande Raison de AB à BC, que de GB à BC, par la 8. Prop. Mais puisque par Supposition GC est à BC, comme DF est à EF, en divisant GB est à BC, comme DE est à EF ; Donc il y a aussi plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

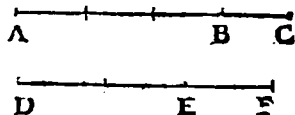
H. h.

PROPOSITION XXX.

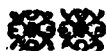
THEOREME XXX.

Si la Composée de la premiere & de la seconde a plus grande Raison à la seconde, que la Composée de la troisième & de la quatrième n'a à la quatrième; Par conversion de Raison tout aucontraire, la Composée de la premiere & de la seconde aura moindre Raison à la premiere, que la Composée de la troisième & de la quatrième n'aura à la troisième.

JE suppose ces quatre Grandeurs
 AB premiere, BC seconde, DE
 troisième, EF quatrième, & qu'il y
 ait plus grande Raison de la Com-
 posée de la premiere & de la seconde
 sçavoir AC à la seconde BC; que de la Composée de la
 troisième & de la quatrième, sçavoir DF, à la quatrième
 EF; Cela étant, je dis que par conversion de Raison,
 AC aura moindre Raison à AB, que DF n'aura à DE; Pour
 le prouver.



Puisque par Supposition, il y a plus grande Raison
 de AC à BC, que de DF à EF; en divisant, il y a aussi
 plus grande Raison de AB à BC, que de DE à EF; par la
 19. Prop. Par consequent en Raison Inverse, il y a moins
 dre Raison de BC à AB, que de EF à DE, par la 16. Prop.
 Et partant en composant, il y a aussi umoindre Raison de
 AC à AB, que de DF à DE; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXXI.

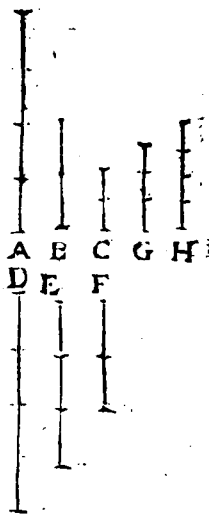
Si l'y a trois Grandeurs d'un costé & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raison de la premiere à la seconde, & de la seconde à la troisiéme d'une part, que de la premiere à la seconde, & de la seconde à la troisiéme de l'autre part ; en Raison égale, il y aura aussi plus grande de la premiere à la troisiéme d'une part, que de la premiere à la troisiéme de l'autre part.

JE suppose d'une part trois Grandeurs, comme A, B, C, & d'autre part trois autres Grandeurs comme D, E, F ; & qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de D à E ; & de B à C, que de E à F ; Cela estant, je dis qu'en Raison égale, il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Pour le prouver.

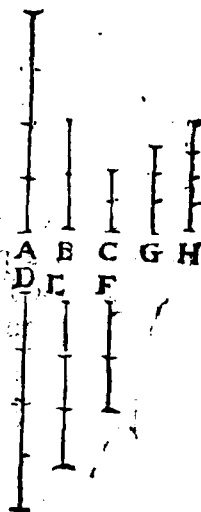
Supposons que G soit à C, comme E est à F ; Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que de E à F, par supposition, il y a donc aussi plus grande Raison de B à C, que de G à C ; Et par consequent B est plus grand que G, par la 10. Prop. Donc par la 8. Prop. il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B ; Mais par la Supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que D à E ; Donc à plus forte Raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de D à E.

Supposons maintenant que H soit à G, comme D est à E.



E ; Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G, & par conséquent A est plus grand que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puisque par Supposition, D est à E, comme H est à G, & que E est à F, comme G est à C, en Raison égale, H est à C, comme D est à F, par la 22. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXXII.

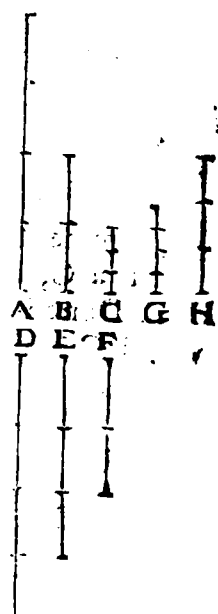
THEOREME XXXII.

S'il y a trois Grandeurs d'un costé & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raison de la premiere à la seconde, & de la seconde à la troisieme d'une part, que de la seconde à la troisieme, & de la premiere à la seconde de l'autre part, en Raison égale, il y aura aussi plus grande Raison de la premiere à la troisieme d'une part, que de la premiere à la troisieme de l'autre part.

IE suppose d'une part trois Grandeurs comme A, B, C, & d'autre part, trois autres Grandeurs comme D, E, F, & qu'il y ait plus grande Raison de A à B, que de E à F, & de B à C, que de D à E ; Cela étant, je dis qu'en Raison égale, il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Pour le prouver.

Supposons que G soit à C, comme D est à E ; Cela posé.

Puisqu'il y a plus grande Raison de B à C, que D à E, par supposition, il y a donc aussi plus grande Raison de B à C, que de G à C ; & par conséquent B est plus grand que G, par la 10. Prop. Donc par la 8. Prop. Il y a plus grande Raison de A à G, que de A à B ; Mais par la Supposition, il y a plus grande Raison de A à B, que de E à F, donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de A à G, que de E à F.



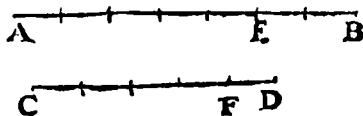
Supposons maintenant que H soit à G, comme E est à F ; Il y aura donc aussi plus grande Raison de A à G, que de H à G ; Et par conséquent A est plus grand que H, par la 10. Prop. D'où il suit, qu'il y a plus grande Raison de A à C, que de H à C, par la 8. Prop. Mais puis que par Supposition D est à E, comme G est à C, & que E est à F, comme H est à G, en Raison égale H est à C, comme D est à F, par la 23. Prop. Donc il y a aussi plus grande Raison de A à C, que de D à F ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXXIII.

S'il y a plus grande Raison du Tout au Tout, que du Retranché au Retranché, il y aura aussi plus grande Raison du Reste au Reste, que du Tout au Tout.

Je suppose qu'il y ait plus grande Raison de la Toute AB à la Toute CD, que de la Retranchée AE à la Retranchée



CF ; Cela estant, je dis qu'il y a aussi plus grande Raison du Reste EB au Reste FD, que de la Toute AB à la Toute CD, Pour le prouver.

Puisqu'il y a plus grande Raison de AB à CD, que de AE à CF, par supposition, donc en Raison alterne, Il y a aussi plus grande Raison de AB à AE, que de CD à CF, par la 27. Prop. Et par conversion de Raison tout aucontraire, il y a moindre Raison de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. Prop. Donc en Raison alterne, il y a aussi moindre Raison de AB à CD, que de EB à FD, ou pour parler en d'autres termes, Il y a plus grande Raison de EB à FD, c'est à dire du Reste au Reste, que de AB à CD, c'est à dire du Tout au Tout ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME XXXIV.

S'il y a tant de Grandeurs que l'on voudra d'un costé & autant d'un autre, & qu'il y ait plus grande Raison de la premiere d'une part, à la premiere de l'autre part, que de la seconde à la seconde ; Et aussi plus grande Raison de la seconde à la seconde, que de la troisieme à la troisieme, & ainsi de suite ; la Composée de toutes les Grandeurs d'un costé, aura plus grande Raison à la Composée de toutes les Grandeurs de l'autre, que (la premiere estant Retranchée de part & d'autre) le Reste n'aura au Reste ; Mais elle aura moindre Raison que la premiere à la premiere ; & plus grande Raison que la dernière à la dernière.

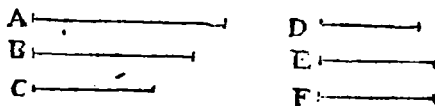
IE suppose d'une part trois Grandeurs comme A, B, C, & d'autre part, trois autres Grandeurs comme D, E, F,

& qu'il y ait plus grande Raison de A à D, que de B à E ; & encore plus grande Raison de B à E, que de C à F ; Cela estant, je dis que la composée de ABC, à plus grande Raison à la Composée de DEF, que le Reste BC n'a au Reste EF ; mais qu'elle a moindre Raison que A n'a à D ; Et plus grande Raison que C n'a à F ; Pour le prouver.

Puisqu'il y a plus grande Raison de A à D, que de B à E, par Supposition ; Donc en Raison alterne, il y a aussi plus grande Raison de A à B, que de D à E, par la 17. Prop. Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de AB pris ensemble à B, que de DE pris ensemble à E, par la 28. Prop. Et derechef en Raison alterne, il y a encore plus grande Raison de la Toute AB à la Toute DE, que de B à E ; Et puisqu'il y a plus grande Raison de la Toute AB à la Toute DE, que de la Retranchée B à la Retranchée E ; Il y a par conséquent aussi plus grande Raison de la Restante A à la Restante D, que de la Toute AB à la Toute DE, par la Proposition précédente ; Par la même Raison, il y a aussi plus grande Raison de B à E, que de la Toute BC à la Toute EF ; Donc à plus forte Raison, il y a aussi plus grande Raison de A à D, que de la Toute BC à la Toute EF ; & en Raison alterne, il y a plus grande Raison de A à la Toute BC, que de D à la Toute EF ; Et en composant, il y a aussi plus grande Raison de la Toute ABC au Reste BC, que de la Toute DEF au Reste EF, par la 28. Prop. Enfin en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que du Reste BC au Reste EF ; Ce qu'il falloit premièrement démontrer.

Je dis en second lieu, qu'il y a moindre Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que de A à D ; Pour le prouver.

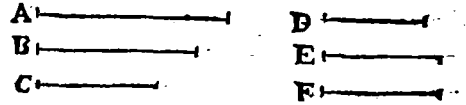
Puisqu'il y a plus grande Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que de la Retranchée BC à la Retranchée EF ; Par conséquent, il y a aussi plus grande Raison de la



Restante A à la Restante D, que de la Toute ABC à la Toute DEF, par la Prop. precedente ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisiéme lieu, qu'il y a plus grande Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que de C à F ; Pour le prouver.

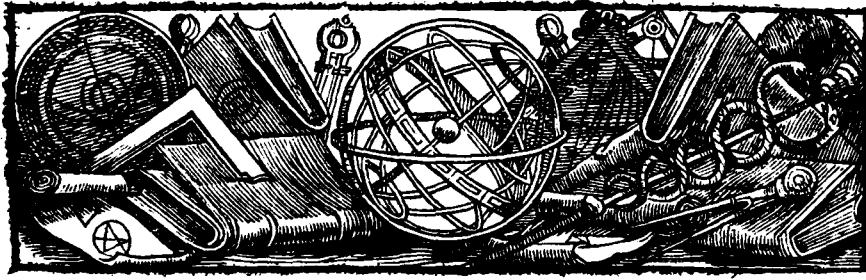
Puisqu'il y a plus grande Raison de B à E, que de C à F, par Supposition, Donc en Raison alterne, il y a aussi plus



grande Raison de B à C, que de E à F, par la 27. Prop. Et en composant, il y a plus grande Raison de la Toute BC à C, que de la Toute EF à F, par la 28. Prop. Donc derechef en Raison alterne, il y a plus grande Raison de la Toute BC à la Toute EF, que de C à F ; Mais il a esté prouvé qu'il y a plus grande Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que de BC à EF, Donc à plus forte raison, il y a plus grande Raison de la Toute ABC à la Toute DEF, que de C à F ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

Que s'il y avoit quatre ou plusieurs Grands de part & d'autre, on prouveroit aisément la mesme chose en suivant la mesme voye.





LIVRE SIXIÈME

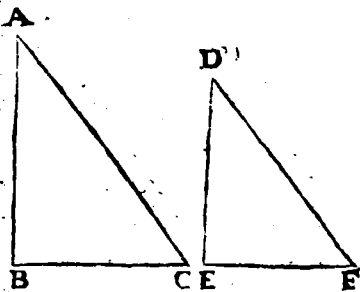
DES

ELEMENS DE GEOMETRIE.

DEFINITIONS.

1.  Es Figures Semblables, sont celles qui ont les Angles égaux, chacun au sien ; & les costez allentour des Angles égaux, proportionnaux.

Ainsi, supposé que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D, l'Angle B à l'Angle E, & l'Angle C à l'Angle F ; Et d'ailleurs que AB soit à AC, comme DE à DF ; que AC soit à CB, comme DF à FE ; & que AB soit à BC, comme DE est à EF ; ces deux Triangles seront semblables.

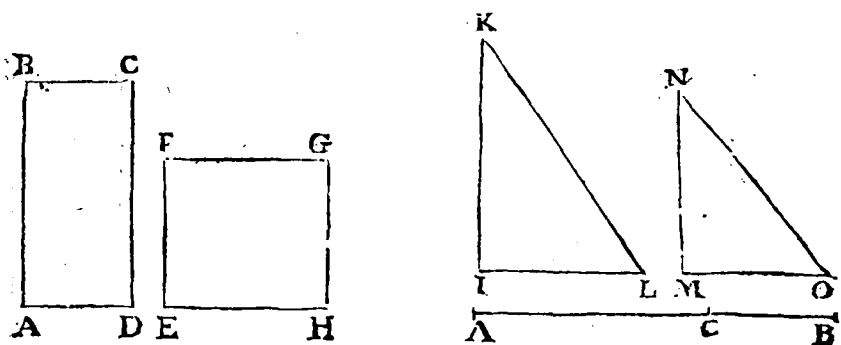


2. Les Figures Réciproques, sont celles qui ont les Costez allentour des Angles égaux, tellement Proportionnaux, que le premier & quatrième terme de la Proportion se

246 ELEMENTS D'EUCLIDE.

trouvent dans l'une, & le second & troisieme se trouvent dans l'autre.

Ainsi, les Parallelogrammes ABCD, EFGH, seront des Figures Réciproques, si comme AB est à EF, ainsi FG est



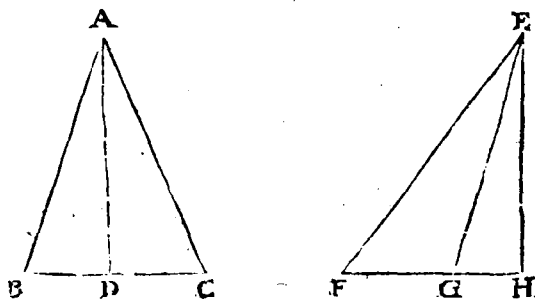
à BC. De mesme, les deux Triangles IKL, MNO, seront des Figures Réciproques, si comme IK est à MN, ainsi MO est à IL.

3. Une Ligne droite est dite estre divisée en Moyenne & Extreme Raison, quand la Toute est à la plus grande Partie, comme la plus grande Partie est à la plus petite.

Ainsi, la Ligne AB, sera dite estre divisée en Moyenne & Extreme Raison, si elle est tellement divisée au Point C, que la Toute AB soit à la Partie AC, comme AC est à CB.

4. La hauteur d'une Figure est la Perpendiculaire tirée du Sommet sur la Baze.

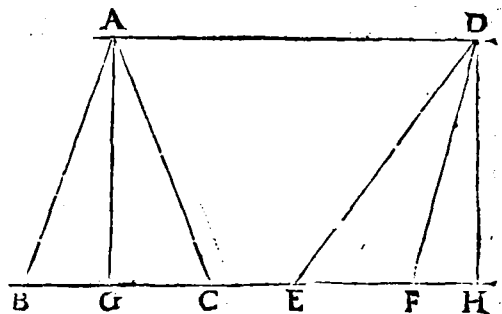
Ainsi, la hauteur du Triangle ABC est la Perpendiculaire AD, qui est tirée du Sommet A sur la Baze BC; De mesme, la hauteur du Triangle EFG est la Per-



perpendiculaire EH, qui tombe du Sommet E sur la Baze FG, prolongée.

Il est important pour la suite de remarquer icy, que si deux Figures qui ont leurs Bazes dans une même Ligne droite & de même part, sont de même hauteur, elles sont entre-mêmes Paralleles; Et que si elles sont entre mêmes Paralleles, elles sont de même hauteur.

Je suppose que les Triangles ABC, DEF, qui ont leurs Bazes BC, EF, dans la même Ligne droite BH, & de même part, soient de même hauteur, c'est à dire que les Lignes AG, DH, qui sont abaissées des



Points A, & D, perpendiculairement sur BH, soient égales; Cela étant, je dis que ces Triangles ABC, DEF, sont entre mêmes paralleles, c'est à dire qu'en tirant par les Points A, & D, la Ligne droite AD, cette Ligne est parallele à la Ligne BH.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont Perpendiculaires à BH, les Angles AGH, & DHG, sont Droits; & partant, par la 28. du 1. les Lignes AG, DH, sont paralleles; D'ailleurs elles sont supposées Egales; Donc par la 33. du 1. les Lignes droites AD, GH, qui joignent leurs extrémités sont paralleles; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Lignes AD, BH, entre lesquelles sont les deux Triangles ABC, DEF, sont paralleles; Cela étant, je dis que les deux Lignes AG, DH, qui marquent la hauteur de ces deux Triangles, sont égales entre elles.

Car puisque les Lignes AG, DH, sont Perpendiculaires à BH, elles sont paralleles; D'ailleurs, les Lignes AD, GH, sont supposées paralleles, ainsi la Figure AGHD, est un Parallelogramme, & par la 34. du 1. les Costez oppozés

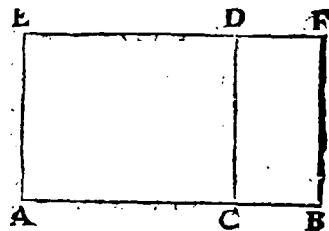
AG, DH, sont égaux ; Ce qu'il falloit encore démontrer.

5. Un Parallelogramme est dit estre appliqué à une Ligne droite, quand il a pour Baze, ou pour l'un de ses Costez, cette Ligne droite proposée.

Ainsi le Parallelogramme AD qui a pour Baze la Ligne droite proposée AC est dit estre appliqué à cette Ligne.

6. Un Parallelogramme *Défaillant*, est un Parallelogramme, dont la Baze est plus petite que la Ligne proposée, sur laquelle il est dit estre appliqué.

Ainsi, le Parallelogramme AD, est un Parallelogramme *Défaillant*; à cause que sa Baze AC est plus petite que la Ligne proposée AB, à laquelle il est dit estre appliqué, du Reste CB.



7. Le Défaut d'un Parallelogramme *Défaillant*, est un Parallelogramme qui a pour Baze le Reste de la Ligne proposée, & qui avec le *Défaillant* fait un Parallelogramme total.

Ainsi, dans cette Figure, le Parallelogramme CF est le Défaut du Parallelogramme AD; à cause qu'il a pour Baze le Reste CB, est qu'il compose avec AD le Parallelogramme total AF.

8. Un Parallelogramme *Excedant*, est un Parallelogramme total, dont la Baze est plus grande que la Ligne proposée, à laquelle il est dit estre appliqué.

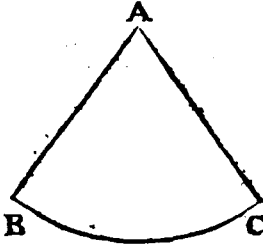
Ainsi, le Parallelogramme AF est un Parallelogramme *Excedant*; à cause que sa Baze AB est plus grande que la Ligne proposée AC, à laquelle il est dit estre appliqué, de la Partie CB.

9. L'Excez d'un Parallelogramme *Excedant*, est un Parallelogramme qui a pour Baze la Partie dont il excède, & qui estant retranché du Parallelogramme total, le Reste est un Parallelogramme justement appliqué à la Ligne proposée.

Ainsi, le Parallelogramme CF est cet excez; à cause qu'il a pour baze la Partie *Excedante* CB, & qu'estant retranché du Parallelogramme total AF, il reste le Parallelogramme AD, qui est justement appliqué à la Ligne proposée AC.

10. Un Secteur de Cercle, est une Figure comprise de deux Demy-diametres & d'une Partie de la Circonference.

Ainsi, la Figure ABC, est un Secteur de Cercle, parce qu'elle est comprise des deux Demy-diametres AB, AC, & d'une partie de la Circonference, BC.



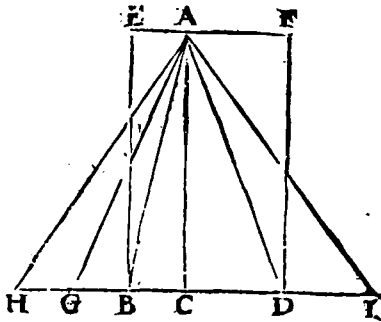
PROPOSITION I.

THEOREME I.

Les Triangles & les Parallelogrammes de mesme hauteur, sont entr'eux en mesme Raison que leurs Bazes.

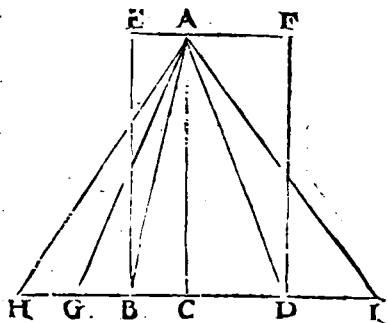
JE suppose 10. Que les deux Triangles ABC, ACB, soient de mesme hauteur; Cela estant, je dis que comme la Baze BC, est à la Baze CD, ainsi le Triangle ABC, est au Triangle ACD; Pour le prouver.

Prolongez la Ligne BD, qui est composée des deux Bazes, indefiniment vers H, & vers I; Puis ayant pris d'une part plusieurs Parties égales à BC, comme BG, GH; & d'autre part plusieurs Parties égales à CD, comme DI, menez les Lignes droites AG, AH, AI; Cela posé.



Puisque les Triangles ABC, ABG, AGH, sont sur Bazes égales, sçavoir CB, BG, GH, & entre mesmes Paralleles, comme il a esté prouvé cy-devant, ils sont égaux ent'eux, par la 38. du 1. Et par conséquent autant de fois que la Ligne HC, contient la Ligne BC, autant de fois le Triangle

ACH, contient le Triangle ABC ; & ainsi la Ligne HC, & le Triangle ACH, sont Equimultiples de la première & de la troisième des quatre Grandeurs que je dis estre proportionnelles ; De même, puisque les Triangles ACD, ADI, sont sur Bases égales, sçavoir CD, DI, & entre-mêmes parallèles, ils sont aussi égaux entr'eux ; Et par conséquent autant de fois que la Ligne CI contient CD, autant de fois le Triangle ACI, contient le Triangle ACD ; & ainsi la Ligne CI, & le Triangle ACI, sont Equimultiples de la seconde & de la quatrième des quatre Grandeurs que je dis estre proportionnelles ; Or si la Ligne HC est égale à CI, le Triangle ACH, est égal au Triangle ACI, par la 38. du 1. Si la Ligne HC est plus grande que CI, le Triangle ACH est plus grand que le Triangle ACI ; & si la Ligne HC est plus petite que CI, le Triangle ACH est aussi plus petit que le Triangle ACI ; D'où il suit par le second Axiome du 5. que comme la première Grandeur BC est à la seconde CD, ainsi la troisième ABC est à la quatrième ACD ; Ce qu'il falloit démontrer.



Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes AEBC, & ACDF, soient de même hauteur ; Cela estant, je dis que comme la Base BC est à la Base CD, ainsi le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF ; Pour le prouver.

Par ce qui vient d'estre démontré, la Base BC est à la Base CD, comme le Triangle ABC est au Triangle ACD ; Mais ces Triangles sont les moitiés de ces Parallelogrammes, par la 41. du 1. Donc le Triangle ABC est au Triangle ACD, comme le Parallelogramme AEBC est au Parallelogramme ACDF, par la 15. Prop. du 5. Et partant, comme la Base BC est à la Base CD, ainsi le Parallelo-

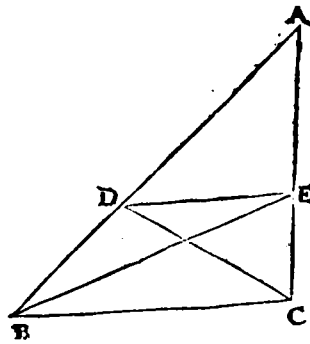
gramme AEBC est au Parallelogramme ACDF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THEOREME II.

Si une Ligne droite menée dans un Triangle est Parallele à l'un de ses Costez, & coupe les deux autres, elle les coupera proportionnellement ; Et si elle coupe deux de ses Costez proportionnellement elle sera Parallele au troisième.

JE suppose 1^o. que dans le Triangle ABC, la Ligne droite DE, soit menée parallele au Costé BC, & qu'elle coupe les deux autres Costez AB, AC ; Cela estant, je dis que ces deux Costez sont coupez proportionnellement, c'est à dire que comme AD est à DB, ainsi AE est à EC ; Pour le prouver.



Menez les Lignes droites BE, DC ; Cela posé.

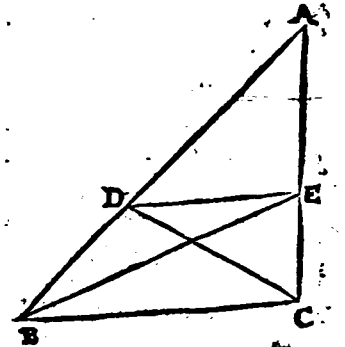
Puisque les Triangles DBE, DCE, sont sur une même Baze, à sçavoir DE, & entre-mêmes Paralleles BC, DE, ils sont égaux entr'eux, par la 36. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ADE, BDE, sont de même hauteur, Il s'ensuit par la Proposition precedente que la Baze AD est à la Baze DB, comme le Triangle ADE est au Triangle BDE, ou à son égal CED ; Mais les Triangles ADE, CED, estant de même hauteur, Il s'ensuit aussi que le Triangle ADE est au Triangle CED, comme la Baze AE est à la Baze EC ; Partant par la 11. Prop. du 5. AD est à DB, comme AE est à EC ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que la Ligne DE coupe de telle

252 - ELEMENS DEUCLIDE.

forte les deux Costez AB, AC, que AD soit à DB, comme AE est à EC ; Cela estant, je dis que la Ligne DE est parallele à BC ; Pour le prouver.

Puisque les Triangles ADE, BDE, sont de mesme hauteur, ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. donc le Triangle ADE, est au Triangle BDE, comme AD est à DB ; Mais par la Supposition AD est à DB, comme AE est à EC ; Donc le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme AE est à EC ; D'ailleurs, puisque les Triangles ADE, CED, sont de mesme hauteur, la Baze AE est à la Baze EC, comme le Triangle ADE est au Triangle CED ; Partant le Triangle ADE est au Triangle BDE, comme le mesme Triangle ADE est au Triangle CED ; D'où il suit par la 9. Prop. du 5. que les Triangles BDE, & CED, sont égaux ; Mais ils sont sur une mesme Baze, à sçavoir DE ; Donc par la 39. du 1. les Lignes DE, BC, entre lesquelles ils sont, sont paralleles ; Ce qu'il falloit démontrer.



Corollaire.

De ce que AD est à DB, comme AE est à EC, Il s'en suit en Raison Inverse, que DB est à DA, comme EC est à EA ; Et en Raison Alterne, que DB est à EC, comme DA est à EA ; Et en composant, que AB est à AD, comme AC est à AE.



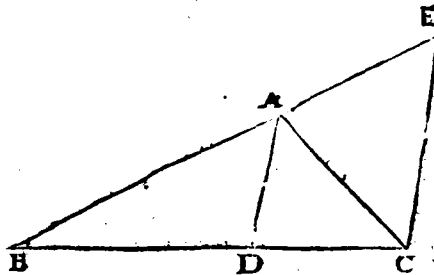
PROP.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Si l'Angle d'un Triangle est coupé en deux également par une Ligne droite qui coupe aussi la Baze, elle la coupera proportionnellement aux deux autres Costez ; Et si elle coupe la Baze proportionnellement aux deux autres Costez, elle divisera l'Angle en deux également.

JE suppose 10. Que l'Angle BAC, du Triangle ABC, soit coupé en deux également par la Ligne droite AD, qui coupe la Baze BC, au Point D ; Cela estant, je dis qu'elle la coupe proportionnellement aux deux autres Costez, c'est à dire que



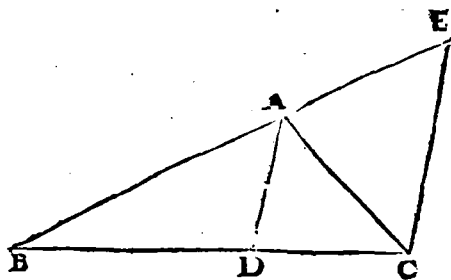
BD est à DC, comme BA est à AC ; Pour le prouver.

Prolongez la Ligne BA, vers E, & menez par le Point C, la Ligne CE parallèle à AD ; Cela posé.

Puisque les Lignes AD, EC, sont parallèles, & que la Ligne AC, tombe dessus, l'Angle ACE est égal à son Opposé alternativement DAC, par la 29. du 1. De même, puisque les Lignes AD, EC, sont parallèles, & que la Ligne BAE, tombe dessus, l'Angle Interieur AEC est égal à son extérieur BAD, par la 29. du 1. Mais par la Supposition, les deux Angles BAD, DAC, sont égaux ; donc les deux Angles ACE, AEC, sont égaux entr'eux ; D'où il suit par la 6. du 1. que les deux Costez AE, AC, qui les soutiennent, sont aussi égaux entr'eux ; D'ailleurs, puisque la

Ligne AD, qui est menée dans le Triangle BEC, est **pa-**
rallele au Costé EC, Il s'ensuit par la Prop. precedente,
 que comme BD est à DC, ainsi BA est à AE, ou à AC, son
 égale ; Ce qu'il falloit 10. démontrer.

Je suppose en second
 lieu, que la Ligne AD, qui
 coupe l'Angle BAC, cou-
 pe la Baze BC, propor-
 tionnellement aux deux au-
 tres Costez ; c'est à dire
 que BD est à DC, com-
 me BA est à AC ; Cela
 estant, je dis que l'Angle
 BAC, est coupé en deux
 également. Pour le prouver.



Puisque dans le Triangle BEC, la Ligne AD, est menée
 parallele au Costé EC, BA est AE, comme BD est à DC,
 par la Prop. precedente ; Mais par la Supposition, BD est à
 DC, comme BA est à AC ; Partant BA est à AE, comme BA
 est à AC, par la 11. Prop. du 5. D'où il suit, par la 9. Prop.
 du 5. que les Lignes AE, AC sont égales ; Et par consé-
 quent par la 5. Prop. du 1. les Angles ACE, & AEC, sont
 égaux entr'eux ; Or puisque les Lignes AD, EC, sont pa-
 ralleles, & que la Ligne AC, tombe dessus, l'Angle DAC
 est égal à son Alterne ACE, par la 29. Prop. du 1. De
 mesme, puisque les Lignes AD, EC, sont paralleles, &
 que la Ligne BAE tombe dessus, l'Angle Extérieur BAD,
 est égal à son Opposé Interieur AEC ; Mais les deux An-
 gles ACE, AEC, sont égaux entr'eux, comme il a esté
 prouvé, donc les deux Angles BAD, DAC, sont aussi
 égaux entr'eux, Ce qu'il falloit démontrer.

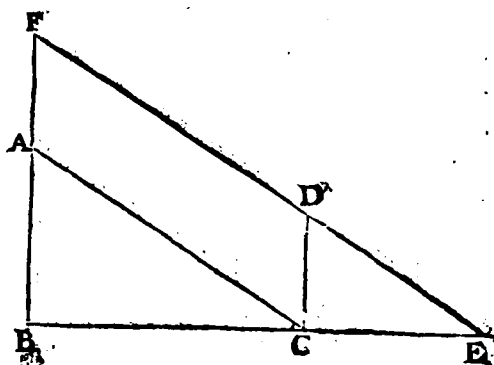


PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

Les Triangles Equiangles ont les Costez allentour des Angles égaux Proportionaux.

JE suppose que les Triangles ABC, & DCE, soient Equiangles, c'est à dire, que l'Angle ACB soit égal à l'Angle DEC, que l'Angle CBA soit égal à l'Angle ECD, & que l'Angle BAC soit égal à l'Angle CDE ; Cela estant, je dis que



les Costez de ces Triangles qui sont autbur des Angles égaux, sont Proportionaux, c'est à dire que DE est à EC, comme AC est à CB ; que EC est à CD, comme CB est à BA ; & que CD est à DE, comme BA est à AC ; Pour le prouver.

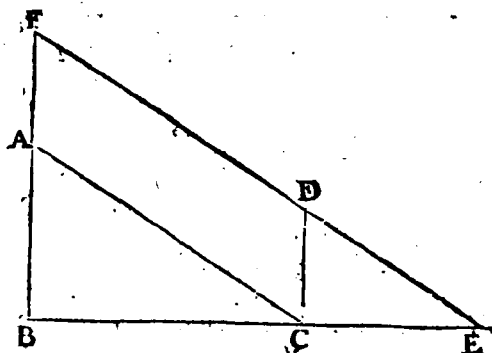
Disposez ces deux Triangles ABC, DCE, enforte que les deux Lignes BC, CE, se rencontrent directement ; Puis continuez les Costez ED, BA, vers F ; Cela posé.

Puisque par la Supposition l'Angle DEC est égal à l'Angle ACB, les deux Angles B, & E, valent moins que deux Droits par la 17. Prop. du 1. Et partant les deux Lignes ED, BA, estant prolongées vers F, se rencontreront ; D'ailleurs, puisque la Ligne droite BCE, tombe sur les deux Lignes droites EF, CA, & que l'Angle Extérieur ACB est égal à son Opposé Interieur E, par Supposition, Ces deux Lignes EF, CA, sont paralleles, par la 28. du 1. De même, puisque la Ligne droite BCE, tombe sur les

K k ij.

deux Lignes droites CD, BF, & que l'Angle Extérieur DCE, est égal à son Opposé Intérieur B, par Supposition, Ces deux Lignes CD, BE, sont aussi parallèles; Et par conséquent la Figure ACDF, est un Parallelogramme; D'où il suit que DF est égale à CA, & CD égale à AF, par la

34. du 1; Maintenant, puisque CD, est parallèle à BF, Il s'ensuit par la 2. Prop. que comme ED est à DF, ou à CA son égale, ainsi EC est à CB; Et en Raison Alterne, comme ED est à EC, ainsi CA est à CB; De même, puisque CA est Parallèle à EF, Il



s'ensuit par la 2. Prop. que comme EC est à CB, ainsi FA, ou CD son égale est à AB; Et en Raison Alterne, comme EC est à CD, ainsi CB est à AB; Nous avons donc d'une part trois Grandeurs DE, EC, CD, & d'autre part trois autres Grandeurs AC, CB, BA, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles; Partant en Raison égale, comme la première DE est à la dernière DC, ainsi la première AC est à la dernière AB; Et ainsi dans les Triangles Equiangles, les Costez qui sont allentour des Angles égaux sont Proportionnaux; Ce qu'il falloit démontrer.

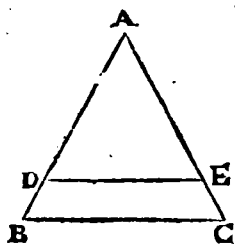
I. Corollaire.

Il suit de là que les Triangles Equiangles sont Semblables.

II. Corollaire.

Il suit encore de là que si on mene dans un Triangle une Ligne droite parallèle à l'un des Costez, Elle retranchera un Triangle Semblable au Total.

Ainsi, si dans le Triangle ABC, on mène la Ligne DE, parallèle à BC, le Triangle ADE sera Semblable au Total ABC ; Car, par la 29. du 1. l'Angle ADE est égal à l'Angle B, & l'Angle AED est égal à l'Angle C ; Et l'Angle A est commun à ces deux Triangles, donc ils sont Equiangles, & par conséquent Semblables.

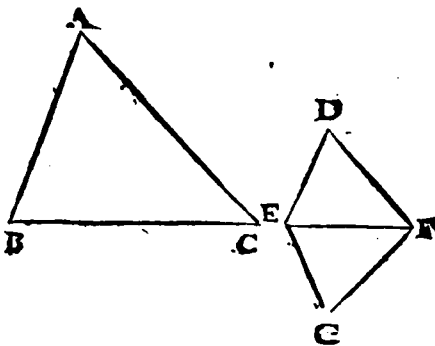


PROPOSITION V.

THEOREME V.

Les Triangles qui ont leurs Costez proportionaux sont Equiangles.

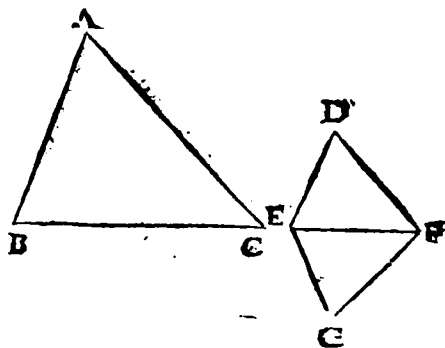
JE suppose que dans les Triangles ABC, DEF, AB soit à BC, comme DE est à EF, que BC soit à CA, comme EF est à FD, & enfin que AB soit à AC, comme DE est à DF ; Cela estant, je dis que ces deux Triangles ABC, DEF, sont Equiangles ; Pour le prouver.



Faites au Point E, l'Angle FEG égal à l'Angle B, & au Point F ; l'Angle EFG égal à l'Angle C ; Cela estant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. du 1. & les deux Triangles ABC, & EFG, seront Equiangles ; Cela posé.

Puisque ces deux Triangles sont Equiangles, par la Proposition précédente, EF est à EG, comme BC est à BA ; Mais BC est à BA, comme EF est à ED, par Supposition, Partant, par la 11. Prop. du 5. EF est à EG, comme EF

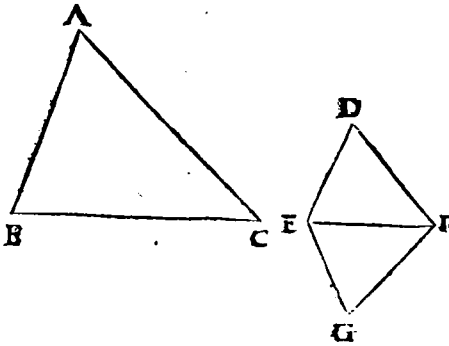
est à ED ; Et par conséquent les Lignes EG, ED, sont égales, par la 9. Prop. du 5. De même, EF est à FG, comme BC est à CA ; Mais BC est à CA, comme EF est à FD ; partant EF est à FG, comme EF est à FD, & par conséquent les Lignes FG, FD, sont égales, par la 9. Prop. du 5. Maintenant, puisqu'aux Triangles EFD, EFG, les deux Costez EF, ED sont égaux aux deux Costez EF, EG, chacun au sien, & la Baze FD égale à la Baze FG, le Triangle EFD est en tout égal au Triangle EFG, par la 8. du 1 ; Mais le Triangle EFG est Equiangle au Triangle ABC, par construction ; donc le Triangle EFD est aussi Equiangle au Triangle ABC ; Ce qu'il falloit démontrer.

**PROPOSITION VI.****THEOREME VI.**

Si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Costez d'allentour proportionnaux, ils seront Equiangles.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle B soit égal à l'Angle DEF, & que comme BC est à BA, ainsi EF soit à ED ; Cela estant, je dis que le Triangle ABC est Equiangle au Triangle DEF ; Pour le prouver. Faites l'Angle FEG égal à l'Angle B, & l'Angle EFG égal à l'Angle C. Cela estant, l'Angle G sera égal à l'Angle A, par la 32. Prop. du 1. & les deux Triangles ABC, EFG, seront Equiangles ; Cela posé.

Puisque ces deux Triangles sont Equiangles EF est à EG, comme BC est à BA, par la 4. Prop. Or BC est à BA, comme EF est à ED, par supposition ; Donc EF est à EG, comme EF est à ED ; Et partant par la 9. Prop. du 5. les Costez ED, & EG, sont égaux ; Maintenant aux Triangles EFD, EFG, les deux Costez EF, ED, sont égaux aux deux Costez EF, EG, chacun au sien, & l'Angle FED égal à l'Angle FEG, puisqu'ils sont tous deux égaux à l'Angle B ; Partant par la 4. du 1. le Triangle EFD est égal en tout au Triangle EFG ; Mais le Triangle EFG est Equiangle au Triangle ABC, par construction ; donc le Triangle EFD est aussi Equiangle au Triangle ABC ; Ce qu'il falloit démontrer.

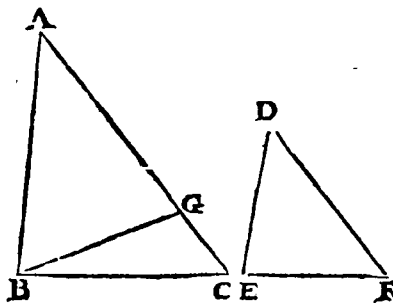


PROPOSITION VII.

THEOREME VII.

Si deux Triangles ont un Angle Egal à un Angle, & les Costez qui sont allentour d'un autre Angle proportionaux, (le troisième Angle de l'un estant de mesme espece que celui de l'autre) ces deux Triangles seront Equiangles.

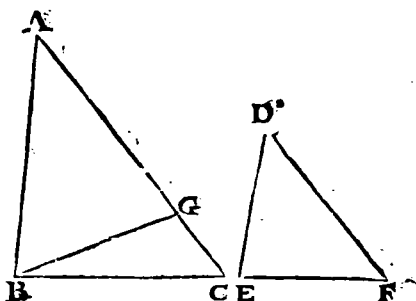
JE suppose que dans les deux Triangles ABC, DEF, l'Angle A soit égal à l'Angle D ; que le Costé AB soit au Costé BC, comme le Costé DE est au Costé EF ; Et deplus que l'Angle C soit de mesme espece que l'Angle F ; C'est à



dire, que si l'Angle F, est droit, obtus, ou aigu comme icy, l'Angle C, le soit aussi ; Cela estant, je dis que le Triangle ABC est Equiangle au Triangle DEF ; Et premierement, je dis que l'Angle ABC est égal à l'Angle E ; Pour le prouver.

Si l'Angle ABC n'estoit pas égal à l'Angle E ; Il s'en suivroit que l'un seroit plus grand que l'autre, supposons que ce soit ABC ; Cela posé.

Retranchez de cet Angle, l'Angle ABG égal à l'Angle E, par la 23. du 1. Et puisque l'Angle A est égal à l'Angle D, par supposition, le troisième BGA sera égal au troisième F, & ainsi les deux Triangles ABG, & DEF, seront Equiangles ; Desorte que si l'Angle F, est aigu comme icy, l'Angle BGA,



sera aussi aigu, & par conséquent son Complement à deux Droits BGC sera obtus ; D'ailleurs, puisque les deux Triangles ABG, & DEF, sont Equiangles, le Costé AB sera à BG, comme DE est à EF, par la 4. Prop. Mais DE est à EF, comme AB est à BC, par supposition ; Donc AB est à BG, comme AB est à BC ; D'où il suit, par la 9. Prop. du 5. que les deux Costez BG, BC, sont égaux, & par la 5. Prop. du 1. que l'Angle BGC est égal à l'Angle C ; Mais l'Angle C, a esté supposé aigu, donc l'Angle BGC sera aussi aigu ; Mais cet Angle a déjà esté prouvé obtus ; Et ainsi l'Angle BGC, seroit ensemble obtus & aigu ; Ce qui est impossible ; Il est donc impossible que les Angles C, & F estant aigus, l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E.

Que si l'on eust supposé au commencement que les Angles C & F, eussent esté obtus, on auroit prouvé de mesme que l'Angle BGA, auroit esté obtus ; Et par conséquent que son Supplement à deux Droits BGC, auroit esté aigu ; puis

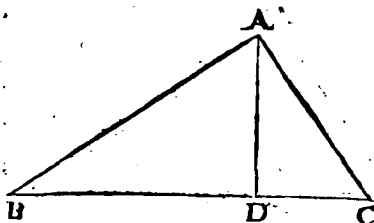
Puis montrant que cet Angle BGC, seroit aussi égal à l'Angle obtus C, Il seroit arrivé que l'Angle BGC auroit dû estre Aigu & obtus tout ensemble ; Ce qui est impossible ; Si bien qu'il est absolument impossible que l'Angle ABC soit plus grand que l'Angle E ; Et comme l'on peut prouver de mesme que l'Angle E ne scauroit estre plus grand que l'Angle ABC, Il s'ensuit que ces deux Angles sont égaux ; Mais l'Angle A est égal à l'Angle D, par supposition ; Par conséquent les deux Angles C, & F, sont aussi égaux, par la 32. du 1. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

THEOREME VIII.

Si de l'Angle droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Base, elle le divisera en deux autres Triangles, qui seront Semblables entr'eux, & au Total.

JE suppose que le Triangle ABC, soit Rectangle, & que de l'Angle droit BAC, on abaisse la Ligne droite AD perpendiculaire à la Base BC ; Cela étant, je dis premièrement que les deux Triangles

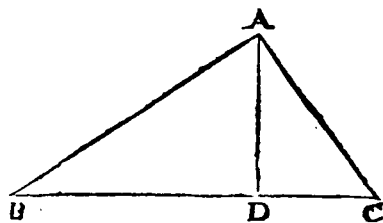


ABD, ADC, dans lesquels le Triangle ABC, est divisé ; luy sont Semblables ; Pour le prouver.

Au Triangle ABD, l'Angle BDA, est droit, & égal à l'Angle BAC ; Deplus l'Angle B est commun aux deux Triangles ABD, & ABC ; Par conséquent le troisième BAD est égal au troisième BCA ; Et ainsi ces deux Triangles sont Equiangles & Semblables, par la 4. Prop. & par la 1. Définition.

De même, au Triangle ADC, l'Angle ADC, est Droit, & égal à l'Angle BAC ; De plus, l'Angle C est commun aux deux Triangles ADC, & ABC ; & par conséquent le troisième DAC est égal au troisième CBA ; Et ainsi ces deux Triangles sont Equiangles & Semblables ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les deux Triangles ABD, & ADC, sont semblables entr'eux ; Pour le prouver.



L'Angle ADB est égal à l'Angle ADC, étant Droits, par construction ; L'Angle ABD a été prouvé égal à l'Angle DAC, & l'Angle BAD à l'Angle ACD ; Et partant, ces deux Triangles sont Equiangles & Semblables ; Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que si de l'Angle Droit d'un Triangle Rectangle on abaisse une Perpendiculaire sur la Baze, elle sera Moyenne proportionnelle entre les deux Parties de la Baze, C'est à dire que comme une des Parties de la Baze sera à cette Perpendiculaire, ainsi cette Perpendiculaire sera à l'autre Partie ; Car puisque les deux Triangles ADB, ADC, sont semblables, les Costez allentour de leurs Angles Droits doivent estre Proportionnaux, par la 4. Prop. Et partant, comme BD est à DA, ainsi DA est à DC.



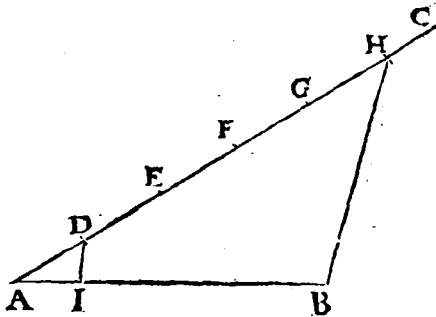
PROPOSITION IX.

PROBLÈME I.

*Une Ligne Droite estant donnée en retrancher une
Partie demandée.*

JE suppose que la Ligne Droite AB soit donnée , & je propose d'en retrancher une Partie demandée , comme par exemple la cinquième Partie ; Pour le faire.

Tirez du Point A, la Ligne droite indéterminée AC, qui fasse avec AB, tel Angle qu'il vous plaira ; Puis ayant pris la Partie AD, à discretion, prenez de suite quatre autres Parties, sçavoir DE, EF, FG, GH égales à AD, en sorte que la Ligne AD soit la cinquième Partie de AH ;



Menez apres cela du Point H, au Point B, la Ligne droite HB ; & par le Point D, menez la Ligne droite DI, parallèle à HB ; Cela estant, je dis que la Ligne AI, est la Partie demandée ; C'est à dire qu'elle est la cinquième Partie de AB ; Pour le prouver.

Puisque DI est parallèle à HB, Il s'ensuit par la 2. Prop. que AI est à IB, comme AD est à DH ; & en composant AB est à AI, comme AH est à AD ; Et en Raison Inverse AI est à AB, comme AD est à AH ; Or AD est la cinquième Partie de AH, par construction, donc AI sera aussi la cinquième Partie de AB ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

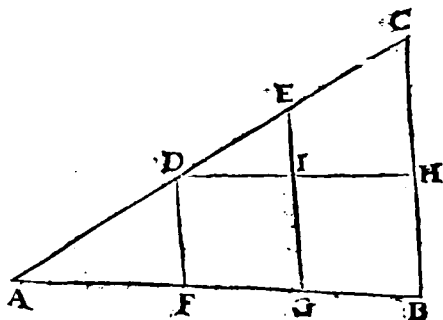


PROPOSITION X.

PROBLEME II.

Une Ligne Droite estant donnée, la couper Semblablement à une autre Ligne Droite donnée & coupée.

JE suppose que les deux Lignes droites AB, AC, soient données, & que AC, soit coupée en trois Parties, sçavoir AD, DE, EC; Et je propose de couper la Ligne AB, Semblablement à la Ligne AC; C'est à dire en sorte que ses Parties soient entr'elles en mesme Raïson que les Parties AD, DE, EC; Pour le faire.



Disposez ces deux Lignes, en sorte qu'elles se rencontrent au Point A, & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC; & apres avoir mené du Point C au Point B, la Ligne droite CB, tirez par les Points D & E, les Lignes droites DF, EG, paralleles à CB & entr'elles; & par le mesme Point D, menez aussi la Ligne droite DH parallele à FB; Cela estant, je dis que la Ligne droite AB, est coupée Semblablement à la Ligne AC, aux Points F, & G; Pour le prouver.

Puisque dans le Triangle AEG, la Ligne droite DF est menée parallele à EG, Il s'ensuit par la 2. Prop. que AF est à FG, comme AD est à DE; Et puisque la Ligne DH est parallele à FB, Il s'ensuit que les Figures FI, GH, sont des Parallelogrammes; Et qu'ainsi les Costez FG, GB, sont égaux aux Costez opposez DI, IH; Et

Partant que FG est à GB , comme DI est à IH ; Or puisqu'il y a dans le Triangle DCH , la Ligne EI est menée parallèle à CH ; DI est à IH , comme DE est à EC , par la 2. Prop. Et partant FG est à GB , comme DE est à EC ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

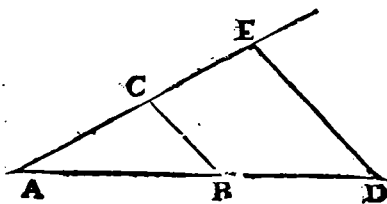
PROPOSITION XI.

PROBLEME III.

Deux Lignes Droites estant données, en trouver une troisième qui leur soit proportionnelle.

JE suppose que les deux Lignes Droites AB , AC , soient données, & je propose de trouver une troisième Ligne qui leur soit proportionnelle ; Pour le faire.

Disposition des deux Lignes droites AB , AC , en sorte qu'elles se rencontrent au Point A , & fassent un Angle tel qu'il vous plaira, comme BAC ; Prolongez ces mêmes Lignes indéfiniment vers D , & vers E ; & après avoir pris BD égale à AC , & tiré du Point B au Point C , la Ligne droite BC , menez par le Point D , la Ligne droite DE parallèle à BC , qui coupe la Ligne AE au Point E ; Cela estant, je dis que la Ligne CE , est la troisième proportionnelle qu'il s'agit de trouver ; Pour le prouver.



Puisque dans le Triangle DAE , la Ligne droite BC est menée parallèle à DE , Il s'ensuit, par la 2. Prop. que AB est à BD ou à son égale AC , comme AC est à CE ; Et partant CE est troisième proportionnelle aux deux Lignes droites données AB , AC ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

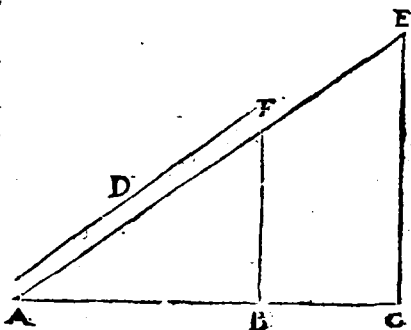
PROPOSITION XII.

PROBLEME IV.

Trois Lignes Droites estant données , en trouver une quatrième qui leur soit proportionnelle.

JE suppose que les trois Lignes droites AB, BC & D, soient données, & je propose de trouver une quatrième Ligne qui leur soit proportionnelle ; Pour le faire.

Disposez la premiere Ligne AB, & la seconde BC, en sorte qu'elles se rencontrent directement au Point B ; tirez du Point A, la Ligne infinie AE, qui fasse avec AC, un Angle tel qu'il vous plaira, comme CAE ; Puis ayant pris AF, égale à la Ligne droite donnée D, & mené la Ligne droite FB ; Tirez par le Point C, la Ligne CE parallèle à FB, qui coupe la Ligne AE au Point E ; Cela estant, je dis que la Ligne FE est la quatrième proportionnelle qu'il s'agit de trouver ; Pour le prouver.



Puisque dans le Triangle CAE, la Ligne FB est menée parallèle à EC, Il s'ensuit par la 2. Prop. que AB est à BC, comme AF ou D son égale est à FE ; Et partant FE est cette quatrième Ligne qu'il falloit trouver, proportionnelle aux trois Lignes Droites données ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.



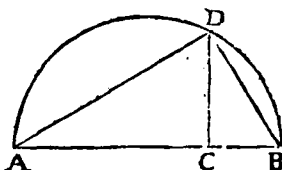
PROPOSITION XIII.

PROBLEME V.

Deux Lignes droites étant données, trouver une Moyenne proportionnelle.

JE suppose que les deux Lignes Droites AC, CB, soient données, & je propose de leur trouver une Moyenne proportionnelle, c'est à dire, je propose de trouver une Ligne qui ait cette Proportion avec les deux autres, que comme AC, sera à cette Ligne, ainsi cette Ligne soit à CB ; Pour le faire.

Disposez les deux Lignes Droites AC, CB, en telle sorte qu'elles se rencontrent directement; Puis décrivez sur AB, le demy Cercle ADB; & élevez au Point C la Ligne perpendiculaire CD, qui rencontre sa circonference au Point D ; Cela étant, je dis que la Ligne CD est Moyenne proportionnelle entre AC, & CB ; Pour le prouver.



Menez les Lignes droites AD, DB ; Cela posé.

Puisque l'Angle ADB, est au Demy-cercle, il est Droit par la 31. Prop. du troisième ; Et partant par le Corollaire de la 8. Prop. CD est Moyenne proportionnelle entre AC, & CB ; C'est à dire que comme AC est à CD, ainsi CD est à CB ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

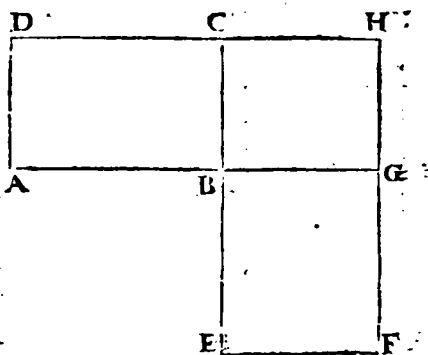


PROPOSITION XIV.

THEOREME IX.

Si deux Parallelogrammes Egaux ont un Angle Egal à un Angle , les Costez allentour des Angles Egaux seront reciproquement proportionnaux ; Et si deux Parallelogrammes ont un Angle égal à un Angle , & les Costez allentour des Angles égaux reciproquement proportionnaux, Ils seront égaux.

JE suppose premiere-
ment que les deux Parallelo-
grammes ABCD, BEFG,
soient égaux, & que les An-
gles ABC, EBG, soient aussi
égaux ; Cela estant , je dis
que les Costez allentour de
ces Angles sont reciproque-
ment proportionnaux ; C'est
à dire que comme AB est à
BG, ainsi EB est à BC, Pour
le prouver.



Disposez les deux Parallelogrammes ABCD, BEFG, enforte que leurs Costez AB, BG, se rencontrent directement au Point B ; & prolongez les Costez DC, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H ; Cela posé.

Puisque les Angles ABC, & EBG, sont égaux, par Supposition, les Lignes CB, & EB, se rencontrent directement, par la 14. du 1 ; D'ailleurs , puisque les Lignes DH, AG, sont paralleles, & que CE, HF, sont aussi paralleles, CG, est un Parallelogramme ; Maintenant, puisque les Parallelogrammes DB, CG, sont de mesme hauteur, Ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. C'est à dire que

AB

AB est à BG, comme le Parallelogramme DB est au Parallelogramme CG ; Si donc au lieu du Parallelogramme DB on prend le Parallelogramme BF, qui luy est égal, par supposition, Il s'ensuivra que AB sera à BG, comme le Parallelogramme BF est au Parallelogramme CG ; Or ces deux Parallelogrammes estant de mesme hauteur, BF est à CG, comme EB est à BC ; Partant, par la 11. Prop. du 5. AB est à BG, comme EB est à BC ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Parallelogrammes ABCD, & BEFG, ayent l'Angle ABC égal à l'Angle EBG, & que le Costé AB soit au Costé BG, comme le Costé EB est au Costé BC ; Cela estant, je dis que ces deux Parallelogrammes sont égaux entr'eux ; Pour le prouver.

La mesme préparation que dessus estant supposée ; puis-que les Parallelogrammes DB, CG, sont de mesme hauteur, le Parallelogramme DB, est au Parallelogramme CG, comme AB est à BG, par la 1. Prop. Or AB est à BG, comme EB est à BC, par supposition ; Partant DB est à CG, comme EB est à BC ; D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes BF, CG, sont aussi de mesme hauteur, comme EB est à BC, ainsi BF, est à CG ; Partant comme DB est à CG, ainsi BF est encore à CG ; D'où il suit par la 9. Prop. du 5. que ces deux Parallelogrammes DB, BF, sont égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

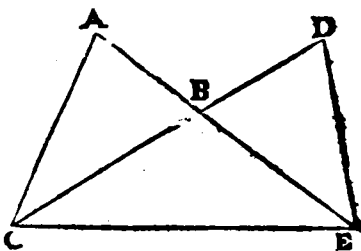


PROPOSITION XV.

THEOREME X.

Si deux Triangles égaux ont un Angle égal à un Angle, les Costez allentour des Angles égaux seront reciproquement proportionnaux ; Et si deux Triangles ont un Angle égal à un Angle, & les Costez allentour des Angles égaux reciproquement porportionnaux, Ils seront égaux.

JE suppose 10. que les deux Triangles ABC, DBE, soient égaux, & que les Angles ABC, DBE, soient aussi égaux ; Cela estant, je dis que les Costez allentour de ces Angles sont reciproquement proportionnaux ; C'est à dire que comme AB est à BE, ainsi DB est à BC ; Pour le prouver.



Disposez les deux Triangles ABC, DBE, en sorte que leurs Costez AB, & BE, se rencontrent directement au Point B ; & du Point C au Point E, menez la Ligne droite CE ; Cela posé,

Puisque les Angles ABC, & DBE, sont égaux, par Supposition, les Costez CB, & DB, concourent directement, par la 14. du 1. D'ailleurs, puisque les Triangles ABC & BCE, sont de mesme hauteur, Ils sont entr'eux comme leurs Bazes, par la 1. Prop. Et partant AB est à BE, comme le Triangle ABC est au Triangle BCE ; Mais le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme son Egal DBE est au mesme Triangle BCE ; Partant AB est à BE, comme le Triangle DBE est au Triangle BCE ; Mais ces deux Triangles sont de mesme hauteur, Et par conséquent le Trian-

gle DBE est au Triangle BCE, comme la Baze DB est à la Baze BC, par la 1. Prop. D'où il suit que AB est à BE, comme DB est à BC ; par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que les Triangles ABC & DBE, ayent l'Angle ABC, égal à l'Angle DBE, & que AB soit à BE, comme DB est à BC ; Cela estant, je dis que ces deux Triangles sont égaux entr'eux ; Pour le prouver.

La mesme préparation que dessus estant supposée ; Puis que les Triangles ABC, & BCE, sont de mesme hauteur, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme AB est à BE, par la 1. Prop. Or AB est à BE, comme DB est à BC, par Supposition, Donc le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme DB est à BC, par la 11. du 1 ; D'ailleurs, parce que les Triangles DBE, & BCE, sont de mesme hauteur, comme DB est à BC, ainsi le Triangle DBE est au Triangle BCE ; Partant, le Triangle ABC est au Triangle BCE, comme le Triangle DBE est au mesme Triangle BCE ; D'où il suit par la 9. Prop. du 5. que ces deux Triangles ABC, & DBE, sont égaux entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

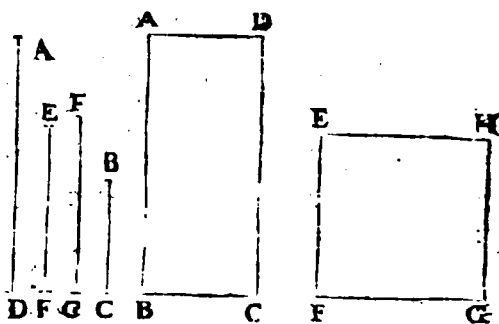
THEOREME XI.

Si quatre Lignes Droites sont proportionnelles, le Rectangle des Extremes sera égal au Rectangle des Moyennes ; Et si le Rectangle des Extremes est égal au Rectangle des Moyennes, les quatre Lignes Droites seront proportionnelles.

JE suppose 10. que les quatre Lignes Droites AB, EF, FG, BC, soient proportionnelles, en sorte que AB & BC soient les Extremes, & que EF & FG, soient les

Mn ij

Moyennes ; D'ailleurs, je suppose que le Rectangle ABCD soit fait des Extremes AB, BC, & que le Rectangle EFGH soit fait des Moyennes EF, FG ; Cela estant, je dis que ces deux Rectangles sont égaux entr'eux ; Pour le prouver.



Puisque tous les Angles de ces Rectangles sont Droits, Ils ont un Angle égal à un Angle ; Et deplus, il est supposé que AB, costé du premier Rectangle est à EF, costé du second, comme FG costé du second, est à BC, costé du premier ; Et partant, Ils sont égaux, par la 14. Prop. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, les quatre Lignes Droites AB, EF, FG, BC, & que le Rectangle ABCD, compris des Extremes AB, BC, soit égal au Rectangle EFGH, compris des Moyennes EF, FG ; Cela estant, je dis que ces quatre Lignes sont proportionnelles ; C'est à dire que AB est à EF, comme FG est à BC ; Pour le prouver.

Puisque les deux Rectangles ABCD, EFGH, sont égaux, & que leurs Angles sont Droits, Ils ont un Angle égal à un Angle, D'où il suit, par la 14. Prop. que les Costez allentour des Angles égaux sont reciproquement proportionnaux ; C'est à dire que AB, costé du premier Rectangle est à EF, costé du second, comme FG, costé du mesme second, est à BC, costé du premier, Et qu'ainsi ces quatre Lignes sont proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.

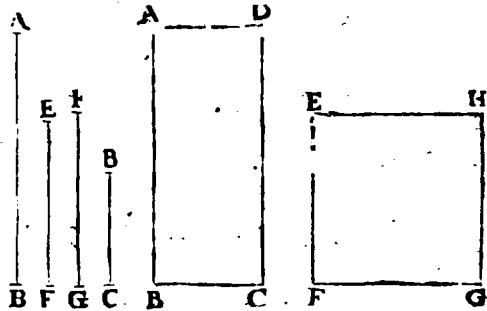


PROPOSITION XVII.

THEOREME XII.

Si trois Lignes Droites sont proportionnelles, le Rectangle des deux Extremes sera égal au Quarré de la Moyenne ; Et si le Rectangle des Extremes est égal au Quarré de la Moyenne, les trois Lignes Droites seront proportionnelles.

Je suppose 1^o. que les trois Lignes Droites AB, EF, BC, soient proportionnelles, que le Rectangle ABCD soit compris des deux Extremes AB, BC, & que le Quarré EFGH soit celui de la Moyenne EF ; Cela estant, je dis que le Rectangle ABCD est égal au Quarré EFGH ; Pour le prouver.



Faites la Ligne FG égale à EF ; Cela posé.

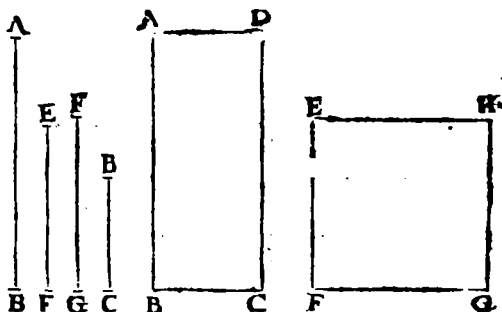
Puisque la Ligne FG est égale à EF, les quatre Lignes Droites AB, EF, FG, BC, sont proportionnelles par supposition, & partant par la Prop. precedente, le Rectangle ABCD qui est fait des deux Extremes, sera égal au Rectangle EFGH, qui est fait des deux Moyennes ; mais puisque les Moyennes EF, FG, sont égales, leur Rectangle est le même que le Quarré de la Moyenne, Sçavoir EFGH ; Et partant le Rectangle des Extremes est égal au Quarré de la Moyenne ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu, que le Rectangle ABCD, compris des deux Extremes AB, BC, soit égal au Quarré

EFGH, Quarré de la Moyenne EF ; Cela estant, je dis que les trois Lignes AB, EF, BC, sont proportionnelles. Pour le prouver.

Puisque les deux Rectangles ABCD, & EFGH, sont égaux, & que leurs Angles

sont Droits, Ils ont un Angle égal à un Angle ; D'où il suit, par la 14. Prop. que leurs Costez sont reciproquement proportionnaux ; C'est à dire que AB, Costé du premier Rectangle, est à EF, Costé du second, comme FG, Costé du second, ou son Egal EF est à BC, Costé du premier ; Et ainsi ces trois Lignes sont proportionnelles ; Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XVIII.

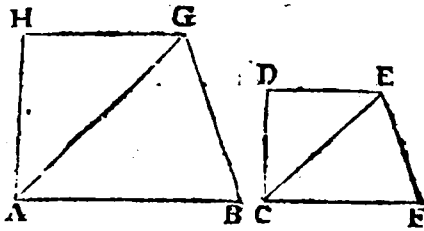
PROBLEME VI.

Sur une Ligne Droïtte donnée, décrire une Figure Rectiligne Semblable, & Semblablement posée à une Figure Rectiligne donnée.

JE suppose que la Ligne AB, & la Figure Rectiligne CDEF soient données, & je propose de décrire sur la Ligne AB une Figure Semblable à CDEF, & Semblablement posée, c'est à dire qui soit telle, que dans la Figure qui est à décrire, la Ligne AB soit un Costé homologue à un Costé de la Figure donnée, comme par exemple à CF ; Pour le faire.

Prenez un des Angles de la Figure donnée tel qu'il vous plaira, comme par exemple C, & du Point C, menez aux

autres Angles autant de Lignes Droites que vous pourrez, telle qu'est CE, pour refondre toute la Figure en Triangles; Cela fait, menez des Points A, & B, les Lignes Droites AG, BG, qui fassent avec AB, les Angles GAB, &



GBA, égaux aux Angles ECF, & EFC, chacun au sien; Puis menez des Points A, & G, les Lignes Droites AH, GH, qui fassent avec AG, les Angles HAG, & HGA, égaux aux Angles DCE, & DEC, & ainsi de suite, s'il y avoit encore d'autres Triangles dans la Figure CDEF; Cela estant, je dis que la Figure ABGH, décrite sur la Ligne donnée AB, est Semblable & Semblablement posée à la Figure CDEF; Pour le prouver.

Premierement, de ce que par la Construction chaque Triangle de l'une des Figures a deux Angles égaux à deux Angles d'un Triangle de l'autre Figure, le troisième Angle de chaque Triangle d'une Figure s'ensuit égal au troisième Angle de chaque Triangle de l'autre Figure, & partant tous les Angles des deux Figures estant égaux chacun au sien, les deux Figures sont Equiangles.

Deplus, puisque les Triangles ABG, & CFE, sont Equiangles, Il s'ensuit par la 4. Prop. que GB est à BA, comme EF est à FC; & de même que AB est à AG, comme CF est à CE; Mais puisque les Triangles AGH, & CED, sont aussi Equiangles, AG est à AH, comme CE est à CD; Et partant en Raison égale, AB est à AH, comme CF est à CD; De même AH est à HG, comme CD est à DE; Donc enfin en Raison égale, GB est à GH, comme EF est à ED; Et ainsi les deux Figures ABGH, & CDEF, qui sont Equiangles, & qui ont leurs Costez autour des Angles égaux proportionnaux, sont Semblables, & Semblablement posées; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION XIX.

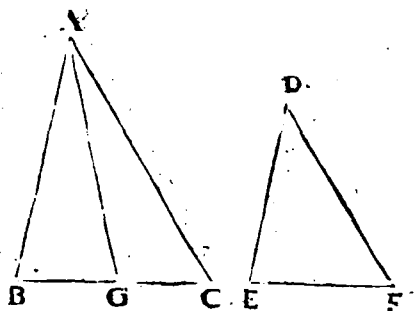
THEOREME XIII.

Les Triangles Semblables sont entr'eux en Raison doublée de leurs Costez de mesme Raison.

IE suppose que les Triangles ABC, & DEF, soient Semblables, que l'Angle BAC, soit égal à l'Angle D, l'Angle B, à l'Angle E, & l'Angle C, à l'Angle F ; Cela étant, je dis que les Triangles ABC, & DEF, sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Costez de mesme Raison, c'est à dire, qu'ayant trouvé une troisième proportionnelle aux deux Costez BC, EF, le Triangle ABC sera au Triangle DEF, comme BC, sera à cette troisième proportionnelle, par exemple à BG ; Pour le prouver.

Menez du Point A au Point G, la Ligne Droite AG ; Cela posé.

Puisque les Triangles ABC, & DEF, sont Semblables, AB est à BC, comme DE est à EF ; Et partant en Raison Alterne AB est à DE, comme BC est à EF ; Mais BC est à EF, comme EF est à BG, par construction, Donc AB est à DE, comme EF est à BG ; Et ainsi les deux Triangles



gles ABG, & DEF, ont un Angle égal à un Angle, sçavoir B, égal à E, & les Costez allentour de ces Angles reciproquement proportionnaux, D'où il suit qu'ils sont égaux, par la 15. Prop. Et partant le Triangle ABC sera au Triangle DEF, comme le mesme Triangle ABC est au Triangle ABG ; Or ces deux Triangles étant de mesme hauteur, le Triangle ABC est au Triangle ABG, comme

BC

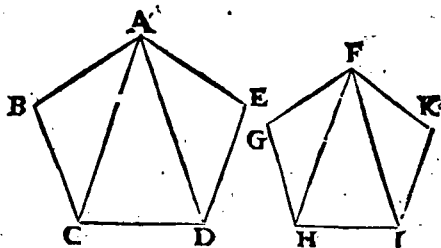
BC est à BG, par la 1. Prop. Par conséquent le Triangle ABC, est aussi au Triangle DEF, comme BC est à BG, c'est à dire en Raison doublée de BC à EF ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XX.

THEOREME XIV.

Les Polygones Semblables peuvent estre divisez dans un nombre égal de Triangles Semblables entr'eux, & proportionnaux à leurs Tous ; Et ces Polygones sont l'un à l'autre en Raison doublée de leurs Costez de mesme Raison.

JE suppose que les Polygones ABCDE, & FGHIK, soient Semblables ; en sorte que l'Angle A soit égal à l'Angle F ; l'Angle B à l'Angle G ; l'Angle C à l'Angle H ; l'Angle D à l'Angle I ; & l'Angle E à l'Angle K ; Et deplus que AB soit à BC, comme FG à GH ; que BC soit à CD, comme GH à HI, que CD soit à DE, comme HI à IK ; Et enfin que DE soit à EA, comme IK est à KF ; ou bien en Raison alterne que AB soit à FG, comme BC est à GH ; que BC soit à GH, comme CD est à HI ; que CD soit à HI, comme DE est à IK ; & enfin que DE soit à IK, comme EA est à KF ; Cela estant, je dis premierement qu'on peut diviser le Polygone ABCDE, en autant de Triangles que le Polygone FGHIK ; Pour le prouver.



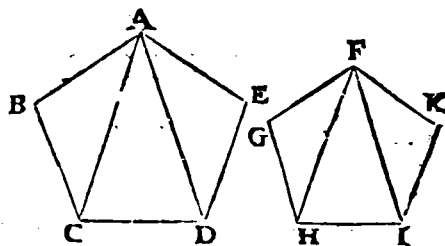
Prenez dans les deux Polygones deux Angles égaux, comme l'Angle A, & l'Angle F, & tirez des Points A, & F,

278 ELEMENTS D'EUCLIDE.

aux autres Angles autant de Lignes Droites que vous pourrez, comme AC, AD, FH, FI ; Cela posé.

Puisque le nombre des Angles du Poligone ABCDE est égal au nombre des Angles du Poligone FGHK ; Il est évident qu'il n'y aura ny plus ny moins de Triangles dans l'un que dans l'autre.

Je dis en second lieu, que chaque Triangle du Poligone ABCDE est Semblable à un Triangle du Poligone FGHK, par exemple, que le Triangle ABC est Semblable au Triangle FGH ; le Tri-



angle ACD au Triangle FHI, & le Triangle ADE au Triangle FIK ; Pour le prouver.

Puisque l'Angle B est égal à l'Angle G, & que le Costé AB est au Costé BC, comme FG à GH, par Supposition, Il s'ensuit par la 6. Prop. que les deux Triangles ABC, & FGH, sont Semblables, & Equiangles ; On prouvera de même que les deux Triangles ADE, & FIK, sont aussi Semblables, & Equiangles ; Et quant aux Triangles ACD, & FHI, puisque les Angles BCD, & GHI, sont égaux par Supposition, si on en retranche les Angles BCA, & GHF, qui ont esté prouvez égaux, les Angles Restans ACD, & FHI, seront aussi égaux entr'eux ; De même, si des Angles CDE, & HIK, qui sont égaux par Supposition, on retranche les Angles ADE, & FIK, qui ont esté prouvez égaux, les Angles Restans ADC, & FIH, seront aussi égaux entr'eux ; & ainsi les deux Triangles ACD, & FHI, sont Equiangles par la 32. du 1. & par conséquent Semblables ; Et partant chaque Triangle d'un des Poligones, est Semblable à un Triangle de l'autre Poligone ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisième lieu, que les Triangles des deux Poligones sont proportionnaux à leurs Tous, c'est à dire, que comme un Triangle est à son Semblable, ainsi un des

Poligones est à l'autre. Pour le prouver.

Puisque les Triangles ABC, & FGH, sont Semblables, le premier est au second, en Raison doublée du Costé BC, au Costé GH, par la Proposition precedente ; Or puisque BC est à GH, comme CD est à HI, par Supposition, la Raison doublée de BC à GH, est la même que la Raison doublée de CD à HI ; Donc le Triangle ABC est au Triangle FGH, en Raison doublée de CD à HI ; Mais le Triangle ACD estant Semblable au Triangle FHI, l'un est aussi à l'autre en Raison doublée de CD à HI ; Et partant le Triangle ABC est au Triangle FGH, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI ; De même le Triangle ADE estant semblable au Triangle FIK, l'un est à l'autre en Raison doublée de DE à IK ; ou bien parce que DE est à IK, comme CD est à HI ; le Triangle ADE est au Triangle FIK, en Raison doublée de CD à HI, c'est à dire, comme le Triangle ACD est au Triangle FHI, ou comme le Triangle ABC au Triangle FGH, puisque ces Triangles sont aussi entr'eux en Raison doublée de CD à HI, comme il a esté prouvé ; Puis donc que nous avons d'une part plusieurs Triangles, & autant d'autres d'une autre part, qui sont entr'eux en même Raison ; Il suit par la 11. du 5. que comme chaque Triangle d'une part est à son Semblable de l'autre part, ainsi tous les Triangles d'une part sont à tous les Triangles de l'autre, c'est à dire, ainsi l'un des Poligones est à l'autre Poligone, Ce qu'il falloit encore démontrer.

Je dis en dernier lieu, que le Poligone ABCDE est au Poligone FGHIK, en Raison doublée de leurs Costez de même Raison, par exemple en Raison doublée de CD à HI ; Pour le prouver.

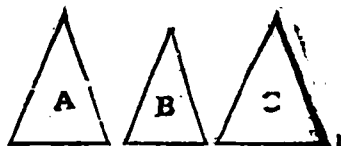
Le Poligone ABCDE est au Poligone FGHIK, comme chaque Triangle est à son Semblable, comme il vient d'estre prouvé ; Or chaque Triangle est à son Semblable en Raison double de CD à HI, comme il a aussi esté prouvé, donc le Poligone ABCDE est au Poligone FGHIK, en Raison doublée de CD à HI ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

THEOREME XV.

Les Figures Rectilignes Semblables à une mesme , sont Semblables entr'elles.

JE suppose que la Figure Rectiligne A soit Semblable à la Figure Rectiligne B ; Et que la Figure Rectiligne C, soit aussi Semblable à la Figure Rectiligne B ; Cela estant , je dis que les deux Figures A & C, sont Semblables entr'elles ; Pour le prouver.



Puisque les deux Figures A, & B, sont Semblables, les Angles de la Figure A, sont égaux aux Angles de la Figure B, par la 1. Definition ; & puisque la Figure C est Semblable à la Figure B, les Angles de la Figure C, sont aussi égaux aux Angles de la mesme Figure B ; Et partant les Angles de la Figure A, sont égaux aux Angles de la Figure C ; D'ailleurs, puisque les Figures A, & B, sont Semblables, les Costez qui sont allentour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Costez qui sont allentour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure B, par la 1. Definition ; Et de mesme, puisque les Figures B, & C, sont Semblables, les Costez qui sont autour des Angles de la mesme Figure B, sont aussi proportionnaux aux Costez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C ; D'où il suit que les Costez qui sont autour des Angles de la Figure A, sont proportionnaux aux Costez qui sont autour des Angles qui leur sont égaux dans la Figure C ; Et partant les Figures A & C sont Semblables ; Ce qu'il falloit démontrer,

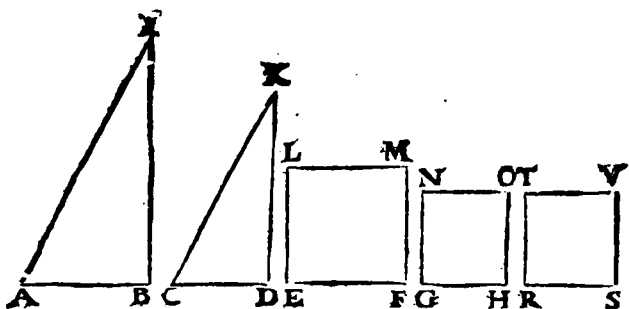
PROPOSITION XXII.

THEOREME XVI.

Si quatre Lignes Droites sont proportionnelles, les Figures Semblables & Semblablement posées sur ces Lignes, seront aussi proportionnelles; Et si quatre Figures Semblables & Semblablement posées sur quatre Lignes Droites sont proportionnelles, ces quatre Lignes Droites seront aussi proportionnelles.

Je suppose premièrement que les quatre Lignes AB, CD, EF, GH, soient proportionnelles, & que les Figures ABI, CDK, & les Figures EM, GO, soient Semblables & Semblablement posées sur ces quatre Lignes; Cela étant, je dis que ces quatre Figures sont proportionnelles, c'est à dire que ABI est à CDK, comme EM est à GO; Pour le prouver.

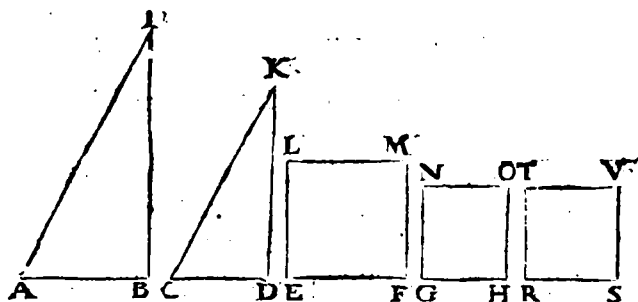
Puisque les Figures ABI, & CDK, sont Semblables, ABI



est à CDK, en Raïson doublée de AB à CD, par la 20. Prop. Et puisque AB est à CD, comme EF est à GH, par Supposition, la Raïson doublée de AB à CD, est la même

que la Raison doublée de EF à GH ; De même , puis-
que les Figures EM, & GO, sont Semblables , EM est à
GO, en Raison doublée de EF à GH ; Partant la Figure
ABI est à la Figure CDK, comme la Figure EM est à la
Figure GO, par la 11. du 5. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose en second lieu , que les quatre Figures ABI,
CDK, EM, GO qui sont Semblables & Semblablement
posées sur les quatre Lignes Droites AB, CD, EF, GH,
soient proportionnelles ; Cela estant, je dis que ces quatre
Lignes sont aussi proportionnelles ; Pour le prouver.



Supposons que RS, soit une quatrième Proportionnelle
aux trois Lignes Droites AB, CD, EF, par la 12. Prop.
& que la Figure RSVT, décrite sur cette Ligne, soit Sem-
blable & Semblablement posée à la Figure EM, ou à GO,
par la 18. Prop. Cela posé.

Par ce qui vient d'être démontré, comme ABI sera à
CDK, ainsi EM sera à RV ; Mais ABI est aussi à CDK,
comme EM est à GO, par Supposition ; D'où il suit, par
la 9. Prop. du 5. que les Figures GO, & RV, sont égales ;
Mais elles sont aussi Semblables par construction ; Partant
les Lignes GH, RS, sur lesquelles elles sont décrites, sont
égales ; Comme donc la Ligne RS, est une quatrième Pro-
portionnelle aux trois Lignes AB, CD, EF, la Ligne GH,
sera aussi une quatrième proportionnelle aux mêmes Lignes,
c'est à dire, que AB sera à CD, comme EF, à GH ; Ce qu'il
falloit démontrer.

PROPOSITION XXIII.

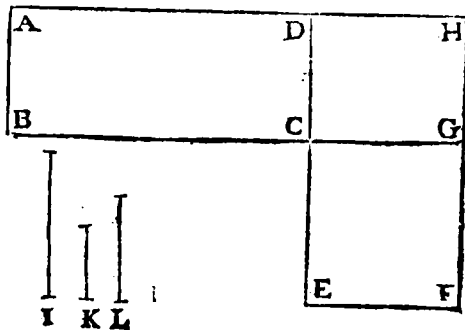
THEOREME XVII.

*Les Parallelogrammes Equiangles sont entr'eux en
Raison Composée de celle de leurs Costez.*

JE suppose que les Parallelogrammes AC, & CF, soient Equiangles, & que l'Angle BCD soit égal à l'Angle ECG ; Cela estant, je dis que le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC, à CG, & de DC, à CE ; Pour le prouver.

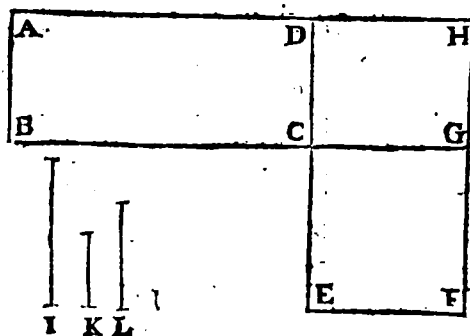
Disposez ces deux Parallelogrammes en sorte que leurs Costez BC, CG, se rencontrent directement au Point C ; par mesme moyen les deux autres Costez DE, CE, concourront aussi directement, par la 14. du 1. Prolongez les Costez AD, FG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point H ; Puis ayant pris à discretion la Ligne I, faites par la 12. Prop. que comme BC est à CG, ainsi la Ligne I, soit à la Ligne K, & comme DC est à CE, ainsi la Ligne K soit à la Ligne L ; Cela posé.

Puisque les Lignes AH, BG, sont paralleles, & que les Lignes ED, FH, sont aussi paralleles, la Figure DG, est un Parallelogramme ; Et puisque les Parallelogrammes AC, DG, sont de mesme hauteur, AC est à DG, comme BC à CG, par la 1. Prop. Mais comme BC est à CG, ainsi I est à K, par construction ; Donc AC est à DG, comme I est à K ; De mesme, puisque les Paralle-



384 ELEMENS D'EUCLIDE.

logrammes DG, CF, sont de même hauteur, DG est à CF, comme DC est à CE ; Or DC est à CE, comme K est à L, par construction. Partant DG est à CF, comme K est à L. Nous avons donc trois Grands AC, DG, & CF, d'une part, & trois Grands I, K, L, d'autre



part, lesquelles prises deux à deux sont proportionnelles ; Partant en Raison égale elles seront encore proportionnelles, par la 22. Prop. du 5. Et ainsi le Parallelogramme AC fera au Parallelogramme CF, comme I est à L ; Mais la Raison de I à L est composée des Raisons de I à K, & de K à L, qui sont les mêmes que les Raisons de BC à CG, & de DE à CF ; Donc le Parallelogramme AC est au Parallelogramme CF, en Raison composée de BC à CG, & de DC à CE ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIV.

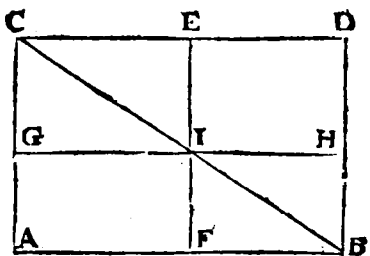
THEOREME XVIII.

En tout Parallelogramme, les Parallelogrammes qui sont allentour du Diametre, & qui ont un Angle commun avec luy, luy sont Semblables, & Semblables entr'eux.

JE suppose le Parallelogramme ABDC, & que les Parallelogrammes GE, FH, soient allentour de son Diametre BC, & deplus qu'ils aient les Angles B, & C, communs avec luy ; Cela estant, je dis premierement que les deux Parallelogrammes GE, FH, sont Semblables au Parallelogramme

Gramme AD, Pour le prouver.

Les Angles GCE, & FBH, qui sont les Opposés dans le Parallelogramme AD, sont égaux entr'eux, par la 34. Prop. du 1. Or les Angles GIE, & FIH, sont égaux à ces premiers Angles, puis qu'ils leur sont aussi opposés dans les Parallelogrammes



GE, & FH ; Et partant ces quatre Angles sont égaux entr'eux ; Desorte que les trois Parallelogrammes AD, GE, FH, ont déjà chacun deux Angles égaux à deux Angles ; D'ailleurs, puisque les Lignes AB, GH, sont paralleles par supposition, & que la Ligne Droite CGA, tombe dessus, l'Angle Extérieur CGI est égal à son Opposé Intérieur A, par la 29. Prop. du 1. De même, puisque les Lignes AC, FE, sont Paralleles, & que la Ligne BA, tombe dessus, l'Angle Extérieur IFB est encore égal à son Opposé Intérieur A ; Et ainsi les trois Angles G, A, F, sont égaux entr'eux ; Et parce que l'Angle E est égal à son Opposé G ; que l'Angle D est égal à son Opposé A ; & que l'Angle H est égal à son Opposé F, par la 34. Prop. du 1. Cest trois Angles E, D, H, sont aussi égaux entr'eux. Voilà donc encore les deux Angles Restans d'un de ces Parallelogrammes, égaux aux deux Angles Restans de chacun des deux autres ; Et par conséquent ces trois Parallelogrammes sont Equiangles : Deplus, les Triangles CGI, & CAB, qui ont déjà les Angles G, & A, égaux, ayant encore l'Angle GCI, commun, sont Equiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant par la 4. Prop. CG est à GI, comme CA est à AB ; Si bien que les Parallelogrammes GE & AD, étant Equiangles & leurs Costez allentour des Angles égaux proportionnaux, l'un est Semblable à l'autre ; De même, les Triangles IFB, & CAB, qui ont déjà les Angles F, & A égaux, ayant encore l'Angle FBI, commun, sont aussi Equiangles, par la 32. Prop. du 1. Et partant, par la 4.

Prop. IF est à FB, comme CA est à AB ; Si bien que les Parallelogrammes FH, & AD, estant aussi Equiangles & leurs Costez allentour des Angles égaux proportionnaux, l'un est aussi Semblable à l'autre ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en second lieu, que les Parallelogrammes GE, & FH, sont Semblables entr'eux.

Car puisqu'ils sont tous deux Semblables au Parallelogramme AD, Il s'ensuit par la 11. Prop. qu'ils sont aussi Semblables entr'eux ; Ce qu'il falloit démontrer.

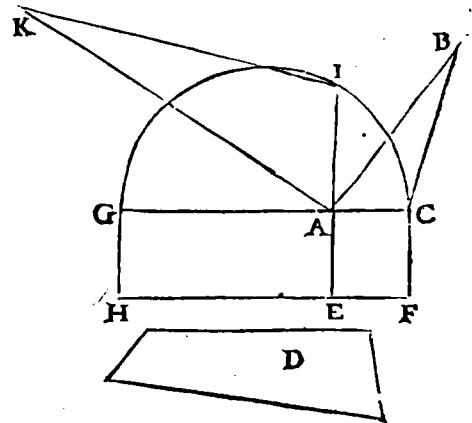
PROPOSITION XXV.

PROBLEME VII.

Deux Figures Rectilignes estant données, en décrire une troisième, Semblable à l'une, & Egale à l'autre.

JE suppose que les deux Figures ABC, & D, soient données, & je propose d'en décrire une troisième, Semblable à la Figure ABC, & égale à la Figure D, Pour le faire.

Décrivez par la 44. & 45. Prop. du 1. sur la Ligne AC, le Parallelogramme Rectangle AF, égal à la Figure ABC ; Puis décrivez sur AE, le Parallelogramme AH, égal à la Figure donnée D ; Après cela décrivez sur GC, le demy Cercle GIC ; & apres avoir élevé au Point A, la Perpendiculaire AI, si longue qu'elle rencontre la Circonference au Point I, décrivez par la 18. Prop. sur AI, la Figure AIK, semblable à la Figure donnée ABC ; Et alors je dis que



cette Figure AIK, sera égale à la Figure donnée D ; Pour le prouver.

La Ligne AI est moyenne proportionnelle entre AC, & AG, par la 13. Prop. c'est à dire que AC est à AI, comme AI est à AG ; Et par conséquent AC est à AG, en Raison doublée de AC à AI ; Or les Figures ABC, & AIK, étant Semblables, l'une est à l'autre en Raison doublée de AC à AI, par la 19. & 20. Prop. Donc la Figure ABC est à la Figure AIK, comme AC est à AG ; D'ailleurs, puisque les Parallelogrammes AF, AH, sont de même hauteur, comme AC est à AG, ainsi AF est à AH ; Partant la Figure ABC est à la Figure AIK, comme le Parallelogramme AF est au Parallelogramme AH ; Et en Raison Alterne la Figure ABC est au Parallelogramme AF, comme la Figure AIK est au Parallelogramme AH ; Or la Figure ABC est égale au Parallelogramme AF, par construction ; Donc la Figure AIK est aussi égale au Parallelogramme AH ; Mais le Parallelogramme AH est égal à la Figure donnée D, par construction ; Donc la Figure AIK est aussi égale à la Figure donnée D ; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION XXVI.

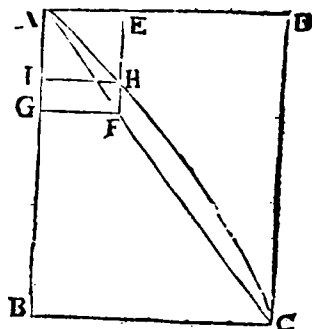
THEOREME XIX.

Si d'un Parallelogramme, on retranche un Parallelogramme Semblable & Semblablement posé au Total, & ayant un Angle commun avec luy, le Parallelogramme retranché sera allentour du Diametre du Parallelogramme Total.

JE suppose que du Parallelogramme ABCD, l'on ait retranchée le Parallelogramme GE, qui luy est Semblable & Semblablement posé, & qui a l'Angle GAE, commun avec luy ; Cela étant, je dis que le Parallelogramme GE

est allentour du Diametre du Parallelogramme Total BD, c'est à dire qu'en menant une Ligne droite du Point A, au Point C, elle passera par l'Angle F ; Pour le prouver.

Si cela n'estoit , il faudroit que cette Ligne passast par quelqu'autre Point que par le Point F ; Supposons donc, s'il est possible, que ce soit par le Point H, comme fait icy AHC ; Cela posé.



En tirant la Ligne HI parallele à AE, Il s'ensuivroit que le Parallelogramme IE seroit allentour du Diametre du Parallelogramme BD ; Or ces deux Parallelogrammes ont l'Angle IAE, commun ; Et partant par la Proposition precedente, le Parallelogramme IE seroit Semblable au Total BD ; Mais le Parallelogramme GE est supposé Semblable au Total BD, par consequent le Parallelogramme IE, & le Parallelogramme GE seroient Semblables, par la 21. Prop. Et partant le Costé IH seroit au Costé IA, comme le Costé GF est au Costé GA ; Or IH est égal à GF, puisqu'ils sont les Costez opposez du Parallelogramme GH ; Et partant IA seroit aussi égal à GA, par la 14. Prop. du 5. c'est à dire la Partie au Tout, ce qui est impossible ; Il est donc impossible que la Ligne droite menée du Point A au Point C, passe par ailleurs que par le Point F ; Et par consequent le Parallelogramme GE, est allentour du Diametre du Parallelogramme BD ; Ce qu'il falloit démontrer.



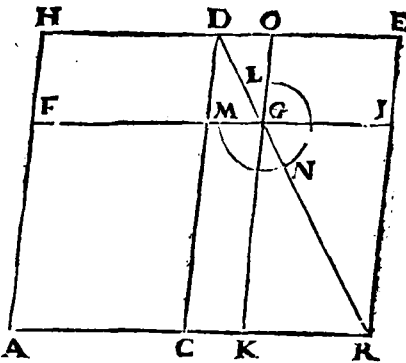
PROPOSITION XXVII.

THEOREME XX.

Si on applique à une Ligne droite tant de Parallelogrammes que l'on voudra, chacun desquels défaille d'un Parallelogramme Semblable à un autre qui est déjà décrit sur la moitié de cette Ligne, le plus grand de tous sera celui qui sera décrit sur l'autre moitié, lequel sera égal & semblable au Défaut.

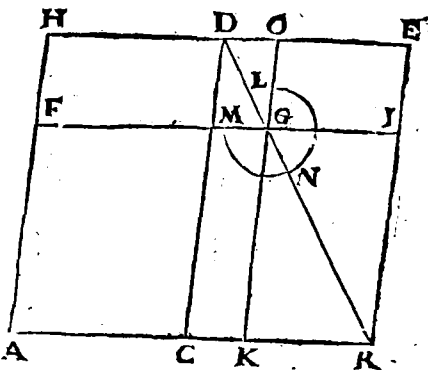
JE suppose que la Ligne Droite AB, soit donnée, qu'elle ait esté coupée en deux également au Point C, & que sur la moitié CB, l'on ait décrit le Parallelogramme CE, & qu'après cela l'on ait achevé de décrire sur la Ligne AB le Parallelogramme AE; Par ce moyen, il sera vray de dire que le Parallelogramme AD sera appliqué à la moitié de la Ligne Droite AB, & défaudra du Parallelogramme CE, décrit sur l'autre moitié, & auquel il est égal, par la 36. Prop. du 1. Cela estant, je dis que le Parallelogramme AD est le plus grand de tous ceux qui peuvent estre appliquez sur la Ligne AB, & Défaillans d'un Parallelogramme Semblable au Parallelogramme CE, qui avoit esté auparavant décrit sur la moitié CB; Pour le prouver.

Tirez le Diametre DB, & ayant pris à discretion dans ce Diametre le Point G, menez par le Point G, la Ligne FGI parallele à AB, & la Ligne KGO parallele à CD, Cela posé,



Le Parallelogramme AG sera appliqué à la Ligne AB, & défrauda du Parallelogramme KI, lequel, par la 24. Prop. sera Semblable au Parallelogramme CE ; Ils'agit donc de montrer que le Parallelogramme AD, est plus grand que le Parallelogramme AG ; Pour le prouver.

Les Supplemens GE & CG, A sont égaux, par la 34. du 1 ; Si donc on leur adjoute le Parallelogramme KI, le Parallelogramme KE sera égal au Parallelogramme CI ; Or le Parallelogramme AM est aussi égal au Parallelogramme CI, puisqu'ils sont sur Bases égales & entre mesmes paralleles, par la 36. Prop. du 1. Partant le Parallelogramme KE est égal au Parallelogramme AM ; Donc en leur adjoutant le Parallelogramme commun CG, Il s'enfuivra que le Gnomon LNM, sera égal au Parallelogramme AG ; Or le Parallelogramme CE est plus grand que le Gnomon LNM, qui n'est que sa Partie ; Et par consequent, il est plus grand que le Parallelogramme AG ; D'où il suit que le Parallelogramme AD qui est égal au Parallelogramme CE, est aussi plus grand que le Parallelogramme AG ; Ce qu'il falloit démontrer.

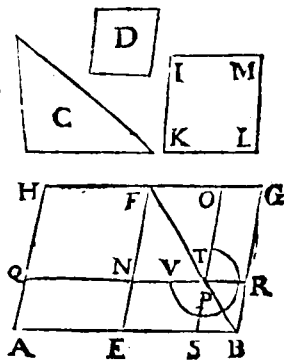


PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME VIII.

Une Ligne Droite estant donnée, y appliquer un Parallelogramme égal à une Figure Rectiligne donnée, & Défaillant d'un Parallelogramme Semblable à un Parallelogramme donné; Mais il faut que la Figure donnée ne soit pas plus grande qu'un Parallelogramme qui estant appliqué à la moitié de la Ligne donnée seroit Semblable au Parallelogramme donné.

JE suppose que la Ligne Droite AB, la Figure C, & le Parallelogramme D, soient donnez, & que cette Figure ne soit pas plus grande que le Parallelogramme AF, qui est décrit sur la moitié de la Ligne AB, & qui est Semblable au Parallelogramme donné D; Et je propose d'appliquer à la Ligne AB, un Parallelogramme égal à la Figure donnée C, & Défaillant d'un Parallelogramme Semblable au Parallelogramme Donné D; Pour le faire.



Décrivez sur EB, moitié de la Ligne Donnée, le Parallelogramme EG, Semblable au Parallelogramme Donné D; Puis achevez de décrire sur la Ligne AB, le Parallelogramme AG; Par ce moyen AF sera un Parallelogramme appliqué à la Ligne AB, & Défaillant du Parallelogramme EG, Semblable au Parallelogramme Donné D; Or ce Parallelogramme AF, qui est décrit sur la moitié de la Ligne AB, où il est égal à la Figure Donnée C, où il est plus grand; Car il ne doit pas estre plus petit par la supposition; S'il est égal on aura fait ce qu'il falloit faire, s'il est

gramme SG ; Si donc on adjoûte à ces deux Tous le Par-
 allelogramme EP, Il s'ensuivra que le Parallelogramme
 AP, sera égal au Gnomon TV ; Mais le Gnomon TV, a
 esté prouvé égal à la Figure donnée C ; Donc le Paral-
 lelogramme AP est aussi égal à la Figure Donnée C ; De-
 plus, le Parallelogramme SR, estant allentour du Diamo-
 tre du Parallelogramme EG, luy est Semblable, par la 24.
 Prop. Il est donc aussi Semblable au Parallelogramme
 Donné D, par la 21. Prop. Qui est tout ce qu'il falloit faire
 & démontrer.

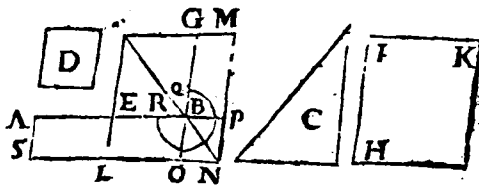
PROPOSITION XXIX.

PROBLEME IX.

*Vne Ligne Droitte estant donnée, y appliquer un Paral-
 lelogramme égal à une Figure Rectiligne donnée, &
 excédant d'un Parallelogramme Semblable à un Pa-
 rallelogramme donné.*

JE suppose que la Ligne Droite AB, la Figure C, & le
 Parallelogramme D, soient donnez ; & je propose d'ap-
 pliquer à la Ligne AB, un Parallelogramme égal à la Fi-
 gure Donnée C, & excédant d'un Parallelogramme Sem-
 blable au Parallelogramme Donné D ; Pour le faire.

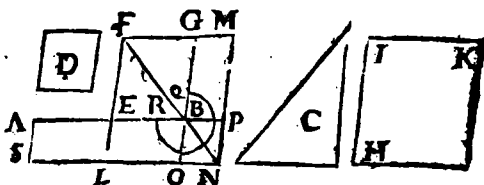
Coupez la Ligne AB,
 en deux également au
 Point E, & sur la moi-
 tié EB, décrivez par la
 18. Prop. le Parallelo-
 gramme EG, sembla-
 ble au Parallelogramme



Donné D ; Puis ayant décrit, par la 45. Prop. du 1. &
 par la 15. Prop. de ce Livre, le Parallelogramme HIK,
 égal à la Figure Donnée C, & au Parallelogramme EG,

pris ensemble, & Semblable au Parallelogramme Donné D ; Prolongez le Costé FG, vers M, & FE, vers L, en sorte que FM soit égal à IK, & FL à IH ; Cela fait, menez par le Point M, la Ligne MN, parallele à FL ; par le Point L, la Ligne LN parallele à AB ; & par le Point A, la Ligne AS parallele à FL ; Et prolongez la Ligne AB, jusqu'en P, & la Ligne LN, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne AS au Point S ; Cela estant, je dis que le Parallelogramme SP, qui est appliqué à la Ligne Donnée AB, est égal à la Figure C ; & que le Parallelogramme OP, dont il est excédant, est Semblable au Parallelogramme Donné D ; Pour le prouver.

Puisque les Parallelogrammes EG, & HK, ont esté faits Semblables au Parallelogramme Donné D, Ils sont Semblables entr'eux,



par la 11. Prop. & l'Angle HIK est égal à l'Angle EFG ; Et d'autant que les Costez FL, FM, du Parallelogramme LM, ont esté pris égaux aux Costez HI, IK, du Parallelogramme HK, le Parallelogramme LM est égal & Semblable au Parallelogramme HK ; & par conséquent aussi Semblable au Parallelogramme Donné D, & au Parallelogramme EG ; Deplus, les Parallelogrammes LM, & EG, estant Semblables, & ayant l'Angle F commun, ils sont entour du mesme Diametre FBN, par la 26. Prop. D'ailleurs, le Parallelogramme LM estant égal au Parallelogramme HK, qui a esté fait égal à la Figure Donnée C, & au Parallelogramme EG ; Il s'ensuit que le Parallelogramme LM est aussi égal à la Figure Donnée C, & au Parallelogramme EG ; Et par conséquent que le Gnomon QR est égal à la Figure Donnée C ; Maintenant, d'autant que par la 43. du 1. le Supplement GP est égal au Supplement EO, & que le Parallelogramme AL est égal à EO, par la 36. du 1. Il s'ensuit que le Parallelogramme AL est aussi égal au Supplement GP ; Et partant en leur adjoûtant le Pa-

Parallélogramme commun LP, le Parallélogramme SP sera égal au Gnomon QR; Or ce Gnomon a esté prouvé égal à la Figure Donnée C; Partant le Parallélogramme SP, qui est appliqué à la Ligne Droite Donnée AB, est égal à la Figure Donnée C; Et d'autant que le Parallélogramme OP, dont le Parallélogramme SP excède, est Semblable au Parallélogramme LM, par la 24. Prop. Il est aussi Semblable au Parallélogramme Donnée D; Qui est tout ce qu'il falloit faire & démontrer.

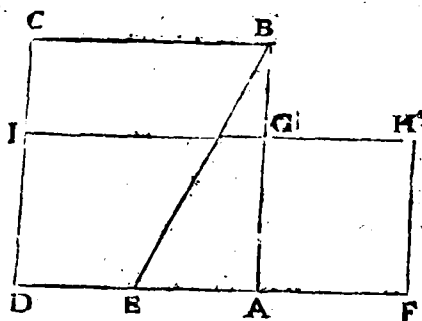
PROPOSITION XXX.

PROBLÈME X.

Couper une Ligne Droite Donnée, selon la moyenne & extrême Raison.

JE suppose que la Ligne Droite AB soit Donnée; Et je propose de la couper selon la moyenne & extrême Raison; Pour le faire.

Décrivez sur la Ligne AB le Quarré AC; coupez le Costé AD en deux également au Point E; du Point



E au Point B menez la Ligne Droite EB; prolongez la Ligne EA, vers F, & prenez EF égale à EB; Ensuite, décrivez sur AF le Quarré AH, & prolongez HG vers I; Cela estant, je dis que la Ligne AB est coupée au Point G, selon la moyenne & extrême Raison; C'est à dire que AB est à AG, comme AG est à GB; Pour le prouver.

Par cette Construction, & par le Raisonnement de la 11. Prop. du 2. Il est évident que le Rectangle IB est égal au Quarré AH; D'où il suit par la 14. Prop. de ce Livre,

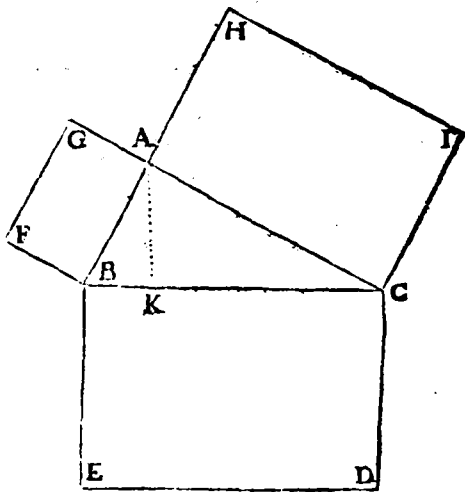
que comme CB ou AB son égale est à AG, ainsi GH ou AG son égale est à GB, Ce qu'il falloit faire & démontrer.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME XXI.

Si sur les trois Costez d'un Triangle Rectangle sont décrites trois Figures Semblables & Semblablement posées, celle qui est décrite sur le Costé qui soutient l'Angle Droit, est égale aux deux autres.

JE suppose que le Triangle ABC soit Rectangle, que l'Angle BAC soit Droit, & que sur les trois Costez AB, BC, CA, soient décrites les trois Figures FA, AI, EC, qui soient Semblables & Semblablement posées; Cela estant, je dis que la Figure EC, décrite sur le Costé BC, qui soutient l'Angle Droit BAC, est égale aux deux autres FA, & AI; Pour le prouver.



Abaissez du Point A, la Ligne Droite AK, perpendiculaire à la Ligne BC; cette Ligne AK, par la 8. Prop. divisera le Triangle ABC, en deux Triangles Semblables entr'eux, & au Total, & les Costez AB, BC, CA, qui soutiennent chacun un Angle Droit, seront homologues, ou de même Raïson; Ensuite dequoy, par la 19. Prop. le

Triangle AKB est au Triangle ABC, en Raison doublée de AB, à BC ; Or les Figures FA, EC, qui sont supposées Semblables, sont aussi l'une à l'autre en Raison doublée de AB à BC, par la 20. Prop. de ce Livre. Et partant le Triangle AKB est au Triangle ABC, comme la Figure FA est à la Figure EC ; D'ailleurs le Triangle AKC est au Triangle ABC, en Raison doublée de AC à BC, par la 19. Prop. Mais par la 20. Prop. la Figure AI est aussi à la Figure EC, en Raison doublée de AC à BC ; Partant le Triangle AKC est au Triangle ABC, comme la Figure AI est à la Figure EC ; Nous avons donc le Triangle AKB, premier Grandeur, qui est au Triangle ABC, seconde Grandeur, comme la Figure FA, troisième Grandeur, est à la Figure EC, quatrième ; Deplus, nous avons le Triangle AKC, cinquième Grandeur, qui est à la seconde ABC, comme la Figure AI, sixième Grandeur, est à la quatrième EC ; Partant par la 24. Prop. du 5. comme la première Grandeur AKB, & la cinquième AKC, prises ensemble, sont à la seconde ABC ; ainsi la troisième FA, & la sixième AI, prises ensemble, sont à la quatrième EC ; Or la première AKB, & la cinquième AKC, prises ensemble, sont égales à la seconde ABC, puisqu'elles conviennent ; Donc la troisième FA, & la sixième AI, prises ensemble, sont aussi égales à la quatrième EC ; Ce qu'il falloit démontrer.

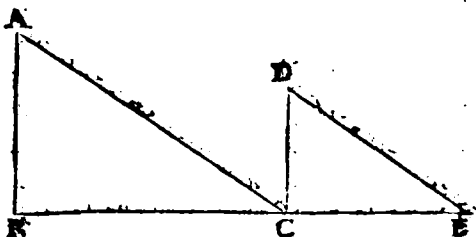


PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXII.

Si deux Triangles, qui ont deux Costez proportionnaux à deux Costez, sont disposez de telle sorte qu'ils fassent un Angle, & que leurs Costez homologues soient Paralleles, les deux autres Costez se rencontreront directement.

JE suppose que dans les deux Triangles ABC, & DCE, le Costé AB soit au Costé AC, comme le Costé DC est au Costé DE, & que ces deux Triangles soient disposez de telle sorte qu'ils fassent l'Angle ACD, & que leurs Costez homologues soient paralleles, c'est à dire que le Costé AB soit parallele au Costé DC, & le Costé AC au Costé DE; Cela estant, je dis que les deux autres Costez BC, CE, se rencontreront directement; Pour le prouver.



Puisque la Ligne Droite AC, tombe sur les Lignes AB, DC, qui sont paralleles par supposition, l'Angle ACD est égal à l'Angle A, qui luy est Opposé alternativement, par la 29. Prop. du 1. De mesme, puisque la Ligne Droite CD tombe sur les deux Paralleles AC, DE, l'Angle D est égal à son Opposé alternativement ACD; Et partant les deux Angles A, & D, sont égaux entre eux; Et puisque les Costez qui sont allentour de ces Angles sont proportionnaux, par supposition, les deux Triangles ABC, & DCE, sont Equiangles, par la 6. Prop. Par consequent l'Angle B est égal à l'Angle DCE, & l'Angle ACB, égal à l'Angle E; Mainte-

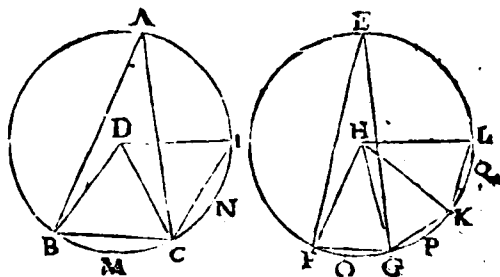
nant, puisque l'Angle DCE est égal à l'Angle B, si l'on ajoute à l'un l'Angle ACD, & à l'autre l'Angle A, qui sont égaux, les deux Angles DCE, & ACD, ou bien l'Angle seul ACE, sera égal aux deux Angles B, & A, & en leur adjoûtant derechef l'Angle commun ACB, Ils'enfuivra que les deux Angles ACE & ACB seront égaux aux trois Angles du Triangle ABC, c'est à dire à deux Droits, par la 32. du 1. D'où il suit par la 14. Prop. du 1. que les deux Lignes BC, CE, se rencontrent directement ; Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME XXIII.

Aux Cercles Egaux, les Angles constituez au Centre, ou à la Circonférence, sont entr'eux comme les Arcs qui les soutiennent ; & les Secteurs sont aussi entr'eux comme ces Arcs.

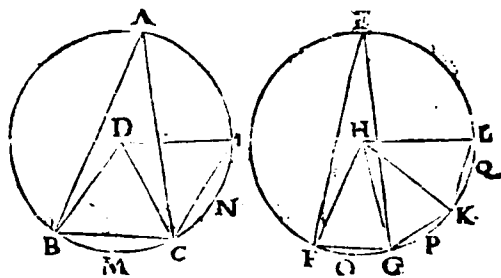
JE suppose que les deux Cercles ABC, & EFG, soient égaux, & que les Angles BDC, & FHG, soient constituez au Centre de ces deux Cercles ; Cela estant, je dis que l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Pour le prouver.



Menez une Ligne Droite du Point B, au Point C, & une autre Ligne Droite du Point F au Point G ; Puis appliquez à la Circonférence du Cercle ABC, autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à BC, telle qu'est par exem-

ple la Ligne CI ; De mesme , appliquez à la Circonférence du Cercle EFG , autant de Lignes qu'il vous plaira, égales à FG , telles que sont GK , KL , & tirez les Lignes Droites DI , HK , KL ; Cela posé.

Puisque les Lignes Droites BC , CI , sont égales , les Arcs BC , CI , dont elles sont les Soutendantes , sont égaux , par la 28. Prop. du 3. Ensuite dequoy , les Angles BDC , & CDI , sont aussi égaux , par la 27. Prop. du mesme Livre ; Desorte que l'Angle BDI est au-



tant Multiple de l'Angle BDC , qui est la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer estre proportionnelles, que l'Arc BCI est Multiple de l'Arc BC , qui est la troisieme de ces mesmes Grandeurs ; D'ailleurs, puisque les Lignes Droites FG , GK , KL , sont égales, les Arcs FG , GK , KL , dont elles sont les Soutendantes, sont égaux, par la 28. Prop. du 3. Ensuite dequoy, les Angles FHG , GHK , KHL , sont aussi égaux, par la 27. Prop. du mesme Livre ; Desorte que l'Angle FHL est autant Multiple de l'Angle FHG , qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer estre proportionnelles, que l'Arc $FGKL$ est Multiple de l'Arc FG , qui est la quatrième de ces mesmes Grandeurs ; Or si l'Angle BDI est égal à l'Angle FHL , l'Arc BCI s'ensuit égal à l'Arc $FGKL$, par la 26. Prop. du 3. Et si l'Angle BDI est plus grand que l'Angle FHL , l'Arc BCI est aussi plus grand que l'Arc $FGKL$; Et enfin si l'Angle BDI est moindre que l'Angle FHL , l'Arc BCI est aussi moindre que l'Arc $FGKL$; Et partant, par le 2. Axiome du 5. ces quatre Grandeurs sont proportionnelles, c'est à dire que l'Angle BDC est à l'Angle FHG , comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, que les Angles BAC, & FEG, qui sont constituez à la Circonference de ces Cercles, sont encore entr'eux comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Pour le prouver.

Les Angles BAC, & FEG, sont les moitez des Angles BDC, & FHG, par la 20. Prop. du 3. Et par conséquent, par la 15. Prop. du 5. l'Angle BAC est à l'Angle FEG, comme l'Angle BDC est à l'Angle FHG. ; Or l'Angle BDC est à l'Angle FHG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG, comme il a esté prouvé ; Et partant, l'Angle BAC est à l'Angle FEG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis en troisième lieu, que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Pour le prouver.

Puisque les Lignes BC, CI, sont égales, & que les Arcs BC, CI, qu'elles soutiennent sont égaux, Il s'ensuit que les Segmens BMC, & CNI, sont aussi égaux entr'eux ; Aquoy si on adjoûte les Triangles BDC, & CDI, qui sont égaux, par la 4. Prop. du 1. les Secteurs DBMC, & DCNI, seront aussi égaux entr'eux ; Desorte que l'Arc BCI est autant Multiple de l'Arc BC, qui est la premiere des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer estre proportionnelles, que le Secteur DBCI est Multiple du Secteur DBMC, qui est la troisième de ces mêmes Grandeurs ; On prouvera de même que l'Arc FGKL est autant Multiple de l'Arc FG, qui est la seconde des quatre Grandeurs qu'il s'agit de montrer estre proportionnelles, que le Secteur HFGKL est Multiple du Secteur HFOG, qui est la quatrième de ces mêmes Grandeurs ; Or si l'Arc BCI est égal à l'Arc FGKL, le Secteur DBCI est aussi égal au Secteur HFGKL ; Si l'Arc est plus grand que l'Arc, le Secteur est plus grand que le Secteur ; & si l'Arc est moindre que l'Arc, le Secteur est aussi moindre que le Secteur ; Donc par le 2. Axiome du 5. Ces quatre Grandeurs sont proportionnelles ; c'est à dire que le Secteur DBMC est au Secteur HFOG, comme l'Arc BC est à l'Arc FG ; Ce qui restoit à démontrer.

I. Corollaire.

Puisque l'Angle d'un Secteur est à l'Angle d'un autre Secteur, comme l'Arc de l'un est à l'Arc de l'autre, & que l'Arc est à l'Arc, comme le Secteur est au Secteur, Il s'en suit que comme l'Angle est à l'Angle, ainsi le Secteur est au Secteur.

II. Corollaire.

Deplus, puisque le Cercle est composé de tous les Secteurs qui peuvent estre autour de son Centre, Il est évident que comme la quantité des quatre Angles Droits qui peuvent estre autour du Centre, est à la quantité de l'Angle du Secteur, ainsi la quantité de tout le Cercle, est à la quantité du Secteur.

F I N.

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

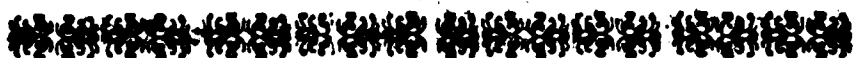
Une ou plusieurs pages sont omises
ici volontairement.

à bout ; Elle luy fournira toujours de nouvelle matiere de quoy exercer sa curiosité ; Mais en voilà ce me semble autant & plus qu'il n'en faut pour la necessité ; C'est à dire, pour pouvoir s'acquitter avec honneur de toutes les Charges & de tous les emplois auxquels un Homme du monde, d'affaires, ou de negoce puisse estre appliqué.

F I N

Fautes à corriger.

- Preface.* page 14. l. 18. lisez ses.
 Page 126. la Figure est renversée.
 Pag. 119. il manque à la Figure la ligne CD, qu'il faut tirer.
 Pag. 147. ligne 13 lisez on ait mené.
 Pag. 152. l. 16 mettez ainsi les virgules. AEB, diamètre ;
 Pag. 157. l. 14. mettez ces virgules. , par la troisième Proposition ;
 Pag. 218. l. 25. lisez grand
 Pag. 270. l. 25. lisez, ils sont entr'eux.
 Pag. 284 l. 19. lisez de DC
 Pag. 291. lisez 291.
 Pag. 294. l. 10. lisez figure C, & ligne 19. lisez HIK.
Nota. il manque une F à la figure, il l'y faut mettre FN.
 Pag. 332. l'Angle A de la premiere fig. devroit estre plus ouvert. en la 2. fig. tracez la ligne AC.
 Pag. 365. l. 9. lisez parallelepiped.
 Pag. 38. lisez 381.
 Pag. 386. l. 29. lisez plus seurement.
 Pag. 400. l. 1. effacez DGE
 Pag. 441. il manque une t à la figure. AY, AF.
 Pag. 451 l. 11 lisez 8. toises. & ligne 17. lisez 8. toises ;
 Pag. 456. l. 11. lisez, qui se flaque.
 Pag. 459. l. 30. lisez donnant à AC.
 Pag. 462. l. 27. lisez, lesquels, & lig. 34. effacez de.
 Pag. 465. il manque à la fig la ligne IT, perpendiculaire à A2, il la faut tirer.
 Pag. 475. l. 2. lisez, haute.
 Pag. 511. l. 14. effacez, en.
 Pag. 541. mettez un E au poids.
 Pag. 569. l. 16. lisez quelle.
 Pag. 572. l. 24 lisez ML.
 Pag. 590. l. 22. lisez, ce qui, & lig. 25. lisez par tout,
 Pag. 631. l. 25. lisez difference.
 Pag. 648. l. 21 lisez particulieres.
 Pag. 684. l. penultieme, lisez, & où
 Pag. 709. l. 5. lisez, la preuve.
 Pag. 715. l. 19. lisez. cela fera 20. f.
 Pag. 748. l. 18. lisez que ce étoit
 Pag. 752. l. 1. lisez. sans en



PRIVILEGE DV ROY.

L OUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre ;
A nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours
de Parlements, Maistres des Requestes ordinaires de nostre
Hostel, Prevost de Paris, Baillifs, Seneschaux, leurs Lieutenans, & autres
nos Justiciers & Officiers qu'il appartiendra ; Salut. Nostre cher & bien
amé JACQUES ROHAULT, s'estant toute sa vie appliqué à l'étude
de la Philosophie & des Mathematiques, Nous a tres-humblement re-
montré qu'il auroit composé plusieurs Traitez qu'il desireroit faire im-
primer & donner au public s'il en avoit nos Lettres sur ce necessaires ;
entr'autres *un Traité de Physique, ou de la Science naturelle, & celui de
Cosmographie, veus par le Sieur de Mézeray nostre Conseiller & Historio-
graphe ; Les quinze Livres des Elémens de Geometrie d'Euclide, L'Arith-
metique Pratique ; la Resolution des Triangles Rectilignes & Spheriques ; la
Geometrie Pratique ; les Fortifications, les Mécaniques, & la Perspective.*
A CES CAUSES, voulant donner audit sieur Rohault des marques
de l'estime particuliere que nous faisons de sa Personne, pour l'exciter
à continuer ses recherches, Nous luy avons permis & accordé, Per-
mettons & accordons par ces presentes, de faire imprimer lesdits Traitez
par tel Libraire ou Imprimeur du nombre des reservez qu'il vouldra
choisir, en tel volume, caractère, & autant de fois que bon luy semblera,
pendant le temps de dix ans, à commencer du jour que chaque
Traité sera achevé d'imprimer pour la premiere fois en vertu des pre-
sentes ; Iceux vendre & debiter par tout nostre Royaume. Faisons
défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire im-
primer, vendre & distribuer lesdits Traitez, sous quelque pretexte que
ce soit, mesme d'impression estrangere, & autrement, sans le consente-
ment de l'Exposant ou de ses ayans cause, sur peine de confiscation des
Exemplaires contrefaits, amende arbitraire, despens, dommages & in-
terests. A la charge d'en mettre deux Exemplaires de chacun en nostre
Bibliotheque publique, un en nostre Cabinet des Livres de nostre
Chasteau du Louvre, & un de chacun en celle de nostre tres-cher &
feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Seguier, à peine de nul-
lité des presentes : Du contenu desquelles, Vous mandons & enjoignons
faire jouir l'Exposant & ses ayant cause, pleinement & paisiblement,
faisant cesser tous troubles & empêchemens ; Voulons qu'en mettant
au commencement ou à la fin desdits Traitez, un extrait desdites pre-

sentes elles soient tenuës pour deuëment significées. Mandons au premier nostre Huissier ou Sergent faire pour l'exécution desdites presentes, toutes significacions, défenses, saisies, & autres Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande, & autres Lettres à ce contraires : Car tel est nostre plaisir. Donné à Saint Germain en Laye le treizième jour d'Avril, l'an de grace mil six cens soixante-dix ; Et de nostre regne le vingt-septième ; *Et plus bas* ; Par le Roy en son Conseil, D'ALENÇON, avec paraphe ; Et scellé du grand sceau de cire jaune.

Registré dans le Livre de la Communauté des Marchands Libraires Imprimeurs & Relieurs de cette Ville de Paris, suivant & conformément à l'Arrest de la Cour de Parlement du 8. Avril 1653. le 30. Avril 1670.

Signé ANDRÉ SOUBRON Syndic.

La veuve dudit Sieur ROHAULT a cédé le droit qu'elle avoit dans ledit Privilege à GUILLAUME DESPREZ Marchand Libraire, pour en jouir suivant & conformément au traité fait entr'eux.

Les Livres des Elémens d'Euclide & les autres Traitez qui suivent, ont esté achevez d'imprimer pour la premiere fois le 22. Octobre 1682.

