Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Collegij Lugd. Soc. Jesu cat. inscr. 1662
ff. Trinitatis

FRAN. MARIÆ. II. VRBI. PRINCIPI. DICATI.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Vnà cum Scholijs antiquis.

A FEDERICO COMMANDINO VRBINATE

NVPER IN LATINVM conuersi, commentarijsque quibusdam illustrati.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON 1894

PISAVRI, M D LXXII.
Cum Priuilegio Pont. Max.
IACOBVS Chriegher German'.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.

BIBLIOTHEQUE DE LYON 1894



CVM mihi in mentem venit Illustrissime Princeps quanta mathematicę facultatis olim apud veteres illos felicioris certe seculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit; non possum non vehementer dolere temporũ nostrorũ conditionem, qua nobilis disciplinę cultus, & splendor squalore immenso, ac tenebris penitus contabescit, dum vnusquisque detestanda auri cupiditate quicquid certam in se lucri non habet occasionem, statim insolenter abijcit, temereq́ue aspernatur. Exulat iam, publiciq́ue ferè exclusum est gymnastis nobile hoc, & pulcherrimum matheseos studium, quo nihil iucundius, ac magis domesticum vniuersa quondam habuit græcia. Non est sanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragonisq́ue, aut circulis depictas porticus inuoueri, aut de huiusmodi rebus loquentes audire cogaris. Iacet omnino, iacet hoc disciplinæ genus, et quod in delitijs olim habebatur, nunc quasi rude, & obscurũ passim reijcitur, vsq; adeo auaritia, cæcaq́; diuitiarum libido apud nostræ ætatis homines increbuit. minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magnæ doctrinæ uiris has artes auanter excitatas, scio diligentissime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hęc studia benigne complecti, liberaliterq́; fouere uideo: uerum enim illud esse quouis tempore homines sunt experti, qualia fuerint eorum, qui summæ rerum præsunt, eadem & reliquorũ fore studia. quam ob rem si non ad pristinum dignitatis fastigium, ad honestiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime despero. idq́; ea præsertim ratione, quòd te Princeps Illustrissime, eximia mentis probitate, singulariq́; ornatum prudentia, præclaros omnes animi tui conatus ad compensanda literarum incommoda iam diu conuertisse lætus intueor. neque id iniuria profecto. nam vt illustria, & nunquam interituræ memorię exempla tuæ gentis omittam, Patrem habes incomparabilis iustitiæ, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & præmijs ornat. huic te similẽ, ac parem vt præstes necesse est. Age vero quanti est illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam hanc voluntatem, quòd non solum

literas diligis, verum etiam quo semper fuisti mentis acumine, tantos in illis progressus facis, ut omnes qui te nosc̃unt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Vt enim de me dicam, quoties summam ingenij tui præstantiam, atque solertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate sum admiratus? Hoc tu honestissimo, nec vnquam satis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandiq; Euclidis onus mihi iniunxisti, quòd geometrarum omnium facile princip̃m, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuersum, nec scite figuris ornatum fuisse. præterea vero typographorum ita corruptum negligentia, vt non sine maxima studiosorum offensione legi, nedum intelligi posset. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo suscepi, tum vt optime tuę voluntatis mandato, quod semper obnixe studui, obtemperarem; tum etiam, vt pro ueteri meo instituto amatores huius disciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicinæ, cui me totum dederam, salutem plurimam dixi, vt his me tantum oblectarer studijs, & in eorum cognitione parum de alijs solicitus, conquiescerem; veterumq; præstantissima in hoc genere scripta, pro ingenij tenuitate à situ, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conspectum non sine aliqua studiosorum gratia proferrem. quod partim iam sumus assecuti, partim summis uigilijs diu, noctuq; contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonij, sereniq; ue excellentium virorum opera nonnulla superioribus annis conuersa à nobis, & explicata quàm accuratissime emisimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentiæ in Pappo, Herone, Theodosio, Autolyco, Aristarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iussu his depositis studium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phinæus haud obscuri nominis auctor priores tantum sex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadẽ re labor eo etiã minus probatur, quòd Cãpani editionem ex arabica conuersam lingua, magis, quàm græcam sequi uouerit. Alij autem peracuti sanè ingenij homines ἀναλύσεις geometricas in priores sex libros conscripserunt, cetera tamen non sunt prosecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione insignis, licet omnes Elementorum libros, qui postulari à latinis uidebãtur, latinos fecerit, locupletaueritq; ue, parum tamen (vt audio) eo nomine commenda-

tur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonſtrationes, quę in græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas ſuis appoſitis reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, noſtra opera præſtiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare poſſumus, nullam à nobis nec impẽſę, nec laboris, nec ualetudinis habitam fuiſſe rationem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non ſolum expurgatum à mẽdis, & figuris eleganter excultum haberent ſtudioſi, uerum etiam ſumma fide conuerſum, & ſcholijs antiquis, commentarijsq; ue quibuſdam noſtris illuſtratũ. Hoc igitur qualecumq; ue eſt meę induſtriæ teſtimoniũ, nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, dono, dicoq; ue, ut quibus poſſum officijs meam in te fidem, perpetuamque obſeruantiam, non modo noſtrę ætatis hominibus declarem, ſed ipſi etiã poſteritati teſtatam literarum monumentis relinquam. & quod ſemper uehementiſſime conatus ſum, uere perſuadeam, neminem te habere, qui præſtantem animi tui uirtutem, egregiamq; ue doctrinam memoria ſempiterna apud omnes propagare magis ſtuduerit, ac ſemper ſit ueneratus. uale, & nos, liberalesq; ue diſciplinas, quas facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.



QVOD plerique interpretum, atque eorum præsertim, qui maxime laudantur, facere solent, vt antequam euoluendi clarorum virorum monumenta, ac scripta, quę sibi pro reipublicæ literariæ commodo explicanda, exornandaq; sumpsere, initium faciant, quædam primo loco differant: idem & mihi huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuersa à principio admonitus, numori postea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnumquodque intelligendum. Primum igitur non nulla summatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus, quæ nam subiecta illis materia sit, tum generatim, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quae sit earundem diffinitio, quis ortus. Deinde vero mirum ipsarum ad humanos vsus opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsius demonstrationibus, deq; eorum, quæ in his libris complexus est, dispositione, & methodo quedam minime inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ στοιχειώσεως eo consilio adiungemus, vt non solum facilius quisquis de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum custodiatur. Itaque philosophiam omnem, quæ in contemplatione versatur, tres clarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ea ducti ratione tradiderunt, quod rerum alia prorsus materiei quasi labe vacantes, sola per se subsistunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materiæ innituntur, vt nullo pacto absque illa possint consistere: aliæ denique medium inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent; tum quòd omni vacant materia, si accuratiori studio veram illarum conditionem inspexeris, tum quòd materia præditæ quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbecillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt nomine, ita & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit; Naturale, quod tertium est, ac postremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam solum vere disci, ac sciri potest, ob summam rei subiectæ constantiam, & certam demonstrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid enim tam eximium, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præstat, atque superius est; quæ materiæ funditus immersa, variam, & mutabilem eius sequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum est hominibus, qui ante orbis terrarum eluuiem cum feliciori fruerentur & cœlo, & ingenio, sapientiam rerum cœlestium, admirabilemq; mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerat, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum prædictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheseos studium incultum iacuit. Hoc post terrarum eluuionem apud chaldæos summo præsertim Abrahami diuini propè hominis studio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam cœli serenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus scientiæ nati à Chaldæis acceptum summopere excoluerunt. Ab Aegyptijs ad græcos, quibus nec ingenij acumine, nec sciendi cupiditate quemque merito anteposueris, translatum est, Thaletis Milesij, Pytagoræ Samij, aliorumq; excellentium hominum industria, quos scientiæ amor & vasta maria trãsire, & longinquas peragrare regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, si græcis credimus, natæ & altæ sunt mathematicæ disciplinæ. quas postea & exercitatione, & scriptis illustrarunt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antipho, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Architas, Euclides, Aristarcus, Archimedes, aliiq; innumerabiles, qui hac eximia, præstantiq; matheseos disciplina mortales propè cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim historiam hic contexere propositum est. sed hæc pauca attigimus, vt antiquam huius studij nobilitatem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis partibus

ipſius Mechanices adiumento, quæ admirabiles ad oppugnandum, aut reſiſtendum fabricatur machinas, vti Archimedes aduerſus Marcellum, qui (nam Cteſibios, Architas, Priſcos, Eudoxos, Diogenetos miſſos facio) cùm hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem prædicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, vt tantæ fiduciæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in ſiccum eductam, grauiusq; oneratam ſolus machinis ſuis ad ſe pertraxit, non ſecus ac ſi marí remis, ac velis agitaretur. contra poſtea Alexandriam regis eiuſdem nauim è littore in Mare deduxit, quod omnes ſiciliæ vires non potuerunt. Hac igitur arte qui inſtructi ſint, vrbis mœnia tueri, & hoſtium oppugnationes eludere queunt. & habuiſſet tanto impetu res cœpta fortunam (ait Liuius, cum de Marcello Syracuſas oppugnante loquitur) niſi vnus homo Syracuſis ea tempeſtate fuiſſet. Archimedes is erat, vnicus ſpectator cœli, Syderumq;, mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq;, è quibus ea quae hoſtes ingenti mole agerent, ipſe perleui momento ludificaret. libuit tam inſigne illuſtris hiſtorici de Archimede teſtimonium afferre, vbinam exemplo, quantum vtilitatis, ac commodi ſibi ac patriæ homines comparare poſſint, intelligant, ſi nobilem Matheſeos facultatem diligenti cura, ſtudioq; excoluerint: ceterum diſſimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philoſophorũ, (vt ſibi videntur) impudenti audacia. Cur enim grauius non ferã mathematicas ab ijs calumniari, quorũ eſſet munus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarũ cupiditas arctiſſimis deuinctos laqueis tenet) Sed aduerſus hoc philoſophorum genus nihil aliud dicã nũc, quòd ſciã Ariſtippos iſtos, & Epicureos, vt vere, & elegantèr eos nominat Petrus Ramus vir multæ eruditionis, potius dolore quodã, ſtudioq; ſuam tegendi ignorantiam talia dicere, quàm quòd reuera putẽt matheſeos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adimenti afferre ad omnes liberalium artium diſciplinas, præſertimq; ad Platonis Ariſtoteliſq; monumenta, quos hoc doctrinæ genere plurimũ delectatos fuiſſe planè conſtat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie neceſſaria imprimis, ſcituq; pulcherrima apud hos inueniant, quæ quoniam mathematico more tradita ſunt, quaſi ſcopulos quoſdam euitare cogũtur. Hinc Timæum non attingunt tãquã fabuloſum, & nullius pretij librũ. Hinc ſeptimum phyſicæ auſcultationis librum, multaq; alia Ariſtoteleа, ſuis diſcipulis, quòd, vt aiũt, inutilia ſint, explanare grauantur. ſed plura fortaſſe dicta ſunt de hac re, quam oportuit. nam veræ matheſeos vtilitas, eximij fructus, incredibilesq; voluptates in ſola veritatis cognitione, ad quam nati ſumus, poſitæ ſunt. hac vna nos vere homines, vereq; diuini luminis participes oſtendimus. cetera terrenam & fragilem præſeferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram noſtrum ſpectant. Et primum de ipſo Euclide, deinde de inſcriptione, et ſcopo dicamus. poſtremo de illius demonſtrationibus, quemadmodum à principio promiſimus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo perſuaſi credunt Euclidem noſtrum eundem eſſe & philoſophum megarenſem, & geometram, totamq; hanc rem breuiter explanemus. Fuit ſenior Euclides ex Megaris oppido, quod iſthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis ſtudioſus, ac megaricæ ſectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes ſocratici, triginta tyrannorum metu cõfugerũt. Hic dialogos ſex conſcripſit, quos enumerat Laertius. vſus eſt probationibus non ijs, quæ per aſſumptiones, ſed quæ per concluſiones fiunt, ac magis dialecticæ ſunt. ſucceſſorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui στοιχειώτης ac geometra, dictus eſt, tempore Primi Ptolemæi floruit, ac academiam diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis diſcipulorum conſuetudine egregiè eruditus, Matheſim, quæ in Academia præceptoris inſtituto tunc maxime vigebat, ita præclaro animi impetu eſt aggreſſus, vt progreſſus admirabiles, ac ſempiterna æui memoria digniſſimos in ea fecerit; conſtantiq; omnium doctorum teſtimonio principem locum ſibi vendicarit. nemo autem mihi ignotum eſſe arbitretur, Valerium Maximum ſcribere Platonem ſacræ aræ conductores ad Euclidem, tamquam ad primarium mathematicum reiecisſe. ſed nos Heronem, & Proclum matheſeos ſtudio inſignes ſequimur, vel potius Eudemum ac Theophraſtum ex peripateticis poſt præceptorem nobiliſſimos. hi namque hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris, quos de hiſtoria geometrica conſcriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo periiſſe non ignoramus. Euclides igitur noſter poſt Hippocratem, Leontem, Theudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius poſt aliũ conſcripſerant, opus hoc vere aureũ, ſummo cum labore, præſtantiq; mentis iudicio contexuit. Multa quidẽ inuenerant ſuperiores illi homines excellenti quodã, ac propè diuino ingenij acumine. non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone verſati ſunt. Itaque Euclides

diſperſa

diſperſa collegit, collecta diſpoſuit, & quæ pinguius, negligentiuſq; demonſtrata fuerant, ipſe ad ab ſolutas, ἀνελιττους ἰ, demonſtrationes redegit. magna profectò laus ſuperest: multo tamen maior Euclidis, qui indigeſta eo compoſuit ordine, vt vel hac vna re perpetuum ſibi apud ſanæ mentis homines laudem compararit. inchoata ita abſoluit, incerta ita firmiſſimis rationibus certiſſima effecit, vt nihil amplius propè in eo deſideretur. Iam duo ferè annorum millia abierunt, ex quo Euclides inter viuos connumeratus eſt. multos habuit aduerſarios, qui inuidia potius morbo, quàm veritatis amore illius ſcripta omni ſtudio labefactare ſint conati; nullam tamē adhuc in illis ψευδολογίαν, nullum errorem, nullum paralogiſmum ſeueri inquiſitores deprehendere potuerunt. Cetera vero præſtantiſſimi huius viri monumenta hęc habentur. Optica, Catoptrica, Muſica, Data, Phænomena, ſcripſit etiam librum de diuiſionibus, conicorum libros quattuor, poriſmatum tres, vt ex Proclo, Pappoq; conſtat, qui quidem ad manus noſtras non peruenerunt. Atque hæc ſunt, quæ inuenire potuimus de Euclide noſtro, cuius immortali beneficio Matheſis, quæ græcum mare ex Aegypto tranſgreſſa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam inſederat, ſuam dignitatem, ſuoſq; honores non ſine deorum voluntate eſt conſecuta. Nunc quæ ſtudioſorum mentes haud leuiter perturbat opinio de elementorum demonſtrationibus, paucis referatur. quamuis enim hæc diſceptatio nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maximetamen ſolicitos habet, neſcio quo pacto huius diſciplinæ amatores; quippe quòd ſcire percupiant, quinam tantum beneficij, atque adeo ſingulare munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re diſputarunt, Ioannes Buteo, & Petrus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorſus abiere ſententias. hic enim in ſuo Matheſeos proœmio non ſolum demonſtrationes Theoni (quod etiam alij dixerunt) aſcribendas putat, verum etiā ipſa elementa, tum quia στοιχειώτης vltimus fuerit, nullius q; propoſitionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipſe ſuas editiones in elementa nominatim laudarit in primo commentario ſuper Ptolemæi magnam conſtructionem, ita vt elementa ſibi eo iure vindicare poſſit Theon, quo antea Euclides. Idipſum ea quoq; probat ratione, quòd Euclidis demonſtrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in ſuis annotationibus in Euclidem hoc diſerte negat; veteremq; præclariſſimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos nunquam ſine demonſtratione theoremata proferātur; vt quæ nullā, ſi nuda fuerint, habeant vtilitatē, ac dignitatē; quodq; vero ſimile ſit, verba illa ἐκ τῶν θεωνος συνουσιῶν, ex quibus omnis effluxit diſputādi occaſio, ita poſſint intelligi, vt dicamus, Theonem conſcripſiſſe quidem commentarios in elementa, ſed illos temporum calamitate periiſſe, quemadmodum & quæ in eundem Pappus Alexandrinus ſcripſerat, conſeruato tamen titulo, qui poſtea Euclidi ipſi negligenter adiectus eſt. Nos autem medium ſecuti credimus libros de elementis ſuis ornatos demonſtrationibus ab Euclide nobis fuiſſe relictos. qui enim de hoc dubitare poſſumus, cum Proclus in commentarijs in X. propoſitionem, poſt recitatam Apollonij pergæi demonſtrationem hęc verba ſubiungat? πολλῷ δὴ οὖν κρείττων ἡ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις hoc eſt lōge igitur melior eſt ſtichiotę (ita enim Euclidem appellat) demonſtratio, & ſimplicior, magiſq; ex principijs. vt autem hoc vere aſſerimus, ita illud meritò concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonſtrationes fuſius, planiusq; explicatas in lucē protuliſſe: quod apud Proclum obſeruari poteſt. Sic data nō eo prorſus habentur modo, quo apud Pappum in ſeptimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoprica, quæ nos vidimus Romę in vaticana bibliotheca. Quamobrem ſi hæc omnium conſenſu Euclidi concedimus, etiam elementa concedenda ſunt, præſertim cum verbis potius, quàm re ipſa Theon ab eo diſcrepet in demonſtrandi ratione. ſint igitur illę quidem demonſtrationes Euclidis, ſed eo modo conſcriptæ, quo olim Theon Euclidem ſecutus ſuis diſcipulis explicauit. Non inutile autem, nec inuiciundum illud legentibus fore crediderim, ſi Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis noſtri inſignes huic diſputationi ſententias, tanquam coronidem addidero. poterunt enim Geometriæ candidatis eſſe loco orationis copioſæ, atque elegantis. Plato igitur vt neceſſariam prorſus facultatis huius cognitionem futuro philoſopho palam oſtenderet, verba hęc pro foribus gymnaſij poſuit. οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. nemo rudis Geometrię huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui poſt præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematum, ac Geometrię ignaro gymnaſium ingredienti, Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας. anſas enim philoſophiæ non habes. Quid vero de noſtro Geometra habemus dicere? Hic Ptolomeo Regi primo interroganti,

an alia

an alia facilior, atque commodior esset, discendæ Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla, inquit, ò Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quàm constantem igitur animi diligentiam, alacremq; discendi voluntatem iuuenes ad hæc studia afferre oporteat, non solum Geometriæ, quæ per se nobilissima est, sed & totius philosophiæ causſa, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus iã de operis inscriptione, simulq; de Auctoris proposito. Nã quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnius, & alterum fermè cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Ευκλείδου στοιχείωσις. qui vero ex Theonis sententia hoc opus nobis exortum reliquit. Ευκλείδου στοιχείων βιβ. ιε. Idem tamen vtraque significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicũque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborum illorum ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν permotus testimonio. nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem commentarios ipse composuit, se ex Hamonij Hermeæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenue prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorẽ, cum nomẽ suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industriæ fructum Theoni dutaxat acceptum referre. At enim quæret fortasse aliquis, nec iniuria profecto, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, solum protulerit. cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, aliisq; dici soleat, adiungendum erat omnino, cuiusnam rei illa essent elementa, elementorum ve institutio, vt à latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omissum diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis de puncti notione cognoscitur, aut Hamonium secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmaremus hanc inscriptionem κατ' ἐξοχήν, ac quandam Geometriæ excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. sic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, quæ in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literatæ sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, oratioq; ex his constat, sic & totius Geometriæ sunt quædam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ sequuntur, perq; omnia peruadentia, & multorum accidentium prębentia demonstrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcunque ad plura pertinent & simplicẽ quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum; propterea quòd eorum contemplatio non sit communis omni scientiæ. Quæcunque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hæc extra elementarium vim cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundi apud Euclidem, & quartũ quinti; sic & alia multa inter sese elementa esse dicentur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quòd extrinseci rectilineorum anguli quatuor rectis sint æquales, intrinsecorum recto æqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur. estq; huiusmodi elementum lemmati assimile. Aliter præterea dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicetur, sed quę principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum sunt elumenta. iuxta hoc elementi significatum & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometriæ, quę circa plana versatur; alia vero eius, quæ circa solida. sic & in Arithmeticis, & in Astronomicis elementarius institutiones multi conscripserũt. Propositũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuersã Geometriã necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq;, ac primis principijs maxime affinia theoremata, sine quibus reliquæ huius scientiæ partes cõprehẽdi nõ pñt. Euclides. n. ipse in aliis libris Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus, et reliqui ad eorum demonstrationes his tanquam notissimis vbique vtuntur. Quod vero ad dispositionẽ, ac methodum Geometricorũ sermonũ attinet, sciendum est (vt inquit

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias ſcientias certa quædam, & definita principia habere, ex quibus ea, quæ ſequuntur, demonſtrat. quarè neceſſe eſt ſeorſum quidem de principijs, ſeorſum vero de ijs, quæ à principijs fluunt pertractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia conſequuntur, rationibus confirmare. nulla enim ſcientia ſua demonſtrat principia, verum circa ea per ſeſe ſibi fidem facit, cum magis euidentia ſint, quàm quæ ex ipſis deriuãtur: & illa quidem per ſeſe, hæc vero deinceps per illa cognoſcit. Ita & naturalis philoſophus à determinato principio rationes producit, motum eſſe ponens; ita & medicus, & aliarum ſcientiarum, atq; artium peritus. Quòd ſi quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem commiſceat, is totam perturbat cognitionem: eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter ſe conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quæ conſequuntur, ſunt diſtinguenda. quod ſanè Euclides in vnoquoque ſuorum librorum obſeruauit; quippe qui ante omnem tractationem communia huius ſcientiæ principia exponit: et ipſa in ſuppoſitiones, ſeu diffinitiones, poſtulata, et axiomata diuidit. differũt nãque hæc omnia inter ſe, nec idem eſt axioma, & poſtulatum, & ſuppoſitio, vt Ariſtoteles aſſerit. Cum enim is, qui audit propoſitionem aliquam, ſtatim ſine doctore vt veram admittit, eiue certeſſimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per ſeſe fidem faciat; verum tamen ſupponit, & eo vtenti aſſentitur, ea ſuppoſitio eſt, verbi gratia, circulum eiuſmodi eſſe figuram, communi quadam notione non percepimus, ſed audientes abſque vlla demonſtratione approbamus. Cum autem rurſus & ignotum ſit addiſcenti, quod dicitur, & tamen eo aſſentiente aſſumatur, tunc id poſtulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales eſſe. Quæ autẽ à principijs enaſcũtur, ea ſunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud eſt, in quo quippiam, cum primum non ſit proponitur inueniendum, ac conſtruendum. Theorema autẽ in quo quippiam in conſtituta iam figura ita eſſe uel non eſſe demonſtratur. In hac igitur elementa vi inſtitutione Euclidem quis non ſummopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit, theorematũ, atque problematũ? non enim oĩa aſſumpſit, quæ poterat dicere, ſed ea duntaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios ſyllogiſmorũ modos vſurpauit, alios quidem à cauſis fidem accipientes, alios vero à ſignis profectos, omnes neceſſarios & certos, atque ad ſcientiam accõmodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diffinientem in eſſentialibus rationibus; demonſtrãtem vero in progreſſibus, qui à principijs ad quæſita fiunt. denique reſoluentem in ijs, qui à quæſitis ad principia fiunt regreſſibus. Quin etiam varias conuerſionum ſpecies tum ſimplicium, tum compoſitarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis conuerti poſſint, quæ vero tota partibus, & contra, & quę vt partes partibus. Poſtremo admirabilem omnium diſpoſitionem, antecedentiũq; & conſequentiũ ordinẽ, ac cohærentiã, vt nihil prorſus addi, aut detrahi poſſe videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietateſq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipſa inter ſe ſe comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma tranſit, eorumq; ortum declarat, & ſymptomata, quę in ipſis ſunt, demonſtrat. poſtea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem oſtendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de ijs, quę in triãgulis rectangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à ſubtendente rectum angulum deſcribitur ad ea, quæ comprehendentibus ipſum fiunt.

In ſecundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarantur. poſtea de quadratis, quæ à lateribus obtuſangulorum, & acutangulorum triangulorum deſcribuntur, quam habeant proportionem, quæ à ſubtendentibus obtuſum & acutum angulum fiunt ad ea, quę à comprehendentibus deſcribuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum conſtituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias conſiſtunt.

In quarto libro de figurarum planarum inſcriptionibus & circumſcriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In ſexto de proportionibus figurarum inter ſeſe, de figuris ſimilibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quę vel deficiant parallelogrammis ſimilibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione ſecetur, de proportionibus circumferentiarum & angulorum, itemq; ſectorũ in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In ſeptimo agitur de numeris primis, & compoſitis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura inueniatur. de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & ſolidis. de ſimilibus planis, & ſimilibus ſolidis.

In nono item de ſimilibus planis, de cubis, & ſolidis, & de numeris deinceps proportionalibus ſiue ab vnitate, ſiue ſimpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus magnitudinibus, itēq; de rationalibus & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad ſtereometriam ſpectant, hoc eſt ad ſolidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad ſolida corpora referũtur, videlicet quando ſint in vno plano, quando rectæ, ſeu perpendiculares ad planum, quando parallelę, quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis ſimul deſſerit, tũ de ſolidis angulis, poſtremo de ſolidis parallelepipedis, & nõnulla de priſmatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et priſmatibus; poſtea de conis et cylindris, demum de ſphęris.

In tertiodecimo de conſtitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellãt; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icoſaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema, ac media ratione ſectæ, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione.

In quintodecimo & vltimo de inſcriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundē lateribus, & angulis.

FINIS.

INDEX EORVM, QVAE IN HIS LIBRIS demonſtrantur præter ea, quę Euclidis ſunt.

IN PRIMO LIBRO.



IRCVLI diameter biſariam circulum ſecat. 3.b

In data recta linea triangulum æquicrure, & ſcalenum conſtituere. 8

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineę non ad eaſdem partes ſumptæ angulos ad verticem æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt. 14.b

Si alteram parallelarum ſecuerit recta quędam linea, reliquam quoque ſecabit. 19.b

Rectæ lineæ, quę à minoribus, quàm ſint duo recti, in infinitũ producuntur; inter ſe conueniunt. 20

Omnis rectilinea figura, angulos, qui extra cõſtituuntur, quatuor rectis æquales habet. 21

Omne quadrilaterum, quod latera ex oppoſito, & angulos æqualia habet, parallelogrãmũ eſt. 22

Omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris biſariam ſecatur, parallelogrammum eſt. 24

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; baſim, aut æquales habuerint, & fuerint ad eaſdem partes: in eiſdem etiam parallelis erunt. 25

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eiſdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; baſi, aut in æqualibus erunt. 25

Quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo. 26.b

Quadrata ab æqualibus rectis lineis deſcripta, etiam inter ſe æqualia ſunt. 27

Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis deſcripta ſunt.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales ſint, & in dato angulo rectilineo parallelogrãmum conſtituere. 27.b

IN SECVNDO LIBRO.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, quæ ſecentur in quotcunque partes, rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis, quæ vnaquæque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. 29.b

Si fuerint duæ rectę lineæ, quæ vtcunque ſecentur, rectangulum totis contẽtum vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt æquale rectangulis, quæ continentur totis, & dictis partibus vnà cum eo, quod reliquis partibus continetur.

Arithmeticę analogię demonſtratio. Theorema autem eſt.

Quadratũ, qđ fit ab exceſſu vnà cũ eo, quod extremis cõtinetur, quadrato medij æquale eſſe. 31.b

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, earũ partiũ quadrata æqualia ſunt rectãgulo, quod bis dictis partibus continetur, vnà cum quadrato eius lineę, qua maior pars ſuperat minorem. 32

Propoſitio IX aliter demonſtratur. 33

Propoſitio X aliter demonſtratur. 33.b

Cuiuſlibet trianguli obtuſum angulum habentis, aream dimetiri. 34

Propoſitionis XIII conuerſa. 35

Cuiuſlibet trianguli, ſiue acutianguli, ſiue rectanguli, ſiue obtuſianguli, quod nota latera habeat, aream inuenire. 35.b

IN TERTIO LIBRO.

COnuerſum diffinitionis circuli. ſi in ambitũ figuræ ab aliquo puncto eorum, quę ſunt intra, incidant æquales rectę lineę, ea circulus eſt. 37.b.38

Propoſitionis VII conuerſa. 39.b

Si in circumferentia circuli aliquod punctum ſumatur, ab eoq; in circulũ ducãtur rectę lineę, quæ per centrum tranſit, omnium erit maxima, aliarum vero quæ trãſeũti per centrũ propinquiores ſunt, remotioribus erunt maiores, duæ aũt tantum æquales ſunt ad vtraſque partes maximæ. 40

Propoſitionis XIX. conuerſa 43.b

Spacium.

Spacium quod eſt ad centrum duplum eſt anguli, qui ad circumferẽtiã, quando circumferentiã eãdem pro baſi habuerint. 44
Propoſitio XXI aliter demonſtratur
In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones conſtitui poſſunt. 44.b
In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones ſimiles ſunt. 45
Si æquales rectæ lineæ æquales, & ſimiles circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorum illæ ſunt circumferentiæ. 46.b.47
In circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ diſſimiles circumferentias auferunt. 47
In circulis inæqualibus ſimiles circumferentias inæquales rectæ lineæ ſubtendunt.
Similes & inæquales circumferentias inæquales rectæ lineæ ſubtendunt.
Si à puncto extra circulum ſumpto ducantur in circulum quotcunque rectæ lineæ ipſum ſecantes, rectangula, quæ totis, & earum portionibus extrinſecis continentur, inter ſe æqualia ſunt. 50
A puncto extra circulum ſumpto ductæ duæ rectæ lineæ circulum contingentes, inter ſe æquales ſunt.

IN QVARTO LIBRO.

IN dato circulo rectam lineam rectæ lineæ datæ, quæ diametro maior non ſit, æqualem, & alteri datæ parallelam aptare.

IN QVINTO LIBRO.

SI prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem, ad quartam minorem proportionem habeat quàm quinta ad ſextam, & prima ad ſecundam minorem proportionem habebit, quàm quinta ad ſextam. 64.b
Si prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartã, tertia autẽ ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad ſextam, & prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad ſextam. 64.b
Si prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam ſitq; prima maior quàm ſecunda; & tertia quàm quarta maior erit, et ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. 65.b
Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt. 68.b
Si prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, & conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem habebit, quàm quarta ad tertiam. 69
Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm ſecunda ad quartam. 69
Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, etiam componendo prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia, & quarta ad quartam. 69.b
Si prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem habeat proportionẽ, quàm tertia, & quarta ad quartam, & dividendo prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartã.
Si prima, & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam, per conuerſionem rationis prima & ſecunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam. 70
Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm ſecunda ad quartam, etiã prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & ſecunda ad tertiam & quartam.
Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquã maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam
Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, habeatq; prima priorum ad ſecundam maiorem proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundã, ſecunda vero priorũ ad tertiã maiorem proportionẽ habeat, quã ſecunda poſteriorum ad tertiam; etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima poſteriorum ad tertiam. 70.b

TRiangula & parallelogramma in æqualibus baſibus conſtituta, eãdem inter ſe proportionem habent, quam eorum altitudines. 72. b
Propoſitio VI. aliter demonſtratur. 74. b
Datam rectam lineam in datam proportionem ſecare. 75. b
In dato triangulo quadratum deſcribere. 76
Tribus datis rectis lineis AB. BC. & D. Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipſam D. 76. b
Si rectilinea æqualia, & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqualia erunt. 81
Triangula, quę vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compoſitam. 81. b
Quomodo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur.
Proportio data ex data proportione maiori quo pacto auferatur.
Quomodo in numeris proportiones componantur, & auferantur.
Triangula, quorum vnus angulus vni angulo eſt æqualis inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.
Parallelogramma æquiangula inter ſe proportionem habere eandem, quam rectangula, quę ipſorum lateribus continentur. 82
Triangula, & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.
Propoſitio XXVII aliter explicatur. 84
Duorum rectilineorum inæqualium exceſſum, quo maius ſuperat minus inuenire. 84. b
Theorema Pappi, quod multo vniuerſalius eſt, quàm XXXI Euclidis.

EXpoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, non ceſſabit huiuſmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit. 90
Expoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, ſi de maiori ſemper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vſque non perueniet.
Duobus numeris expoſitis, comperire an inter ſe primi ſint, an compoſiti.
Si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri. 91
Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; & vterque vtriuſque æque multiplex erit, atque vnus vnius. 91. b
Si fuerint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium multitudine ſinguli ſingulorum æque multiplices; quotuplex eſt vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium.
Si quotcunque numeri minores ad totidem alios maiores referãtur, ſintq́, ſinguli ſingulorum, vel eadem pars, vel eadem partes; quæ pars, vel partes eſt vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium. 92
Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati; & reliquus reliqui æque multiplex erit, atque totus totius.
Quę eidem eadem ſunt numerorum proportiones, & inter ſe eædem erunt. 93. b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt. 94. b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & componendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & diuidendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & per conuerſionem rationis proportionales erunt.
Si primus ad ſecundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem & quintus ad ſecundum proportionem eandem, quam ſextus ad quartum: & compoſitus primus, & quintus ad ſecundum eandem proportionem habebit, quã tertius & ſextus ad quartũ.
Si numerus aliquis plures numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti eandem, quam multiplicati proportionem habebunt. 95. b

Si plures numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti eandem, quam multiplicantes proportionem habebunt. 95. b

Numeris quotcunque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipſi proportionem habeant. 99. b

IN OCTAVO LIBRO.

PLani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter ſe ſimiles ſunt. 109

Solidi numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter ſe ſimiles ſunt. 109. b

IN NONO LIBRO.

SIcubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus non erit cubus: 111

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum, & multiplicatus non erit cubus.

Si duobus numeris propoſitis, eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis, a qualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt. 114

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte inter ſe compoſiti æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit, æqualis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. 115

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis eſt quadratis, qui à partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Si par numerus bifariã diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus, vnà cum quadrato numeri interiecti, æqualis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq́, ipſi numerus aliquis; qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij eſt æqualis quadrato eius, qui ex dimidio & adiecto conſtat. 115. b

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis æqualis eſt numero plano, qui bis fit ex toto, et dicta parte vnà cũ reliquę partis quadrato. 116

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, et vna parte fit numerus planus vnà cũ quadrato reliquę partis æqualis eſt quadrato, qui à toto, et dicta parte tamquam ab vno efficitur. 116

Si par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales; quadrati, qui ab inæqualibus numeri fiunt, dupli ſunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipſos interiecti.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq́, ipſi alter numerus, qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati, dupli ſunt quadrati ex dimidio, & quadrati qui ex dimidio et adiecto tamquam ex vno efficitur. 116. b

Illud autem, quod vndecimę ſecundi libri reſpondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto & altera parte fit numerus planus, æqualis ſit ei, qui à reliqua parte ſit quadrato, nullo modo fieri poteſt.

IN DECIMO LIBRO.

PRopoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quàm inter ſe proportionem habeant in numeris inuenire. 126. b

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum ita quadratum rectæ lineæ ad alterius rectę lineæ quadratum. 130. b

Duos numeros planos diſſimiles inuenire. 131

Magnitudines, quæ incõmenſurabilibus ſunt cõmẽſurabiles, & inter ſe incõmenſurabiles erũt. 132

Datis

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor. 132
Datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt, quo pacto inueniatur.
Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentium ſit incommenſurabilis & reliquæ incommenſurabilis erit. 133
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectãgulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 133.b
Si duæ rectæ lineæ inæquales ſint, quarta autem pars quadrati, quod à minori fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum eſt per bipartitam ſectionem non tranſit.
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.
Datam rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum, quod partibus continetur ſit æquale dato rectilineo. oportet autem datũ rectilineum minus eſſe quadrato, quod à dimidia deſcribitur. 134.b
Datum numerum in duas partes ita diuidere, vt qui ex ipſis producitur dato numero ſit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis eſſe debet, quadrato dimidij minorem eſſe.
Rationales magnitudines commenſurabiles eſſe: 135.b
Inuenire duas rationales potentia commenſurabiles.
Rationali commenſurabile & ipſum rationale eſſe. 136
Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datum erit. 136
Si ad datã rectã lineã rationalem applicetur ſpacium datũ, & latitudo quã facit, data erit. 136.b
Quæ ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis componitur recta linea, data erit. 137.b
Duarum datarum rationalium, quæ inæquales ſint, & longitudine commenſurabiles differentia, data erit. 138
Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles. 138.b
Recta linea, quæ poteſt irrationale ſpacium, irrationalis eſt. 138.b
Media eſt irrationalis, quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 139
Mediam, quæ vna eſt irrationalium in geometrica analogia conſiderari.
Si ſint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur. 136.b
Spatium medio ſpacio commenſurabile medium eſt. 140.b
Quod datis duabus medijs, vel media, & rationali continetur rectangulum datum erit. 141
Si ad datam mediam applicetur ſpacium datum, latitudo quam facit, data erit.
Quæ ex duabus datis medijs longitudine cõmenſurabilibus cõponitur recta linea data erit. 141.b
Duarũ datarũ mediarũ, quæ inæquales ſint, & longitudine cõmẽſurabiles differẽtia data erit. 142
Rationale non ſuperat rationale niſi rationali. 143.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipſis componitur, etiam quadratus ſit 144.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipſorum exceſſus ſit quadratus. 144.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipſorum exceſſus non ſit quadratus.
Si ſint duæ rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulũ duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris. 146
Si fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum contẽtum prima, & media ad id, quod à media & tertia continetur. 146.b
Ex duobus ſpacijs irrationalibus inter ſe compoſitis, totum fieri rationale. 148
Data recta linea, quæ ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit. 148.b
Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus conſtant & rectangulum ipſius contentum datum erit. 149
Datæ apotomes quadratum datum erit.
Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum quod ipſis continetur, datum erit.
Data recta linea, quæ ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectangulum, quod ip

ſis

ſis continetur datum erit. 149.b
Si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, producti minus.
Spacium ex mediis compoſitum irrationale eſt. 155.b
Binomialis ſpacij latus quadratum, vel radicem inuenire. 160
Si recta linea in partes inæquales ſecetur, ipſarum partium quadrata maiora ſunt rectãgulo, quod bis dictis partibus continetur. 162.b
Sint quattuor magnitudines AB C EF G & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur. 171

IN VNDECIMO LIBRO.

CONuerſa X. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodẽ plano nõ exiſtentibus, & earum vna parallela ſit vni continentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit. 195
Conuerſa XIIII. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipſorum eſt perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit. 196
Conuerſa. XVIII. Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos; & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit. 197.b
Conuerſa XIX. Quorum planorum ſeſe mutuo ſecantium communis ſectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & ſecantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorum vno reliqui ſint maiores, quomodocunque ſumpti; contineant autem ipſos rectę lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos ſubtendẽtium, vnã reliquas maiores eſſe quomodocunque ſumptas, hoc eſt fieri poſſe, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt, multorum laterum figura conſtituatur. 200.b
Si in aliquod planũ à quodam ſublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circumferentia: & quæ à dicto puncto ad centrũ circuli ducitur, ad circulũ perpendicularis erit. 201
Omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi. 201.b
Ex planis quotlibet datis angulis quorum vno reliqui ſint maiores, quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere, oportet autem datos angulos quattuor rectis eſſe minores.
Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia eſſe, & ſimilia. 202.b
Si ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus parallelo, erit ſolidum ad ſolidum, vt altitudo ad altitudinem. 203
Solida parallelepipeda in eadem baſi, vel in æqualibus baſibus conſtituta, eam inter ſe proportionem habere, quam altitudines. 205.b
Priſmata triangulares baſes habentia, quę vel in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituuntur, & eadem altitudine, inter ſe æqualia eſſe. Et inſuper quæ eandem habent altitudinem inter ſe eſſe, vt baſes. Et quæ vel in eiſdem vel æqualibus baſibus conſtituuntur, inter ſe eſſe, vt altitudines.
Æqualium priſmatum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Et quorum priſmatum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent ea inter ſe ſunt æqualia. 207.b
Propoſitio XXXVIII aliter demonſtratur. 209.b

IN DVODECIMO LIBRO.

IN dato circulo, deſcripto in circulo polygono ſimile polygonum deſcribere. 212.b
Priſmata omnia, quæ eadem ſunt altitudine inter ſe eſſe, vt baſes. 215.b
Priſmata omnia, & pyramides, quę in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituuntur eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines.
Priſmata omnia, & pyramides inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium & proportione altitudinum. 216
Pyramides ſimiles, quæ multiangulas baſes habent, diuidi in pyramides triangulares baſes habentes ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 216.b

Priſmata ſimilia, quæ triangulares baſes habent in pyramides ſimiles, numeroq; æquales diuidun tur: & priſma ad priſma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217
Priſmata ſimilia, quæ multiangulas habent baſes in ſimilia priſmata, triangulares baſes habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & priſma ad priſma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217.b
Æqualium pyramidum & multiangulas baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum multiangulas baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales. 218.b
Priſmatum omnium æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, & quorum priſmatum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea eſſe æqualia. 219
Omnem conum ſiue rectum, ſiue ſcalenum tertiam partem eſſe cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, qui eandem baſim habet, & eandem altitudinem. 220
Similes coni & cylindri omnes inter ſe in tripla ſunt proportione diametrorum, quæ ſunt in baſibus. 222
Si cylindrus ſcalenus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 223.b
Si quilibet cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, vt cylindrus ad cylindrum, ita eſſe altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.
Conorum omnium & cylindrorum æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quorum conorum & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt æquales. 224
Cylindri omnes, & coni inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, et proportione altitudinum. 224.b

IN TERTIODECIMO LIBRO.

PRopoſitio prima aliter demonſtratur. 229.b
Data recta linea extrema, ac media ratione ſecta, & vtraque ipſius portio data erit.
Si recta linea rationalis, expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis, extrema ac media ratione ſecta fuerit, maiorē eius portionē apotomen eſſe quintam, & minorē eſſe apotomen primā.
Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.
Data maiori portione rectæ lineę, quæ extrema, ac media ratione ſecetur, & minorem portionem & totam lineam datam eſſe. 230
Propoſitio ſecunda aliter demonſtratur. 230.b
Data minori portione totam rectā lineā, quę extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire. 231.b
Data minori portione rectæ lineę quæ extrema, ac media ratione ſecatur, & maiorem portionē, & totam lineam datam eſſe.
Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, abſcindaturq; à maiori portione linea, quæ minori ſit æqualis, erit etiam ea extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit quę abſciſſa eſt recta linea. 232.b
Si maior portio rectę lineę extrema, ac media ratione ſectæ ſit rationalis, expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis; erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. 233
Si minor portio rectę lineæ extrema, ac media ratione ſectæ ſit rationalis, expoſitæq; rationali longitudine commenſurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. 233.b
Si latus hexagoni extrema, ac media ratione ſecetur, erit maior eius portio decagoni latus. 234.b
Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum deſcribatur, erit decagoni latus apotome quinta. 235
Si latus decagoni æquilateri in circulo deſcripti ſit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta. 235

Latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad baſim perpendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere quam 4 ad 3. 236.b

Si ſint tres rectæ lineæ, ſitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales. 240

IN QVARTODECIMO LIBRO.

EAm, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli: 244

IN QVINTODECIMO LIBRO.

SI à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur. 249.b

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim biſariam ſecat:

Rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.

Propoſitio ſecunda planius demonſtratur. 250

Omne parallelogrammum eſt in vno plano. 251.b

In dato dodecaedro cubum deſcribere. 255

In dato dodecaedro pyramidem, & octaedrum deſcribere.

In dato Icoſaedro cubum deſcribere.

In dato Icoſaedro pyramidem deſcribere.

In dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

FINIS.

BIBLIOTHÈQUE DE LA VILLE
LYON
1891

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE 1894

DIFFINITIONES.

I.



PVNCTVM EST, cuius nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium ſignificauit nobis punctum, quod eſt principium totius propoſitę contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum ſunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam oſtendant; non immerito negantes ſermones principijs ipſis conuenire comperti ſunt: quod etiam aſſerit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & tranſlationem quandam, punctum diffinierunt eſſe vnitatem poſitionem habentem: punctum enim poſitionem habet, vnitas non habet. Ariſtoteles in quarto diuinę phyloſophię libro. vbique, inquit, ipſum vnum aut forma, aut quantitate indiuiſibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas eſt, diuidi non poſſunt, id quidem, quod penitus eſt tale, & ſine poſitione, dicitur vnitas; quod vero penitus eſt tale, poſitionemq; habet, dicitur punctũ; & id quod vno modo diuidi poteſt, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, ſuperficies: quod vero omni ex parte, & trinam dimenſionẽ habet, dicitur corpus.

Punctum ſecundum Pythagoricos eſt unitas poſitionem habens.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Poſt punctum linea ſecundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad ſuperficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipſum, vt magnitudinum omnium principium per ſolam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem ſignificauit cum dixit, longitudinem eſſe latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημεἰου ῥύσιν hoc eſt puncti fluxum dixerunt; alij ut Ariſtoteles τὸ μἑγεθος μονοχἢ διαιρετὸν ἢ ἐφ' ἑν διαιρετὸν hoc eſt magnitudinem, quae vno modo diuidi poteſt, nempe ſecundum longitudinem. lineae autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & craſſitudinem adiungimus, ſed vnicam duntaxat dimenſionem conſideramus; quemadmodum & cum agros metimur, ſuperficiem reſpicimus; cum autem puteos, ſolidum: omnes enim dimenſiones ſimul colligentes dicimus tantum eſſe ſpacium putei ſecundum longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem. ſenſum vero ipſius lineae habebimus, ſi diſunctiones locorum illuminatorum ab vmbroſis inſpexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimenſionem non habet, ſed iuxta longitudinem, quae vna cum lumine, & vmbra producitur,

Punctũ magnitudinum omniũ principium.

Lineæ notio.

Superficiei notio. Solidi.

Lineæ ſenſus unde habeatur.

Lineæ simplices. Mixtæ.

ducitur. linearum aliae simplices, aliae mixtae. simplices sunt recta, & circularis, quamquam recta simplicior sit, reliquae vero omnes mixtae, quales sunt coni sectiones, helices, conchoides, cissoides, & aliae.

III.

Lineæ fines sunt puncta.

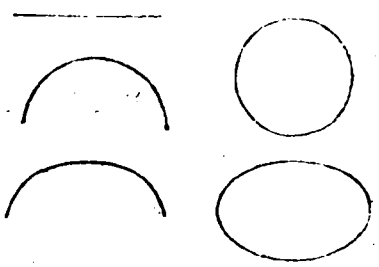
F. C. COMMENTARIVS.

Linea tribus modis vtitur Euclides

Circularis linea p se nullos habet fines.

Ellipsis.

Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quae vtrinque finita est, sermo habetur; cuius fines dicit esse duo puncta. Circularis autem linea per se nullos habet fines; sed si aliquod in ea punctum accipiatur, idem erit & principium, & finis, diuersa tamen ratione. quod diximus de circulari linea, idem & de ellipsi dici potest, quae ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus: si autem sumatur portio circularis lineae, seu ellipsis, eius non aliter, quàm rectae lineae fines erunt duo puncta. Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum est.



IIII.

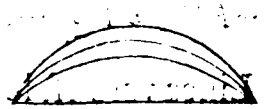
Recta linea est, quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Plato q. rectã lineam diffiniat.

Archimedis diffinitio rectæ lineæ.

Hoc est recta linea est, quae aequalem continet distantiam, eam scilicet, quae inter sua interijcitur puncta. quantum enim alterum punctorum ab altero distat, tanta est magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae. atque hoc est ex aequali suis interijci punctis. si autem in circumferentia circuli, aut alia quauis linea duo puncta sumantur; eius portio, quae interijcitur, longe maior erit, quàm sit dictorum punctorum distantia. ad hunc quidem modũ rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus. Plato autem rectam lineã diffinit esse eam ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐστὶ σκοτεῖν, hoc est cuius media extremis obsistunt. illud. n. ijs, quę in recta linea sunt, necessario contingit; ijs vero, quae in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde & astrologi dicunt solem deficere, cum in eadem recta linea constituitur ipse, lunaq́, et oculus noster: obsistit enim ei tunc luna media existens. At Archimedes, vt Proclus auctor est, dixit rectam lineam esse breuissimam omnium, quae eosdem habent fines. quae quidem diffinitio recepta est in Campani editione. linea, inquit, recta est ab vno puncto ad alium breuissima extensio in extremitates suas eos recipiens.



V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei natiæ diffinitiones.

Superficiei cognitio & sensus.

Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd crassitudinis expers sit. alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt; alij magnitudinem binis distantem interuallis. superficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum terminos iuxta longitudinem, ac latitudinem distinguimus. sensum vero quendam capere, quando vmbras aspicimus, cum enim ipsae crassitudinis sint expertes, quòd partes terrae interiores penetrare non possint; latitudinem, & longitudinem tantum habent. superficierum aliae simplices sunt,

aliae

alię mixte. ſi mplices ſunt plana, & ſphęrica, reliquę vero mixtę, vt Cylindrica, conica; & quę à coni ſectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & ſphęroidum figurarum, & alię.

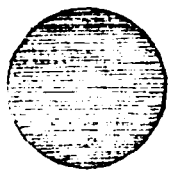
Superficies ſimplices & Mixtæ.

VI.

Superficiei fines ſunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineæ fines ſunt puncta, ita non omnis ſuperficiei fines ſunt lineæ; ſuperficies enim ſphęrae, vel ſphęroidis per ſe nullos habet huiuſmodi fines, niſi planis abſcindatur, nam tunc fines habet lineas ipſas, quę ex ſectione oriuntur. ſuperficiei autem circuli, & eius, quę ellipſi continetur, finis eſt linea vna, videlicet circumferentia, & ellipſis. quòd ſi ſecentur tunc pro finibus lineas habebunt.





Superficies Sphæræ, & Sphæroidis.

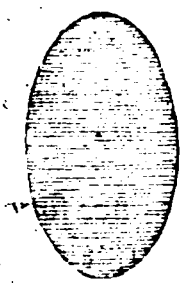
Superficies circuli, & ellipſi cõtẽtæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æquali ſuis interijcitur lineis.

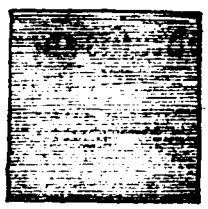
F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philoſophi (vt teſtatur Proclus, τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc eſt ſuperficiem, & planum pro vno, eodemq́, accipiebant. At Euclides, & qui eum ſecuti ſunt, genus quidem ſuperficiem faciunt, eius vero ſpeciem planum, vel planam ſuperficiem, quemadmodum lineę ſpeciem rectam lineam. & idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. vt enim recta linea eſt, qua ex æquali ſuis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſima omnium, quę eoſdem habent fines, ita planam ſuperficiem dixerunt eſſe eam, quę ex æquali ſuis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſimam omnium ſuperficierum eoſdem fines habentium, & omnino quęcunque ſunt rectę lineę diffinitiones, omnes ad planam ſuperficiem commodiſſime transferri poſſunt. Quòd cum multę ſint ſuperficierum ſpecies, Euclides planam tantum diffiniuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.





Superficiē, & planū Antiqui pro eodem accipiebant.



Planæ superficiei uariæ diffinitiones

Euclides superficiē planam tãtum diffiniuit.

VIII.

Planus angulus eſt duabus lineis in plano ſe ſe contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

Quando autem quę angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prędicamento eorum quę ſunt ad aliquid ponentes, inclinationem eſſe dixerunt, vel linearum, vel planorum, quę ad ſe inuicem inclinata ſunt. alij in qualitate ipſum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt eſſe ſuperficiei, vel ſolidi. alij autem ad quantitatem referentes vel ſuperficiem, vel ſolidum eſſe aſſeuerarunt. diuiditur, inquiunt, is, qui in ſuperficie eſt angulus linea; qui in ſolidis ſuperficie. quod

autem his diuiditur nihil aliud eſt, niſi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. quare relinquitur, vt ſit ſuperficies, vel ſolidum. Quid igitur in tanta controuerſia dicendum? aut quid eorum dicemus eſſe angulum? Reſpondet Proclus angulum nihil eſſe eorum per ſe ſe, ſed ex concurſu omnium conſtitui. contingere autem hoc non ſolum angulo, ſed & ipſi triangulo, quod quidem particeps eſt quantitatis; & idcirco ęquale dicitur, & inęquale, vt pote materię rationem habens. particeps quoque eſt qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam & ſimilia dicuntur triangula, & inęqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & exiſtentię figuram. indiget denique & determinantium ipſum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. atque ex his omnibus angulus conſtat. non tamen eſt vnum aliquod eorum. & eſt quidem diuiſibilis, & ęqualitatem, & inęqualitatem ſuſcipere poteſt, iuxta eam, quę in ipſo eſt, quantitatem.

Angulorũ diuiſio.



Angulorum alij quidem in ſuperficiebus, alij vero in ſolidis conſiſtunt: & eorum qui in ſuperficiebus alij in ſimplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis ſunt alij ſimplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtriſque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.

X.

Cum vero recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens eos, qui dein ceps ſunt angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque ęqua lium angulorum: et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis voca tur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui maior eſt recto.

XII.

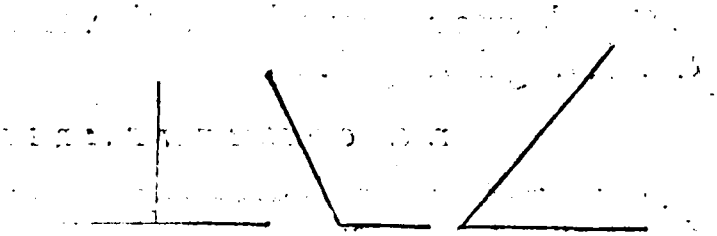
Acutus autem, qui recto eſt minor.

F. C. COMMENTARIVS.

In diffinitione anguli obtuſi, & acuti genus ſubintelligi oportet, eſt enim vterque ipſorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non ſimpliciter quicunque minor eſt recto, is eſt acutus; neque quicunque maior recto eſt obtuſus. nam qui græce κερατοειδὴς dicitur, hoc eſt cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia ipſa, non tantum recto, ſed etiam omni acuto eſt minor, acutus autem non eſt. & ſemicirculi angulus omni recto eſt minor, ſed tamen non eſt acutus. quorum quidem cauſa eſt, quod ſint mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi re

Angulus cornicularis.

Semicirculi angulus.



cto maiores apparent, non tamen ſunt obtuſi. Cum igitur rectum angulum diffinire propoſuiſſet Euclides rectã aſſumpſit lineam ſuper aliam rectam inſiſtentem; & angulos, qui ex vtraque parte ſunt, quos angulos deinceps appellat, inter ſe aequales facientem. Obtuſum autem, & acutum diffiniens non item aſſumpſit rectam lineam ad alterutram partem

Anguli deinceps qui ſit.

partem inclinatam, ſed per comparationem ad rectum explicauit. ipſe enim etiam non rectorum menſura eſt, quemadmodum & inæqualium æqualitas. lineæ vero ad alterutram partem inclinatæ infinitæ ſunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminiſſe oportet Euclidem hoc loco de ijs ſermonem habere, quæ in eodem plano conſiſtunt. quare neque perpendicularem omnem diffiniuit, neque omnem angulum. ſolida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, ſed ad omnes, quæ ipſam tangunt, in ſubiecto exiſtentes plano, de qua in vndecimo libro agetur.

Angulus rectus eſt non rectarū mēſura, quemadmodum inæqualium æqualitas.

XIII.

Terminus eſt, qui alicuius eſt finis.

F. C. COMMENTARIVS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt ſcribit Proclus, lineæ namque terminus eſt, & finis, ſed ad ſpacia, quæ ſunt in ſuperficiebus, & ad ſolida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui ſpacium vnumquodque determinat; & huiuſmodi terminum, finem eſſe dicit, non vt punctum dicitur lineæ finis, ſed vt includit, & ſeiungit ab ijs, quæ circumpoſita ſunt. eſt autem hoc nomen priſcæ illi geometriæ proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos diſtinctos ſeruabant, ex qua huius ſcientiæ cognitionem aſſecuti ſunt. huiuſmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipſum finem determinauit ſpaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum præfinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus eſt, & finis; ipſum vero planum aliquod ſpacium eſt, & ſimiliter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini ſunt, & fines; ſpacium vero, quod his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

XIIII.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Figurarum aliæ planæ, aliæ ſolidæ. planarum figurarum circulus quidem, & ellipſis, ſolidarum ſphæra, & ſphæroides vnico termino, aliæ pluribus terminis continentur.

Figurarum aliæ planæ, aliæ ſolidæ.

XV.

Circulus eſt figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertinentes ſunt æquales.

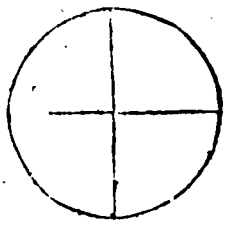
XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Circulus planarum figurarum primo eſt, ſimplicitate quidem ſolidis præſtans; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis.* Plana] *ad differentiam figurarum ſolidarum.* Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, quæ pluribus lateribus continentur.* quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipſi, quæ & ipſa vna linea continetur, ſed eam ellipſim vocant. liceat enim mihi nunc ſpacium ellipſi contentum etiam ellipſim appellare.* Ad quam] *ab ellipſis autem centro non plures, quam quattuor rectæ lineæ æquales ad ambitum duci poſſunt.* ab vno puncto] *ex infinitis punctis, quæ intra figuram ſunt, vnum dumtaxat hoc præſtare poteſt.* intra figuram exiſtente] *eſt etiam punctum extra figuræ planum, à quo omnes rectæ lineæ ad circumferentiam ductæ ſunt æquales, quod non centrum, ſed circuli polus in ſphæricis appellatur.*



Ellipſis.

Circuli polus.

Diameter

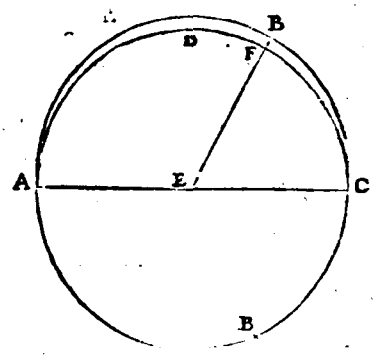
XVII.

Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum ſecat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorum.

Diameter circuli] *ſunt enim parallelogrammorum quoque diametri, ſed hę interdum* διάμετροι *hoc eſt diagonij appellantur. ſunt & diametri ellipſis, quarum duę axes dicuntur. præterea etiam ſphęrę diametri ſunt, quę axes nuncupantur. circuli igitur propria eſt diameter.* recta quadam linea per centrum ducta] *poſſunt namque in circulo duci infinitae rectae lineę, quę per centrum non tranſeunt.* & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata.] *rectę lineę etiam per centrum ductę, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminantur, diametri non ſunt.* quæ & bifariam circulum ſecat.] *ſit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: et ſtante diametro intelligatur circumferẽtia A B C eleuari, ac ſuperponi circumferentię A D C. Dico circumferentiam A B C ipſi A D C congruere. ſi enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. cadat primum extra ſi fieri poteſt: & ex centro circuli, quod ſit E, ducatur E B ſecans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectę lineę à centro ad circumferentiam ductę inter ſe ſunt ęquales, erit recta linea E B ęqualis ipſi E F, hoc eſt totum parti quod fieri non poteſt. quare circumferentia A B C extra ipſam A D C non cadet. ſimiliter demonſtrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. in ipſam igitur cadat neceſſe eſt: & circumferentia A B C congruet ipſi A D C. Quod ſi circumferentia circumferentię congruit, & ſuperficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet ſuperficiei, quę eadem A C, & circumferentia A D C continetur. ex quibus ſequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentię, & ſuperficiem ſuperficiei ęqualem eſſe. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam ſecat. quod oportebat demonſtrare.*



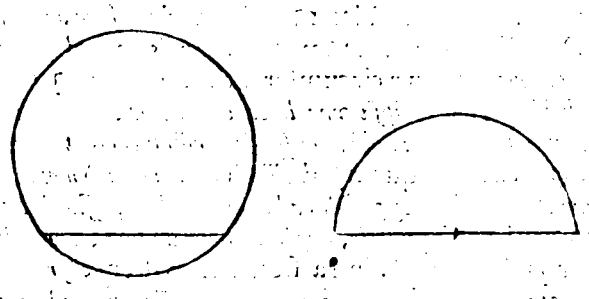
XVIII

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Portio circuli eſt figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.



Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo ſunt differentem; à centro autem diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quę intra circulum deſcribuntur, ſeiunxit. nunc autem à diametro quid nam ſit ſemicirculus tradit, cum dicat ipſum contineri duobus terminis, ὑφ' ἓν ἀεὶ διαφέρουσιν, videlicet recta linea, & circumferentia: & rectam

& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum, si quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quae tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. omnes autem huiusmodi figurae biformes sunt, & ex dissimilibus constant. figurae enim contentae duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictae, vel duabus lineis mixtis, vt si duae ellipses se inuicem secent, figuram continebunt, quae inter ipsas interijcitur, vel mixta & recta, vt ellipsis dimidium. itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad biformes accessit, quoniam duae rectae lineae spacium concludere nunquam possunt; recta autem linea & circumferentia possunt. & duae circumferentiae similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium interijcitur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum se inuicem non secent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At vero centrum semicirculi idem esse, quod & circuli centrum, manifeste constat. diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola.

Centrū tres habet locos.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

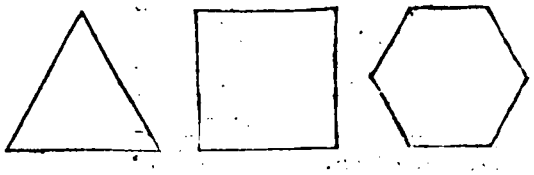
XXII.

Quadrilateræ, quæ quattuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

F. C. COMMENTARIVS.

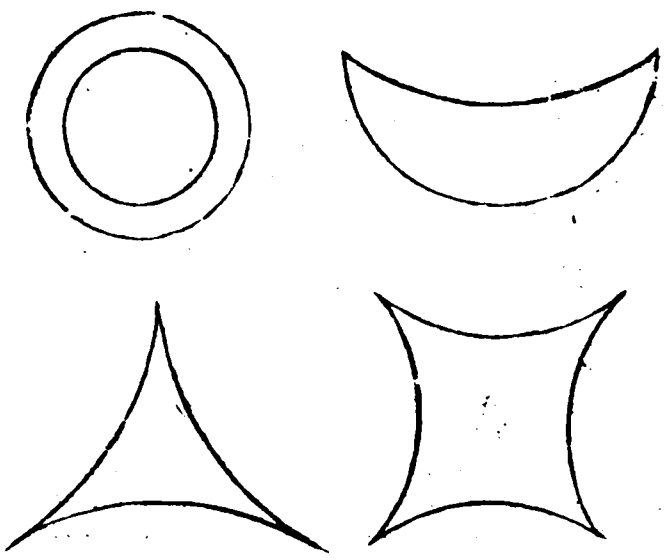


Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quae quidē ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duae rectae lineae spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum duntaxat figurarum, vtpote quae magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae simplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtrisque & earū, quae simplicibus, aliae quidem similibus specie continentur, vt rectilinea, aliae specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. earum insuper, quae specie similibus, aliae circulari cōprehenduntur linea, aliae recta. At earū quae circulari, aliae duabus, aliae pluribus continentur & vna quidem circulus ipse, quae verò duabus, aliae angulorum expertes. sunt,

Figurarum planarum diuisio.

Corona

sunt, vt corona, quae concentricis circulis terminatur, aliae angulares ut menisci. earum quae pluribus, quàm duabus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps sunt circumferentijs quędam figurae comprehendũtur. si enim tres circuli se se contingant, spacium concludũt trilaterum, quod tribus circumferẽtijs terminatur, si vero quattuor, quattuor circumferentijs, & deinceps similiter. postremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.



XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, siue æquicrure, quod duo tantũ æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

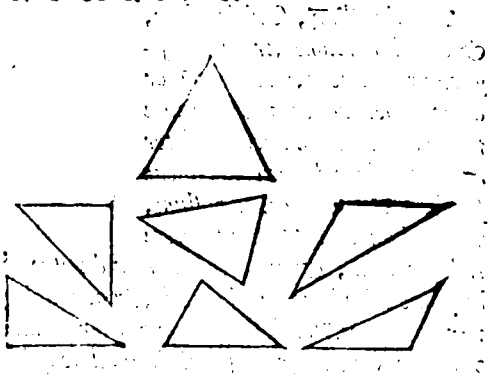
Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

F. C. COMMENTARIVS.

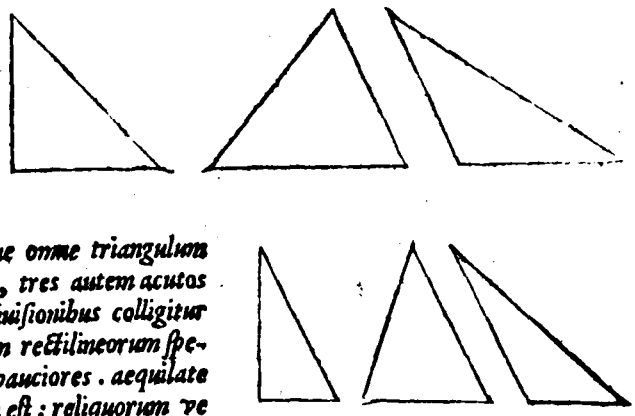
Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & precedit ea, quae à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus solis rectilineis figuris conueniunt: aequalitas verò laterum, & inequalitas inuenitur etiam in ijs, quae rectilineae non sunt. dicit igitur triangulorũ alia esse aequilatera, alia aequicruria, alia scalena, vel enim omnia latera aequalia sunt, vel omnia inequalia, vel duo tantũ aequalia.



Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod vnum

habet

habet obtusum, fieri enim non potest, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat: acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est vnicum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. ex his diuisionibus colligitur septem tantum esse triangulorum rectilineorum species, & neque plures, neque pauciores. aequilaterum enim acutiangulum tantum est: reliquorum vero vnumquodque est triplex; nam aequicrure vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.



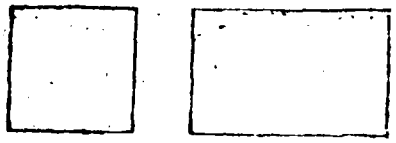
Septem triãgulorum rectilineorum species.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.



XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

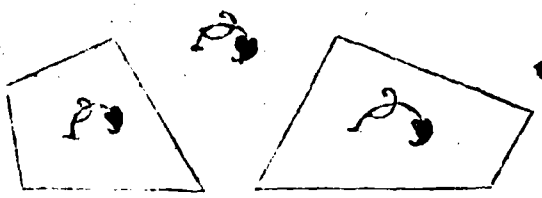


XXXIIII.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarũ aliae aequilaterae sunt, aliae non aequilaterae. rursus aliae rectangulae; aliae non rectangulae. quae igitur aequilaterae, & rectangulae sunt quadrata appellantur. quae vero rectangulae & non aequilaterae, altera parte longiores: & quae aequilaterae, & non rectangulae, rhombi. & postremo quae neque aequilaterae, neque rectangulae latera habent, & angulos, qui è regione sint inter se aequales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliae parallelogramma sunt, quae latera



Quadrilaterarum figurarum diuisio.

Quadratũ.

Altera parte longius.

Rhombus.

Rhomboides.

Quadrata. τετράγωνα

Rhomboidea.

Rhombus.

Trapezia.

Trapezoidea.

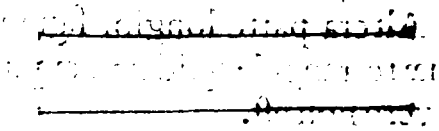
Trapezia aequicruria, & Scalena.

tera ex oppoſito parellela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non habent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera ſint vt quadrata, quae à graecis τετράγωνα appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, vt rhombo idea, quae figuram rhombo ſimilem habent. alia rectangula quidem, ſed non aequilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus. non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorſus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, haec vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero inaequalia. & illa aequicruria trapezia, haec ſcalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur figura ſeptem modis conſtituitur. nam prima quidem quadratum eſt, ſecunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta aequicrure trapezium, ſexta ſcalenum trapezium, ſeptima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non parallelogramma diuidere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogramo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellauit trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum inest proprietas, nempe ex oppoſito latera & angulos habere aequales; quod ipſe in rhomboide tantum poſuit, ne ſolis negationibus ipſam diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus enim proprijs caremus rationibus, communibus vti neceſſarium eſt. videtur autem rhombus dimotum eſſe quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quòd iuxta latera quidem haec ab illis non differunt, ſed iuxta angulorum duitatem obtuſitates, & acumina, cum illa rectangula ſint.

In quibus proprijs rõnibus caremus, cõmunibus utendum.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineę ſunt, quę cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producãtur, in neutram partem inter ſe conueniũt.



F. C. COMMENTARIVS.

Quae nam ſint parallelarum, ſeu aequidiſtantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoſcantur, poſtea diſcemus. nunc quae ſint parallelae his verbis diffinit. Quae cum in eodem ſint plano] *ſi enim altera quidem ſit in ſubiecto plano, altera autem in ſublimi iuxta quamuis poſitionem, inter ſe non conuenũt, non tamẽ propterea parallelae ſunt.* Et ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conueniunt] *non rectae lineae non parallelae, ſi aliquatenus producantur, non conuenient; in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas deſignat, neque hoc ſimpliciter, ſed ex vtraque parte in infinitum produci, & non conuenire. fieri namque poteſt, vt non parallelae etiam ex vna quidẽ parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. annuentes enim in hac parte, in altera plurimum diſtant. cauſſa autem haec eſt, quoniam duae rectae lineae ſpacium aliquod comprehẽdere non poſſunt, quòd ſi ex vtraque parte annuant hoc non continget. & Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Poſſidonius vero parallelae, inquit, ſunt, quae neque annuũt, neque abnuunt in vno plano, ſed aequales habent omnes perpendiculares, quae à punctis alterius ad alteram ducuntur; quęcunque vero minores faciunt perpendiculares inter ſe conueniunt. perpendicularis enim, & ſpaciorum altitudines, & linearum interualla determinare poteſt. quamobrem cum perpendiculares ſint aequales, & rectarum linearum interualla aequalia erunt: cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter ſe ad eas partes, in quibus perpendiculares ſunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus iis, quae ſcripſit Euclides, eas aptiſſime exemplo declarauit. dixit enim rectas lineas parallelas eſſe, quales in parietibus, vel pauimento columnarum umbras à lumine & regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum ſit vide apud Se-*

Poſſidonius parallelas aliter diffinit.

Perpendicularis ſpaciorũ altitudines et linearũ interuálla determinat.

renum

rerum in fine libri de ſectione Cylindri. Poſt diffinitiones ſequuntur poſtulata, deinde exiomata, ſeu communes notiones. poſtulata autem & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino il, lud habent commune, vt non indigeant demonſtratione aliqua, aut geometrica fide, ſed ſumatur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae ſequuntur. at differunt axiomata à poſtulatis eodem prorſus modo, quo theoremata à problematibus. vt enim in theorematibus quidem id, quod ſubiecta conſequitur, perſpicere & cognoſcere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita & in axiomatibus ea ſumuntur, per quae ſeſe manifeſta ſunt, noſtriſq; inſitis notionibus ſunt in promptu; in poſtulatis vero ea ſumere querimus, quae facilia, parabiliaq; ſunt, & in quibus ſumendis cogitatio non defatigatur, quæq; nulla neque varietate, neque conſtructione indigent.

Axiomata à poſtulatis differunt eodē modo, quo theoremata a problematibus.

POSTVLATA.

I

Poſtuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

II.

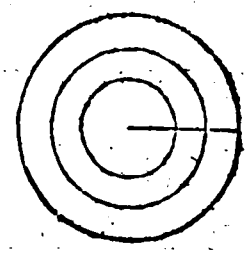
Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.

F. C. COMMENTARIVS.

Tria hęc & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in poſtulatis neceſſario collocanda ſunt, ex Gemini ſententia. nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, ſequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam eſſe puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non decliuem fluxum. ſi igitur intelligamus punctum aequabili, & breuiſsimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum poſtulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis. ſi vero recta linea puncto terminata, ſimiliter intelligamus eius terminum breuiſſimo, & aequabili motu ferri, ſecundum poſtulatum facili, ſimplicique aggreſſione comparatum erit. Quòd ſi rurſus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet poſtulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum à centro ad omnes circumferentiae partes.



IIII.

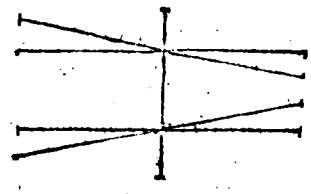
Omnes angulos rectos inter ſe æquales eſſe.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifeſtum, & nulla indigens demonſtratione à nobis concedatur, poſtulatum tamen non eſt ex ſententia Gemini, ſed axioma. accidens enim quoddam per ſe rectis angulis dicit, nihil ſimplici notione facere iubens. ſi cui vero non ſatis conſtet rectos angulos omnes inter ſe aequales eſſe, is petat demonſtrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduertit huius conuerſum non etiam verum eſſe, nempe angulum recto aequalem omnino eſſe rectum, niſi rectilineus ſit; poteſt enim curuilineus quoque angulus recto aequalis oſtendi.

V.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidēs interiores,& ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter se conuenire ex ea parte, in qua sūt anguli duobus rectis minores.



E. C. COMMENTARIVS.

Hoc à postulatis penitus reijciendum censet Proclus, cum theorema sit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemęus in quodam libro soluere sibi proposuit. multis vero & diffinitionibus, & theoremacibus in demonstratione indiget, cuius conuersum Euclides etiam tanquam theorema ostendit. sed de hoc inferius suo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem ęqualia, et inter se sunt ęqualia.

II.

Et si ęqualibus ęqualia adiiciantur tota sunt ęqualia.

III.

Et si ab ęqualibus ęqualia auferantur, rèliqua sunt ęqualia.

IIII.

Et si inęqualibus ęqualia adiiciantur, tota sunt inęqualia.

V.

Et si ab inęqualibus ęqualia auferātur, reliqua sunt inęqualia.

VI.

A Et quę eiusdem dupla, inter se sunt ęqualia.

VII.

Et quę eiusdem dimidia inter se sunt ęqualia.

VIII.

B Et quę sibi ipsis congruunt, inter se sunt ęqualia.

IX.

Totum est sua parte maius

X.

C Duę rectæ lineæ spacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis scientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis scientijs communia sunt: neque solum in magnitudinibus, sed & in numeris, & motibus, & temporibus vera esse deprehendantur. æquale enim & inęquale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & discretis communia sunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines versatur, his omnibus tanquam manifestis indiget. communibus autem existentibus vnusquisque vtitur secundum propriam materiam, quoad ipsa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius uero ut in temporibus ipsis utetur, & hoc modo propriae in unaquaque scientia conclusiones fiunt, licet axiomata communia fuerint.

Et

Et quæ eiusdem dupla inter se sunt æqualia. A

Hoc ex illo sequitur, Si æqualibus æqualia adiiciantur tota æqualia esse, nam quæ dimidio sunt æqualia, cum ipsum dimidium assumpserint eiusdem dupla sunt, & inter se æqualia ob æquale additamentum: & hac ratione non solum dupla, sed & tripla & eiusdem etiam multiplicia omnia æqua ia apparebunt.

Et quæ sibi ipsis congruunt inter se sunt æqualia] *hoc geometriae proprium est.* B

Duæ rectæ lineę spacium non comprehendunt] *Hoc non admodum manifestum videtur, quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adiicienda censuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autē omnis scientia duplex sit. alia quidem circa immediatas propositiones versatur, alia vero circa ea quę ex illis demonstrantur, comparanturq́, & omnino circa ea, quae principia consequuntur, suam perficit tractationem. hęc rursus in geometricis rationibus se ipsam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem dispertiit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quae non sunt quodammodo comparare proponit, in apertumq́, proferre; & machinari: theoremata vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoscereq́, ac demonstrare instituit. & illa quidem ortus, & positiones, & applicationes, & descriptiones, & circumscriptiones, & bipartitiones, atque alia huiusmodi constituere iubent; hęc vero symptomata, & quae subiectis geometriae per se insunt, persuadere, demonstrationibusq́, firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́, suis partibus, hęc omnia in se ipso habere debet, Propositionem, Expositionem, Determinationem, Constructionem, Demonstrationem, & Conclusionem. harum autem Propositio dicit quo dato quid quęsitum sit, perfecta enim propositio ex vtriſque constat. Expositio ipsum per se datum assumens præparat quæstioni. Determinatio seorsum quęsitum quodnam sit explicat. Constructio ea, quae dato desunt ad quæsiti uenationem adiicit. Demonstratio perite ex conceſſis quod propositum eſt colligit. Conclusio rursus ad propositionem regreditur confirmans id, quod ostensum est. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot sunt. maxime autem neceſſariae, & quae in omnibus insunt Propositio, Demonstratio, & Conclusio: oportet enim ante cognoscere quęsitum, perq́, media ostendere. & quod ostensum eſt concludere. Harum autem trium, vt aliqua desit, fieri non poteſt. at reliquae sępe assumuntur, sępe vero, cum nullum afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expositio non sunt in illo problemate. Aequicrure triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum duplum reliqui. Constructio autem in compluribus theorematibus non eſt, cum satis sit expositio absque alia additione, vt ex datis propositum ostendatur. Quando igitur deficere expositionem dicimus? cum in propositione nullum fuerit datum. quamquam enim propositio diuidatur in datum & quæsitū, non tamen hoc semper fit, sed aliquando solum dicit quæsitum, quod cognoscere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat aequicrure triangulum constituere, habens vtrumque aequalium angulorum duplum reliqui, sed tantum quod oporteat illud comparare. & fit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propositi sumptio. etenim quid aequicrure, & quid aequale, vel duplum sit cognoscimus. hoc autem omni diuinitatis disciplinae proprium esse dicit Aristoteles. nihil tamen nobis subiicitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariam secare. hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipsam bifariam diuidere. seorsum igitur ponitur datum, & seorsum quæsitum. Cum autem propositio vtrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expositio; sed cum deficit datum, & hae deficiant neceſſe eſt. expositio etenim eſt dati, & determinatio, quae propositioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, nisi quod aequicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propositio. si igitur propositio non habeat datum, & quæsitum, expositio quidem tacetur, quod non sit datum; determinatio vero prętermittitur, ne eadem fiat, quae propositio. multa autem alia inuenies huiusmodi problemata, pręsertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenire duas rectas lineas potentia commensurabiles, quae medium comprehendant, & omnia, quae eiusmodi sunt. Animaduertendum tamen Archimedem quidem sępe, vt in libro de quadratura parabolae, Pappum vero ferè semper propositionem ipsam omittere, contentos ex positione, ac determinatione, loco propositionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel positione, vel proportione, vel magnitudine, vel specie: punctum enim tantum ex positione datur, linea vero, & alia

Omne problema, & omne theorema perfectū sex habet partes.

Propositio, demonstratio & cōclusio maxime neceſſariae.

Cōstructio deest, cum expositio satis sit.

Archimedes & Pappus aliquādo propositionem omittunt.

Specie, *alia omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quae data est, significamus, nempe rectilineam, vt ne quęramus eisdem methodis etiam curuilineum angulum bifariam secare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inæqualibus à maiori aequalē minori abscindere, magnitudine datae sunt. maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus. Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, punctum positione datur. quare cum positio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsius termi nos. itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur. demonstratio vero interdum quidem quae demonstrationis propria sunt habere inuenietur, ex diffinitionibus mędijs quęsitum ostendens; hęc enim demonstrationis perfectio est: interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet, ubique enim geometricae rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non ubique uero demonstrantibus methodis perficiuntur. denique conclusio duplex esse solet, particularis, & uniuersalis. nam cum in dato conclusionem fecerimus, ne uideamur particularia proposuisse, ad uniuersalem transimus conclusionem. Verum cum hęc ita determinata sint, de ijs quae ipsis adnectuntur, breuiter disseremus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid instantia, quid deductio. lemma uel sumptio propriè in geometricis est propositio fide indigens. cū enim uel in constructione, uel in demonstratione aliquod sumimus eorum, quae ostensa non sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, veluti per se ambiguum inquisitione dignum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axiomate differens quatenus demonstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur. Casus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpositis punctis, uel lineis, uel planis, uel solidis, & omnino ipsius uarietas circa descriptionem uersatur; ac propterea dicitur casus, quòd sit constructionis transpositio. Corollarium uero dicitur quidem & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta. sed proprie dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propositum non est; & corollarium ob id uocant, quòd sit tanquam lucrum quoddam accedens prēter demonstrationis propositum. Instantia uero totum orationis impedit cursum, uel constructioni, uel demonstrationi occurens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, sed remouere, & ostendere falsam esse. Deductio autem est transitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud, quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propositum est, apparet, ut cum quęreretur cubi duplicatio transtulerunt quęsitum in aliud, quod hoc consequitur, uidelicet in duarum mediarum inuentionem. & deinceps quęsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duae mediae proportionales inueniantur.*

Magnitudine

Proportione

Cum positio uaria sit, & constructio uariabitur.

Demonstratio perfecta.

Geometricæ rationes necessitatē habent ob subiectam materiam.

Cōclusio duplex.

Lemma.

Casus.

Corollariū.

Instantia.

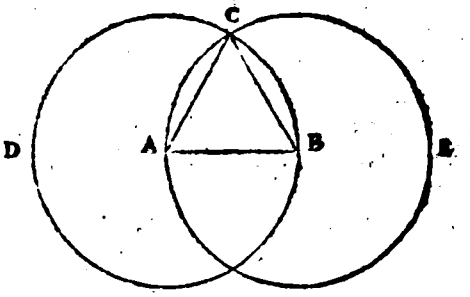
Deductio.

Cubi duplicatio.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū constituere.

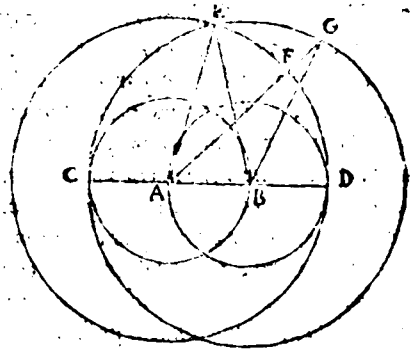
Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. centro quidem A interuallo autem A B circulus describatur B C D. & rursus centro B, interualloq; B A describatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi A B æqualis. rursus quoniā B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A. ostensa est autem et C A æqualis A B. vtraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. quæ autem eidē sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter



ter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est in data recta linea terminata A B, quod facisse oportebat.

P. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quæ ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema esse inuentio apparet: imponit enim nobis trianguli æquilateri ortum machinari. & propositio ex dato; & quæsito constat. datur enim recta linea terminata, quæritur autem quo pacto in ipsa triangulum æquilaterum constituatur. & præcedit quidem datum, sequitur autem quæsitum, vt coniunctim etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest vt in ipsa constituatur triangulum æquilaterum. neque enim non recta existente triangulum constituetur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad vnum punctum, infinitæ autem extremum punctum non est, post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata A B] *& iubes expositionem datum solum explicare, non etiam quæsitum adiungere, post quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulum æquilaterũ constituere] *determinatio autem quoddammodo attentionis est causa, attentiores enim ad demonstrationem nos reddit quæsitum pronunciando, quemadmodum expositio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. post determinationem constructio sequitur* [centro quidem altero rectæ lineæ termino; interuallo autem reliquo circulus describatur, rursusq; centro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius centrum erat, describatur circulus, et à communi sectionis circulorum puncto ad lineæ terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad constructionem vti postulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere. & quouis centro & interuallo circulum describere. vniuersæ enim postulata constructionibus, axiomata vero demonstrationibus vtilitatem afferunt. deinde sequitur demonstratio, quæ ex circuli diffinitione, & illo axiomate. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, concludit tres rectas lineas C A, A B B C inter se esse æquales. vnde colligitur triangulum A B C æquilaterum esse, atque hęc est prima conclusio, quæ expositionem consequitur; post hanc est ipsa vniuersalis.* [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum constitutum est.] *siue enim duplam eius, quæ nunc exposita est, feceris datam, siue triplam, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; eadem constructiones, & demonstrationes congruent. his apposuit particulam* [quod facisse oportebat] *ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit* [quod ostendisse oportebat] *namq; illa factionem alicuius, hęc demonstrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare voluimus, ac perspicua facere, oportet autem illos, qui hęc legent, in reliquis eadem quærere, & quę nam eorum assumantur, quęnamue omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur: & ex quibus principijs vel constructiones, vel demonstrationes pendeant. horum enim perspicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. sed fortasse non inutile erit reliqua eiam triangula constituere. & primum æquicrure. Sit igitur A B, in qua oportet æquicrure triangulum constituere. & describantur circuli, vt in æquilatero, producatur q; A B ex vtraque parte ad C D puncta. æqualis igitur est C B ipsi A D: quare centro quidem B, interuallo autem C B circulus C E describatur. & rursus centro A, & interuallo D A describatur circulus D E. & à puncto E, in quo se se circuli secant ad A B puncta ducantur E A E B: quoniam igitur E A æqualis est ipsi A D, & E B ipsi B C: æqualis autem A D ipsi B C: erit & E A ipsi E B æqualis. sed & maiores sunt quam A B. æquicrure igitur triangulum est A B E, quod facisse oportebat. At propositum sit scalenum constituere triangulum in data recta linea A B, & describantur circuli centris, interuallisq;, ut in superioribus. & sumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F; & ductæ A F producatur ad G, & G B iungatur, quoniam*



Propositio, quæ ex dato & quæsito constat.

Expositio.

Determinatio.

Constructio.

Postulata cõstructionib' utilia

Demonstratio.

Conclusio prima, & particularis.

Cõclusio uniuersalis.

Quod facisse oportebat.

Quod ostendisse oportebat.

Æquicruris trianguli cõstitutio.

Scaleni triãguli constitutio.

quoniam igitur A cẽtrum eſt circuli D E, erit A F ipſi A D aequalis. maior igitur eſt A G quàm A D, hoc eſt quàm G B. centrum enim eſt ipſum B circuli C E. ergo G B eſt aequalis B C, ac propterea G E quàm B A maior. at G A maior quàm G B. tres igitur C B B A A G inęquales ſunt. quare ſcalenum triangulum eſt. tria igitur triangula ſunt conſtituta. ſed hęc diuulgata ſunt.

Aequilaterũ triangulum vnico modo cõſtituitur.

Illud vero in his pulchrum inuenitur. Triangulum ſcilicet aequilaterum vndequaque aequale exiſtens vnico modo conſtitui, Aequicrure autem in duobus tantum lateribus aequalitatem habens, conſtitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus aequalibus minor eſt, vt nos poſuimus,

Aequicrure dupliciter.

vel maior: ſcalenum vero vndique inęquale exiſtens tripliciter conſtitui. vel enim data recta linea maxima eſt, vel minima trium, vel alter a quidem maior, altera vero minor. & licet in vna quaque harum poſitionum vel protendenti, vel contrahenti ſe exercere. nobis autem quae ſunt expoſita ſufficiant. At ſi vniuerſe contemplabimur dicemus, problematum alia quidem ſimpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite conſtitui, & ea, quae ſimpliciter conſtituuntur (vt inquit amphinomus) ordinata appellantur, & quae conſtituuntur multipliciter, media, quae vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortaſſe enim hęc ſatis ſuperq;.

Scalenum tripliciter.

Problemata ordinata. Media. Inordinata.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctũ datæ rectæ lineę ęqualẽ rectam lineã ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipſi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. ducatur à puncto A ad B recta linea A B: et in ipſa conſtituatur triangulum ęquilaterum D A B, producanturq; in directum ipſis D A D B rectæ lineæ A E B F. et centro quidem B, interuallo autem B C circulus C G H deſcribatur. rurſuſq; centro D, et interuallo D G deſcribatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B cẽtrum eſt C G H circuli, erit B C ipſi B G æqualis. & rurſus quoniam D centrum eſt circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A eſt æqualis D B. reliqua igitur A L reliquę B G eſt æqualis. oſtenſa autẽ eſt B C æqualis B G. quare vtraque ipſarum A L B C eſt æqualis ipſi B G. quæ autem eidem æqualia ſunt, et inter ſe ſunt æqualia. ergo & A L eſt æqualis B C. ad datum igitur punctũ A datę rectę lineę B C ęqualis poſita eſt A L. quod facere oportebat.

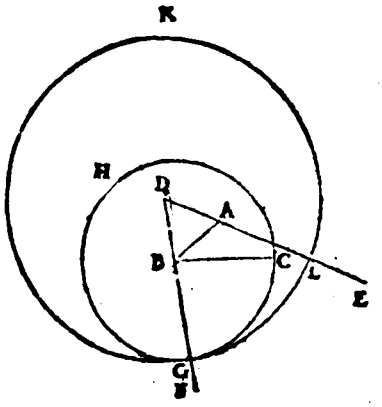
Poſtul. 1.

Prima huius Poſtul. 2. 3.

Diffin. 15.

Com. no. 3.

Com. no. 1.



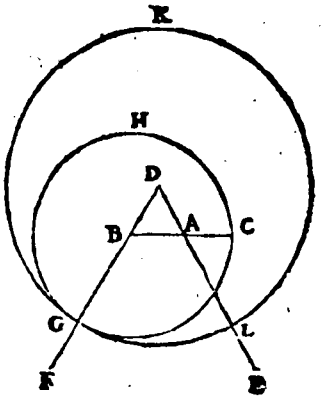
F. C. COMMENTARIVS.

Problematum, & theorematum alia ſunt ſine caſu, alia multos habent caſus.

Problematum, & theorematum alia quidem ſine caſu ſunt, alia vero multos habent caſus. quęcunque igitur eandem vim habent per plures deſcriptiones peruadentem, & poſitiones permutantia eandem demonſtrationis rationem ſeruant, hęc caſum habere dicuntur. quęcunque vero iuxta vnam duntaxat poſitionem, vnamq; conſtructionem procedunt, ea ſunt ſine caſu. ſimpliciter enim caſus circa conſtructionem tum theorematum, tum problematum conſideratur.

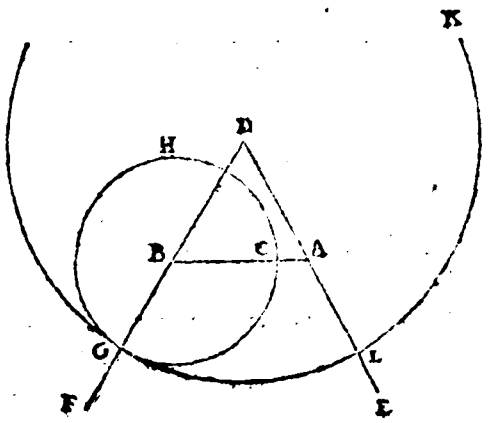
Secundũ problema multos habet caſus.

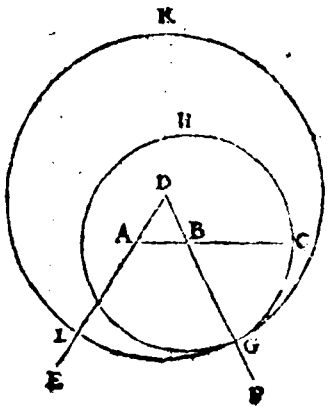
ſecundum igitur problema multos habet caſus. datur autem in ipſo punctum quidem poſitione, eo enim tantum modo dari poteſt; linea vero ſpecie, & magnitudine datur. quęritur autem rectae lineae aequalem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque ſitum fuerit. & conſtat omnino punctum illud in eo-



dem

dem esse plano, in quo & recta linea, non autem in sublimi. omnibus si quidem planorum problematibus, & theorematibus vnum subijci planum existimare oportet. at vero huius problematis casus fieri iuxta puncti dati differentem positionem manifestum est. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipsa. & siquidem in ipsa, vel in altero eius termino, vel intra terminos. si vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectae lineae ducta angulum faciat; vel in directum ipsi sive à fronte, sive à tergo, ita vt producta linea ad dictum punctum pertineat. Euclides autem punctum datum extra rectam lineam sumpsit, atque à lateribus. si enim in ipsa, frustra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quae iam ducta esset. at si in recta linea B C punctum sumatur inter B C, vel in directum ipsi, producta nimirum B C ad A, similiter in ipsa B A constituetur triangulum aequilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonstratio eadem erit. Quòd si loco trianguli aequilateri, aequicruri vti libeat, nihilo minus eadem sequentur. denique si punctum datum fuerit in altero rectae lineae termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, sed sola descriptio vnius circuli satis erit. centro enim dicto termino, in quo est punctum datum, interuallo autem reliquo, si circulus describatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae linae ductae fuerint, problema efficient.



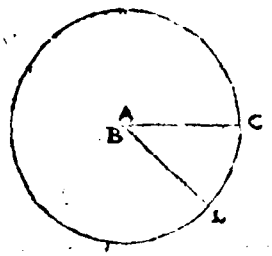


Aequicruri triangulo pro æquilatero uti licet.

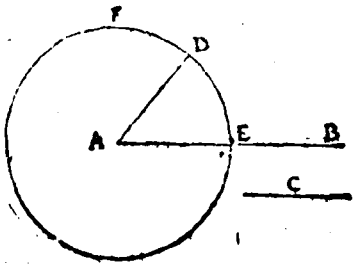
PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abscindere.



Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C; quarum maior sit A B. oportet à maiori A B minori C æqualem rectam lineam abscindere. ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D: & centro quidem A, interuallo autem A D circulus describatur D E F. et quoniam A centrũ est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. sed & C est æqualis AD. vtraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare & A E ipsi C est æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à maiori AB minori C æqualis Abscissa est A E. quod fecisse oportebat.



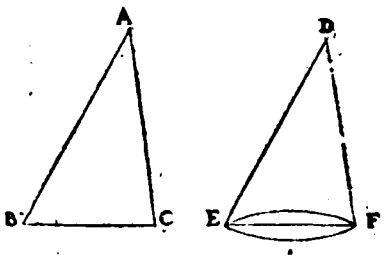
Ex antecedente.

2. post. 3.

Com. no. 1.

THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipſi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico & baſim B C baſi E F æqualem eſſe, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angu-
B lum A B C angulo D E F: et angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipſi D E F, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: et punctum B puncto E congruet; quòd A B ipſi D E ſit æqualis. congruente autem A B ipſi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. quare et C congruet ipſi F: eſt enim rurſus recta linea A C æqualis rectæ D F. ſed et punctum B congruebat puncto E. ergo et baſis B C baſi E F congruet. nã ſi puncto quidẽ B congruẽte ipſi E, C vero ipſi F;
Com. no. 10 baſis B C baſi E F non congruit; duæ rectæ lineæ ſpacium comprehendent: quòd fieri non poteſt. congruet igitur B C baſis baſi E F, & ipſi æqualis erit. quare et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipſi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipſis æquales erunt. videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. ſi igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulũ angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri] *in hac propoſitione duo ſunt, quę dantur, videlicet duorum laterum ęqualitas, & ęqualitas eorum angulorum, qui ęqualibus lateribus continentur. quae quidem proportione dari manifeſtum eſt. quęruntur autem tria, aequalitas baſium, aequalitas triangulorum, & aequalitas reliquorum angulorum. ſed quoniam fieri poteſt vt duo quidem latera duobus lateribus ſint aequalia, theorema autem verum non ſit, quòd non alterum alteri eſt aequale, ſed vtraque ſimul: propterea addidit, aequalia eſſe latera non ſimpliciter, ſed alterum alteri.*

B Triangulo enim A B C congruente ipſi D E F, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: et punctum B puncto E congruet, quòd A B ipſi D E ſit æqualis, et reliqua.

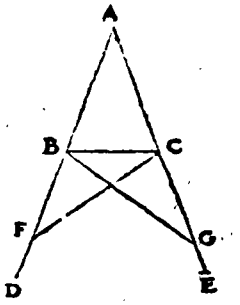
Demonſtratio per ſuperpoſitionẽ figurarũ mathematicis uſitata.

Hic demonſtrationis modus, qui fit per ſuperpoſitionem figurarum pręterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum ſcientiarum peritiſſimo, eſt etiam maximo vſui mathematicis. Archimedes enim eum vſurpat non ſolum in planis figuris, vt in libro de centro granitatis planorum, ſed etiam in ſolidis, vt in libro de conoidibus, & ſphęroidibus.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur indirectum ipſis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B; angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. ſumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iunganturq; F C, G B. Quoniam igitur A F quidem eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis; et triangulum A F C æquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit et reliqua B F reliquæ C G æqualis. oſtenſa eſt autem F C æqualis G B. duæ igitur B F, F C duabus C G G B æquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtq; baſis ipſorum B C communis. ergo et triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B: et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli: oſtenſus autem eſt & F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. æquicrurium igitur triangulorum, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt. quod oſtendere oportebat.

5. Huius.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum alia ſimplicia ſunt, alia compoſita. dico autem ſimplicia quæcunque iuxta poſitiones, & concluſiones individua ſunt, vnum habentia datum, et vnum quæſitum. vt ſi Euclides ita dixiſſet. omne triangulum æquicrure æquales habet, qui ad baſim ſunt, angulos. compoſita verò ſunt, quæ ex pluribus conſtantia, vel poſitiones habet compoſitas, vel concluſiones, vel etiam vtraſque. compoſitorum autem alia ſunt complexa, alia incomplexa. incomplexa ſunt quæcunque in ſimplicia theoremata diuidi non poſſunt, cuiuſmodi eſt quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quæſitum, ſed datum in ſimplicia diuidi minime poteſt, vt plura fiant theoremata: non enim ſi triangula æquales habeant angulos, vel eum duntaxat, qui eſt ad verticem, reliqua contingunt. complexa vero ſunt quæcunque in ſimplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes. fieri enim poteſt, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes; & in parallelogrammis ſimiliter. Omnium autem compoſitorum alia quidem iuxta concluſionem componuntur, ab eadem poſitione ortum habentia; alia vero iuxta poſitiones, & eandem omnibus concluſionem inferunt; & alia iuxta concluſiones, & poſitiones componuntur. Itaque iuxta concluſionem compoſitio eſt in quarto theoremate. in eo enim tria ſunt quæ concluduntur, videlicet baſes æquales eſſe, & triangula æqualia, & reliquos angulos reliquis angulis æquales; quibus æqualia latera ſubtenduntur. iuxta poſitiones compoſitio inuenitur in theoremate, quod triangulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune eſt. iuxta vtraſque autem in illo.

Theoremata ſimplicia.

Theoremata cõpoſita.

Compoſit. Theo. alia, cõplexa, alia incomplexa.

Complexa theoremata.

Theorema compoſitũ iuxta concluſionem.

Theo. cõpo. iuxta poſitiones.

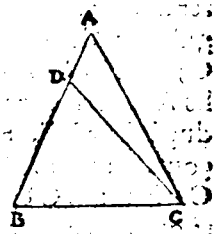
in illo. Diametri circulorum & ellipſium tum ſpacia, tum lineas ſpacia continentes bifariam diuidunt. Rurſus complexorum theorematum alia vniuerſalia ſunt, alia ex particularibus vniuerſale concludunt. omnino autem has compoſitiones geometrae ob breuitatem, ac reſolutiones excogitarunt. multa enim cum incompoſita ſint, non reſoluuntur: compoſita vero ſolum commoditates prębent ad reſolutionem, quae in principia tendit. his igitur conſideratis apparet quintum theorema compoſitum eſſe, tum iuxta datum, tum iuxta queſitum, & vtrumque eorum, quae componuntur perfectum eſt ac verum. quamobrem reſolutio quoquè vera eſt in vtroque. ſiue enim qui ad baſim anguli, ſiue productis aequalibus rectis lineis anguli ſub baſi aequales ſint, aequicrure triangulum erit. Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus. is enim primus dicitur animaduerriſſe omnis aequicruris angulos qui ad baſim eſſe aequales, ac more antiquorum aequales ſimiles appellaſſe.

Complexorum Theorematũ alia, uniuerſalia, alia ex particularibus uniuerſale cõcludunt.

Thales quinti Theorematis inuẽtor.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe ęqualia erunt.



Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe; ſi enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt maior. ſit maior A B; atque à maiori A B minori A C æqualis auferatur D B; et D C iungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A E; communis autem B C: erunt duæ D B B C duabus A C C B æquales, altera alteri; et angulus D B C æqualis angulo A C B. baſis igitur D C baſi A B eſt æqualis; et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus maiori; quod eſt abſurdum. non igitur inæqualis eſt A B ipſi A C. ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod demonſtraſſe oportuit.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Preſens theorema duo hęc in primis oſtendit, theorematum ſcilicet conuerſionem, & deductionem ad id, quod fieri non poteſt. conuertitur enim precedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, demonſtratur. conuerſio autem apud Geometras proprie dicitur, quando concluſiones, & poſitiones viciſſim in theorematibus tranſmutantur, & quod prioris eſt concluſio, in poſteriori poſitio fit: & contra poſitio tanquam concluſio infertur. vt in illo, Aequicrurium triangulorum, qui ad baſim anguli ęquales ſunt. poſitio quidem eſt aequicrure triangulum: concluſio autem triangulorum, qui ad baſim ſunt, aequalitas. Et quorum anguli qui ad baſim aequales; ea aequicrura ſunt, vt in hoc theoremate, in quo poſitio quidem eſt, angulorum, qui ab baſim, aequalitas; concluſio autem aequalitas laterum, quae aequalibus angulis ſubtenduntur. eſt etiam alia conuerſio iuxta quandam duntaxat compoſitorum tranſmutationẽ. Si enim ſit theorema compoſitum à pluribus poſitionibus incipiens, & in concluſionem deſinens, ſumentes concluſionem, & vnam ex poſitionibus, vel etiam plures; concluſionem faciunt aliquã reliquarum poſitionum. & hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera aequalia; & angulus angulo aequalis, qui aequalibus lateribus continetur: cõcluditur aũt baſim baſi aequalẽ eſſe. At in octauo ponuntur duo latera aequalia; baſis q̃ baſi aequalis: & concluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, aequalem eſſe. Cum igitur duae ſint conuerſiones, ea quae proprie ſic dicitur, vniformis eſt, & determinata; altera vero varia, & non in vno, ſed in multis conuertens ob multitudinem poſitionum, quae in compoſitis theorematibus ſunt. Theorematum vero, quae conuertuntur, alia precedentia vocare conſueuerunt; alia conuerſa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipſo ſymptoma demõſtrãt, hoc precedens appellatur: & cum è contrario poſitionem quidem faciunt ſymptoma; concluſionẽ vero genus, cui illud accidit, conuerſum vocatur, vt omne triangulum aequicrure angulos qui

Hoc theorema precedẽti cõuertitur

Conuerſio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Conuerſio alia.

Quartõ octauum conuertitur.

Theorematũ, q̃ cõuertũtur, alia p̃cedentia sũt alia cõuerſa.

ad

ad baſim ſunt, aequales habet: hoc precedens eſt. Omne triangulum duos angulos aequales habẽs, latera quoque aequales angulos ſubtendentia habet aequalia, & eſt aequicrure. hoc cõuerſum eſt. & hęc de cõuerſionibus geometricis dicta ſufficiant. deductiones vero id, quod fieri non põt, in eui dens abſurdum deſinunt, & cuius oppoſitã omnes fatentur. accidit autem ipſarũ alias deſinere in ea, quae cõmunibus notionibus, vel poſtulatis, vel poſitionibus opponũtur; alias in ea, quae prius demonſtratis contradicunt. Nam ſextum hoc theorema, quod accidit fieri non poſſe oſtendit, cum deſtruat communem notionem illam: Omne totum eſt maius ſua parte. octauum vero deſinit quidem in id, quod fieri non poteſt; non tamen deſtruit communem notionem, ſed id quod per ſeptimum theorema oſtenſum eſt. quod enim ſeptimum fieri poſſe negauit, hoc illud affirmans conſe qui oſtendit ijs, qui quęſitum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non poteſt, ſu mens quod cum quęſito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti abſurdo occurat, perq; illud poſitionem deſtruens, cõfirmat id quod à principio querebatur. omnino enim ſcire oportet ma thematicas probationes omnes vel à principijs eſſe, vel ad principia: vt etiã inquit Porphyrius. & quae à principijs ſunt, itidem duplices eſſe. aut enim ex cõmunibus notionibus, & ſola euiden tia per ſe fidem faciente emanant; aut ex ijs, quae ante oſtenſa fuere. Quae vero ad principia aut principia ponunt, aut deſtruunt, quae principia ponunt reſolutiones vocantur; atque his opponun tur compoſitiones. fieri enim poteſt, vt à principijs illis ad quęſitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud eſt, niſi compoſitio. quae vero principia deſtruunt, deductiones ad id, quod fieri non po teſt nuncupantur. aliquid enim eorum, quae conceſſa, manifeſtaq; ſunt deſtruere huius ipſius viae munus eſt: atque eſt hac ſyllogiſmus quidam, ſed non idem, qui in reſolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non poteſt iuxta ſecundum hypotheticarum ratiocinationum modum comple xio eſt. vt ſi triangulorum aequales angulos habentium latera aequales illos angulos ſubtendentia aequalia non ſint; totum parti eſt aequale. atqui hoc fieri non poteſt. triangulorum igitur duos angulos aequales habentium latera quoque aequales angulos ſubtendentia aequalia erunt. Vtitur autem Euclides conuerſione quidem in propoſitione ipſa; vtpote qui concluſionem quinti theoretis, vt datum accipiens, poſitionem illius adiunxit, vt quęſitum; deductione autem ad id, quod fieri non poteſt in conſtructione, & demonſtratione vtitur. hęc ex Proclo.

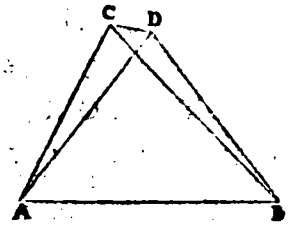
Deductiones ad id, qd fieri non poteſt in euidens abſurdũ deſinunt.

Mathematicæ probationes uel a prĩcipijs sũt uel ad principia. Reſolutiões. Compoſitiones.

Deductiones ad id, ꝙ fieri non poteſt.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. VII.

In eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea A B duabus eiſdem rectis lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri conſtituantur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad eaſdem partes vt ad C D, eoſdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita vt C A quidem ſit æqualis D A, eundem, quem ipſa terminum, habens A; C B autem ſit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D iungatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis A D, erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur eſt A D C angulus angulo D C B. quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rurſus quoniam C B eſt æqualis D B; et angulus C D B æqualis erit angulo D C B: oſtenſus autem eſt ipſo multo maior; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primę rectæ lineæ, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.

5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propoſitionibus, quae ſcientiam pariunt

Propositiones theorematum geometricorũ, arithmeticorũq; utriusmũ affirmationes sunt.

pariunt euenire consueuit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipsarum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Caussa autem est (vt inquit Aristoteles) quod vniuersale affirmans scientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. at vniuersale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientiae plurima affirmantia ostendunt: raro autem negantibus conclusionibus utuntur. hęc Proclus. Theorema uero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipsis. & siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B secat alteram ipsarum A D D E, aut neutra neutram secat. cadat primum extra, secetq; A D ipsam C B, vt apparet in prima figura, & iungatur C D. cui quidem constructioni Euclidis demonstratio conguit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam A C est aequalis ipsi A D,

Theorematis uarij casus.

5. huius.

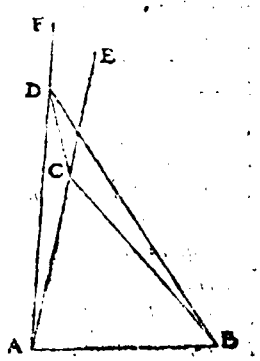
erit angulus A C D angulo A D C aequalis. angulus autem A C D

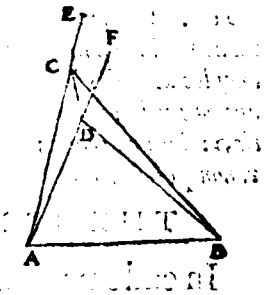
9 com. not.

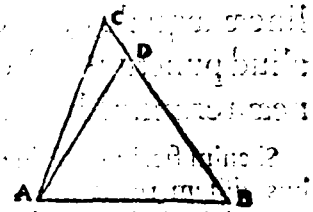
maior est angulo D C E, quippe quòd totum maius sit sua parte. angulus igitur A D C angulo D C B est maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior est angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior sit necesse est. Rursus quoniam B C est aequalis E D; erit & angulus C D B aequalis angulo D C B. atqui ostensus est multo maior; quod fieri non potest. similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea B D secet ipsam A C. cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neutra neutram secet; & producantur rectae linae A C A D in puncta E F. Quoniam

5. huius.

igitur A C est aequalis A D, angulus A C D ad basim angulo A D C aequalis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C sub basi aequalis angulo D C E. Rursus cum B C sit aequalis ipsi B D, angulus B C D angulo B D C est aequalis. sed F D C angulus maior est angulo C D B. quare & D C E ipso D C B est maior, pars scilicet toto; quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse manifesto constat. totum enim parti esset aequale. Videtur autem hoc, vt inquit Proclus, lemma esse octaui Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit vtilitatem. rarissimam igitur ipsius vsum apud geometram inueniemus.





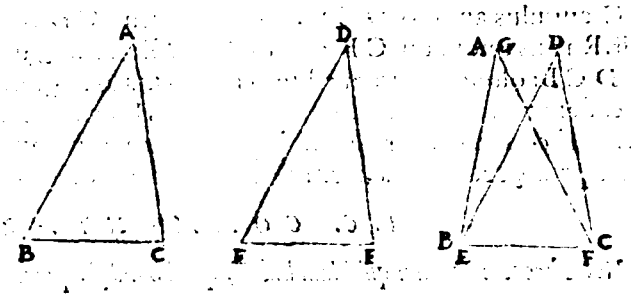


Theorema hoc sequentis lemma esse uidetur.

THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterũ alteri; habeant autem, et basim basi æqualẽ: angulũ quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualẽ habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; vt sit A B quidẽ æquale D E; A C uero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F æqua-



lem. Dico

lem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F ęqualem esse. Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F triangulo; et puncto quidem B posito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, et C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est ęqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent et B A A C ipsis E D D F. si enim basis quidem B C basi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, sed permutantur; vt E G G F: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineę ęquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; vt demonstratum est. non igitur, si basis B C congruit basi E F, non congruent et B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque ęqualibus lateribus contentum angulo ęqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

In antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Octauum Theorema quarti conuersum est, vt supra diximus, non tamen iuxta propriam conuersionem, non enim totam illius positionem, conclusionem, totamq́, conclusionem positionem facit. Sed aliquam quidem ex positionibus, aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematis contexens, vnum quid eorum, quae in illo data fuerunt, ostendit.

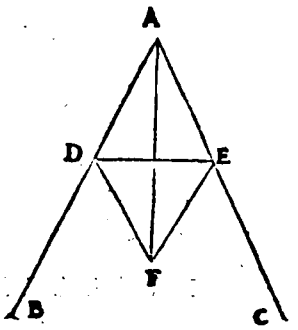
Octauum Theorema quarti conuersum est.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

A

Sit datus angulus rectilineus B A C. Itaque oportet ipsum bifariā secare. Sumatur in linea A B quod vis punctum D; & à linea A C ipsi A D æqualis auferatur A E; iunctaq́; D E constituatur in ea triangulum æquilaterum D E F; & A F iungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales sunt, altera alteri; & basis D F æqualis basi E F. angulus igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam sectus est: quod facere oportebat.



3. huius.
B
1. huius.
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

A

Datum angulum rectilineum bifariam secare] *Angulus hoc loco specie datur, quippe qui rectilineus sit, & non quilibet. namque angulum omnē bifariam secare ex elementari institutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam est, num omnis angulus bifariam secari possit. Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit: in quamlibet enim proportionem secare præsentem constructionem trāsgreditur. verbi gratia in tres, vel quattuor, vel quinque partes aequales. nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus, paucis eorum, quae posterius tradentur, vtentes: acutū vero minime, nisi ad alias lineas, quae mixtae sunt, transcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus. alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirū ijs, quae à græcis τετραγωνίζουσαι dicūtur, nos quadrātes appellare possumus. alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionem mathematicarum. alij denique ex lineis spiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum secuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles sint, præsertim ijs, qui instituuntur, in præsentia omittemus.*

Omnem angulum bifariam secare ex elementari institutione non licet. Rectum angulum trifariam secare possumus, acutū uero minime, nisi ad lineas mixtas transcendamus.

Iunctaq́; D E constituetur in ea triangulum æquilaterum D E F.

B

Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure constitui potest.

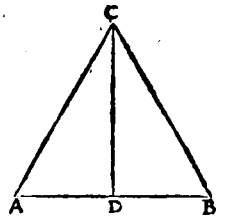
Idem etiam sequetur si loco aequilateri tum in hoc, tum in sequentibus aequicrure triangulum constituamus, & demonstratio eadem erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

1.huius. Ex antecedẽte.

Sit data recta linea terminata A B. oportet ipsam A B bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum A B C; & secetur A C B angulus bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt; altera alteri: et angulus A C D æqualis angulo B C D. basis igitur A D basi B D est æqualis. et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

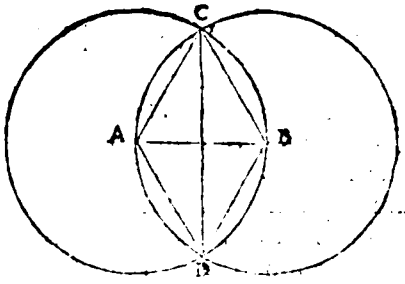


4.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, vbicunque punctum accipiatur, in partes inæquales sit sectio. etenim quae in eisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existente necessario est maior. relinquitur igitur, vt ex vtraque parte finita accipiatur, quae bifariam secari debet. Apollonius vero Perggus rectam lineam terminatam bifariam secat in hūc modum. Sit, inquit, recta linea terminata A B, quam bifariam secare debemus. & centro quidem A, interuallo autem A B circulus describatur: & rursus centro B, & interuallo B A describatur alius circulus; & ducatur C D communes circulorum sectiones coniungens, quae rectam lineam A B bifariam secabit. Iungantur enim A C C B, quae inter se aequales sunt, cum vtraque ipsi A B sit aequalis. communis autem C D; & D A est aequalis D B ob eandem causſam. angulus igitur A C D est aequalis angulo B C D. quare A B per quartum bifariam secta est.

Rectã lineã terminatam qũo Apollonius bifariã secat.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

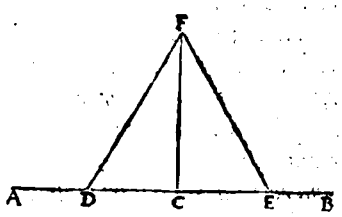
Datæ rectæ lineę à pũcto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea A B, et datum in ipsa pũctum C. oportet à puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quoduis punctum D: ipsiq; C D æqualis ponatur C E, et in D E constituatur triangulũ æquilaterum F D E, et E F iungatur. Dico datæ rectę lineę A B à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri: et basis D F est æqualis basi F E. angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis: et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sũt, angulos æquales inter se fecerit: rectus est vterque æqualium angulorum. ergo vterque ipsorum D C F. F C E est

3.huius. 1.

8.huius.

Diffi.10.



est rectus. datæ igitur rectæ lineę A B à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est F C recta linea. quod fecisse oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

Datæ rectæ lineę à puncto in ipsa dato.] *linea specie datur; punctum vero positione: quod vel in medio erit rectae linae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae linae sumpsit. Quòd si in extremitate altera sumatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo construemus; vel aliter propositum assequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C, & in linea A C sumpto quouis puncto D, ab ipsa C B auferatur C E aequalis ipsi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus describatur. Rursusq; centro E, & interuallo E D alius circulus describatur: & à puncto F, in quo circuli se inuicem secant, ducatur F C. Dico eam ad rectos angulos esse. si enim iungatur F D, F E aequales inter se erunt. sed & D C C E aequales; & cõmunis F C. Quare ex octauo anguli qui ad C etiam inter se aequales sint necesse est. Si vero punctum in extremitate rectae lineae sumatur, ita faciendum censet Proclus. Sit recta linea A B, datumq; punctum A, & sumatur in A B quod vis punctum C, à quo ipsi A B, quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipsi A C aequalis abscindatur C D. angulus vero qui est ad C per rectam lineam C F bifariam secetur: atque à puncto D ipsi E C ad rectos angulos ducta occurat rectae lineae C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim D C est aequalis C A, communis autem C F, & angulos aequales continent, quòd angulus ad C bifariam sectus est: erit & D F ipsi F A aequalis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis est angulo ad D. angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat.*

* Problematis casus.

Quõ Apollonius; rectã lineam ad rectos angulos ducit.

3. huius.

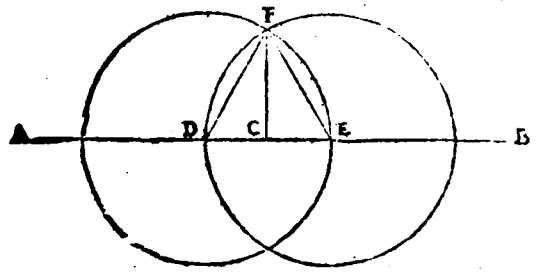
Postul. 3.

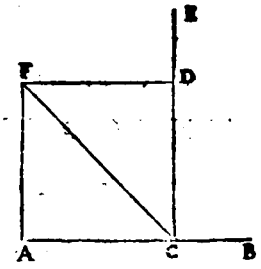
Quãdo pũctum in extremitate lineæ sumitur quo faciẽdum sit.

3. huius.

9. huius.

4. huius.



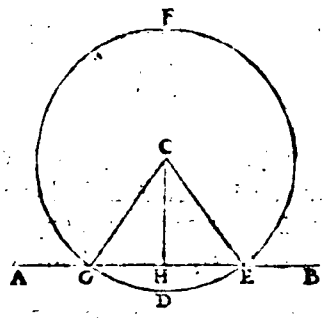


PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato pũcto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineę quod vis punctum D: et centro quidem C, interuallo autem C D circulus describatur E F G: et E G in H bifariam secetur: iunganturq; C G C H C E. Dico super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duę G H H C, duabus E H H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est æqualis basi C E.

Postul. 3. 10. huius.



D angulus

8.huius. angulus igitur C H G angulo E H C eſt æqualis; & ſunt deinceps. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit; rectus eſt vterque æqualium angulorum; et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit. ergo ſuper datam rectam lineam infinitam A B à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt C H, quod facere oportebat.

Diffi. 10.

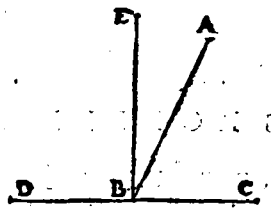
F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit. Perpendiculare antiqui gnomonem appellarunt. Perpendicularis plana, & ſolida.

Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indagauit, vtile ipſum ad aſtrologiam exiſtimans. perpendicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos eſt. quae autem ad angulos rectos, eadem eſt perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum ſubiecto eadem ſit, quemadmodum et gnomon. Rurſus perpendicularis duplex eſt, alia plana, alia ſolida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in ſubiecto plano ſit, plana appellatur: quando autem punctum ſit ſublime, atque extra ſubiectum planum, ſolida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, ſolida vero ad planum. Quare neceſſarium eſt illam non ad vnam rectam lineam angulos rectos facere, ſed ad omnes, quae in ſubiecto exiſtentes plano ipſam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia conſiſtant, ſermo procedat. At in linea quae eſt ad angulos rectos quoniam punctum in ipſa ſumptum eſt, nulla erit infinitatis neceſſitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipſam ſtatuatur. ſi enim non eſſet infinita, poterat ita punctum ſumi, vt extra quidem rectam lineam eſſet, indirectum autem ipſi, adeo vt protracta recta linea in ipſum incideret, & non fieret problema. Adde, quod niſi eſſet infinita, poſſemus etiam punctum ita ſumere, vt ſi duceretur perpendicularis, non in ipſam, ſed extra ipſam neceſſario caderet. His igitur de causſis recta linea, ad quam perpendicularis ducēda eſt, infinita ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

* Cum recta linea ſuper rectam cõſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.



Recta enim linea quædam A B ſuper rectam C D conſiſtens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos; vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales. ſi enim C B A eſt æqualis ipſi A B D, duo recti ſunt; ſin minus, ducatur à puncto B ipſi C D ad rectos angulos B E. anguli igitur C B E E B D ſunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E eſt æqualis, communis apponatur E B D. ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D ſunt æquales. Rurſus quoniam D B A angulus eſt æqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C æquales ſunt. At oſtenſum eſt angulos quoque C B E E B D eiſdem tribus æquales eſſe: quæ vero eidem ſunt æqualia, et inter ſe æqualia ſunt. ergo et anguli C B E E B D ipſis D B A A B C ſunt æquales. ſuntq; C B E E B D duo recti. anguli igitur D B A A B C duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet, quod oportebat demonſtrare.

diffi. 10.

Axioma. 1.

F. C. COMMENTARIVS.

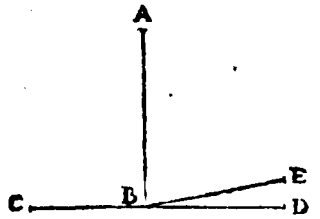
* Cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit.] *Animaduertendum eſt, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propoſitione maximam diligentiam adhibuiſſe. non enim*

enim ſimpliciter dixit. Omnis recta linea ſuper rectã lineã conſiſtẽs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, ſed ſ. angulos fecerit. quid enim ſi in rectae lineae extremitate cõſiſtens vnum efficit angulum? accidit ne quandoque hunc duobus rectis aequalem eſſe? hoc certe fieri non poteſt. Omnis ſi quidem rectilineus angulus duobus rectis eſt minor, quemadmodum omnis ſolidus minor eſt quattuor rectis. Quòd ſi angulum, qui maxime obtuſus eſſe videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorum menſuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam ſic conſiſtere, vt angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duobus rectis eſt minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineæ non ad eaſdem partes poſitę, angulos qui deinceps ſunt, duobus rectis ęquales fecerint; ipſę rectæ lineæ indirectum ſibi in uicem erunt.



Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in ea B, duę rectę lineę B C B D non ad eaſdem partes poſitę angulos, qui deinceps ſunt, A B C A B D duobus rectis ęquales faciant. Dico B D ipſi C B indirectũ eſſe. ſi enim B D non eſt in directũ ipſi C B, ſit ipſi C B in directum B E. Quoniã igitur recta linea A B ſuper rectam C B E conſiſtit; anguli A B C A B E duobus rectis ſunt ęquales. Sed et anguli A B C A B D ſunt ęquales duobus rectis. anguli igitur C B A A B E ipſis C B A A B D ęquales erunt. cõis auferatur A B C. ergo reliquus A B E reliquo A B D eſt ęqualis, minor maiori, quod fieri non põt. non igitur B E eſt indirectũ ipſi B C. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe, prętęr B D. ergo C B ipſi B D indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineę non ad eaſdem partes poſitę angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis ęquales fecerint, ipſę rectę lineę indirectum ſibi inuicem erunt. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

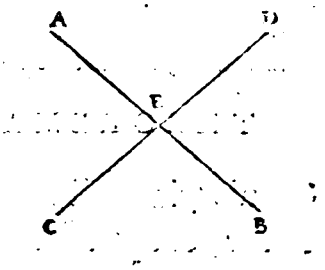
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema prȩcedentis conuerſum eſt, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, oſtẽditur. ſic enim conuerſa theorematum oſtendi debent, vt inquit Proclus.

Conuerſa theoremata per deductionẽ ad id, qđ fieri nõ põt, oſtendũtur.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duę rectę lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos qui ad uerticẽ ſunt, inter ſe ęquales efficient.



Duæ enim rectæ lineæ A B C D ſe inuicem ſecent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem eſſe. Quoniam enim recta linea A E ſuper rectã C D conſiſtens angulos facit C E A A E D; erunt hi duobus rectis æquales. Rurſus quoniam recta linea D C ſuper rectam A B cõſiſtens facit angulos A E D D E B; erunt A E D D E B anguli æquales duobus rectis. Oſtenſum autẽ eſt angulos quoque C E A A E D duobus rectis eſſe æquales. anguli igitur C E A A E D angulis A E D D E B æquales ſunt. communis auferatur A E D. ergo reliquus C E A reliquo B E D eſt

13. huius.

3. com. not.

æqualis. Simili ratione, & anguli C E B D E A æquales oſtendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

✻ Ex hoc manifeſte conſtat rectas lineas quot quot ſe inuicem ſecant, facere angulos ad ſectionem quattuor rectis æquales.

F. C. COMMENTARIVS.

Anguli deinceps.
Anguli ad uerticem.

Anguli qui deinceps ſunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum ſectione fit; illorũ uero ex altera tãtũ ab altera ſecta. Nã ſi recta linea ipſa inſecta manẽs, alteramq; ſuo extremo ſecãs, duos angulos fecerit; hos deinceps angulos vocamus. Si uero duae rectae linae, ſe inuicẽ ſecuerint, anguli ad uerticẽ efficiuntur, ſic dicti, quòd vertices in eodẽ puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipſorum ſunt puncta, ad quae plana dum contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema oſtendit duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, angulos ad verticem aequales eſſe: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonſtratum; in quo deeſt conſtructio, vtpote minus neceſſaria: demonſtratio enim expoſitione contenta conſtructione aliqua non indiget.

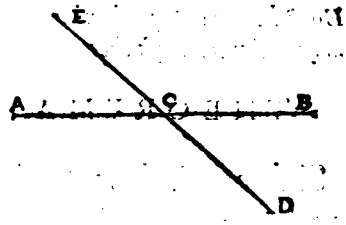
Angulorum uertices.
Theorema a Thalete inuentũ.

✻ Corollaria quæ nã ſint in elementari inſtitutione.

Ex hoc manifeſtum eſt.] *Corollarium eſt quod ex precedenti demõſtratione apparet. corollaria enim in elementari inſtitutione ſunt, vt inquit Proclus, quae ſimul cum aliorum demonſtrationibus apparent, ipſa vero non precipue quaeruntur: veluti id quod in preſentia propoſitum eſt, nam querebatur quidem ſi duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, anguli ad verticem æquales eſſent. dum autem hoc oſtenditur, ſimul etiam oſtẽſum eſt, quattuor, qui ſiunt, angulos, quattuor rectis aequales eſſe. Corollarium igitur eſt theorema, quod ex alterius problematis, uel theorematis demonſtratione ex improuiſo emergit. nam veluti caſu quodam in corollaria incidere uidemur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam quærentibus obuiam ſe ſe offerunt. Corollariorum uero alia geometrica ſunt, alia arithmetica, & rurſus alia problematibus conſequentia ſunt, alia theorematibus; & alia directis oſtenſionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non poteſt, oſtendunt. Huius autem theorematis conuerſum à Proclo ita demonſtratur.*

Corollaria geometrica, et arithmet. Huius theorematis conuerſũ a Proclo demonſtratur.

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ indirectũ ſibi inuicem erunt.

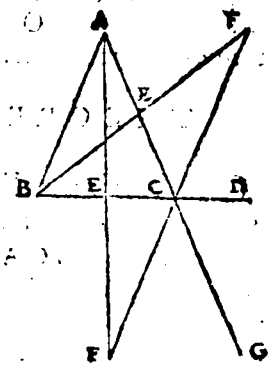


Sit enim recta linea quædam A B, & in ipſa quod vis punctum C; & ad C duae rectae lineae C D C E non ad eaſdẽ partes ſumptae, quae angulos A C D B C E aequales faciant. Dico ipſas C D C E in directum ſibi ipſis eſſe. Quoniam enim recta linea C D ſuper rectam lineã A B inſiſtit, duos angulos duobus rectis efficit aequales; 13. huius. *videlicet D C A D C B. Sed angulus D C A angulo B C E eſt aequalis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis aequales ſunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam B C duae rectae lineae non ſequenter C D C E non ad eaſdem partes ſumptae, angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt: indirectum ſibi inuicem erunt.* 14. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & oppoſito eſt maior.

Sit triangulum A B C, et vnum ipsius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D vtroque interiore, et opposito, videlicet C B A et B A C maiorem esse. Secetur enim A C bifariam in E, et iuncta B E producatur ad F; ponaturq; ipsi B E equalis E F. iungatur preterea F C, et ducta A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est equalis E C, B E vero ipsi E F, due A E E B duabus C E E F equales sunt, altera alteri: et angulos A E B angulo F E C est equalis, ad verticem enim sunt. basis igitur A B equalis est basi F C; et A B E triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis equales, alter alteri, quibus equalia latera subtenduntur. ergo angulus B A E est equalis angulo E C F. Sed E C D angulus maior est ipso E C F. maior igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam secta, ostendetur etiã B C G angulus, hoc est A C D angulo A B C maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore et opposito maior est. quod oportebat demonstrare.

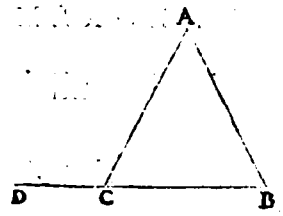


4.h uius.

THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duos angulos quomodocumque sumptos duobus rectis minores esse. producatur enim B C ad D. et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D maior est interiore, et opposito A B C: cõmunis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B angulis A B C B C A maiores sunt. Sed A C D A C B sunt equales duobus rectis. ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demõstrabimus angulos quoque B A C A C B, itemq; C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.



13.hũius.

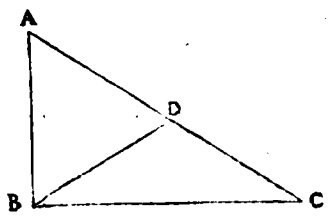
F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, indeterminate ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo; tres enim ipsius anguli duobus rectis aequales sunt. quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quantus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B maius. Dico et A B C angulum angulo B C A maiorem esse. Quoniam enim A C maior est, quàm A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; et B D iungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is maior interiore, et opposito



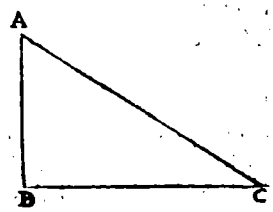
16.huius.

5.huius. posito D C B. Sed A D B æqualis est ipsi A B D, quòd et latus A B lateri A D sit æquale. maior igitur est et A B D angulus angulo A C B. quare A B C ipso A C B multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIX.

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

Sit triangulum A B C maiorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B maius esse. Si enim non est maius, vel A C est æquale ipsi A B, vel ipso minus. æquale igitur non est, nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset. non est autem. non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus. esset enim et angulus A B C angulo A C B minor. atqui non est. non igitur A C minus est ipso A B. ostensum autem est neque æquale esse. ergo A C ipso A B est maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc precedentis theorematis conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

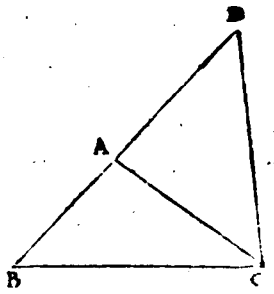
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duo latera reliquo maiora esse, quomodocũque sumpta: videlicet latera quidem B A A C maiora latere B C; latera vero A B B C maiora latere A C: et latera B C C A maiora ipso A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturq; ipsi C A æqualis A D; et D C iungatur. Quoniam igitur D A est

5.huius. æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis. Sed B C D angulus maior est angulo A C D. angulus igitur B C D angulo A D C est maior. Et quoniam triangulum est D C B, habens B C D angu-

Ex antecedente. lum maiorem angulo B D C: maiorem autem angulum maius latus subtendit: erit latus D B latere B C maius. Sed D B est æquale ipsis B A A C. quare latera B A A C ipso B C maiora sũt. Similiter ostendemus et latera quidem A B B C maiora esse latere C A: latera vero B C C A ipso A B maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema Epicurei impugnarũt tamquam. Asino manifestum.

Præsens theorema, vt scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum Asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. Asino autem manifestum esse, ostendunt ex eo, quòd herba in altero laterũ extremo posita, Asinus pabulũ expetens, vnũ latus peragrat, & non duo. Aduersus hec dicendum. Theorema sensu quidem manifestum esse, non autem & scientiam gignente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque sensui in-

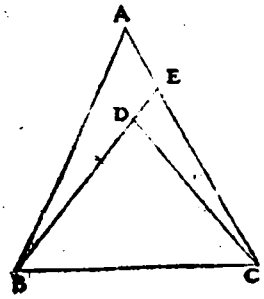
dubitatum

dubitatum eſt, ſed quo nam pacto calefaciat, conuincere ſcientiae officium eſt. Sic igitur duo trianguli latera reliquo eſſe maiora, ſenſui manifeſtum, quo aũt hoc fiat dicere ad ſciẽtiã pertinet. Alij aliter hoc theorema demonſtrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclũ.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duę rectæ lineæ intra conſtituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim A B C in vno latere B C à terminis B C duæ rectæ lineæ intra conſtituantur B D D C. Dico B D D C reliquis duobus trianguli lateribus B A A C minores quidem eſſe, maiorem vero continere angulum B D C angulo B A C. producatur enim B D ad E. Et quoniam omnis triãguli duo latera reliquo ſunt maiora, erunt trianguli A B E duo latera B A A E maiora latere B E. communis apponatur E C. ergo B A A C ipſis B E E C maiora ſunt. Rurſus quoniam C E D triãguli duo latera C E E D ſunt maiora latere C D, communis apponatur D B. quare C E E B ipſis C D D B ſunt maiora. Sed oſtenſum eſt B A A C maiora eſſe B E E C. multo igitur B A A C ipſis B D D C maiora ſunt. Rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore, et oppoſito eſt maior: erit trianguli C D E exterior angulus B D C maior ipſo C E D. Eadem ratione et trianguli A B E exterior angulus C E B ipſo B A C eſt maior. Sed angulus B D C oſtenſus eſt maior angulo C E B. multo igitur B D C angulus angulo B A C maior erit. Quare ſi à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonſtrare oportebat.



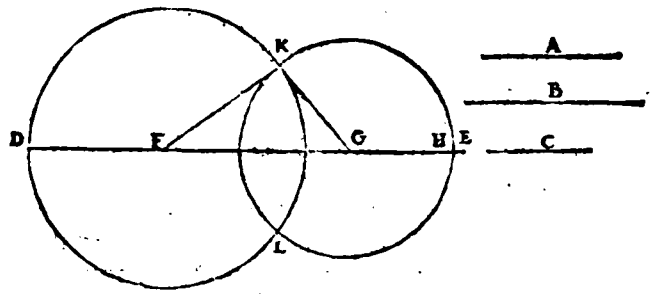
Ex antecedẽte.

15. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quę tribus rectis lineis datis ęquales ſint, triangulum conſtituere. oportet autem duas reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora ſunt, quomodocumque ſumpta. *

Sint tres datæ rectę lineæ A B C, quarum duæ reliqua maiores ſint, quomodocũque ſumptæ, vt ſcilicet A B quidem ſint maiores quàm C, A C vero maiores quàm B, et præterea B C maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis ęqualibus ipſis A B C triãgulũ cõſtituere. ex ponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipſi quidem A æqualis D F, ipſi vero B æqualis F G, et ipſi C æqualis G H: et centro



3.postul. centro F, interuallo autem F D circulus describatur D K L. Rursusq; centro G, et interuallo G H alius circulus K L H describatur, et iungantur K F K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum K F G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L circuli; erit F D æqualis F K. Sed F D est æqualis A. ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, erit G H æqualis G K. Sed G K est æqualis C. ergo et G H ipsi C æqualis erit. est autem et F G æqualis B. tres igitur rectæ lineæ K F F G G K tribus A B C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis K F F G G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est K F G. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematũ alia indeterminata, alia terminata.

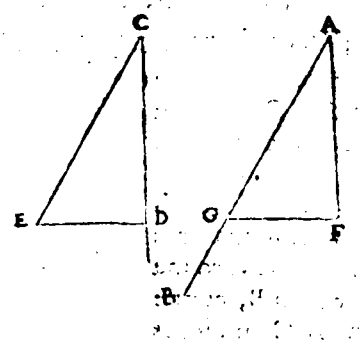
Præsens problema determinatum est. problematum enim quemadmodum & theorematum, alia quidem indeterminata sunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo simpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quae tribus datis rectis lineis aequales sint, triangulum constituere. problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duae reliquae sint maiores, quomodocunque sumptae, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim duplex est, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quae post expositionem ponitur, significans quid sit illud, quod quæritur; altera uero, quae propositionem vniuersalem esse prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit, vt hoc loco, [oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta] *& in sexto libro*] Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrãmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo, quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.] *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falsum diuisio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest. Proclus in commentarijs citat Euclidis verba, quae à verbis huiusce demonstrationis discrepant, vt luce clarius sit Euclidis demonstrationes aliquibus in locis à Theone immutatas esse, & eas, quas nunc habemus Theonis esse, non Euclidis.*

Theorematum diuisio iuxta uerum & falsum.

Problematũ diuisio iuxta id, quod fieri, & qd non fieri potest.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.



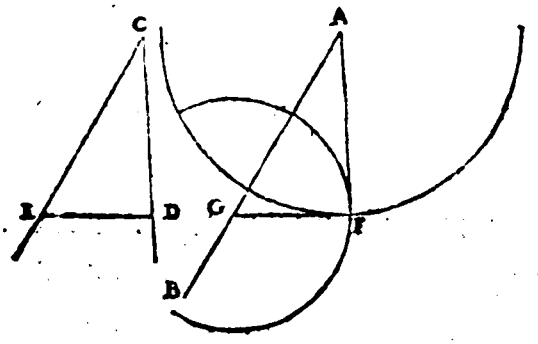
Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsa punctum A, et datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumãtur in vtraque ipsarum C D C E quęuis puncta D E, iungaturq; D E, et ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus C D D E E C triangulum constituatur A F G, ita ut C D sit æqualis A F, et C E ipsi A G, et D E ipsi F G. Itaque quoniam duę D C C E duabus F A A G æquales sunt, altera alteri; et basis D E est æqualis basi F G: erit et angulus D C E angulo F A G æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E, æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. quod facere oportebat.

8.huius.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Et ex tribus rectis lineis, quę æquales ſint tribus CD DE EC triangulum conſtituatur AFG.] *A recta linea A B abſcindatur A G aequalis ipſi C E: & centro quidem A, interuallo autem ipſi C D aequali deſcribatur circulus: & rurſus centro G & interuallo aequali ipſi E D alius circulus deſcribatur, vt circuli ſe inuicem in puncto F ſecent: & iungantur A F F G. Dico iam factum eſſe, quod proponebatur. & demonſtratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inuentum eſſe tradit Eudemus.*



* 3. Huius.

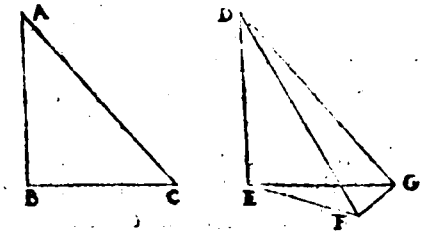
3. Poſtul.

Hoc theorema ab Oenopide inuentum eſt.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et baſim baſi maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B æquale lateri D E; latus vero A C æquale D F: & angulus B A C angulo E D F ſit maior. Dico et baſim B C baſi E F maiorem eſſe. Quoniam enim angulus B A C maior eſt angulo E D F, conſtituatur ad rectam lineam D E, et ad punctũ in ea D, angulo B A C æqualis angulus E D G, ponaturq; alterutri ipſarum A C D F æqualis D G, et G E F G iungantur. Itaque quoniam A B quidem eſt æqualis D E, A C vero ipſi D G; duæ B A A C duabus E D D G æquales ſunt, altera alteri; et angulus B A C eſt æqualis angulo E D G. ergo baſis B C baſi E G eſt æqualis. Rurſus quoniam æqualis eſt D G ipſi D F; et angulus D F G angulo D G F: erit D F G angulus angulo E G F maior. multo igitur maior eſt E F G angulus ipſo E G F. Et quoniam triangulum eſt E F G, angulum E F G maiorem habens angulo E G F; maiori autem angulo maius latus ſubtenditur; erit et latus E G latere E F maius. Sed E G latus eſt æquale lateri B C. ergo et B C ipſo E F maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et baſim baſi maiorem habebunt. quod oportebat demonſtrare.



Ex antecedente.

*

4. huius.

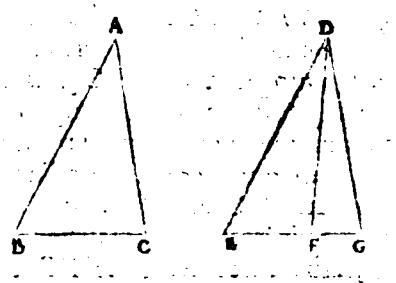
5. huius.

19. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema quarto oppoſitum eſt, illud enim angulos qui ſunt ad vertices triangulorũ equales ponit, hoc inæquales; illud baſes aequales, hoc inæquales eſſe demonſtrat.

Et G E F G iungantur] *rectalinea E G, vel cadit ſupra E F, vel in ipſam, vel infra ipſam. Euclides vt ſupra cadentẽ accepit. Quòd ſi in ipſam cadat, vt in ſecunda figura, idẽ oſtendetur. Sunt enim duę B A A C duabus E D D G aequales: & cũ aequales contineant angulos, & baſis B C baſi E G aequalis erit. Sed E G*



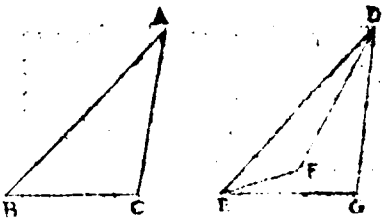
Hoc theorema quarto oppoſitum.

*

4. Huius.

est maior, quàm E F, vt totum est maius, quàm ipsius pars. ergo & B C quàm E F est maior. Cadat postremo insra ipsam. ut in tertia figura. Similiter demonstrabimus basim B C basi E G aequalem esse. Cum aũt duae E F F D intra triangulum E D G constitutae minores sint, quàm duae E G G D; sitq́, D G ipsi D F aequalis; erit reliqua E G maior, quàm reliqua E F. Sed B C est æqualis E G. ergo et B C quàm E F maior sit necesse est.

21. huius.



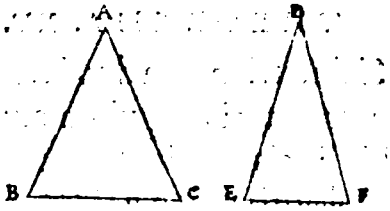
THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F: basis autem B C basi E F sit maior. Dico et angulum B A C angulo E D F maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis est, vel minor. æqualis autẽ non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F æqualis. non est aũt. nõ igitur æqualis est B A C angulus angulo E D F. sed neque minor. minor enim esset et basis B C basi E F. atqui nõ est. non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. ostensum autẽ est, neque esse æqualem. ergo angulus B A C angulo E D F necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. quod demonstrare oportebat.

4. huius.

Ex antecedenti.



F. C. COMMENTARIVS.

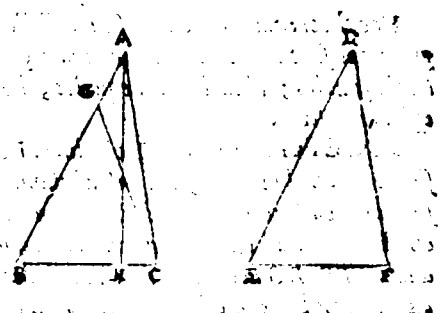
Hoc theorema octauo quidem oppositum est, præcedentis vero conuersum, quod alij aliter demonstrarunt, vt tradit Proclus.

Hoc theorema octauo oppositũ, est et præcedentis conuersum.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeãt, alterum alteri, vnumq́; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis D E F E F D æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem A B C æqualem angulo D E F; angulum vero B C A angulo E F D. habeant autem et vnum latus vni lateri æquale, et primum quod æqualibus adiacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterũ alteri, latus scilicet A B lateri D E; et latus A C



ipsi DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, vna ipsarum maior est. Sit maior AB, ponaturq; GB æqualis DE; et GC iungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: et angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est æqualis: et GBC triangulũ triãgulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare et BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor maiori, quod fieri nõ pot. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem et BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, et angulus ABC æqualis angulo DEF. basis igitur AC basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, vt AB ipsi DE. Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, vna ipsarum maior est. Sit maior BC, si fieri potest; ponaturq; BH æqualis EF, et AH iungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo basis AH basi DF est æqualis: et ABH triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus BHA angulo EFD. Sed EFD est æqualis angulo BCA. ergo et BHA angulus angulo BCA est æqualis. Trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori; et opposito BCA, quod fieri non potest. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem et AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: angulosq; æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, et ABC triangulum æquale triangulo DEF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonstrare.

4. huius.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & aequalitate, vel inæqualitate quicunque in elementari institutione dici poterant, ex superioribus didicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; præcipue vero de parallelogrammis: simul cum horum contemplatione de trapezijs differens. diuiditur enim quadrilaterum, vt superius dictum est in parallelogrammum, & trapezium: rursusq; parallelogrammum in alias species: & trapezium similiter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob æqualitatis participationem ordinatum est: trapezium vero neque eundem, neque similem seruat ordinem: non immerito præcipue quidem de parallelogrammis sermonem habet; simul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim sectione ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifestum. Sed quoniam rursus fieri non potest, vt de parallelogrammorum, vel constructione, vel aequalitate aliquid dicatur absque parallelarum consideratione; vt enim ex ipso quoque nomine apparet parallelogrammum est, quod à parallelis rectis lineis è regione positis describitur: necessario à parallelis doctrinae initium facit. paulum vero progressus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vsus theoremate medio inter harum, illorumq; institutionem elementarem, quod quidem videtur symptoma quoddam, quod parallelis ineſt, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim est. [*Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.*] *nam in hoc consideratur quidem symptoma quoddam aequalibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera æqualia, et parallela è regione posita habet. Parallelarum*

Hoc theorema ad Thaletem refertur.

Parallelogrãmum ordinatum est, trapeziũ uero minime.

Parallelogrãmum est q̃ a parallelis describitur.

Parallelogrãmorum ortus.

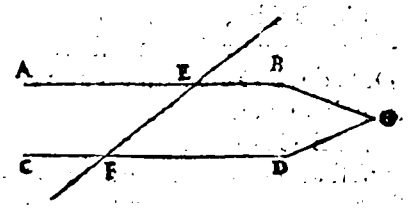
Parallelis tria per ſe in ſunt.

igitur ſermonem neceſſario preaſſumptum eſſe, ex his conſtat. Tria autem aſſumere oportet, quæ parallelis per ſe inſunt, ipſaſq́ explicant: & cum ipſis cõuertuntur. neque ſolum tria ſimul, ſed & vnum quodque ſeorſum ab aliis ſumptum. quorum vnum hoc eſt. recta linea parallelas ſecante, alternos angulos inter ſe aequales eſſe: aliud, recta linea parallelas ſecante angulos interiores duobus rectis eſſe aequales. reliquum vero, recta linea parallelas ſecante, angulum exteriorem interiori; & oppoſito aequalem eſſe. horum autem ſymptomatum vnumquodque demonſtratum parallelas eſſe rectas lineas affirmare poteſt. Hoc modo & alij mathematici de lineis differere conſueuerunt, vniuſcuiuſque ſpeciei ſymptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid ſymptoma ſit oſtendit: & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadrantibus. & Perſeus in ſpiricis. nam poſt earum ortum, quod ipſis per ſe, & quatenus ipſum ineſt, aſſumptum, conſtitutam nobis formam ab omnibus alijs diſtinguit. Eodem igitur modo, & elementorum inſtitutor parallelarum ſymptomata primum ineſtigat. Hęc ex Proclo.

Apollonius de conicis lineis aget.
Nicomedes de cõchoid.
Hippias de quadrãtibus
Perſeus de ſpiricis.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

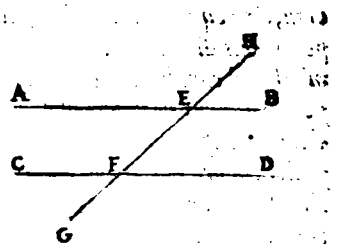


In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter ſe faciat. Dico rectam lineam A B ipſi C D parallelam eſſe. Si enim non eſt parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C. producantur, conueniantq́; ad partes B D in pũcto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus A E F maior eſt interiore et oppoſito E F G. Sed et æqualis. quod fieri nõ põt. non igitur A B C D productę ad partes B D conuenient. Similiter demonſtrabitur neque conuenire ad partes A C. quę vero in neutras partes conueniunt, parallelę inter ſe ſunt. parallela igitur eſt A B ipſi C D. Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelę inter ſe erunt rectę lineę. quod oſtendere oportebat.

16. huius.

diff. 35.

F. C. COMMENTARIVS.



Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos] *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad eaſdem partes, neque deinceps ſunt, ſed ab incidente linea diſtinguuntur, cum vtrique intra parallelas exiſtant. differunt autem quòd alter ſurſum alter deorſum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis A B, & C D exiſtentibus, incidenteq́, in ipſas recta linea E F, angulos A E F D F E; itemq́, angulos C F E B E F alternos eſſe dicit. vt pote alterno, commutatõue ordine iuxta poſitionem ſe habentes. Illud autem ſciendum eſt, cum talis ſit rectarum linearum ſitus, omnia ſymptomata ex diuiſione ſex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omiſit. vel enim ad eaſdem partes angulos ſumemus, vel non ad eaſdem: & ſi ad eaſdem, vel vtroſque intra rectas lineas, quas parallelas oſtendit, vel vtroſque extra, vel vnum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad eaſdem partes, ſimiliter vel vtroſque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rurſus rectae lineae A B C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G pũcta producatur. Si igitur ad eaſdẽ partes angulos accipias, vel vtroſq; intra ponas, vt B E F, & E F D, vel ipſos, A E F, & E F C, vel vtroſq; extra, vt H E B D F G, vel H E A C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt H E B E F D, vel G F D F E B; vel H E A E F C, vel G F C A E F,*

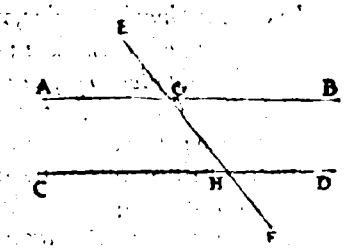
quadrupliciter

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad eaſdem partes, vel vtroſque intra, vt A E F E F D, vel C F E F E B: vel vtroſque extra, vt A E H D F G, vel H E B C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rurſus quadrupliciter, vel enim A E H E F D, vel H E B E F D, vel G F C F E B, vel G F D F E A. Cùm igitur anguli ſex modis ſumatur, Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, vnam quidem ex iis angulis, qui non ad eaſdem ſunt partes, et qui intra tantum ſumuntur; quos alternos appellauit; duas vero ex iis, qui ad eaſdem partes vel vtrique intra ſumuntur, quos duobus rectis aequales eſſe dicit: vel vnus quidem extra, alter vero intra ſumitur, quos dicit inter ſe aequales eſſe. Tres vero reliquas omiſit, vt pote quos eadem omnino conſequatur. Sint enim ad eaſdem partes vtrique extra anguli H E B D F G. Dico hos duobus rectis aequales eſſe. angulus enim D F E angulo H E B, & angulus B E F angulo D F G eſt aequalis. Si autem anguli B E F E F D duobus rectis ſint aequales, anguli etiam D F G H E B duobus rectis aequales erunt. Sint rurſus non ad eaſdem partes anguli A E H E F D, quorum alter ſit extra, alter intra; ipſi quoque duobus rectis ſunt aequales. Quoniam enim angulus A E H aequalis eſt angulo B E F, anguli vero B E F E F D duobus rectis aequales ſunt; erunt & anguli A E H E F D duobus rectis aequales. Sint poſtremo non ad eaſdem partes vtrique extra anguli A E H D F G. Dico eos etiam inter ſe aequales eſſe. Nam cùm angulus A E H aequalis ſit angulo B E F, & angulus D F G angulo E F C, ſintq; anguli B E F E F C alterni inter ſe aequales: anguli etiam A E H D F G inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.

Cum anguli ſex modis ſumantur. Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, reliquas omiſit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulũ interiori, et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erũt inter ſe rectæ lineæ.



In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori et oppoſito G H D æqualem faciat; vel interiores, et ad eaſdem partes B G H G H D, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam eſſe. Quoniam enim E G B angulus æqualis eſt angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H, erit et angulus A G H angulo G H D æqualis: et ſunt alterni. parallela igitur eſt A B ipſi C D. Rurſus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis ſunt æquales, et ſunt A G H B G H æquales duobus rectis: erunt anguli A G H B G H angulis B G H G H D æquales. communis auferatur B G H. reliquus igitur A G H eſt æqualis reliquo G H D: et ſunt alterni. ergo A B ipſi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. quod demonſtrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente. 15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema à Ptolemæo aliter demonſtratur, vt tradit Proclus.

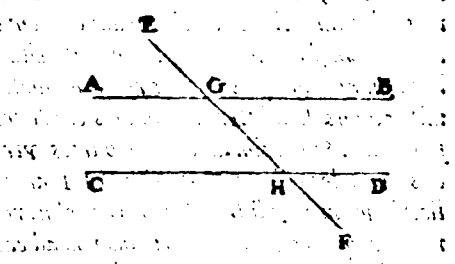
Theorema a Ptolemæo aliter demõſtratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito, et ad eaſdem

eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat E F. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, et exteriorē EGB interiori et oppoſito, et ad eaſdē partes GHD æqualē: et interiores et ad eaſdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi GHD, vnus ipſorum maior eſt. Sit maior AGH. et quoniam AGH angulus maior eſt angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD maiores ſunt. Sed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis. ergo BGH GHD anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineæ inter ſe conueniunt. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ conuenient inter ſe. atqui non conueniunt, cum parallelę ponantur. non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD. quare neceſſario eſt æqualis. angulus autem AGH æqualis eſt angulo EGB. ergo et EGB ipſi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH ſunt, æquales angulis BGH, GHD. Sed EGB. BGH æquales ſunt duobus rectis. ergo et BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorē interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem; et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet. quod oportebat demonſtrare.



29. huius.

* Poſt. 5.

29. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtriſque præcedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum eſt queſitum, poſitionem facit; & quae in illis data ſunt, demonſtrare proponit. atque hæc conuerſorū differentia ſilentio prætereunda non eſt. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto ſextum, aut pluribus vnum, vt præcedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo poſt manifeſtum erit.

* Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineę inter ſe conueniunt] *Poſtulatum quintum eſt, quod tamen cum euidens non ſit, & demonſtratione indigere videatur, Proclus ita demonſtrandum cenſuit, duobus præmiſſis, vnum axiomate quopiam, quo etiam Ariſtoteles vſus eſt, & lemmate.*

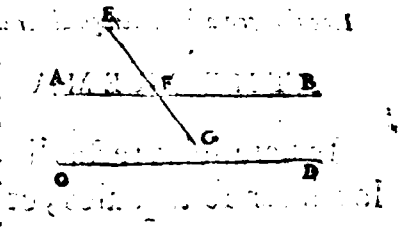
AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit.

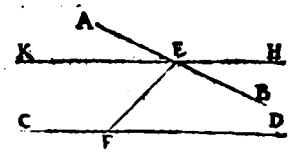
LEMMA.

Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædam linea; reliquam quoque ſecabit.

Sint parallelae AB CD; ſecetq; ipſam AB recta linea EFG. Dico EFG reliquam quoque CD ſecare. Quoniam enim duae rectae lineae ſunt, quae ab vno puncto F in infinitum producuntur, BE FG: omni finita magnitudine maiorem habebunt diſtantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quae tanta eſt, quantum eſt interuallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum lineārum diſtantia maior fuerit, quàm diſtantia parallelarum, recta linea FG ſecabit ipſam CD. Quare ſi alteram parallelarum ſecuerit



cuerit quędam recta linea, reliquam quoque ſecabit.

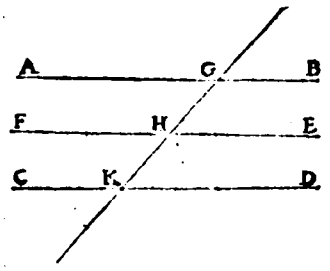


Hoc ante demonſtrato conſequenter propoſitum demonſtrabitur. Sint enim duae rectae lineae A B C D, & in ipſas incidat recta linea E F, angulos B E F D F E duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter ſe conuenire ad eas partes, in quibus ſunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli B E F D F E duobus rectis minores ſint, ſit exceſſui duorum rectorum aequalis H E B angulus, & H E ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas H K C D recta linea E F incidit, interioresq; angulos H E F D F E duobus rectis efficit aequales; rectae lineae H K C D parallelae erunt. & A B ſecat ipſam H K. ergo reliquam quoque C D ſecabit per antecedens lemma. conuenient igitur inter ſe rectae linae A B C D ad eas partes, in quibus ſunt anguli duobus rectis minores. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quę eidem rectę lineæ ſunt parallelę, & inter ſe parallelæ erunt. *

Sit vtraque ipſarum A B C D ipſi E F parallela. Dico et A B ipſi C D parallelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B E F, recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F eſt æqualis. Rurſus quoniam in parallelas rectas lineas E F C D, recta linea incidit G K, æqualis eſt G H F angulus angulo G K D. oſtenſus autem eſt & angulus A G K angulo G H F æqualis. ergo et A G K ipſi G K D æqualis erit. et ſunt alterni. parallela igitur eſt A B ipſi C D. ergo quæ eidem rectæ lineę ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt. quod oportebat demonſtrare.



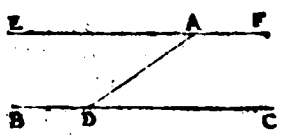
F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt] *Contingit autem hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus reſpectibus verum eſſe. non enim quę eiuſdem dupla, & inter ſe dupla ſunt, nec quae eiuſdem ſeſquialtera, inter ſe ſunt ſeſquialtera, ſed in illis ſolis locum habere videtur, quęcunque vninoce conuertuntur, ut in æqualitate, in ſimilitudine, in identitate, & in parallela poſitione. Quae enim parallelae parallela, & ipſa parallela eſt, quemadmodum, & quod aequali aequale, & ipſum eſt aequale; & quod ſimili ſimile, & ipſum ſimile. parallelarum enim ad ſe ſe reſpectus ſimilitudo poſitionis eſt.* *

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. *

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet per A punctum ipſi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quod uis punctum D, & iungatur A D: conſtituaturq; ad rectam lineam D A, & ad punctum in ipſa A, angulo A D C æqualis angulus D A E: & in directum ipſi E A recta linea A F producatur. Quoniã igitur in duas rectas lineas B C E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D A D C inter ſe æquales efficit, E F ipſi B C parallela erit. Per datum igitur punctum A datæ rectæ linea B C parallela ducta eſt recta linea E A F. quod facere oportebat.



23. Huius.

27. Huius.

F. C.

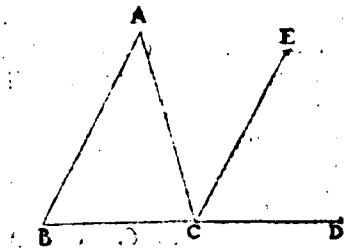
* Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.] *Videtur hoc problema parallelarũ ortũ tradere. At datum punctũ extra rectam lineam ſumere oportet, ita ut à puncto ad ipſam ducta recta linea angulum faciat, alioquin nulla alia præter iam dictã, duci poterit. differunt autem per datum punctum, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium eſt; ab ipſo fit deductio, vt in illo problemate,* [ſuper datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere] *Quando autem punctum in recta linea eſt, per ipſum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.* [per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelã rectam lineam ducere;] *& quemadmodum non licet ab eodem puncto ſuper datam rectam lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae linae duas, uel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter ſe conuenirent. quod eſt abſurdum.*

Per datum punctum, & a dato pũcto lineã ducere.

THEOREMA XXII. ROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, et oppoſitis eſt æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt.

Sit triangulum A B C: et vnum ipſius latus B C in D producatur. Dico angulum exteriorem A C D duobus interioribus et oppoſitis C A B A B C æqualem eſſe; et trianguli tres interiores angulos A B C B C A C A B duobus rectis eſſe æquales. Ducatur enim per punctũ C ipſi A B rectæ lineę parallela C E. Et quoniam A B ipſi C E parallela eſt, et in ipſas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter ſe æquales ſunt. Rurſus quoniã A B parallela eſt C E, et in ipſas incidit recta linea B D, exterior angulus E C D interiori et oppoſito A B C eſt æqualis. Oſtenſus autem eſt angulus A C E æqualis angulo B A C. Quare totus A C D exterior angulus æqualis eſt duobus interioribus et oppoſitis B A C A B C. communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B tribus A B C B C A C A B æquales ſunt. Sed anguli A C D A C B ſunt æquales duobus rectis. Ergo et A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppoſitis eſt æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt. quod demonſtrare oportebat.



Ex antecedente.

15. huius.

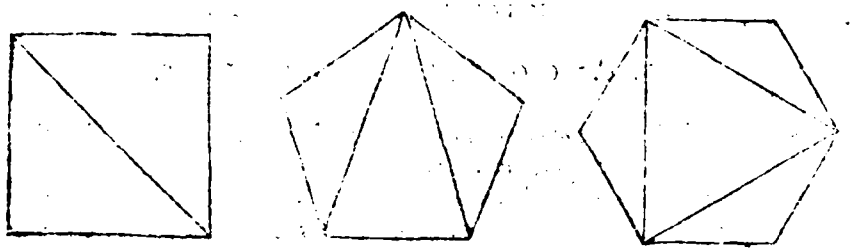
F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in ſextodecimo, & ſeptimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. non ſolum enim ex hoc diſcimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore & oppoſito maiorem eſſe, ſed & quanto maiorem. nam cum vtriſque ſit aequalis, maior quam alteruter reliquo eſt. nec trianguli duos quoſlibet angulos duobus rectis minores eſſe ſolum ex hoc cognoſcimus, ſed quanto etiam minores: reliquo enim trium. illa igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero ſcientiae terminum vtriſque attulit. eius theorematis, triangulum ſcilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inuẽtionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipſi aliter demonſtrarunt, vt Proclus tradit. quã etiam huius theorematis duo oſtendit conuerſa, ex quibus apparere poteſt, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc conſtet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis eſſe aequales, aperta eſt nobis via, per quã ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis aequales ſint. vt pu-

ta

ta quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae ſequuntur. Itaque primo ſciendum eſt omnem rectilineam figuram in triangula reſolui; omnium ſi quidem conſtitutionis principium eſt triangulum. vnaquæque autem in triangula binario pauciora, quàm ſint propria latera, reſoluitur, vt ſi

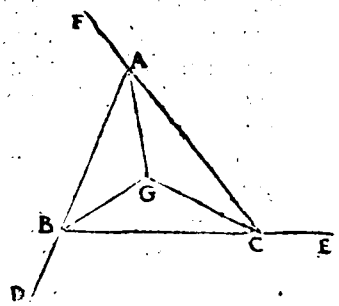
Omnis recti linea figura in triangula binario pauciora quam ſit propria latera reſoluitur.



quattuor latera habeat, in duo reſoluitur triangula; ſi quinque in tria, ſi ſex in quattuor, & ſimiliter reliquae. Quòd cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſint aequales, numerus triangulorum, ex quibus vnaquæque figura conſtat, duplicatus multitudinem præbebit rectorum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triangulis conſtans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos aequales ſex rectis, & deinceps eodem modo, Sed & illud ſecundum eſt, [omnem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus ſemel producto, angulos qui extra conſtituũtur, quattuor rectis æquales habere] *quod nos hoc modo demonſtrabimus.*

Omnis recti linea figura angulos qui extra conſtituũtur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum A B C, et producantur latera A B B C C A ad puncta D E F. Dico angulos C B D B A E A C E, qui extra conſtituuntur, quattuor rectis æquales eſſe.



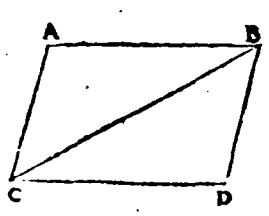
Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum G, & iungãtur G A G B G C. erunt triangulorum A G B B G C C G A omnes anguli ſex rectis aequales; Sed & anguli C B A C B D B A C B A F A C B A C E ſunt aequales ſex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis C B A C B D B A C B A F A C B A C E aequales ſunt. communes auferantur C B A B A C A C B. reliqui igitur, qui ſiunt ad G ſunt aequales angulis extra figuram conſtitutis. anguli autem ad G quattuor rectis ſunt aequales. ergo & anguli, qui extra figuram conſtituuntur, videlicet C B D B A F A C E quattuor rectis aequales erunt. quod demonſtrare oportebat. eodẽ modo demonſtrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipſas conſtituuntur, quattuor rectis eſſe aequales.

Corol. 15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quę æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectę lineę, et ipſæ æquales, et parallelæ ſunt.

Sint ęquales et parallelę A B C D: et ipſas cõiungant ad eaſdem partes rectę lineę A C B D. Dico A C B D æquales, et parallelas eſſe. iungatur enim B C. et quoniam A B parallela eſt C D: in ipſaſq; incidit B C, alterni anguli A B C B C D æquales ſunt. Rurſus quoniam A B eſt æqualis C D, communis autẽ B C, duæ A B B C duabus B C C D ſunt ęquales; et angulus A B C ęqualis angulo B C D. baſis igitur A C baſi B D eſt ęqualis: triangulumq; A B C trian-



29. huius.

4. huius.

gulo B C D:et reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt,alter alteri,quibus æqua lia latera ſubtenduntur.ergo angulus A C B angulo C B D eſt æqualis.Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens,alternos angulos A C B Ç
27.huius. B D æquales inter ſe efficit,parallela eſt A C ipſi B D. oſtenſa autem eſt et ipſi æqua lis.Quæ igitur æquales et parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectæ lineæ,et ip ſæ æquales et parallelæ ſunt.quod oportebat demonſtrare.

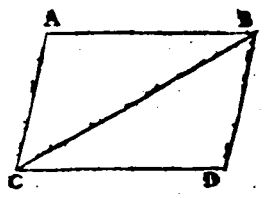
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum,parallelogrammorumq́, conſiderationis eſſe dicebamus.aequalium namque & parallelarum rectarum linearum ſymptoma quoddam dicere vi
Parallelogrãmum quomodo fiat. *detur,parallelogrammorumq́, ortum latenter tradit. parallelogrammum enim fit ex aequalibus, & parallelis, quae initio ductae ſunt, & ex ijs,quae ipſas coniungunt rectis lineis: quae etiam aequales & parallelae oſtenduntur. Qua propter quod ſtatim ſequitur, veluti conſtituto iam parallelogrammo, quae per ſe inſunt eiuſmodi ſpacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propoſitione adhibita ſit,accurate & diligenter notauit Proclus.*

THEOREMA XXIIII. PROPO. XXXIIII.

Parallelogrammorum ſpaciorum latera, quæ ex oppoſito,et anguli,inter ſe æqualia ſunt;et diameter ea bifariam ſecat.

Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex oppoſito,et angulos inter ſe æqualia eſſe; et diametrum B C ipſum bifariam ſecare. Quoniam enim parallela eſt A B ipſi C D, et in ipſas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter ſe æquales ſunt. Rurſus quoniam A C ipſi B D parallela eſt, et in ipſas incidit B C; alterni angu li A C B C B D æquales ſunt inter ſe. duo igitur triangu-



la ſunt A B C C B D,quę duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent,alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale,quod eſt ad æqua les angulos,vtrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqua lia habebunt,alterum alteri,et reliquum angulum reliquo angulo æqualem.æquale igitur eſt latus quidem A B lateri C D: latus vero A C ipſi B D; et angulus B A C angulo B D C æqualis.Et quoniam angulus A B C eſt æqualis angulo B C D; et an gulus C B D angulo A C B;erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. oſtenſus autem eſt,et angulus B A C angulo B D C æqualis.parallelogrammorũ igitur ſpa ciorum latera,quę ex oppoſito,et anguli, inter ſe æqualia ſunt. Dico etiam diame trum ea bifariam ſecare. Quoniam enim æqualis eſt A B ipſi C D,communis autem B C,duæ A B B C duabus D C C B æquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis eſt angulo B C D. baſis igitur A C baſi D B æqualis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit.ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam ſecat.quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum,vt inquit Proclus,alia vniuerſalia ſunt, alia non vniuerſalia. quomodo autem
Theorematum alia uniuerſalia, alia non vniuerſalia. *vtrumque horum dicamus,commemorabimus,cum quęſitum pertigerimus,quod vnam partem habet vniuerſalem,alteram vero non vniuerſalem.quamuis enim omne theorema vniuerſale quidem eſſe fortaſſe videretur, & omne,quod ab Euclide oſtenditur huiuſmodi eſſe(quemadmodum in præſentia quoque non ſolum latera,quae ex oppoſito ſunt, & angulos aequales habere vniuerſe de omnibus parallelogrammis dici videtur,verum etiam diametrum vnumquodque bifariam ſecare)*
Vniuerſale duobus modis appellari conſueuit. *attamen alia quidem vniuerſe oſtendi dicimus, alia uero non vniuerſe. aliter enim vniuerſale appellari conſueuit,quod de omnibus verum dicit,de quibus prędicatur; aliter autem quod omnia*

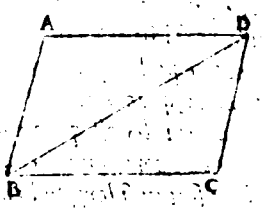
comprehendit,

comprehendit, quibus idem ſymptoma ineſt. vniuerſale ſiquidem eſt, & quod omne aequicrure tres angulos duobus rectis aequales habet, quoniam de omnibus aequicruribus verum eſt; vniuerſale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis aequales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per ſe ineſt. Quocirca primum quoque hoc de triangulo oſtendi dicimus, tres angulos duobus rectis aequales habere. Itaque iuxta hanc ſignificationem alia quidem vniuerſalia theorematum dicentes, alia vero non vniuerſalia, preſens theorema dicimus vnum quidem queſitorum vniuerſale habere: alterum vero non vniuerſale. nam hoc quidem latera, quae ex oppoſito ſunt, & angulos aequales habere vniuerſale eſt, ſolis enim parallelogrammis ineſt. hoc vero, diametrum bifariam ſpacium ſecare, non vniuerſale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus ſymptoma hoc inſpicitur. etenim circulis, & ellipſibus hoc etiam ineſt. & videntur primae quidem rerum huiuſcemodi notiones eſſe magis particulares, progreſſae autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuiſſent, diametrum bifariam ſecare circulum, ellipſim, & parallelogrammum, commune in his poſtea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Ariſtoteles, quidā nō vniuerſale tamquā vniuerſale oſtendens, eò quod commune eſt innominatū, cui primum ſymptoma ineſt. nam quid commune ſit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & ſonis, quibus omnibus ineſt permutata proportio, dicere non licet. quid preterea cōmune ſit circulo, ellipſi, & parallelogrammo, difficile eſt exprimere, nā vna quidem figura rectilinea eſt, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuerſale eū oſtēdere opinamur, qui demonſtrat, omne parallelogrāmū à diametro bifariā ſecari, eo quòd commune ſimul nō cernimus, propter quod hoc verum eſt. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiuſcemodi vniuerſale non eſt propter iam dictam cauſſam. illud vero eſt, omne parallelogrammum latera, quae ex oppoſito ſunt & angulos habere aequalia. Etenim ſi aliqua figura poſita fuerit, quae ex oppoſito ſunt latera, & angulos aequalia habere, parallelogrammum hęc eſſe oſtendetur. hęc Proclus. Huius autem theorematis conuerſum, quatenus ad primam partem attinet, tale eſt.

Tres angulos duobus rectis æquales habere primū de triangulo oſtenditur.

Diametrum bifariam ſecare ſpaciū, ineſt non ſolum parallelogrāmo ſed circulis, et ellipſibus.

Omne quadrilaterum, quod latera ex oppoſito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum eſt.

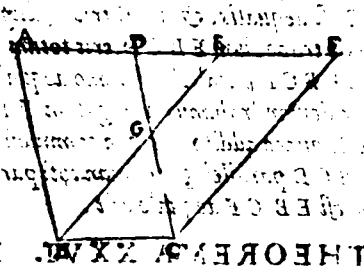


Sit quadrilaterum A B C D, habens latus quidem A B aequale lateri D C; latus vero A D lateri B C; angulumq; A B C angulo A D C aequalem; & angulum B A D angulo B C D. Dico quadrilaterum A B C D parallelogrammum eſſe. Ducatur diameter B D. Et quoniam A B eſt aequalis D C, & A D ipſi B C, duae D A A B duabus B C C D aequales ſunt, angulosq; aequales cōtinēt, & baſis B D vtrique cōis, triangulū igitur A B D triangulo C D B aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, videlicet angulus A B D angulo C D B, & angulus A D B angulo C B D, qui ſunt alterni. ergo A B parallela eſt ipſi D C & A D ipſi B C, ideoq; A B C D parallelogrammum eſt. quod demonſtrare oportebat. 27. huius.

Conuerſum vero vt ad ſecundam partem huiuſmodi erit [omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt, *quod nos paulo poſt demonſtrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.



Sint parallelogramma A B C D E B C F in eadem baſi B C, et in eiſdem parallelis A F B C conſtituta. Dico A B C D parallelogrammū parallelogrammo E B C F æquale eſſe. Quoniā enim parallelogrammum eſt A B C D, æqualis eſt A D ipſi B C. Eadem quoque ratione, et E F eſt æqualis B C. Quare et A D ipſi E F æqualis erit: et communis D E. tota igitur A E æqualis F eſt æqualis. eſt autem et A B æqualis D C. ergo duę E A A B duabus F D D C æquales ſunt, altera alteri, et angulus F D C æqualis angulo E A B, exterior interiori. baſis igitur E B baſi F C eſt æqualis, et E A B 4. huius.

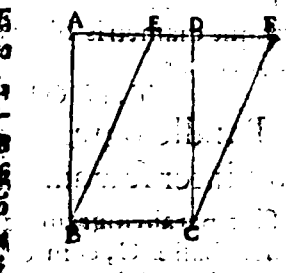
triangulum

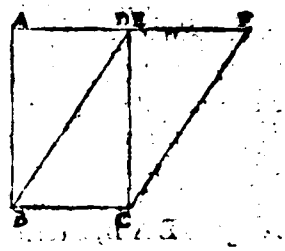
triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF eſt æquale. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. parallelogramma igitur in eadem baſi; et in eiſdem parallelis cõſtituta inter ſe æqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata localia.
Locus linearum uel ſuperficiei ſitus, qui idē ſymptoma efficit.
Linearum aliæ planæ aliæ ſolidæ.
Localium theorematũ alia planum habent locũ, alia ſolidũ.
Localia theoremata, quæ ſolida appellantur.
Hyperbole ſolida linea.
Localia plana in rectis lineis.
Localia plana in circumferentijs.
Theoremata quæ in mathematicis admirabilia dicuntur.
Angulorum æqualitas, et inæqualitas maximam uim habent ad augenda minuendaq; ſpacia.
Theorematis caſus. 4. huius.

Quemadmodum theorematum, ut inquit Proclus, alia quidem vniuerſalia, alia vero particularia eſſe dicebamus, & quemadmodum hęc diuidentes ſubiungebamus, alia eſſe ſimplicia, alia compoſita, & quid vnumquodque horum eſſet oſtendebamus, ita ſanè iuxta aliã diſtinctionem, alia quidem localia eſſe dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuſcunque idem ſymptoma in toto quodam loco accidit. locum uero lineae, vel ſuperficiei ſitum, qui vnum, idemq; ſymptoma efficiat. localium enim alia in lineis conſtituuntur, alia in ſuperficiebus. Et quoniam linearum aliae ſunt planae, aliae ſolidae. & planae quidem, quarum ſimplex eſt in plano intelligentia, ut ipſæ rectae: ſolidae uero quarum ortus ex quadam ſolidae figurae ſectione apparet. ut Cylindricae helicis, canonicarumque linearum, dicerem utique eorum etiam, quae in lineis conſtituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia uero ſolidum. Præſens igitur theorema & locale eſt, & in lineis locale, & planum. totum enim ſpacium, quod inter parallelas interijcitur, locus eſt parallelogrammorum, quae in eadem baſi conſtituuntur. quae ſane aequalia quoque inter ſe Euclides oſtendit. eorum uero localium theorematum, quae ſolida uocantur, tale ſit exemplum, [parallelogramma, quæ in aſymptotis, et hyperbola deſcribuntur æqualia ſunt.] *nam hyperbolen ſolidam eſſe lineam, manifeſtum eſt, quòd ſit una ex coni ſectionibus. Cum autem in præſentia de rectilineis ſermo ſit, localia plana in rectis lineis tradit: in tertio autem libro, cũ de circulis, eorumq; ſymptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs conſtituuntur localium ſimul, & planorum theorematum docebit, tale ſiquidem in illis eſt, quod ait* [Qui in eadem portione ſunt anguli inter ſe ſunt æquales] *nec non illud.* [Anguli qui in ſemicirculo recti ſunt] *nam ſi infiniti quidē anguli in circũferentia conſtituti fuerint, eadē exiſtēte baſi, omnes aequales eſſe oſtenduntur. & illa quidem proportione reſpondent triangulis, & parallelogrammis, quae in eadem baſi, & in eiſdem ſunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox ſequuntur talis eſt, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt præterea hęc theoremata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis diſciplinis appellantur. ſtupet enim uulgus ſtatim ſi longitudo multiplicata ſpaciorum aequalitatem non deſtruit, eadem exiſtēte baſi. quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur. Sciendum autem eſt angulorum aequalitatem, & inequalitatem maximam uim habere ad augenda minuendaq; ſpacia. quo enim magis angulos inæquales efficimus, eò ſpacium magis diminuimus, ſi longitudo latitudoq; eadem ſit. Hoc theorema plures habet caſus, uel igitur latus BE ſecat CD, uel non ſecat. & ſi non ſecat, uel E cadit inter AD uel in D, Euclides autem difficiliorem caſum elegit, cum ſcilicet latus BE ipſum CD ſecat. ſi uero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quoniam enim AD eſt aequalis EF, quòd utraque ipſi BC ſit aequalis, communi ablata ED, erit reliqua AE aequalis reliquae DF. eſt autem DC aequalis AB. Itaque duae FD DC duabus EA AB aequales ſunt, & angulos aequales continent. baſis igitur FC baſi EB eſt aequalis. & FDC triangulum triangulo EAB, addatur cõmunè trapezium EBCD. erit totum ABCD parallelogrammum toti EBCF parallelogrammo aequale. Quòd ſi E cadat in D, ſimiliter demonſtrabimus triangulum FDC aequale triangulo DAB. quare addito utrique communi DBC triangulo, totum ABCD parallelogrammum toti parallelogrammo DBCF, hoc eſt EBCF aequale erit.*



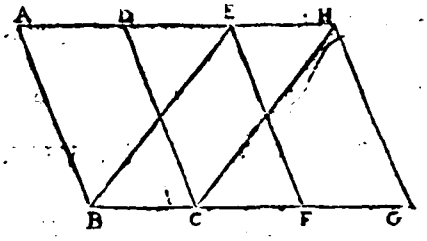


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma in æqualibus baſibus,

et

et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

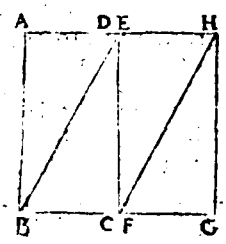


Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus baſibus BC FG, et in eiſdē parallelis AH BG conſtituta. Dico paral lelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale eſſe. coniungantur enim BE CH. Et quoniam æqualis eſt BC ipſi FG, & FG ipſi EH; erit et BC ipſi EH æqualis. ſuntq; parallelæ, et ipſas eō iungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ ſunt. Ergo E B, C H et æquales ſunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum eſt, et æquale parallelogrammo ABCD; baſim enim eandem habet B C, et in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur. ſimili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt æquale. ergo paral lelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.

33.huius.

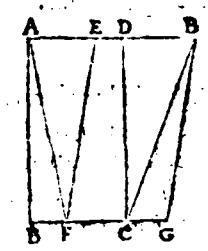
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.



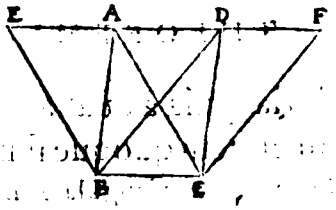
Parallelogrāma in eiſdē parallelis, quæ ſint. Theorematis caſus.

Precedens theorema eaſdem baſes accipiebat, hoc vero æquales. commune autem vtriſque eſt in eiſdem eſſe parallelis. oportet igitur ipſa neque intra ſubiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eiſdem dicuntur eſſe parallelis, cum baſes ipſorum, & quæ his ex oppoſito ſunt, latera eiſdem parallelis aptantur. Caſus huius theorematis plures ſunt. Nam vel baſes omnino ſeiunctæ ſunt, vel ſe ſe contingunt, uel aliquam partem habent communem, vtcunque ſe habeant latera, quæ baſibus opponuntur. & quamquam Proclus dicat Euclidem cum baſim ſeiunctam accepiſſet, theorema demonſtraſſe, attamen demonſtratio, quam habemus omnibus caſibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi poſſit de monſtrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas eſſe.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



Sint triangula ABC DBC in eadem baſi BC, et in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale eſſe. producatur AD ex utraque parte in E F puncta: et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE, per C vero ipſi BD parallela CF. parallelogrammum igitur eſt vtrumque ipſorum EBCA DBCF, et parallelogrammum E B C A eſt æquale parallelogrammo D B C F, etenim in eadem ſunt baſi BC, et eiſdem parallelis BC EF, eſtq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero DBCF dimidium triangulum DBC; diameter enim DC ipſum bifariā ſecat. Quæ autem æqualium dimidia, inter ſe æqualia ſunt. ergo triangulum A B C triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur in eadem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

31.huius.

35.huius.

34.huius.

7.com.no.

F. C.

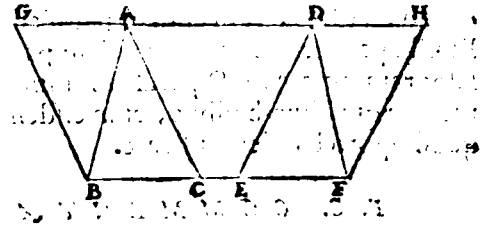
F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata de triangulis localia, & in lineis localia & plana

Sunt etiam hæc theoremata de triangulis, quæ in eadem basi, vel in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituuntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eisdem esse parallelis, quæ cum bases habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figũt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus, æqualibus et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint triangula ABC DEF in æqualibus basibus, B C E F, et in eisdem parallelis BF AD constituta. Dico ABC triangulum triangulo D E F æquale esse. producatur enim AD ex vtraq; parte in GH puncta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur B G: per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA DEFH. atque est parallelogrammum GB CA æquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim sunt basibus BC EF, et in eisdem BF GH parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF, diameter enim D F ipsum secat bifariam. quę autem æqualiũ dimidia, inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF est æquale. triangula igitur in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

11. huius.

35. huius.

34. huius.

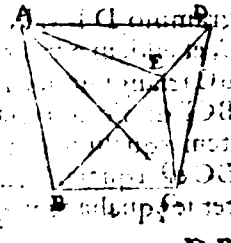
7 com not

F. C. COMMENTARIVS.

Casus in hoc theoremate tot sunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus ostendit, vno illo theoremate comprehendisse, in principio sexti libri. [triangula. et parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.] *eadem enim altitudo nihil aliud est, nisi in eisdem esse parallelis. nã figuræ põs, quę in eisdẽ sunt parallelis, eandẽ altitudinẽ habent, & contrà, altitudo siquidem est perpendicularis, quæ ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. illic igitur per proportionem ostensum est, ita se se habere triangula, et parallelogramma, quæ eadem altitudinem habent, hoc est quæ in eisdẽ sunt parallelis, vt bases: & æqualibus existentibus basibus æqualia esse spacia, & dupla duplis, & aliam proportionẽ habentibus, eandem habere & spatia inter se proportionem: in præsentia uero, quoniam non decebat proportione uti, qui nondũ de ipsa docuerat, contentus fuit æqualitate sola, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.



Sint æqualia triangula A B C D B C in eadem basi B C constituta, et ad eadem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C iungatur. æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C, in eadem enim sunt basi B C, et in eisdem BC, AE parallelis. Sed A BC triangulũ triangulo D B C est æquale. ergo et triangulum

D B C

D B C æquale eſt ipſi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non poteſt. non igitur A E ipſi B C parallela eſt. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter ipſam A D. ergo A D ipſi B C eſt parallela. Triangula igitur æqualia in eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis. quod oportebat demonſtrare.

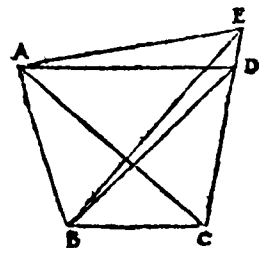
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema vigeſimi ſeptimi conuerſum eſt, & quod ſequitur eſt conuerſum vigeſimi octauii. nam, vt inquit Proclus, cum triplex ſit theorematum conuerſio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium ſecũdo; aut pars parti, vt quintum primo. non enim totum in altero datum, quæſitum in altero eſt, nec quæſitum, datum, ſed pars: talia videntur eſſe hęc quoque theoremata in triangulis. erat ſiquidem quæſitum in precedentibus, triangula æqualia eſſe. hoc autem non ſolum in his datum eſt, quippe cum partem inſuper ſumpſerit eius, quae in illis erat, poſitionis: hoc enim, in eadem baſi eſſe, & in æqualibus baſibus tum in his, tum in illis datum eſt, præterquam quòd in hiſce poſitionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quæſitum, nec datum in illis erat. particula enim illa, ad eaſdem partes, extrinſecus inſuper ſuit aſſumpta. conuerſa vero vigeſimi quinti, & vigeſimi ſexti in parallelogrammis conſulto omiſit, quod eadem ſit in vtriſque demonſtratio.

Theorematũ conuerſio triplex.

Et ad eaſdem partes.] *Quae his reſpondent, videlicet καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη in aliquibus græcis exẽplaribus, tum in hoc theoremate, tum in ſequenti nõ legũtur, ſed neceſſario addita ſunt. fieri enim poteſt vt in eadem baſi æqualia triangula ſumantur, vnum quidẽ ad partes ſuperiores, aliud vero ad inferiores, quae tamen non ſint in eiſdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.* A

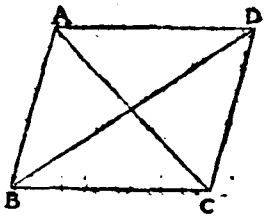
Maius minori quod fieri non põt.] *Idẽ abſurdũ ſequetur, ſi recta linea A E ſumatur extra ipſam A D, vt notat Proclus. Ex his, quae hoc loco demonſtrata ſunt, patebit cõuerſũ ſe cũdę partis vigeſimi quarti theorematis, quod erat huiuſmodi.*



B

Omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt.

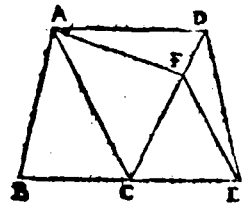
Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C B D ipſum bifariam ſecent. Dico A B C D parallelogrammum eſſe. Quoniam enim triangula A B C D B C eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt: & eandem habent baſim B C. quare in eiſdem ſunt parallelis. parallela igitur eſt A D ipſi B C. ſimiliter cum triangulum A B C æquale ſit triangulo A B D, & ſint in eadem baſi A B, demonſtrabitur rectam lineam D C ipſi A B parallelam eſſe. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in baſibus æqualibus, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus baſibus B C C E conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. cõiungatur enim A D. Dico A D ipſi B E parallellam eſſe. Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E eſt æquale, cum in æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis B E A F conſtituantur. Sed triangulũ A B C æquale eſt triangulo D C E.



38. huius.

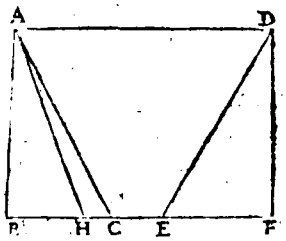
ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, maius minori, quod fieri nõ potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in aequalibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper contexentes, vnum vero vel nunquam ponentes varie conuertemus. aut enim bases easdem, vel aequales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel aequeles, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quae sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quae in triangulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpserimus, & in eisdẽ parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in æqualibus; alterum autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cũ decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboret, cum eadem sit demõstratio. ostẽdetur enim in triangulis hoc modo.

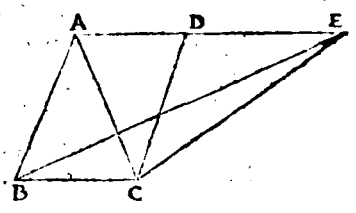
Triangula æqualia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.



Sint aequalia triangula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in aequalibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inæquales, & sit B C maior, abscindatur q; B H aequalis ipsi E F; & 38. huius. *A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus sunt basibus B H E F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triangula posita sunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H est aequale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inæquales sunt triangulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suae parti aequale esse: non immerito ab Euclide prætermissum fuit. hæc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triãgulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Iũgatur enim A C. triangulum igitur A B D triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E parallelis constituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et trian-

37. huius.

34. huius.

gulum

gulum eandem baſim habeant, et in eiſdem ſint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis duo ſunt caſus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtriſque demonſtratio eadem eſt. Quòd ſi baſes aequales ſint, eodem modo oſtendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in baſibus aequalibus conſtituta inter ſe aequalia ſint, parallelogrammum, quod alterius eſt duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuerſa ſimiliter demonſtrabuntur, quorum vnum eſt.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; baſim, aut æquales habuerint, et fuerint ad eaſdem partes in eiſdem etiam parallelis erunt.

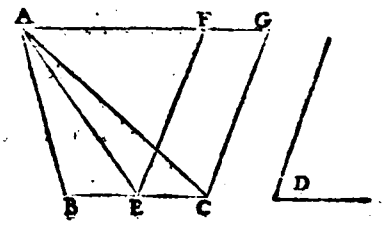
Si enim non ita ſit, totũ parti erit aequale, eademq; ratio vigebit. neceſſe enim eſt, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtro autem modo ſe ſe habuerit, idem ſequetur abſurdum, parallela ipſi baſi per trianguli verticem ducta. alterum vero eſt.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eiſdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; baſi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in baſibus inaequalibus ſint, cum aequales ſumpſerimus, totum parti aequale erit. In hoc igitur commune abſurdum omnia hęc theoremata deſinunt. Quare elementorum inſtitutor nobis reliquit eam, quae in his eſt, veritatem inueſtigare, cum in ſimplicioribus ipſe, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC ęquale parallelogrãmum conſtituere in angulo rectilineo ipſi D æquali, ſecetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pſi ctum in ea E, conſtituatur angulus C E F ęqualis ipſi D: et per A quidẽ ipſi E C parallela ducatur A G; per C vero ipſi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur eſt F E C G. Et quoniam B E eſt ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C ęquale; in ęqualibus enim ſunt baſibus B E E C, et in eiſdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C eſt duplum. eſt autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; baſim enim eandem habet, et in eiſdẽ eſt parallelis. ęquale igitur eſt F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G conſtitutum eſt, in angulo C E F, qui angulo D eſt æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius.
31. huius.
38. huius.
34 huius.

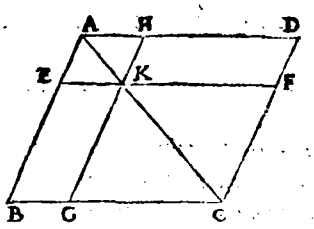
THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi ſpaçij eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum ſupplementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipſam A C parallelogramma quidem ſint E H F G, quæ vero ſupplementa dicuntur B K K D. Dico B K ſuplementum ſupplemento K D æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt A B C D, et eius diameter A C, ęquale eſt A B C triangulum triangulo

34. huius.

A D C. Rursus quoniam E K H A parallelogrammum est, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C est æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K æquale sit triangulo A H K; triangulum vero K G C ipsi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C æquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. est autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E. reliquum igitur B G supplementum reliquo supplemento K D est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spacii eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrãmorum suppleméta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

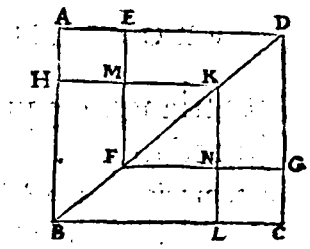


F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis tres sunt casus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quae se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa B K K D quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogramma sint E F G D H B L K, quae se se in punctis M N secent. Dico quadrilatera A H M E N L C C inter se aequalia esse. Quoniam enim triangulum quidem

34. huius.

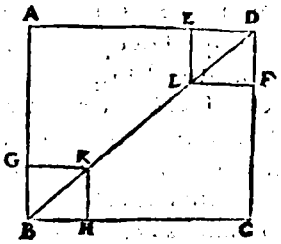
A B D est aequale triangulo D B C; triangulum vero E F D triãgulo D F G; erit reliquum quadrilaterum A B F E æquale reliquo quadrilatero C B F G. Rursus quoniam triangulũ H B K est aequale triangulo K B L, triangulumq; M F K triãgulo K F N; erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G. reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale sit necesse est; & hęc quidem quadrilatera sunt, quae supplementa dicuntur.

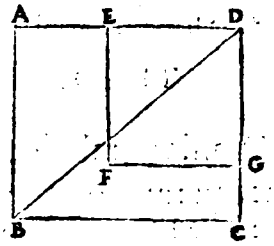


Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D est aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia sunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At

Supplementorũ nomen a re ipsa sũptum.

nomen supplementorum à re ipsa sumptũ est, quatenus hęc quoque pręter duo parallelogramma, quae sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum sunt, quęcumque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interiũ parallelogrammi secat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo A B C D diameter B D secat E F latus ipsius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non est circa eandem diametrum.



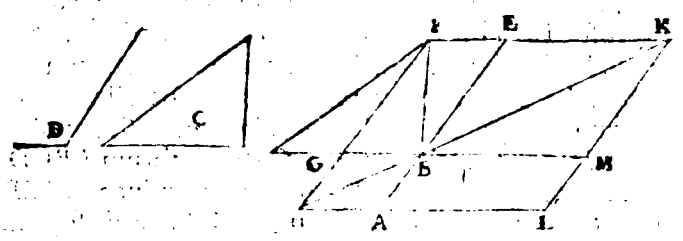


PROBLEMA XII. PROPOSITIO XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. constituatur triangulo C æquale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est æqualis D. et ponatur B E in directum ipsi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iungatur. Quoniã igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales sunt, quare BHC GFE duobus rectis sunt minores. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cõueniunt inter se. Ergo H B F E producta conuenient, producantur, et cõueniant in K: perq; K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quæ supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est æquale. Sed et B F æquale est triangulo C. quare et L B triãgulo C æquale erit. Et quoniã G B E angulus æqualis est angulo A B M, sed et æqualis angulo D; erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. quod facere oportebat.

42. huius
31. huius.
29. huius.
5. postul.
31. huius.
Ex antecedente.
15. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hæc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectae lineae coaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectae lineae pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in præsentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo aequale parallelogrammum applicare uolens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo aequalis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

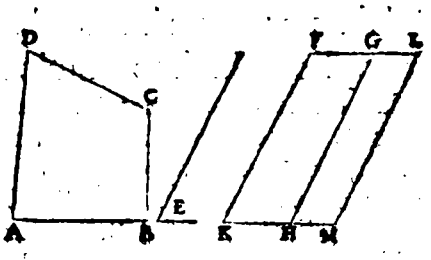
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. coniungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH; in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est vtrique ipsorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42 huius.
Ex antecedente.

29. huius. KHG augulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis, ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positę angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. 14 huius, in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG 29. huius, recta linea H G incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt: In directum igitur 34. huius. est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et æqualis est, et parallela; sed et HG ipsi 30. huius, ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela: ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL. 33. huius, ergo et KM F L æquales et parallelæ sunt, parallelogrammum igitur est K F L M. Quòd cum triangulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo H F: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est K F L M in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. quod facere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est. Siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus. resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum aequale parallelogrāmum constituentes, reliquis uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelograma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hęc Proclus.

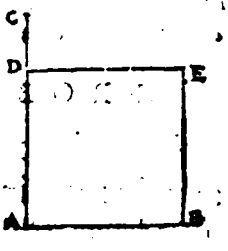
COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratū describere. Ducatur rectę lineę AB à pūcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et A B quidem est æqualis D E, A D vero ipsi B E. Sed et B A ipsi AD est æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter se æquales sunt, ideoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus 29. huius. autem est BAD. ergo et A D E rectus erit. parallelogrammorum vero spaciorum, 34. huius. quæ ex opposito sunt latera, et anguli inter se æqualia sunt. rectus igitur est vterque oppositorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum est ADEB. ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur fit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.

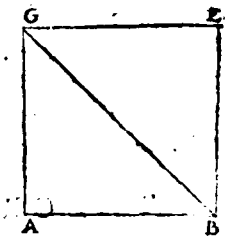


F. C.

Hoc problemate indigemus perissimum in sequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse, nimirum trianguli æquilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & præcipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat, quibus mathematici tamquam demonstratis passim vtuntur, nempe hæc.

Quadrata ab æqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se æqualia sunt.

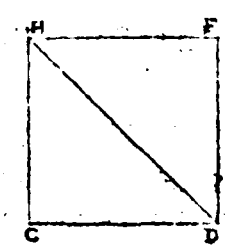
Sint enim aequales rectae lineae AB CD, & ab ipsa quidem AB describatur ABEG quadratum; ab ipsa vero CD quadratum CDFH. Dico hæc quadrata inter se aequalia esse. Quoniam enim rectae linae AB CD aequales sunt, erunt & ipsae AG CH aequales, angulosq; aequales continent. ergo & basis GB est aequalis basi HD, & triangulum ABG aequale triangulo CDH, & ipsorum dupla sunt aequalia. quadratum igitur ABEG quadrato CDFH aequale erit. Sed & huius ipsius conuersum,



4. huius.

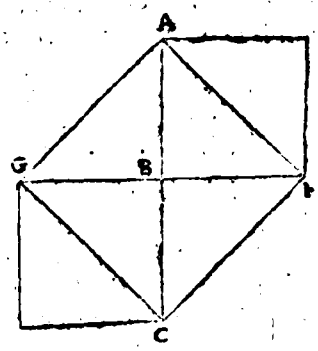
Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis descripta sũt.

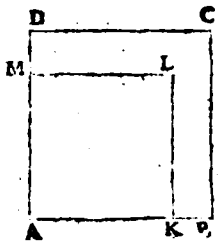
Sint enim quadrata aequalia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB sit in directum ipsi BC. Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectae BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectae linae. Et quoniam AF quadratum est aequale quadrato CG, & AFB triangulum aequale erit triangulo CBG, commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG est aequale; ideoq; parallela est AG ipsi FC. Rursus quoniam angulus AFG est aequalis angulo CGB, cum vterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela. aequalis igitur est recta linea AF rectae linae CG, parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt. Itaque quoniam duo sunt triangula ABF BCG, quae alternos angulos aequales habent, quippe quòd AF CG parallelae sint, & latus vnum AF est aequale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG aequale. Ostensum igitur est latera etiam à quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se aequalia esse, cum illa aequalia sint. possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum. Sint aequalia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea describuntur inter se aequales esse. Si enim AB EF aequales non sint, altera earum est maior, sit maior AB; & abscindatur AK, quae ipsi EF sit aequalis, & ex AK quadratum AKLM describatur. Quoniam igitur AK est aequalis EF, erit & quadratũ AKLM, ex ante demõstratis, aequale quadrato EFGH; sed et quadratum ABCD aequale erit eidem EFGH quadrato. ergo quadratum ABCD quadrato AKLM est aequale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur aequalibus existentibus quadratis ABCD EFGH rectae lineae AB EF à, quibus ea describũtur, inæquales sunt. ergo inter se aequales sunt necesse est.

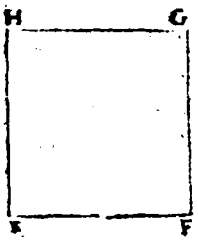


39. huius.

28. huius.
34. huius.





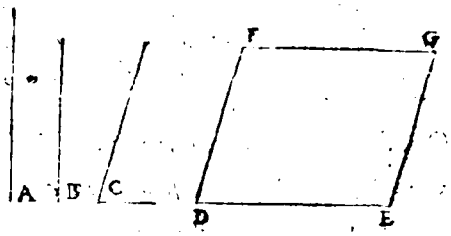


Non

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam conſtitutionem problema, quod ſequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales ſint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum conſtituere.

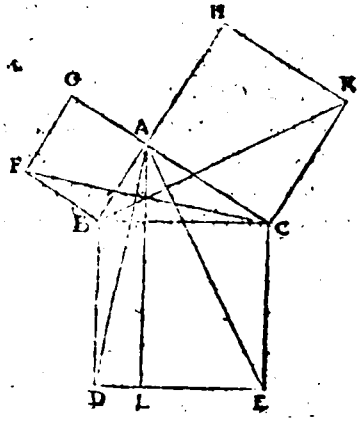
Sint datae quidem rectae linae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipſis A B aequales ſint, & in angulo ipſi C aequali, parallelogrammum conſtituere. exponatur recta linea D E,
23.huius. *quae ipſi A ſit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus conſtituatur F D E: ita vt F D ſit aequalis ipſi B rectae linae datae. poſtea per F ducatur F G parallela ipſi D E, & per E ducatur parallela ipſi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur eſt F D E G, ex rectis lineis D E D F conſtitutum, quae datis rectis lineis A B ſunt aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.*



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum deſcriptum à recta B C æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis B A A C deſcribuntur. Deſcribatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipſis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipſarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungãtur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus eſt, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad eaſdem partes poſitę, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis æquales efficiunt.
14.huius. in directum igitur eſt C A ipſi A G. eadem ratione, et A B ipſi A H eſt in directum. Et quoniam angulus D B C eſt æqualis angulo F B A, rectus enim vterque eſt, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C eſt æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus
4.huius. F B B C æquales ſint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit
41.huius. et baſis A D baſi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C æquale. eſtq; trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; baſim enim eandem habent B D, et in eiſdem B D A L ſunt parallelis: trianguli vero F B C duplum eſt G B quadratum. rurſus enim baſim habent eandem F B, et in eiſdem ſunt parallelis F B G C. Quæ autem æqualium dupla inter ſe æqualia ſunt. ergo æquale eſt parallelogrammum B L ipſi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, oſtendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C eſt æquale. et deſcribitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipſis B A A C. quadratum igitur B E, à latere B C deſcriptum æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod deſcribitur à latere rectum angulum



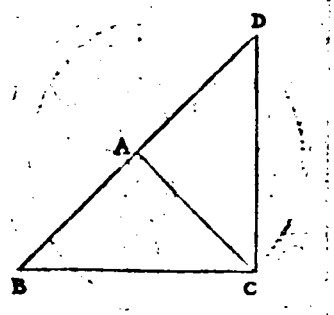
gulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq; eum cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo uniuersalius est. ostendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum subtendente aequalem esse figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positæ, describuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C describuntur. Dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturq; A D ipsi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato quod ex A B. cõmune apponatur quadratum, quod ex A C. ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia sunt quadratis, quæ ex B A A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale est, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est D A C; quadratis vero, quæ ex B A A C æquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex D C æquale est ei, quod ex B C quadrato. ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; et basis D C est æqualis basi C B. angulus igitur D A C angulo B A C est æqualis. rectus autem est D A C, ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonstrare.

11. huius.

8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema precedenti, & totum toti conuertitur. si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus describuntur. & si quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quòd eum qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SECVNDVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

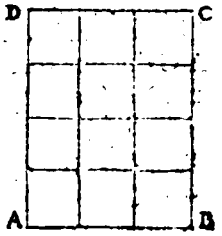
DIFFINITIO I.

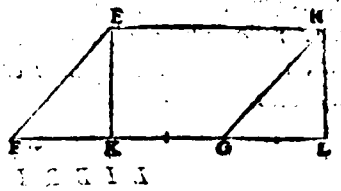


OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non sunt. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D: & sit, exempligratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius basis F G sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K sit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L sit ipsi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogramma E F G H E K L H cum aequales habeant bases F G K L, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt: sed parallelogrammi E K L H area est pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum sit necesse est. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum sunt, in presentia ponatur, quo adita esse manifesto apparebit. Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in commentarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.





DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi spacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Sciendum est gnomonem breuitatis causſa à geometris inuentum fuiſſe. nomen vero ex accidente impoſitum eſt; ab ipſo enim forma cognoſcitur, vel totius ſpacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoſcopijs eius officium dumtaxat eſt præſentes horas notas efficere. ſupplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non ſint, ſed vt non ſimilia toti, complentia vero totius ad ipſum ſimilitudinem.

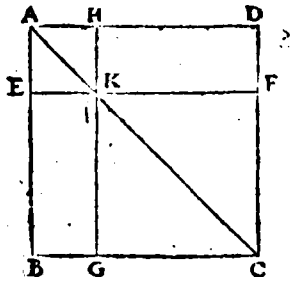
Gnomon a Geometris breuitatis causſa inuentus.

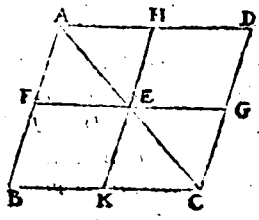
Gnomonis officium in horoſcopiis.

Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.

Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum conſiſtere, ſuperius dictum eſt, ut quae ſe inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum ſint AEKH, KGCF: & ſupplementa BK KD. Itaque duo ſupplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae ſint circa diametrum, gnomon appellatur. & ſi parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrammum AC ſimile ipſi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BF, reliquũ eſt parallelogrammũ EH ſimile toti. Quamobrẽ ab Ariſtotele dictum eſt, quadratũ circumpoſito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum eſt. Illud autem, quod in ſcholio additur ſupplementa non eſſe ſimilia toti, non omnino verum eſt. fieri enim poteſt vt quandoque etiam ſint ſimilia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & ſecetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipſarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipſarum AB DC. erunt ſupplementa BE ED ſimilia quidem toti, ipſis vero FH KG parallelogrammis, & ſimilia & æqualia, quod ex ijs, quae in ſequentibus tradentur, facile demonſtrare poſſumus.

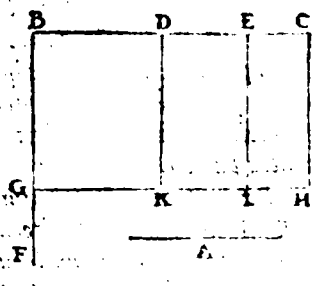




THEOREMA I. PROPO. I.

Si ſint duæ rectæ lineę, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quot cumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ recta linea inſecta, et ſingulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A B C; et ſecta ſit B C vt cumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A B C contentum æquale eſſe rectangulo; quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipſi B C ad rectos angulos B F: atque ipſi A ponatur æqualis B G: et per G quidem ipſi B C parallela ducatur G H; per D E C vero ducantur D K E L C H parallelæ ipſi B G. rectangulum igitur B H eſt æquale rectangulis B K D L E H: atque eſt B H quidem, quod A B C continetur; etenim continetur G B B C: et B G ipſi A eſt æqualis; rectangulum



15. primi.

3. primi.

31. primi.

H autem

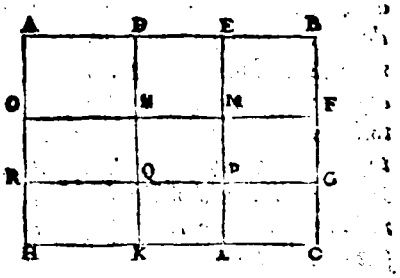
autē B K eſt quod continetur ipſis A BD; continetur enim QB BD, quarū GB eſt æqualis A:et rectangulum D L eſt quod continetur A DE,quoniam D K,hoc eſt B G ipſi A eſt æqualis:et ſimiliter rectangulum E H eſt quod A E C continetur:ergo rectangulum contentum A B C eſt æquale rectangulo; contento A BD, et contento A D E,et adhuc contento A E C. Si igitur ſint duę rectæ lineę,altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale eis,quę recta linea inſecta,et ſingulis partibus continentur.quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his ſimilia demonſtrare libuit, quae tum ad alia, tum ad ea, quae in decimo libro traduntur, vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

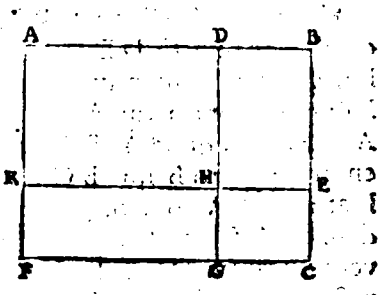
Si fuerint duę rectæ lineæ,quæ ſecentur in quotcumque partes;rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis, quæ vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.



Sint duae rectae linae A B B C rectum angulum A B C continentes, & ſecetur A B quidem in punctis D E, B C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale eſſe rectangulis, quae ſingulis ipſarum A D D E E B ad ſingulas B F F G G C applicatis continentur. completo enim parallelogrammo A B 31. primi. *C H, ducantur per D E puncta rectae linae D K E L, alterutri ipſarum A H B C parallelae; & per F G ducatur F M N O G P Q R parallelae alterutri ipſarum A B H C. erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F O Q N P M G R K Q L P C: & ſunt parallelogramma A N D M E F, quae continentur ipſa B F, & ſingulis partibus rectae linae A B, videlicet A D D E E B: parallelogramma vero O Q N P M G ſunt, quae continentur F G, & ſingulis partibus A D D E E B: & denique parallelogramma R K Q L P C, quae continetur G C, & ſingulis partibus eiuſdem rectae linae A B. Si igitur fuerint duae rectae linae, quae ſecentur in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt aequale rectangulis, quae vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque ſecentur; rectangulum totis contentū vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt æquale rectangulis, quæ continentur totis,et dictis partibus vnà cum eo,quod reliquis partibus continetur.



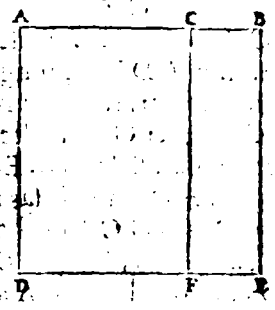
Sint duae rectae linae A B B C, rectum angulum A B C continentes: & ſecetur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipſarum, videlicet D B E C aequale eſſe & rectangulo contento tota A B, & dicta parte rectae linae B C, videlicet E C, & contento tota B C, & dicta parte D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. compleatur enim parallelogram- 31. primi. *mum A B C F, & à puncto D alterutri ipſarum B C A F parallela ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallela alterutri ipſarum A B F C. itaque conſtat rectangulum A B C aequale eſſe rectangulis A E K C. addatur vtriuque commune rectangulum H C, quod continetur duabus partibus*

D B E C. Rectangulum igitur A B C vnà cum rectangulo H C est aequale tribus rectangulis A E K C, & H C. quorum rectangulum quidem K C est quod continetur tota A B, hoc est K E, & parte E C: rectangulum vero D E vna cum rectangulo H C est quod continetur tota B C, & parte D B: & reliquum A H est quod continetur reliquis partibus A D B E, hoc est A D D H. ergo rectangulum A B C vnà cum rectangulo H C est aequale & rectangulo contento tota A E, & E C, & contento tota B C, & D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. Si igitur duae rectae lineae vtcumque secentur et reliqua, quod oportebat demonstrare. Eodem modo demonstrabitur & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit vtcumque; rectangula quæ tota, et singulis partibus cõtinẽtur æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit vtcumque in pũcto C. Dico rectangulum, quod A B B C continetur, vnà cum contento B A A C æquale esse quadrato, quod fit ex A D. Describatur enim ex A B quadratũ A D E B, et per C ducatur alterutri ipsarum A D B E parallela C F. æquale igitur est A E rectãgulis A F C E. atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum cõtentum B A A C; etenim D A A C continetur, quarum A D ipsi A B est æqualis: et rectangulum C E continetur A B B C, cum B E sit æqualis A B.

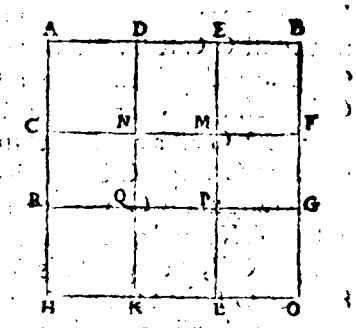


46. primi. 31. huius.

ergo rectangulum B A C vnà cum rectangulo A B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit, rectangula, quæ tota, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

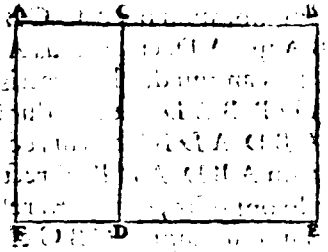
Similiter vt superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quotcumque partes, quadratum totius lineae aequale esse rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur.



THEOREMA III. PROPOSITO. III.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale est et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit vtcumque in pũcto C. Dico A B C rectangulum æquale esse rectangulo A C B vnà cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur enim ex B C quadratũ C D E B, producaturq; E D in F; et per A alterutri ipsarum C D B E parallela ducatur A F. æquale vtique erit rectangulũ A E ipsis A D C E. et est A E quidem rectãgulum contentum A B B C; etenim A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur A C C B, cum D C

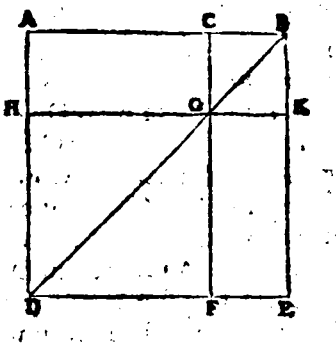


46. primi. 31. primi.

ipſi C B ſit ęqualis:et D B eſt quadratum,quod fit ex B C.ergo rectangulum A B C eſt ęquale rectangulo A C B vnà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale eſt rectangulo,quod partibus continetur,et ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea ſecta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota ęquale erit,et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei,quod bis partibus continetur rectangulo.



Recta enim linea A B ſecta ſit vtcumque in C. Dico quadratum, quod fit ex A B æquale eſſe, et quadratis ex A C C B, et ei rectangulo quod bis A C C B continetur. Deſcribatur enim ex A B quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C quidem alterutri ipſarum A D B E parallela ducatur C G F;per G vero alterutri ipſarum A B D E ducatur parallela H K. Et quoniam C F eſt parallela ipſi A D, et in ipſas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori et oppoſito A D B æqualis:angulus autem A D B eſt ęqualis angulo A B D, quòd et latus B A æquale eſt lateri A D. quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis: ac propterea latus B C lateri C G æquale.Sed et latus C B æquale eſt lateri G K, et C G ipſi B K.ergo et G K eſt æquale K B,et C G K B æquilaterum eſt. dico inſuper etiam rectangulum eſſe.quoniam enim C H eſt parallela ipſi B K, et in ipſas incidit C B;anguli K B C G C B duobus rectis ſunt æquales.rectus autem eſt K B C angulus.Ergo et rectus G C B,et anguli oppoſiti C G K G K B recti erunt. rectangulũ igitur eſt C G K B. Sed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt C G K B,quod quidem fit ex B C.eadem ratione et H F eſt quadratum, quod fit ex H G.hoc eſt ex A C.ergo H F C K ex ipſis A C C B quadrata ſunt.et quoniam rectangulum A G eſt æquale rectangulo G E, atque eſt A G quod A C C B continetur, eſt enim G C ipſi C B æqualis:erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B.quare rectangula A G G E ęqualia ſunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis ex A C C B,et ei quod bis A C C B continetur rectangulo ſunt æqualia.Sed H F C K A G G E ſunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B.quadratum igitur ex A B æquale eſt,et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo.quare ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei rectangulo, quod bis partibus continetur,atque illud eſt,quod demonſtrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex A B æquale eſſe,& quadratis ex A C C B. et ei rectangulo,quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis eſt B A ipſi A D; et angulus A B D angulo A D B æqualis erit:et cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus B A D.ergo reliqui A B D A D B ſunt vni recto æquales, et ſunt ęquales inter ſe ſe. vterque igitur ipſorum A B D A D B eſt recti dimidius. Sed rectus eſt B C G,æqualis namque eſt angulo oppoſito, qui ad A. reliquus igitur C G B dimidius eſt recti:ac propterea C G B angulus angulo C B G eſt ęqualis; et latus B C æquale lateri C G.Sed C B eſt æqualis G K,et C G ipſi B K. æquilaterum igitur eſt C K; et cum habeat rectum angulum C B K,etiam eſt quadratum;quod quidem fit ex C B.eadem ratione et H F quadratum

46.primi. 31.primi. 29.primi. 5.primi. 6.primi. 34.primi. 29.primi. 34.primi. 43.primi. 5.primi. 32.primi 29.primi. 6.primi.

quadratum est, et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur sunt C K H F, et quadratis ex A C C B æqualia. Rursus quoniam rectangulum A G est æquale ipsi G E, atque est A G id quod A C C B continetur, est enim C G ipsi C B æqualis: erit et G E æquale contento A C C B. quare A G G E æqualia sunt ei, quod bis A C C B continetur. Sunt autem et C K H F æqualia quadratis ex A C C B. ergo C K H F A G G E æqualia sunt et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B cõtinetur. Sed C K H F et A G, G E sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B æquale est, quadratisq; ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod ostendere oportebat. 34. primi. 43. primi.

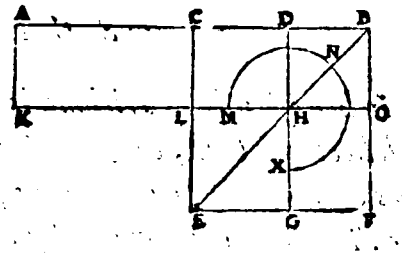
COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spacijs parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum A D D B vnà cum quadrato quod fit ex C D æquale esse ei quod ex C B quadrato. Describatur enim ex B C quadratum C E F B: iungaturq; B E; et per D quidem alterutri ipsarũ C E B F parallela ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela alterutri ipsarum C B E F: et rursus per A ducatur alterutri C L B O parallela A K. Et quoniã C H supplementum æquale est supplemento H F, commune apponatur D O. totum igitur C O toti D F est æquale. sed C O est æquale A L, quoniam et A C ipsi C B. ergo et A L æquale est D F. commune apponatur C H. totum igitur A H ipsis F D D L æquale erit. Sed A H quidẽ est quod A D D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis: F D D L vero est gnomon M N X. gnomon igitur M N X æqualis est ei, quod A D D B continetur. commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato quod ex C D. ergo M N X gnomon, et L G æqualia sunt rectangulo, quod continetur A D D B, et ei, quod fit ex C D quadrato. Sed M N X gnomon, et L G sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato quod ex C D æquale est ei, quod ex C B quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contẽtum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat.



46. primi. 31. primi. 43. primi. 36. primi.

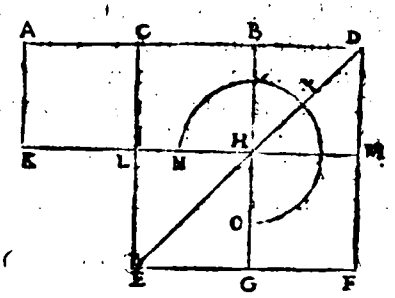
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta cõtentũ, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea;

quæ

quę ex dimidia, et adiecta cõſtat tãquã ab vna linea deſcribitur.

Recta enim linea quędam A B ſecetur bifariam in puncto C, adiiciaturq; ipſi in rectum B D. Dico rectangulum A D B vnà cũ quadrato ex B C æquale eſſe ei, quod fit ex C D quadrato. Deſcribatur enim ex C D quadratum C E F D, et iungatur D E; perq; B alterutri ipſarum C E D F parallela ducatur B H G: et per H ducatur K L M parallela alterutri ipſarum A D E F: et adhuc per A alterutri C L D M parallela A K. Itaque quoniã A C eſt æqualis C B, erit et rectangulum A L rectangulo C H æquale. ſed C H æquale eſt H F. ergo et A L ipſi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur A M gnomoni N X O eſt æquale: atq; eſt A M, quod A D D B cõtinetur, etenim D M eſt æqualis D B. ergo et gnomon N X O æqualis eſt rectãgulo A D B. rurſus commune apponatur L G, æquale ſcilicet quadrato, quod ex C B. rectangulum igitur A D B vnà cum quadrato quod ex B C æquale eſt gnomoni N X O, et ipſi L G. Sed gnomon N X O, et L G totum fuit C E F D quadratum; quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato ex B C æquale eſt ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea ſecetur bifariam, adiiciaturq; ipſi in rectum quædam recta linea; rectangulum totã cum adiecta, et adiecta contentum vnà cum quadrato dimidiæ æquale eſt quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta conſtat, tamquàm ab vna linea deſcribitur. quod oportebat demonſtrare.



46. primi.
31 primi.
36. primi.
43. primi.

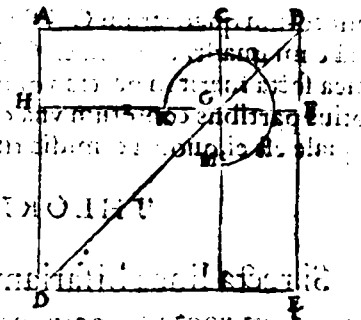
SCHOLIVM.

In hoc oſtenditur arithmetica analogia. quo enim A D ſuperat D C, videlicet ipſa C B, eo & C D ſuperat D B. quod par numerorum manifeſtius cognoſcitur, cum medius ſemper æqualiter & excedatur, & excedat. Theorema autem eſt. Quadratum quod fit ab exceſſu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale eſſe.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, quæ à tota, et vna parte ſunt vtraque quadrata æqualia ſunt; et rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B ſecta ſit vtcumque in puncto C. Dico quadrata ex A B B C æqualia eſſe et rectangulo, quod bis A B B C continetur, et ei quod fit ex A C quadrato. Deſcribatur enim ex A B quadratum A D E B, et figura conſtruatur. itaque quoniam A G rectangulũ æquale eſt rectangulo G E. commune apponatur C F. quare totum A F totũ C E eſt æquale. rectangula igitur A F C E dupla ſunt rectanguli A F. Sed A F C E ſunt K L M gnomon, et quadratum C F. ergo K L M gnomon, et quadratũ C F dupla erũt rectanguli A F. eſt autem id quod bis A B B C continetur duplum ipſius A F; etenim B F eſt



46. primi.
43. primi.

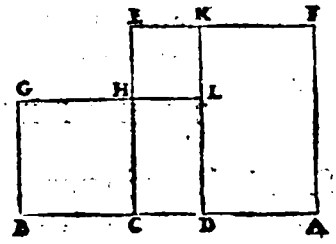
æqualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia sunt ei; quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum sunt AD EB, et CF; quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectãgulo, quod bis AB BC cõtinetur vnà cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt rectangulo; quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Non alienum esse videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergei conica demonstrauimus: eo enim ad sequentia vtemur.

Si recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

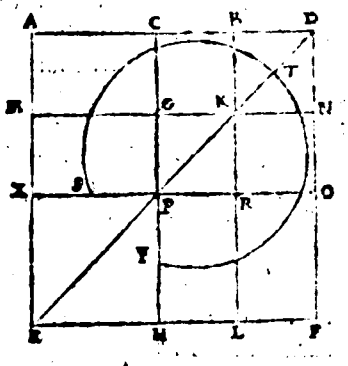


46. primi. 31. primi. 34. primi.

Secetur recta linea AB in partes inæquales in C ita vt AC maior sit quàm CB; & ipsi CB æqualis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB æqualia esse rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum quadrato rectæ lineæ DC, qua scilicet AC ipsam CB superat. constituantur enim ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D ducta linea DK, ipsi CE parallela, producatur GH, vt secet DK in L. Itaque quoniam AD est æqualis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipsi AC æqualis. Sed GL est æqualis BD, & CE æqualis AC. ergo & GL ipsi CE æqualis erit. est autem & CH æqualis HG. reliqua igitur EH reliquæ HL est æqualis: ideoq; KH est quadratum, quod à linea KF, hoc est DC describitur. rectangula vero AK DG sunt quæ continentur lineis AC CB; etenim AD est æqualis BC, & DB ipsi AC. quadrata igitur ex AC CB æqualia sunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipsius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur.



34. primi. 36. primi.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB BC contẽtum vnà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC, tamquam ex vna linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; et ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturq; ex AD quadratum AEFD; et dupla figura constituatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis; BD vero ipsi KN: erit et GK æqualis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est æqualis. et quoniam CB est æqualis BD, et GK ipsi KN; erit rectangulum

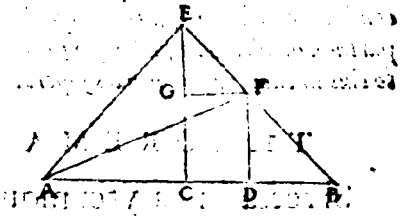
quidem

43.primi. quidem CK rectangulo KD; rectāgulū vero GR ipſi RN ęquale. Sed CK eſt æquale RN, ſuppleměta enim ſunt parallelogrāmi CO. ergo et KD æquale eſt GR, et quattuor rectāgula DK KC GR RN inter ſe æqualia; ideoq; quadrupla ſunt rectāguli CK. Rurſus quoniā CB eſt ęqualis BD, et BD quidē ipſi BK, hoc eſt ipſi CG æqualis; CB vero ipſi GK, hoc eſt GP: erit et CG æqualis GP. eſt autem et PR ipſi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipſi RF æquale erit.

43.primi. Sed MP eſt æquale PL; ſupplementa enim ſunt ML parallelogrammi. quare et AG ipſi RF eſt æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter ſe æqualia ſunt, ac propterea ipſius AG quadrupla. Oſtenſum autem eſt et quattuor CK KD GR RN quadrupla eſſe CK. quare octo continentia gnomonem STY ipſius AK quadrupla ſunt. et quoniam AK eſt quod AB BC continetur; etenim BK eſt æqualis BC; erit contentum quater AB BC ipſius AK quadruplum. At demonſtratus eſt gnomon STY quadruplus AK. quod igitur quater AB BC continetur ęquale eſt gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC eſt æquale. ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC ęquale eſt ipſi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum ſunt AEFD quadratum, quod deſcribitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale eſt ei, quod ex AD, hoc eſt ex AB BC tamquam ex vna linea deſcribitur, quadrato. ergo ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquę partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea deſcribitur. quod oſtendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes ęquales, et in partes inęquales ſecta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati linea eius, quę inter ſectiones interijcitur.



Recta enim linea quędam AB ſecta ſit in partes ęquales ad C, et in partes inęquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC

11.primi. CD dupla eſſe. Ducatur enim à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipſarum AC CB ęqualis ponatur, iungantur; EA EB.

31.primi. ac per D quidem ipſi CE parallela ducatur DF; per F vero ipſi AB parallela FG, et AF iungatur. itaque quoniam AC eſt ęqualis CE; erit et

5.primi. 32.primi. angulus EAC angulo AEC ęqualis. Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto ęquales erunt. et ſunt æquales inter ſeſe. vterque igitur ipſorum AEC EAC recti eſt dimidius. eadem ratione et recti dimidius eſt vterque ipſorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus eſt. et quoniam angulus GEF dimidius

29.primi. eſt recti, rectus autem EGF; ęqualis enim eſt interiori, et oppoſito ECB; erit et reliquus EFG recti dimidius: æqualis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG. quare et latus

6.primi. EG lateri GF eſt ęquale. rurſus quoniam angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autem FDB, quòd ſit æqualis interiori, et oppoſito ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis eſt angulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. et quoniam AC eſt æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla ſunt quadrati ex AC. quadratis autem ex

41.primi. AC CE ęquale eſt quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG æqualis eſt GF, et quadratū ex EG quadrato ex GF eſt æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla ſunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale eſt quod ex EF quadratum. Ergo

quadratum

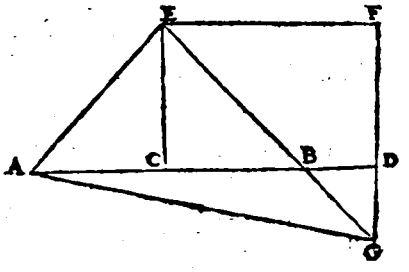
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorũ ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata, rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interiicitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Possumus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Iisdem enim positis quoniam recta linea AB secatur in partes aequales ad punctum C, et in partes inæquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipsam CD superat. Ergo ex iis, quæ demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex AC CD aequalia sunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipsius DB quadrato: ideoq; quadrata ex AC CD unà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipsius DB, dupla sunt quadratorũ ex AC CD. Sed quadratum ex AD est aequale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. quadrata igitur ex AD DE quadratorum ex AC CD sunt dupla. quod oportebat demonstrare. 4.huius.

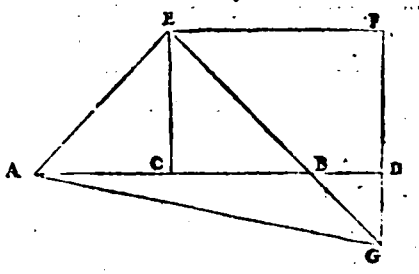
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur.



Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in rectum adiiciatur quędam recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. ducatur enim à punctο C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtriquε ipsarum AC CB æqualis ponatur; iunganturq; AE EB: et per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipsi CE. et quoniã in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur, conueniunt inter se se. Ergo EB FD productæ ad partes BD conuenient; producantur, et conueniant in punctο G, et AG iungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, et angulus AEC angulo EAC æqualis erit: atque est rectus qui ad C. vterque igitur ipsorum EAC AEC est recti dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidius recti; erit et recti dimidius DBG; cum sit aduerticem. Sed et BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidius est recti, et ob id ipsi DBG æqualis. ergo et latus BD æquale lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est

11.primi.
31.primi.
29.primi.
Ex demonstratis ad.
29.primi.
5.primi.
15. primi.
29.primi.



enim angulo oppoſito qui ad C ęqualis;erit et reliquus FEG recti dimidius,et æqualis ipſi E GF. quare et latus GF lateri EF eſt ęquale. et cũ EC ſit ęqualis CA;et quadratũ ex EC ęquale eſt ei,quod ex CA,quadrato.ergo quadrata ex EC CA dupla ſũt quadrati ex C A. quadratis aũt ex EC CA ęquale eſt quadratũ ex E A. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum.rurſus quoniã GF eſt ęqualis F E, æquale eſt et ex G F quadratũ quadrato ex F E.quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF ſũt dupla.at quadratis ex GF FE æquale eſt,quod ex EG quadratũ.ergo quadratũ ex E G duplum eſt quadrati ex E F.æqualis aũt eſt EF ipſi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed oſtenſum eſt quadratũ ex E A duplum quadrati ex AC.ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC C D ſũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale eſt quod ex A G quadratum.quadratum igitur ex A G duplũ eſt quadratorũ ęx AC CD.at quadrato ex A G æqualia ſunt ex A D D G quadrata.ergo quadrata ex A D DG ſunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed D G eſt æqualis D B.quadrata igitur ex AD DB quadratorũ ex A C C D ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur,et ipſi in rectũ quædam recta linea adiiciatur; quę à tota cũ adiecta,et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla ſunt, et quadrati dimidię, et quadrati,quod ab ea,quæ ex dimidia,et adiecta conſtat tamquam ab vna linea deſcribitur. quod oſtendere oportebat.

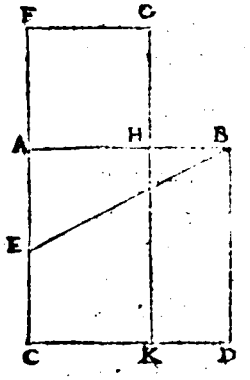
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quoque aliter demonſtrabimus.

Quoniam enim recta linea A B ſecatur bifariam in C, & ipſi adijcitur B D, erit B D linea, qua D C ipſam C A ſuperat quare ex demõſtratis ad ſeptimã huius quadrata ex A C C D aequalia ſunt rectangulo, quod bis continetur A C C D, & quadrato ipſius B D. ergo quadrata ex A C C D vnà cum rectangulo,quod bis A C C D cõtinetur,& ipſius B D qnadrato dupla ſunt quadratorum ex A C C D.at quadratum ex A D eſt aequale quadratis ex A C C D, & rectangulo bis A C C D contento.quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla erunt, quod demonſtrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineã ſecare, ita vt quod tota,et altera parte cõtinetur rectãgulũ ęquale ſit ei,quod à reliqua parte fit, quadrato.



Sit data recta linea A B. oportet ipſam A B ita ſecare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei,quod à reliqua parte fit,quadrato.Deſcribatur enim ex A B quadratum A B C D:ſeceturq; A C bifariam in E,et B E iungatur: deinde producta C A in F,ponatur ipſi B E ęqualis E F : deſcribaturq; ex A E quadratum F G H A:et G H ad K producatur. Dico A B ſectam eſſe in H, ita vt A B H rectangulum æquale ſit quadrato ex A H.Quoniam enim recta linea A C bifariam ſecatur in E, adiiciturq; ipſi in rectum A F; rectãgulum C F A vnà cum quadrato ex A E ęquale erit quadrato ex E F. Sed E F eſt æqualis E B. rectangulum igitur C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt ei, quod fit ex E B,quadrato.quadrato autem ex E B æqualia ſunt quadrata ex B A A E etenim angulus ad A rectus eſt.ergo rectangulum C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt quadratis ex B A A E.commune auferatur, quod ex A E quadratum.reliquum igitur rectangulum

1.huius.
47 primi.

lum C F A æquale eſt quadrato ex A B. eſt autem C F A quidem rectangulum F K. ſiquidem A F eſt æqualis F G: quadratum autem ex A B eſt ipſum A D. rectangulum igitur F K æquale eſt quadrato A D. commune auferatur A K. ergo reliquum F H reliquo H D eſt æquale. atque eſt H D rectangulum A B H, cum A B ſit æqualis B D, et F H eſt quadratum ex A H. rectangulum igitur A B H quadrato ex A H æquale erit. quare data recta linea A B ſecta eſt in H, ita vt A B H rectangulum quadrato ex A H ſit æquale. quod facere oportebat.

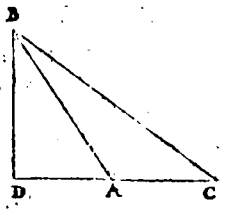
SCHOLIVM.

Ex hoc conſtat geometricam eſſe analogiam. quoniam enim A B ſecta eſt in H, & quod A B B H continetur quadrato A H eſt æquale. hoc autem ſoli geometricæ accidit medietati. Hanc in ſequentibus extrema, ac media ratione ſecari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum eſt, non dicit extrema, ac media ratione ſecari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

In obtuſiangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum maius eſt quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę ſunt circa obtuſum angulum, in quod ſcilicet protractū perpendicularis cadit, et linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit obtuſiangulum triangulum A B C. obtuſum angulum habens B A C: et ducatur à puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico quadratum ex B C maius eſſe, quàm quadrata ex B A A C, rectāgulo, quod bis C A A D continetur. Quoniam enim recta linea C D ſecta eſt vtcumque in puncto A, erit quadratum ex C D æquale, et quadratis ex C A A D, et ei quod bis C A A D continetur rectangulo. commune apponatur ex D B quadratum. quadrata igitur ex C D D B æqualia ſunt et quadratis ex C A A D D B, et rectangulo, quod bis C A A D continetur. Sed quadratis ex C D D B æquale eſt quadratum ex C B. rectus enim eſt angulus ad D, cum ſit B D perpendicularis. quadratis vero ex A D D B æquale eſt quadratum ex A B. quadratum igitur ex C B æquale eſt et quadratis ex C A A B, et rectangulo bis C A A D contento. Ergo quadratum ex C B maius eſt, quàm quadrata ex C A A B, rectangulo quod bis C A A D continetur. In obtuſiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit, maius eſt quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę ſunt circa obtuſum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. quod demonſtrare oportebat.



12. primi.

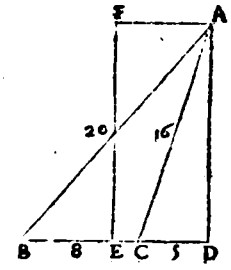
4. huius.

47. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quæ in hoc theoremate demõſtrata ſunt poſſumus cuiuſlibet trianguli; obtuſum angulum habentis aream dimetiri.

Sit triangulum obtusiangulum A B C, habens angulum A C B obtusum; sitq́, latus A B exempli gratia pedum viginti, B C octo, & C A sex decim: & à puncto A ad B C protractam ducatur perpendicularis A D. Primum igitur quanta sit linea C D, quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq́, laterum A C C B, quae sunt circa obtusum angulum simul sumpta à quadrato lateris A B, quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus; & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris B C. ex hac enim diuisione prouenit linea, quam quærimus. est autem quadratum lateris A C 256, & quadratum ipsius B C 64, quae simul sumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris A B, relinquuntur 80, atque his diuisis per 16, videlicet per duplum ipsius B C prodibunt 5, & tot pedum erit

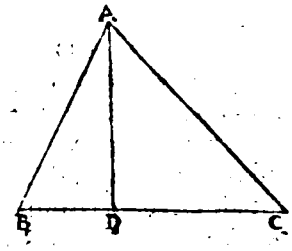


47. primi. *linea C D. Itaque quoniam triangulum A C D rectangulum est, quadratum lateris A C aequale erit quadratis, quae fiunt ex C D D A. quare dempto quadrato lineae C D, quod est 25 à quadrato ipsius A C 256, reliquum erit quadratum perpendicularis A D, quod est 231, cuius latus A D est 15 $\frac{1}{3}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inueniatur, docuimus in nostris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimensione. Vt igitur trianguli A B C aream habeamus, secetur B D bifariam in puncto E, & ab eo ducatur E F ipsi D A parallela; rursusq́, à puncto A ducatur parallela ipsi D B, & conueniens cum E F in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum A D E F aequale triangulo A B D: vtrumque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est B D, & altitudo eadem A D. Ergo ducta E D, quae est 6 $\frac{1}{2}$ in A D 15 $\frac{1}{3}$ proueniet area rectanguli A D E F, & ob id etiam A B D trianguli 98 $\frac{4}{6}$ pedum quadratorum. Eadem ratione inuenietur area trianguli A C D esse eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à 98 $\frac{4}{6}$ relinquentur 60 $\frac{4}{6}$ proximè, pro area trianguli A B C, quam nobis inquirendam proposuimus.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est, quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpẽdicularis cadit, et linea à perpẽdiculari intus assumpta ad angulũ acutũ.

Sit acutiangulum triangulum A B C acutum habens angulum ad B: et ducatur à puncto A ad B C
12. primi. perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C minus esse, quàm quadrata, quę ex C B B A, rectangulo, quod bis C B B D continetur. Quoniam
7. huius. enim recta linea C B secta est vtcumque in D, erũt quadrata ex C B B D æqualia, et rectangulo quod bis C B B D continetur, et quadrato ex D C. commune apponatur quod ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, et rectangulo bis C B B D contento.
47. primi, et quadratis ex A D D C. Sed quadratis ex B D D A æquale est quod ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale est quadratum ex A C. quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei quod bis C B B D continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quàm quadrata ex C B B A rectangulo, quod bis C B B D continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtẽdẽte fit, minus est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutũ. quod demonstrare oportebat.

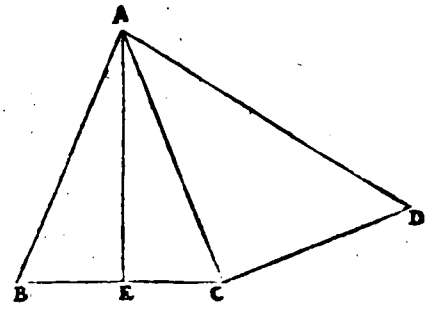


SCHOLIVM

SCHOLIVM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quae sequuntur. Itaque si rectangulũ sit triangulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematis est hoc.

Sit quadratũ ex AB minus quàm quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõtinetur, et reliqua deinceps; atque à pũcto C ipsi C A ad rectos angulos ducatur C D, quæ ipsi C B sit æqualis. ergo quadrata ex BC C A æqualia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC C A minus est quadratum ex A B. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autem ex DC CA æquale est quadratum ex D A. quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, et ipsa DA maior, quàm A B. Itaque quoniam duæ D C C A duabus B C C A æquales sunt, et basis D A maior basi A B, erit et angulus D C A angulo A C B maior. rectus autem est D C A. ergo A C B acutus erit. quod oportebat demonstrare.



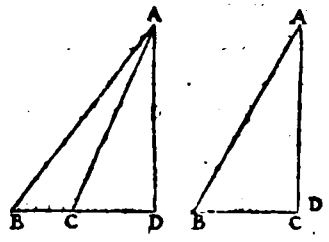
47. primi.

25. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quę duos angulos necessariò habent acutos. Quare dicemus præsens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari A D, punctum D cadit inter B C, vel extra, vel in ipsam C, ita vt A D sit eadem, quae A C. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quae acutiangula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur. At si cadat in alterum latus eorum, quae acutis angulis subtenduntur, nihilominus idem sequetur, vt demonstrabimus.

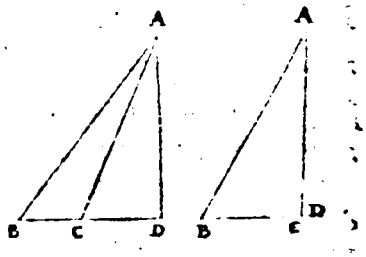
Sit obtusiangulum triangulum A B C, obtusum habens A C B angulum, et ducatur à puncto A ad B C protractam perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C, acutum angulum A B C subtendente minus esse. quàm quadrata, quæ ex A B B C fiunt, rectangulo, quod bis C B B D continetur.



Quoniam enim A B D triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB aequale est quadratis, quę ex BD D A. commune addatur quadratum ex BC. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt quadratis ex BD D A BC. Sed quadrato ex BD aequalia

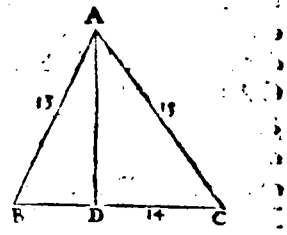
aequalia ſunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC eſt aequale. Quadrata igitur ex AB BC aequalia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. 3. huius. *Sed quadrato ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur aequale eſt rectangulum CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD aequale eſt rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC aequalia ſunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus eſt, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.*

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC ſubtendit minus eſſe, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



Quoniam enim triangulum rectangulum eſt, erit perpendicularis AD eadem, quae latus trianguli AC, & punctum D idem, quod C. quadratum vero, quod fit ex AB aequale quadratis ex BC CA. communi addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC aequalia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc eſt rectangulo, quod bis cõtinetur CB BD. Quadratũ igitur ex AC minus eſt quàm quadrata ex AB BC rectangulo, quod bis CB BD continetur. quod demonſtrare oportebat.

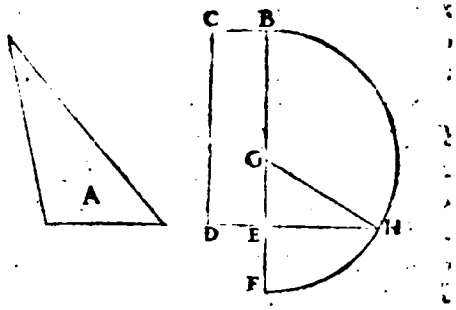
Ex proxime demonſtratis licebit cuiuſque trianguli, ſiue acutianguli, ſiue rectanguli, ſiue obtuſianguli quod nota latera habeat, aream inuenire.



Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quae inter BC neceſſario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B ſubtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC ſimul iunctis auferemus, & quod reliquitur, diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & proueniet recta linea BD, quae à perpendiculari intus aſſumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod ſubtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipſius BD, et eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC eſt 225. quadratum vero ipſius AB 169, & quadratum BC 196, quae duo ſimul iuncta faciunt 365. ergo ſublatis 225 à 365 relinquuntur 140: atque his per 28 diuiſis prouenient 5: ac propterea BD erit pedum quinque. Rurſus ſi à quadrato lateris AB, hoc eſt à 169 auferatur quadratum BD, quod eſt 25, relinquetur 144, cuius quadrati latus eſt 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in baſis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area trianguli ABC, quam à principio quærebamus.

PROBLEMA II.
ROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.



Sit datum rectilineum A. oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere. 45. primi. conſtituatur rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. Si igitur BE eſt æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum cõſtitutum eſt BD: ſin minus, vna ipſarum BE ED maior eſt. ſit BE maior; et producatur ad F, ponaturq; ipſi ED æqualis EF. deinde ſecta FB bifariã in G,

centro

centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturq; DE in H, et GH iungatur. quoniã igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, et inæquales ad E; erit rectangulum BEF vnà cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur BEF vnà cum quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum BEF vnà cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum BEF est æquale quadrato ex EH. Sed rectãgulum BEF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammũ quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. quod facere oportebat. 5. huius.

E. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuersalius est, quod in sexto libro demonstratur, nempe. Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

LIBRI SECVNDI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

SCHOLIVM.

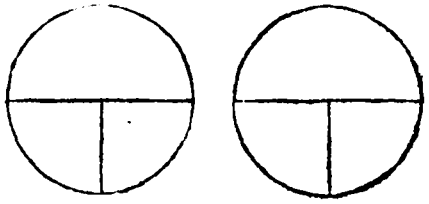
Propoſitum Euclidi eſt hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES.

I.

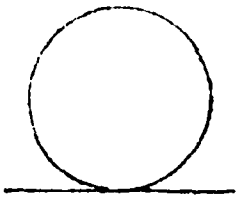


EQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.



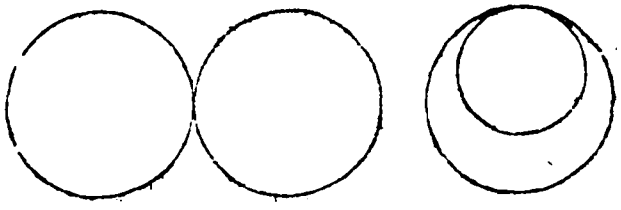
II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, et producta ipſum non ſecat.



III.

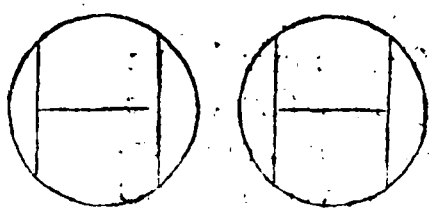
Circuli contingere ſe ſe dicũtur, qui contingentes ſe ipſos non ſecant.



Incircule

IIII.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpẽdiculares ductę sũt æquales.



V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

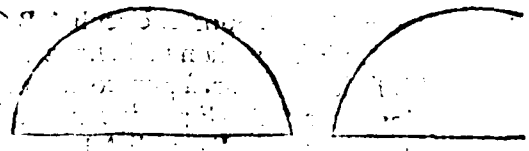
VI.

Portio circuli est figura, quę recta linea, et circuli circumferẽtia continetur.



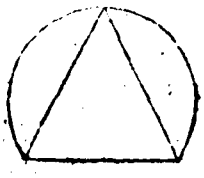
VII.

Portionis autẽ angulus est, qui recta linea, et circuli circũferentia cõprehẽditur.



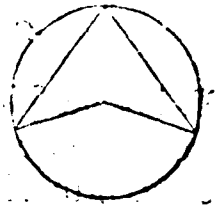
VIII.

In portione angulus est, quando in circũferentia portionis sumatur aliquod punctum, atquo ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectę lineæ ducantur; angulus vero ductis lineis fit cõtentus.



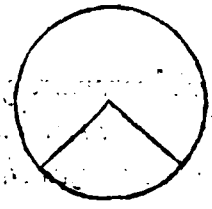
VIIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.



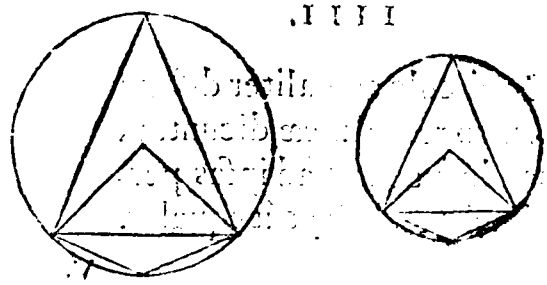
X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum cõstituerit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentia ab ipsis assumpta.



XI.

Similes circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

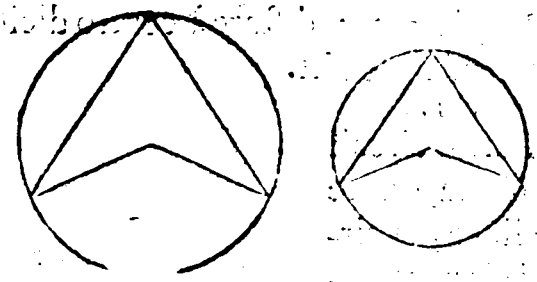


XII.

A FED. COMMAN.

ADDITA.

Similes circumferentiæ circulorum ſunt, in quibus anguli conſiſtunt æquales.

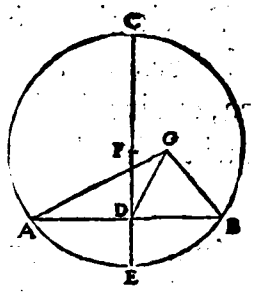


PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipſo quędam recta linea AB vtcũque, et in puncto D bifariam ſecetur. à puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducta DC in E producatur; et ſecetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit G, et GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD eſt æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB ęquales, altera alteri: et baſis G A ęqualis eſt baſi G B. ſunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB eſt ęqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB eſt rectus. Sed et rectus FDB. ęqualis igitur eſt angulus FDB angulo GDB, maior minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. Similiter oſtendemus neque aliud eſſe, præter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. quod facere oportebat.

10. primi. 11. primi. Diffi. 15 pri. 8. primi. diffi. 10. pri.



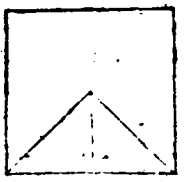
COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo quędam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos ſecet, in ſecante circuli centrum ineſſe.

SCHOLIVM.

Conuerſum diffinitionis circuli. *Ex theoremate oſtenditur conuerſum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus eſt.*

Non enim, sed si fieri potest, sit rectilineum, et sit aliquod ipsius latus, in quod incidant duæ rectæ lineę ipsum determinantes: erit igitur æquicrure triangulum: atque eius basi bifariam secta, si ducatur recta linea, rectos angulos faciet, et vtroque latere trianguli minor erit. quod est absurdum, ponūtur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidūt, æquales esse.



ALIVD.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico, eam, quæ maxime elementaris est, triangulum videlicet æquilaterum in factionē initio proposuit, ob constructiones earum, quæ deinceps sunt, demonstrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit. hoc enim circuli ipsius ortus causſa est.

Triangulum æquilaterum figura maxime elementaris est.
Cētrum, circuli ipsius ortus causſa est.

ALIVD.

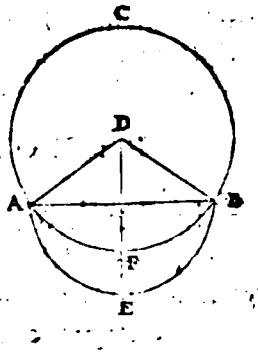
Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, sed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tanquam factis iam circulis, etiam centra manifesta sunt. at in his cum quæratur substantia, centrum etiam quæritur: quod quidem substantiam circuli complet. hoc autem primum, vt inquiunt, inter problemata, et theoremata mediū est. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus vero non in factionem, sed in inuentionem, ob id proponit contemplari. Itaque mihi videtur formatam habens propositionem theorema esse, vt si de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera æqualia sunt, & anguli, inuenire si baſes sint æquales. quemadmodum enim illic symptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ ineſt, ita & hoc loco, quod ineſt naturæ circuli. At si problematis proprium, & contrarium propositioni suscipit, multo magis quod propositum est problematis denominationem effugiet.

Cētrum substantiam circuli cōplet.
Inter problemata, ac theoremata medium.

THEOREMA I. PROPOSITIO. II.

Si in circumferentia circuli, duo quęuis puncta sumantur, quæ ipsa coniungit recta linea intra circulum cadet.

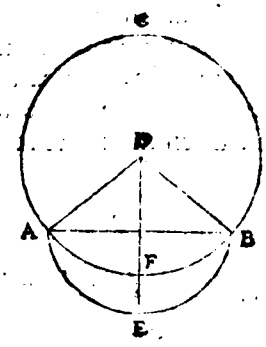
Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quęuis puncta AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat extra, vt AEB, et sumpto circuli ABC centro, quod sit D, iungantur DA DB, et producatur DF in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB; erit et angulus DAE angulo DBE æqualis. et quoniam triangali DAE vnū



Ex antecedente.

5. primi.

16 primi. latus AEB protẽditur, angulus DEB angulo DAE ma
ior erit. angulus autem DAE ęqualis eſt angulo DBE.
18. primi. ergo DEB angulus angulo DBE eſt maior. Sed maio-
ri angulo maius latus ſubtẽditur. maior igitur eſt DB
ipſa DE. eſt aũt DB æqualis DF. Ergo DF eſt maior D
E, minor maiore, quod fieri nõ poteſt. non igitur à pũ-
* cto A ad B ducta recta linea extra circulũ cadet. Simili
ter oſtẽdemus neque in ipſam cadere circũferentiã. Er
go extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circũferentiã cir
culi duo quęuis pũcta ſumãtur, quæ ipſa cõiũgit recta
linea intra circulũ cadet. quod oportebat demõſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

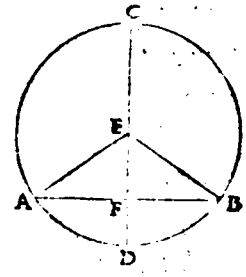
* Similiter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam.

16. primi. 18. primi. *Si enim in ipſam circumferentiam caderet, eadem ratione ſequeretur angulum DFB maiorem eſſe angulo DAF, hoc eſt angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius eſſet. ſed & æquale, quod fieri non poteſt. non igitur in ipſam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quan
dam non ductã per cẽtrũ bifariã ſecet, et ad angulos rectos ipſam
ſecabit. quòd ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, et bifariam ſecabit.

Sit circulus ABC, et in ipſo recta linea per centrum du
cta CD rectam lineam quandam AB non ductam per cen-
trum bifariam ſecet in puncto F. Dico et ad angulos rectos
1. huius. ipſam ſecare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod ſit
E, et BA EB iungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB,
communis autem FE, duæ duabus æquales ſunt, et baſis EA
baſi EB eſt ęqualis. ergo et angulus AFE angulo BFE æqua-
Diffi. 10. pri mi. lis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angu-
los, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vter
que æqualium angulorum. vterque igitur AFE BFE eſt re-
ctus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineã
AB non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit.
Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi
FB ęqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ ex centro eſt ęqualis E
5 primi. B, et angulus EAF angulo EBF æqualis erit. eſt autem et AFE rectus æqualis recto
BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habẽt,
vnumq; latus vni lateri æquale EF, commune ſcilicet vtriſque, quod vni angulorũ
26. primi. æqualium ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebunt.
atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta re-
ctam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos re-
ctos ipſam ſecabit. quòd ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, et bifariam ſecabit. quod
oportebat demonſtrare.



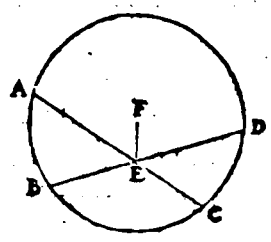
THEOREMA. III. PROPOSITO. IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent non ductę per
centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe inuicem ſecent in pun-
cto E, non ductę per centrum. Dico eas ſe ſe bifariam nõ ſecare. Si enim fieri poteſt,

ſecent

secent se se bifariam, ita vt AE sit æqualis EC, et BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, quod sit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrũ ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniã recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per cẽtrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.



1. huius.

Ex antecedente.

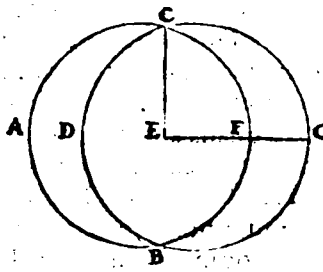
SCHOLIVM.

Si rectæ lineæ per centrum transirent, quærendum vtique non esset, an bifariam se inuicem secent. ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter & si altera per centrum transeunte, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum transit bifariam non secatur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrũ.

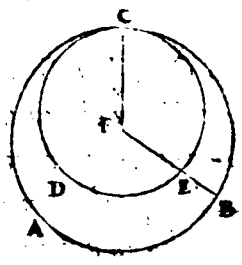
Duo enim circuli se inuicem secent ABC CDG in punctis BC. Dico ipsorum idem cẽtrum nõ esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; iungaturq; EC, et EFG vtcunque ducatur. Et quoniam E cẽtrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE æqualis EF, ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrum. quod ostendendum fuit.



THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

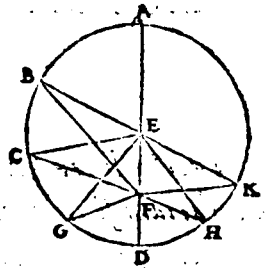
Duo enim circuli ABC CDE contingat se se intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F, iungaturq; FC, et FEB vtcunque ducatur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo et FE ipsi FB est æqualis, minor maiori; quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idẽ centrum non erit. quod demonstrare oportebat.



THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quędam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum tranſit, ſemper remotiore maior eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtraſque partes minimę.

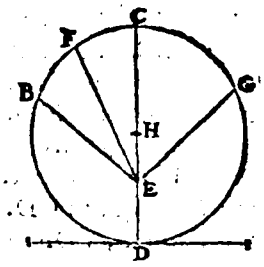


Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: et in ipſa AD ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et à puncto F in circulum ABCD cadant quędam rectę lineę FB FC FG. Dico FA maximam eſſe, et FD minimam: aliarum vero FB quidē maiorem quàm FC, et FC maiorem quàm FG. Iungātur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora; erunt BE EF maiores quàm BF. 20. primi. eſt aūt AE æqualis EB. Ergo BE EF ipſi AF sūt æquales. maior igitur eſt AF quàm FB. rurſus quoniā BE eſt æqualis EC, communis autem FE, duę BE EF duabus CE EF æquales ſunt. Sed BEF angulus maior eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt 24. primi. maior. eadem ratione et CF maior eſt quàm FG. rurſus quoniam GF FE maiores ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF FE maiores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF maior eſt quàm reliqua FD. maxima igitur eſt FA, et FD minima: maior vero BF quàm FC, et CF quàm FG maior. dico et à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtraſque partes 23. primi. minimæ FD. conſtituatur enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quoniā igitur GE eſt æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales ſunt: et angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis erit. dico à puncto F in 4. primi. circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat FK. et quoniam FK eſt æqualis FG, eſtq; ipſi FG æqualis FH; erit et FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Vel hoc modo. iungatur EK. et quoniam GE ipſi EK eſt æqualis, communis autem FE, et baſis GF æqualis baſi FK; erit et angulus GEF æqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF eſt æqualis. angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipſi GF. ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diamtero aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, et reliqua quę ſequuntur. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si intra circulum punctum ſumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima ſit, vna vero minima, & reliquarum aliæ ſint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem ſunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter diſtant.

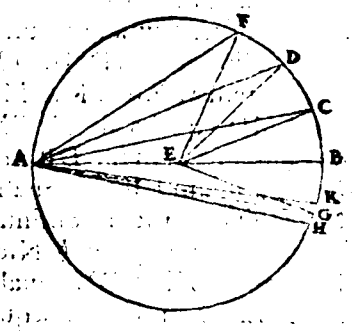
Per



Per punctum enim E, quod eſt intra circulum maxima quidem ſit EC, minima vero ED; et FE quàm EB maior. Dico CE per centrum tranſire, et DE ipſi eſſe in directum; EF vero centro propinquiorem eſſe, quàm EB. Si enim CE non tranſit per centrum, ſed alia quædam à puncto E in circulum cadēs, illa maxima erit per ſeptimum theorema. eſt autem et EC maxima, quod fieri non poteſt. diameter igitur eſt CE, et ipſi in directum ED. Dico EF centro H propinquiorem eſſe, quàm EB. Si enim non eſt propinquior, vel remotior eſt, vel æqualiter diſtat: et ſiquidem remotior, maior erit BE, quàm EF, quod fieri non poteſt. non enim ponitur ita eſſe. Quòd ſi æqualiter diſtant, æquales ſunt. ſed neque hoc ponitur. propinquior igitur eſt FE ipſi H, quàm EB, et GE ipſi EB eſt æqualis. Ergo à centro H æqualiter diſtant, inæqualiter enim diſtantes inæquales ſunt, per ſeptimum theorema, quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud quoque verum eſt, quod nos demonſtrauimus in commentario in propoſitionem octauam libri Archimedis de lineis ſpiralibus.



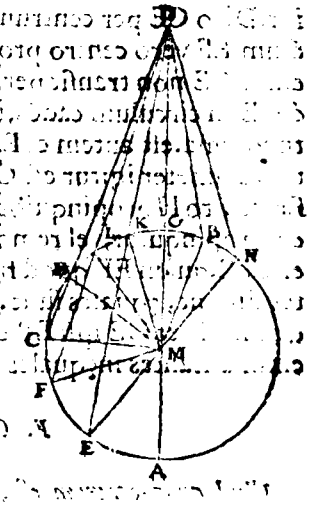
Si in circumferentia circuli aliquod ſumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineę; quæ per centrum tranſit, omnium erit maxima, aliarum verò quæ tranſeunti per centrum propinquiores ſunt, remotioribus erunt maiores; duę autem tantum æquales ſunt ad vtraſque partes maximæ.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectę lineæ, quarum vna per centrum tranſeat, alię verò vtcunque: earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt, maxima eſt, quę per centrum tranſit; aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, ſemper remotiore maior eſt. at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt minima eſt, quæ inter punctum, et diametrum interijcitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ ſemper remotiore eſt minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ.

Sit circulus ABC, et extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectę lineæ quędam DA DE DF DC; ſitq; DA per cētrum. Dico earum quidem quæ in concauam AEFC circumferentiam cadunt, maximam eſſe DA, quæ per centrum tranſit; et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG: maiorem autem DE quàm DF, et DF maiorē quàm DC; earum verò, quæ in curuam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minimæ DG ſemper remotiore eſſe minorem, hoc eſt DK minorem, quàm DL, et DL minorem quàm DH. Sumatur enim centrum circuli ABC, quod ſit M, et iungantur ME MF MC MK ML MH. et quoniam AM eſt æqualis ME, communis

nis apponatur MD. Ergo AD est æqualis ipsis EM MD.
20. primi. Sed EM MD sunt maiores quàm ED. Ergo et AD quàm ED est maior. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, cõmunis apponatur MD. erũt EM MD ipsis MF MD æquales; et angulus EMD maior est angulo FMD. basis igitur
24 primi. ED basi FD maior erit. Similiter demonstrabimus et FD maiorẽ esse quàm CD. ergo maxima est DA; maior aũt DE quàm DF, et DF quàm DC maior. preterea quoniam MK KD sũt maiores quã MD, et MG est æqualis MK, erit reliqua KD quàm reliqua GD maior. quare GD minor quàm KD, et idcirco GD minima est. et quoniam trianguli MLD in vno latere MD, quæ rectę lineæ MK KD intra constituuntur, erunt MK KD minores ipsis ML LD,
21. primi. quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. Similiter ostendemus et DL quam DK minorẽ esse. Ergo DG minima est. minor vero DK quàm DL, et DL minor quàm DH. dico et duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad vtrasque minimæ

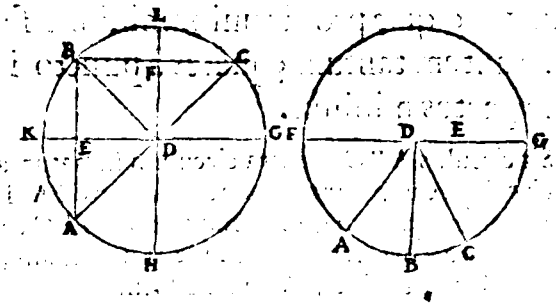


partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M angulo K
14. primi. MD æqualis angulus DMB, et DB iungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, cõ
2. primi. munis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri. et angulus KMD æqualis angulo BMD. basis igitur DK basi DB est æqualis. dico à puncto D nullam aliam ipsi DB æqualem in circulum cadere. si enim fieri potest, cadat DN. et quoniam DK est æqualis DN, et DK ipsi DB est æqualis; erit et DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori; quod fieri non posse ostensum est, vel et aliter. iungatur MN. et quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autẽ MD; et basis DK basi DN æqualis erit, et propterea angulus KMD æqualis angulo DMN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NMD æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare, non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D in circulum ABC ad vtrasque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et reliqua deinceps. quod ostendere oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales; punctũ quod sumitur, circuli centrum erit.

Sit circulus ABC, et intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quàm duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC. Dico punctum D circuli ABC centrum esse. Iungantur enim AB BC, secenturq; bifariam in punctis EF: et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur. quoniam igitur AE est



æqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE ED duabus BE ED æquales; et basis DA est æqualis basi DB. anguius igitur AED angulo BED æqualis erit, et idcirco vterque angulorũ AED BED est rectus. Ergo GK bifariam secans AB, et ad angulos rectos secat, et quoniam si in circulo quædã recta linea, rectam lineam quan-
8. primi.
13 primi.

dam

dam bifariã,et ad angulos rectos ſecet,in ſecante eſt circuli centrum;erit in GK centrum circuli ABC. Eadẽ ratione et in HL centrum eſt ABC circuli,et nullum aliud commune habent rectæ liueę GH HL,niſi punctum D.Ergo D circuli ABC eſt centrum.Si igitur intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod ſumitur circuli centrum erit. Corol.1.huius.

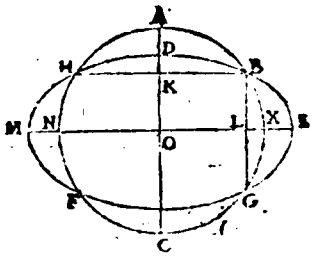
ALITER.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod ſumitur,circuli ABC eſſe centrum. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit E, et iũcta DE in FG producatur.ergo FG diameter eſt ABC circuli.itaque quoniam in FG diametro circuli ABC ſumptum eſt aliquod punctum D, quod non eſt centrum circuli; maxima quidem erit DG, maior autem DC quàm DB, et DB quàm DA maior. Sed et æquales, quod fieri non poteſt. non igitur E centrum eſt circuli ABC. Similiter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum D. ergo D circuli ABC centrum erit.quod oportebat demonſtrare. 7.huius.

THEOREMA IX. PROPO. X.

Circulus circulum in pluribus,quàm duobus punctis non ſecat.

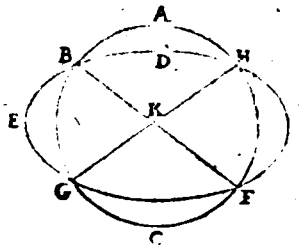
Si enim fieri poteſt,circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quàm duobus, videlicet in B G H F:et iunctæ BG BH bifariam ſecentur in KL. atque à punctis KL ipſis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniã igitur in circulo ABC quędam recta linea AG recta lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos ſecat,in ipſa AC circuli ABC erit centrum.rurſus quoniam in eodẽ circulo ABC, quædam recta linea NX rectam lineam quãdam BG bifariam ſecat, et ad rectos angulos;in ipſa NX centrum erit circuli. oſtenſum autem eſt et in ipſa AC centrum eſſe,et in nullo alio puncto conueniunt inter ſe rectæ lineę AC NX,præterquàm in O. ergo O circuli ABC eſt centrum. Similiter oſtendemus punctum O centrum eſſe circuli DEF. ergo duorum circulorum ſe ſe ſecantium ABC DEF. idem erit centrum O. quod fieri non poteſt, non igitur circulus circulum ſecat in pluribus punctis,quàm duobus.



Corol.1.huius. 5.huius.

ALITER.

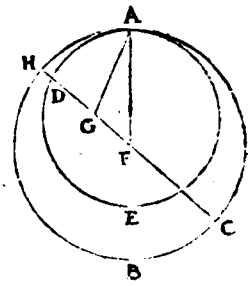
Circulus enim ABC rurſus circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quàm duobus; nempe in B G F H, et circuli ABC centrum ſumatur, quod ſit K;et KB KG KF iungãtur.qm igitur intra circulũ DEF ſumptum eſt aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF;erit punctum K circuli DEF centrum. eſt autem et circuli ABC centrum K. duorũ igitur circulorum, qui ſe ſe ſecant,idem erit K centrum,quod fieri non poteſt. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat,quod oportebet demonſtrare.



THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

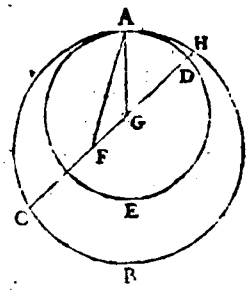
Si duo circuli ſe ſe intus contingant, et ſumantur centra ipſo-

rum; recta linea ipſorum centra coniungens, et producta in circulorum contactum cadet.



Duo enim circuli ABC ADE ſe ſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem ABC cẽtrum, quod ſit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, ſi producatur in punctum A cadere. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat vt F G D H. et
20. primi. AF AG iungantur. Itaque quoniã AG GF maiores ſunt, quàm F A, hoc eſt quàm F H, communis auferatur F G. reliqua igitur AG maior eſt, quàm reliqua GH. Sed AG eſt æqualis GD. ergo GD ipſa GH eſt maior, minor maiore, quod fieri non poteſt. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cõtactum A cadet. quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſe ſe intus contingant; recta linea ipſorum centra coniungens, ſi producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonſtrare.

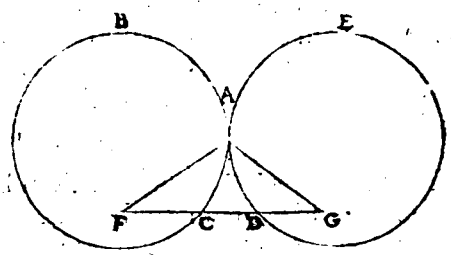
ALITER.



Sed cadat vt GFC, et producatur in directum CF G ad punctum H: iungantur; AG AF. Quoniam igi
20. primi. tur AG GF maiores ſunt quàm AF, et AF eſt æqualis FC, hoc eſt ipſi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH eſt maior: hoc eſt DG maior ipſa GH, minor maiore, quod fieri non poteſt. Similiter et ſi extra circulum paruum ſit centrum maioris circuli, idem ſequi abſurdum oſtendemus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli ſe ſe extra contingant, recta linea ipſorũ centra coniungens per contactum tranſibit.



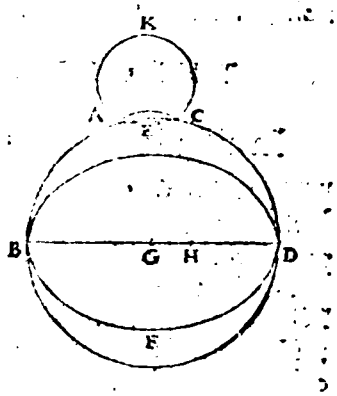
Duo enim circuli ABC ADE ſe ſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem ABC centrum, quod ſit F: circuli vero ADE cẽtrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim ſed ſi fieri poteſt, cadat, vt FCDG: et FA A G iungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rurſus quoniam G centrum eſt ADE circuli, erit AG ipſi GD æqualis. oſtenſa eſt autem et AF æqualis FC. ſunt igitur FA A
20. primi. G ipſis FC DG æquales. ergo tota FG maior eſt, quàm FA AG. Sed et minor, quod fieri non poteſt. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A nõ tranſibit. quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſe ſe extra cõtingant, recta linea ipſorum centra coniungens per contactum tranſibit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus, ſiue extra contingat.

Si

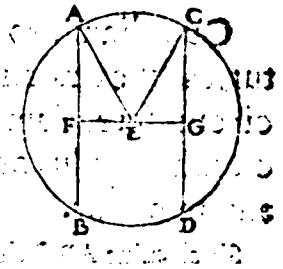
Si enim fieri poteſt, circulus ABDC circulum EBF D contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et ſumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea, quę à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. et quoniam G centrum eſt circuli ABDE, erit BG ipſi GD æqualis. maior igitur eſt BG, quàm HD: et BH quàm HD multo maior. Rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo maior, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra cōtingat in pluribus pūctis, quàm vno, videlicet in AC, et AC iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK ſumpta ſunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quę ipſa coniungit intra vtrumque ipſorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. non igitur circulus circulū extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. circulus igitur circulū non contingit in pluribus punctis; quàm vno, ſiue intus, ſiue extra contingat. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant, et quę æqualiter à centro diſtant; inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC; et in ipſo æquales rectę lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod ſit E, et à puncto ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quędam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, et biſariam ipſam ſecabit. quare AF eſt æqualis FB, ideoq; AB ipſius AF dupla. Eadem ratione et CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipſi CG. Et quoniam AE eſt æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE æqualia ſunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG eſt æquale, erenim æqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum æquale eſt reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectę lineę dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ æquales ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt æqualis ſit FE ipſi EG. Dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Iiſdem enim cōſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, et CD duplā ipſius CG. Et quoniā æqualis eſt AE ipſi EC, erit et ex AE quadratū quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē ex AE æqualia ſunt quadrata ex EF FA: quadrato aūt ex EC æqualia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt. quorum quadratū ex EG æquale eſt quadrato ex EF; eſt enim EG ipſi EF æqualis reliquum igitur ex AF quadratū æquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis, atque eſt AB ipſius AF dupla, et CD dupla ipſius CG. quare AB ipſi CD æqualis erit. In circulo igitur



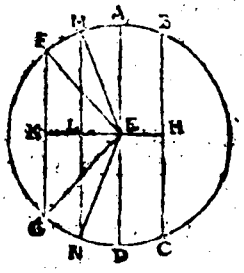
3. huius.

47. primi.

igitur ęquales rectæ lineę æqualiter à centro distant, et quę æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.



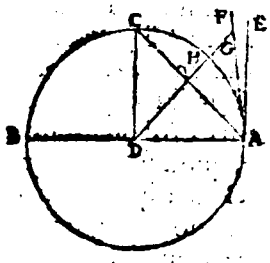
Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E; et propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, et BC maiorem quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares EH EK. Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, et iungantur E M EN EF EG. Quoniam igitur EH est æqualis EL, erit et BC ipsi MN ęqualis. Rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, et DE ipsi EN, erit et AD ipsis ME EN æqualis. Sed M E EN maiores sunt, quàm MN. ergo et AD maior est quàm MN. at MN est æqualis BC. est igitur AD quàm BC maior. Quòd cũ duæ EM EN duabus FE EG ęquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG, et basis MN basi FG maior erit, ostensa autem est MN æqualis BC. ergo et BC quàm FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, et BC maior, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

24. primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quę diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat intus, vt AC, et DC iungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD ęqualis. rectus autem est DAC. ergo et ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis ęquales sunt. quod fieri non potest. Non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat vt AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et circumferentiam CHA interijcitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat vt FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quoniam rectus est angulus ACD, minor autem recto DAG, erit AD quàm DG maior. æqualis autem est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta

5. primi.

17. primi.

19. primi.

linea

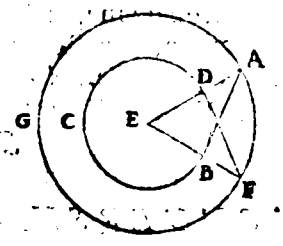
linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lineam AE intericitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere: et rectam lineam contingere circulum in vno tantum puncto, quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipsũ cadit, vt ostẽsum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



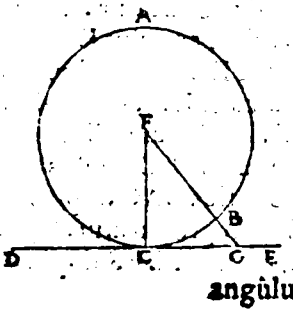
Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, interuallo autem EA circulus AFG describatur: et à puncto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF: iungantur; EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est æqualis: triangulum quoq; DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. et EDF rectus est. quare et rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circulum BCD contingit. quod facere oportebat.

4. primi.

Ex antecedente.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.



Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrũ sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiori autem angulum

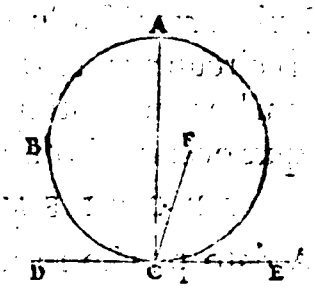
11. primi.

19. primi.

angulum maius latus subtendit. maior igitur est FC, quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo FB ipsa FC est maior, minor maiore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.



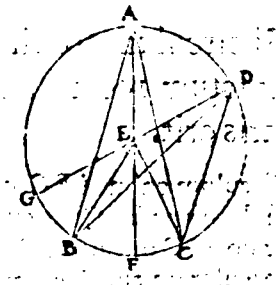
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrũ esse. Non enim, sed si fieri potest, sit F centrum; et iungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC cõtingit quędam recta linea DE, et à centro ad contactum ducta est FC, erit FC ad ipsam DE perpendicularis. rectus igitur angulus est FCE. est autẽ et ACE rectus. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur; producta ad eas partes, in quibus est circulus in circuli cẽtrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

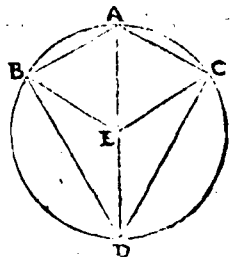
In circulo angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferẽtiam eandem pro basi habeãt.



Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandẽ circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE et ad F producatur. Itaque quoniam EA est æqualis
5. primi. EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. Sed
32. primi. angulus BEF est æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus anguli EAB est duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus BDC, iũctaq; DE ad G producatur. Similiter ostendemus angulum CEG anguli EDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferē tiam, quando circumferentiā eandē pro basi habeant. quod oportebat demōstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

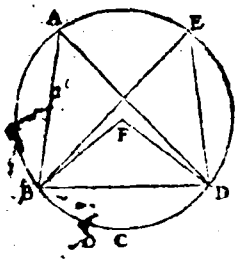


Illud quoque verum est, spacium quod est ad cētrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habuerint.

Sit enim circulus ABC, cuius cētrum E. Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli BAC. iuncta enim AE, & ad D producta, iunctisq; BD DC, similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, et angulus CED duplus anguli CAE, totum igitur spacium BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiā duplum erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

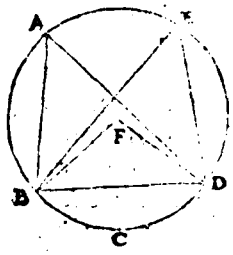
In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.



Sit circulus ABCDE, & in eadem portione BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F: iunganturq; BF FD. & quoniam angulus quidē BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiā, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. In circulo igitur qui in eadē portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

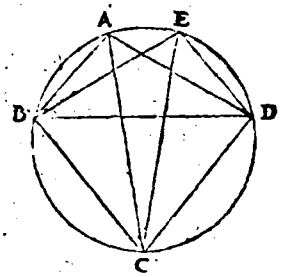
F. C. COMMENTARIVS.

Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcūque ad cētrum pro angulo accipiatur, ex ijs quę nos proxime demonstrauimus, possumus autem & hoc modo demonstrare.



Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter se æquales esse. Sit enim primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura sumaturq; circuli centrum quod sit F: & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED æqualis erit. Sit deinde BAED portio minor: & iungantur BC AC EC DC. Itaque quoniam ex ijs, quae proxime demonstrauimus, angulus BAC est æqualis angulo BEC, itemq; angulus CAD angulo CED; erit et totus angulus BAD toti BED æqualis.

Ex antecedente.

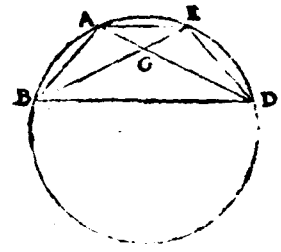


ALITER.

Iungatur AE. erit angulus ABE æqualis angulo ADE. angulus autem AGB ad verticem angulo EGD est æqualis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED æqualis erit. In circulo igitur

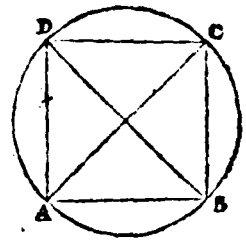
Ex demonstrans. 15. primi.

igitur, qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XX.
PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quę in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt.



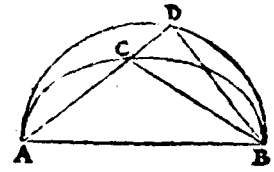
Sit circulus ABCD, et in ipſo quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Iungantur AC BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB eſt æqualis angulo B D C, in eadem enim ſunt portione BADC, et angulus ACB æqualis ipſi ADB, quòd ſint in eadem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB eſt æqualis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui ſunt ad A et C, et ſeorſum vni angulo, qui eſt ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC æquales. Sed ABC BAC ACB ſunt æquales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis æquales erunt. Similiter oſtendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quę in circulis deſcribũtur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. quod oportebat demonſtrare.

32. primi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles et inæquales ex eadem parte non conſtituentur.

* Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones ſimiles, et inæquales conſtituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaque quoniam portio A C B ſimilis eſt portioni A D B, ſimiles autem circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales; erit A C B angulus æqualis angulo A D B, exterior interiori, quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea, duę circulorum portiones ſimiles, et inæquales ex eadem parte conſtituentur. quod demonſtrare oportebat.

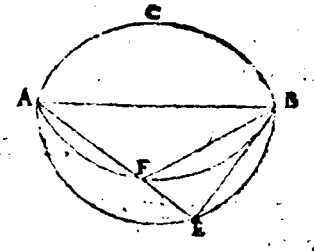


Diffi. 11.

F. C. COMMENTARIVS.

* Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

In uetuſto codice hęc non leguntur, quamquam ad demonſtrationem neceſſaria ſint, tamen neutra ex parte ſimiles, & inæquales circulorum portiones conſtitui poſſunt in eadem recta linea. Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB conſtituatur ex altera parte portio A E B ſimilis, & inæqualis portioni A C B. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB ſimilis & aequalis ipſi ACB; & ducta AFE, iunctiſq; FB BE, ſimiliter demonſtrabitur angulus AFB aequalis an-

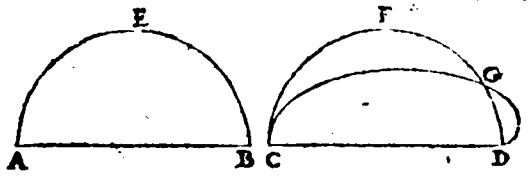


gulo

gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes & inæquales circulorum portiones constituentur. quod demonstrandum fuerat.

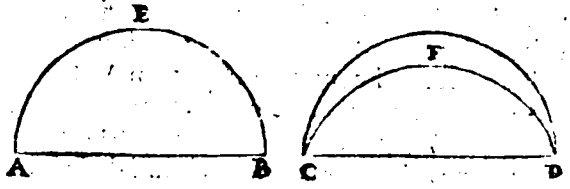
THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.



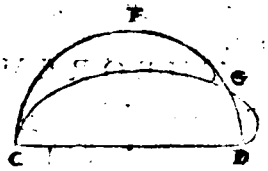
Sint enim in æqualibus rectis lineis AB CD similes circulorum portiones AEB CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem esse. congruente enim AEB portioue portioni CFD, et posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet et B punctum puncto D, propterea quòd AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet et AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipsi CD, portio autẽ AEB portioni CFD non congruẽt, sed permutabitur, vt CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus pũctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectę CD, non congruet et ACB portio portioni CFD. quare congruet et ipsi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis similes circulorũ portiones inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.



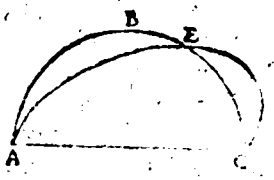
Si enim AB congruet ipsi CD; portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, etreliqua.

Si enim AE recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circũferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circulorum portiones similes & inæquales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedẽte demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. quod itidem fieri nõ potest, ex decima huius. Euclides autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.



Sed & cuiusque prędictarum cõuersum etiam verum est, quod ita demonstrari potest.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt.

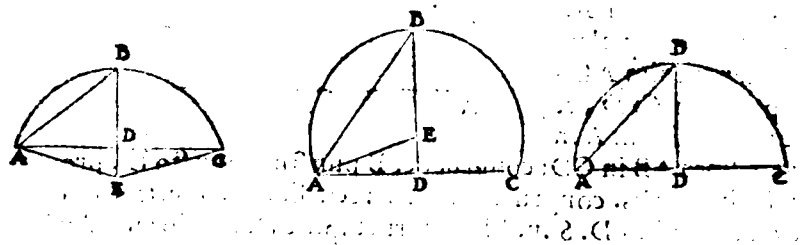


Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC aequales, sed tamen dissimiles: necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiae ABC, alioqui & aequales essent & similes: neque extra, vel intra ipsam cadere. aequales enim non essent. quare relinquitur vt partim intra, partim ex-

ra cadat. quòd fieri non potest, circulus circulum in plurib. quàm duobus punctis secabit. quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis constitui posse aequales & dissimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; vt superius dictum est. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorum portiones similes sunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.



Sit data circuli portio ABC. itaque oportet portionis ABC describere circulũ, cuius est portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis angulo ABD, et DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis angulo BAE, erit et BE recta linea ipsi EA æqualis. et quoniam AD est æqualis DC, communis autẽ DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus. n. vterque est. ergo et basis AE basi EC est æqualis. Sed ostensa est AE æqualis EB. quare et BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus, cuius ea portio est. Sed et illud constat, portionem ABC semicirculo minorem esse; propterea quòd centrum ipsius extra cadit. Similiter et si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, et portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD, constituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipsa DB, atque erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius portio est. quod facere oportebat.

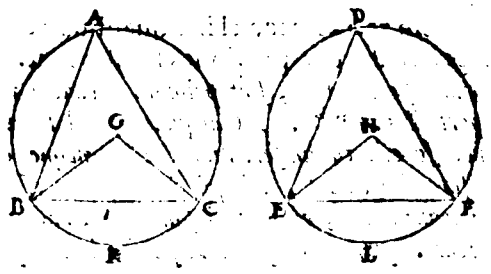
23. primi.

4. primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. Iungantur enim BC EF. Et quoniã æquales sunt ABC DEF circuli, erũt et quæ ex cẽtris æquales. duæ igitur



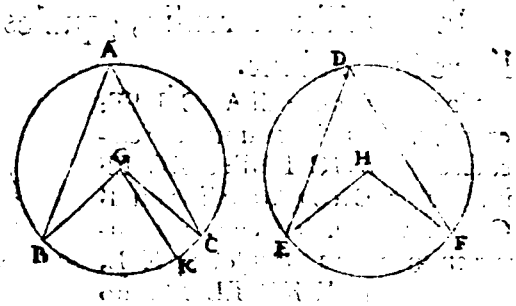
BG GC duabus FH,HF æquales sunt:& angulus ad G æqualis angulo ad H . Ergo et basis BC basi EF est æqualis.Rursus quoniã æqualis est angulus ad A angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF.et sunt in æqualibus rectis lineis BC E F. quæ autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones inter se æquales sunt.portio igitur BAC portioni EDF est æqualis.Sed et totus ABC circulus æqualis est toti DEF.ergo et reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit.In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentiis siue ad centra siue ad circumferentias insistãt.quod oportebat demonstrare. 4.primi. Diffi.11. 24.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.
In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis,siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt; siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.



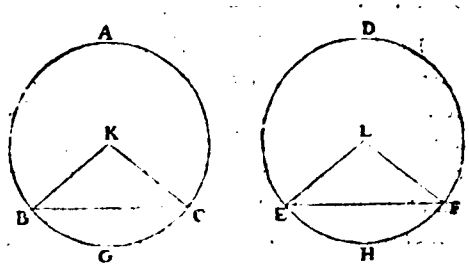
In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF.Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem esse, Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF,manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem.Sin minus,vnus ipsorum est maior.sit maior BGC,et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G angulo EHF æqualis angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint.Ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF.Sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC.ergo et BK ipsi BC est æqualis,minor maiori,quod fieri non pôt . Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF. ergo est æqualis . atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A ; anguli vero EHF dimidius qui ad D . angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis.In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.quod oportebat demonstrare. 23.primi. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Eadem demonstratio erit, si anguli æqualibus circumferentijs eiusdem circuli insistant, vt propositio magis vniuersalis fiat,hoc pacto.
In eisdem vel æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt,siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

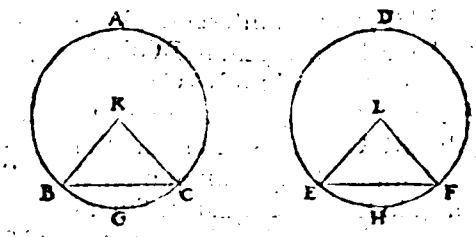


Sint æquales circuli ABC DEF; et in ipſis æquales rectę lineę BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC maiorem maiori circumferentiæ EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem eſſe. Sumãtur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quoniam circuli æquales ſunt, erunt et quæ ex centris æquales. duæ igitur BK KC ſunt æquales duabus EL LF: et baſis BC æqualis eſt baſi EF. Ergo angulus BKC angulo ELF eſt æqualis: æquales autem anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare cirumferentia BGC æqualis eſt circumferentiæ EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF eſt æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliqua EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonſtrare oportebat.

1.huius. Diffi.1. 8.primi. 16.huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.



Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipſis æquales aſſumantur circũferentiæ BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem eſſe. Sumantur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quoniam igitur circumferentia BGC eſt æqualis circumferentiæ EHF, erit et angulus BKC angulo ELF æqualis. Et quoniam circuli ABC DEF ſunt æquales, et quæ ex centris æquales erunt. duę igitur BK KC ſunt æquales duabus EL LF; et æquales angulos continent. quare baſis BC baſi EF eſt æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineę ſubtendunt. quod oportebat demonſtrare.

1.huius. 16.huius. Diffi.1. 4.primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonſtrationes eędem ſint, propoſitiones magis vniuerſales fieri poterunt, in hunc modum.

In eiſdem vel æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

In eiſdem vel æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę ſubtendunt.

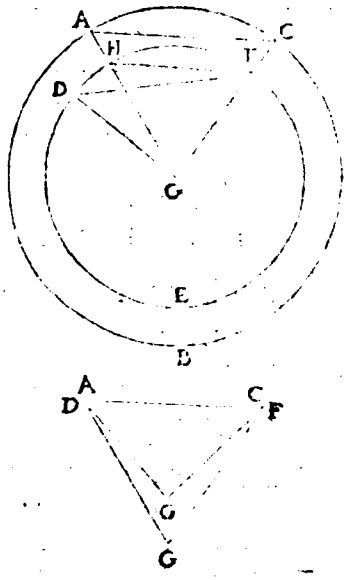
Sed & harum quoddammodo conuerſas, atque alias his non diſſimiles demonſtrare hoc loco non inutile arbitrati ſumus.

PROPOSITIO I.

Si æquales rectæ lineæ æquales, et ſimiles circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorum illæ ſunt circumferentiæ.

Si enim

Si enim fieri poteſt, ſint circuli inęquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G aequalis minori deſcribatur DEF: & iungatur AG GC DG GF, ita vt punctum F cadat in rectam lineam GC: & AG ſecet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectae lineae AC DF aequales ſunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps demonſtrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF ſimilis eſt circumferentiae AC, ex 12 diffinitione huius. in ipſis enim idem angulus AGC conſiſtit. ergo circumferentia DF circumferentiae AC non eſt ſimilis. atqui ſimilis ponebatur. quod eſt abſurdum. non igitur circuli in aequales ſunt. ergo aequales eſſe neceſſarium eſt. At vero angulum AGC minorem eſſe angulo DGF, ita demonſtrabimus.



Intelligatur triangulum AGC ſeorſum, & trianguli DGF punctum D in A ſtatuatur; & punctum F in C. ſint enim AC DF inter ſe aequales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor eſt angulo DGF. quod demonſtrare oportebat.

PROPOSITIO. II.

In circulis inęqualibus ęquales rectę lineę diſsimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex iis, quae nos proxime demonſtrauimus perſpicue apparet. aequales enim rectae lineae AC DF diſsimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inæqualibus ſimiles circumferentias inæquales rectæ lineæ ſubtẽdũt.

Et hoc ſimiliter apparet ex ante demonſtratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF aequalia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit baſis DF baſi HF maior. Sed recta linea AC eſt aequalis ipſi DF. ergo AC HF inęquales ſunt, & ſimiles circumferentias ſubtendũt. quod oportebat demonſtrare.

PROPOSITIO IIII.

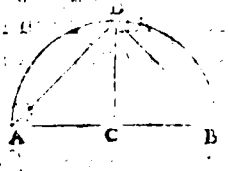
Similes et inęquales circumferentias inæquales rectę lineę ſubtendunt.

Si enim rectae lineae aequales ſint, & circuli item aequales, erunt circumferentiae, quas ſubtendunt, & aequales & ſimiles. Si vero circuli ſint inęquales, circumferentiae diſsimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur & inęquales circumferentias, inęquales rectae lineae ſubtendunt. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.

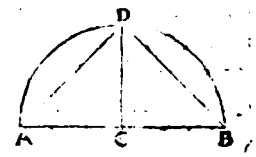
Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam ſecare. Iungatur AB, & in C bifariam ſecetur: à puncto autem C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC eſt aequalis CB, communis autem CD, duae AC CD duabus



10. primi.

BC,

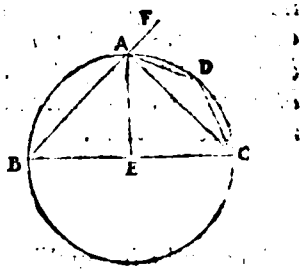
BC CD æquales ſunt: et angulus ACD æqualis angulo
4.primi 28.huius. BCD, rectus enim vterque eſt: ergo baſis AD baſi DB eſt æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. et eſt vtraque ipſarum AD DB circumferentiarum ſemicirculo minor. quare circumferentia AD circumferentiæ D B æqualis erit. data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. quod facere oportebat.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, & qui in minori maior recto; & inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt, minoris vero portionis angulus recto minor.

Sit circulus A B C D cuius diameter B C, centrum autem E; et iungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo BAC rectum eſſe; qui vero in portione ABC maiore ſemicirculo, videlicet angulum ABC minorem eſſe recto, et qui in portione ADC minore ſemicirculo, hoc eſt angulū ADC recto maiorem. iungatur AE, et B A ad F producatur. Itaque quoniam BE eſt æqualis EA, erit et angulus EAB, angulo EBA æqualis. Rurſus quoniam AE
5.primi. eſt æqualis EC, et angulus ACE angulo CAE æqualis erit. totus igitur angulus BAC eſt æqualis duobus ABC ACB angulis. eſt autem et
32 primi. angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis. angulus igitur
15.primi. BAC eſt æqualis angulo FAC. ac propterea vterque ipſorum rectus. Quare in ſemi
17.primi. circulo BAC angulus BAC rectus eſt. et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in portione ABC maiore ſemicirculo. Quòd cum in circulo quadri-
22.huius. laterum ſit ABCD, quadrilaterorum verò, qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis. et angulus ABC minor eſt recto. reliquus igitur A D C recto maior erit, atque eſt in portione ADC minore ſemicirculo. Dico præterea maioris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentia et recta linea A C recto maiorem eſſe; angulū vero minoris portionis contentum circumferentia A D C, et recta linea A C recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit et contentus A BC circumferentia, et recta linea AC recto maior. Rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea C A, et A D C circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, et qui in minori maior recto. et inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt: minoris vero recto minor. quod demonſtrare oportebat.



ALITER demõſtrabitur angulū BAC rectū eſſe. Quoniã enim angulus AEC duplus eſt anguli BAE, etenim duobus interioribus, et oppoſitis eſt æqualis: eſt autem et AEB duplus ipſius EAC: anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed et AEB AEC anguli duobus rectis ſunt æquales. ergo angulus BAC rectus eſt. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi triãguli vnus angulus ſit æqualis duo-

bus

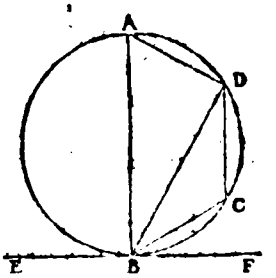
bus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, ijsdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt.

SCHOLIVM.

Si semicirculi omnes ob similitudinem æquales angulos suscipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores; perspicuum est cum similes sint æquales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum angulū diminuunt: similiter et minores semicirculis rectum proportione augent. Ergo similes portiones æquales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quòd heterogenei sint, respectu rectilineorum, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioritate tantum, vt sic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quæ in contraria transmutantur, per media transire consueuerunt. Sed et in alijs inuenire licet hoc modo oppositæ absque medio. etenim quæ circulum comprehendit linea, cum conuexa sit, et cana, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, et à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum vtcunque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD esse æqualem angulo, qui cōstituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD æqualem angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: et in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; iungantur q; AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: et à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdē circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto æquales sunt. Sed et ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, et anguli eius oppositi æquales

11. primi.

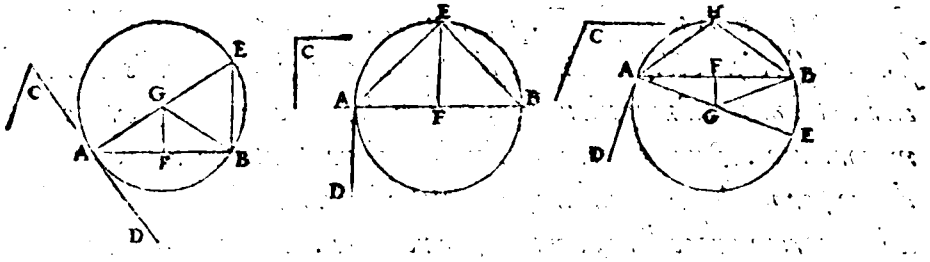
19. huius. Ex antecedente.

32. primi.

22. huius. ri æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



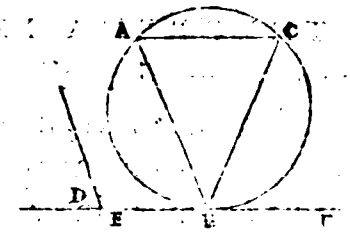
Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet in data recta linea AB describere portionē circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, vt in prima figura, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea
23. primi. datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur an-
11. primi. gulus est BAD, et à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autē
10. primi. AB bifariam in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB: et GB iungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duę AF FG duabus BF FG æquales sunt: et angulus AFG æqualis angulo GFB. ergo basis AG basi
4. primi. GB est æqualis. Itaque centro G, interuallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur et sit ABE, iungaturq; EB. Quoniam igitur ab extremita-
Corol. 16. huius. te diametri AE, et à puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum continget. et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et
Ex antecedente. à contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB: erit angulus DAB æqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C rectus. et oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quę susci-
23. primi. piat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C æqualis angulus BAD, vt in secūda figura, secenturq; AB bifariā in F, et centro F, interuallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB.
Corol. 16. huius. ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea quòd rectus est qui ad A angulus, et angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim et ipse est, in semicirculo consistēs. sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo et qui in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C æqualem. Denique sit angulus ad C obtusus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum A constituatur ipsi æqualis angulus BAD, vt hēt in tertia figura, et ipsi AD rectę lineae ad rectos angulos ducatur AE: secenturq; rursus AB bifariam in F: ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, et GB iungatur. Et quoniam AF est æqualis FB, communis autem FG. duę AF FG duabus BF FG æquales sunt, et angulus AFG angulo BFG æqualis.

lis.basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, interuallo autem AC circulus descriptus etiam per B transibit. transeat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget: et à contactu, qui ad A ducta est AB. quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB cõstituitur est æqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualẽ ei, qui est ad C. quod facere oportebat. 4. primi. Corol. 16. huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

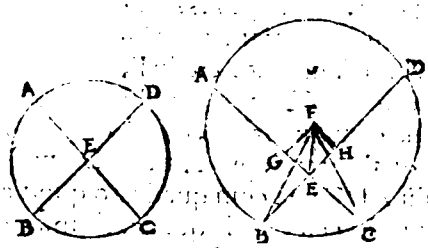
Sit datus circulus ABC: datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quæ suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: et ad rectam lineam BF, et ad punctum in ea B cõstituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à cõtactu B ducta est BC, erit angulus FBC æqualis ei, qui in alterna circuli portione cõstituitur. Sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo et angulus, qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. Data igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. quod facere oportebat. 17. huius. 23. primi.



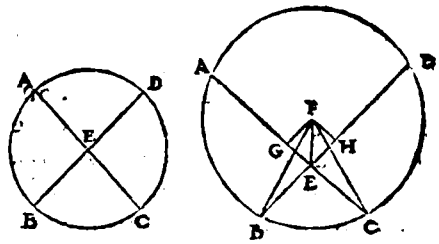
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent rectangulum portionibus vnius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

In circulo enim ABCD duæ rectæ lineæ AC BD se se mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum transeant, ita vt E sit cẽtrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, et rectangulum contentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Itaque AC DB non transeant per centrum; et sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: et ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: iunganturq; FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E, erit rectangulum AE EC contentum vnà cum ipsius EG quadrato, æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectãgulum AEC vnà cum iis, quæ ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG 3. huius. 5. secundi.



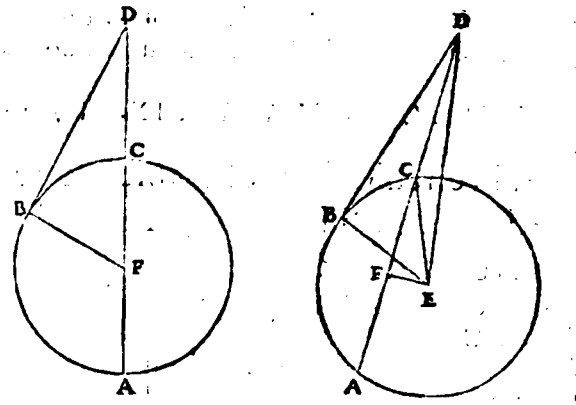
47.primi. CF æquale eſt quadratũ ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale quod ex FC quadratum. rectangulum igitur AEC vnà cũ quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FC. eſt autem CF æqualis F B. Ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex EF æquale eſt ei, quod ex FB quadrato. Eadẽ ratione et rectangulum DEB vnà cũ quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FB. oſtenſum autẽ eſt et rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale eſt rectangulo DEB vnà cum quadrato ex FE. commune auferatur quod ex FE quadratum. reliquum igitur rectãgulum AEC reliquo DEB rectãgulo æquale erit. Quare ſi in circulo duę rectę lineę ſe ſe mutuo ſecẽt, rectangulũ portionibus vnius cõtentũ æquale eſt ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demõſtrare oportebat.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota ſecante, et exterius aſſumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadãt duæ rectę lineæ DCA DB: et DCA quidem circulum ABC ſecet; DB vero contingat. Dico rectãgulum ADC quadrato, quod fit ex DB æquale eſſe. Vel igitur DCA per centrum tranſit, vel non. tranſeat primum per centrum circuli ABC, quod ſit F: et



18.huius. FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaque quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, et ipſi adiicitur CD; rectangulũ ADC vnà cum quadrato, quod

6.ſecundi. ex FC æquale erit ei, quod fit ex FD quadrato. æqualis autem eſt CF ipſi FB. ergo rectangulũ ADC vnà cum quadrato quod ex FB æquale eſt quadrato ex FD. Sed quadrarum ex FD eſt æquale quadratis ipſarum FB BD; rectus enim angulus eſt FBD. rectãgulum igitur ADC vnà cum quadrato ex FB æquale eſt ipſarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratũ quod ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. Sed DCA non tranſeat per centrum ABC circuli: ſumaturq; centrũ E, et ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF: et iungantur EB EC ED. rectus igitur eſt EFD angulus. Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per

3.huius. centrum ad rectos angulos ſecat, et bifariam ipſam ſecabit. quare AF ipſi FC eſt æqualis. Rurſus quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adiicitur

6.ſecundi. CD, erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC æquale quadrato, quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà

cum

cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est, quod ex DE quadratū; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC vnà cū quadrato, quod ex CE est æquale quadrato ex ED. æqualis autem est CE ipsi EB. rectangulum igitur ADC vnà cum quadrato ex EB æquale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD; si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum ADC vnà cū quadrato ex EB æquale est eis, quæ ex EB BD quadratis. communè auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur AD C rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extrà circulum aliquod punctum sumatur, et quæ deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

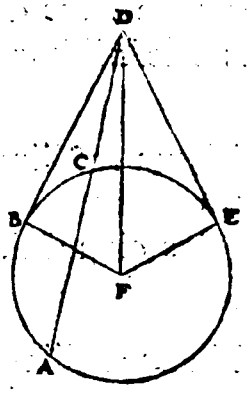
Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, vt et adnotauit Campanus. nempe hęc.

Si à pūcto extra circulum sumpto ducātur in circulum quotcumque rectę lineę, ipsum secantes; rectangula quæ totis, et earum portionibus extrinsecis cōtinentur, inter se æqualia sunt; quod singula quadrato lineæ contingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductę duæ rectæ lineæ circulum contingentes inter se æquales sunt. etenim vtriusque ipsarum quadrata sunt æqualia rectangulo, quod recta linea ab eodem puncto ducta, quę circulum secet, et eius portione extrinseca continetur. ergo et ipsæ lineę æquales sint necesse est, neque vero plures quàm duæ esse possunt, quod ex demonstratis in octauo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extrà circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DC A DB; et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat, sitq; rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex D B. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, et sumatur circuli ABC centrum quod sit F, iungantur q; FE FB FD. ergo angulus FED rectus est. Et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum A DC æquale erit quadrato quod ex DE. sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem et FE æqualis FB. duę igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt; et basis ipsarum communis FD. angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF. rectus autem DEF. ergo et DBF est rectus; atque est FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur et si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extrà circulum sumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonstrare oportebat.

16. huius.

8. primi.

TERTII LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVARTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

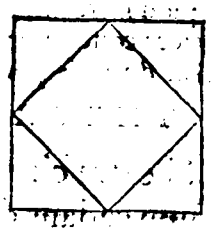
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.



FIGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quãdo vnusquisque figuræ descriptæ angulus vnũquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

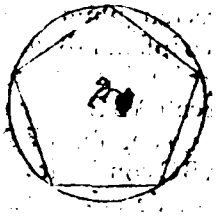


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnumquodque latus descriptę vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IIII.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptę circuli circumferentiã cõtingit.



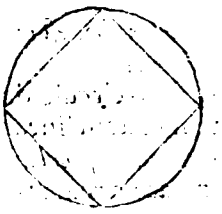
V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

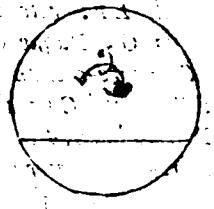
VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.



VII.

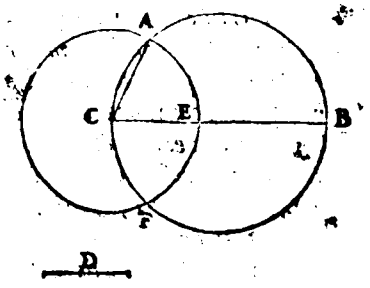
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.



PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectę lineæ, quæ diametro eius maior nō sit, æqualem rectam lineam aptare.



Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non maior circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectę lineę D equalem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Si quidem igitur BC sit equalis ipsi D, factum iam erit, quod proponebatur: etenim in circulo ABC aptata est AC rectæ lineæ D equalis. Sin minus, maior est BC quàm D, ponaturq; ipsi D æqualis CE: et centro quidem C interuallo autem CE circulus describatur AEF: et CA iungatur. Itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. Sed D est æqualis CE. ergo et D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectę lineæ D, non maiori circuli diametro, æqualis aptata est AC. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Cum varia sit circumscriptionum, et inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est. nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astrorum scientiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est, pentagoni constitutioni inseruiens: & quæcumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam simpliciorem habet constructionem, quàm trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendum autem si quidem data recta linea diametro sit æqualis, vno tantum modo, vel etiam absque vlla experientia fieri problema; Si vero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto vt C ad AF ductæ rectæ lineæ inter se æquales sunt.

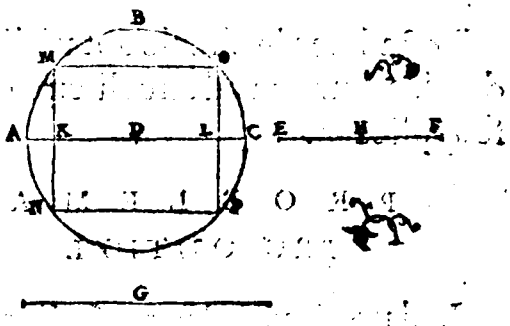
Problema

Problema hoc eſt ex eorum numero, quae determinata appellantur. poſſet enim & hoc modo explicari.

In dato circulo datæ rectę lineæ ęqualem rectam lineam aptare. oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.

Licet etiam problema aliud abſoluere huiuſmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineæ datę, quę diametro maior non ſit, ęqualem, et alteri datæ parallelam aptare.



Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea ſit, in qua G. Itaque oportet in circulo ABC aptare rectam lineam aequalem ipſi EF, & ipſi G parallelam. Ducatur per D recta linea AD C parallela ipſi G, quae circuli diameter erit. & ſi quidem AC ſit ęqualis EF, factũ iã erit quod proponebatur: ſi vero AC ſit maior, quàm EF, ſecetur EF bifariam in H: & ipſi HE aequalis abſcindatur à ſemidiametro circuli D A, quae ſit DK. ipſi vero HF aequalis fiat DL; perq; puncta KL ipſi AC ad rectos angulos ducantur MN OP; & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quędam AC per centrum ducta rectam lineam MN non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat; & bifariam ipſam ſecabit. quare MK eſt aequalis KN. Et ob eandem cauſſam OL eſt aequalis LP. ſunt autem MN OP inter ſe aequales, cum aequaliter à centro diſtẽt: & ſunt parallelae; anguli enim MKL OLK recti ſunt. quare et earum dimidiae KM LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequales, & parallelas ad eaſdem partes coniungunt, & ipſae aequales, et parallelae ſunt. ergo MO eſt aequalis KL, hoc eſt ipſi EF, & parallela ipſi G; ſunt enim vtręque ipſi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonſtrabitur aequalis eidẽ EF, & parallela ipſi G. In circulo igitur ABC aptata eſt MO vel NP aequalis EF, & ipſi G parallela. quod facere oportebat.

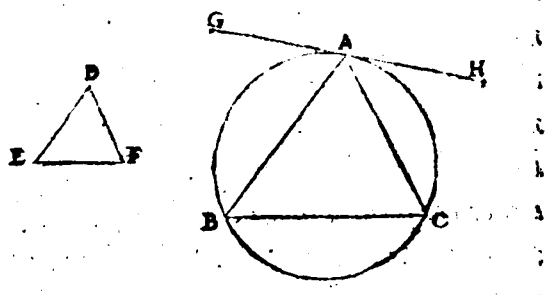
3 1. primi.
11. primi.
3. tertij.
14. tertij.
28. primi.
33. primi.
30 primi.

Ex quibus conſtat ſi quidem AC ſit aequalis rectæ lineæ datę, vno dumtaxat modo problema abſolui; ſi vero ſit maior, duobus modis, vt in antecedẽti dictum eſt.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulũ DEF. oportet in ABC circulo deſcribere triangulũ triangulo DEF ęquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens circulum ABC in puncto A: et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A angulo DEF ęqualis angulus conſtituatur HAC. rurſus ad rectam lineam AG, et ad punctum in ipſa A angulo DFE ęqualis cõſtituatur angulus GAB; et BC iungatur.



17. tertij.
23. primi.

Quoniã igitur circulũ ABC contingit quædã recta HAC; à contactu aũt in circulũ; ducta eſt AC: erit HAC angulus ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cõſiſtit, videlicet ipſi ABC. Sed HAC angulus ęqualis eſt angulo DEF. ergo et angulus ABC

32 primi.

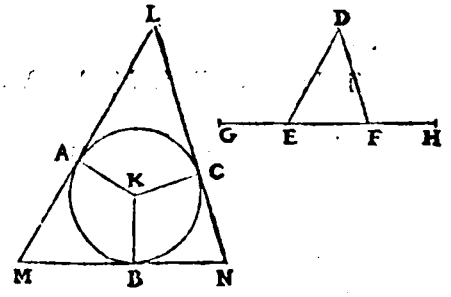
angulo

angulo DEF eſt æqualis. Eadem ratione et angulus ACB eſt æqualis angulo DFE. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis erit. Ergo triangulum A B C triangulo DEF eſt equiangulum. et deſcriptum eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulũ triangulũ deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato equiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC deſcribere triãgulum triãgulo D E F æquiangulum. protrahatur ex vtraque parte EF ad puncta H G: et ſumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB vt cumque ducatur: conſtituaturq; ad rectam lineam K B, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; angulo aũt DFH æqualis angulus BKC. et per A B C puncta ducantur rectæ lineę L A M M B N N C L circulum A B C, contingentes. Quoniam igitur circulũ A B C contingunt LM MN NL, in punctis A B C, à centro autem K ad ABC puncta ducuntur K A KB K C; erunt anguli ad puncta ABC recti. Et quoniam quadrilateri A M B K anguli quattuor quattuor rectis æquales ſunt; etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales ſunt; quorum AKB ipſi DEG eſt æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. Similiter demonſtrabitur angulus L N B ipſi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN eſt æqualis reliquo E D F. æquiangulum igitur eſt L M N triangulum triangulo D E F, et deſcriptum eſt circa circulum A B C. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



23. primi.

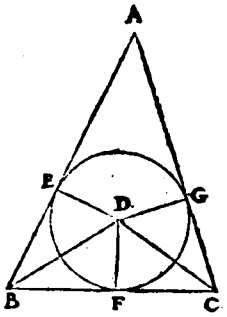
17. tertij.

18. tertij.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum deſcribere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum deſcribere. ſecentur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD, quæ conueniant inter ſe in D puncto; et à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus A B D eſt æqualis angulo CBD: eſt autem et rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD D B F, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri æquale, et vtrique commune B D, quod ſcilicet vni æqualium angulorum ſubtẽditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE æqualis D F. et eadem ratione D G æqualis D F. ergo et D E ipſi D G eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter ſe æquales ſunt; quare centro D interuallo autem vna ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cõtinget; propterea quòd recti ſunt ad EFG anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri



9. primi.

12. primi.

26. primi.

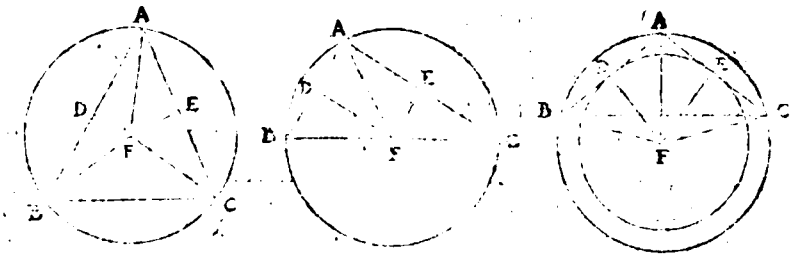
16.tertij. meri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulũ cadet. quòd eſt abſurdũ. nõ igitur cẽtro D, interuallo aũt vna ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas AB BC CA. quare ipſas cõtinget; atque erit circulus deſcriptus in triãgulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæſtum eſt à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum deſcribi poſſit, quamquam fortaſſe improprie in eo dicatur deſcribi. Fuerunt qui in triangulo æquilatero tantum problema abſoluerunt. Nos autem vniuerſe in omnibus abſoluere aggrediemur, poſtea quàm nonnulla in quinto, ac ſexto libro demonſtrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.



Sit datũ triangulum ABC. oportet circa datum triangulũ ABC circulũ deſcribere. ſecentur AB AC bifariã

10.primi.

11.primi. in D E punctis: et à punctis D E ipſis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF; quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipſam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD eſt æqualis DB, communis autem, et ad rectos angu-

4.primi. los DF; erit baſis AF baſi FB æqualis. Similiter oſtendetur et CF æqualis FA. ergo et BF eſt æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter ſe æquales ſunt. quare centro F, interuallo autem vna ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit: atque erit circulus deſcriptus circa triangulum ABC. et deſcribatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in ſecunda figura, & AF iungatur. Similiter demonſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Poſtremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rurſus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rurſus AD eſt æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; baſis AF baſi FB æqualis erit. Similiter demonſtrabimus et CF ipſi FA æqualem eſſe. quare et BF eſt æqualis FC. Rurſus igitur centro F, interuallo autem vna ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus et per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum ABC deſcriptus. et deſcribatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

Et manifeſtum eſt, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC exiſtentem in portione ſemicirculo maiore minorem eſſe recto. quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd ſit in ſemicirculo, rectum eſſe. & quãdo extra BC, quòd ſit in portione minore ſemicirculo, recto eſſe maiorem. Quare et quando datus angulus minor ſit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quãdo autem rectus in ipſa BC,

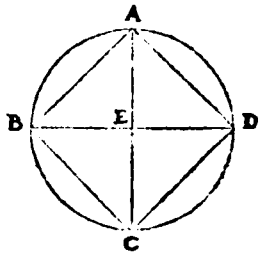
et

& quando maior recto, extra BC. quod oſtendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD.oportet in ABCD circulo quadratum deſcribere.Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC BD:et AB BC CD DA iungantur.Quoniam igitur BE eſt æqualis ED,etenim centrum eſt E,communis autem et ad rectos angulos EA; erit baſis BA æqualis baſi AD.Et eadem ratione vtraque ipſarum BC C D vtrique BA AD æqualis.æquilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum.Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemicirculus.quare angulus BAD rectus eſt. et eadem ratione vnuſquiſque ipſorum ABC BCD CDA eſt rectus. rectangulum igitur eſt ABCD quadrilaterum.oſtenſum autem eſt, et æquilaterum eſſe. ergo quadratum neceſſario erit,et deſcriptum eſt in circulo ABCD.In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD deſcriptum eſt.quod facere oportebat.

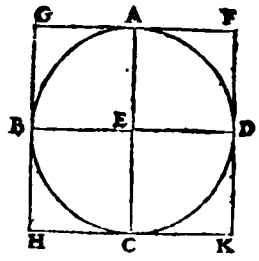


31. tertij.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratnm deſcribere.

Sit datus circulus ABCD.oportet circa ABCD circulũ quadratũ deſcribere.ducantur circuli ABCD duę diametri AC BD ad rectos inter ſe angulos, et per pũcta A BCD ducãtur circulũ ABCD cõtingentes FG GH HK KF. Quoniã igitur FG contingit circulũ ABCD,à centro aũt E ad cõtactũ qui eſt ad A ducitur EA;erũt anguli ad A recti.Eadem ratione et anguli ad puncta B C D recti ſunt. Et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem et rectus EBG; erit GH ipſi AC parallela. Eadẽ ratione et AC parallela eſt FK.Similiter demonſtrabimus et vtramque ipſarum GF HK ipſi BED parallelam eſſe.quare et GF eſt parallela HK. parallelogramma igitur ſunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem eſt æqualis HK, GH vero ipſi FK. Et quoniam AC æqualis eſt BD : Sed AC quidem vtrique ipſarum GH FK eſt æqualis; BD vero æqualis vtrique GF HK. et utraque GH FK vtrique GF HK æqualis erit.Aequilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum.Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus,et ipſe AGB rectus erit.Similiter demonſtrabimus angulos etiã qui ad puncta HKF rectos eſſe.rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK; demonſtratum autem eſt et æquilaterum.Ergo quadratum ſit neceſſe eſt.et deſcriptũ eſt circa circulũ ABCD.Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



27. tertij.

28. tertij.

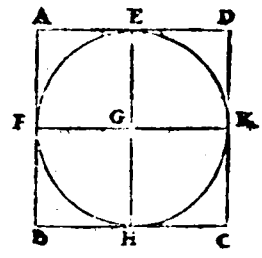
28. primi.

34. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITO VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.

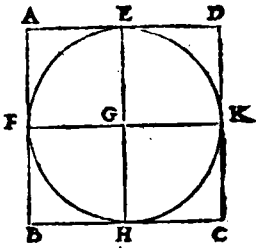
Sit datum quadratum ABCD . oportet in quadrato ABCD circulũ deſcribere. Secetur vtraque ipſarũ AB AD bifariam in punctis F E. et per E quidem alterutri ipſarum AB CD parallela ducatur EH:per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC.parallelogrammum



10. primi.

31. primi.

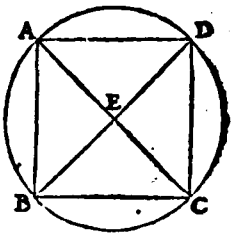
igitur eſt vnũquodque ipſorum AK KB AH HD A
34 primi. G GC BG GD : et latera ipſorum quę ex oppoſito ſunt ęqualia. Et quoniam DA eſt æqualis AB:et ipſius quidē AD dimidia eſt AE;ipſius vero AB dimidia AF; erit AE ipſi AF ęqualis.quare et oppoſita latera ęqua lia ſunt.ergo FG eſt æqualis GE. Similiter demonſtrabimus et vtramque ipſarum GH HK vtrique FG GE æqualem eſſe. quattuor igitur GE GF GH GK inter ſe ſunt ęquales.Itaque centro quidem G,interuallo au tem vna ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta;et rectas lineas AB BC CD DA continget, propterea quòd anguli ad E F H K recti ſunt.Si enim circulus ſecabit rectas lineas AB BC CD DA,quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos duci
16.tertij. tur intra circulum cadet.quod eſt abſurdum.non igitur centro quidem G,interual lo autem vnà ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DA ſecabit.quare ipſas neceſſario continget: atque erit deſcriptus in quadrato ABCD.In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.



PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

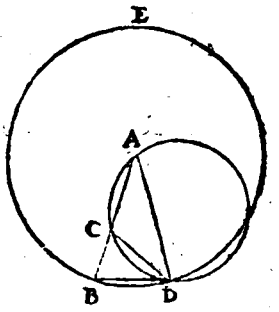
Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum deſcribere. Iungãtur enim AC B D, quę ſe inuicem in puncto E ſecent.Et quoniam DA eſt æqualis AB,communis autem AC;duæ DA AC dua bus BA AC ęquales ſunt; et baſis DC æqualis baſi CB; erit angulus DAC angulo BAC æqualis.angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt recta linea AC. Similiter demonſtrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC D B bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt æqualis. atque eſt anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli vero ABC dimidius EBA; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit.quare et latus EA lateri EB eſt ęquale. Similiter demonſtrabimus,et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem eſſe. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter ſe ſunt æquales.centro igitur E,interuallo autem vna ipſarum EA EB EC ED circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit.atque erit deſcriptus circa ABCD quadratum. deſcribatur vt AB CD.circa datum igitur quadratum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.



PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum cõſtituere, habens vtrumque angulorum, qui ſunt ad baſim duplum reliqui.

Exponatur recta quędam linea AB, et ſecẽtur in
11.ſecundi. C puncto, ita vt rectangulum contentum AB BC æquale ſit ei, quod ex CA deſcribitur quadrato: et centro quidem A,interuallo autem AB circulus de
1.huius. ſcribatur BDE: apteturq; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipſi AC,quæ non ſit maior diametro circuli BDE:et iunctis DA DC, circa ADC triã gulum circulus ACD deſcribatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale eſt quadrato,quod fit ex AC;æqualis autem eſt AC; ipſi BD, erit ABC rectangulum



quadrato

quadrato quod ex BD æquale.Et quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt aliquod punctum B:et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem ſecat,altera vero incidit,atque eſt rectangulũ ABC æquale quadrato,quod ex BD;recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igitur BD contingit,et à contactu,qui ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis ei,qui in alterna circuli portione conſtituitur, videlicet angulo DAC. Quòd cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BDA eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipſis CDA DAC exterior angulus BCD eſt æqualis. ergo et BDA æqualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus eſt æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB eſt æquale.ergo et DBA ipſi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales ſunt. Et quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, et latus BD lateri DC eſt æquale. Sed BD ponitur æqualis ipſi CA. ergo et AC eſt æqualis CD.quare et angulus CDA æqualis eſt angulo DAC.anguli igitur CDA DAC ipſius anguli DAC dupli ſunt.eſt autẽ et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis.ergo et BCD duplus eſt ipſius DAC. Sed BCD eſt æqualis vtrique ipſorũ BDA DBA.quare et vterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplus.Aequicrure igitur triãgulum conſtitutum eſt ADB,habens vtrumque eorum angulorum,qui ſunt ad baſim,duplum reliqui.quod facere oportebat.

Vlt. tertij.

32. tertij.

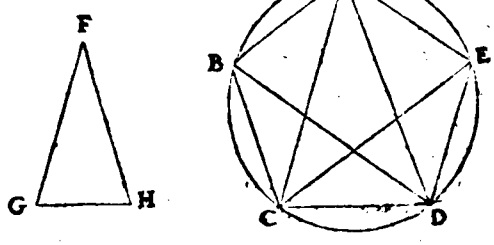
32. primi.

6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE.oportet in ABCDE circulo pentagonũ æquilaterum,et æquiãgulum deſcribere.Exponatur triangulum æquicrure FGH,habens vtrumque eorũ qui ſunt ad G H angulorum duplũ anguli qui eſt ad F: et deſcribatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita vt angulo quidem, qui eſt ad F æqualis ſit angulus CAD: vtrique vero ipſorum,qui ad GH ſit æqualis vterque ACD CDA.et vterque igitur ACD CDA anguli CAD eſt duplus. Secetur vterque ipſorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC CD DE EA iũgãtur.Quoniã igitur vterque ipſorũ ACD CDA duplus eſt ipſius CAD, et ſecti ſunt bifariã rectis lineis CE DB;quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter ſe ſunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferentiis inſiſtunt.quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA æquales ſunt inter ſe. Sed æquales circũferẽtias æquales rectę lineę ſubtendunt. ergo et quinque rectę lineę AB BC CD DE EA inter ſe æquales ſunt. æquilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum.Dico et æquiangulum eſſe.Quoniam enim circumferẽtia AB æqualis eſt circumferentiæ DE,communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE circumferentia toti circumferentię EDCB eſt æqualis, et in circumferentia quidẽ ABCD inſiſtit angulus AED, in circũferẽtia vero EDCB inſiſtit BAE.Ergo et BAE angulus eſt æqualis angulo AED.Eadem ratione,et vnuſquiſque angulorum ABC BCD CDE vnicuique ipſorum BAE AED eſt æqualis.æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonũ: oſtenſum autem eſt et æquilaterũ eſſe.Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum,et æquiangulum deſcriptum eſt.quod facere oportebat.



Ex antecedente.

2. huius.

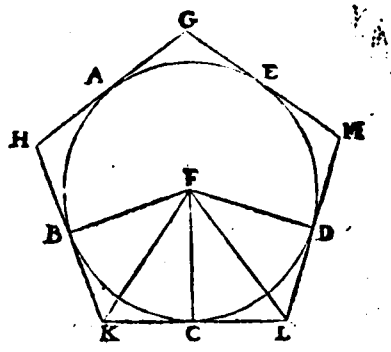
9. primi.

26. tertij.

29. tertij.

PROBELMA XII. PROPOSITIO. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et æquiangulum deſcribere.



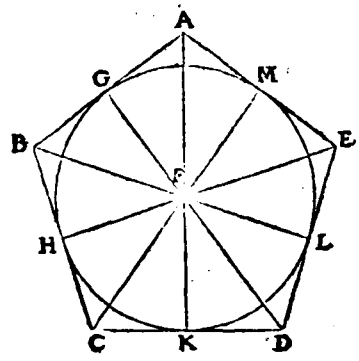
Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et
Ex antecedente. æquiangulum deſcribere. intelligantur pentagoni in circulo deſcripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circũferentiæ AB BC CD DE
17. tertij. EA ſint æquales; et per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG. et ſumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto
18. tertij. C, et à centro F ad contactum, qui eſt ad C ducta eſt FC: erit FC ad ipſam KL perpendicularis. rectus igitur eſt vterque angulorum qui ſunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti ſunt. et quoniam rectus angnlus eſt FCK, quadratum quod fit ex FK æquale eſt quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem cauſſam quadratis ex FB, BK æquale eſt quod ex FK quadratũ. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia ſunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB eſt æquale. Ergo reliquũ quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur eſt BK ipſi CK. Et quoniã FB eſt æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales ſunt: et
8. primi. baſis BK eſt æqualis baſi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipſius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL eſt duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumfe-
27. tertij. rentiæ CD eſt æqualis, et angulus BFC angulo CFD æqualis erit. atque eſt angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipſius LFC. æqualis igitur eſt angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula ſũt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, et vnum latus vni lateri æquale, quod ipſis commune eſt FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia ha-
26. primi. bebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC eſt æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniã KC eſt æqualis CL, erit KL ipſius KC dupla. Eadem ratione et HK ipſius BK dupla oſtendetur. Rurſus quoniam BK oſtenſa eſt æqualis ipſi KC: atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla: erit HK ipſi KL æqualis. Similiter et vnaquæque ipſarum GH HM ML oſtendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt æqualis angulo FLC: et oſtenſus eſt ipſius quidem FKC duplus angulus HKL; ipſius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione oſtendetur et vnuſquiſque ipſorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter ſe æquales ſunt. ergo æquiangulum eſt GHKLM pentagonũ. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe: et deſcriptum eſt circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit

Sit datum pentagonum ęquilaterum, et ęquiangulum ABCDE. oportet in A B C D E pentagono circulum deſcribere. ſecetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conueniunt inter ſe CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC eſt ęqualis CD, communis autem CF, duæ B C CF duabus D C CF ęquales ſunt, et angulus BCF eſt æqualis angulo DCF. baſis igitur BF baſi FD eſt æqualis, et BFC triangulum ęquale triāgulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF eſt duplus, et angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC ęqualis. angulus igitur ABC bifariā ſectus eſt recta linea BF. Similiter demonſtrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam ſectum eſſe. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF eſt ęqualis angulo KCF; eſt autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, commune ſcilicet vtriſque FC, quod vni ęqualium angulorum ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis latéribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK ęqualis. Similiter oſtẽdetur et vnaquæque ipſarum FL F M FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineę FG FH FK FL FM inter ſe æquales ſunt. quare centro F, interuallo autem vna ipſarum FG FH FK FL FM circulus deſcriptus, etiam per reliqua tranſibit pũcta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cõtinget, propterea quòd anguli ad G H K L M recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod abſurdũ eſſe oſtenſum eſt. non igitur centro F, et interuallo vno ipſorum punctorum G H K L M circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DE EA ſecabit. quare ipſas cõtingat neceſſe eſt. deſcribatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod eſt ęquilaterum, et ęquiangulum, circulus deſcriptus eſt, quod facere oportebat.



9. primi.

4. primi.

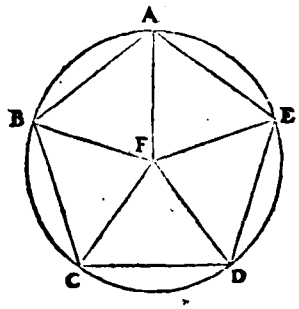
26. primi.

16. tertij.

PROBLEMA. XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

Circa datum pentagonum, quod ęquilaterum, et ęquiangulum ſit, circulum deſcribere.

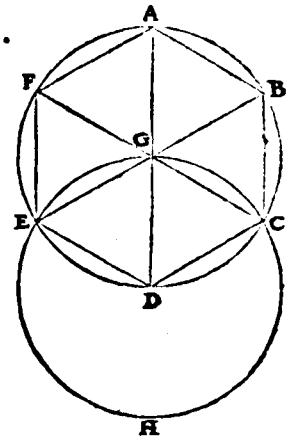
Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABC DE circulum deſcribere, ſecetur vterque ipſorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonſtrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam ſectum eſſe. Et quoniam angulus BCD angulo CDE eſt ęqualis: atque eſt anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD eſt ęquale. Similiter demõſtrabitur et vna quæque ipſarum FB FA FE ęqualis vnicuique FC FD. quinque igitur rectę lineæ FA FB FC FD



FC FD FE inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, et interuallo vna ipſarũ FA FB F C FD FE circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pẽtagonum ABCDE, quod æquilaterum eſt, et æquiangulum. deſcribatur, et ſit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et ęquiangulum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum deſcribere.



Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, et æquiangulum deſcribere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturq; centrum circuli G; et centro quidem D, interuallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, iunctæq; EG CG ad puncta B F producãtur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. Rurſus quoniam D cẽtrum eſt circuli EGCH, erit DE ęqualis DG. Sed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD triãgulum, ideoq; tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales ſunt, quoniam ęquicruriũ triangulorum anguli ad baſim inter ſe ſunt æquales: et ſunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. Similiter oſtendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt ęquales. ergo et qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA AGF FGE æquales ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æquales anguli ęqualibus circumferentiis inſiſtunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt ęquales. æquales autem circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo et ſex rectæ lineę inter ſe æquales ſint neceſſe eſt, ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF circumferentię ED eſt ęqualis, communis apponatur circumferentia ABCD. tota igitur FABCD circumferentia ęqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt æqualis. Similiter oſtẽdẽtur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales vtrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonũ. oſtenſum autem eſt et æquilaterum eſſe: et deſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et ęquiangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

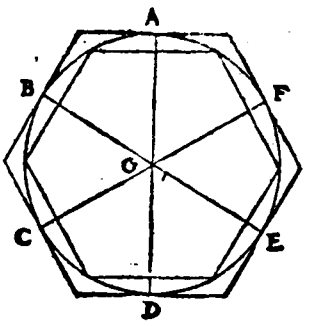
5. primi.
32. primi.
15. primi.
26. tertij.
29. tertij.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus ei, quę eſt ex centro circuli æquale eſſe. Et ſi per puncta ABCDEF contingentes circulum

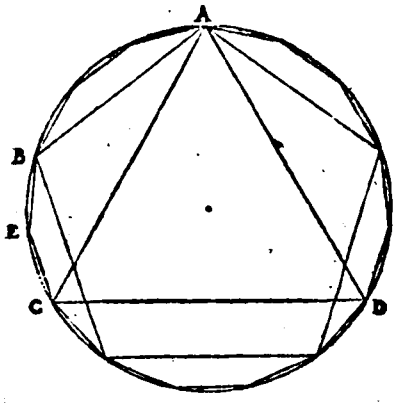
ducamus

ducamus, circa circulũ deſcribetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum cõſequenter ijs, quæ in pentagono dicta ſunt, & præterea ſimiliter in dato hexagono circulum deſcribemus, et circumſcribemus. quod facere oportebat.



PROBLEMA XVI.
PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum deſcribere.



Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum deſcribere. Deſcribatur in circulo ABCD trianguli quidẽ æquilateri in ipſo deſcripti latus AC; pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarũ igitur partium eſt ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta eſt circuli; erit triũ. ergo reliqua BC eſt duarum. ſecetur BC bifariã in puncto E. quare vtraque ipſarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars eſt ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipſo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum deſcriptum erit. quod facere oportebat.

Similiter autem iis, quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diuiſiones contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum. Et inſuper in dato quindecagono æquilatero, et æquiangulo circulum deſcribemus, et circumſcribemus.

QVARTI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

In quinto libro propoſitum eſt de analogijs tractare; hic enim liber communis eſt geometriæ, arithmeticæ, muſicæ, & omni ſimpliciter mathematicæ diſciplinæ: nam quæ in ipſo demonſtrantur non ſolum geometricis theorematibus congruunt, ſed & omnibus, quæ ad mathematicas, vt dictum eſt, diſciplinas referuntur. propoſitum igitur huiuſmodi eſt. librum autem dicunt eſſe Eudoxi cuiuſdam, qui Platonis magiſter fuit.

Analogia.

Itaque quoniam propoſitum eſt de analogijs tractare, analogia vero eſt proportionum quarundam habitudo; neceſſe eſt prius cognoſcere, quæ nam ſint hæ proportiones. ſimplicium enim cognitio cognitionem compoſitorum præcedere debet. ſi igitur quædam inter ſe comparẽtur, verbi gratia duæ magnitudines, ipſæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram tranſitus, diſtantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta ſimilitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim vt magnitudo comparatur, ſed vt proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; vt ſi ſint duæ rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine ſunt dupla potentia quadrupla ſunt. quadratorum igitur proportio cum ſit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ eſt dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem ſub quantitate eſt; etenim proportio eſt duplex, alia in æſtimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æſtimatione nulla ſpecies eſt, quæ ad præſentem contemplationem vtilis ſit; eius vero, quæ in quantitate ſpecies ſunt quinque, alia enim eſt multiplex vt ſex trium, alia ſuperparticularis vt quattuor trium, & alia ſuperpartiens, vt quinque trium, & hæ quidem ſimplices ſunt, quarum adhuc ſimplicior eſt multiplex, aliæ uero duæ ex harum compoſitione naſcuntur, videlicet multiplex ſuperparticularis, vt eſt ſeptem triũ, & multiplex ſuperpartiens, vt octo trium. ſub proportionales vero ſunt minores maiorum, vt ſub multiplex, ſubparticularis, & ſimiliter reliqua. ſciendum autem eſt hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars ſimpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. ſecunda vero vniuerſe de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omnire, vt dictum eſt, ſimplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aũt liber ipſe, ita & diffinitiones diuiduntur; primę enim ſunt de partibus, et multiplicibus, deinde ſequuntur vniuerſaliores de oĩbus proportionibus.

Simplicium cognitio cognitionẽ cõpoſitorũ præcedere debet Termini.

Comparatio eſt habitudo, quã antiqui proportionem appellarunt Analogia.

Proportio proportionis

Proportionis in quantitate ſpecies sũt quinque.

Quintus liber in duas partes diuidi tur.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVINTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.



PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo, quod est eiusdē speciei, vt 3 est pars 5. apud geometram vero est, quæ metitur maius, quando reliquum æquale sit ei, quod metitur: quando autem non sit æquale, non est pars, vt 3, 5; reliquuntur enim 2, quæ non sunt æqualia 3. quare 3 non sunt pars 5, sed partes, videlicet tres quintę $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quae simpliciter minor est maiore eiusdem speciei: vt enim dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipsum multiplex, quae alio nomine sub multiplex, & à nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem *dicit, vt significet habitudinem* duarum magnitu-

dinum] *vt ſeparet ab alijs ſpeciebus quantitatis.* eiuſdem generis] *vt nequis lineam cum ſuperficie comparet. hæc enim inter ſe proportionem nullam habent.* quatenus ad quantitatem pertinet] *vt ſeparet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua eſt terminus continui nõ infiniti, & quantitas diſcreta eſt diſcreti non infiniti. ſed diſcretum nõ eſt magnitudo, multitudo enim eſt.* quædã habitudo] *quòd quinque ſint habitudinum ſpecies, vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] *Vide ne hoc potius dictum ſit, vt intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aeſtimatione conſiſtit.*

IIII.

Portionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare poſſunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem eſt quædam proportio, quæ numero exprimi non poteſt; ſunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoſcitur exceſſus, quo alterũ ſuperat alterũ; quantitas aũt exceſſus cognoſci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe exceſſus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc eſt rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum appoſuit, quatenus ad quãtitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem diſcretam, & rationalem. vniuerſalius igitur diffiniens, quæ nam ſint proportionem habentia dixit,* quæ multiplicatę ſe inuicem ſuperare põſſunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in exceſſu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & poteſt latus multiplicatum aliquando diametrum ſuperare.*

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitae magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abeſt, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne aequare quidem poſſit vnquam.
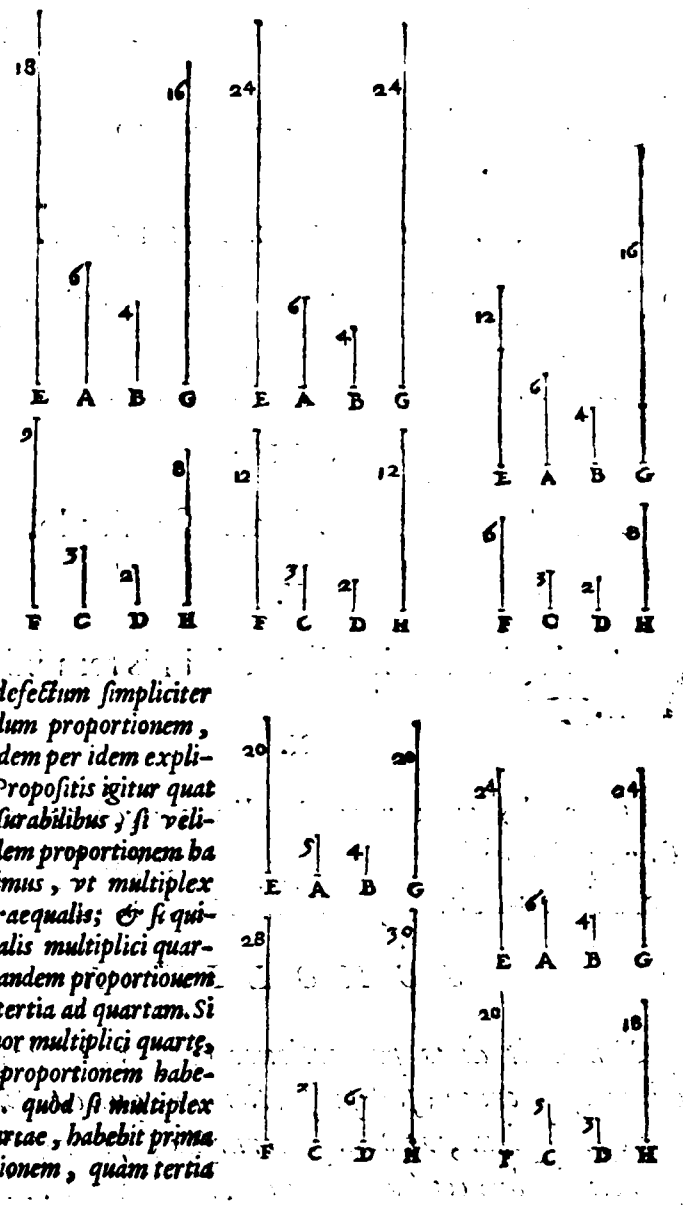
V.

In eadem proportione magnitudines eſſe dicuntur prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

tiplices, ſecundæ, et quartę æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà ſuperant, vel vnà æquales ſunt, vel vnà deficiunt inter ſe comparatæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit prima magnitudo A, ſecunda B, tertia C, & quarta D: ſumanturq; primae, ac tertiae, videlicet ipſarum A C aeque multiplices E F, vt ſit E aeque multiplex A, atque F ipſius C. rurſus ſumantur ipſarum B D, ſecundae ſcilicet, & quartae aeque multiplices GH; & ſiquidem maiori exiſtente E quàm G, etiam F ſit maior quàm H, vel ſi E aequali exiſtente ipſi G, ſit F aequalis H. vel ſi minori exiſtente, ſit minor iuxta quamuis multiplicationẽ, tunc dicetur A ad B eandem habere proportionem, quam C ad D. exceſſum autem, ac defectum ſimpliciter intelligere oportet, non ſecundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod eſt abſurdum. Propoſitis igitur quatuor magnitudinibus commenſurabilibus, ſi velimus ſtatim dignoſcere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primae multiplici ſecundae fiat aequalis; & ſi quidem multiplex tertiae ſit aequalis multiplici quartae, tunc prima ad ſecundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiae ſit minor multiplici quartę, prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. quòd ſi multiplex tertiae ſit maior multiplici quartae, habebit prima ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

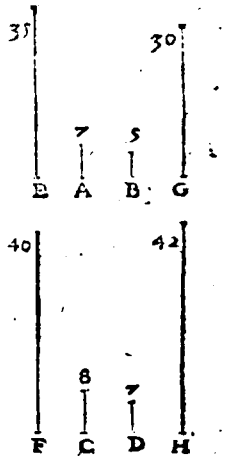


VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperauerit multiplicem ſecundę, multiplex vero tertiæ non ſuperauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

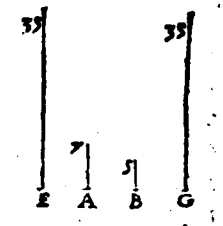


F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quae ſupra: & ſumptis ipſarum AC aeque multiplicibus EF; itemq; ipſarum ED aeque multiplicibus GH, ſi quidem E ſuperet G, F vero non ſuperet H, vel ſi E ſit aequalis ipſi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionẽ habere dicitur, quàm C ad D.

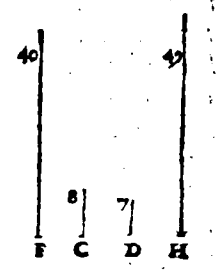
VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.



IX.

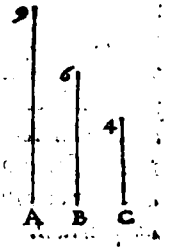
Analogia vero in tribus minimis terminis conſiſtit.



X.

Quando tres magnitudines proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundam.

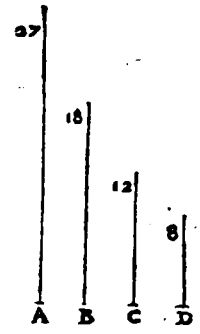
SCHOLIVM.



Non dicit duas proportiones vnius duplas eſſe, quod etiam eſt verum; ſed proportionem, quae ex duabus conſtat, eſſe duplam, vt 8.4.2, & rurſus 9 3 1. proportio igitur, quae ex duabus conſtat dupla eſt. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla eſt, in triplis vero nonupla, & in quadruplis ſexdecupla. demonſtrabitur enim deinceps quae longitudine ſunt dupla, potentia quadrupla eſſe: & quę longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla ſit, dupla eſt proportionis laterum, quę eſt dupla, etenim dupli duplus quadruplus eſt.

XI.

Quando autem quattuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habe re proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps vna plus, quo ad analogia proceſſerit.



F. C. COMMENTARIVS.

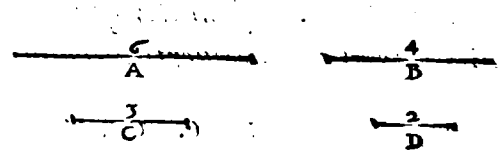
Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt neceſſario inęquales, & primum ipſorũ maiorem. nam ſi aequales ſint eadem eſt primi ad ſecundum, & ad tertium proportio. Si vero primus ſit minor, non poteſt primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad ſecundum, cum primi ad ſecundum maior ſit proportio, quàm ad tertium ex 8. huius.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

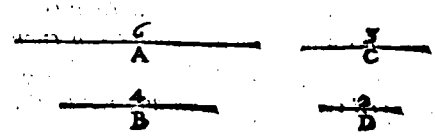
XIII.

Permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.



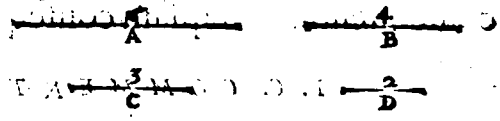
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita eſſe demonſtrabitur in 16 propoſitione huius libri.



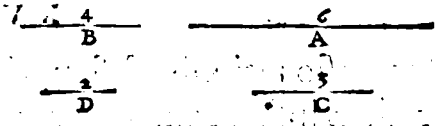
XIIII.

Conuerſa ratio eſt ſumptio conſequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad conſequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rurſus A ad B, vt C ad D. erit cõuertendo B ad A, vt D ad C. quod demonſtrabitur in corollario quartae huius.



Compoſitio

XV.

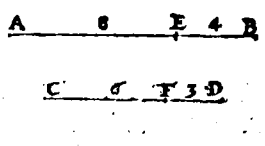
Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis vnà cum conſequente tamquam vnius ad ipſam conſequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem apposuerunt. neque enim compoſitio magnitudinum eadem eſt, quę compoſitio proportionum. hic autem antecedens vnà cum conſequente ſumptum totam magnitudinem efficit, quę ex magnitudinibus componitur: atque hęc eſt magnitudinum compoſitio. compoſitio enim proportionum aliam proportionẽ efficit, vt ipſe deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter ſe multiplicatę aliquam efficiunt proportionem. ipſe autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compoſitionem hanc συνθέντι, *hoc eſt componenti, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dicit, quàm componendo; ſimiliter autem & diuiſio, vna enim proportio diuiditur. at diuiſio de qua hoc loco ſermo fit, magnitudinum eſt, exceſſus namque antecedentium ab antecedentibus diſſecatur. ipſe vero etiam in hoc dicit* διελόντι *videlicet diuidenti, vel diuidendo. & ſimiliter quę hoc loco appellatur conuerſio rationis ipſe* ἀναστρέψαντι *dicit, conuertitur enim ad antecedentia.*

F. C. COMMENTARIVS.

Compoſitio rationis eſt proportio, quae oritur ex compoſitione terminorum ipſius proportionis, videlicet ex compoſitione antecedentis cum conſequente, cum totum conſequenti comparatur, quamquam improprie à iunioribus compoſitio proportionis, vel rationis appellata ſit; compoſitio enim proportionis longe alia eſt, vt in precedenti ſcholio adnotatur. ſit AE ad EB, vt CF ad FD. erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18 huius demonſtratur.

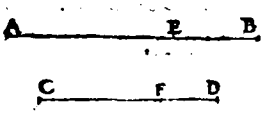


XVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17 huius demonſtrabitur.



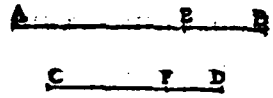
XVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

Sit

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuersionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF. hoc autem constat ex corollario 19 huius.



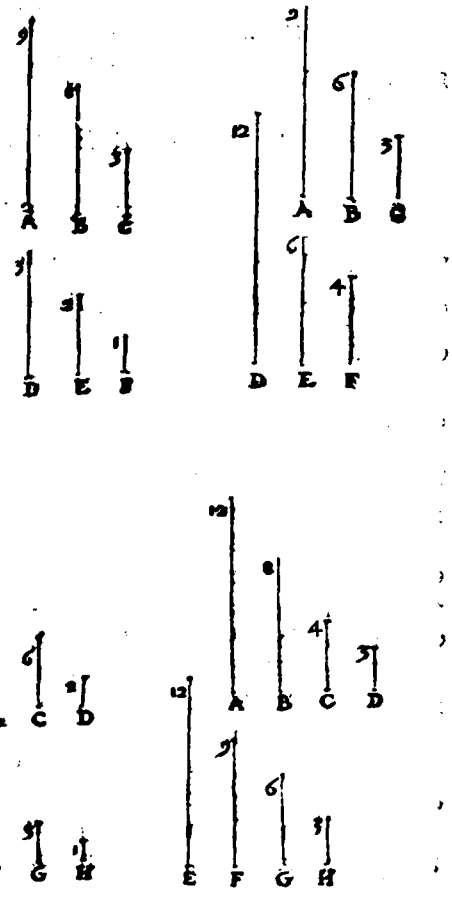
XVIII.

Aequa ratio, siue ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secũdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC, & aliae ipsis numero aequales DEF, sitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita D ad F. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. quod demonstrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC, itemq; aliae tres DEF, & sit vt A ad B, ita E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. hoc autem in 23 huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quàm tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero aequales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, sit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita sit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. & similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.



XIX.

Ordinata analogia est quãdo fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliã quãpiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus

gnitudinibus, & alij ipſis numero æqualibus; fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem. vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam; ita in ſecundis alia quępiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla ſuperius poſita ſunt, ſed pręter diffinitiones ſunt etiam communes quędam notiones, quae in hoc libro ſumuntur nempe hae.

I.

Eiuſdem ſiue ęqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

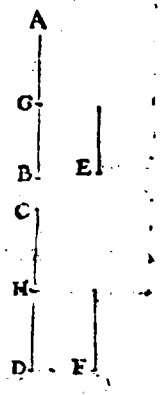
II.

Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcumque magnitudines AB CD quotcumque magnitudinum EF æqualium numero, ſingulæ ſingularum ęque multiplices. Dico quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices eſſe & AB CD ipſarum EF. Quoniam enim AB ęque multiplex eſt ipſius E, et CD ipſius F, quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi E, tot erũt et in CD æquales ipſi F. diuidatur AB quidem in partes ipſi E ęquales, quæ ſint AG GB: CD vero diuidatur in partes ęquales ipſi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipſarum AG GB. et quoniam AG eſt æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipſis E F. eadem ratione quoniam GB eſt æqualis E, et HD ipſi F, erũt et GB HD æquales ipſis EF. quot igitur ſunt in AB æquales ipſi E, tot ſunt et in AB CD æquales ipſis E F. ergo quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices erunt et AB CD ipſarum E F. ſi igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum ęque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt et omnes omnium. quod demonſtrare oportebat.

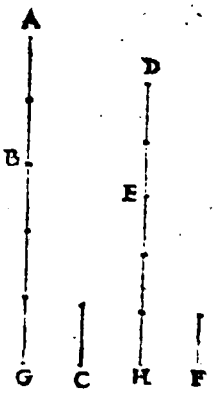


THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta ſecundæ ęque multiplex, ac ſexta quartæ: erit etiam compoſita prima, et quinta ſecundę æque multiplex, ac tertia, et ſexta quartæ.

Prima

Prima enim AB ſecundæ C æque multiplex ſit, ac tertia DE quartæ F. ſit autem et quinta BG ſecundæ C æque multiplex, ac ſexta EH quartę F. Dico et compoſitam primam, et quintam AG ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam et ſextã DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex eſt C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales C, tot erunt et in DE æquales F. eadem ratione et quot ſunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur ſunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex eſt AG ipſius C, totuplex eſt et DH ipſius F. et compoſita igitur prima et quinta AG ſecundæ C æque multiplex erit, ac tertia et ſexta DH quartæ F: quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem et quinta ſecundę æque multiplex, ac ſexta quartę: erit compoſita quoque prima et quinta æque multiplex ſecundæ, ac tertia, et ſexta quartę. quod oportebat demonſtrare.

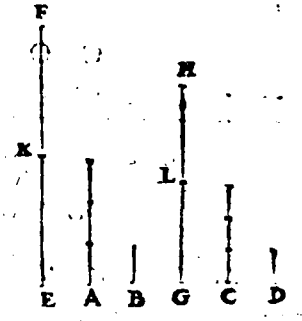


THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima ſecundę æque multiplex fuerit, ac tertia quartę; ſumantur aũt æque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A ſecundæ B æque multiplex ſit, ac tertia C quartę D: et ſumantur ipſarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniã enim EF æque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipſi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipſarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipſarum GL LH. et quoniam æque multiplex eſt A ipſius B, ac C ipſius D; æqualis autem EK ipſi A, et GL ipſi C; erit EK æque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipſius B, et LH ipſius D. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL quartæ D; eſt autem et quinta KF ſecundæ B æque multiplex, ac ſexta LH quartę D: erit et compoſita prima et quinta EF ſecundæ B æque multiplex, ac tertia, et ſexta GH quartæ D. Si igitur prima ſecũdæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; ſumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod oſtendiſſe oportuit.

Ex antecedente.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

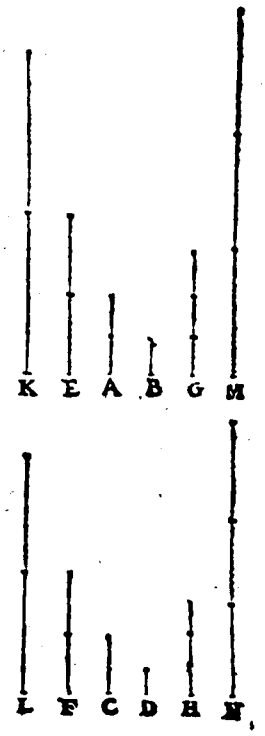
Si prima ad ſecundã eandem hẽt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primę, & tertię ad æque multiplices ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatę.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: et ſumantur ipſarũ quidem AC alię vtcumque ęque multiplices E F; ipſarũ vero BD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Dico E ad G ita eſſe, vt F ad H. ſumantur enim rurſus ipſarum EF æque multiplices KL, et ipſarum GH æque multiplices M N. Qm̃ igitur E ęque multiplex eſt ipſius A, atq; F ipſius C; ſumuntur aũt ipſarum EF ęque multiplices KL: erit K æque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. Eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. et quoniam eſt vt A ad B. ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarũ AC æque multiplices KL; et ipſarum BD alię vtcumque ęque multiplices MN: ſi K ſuperat M, ſuperabit et L ipſam N; et ſi æqualis, ęqualis; et ſi minor, minor. ſuntq; KL quidem ipſarum EF æque multiplices; MN vero ipſarum G H aliæ vtcumque ęque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et æque multiplices primæ ac tertiæ ad ęque multiplices ſecundę, ac quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter ſe comparatæ. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Per conuerſam quintæ diffinitionis.

5. diffinit.



Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, et L ipſam N ſuperare; et ſi ęqualis, ęqualem eſſe, et ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, et N ſuperare ipſam L; et ſi ęqualis, ęqualem eſſe; et ſi minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita eſſe H ad F.

5. diffinit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi quattuor magnitudines ſint proportionales, et contra proportionales eſſe.

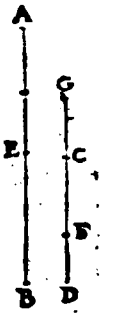
SCHOLIVM.

Hoc theorema pertinet ad demonſtrationem diffinitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, vt eſt quando æque multiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque multiplices ſecundæ, & quartæ, hoc eſt conſequentium, vel vnà ſuperant, vel vnà æquales ſunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonſtrat & ipſas eandem inter ſe proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione eſſe, quorum multiplicia ſunt in eadem proportione, quando nos idipſum quæreremus, quænam eſſent in eadem proportione. cum igitur dixiſſet in principio eas ſimul ſuperare, vel ſimul æquales eſſe, vel ſimul deficere; hic oſtendit & in eadem eſſe proportione, ſi inter ſe comparentur, vt appareat diffinitio earum, quæ ſunt in eadẽ proportione, quando ſcilicet æque multiplices primæ, & tertię ad ſecũdæ, & quartę æque multiplices eandẽ proportionem habeant. oſtendit aũt ipſas in eadẽ proportione per hoc, & per cõuerſionẽ.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atque ablata ablatę; et reliqua reliquę æque multiplex erit, atque tota totius.



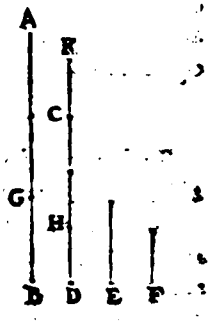
Magnitudo enim AB magnitudinis CD æque multiplex ſit, atque ablata AE ablatę CF, Diço et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem eſſe, atque totam AB totius CD: quotuplex enim eſt AE ipſius CF, totuplex fiat et EB ipſius CG. et quoniam AE æque multiplex eſt CF, atque EB ipſius CG; erit AE æque multiplex CF, et AB ipſius GF. ponitur autem æque multiplex AE ipſius CF, et AB ipſius CD. æque multiplex igitur eſt AB vtriuſque GF CD; aç propterea CF ipſi CD eſt æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis eſt reliquę D F. Itaque quoniam AE æque multiplex eſt CF, et EB ipſius CG, eſtq; CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, et EB ipſius FD. æque multiplex autē ponitur AE ipſius CF, et A B ipſius C D. ergo E B eſt æque multiplex FD, et A B ipſius C D. et reliqua igitur E B reliquę F D æque multiplex eſt, atq; tota A B totius CD. quare ſi magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquę æque erit multiplex, atque tota totius. quod oportebat demonſtrare.

1. huius.

2. Com. not.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, et ablatæ quędam ſint earundem æque multiplices; erunt et reliquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices.



Duæ enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF æque multiplices ſint, et ablatæ AG CH earundem ſint æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipſis EF æquales eſſe, vel ipſarum æque multiplices. ſit enim primum GB æqualis E. Dico et HD ipſi F eſſe æqualem. ponatur ipſi F æqualis CK. et quoniam AG æque multiplex eſt E, et CH ipſius F; eſtq; GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F: erit AB æque multiplex E, et KH ipſius F. æque autem multiplex ponitur A B ipſius E, et CD ipſius F. ergo KH æque multiplex eſt F, et C D ipſius F. quoniam igitur vtraque ipſarum KH CD eſt æque multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur C H. ergo reliqua KC reliquę HD eſt æqualis. Sed KC eſt æqualis F. et HD igitur ipſi F eſt æqualis; ideoq; GB ipſi E, et HD ipſi F æquales erit. ſimiliter demonſtrabimus ſi G B multiplex fuerit ipſius E, et H D ipſius F æque multiplicem eſſe. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, et ablatę quædam ſint earundem æque multiplices, erunt et reliquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices. quod demonſtrare oportebat.

5. huius.

2. Com. not.

SCHOLIVM.

Non propoſitum eſt oſtendere ſi à multiplici multiplex auferatur reli-

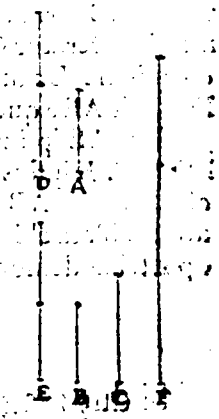
quum, vel æquale esse, vel multiplex; hoc enim manifestum est: sed duarum magnitudinibus ad duas magnitudines ita se habentibus, vt dictum est, si reliqua prioris sit multiplex, & reliquam alterius multiplicem esse; & si æqualis sit, esse æqualem, veluti si quadrupla existentes tripla auferatur, reliqua æqualis erit, & in altera eodem modo.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Aequales ad eãdẽ, eãdẽ habẽt proportionẽ, & eadẽ ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: et C ad vtramque A B similiter eandem habere proportionem. sumantur enim ipsarum A B æque multiplices DE, et ipsius C alia vtcumque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, et E ipsius B, estq; A ipsi B æqualis; erit et D æqualis E; alia autem vtcumque est F. ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. et sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices: F vero alia vtcumque multiplex ipsius C. erit igitur vt A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad vtramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam F. si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. atque est F quidẽ ipsius C multiplex; DE vero alię vtcũque æque multiplices ipsarum A B. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, et eadem ad æquales. quod ostendere oportebat.

2. Com. not.
5. diffi.
5. diffi.

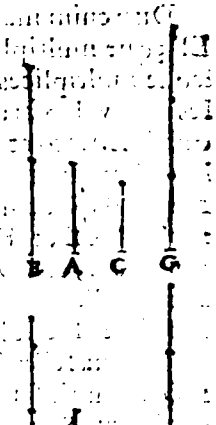


F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabimus, et æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines aequales A B; sintq; aliae magnitudines inter se aequales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. sumantur ipsarum A B aeque multiplices E F; & ipsarum C D aliae vtcumque aeque multiplices GH. Itaq; quoniam aeque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B; est autem A aequalis B: erit & E ipsi F aequalis. rursus quoniam aeque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D; estq; C ipsi D aequalis; & G ipsi H aequalis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; et si aequalis, aequalis; & si minor, minor. ergo A ad C eandem proportionẽ habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.

2. Com. not.
5. diffi.



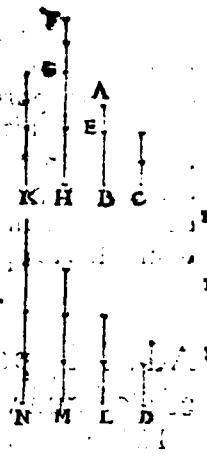
THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ.

Sint inęquales magnitudines AB C: et sit AB maior; alia vero vtcumque D. dico AB ad D maiorẽ habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere, quàm ad AB. quoniam enim AB maior est, quàm C, ponatur ipsi C ęqualis BE. Itaque minor ipsarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit primum

4. diffin.

mum AE minor, quàm EB: et multiplicetur AE, quo ad fiat maior, quàm D: sitq; ipsius multiplex FG, quæ ipsa D sit maior: quotuplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat et GH ipsius EB, et K ipsius C. sumaturq; ipsius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, et primo maior, quàm K. sumatur, sitq; N ipsius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor est, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum æque multiplex sit FG ipsius AE, et GH ipsius EB; erit et FG æque multiplex AE, et FH ipsius AB. æque autem multiplex est FG ipsius AE, et K ipsius C. ergo FH æque multiplex est AB, et K ipsius C; ac propterea FH K ipsarũ AB C æque multiplices erũt. rursus quoniã GH æque multiplex est EB, et K ipsius C; estq; EB æqualis C: erit et GH ipsi K æqualis. Sed K non est minor, quàm M. non igitur GH minor est, quàm M. maior autem FG quàm D. ergo tota FH vtrisque DM maior erit. Sed vtræque DM sunt æquales N; est enim M tripla ipsius D, et vtræque M D ipsius D quadruplæ. est autem et N quadrupla D. vtræque igitur M D ipsi N æquales sunt. sed FH maior est, quàm MD. quare FH superat N, K vero ipsam N non superat. et sunt FH K æque multiplices ipsarum AB C: et N ipsius D alia vtcũque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. dico præterea et D ad C maiorem habere proportionẽ, quàm D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare: atque est N multiplex ipsius D; et FH K aliæ vtcumque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionẽ habet, quàm D ad AB. Sed sit AE maior, quàm EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et sit GH multiplex quidẽ ipsius EB, maior verò, quã D. et quotuplex est GH ipsius EB, totuplex fiat et FG ipsius AE, et K ipsius C. simili rõne ostendemus FH K ipsarũ AB C æq; multiplices esse. sumatur deinde N multiplex D, primo aũt maior, quàm FG. ergo rursus FG nõ est minor, quàm M; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH superat DM, hoc est N; et K ipsam N non superat: quoniam FG maior existens, quàm GH, hoc est quàm K, non superat N. et similiter vt in iis, quæ superius dicta sũt, demõstrationẽ absoluemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionẽ, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ. quod ostẽdere oportebat.

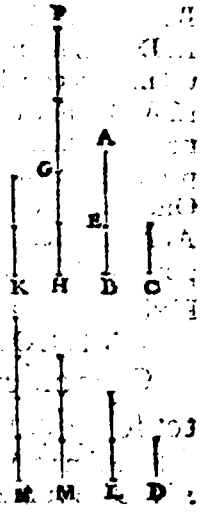


1.huius.

1.huius.

1.com.not.

7.diffin.



SCHOLIVM.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. *quattuor sunt magnitudines, prima quidem AB, secunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim sumitur D, & vt secunda & vt quarta. atque est primae quidem AB multiplex FH: secundae vero D multiplex N, & tertiae C multiplex K. est igitur FH maior, quàm N; quae quidem N multiplex est secundae D: K vero multiplex tertiae C, minor est, quàm N, quae est multiplex quartae D. Itaque quoniã multiplex primae maior est multiplici secundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quae dicit, quando aeque multiplicium multiplex quidem primae superauerit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

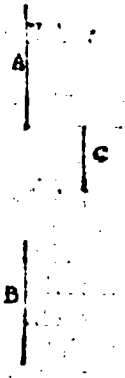
Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ habent, inter se æquales sunt; et ad quas eadẽ, eadẽ hẽt proportionẽ, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat

Habeat enim vtraque ipſarum A B ad C eandem proportionẽ. Dico A ipſi B æqualem eſſe. nam ſi non eſſet æqualis, non haberet vtraque ipſarum A B ad C eãdem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad vtramque ipſarum AB eandem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita ſit, non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: et ad quas eadem eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.



THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eãdẽ ꝓportionẽ habẽtiũ quę maiorẽ ꝓportionẽ hẽt, illa maior eſt; ad quã vero eadẽ maiorẽ habet proportionem, illa minor eſt.

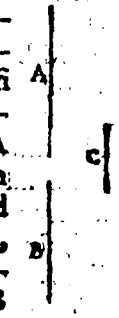
Habeat enim A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C. Dico A, quàm B maiorem eſſe. ſi enim non eſt maior, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B, vtraque enim ipſarum AB ad C eãdem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipſi B eſt æqualis. Sed neque minor eſt A quàm B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quàm B. atqui non habet minorem. non igitur A minor eſt, quàm B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualẽ. ergo A quàm B maior erit. Habeat rurſus C ad B maiorem proportionem, quàm C ad A. Dico B minorem eſſe, quàm A. ſi enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel maior. æqualis vtique non eſt B ipſi A; etenim C ad vtramque ipſarũ A B eandẽ proportionem haberet. non habet autem, ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed neque maior eſt B, quàm A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quàm A eſt maior. Oſtẽſum aũt eſt neque æqualẽ eſſe. ergo B minor erit, quàm A. Ad eandem igitur proportionẽ habẽtiũ quæ maiorẽ proportionẽ hẽt, illa maior eſt: et ad quam eadem maiorẽ habet proportionem, illa minor eſt. quod oportebat demonſtrare.

7. huius.

8. huius.

9. huius.

8. huius.



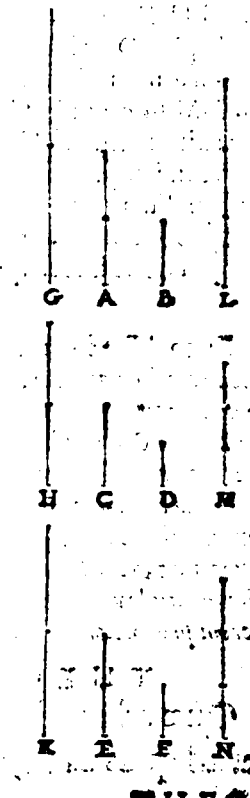
THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eędem ſunt proportiones, et inter ſe eędem ſunt.

Sit enim vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipſarum vero B D F alię vtcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita C ad D, et ſumptæ ſunt ipſarum A C æque multiplices G H, et ipſarum BD aliæ vtcumque æque multiplices LM; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt vt C ad D, ita E ad F, et ſumptę ſunt ipſarũ CE æque multiplices HK; ipſarũ vero DF aliæ vtcũque æque multiplices MN, ſi H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, et G ſuperabit L; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quare ſi G ſuperat L, et K ipſã N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. et ſunt GK quidem ipſarum AE æque multiplices; LN vero ipſarum BF aliæ vtcumque æque multiplices. ergo vt A ad B, ita erit E ad F. quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, et inter ſe eædem ſunt. quod oſtendiſſe oportuit.

Ex cõuerſa 5. diffi.

5. diffin.

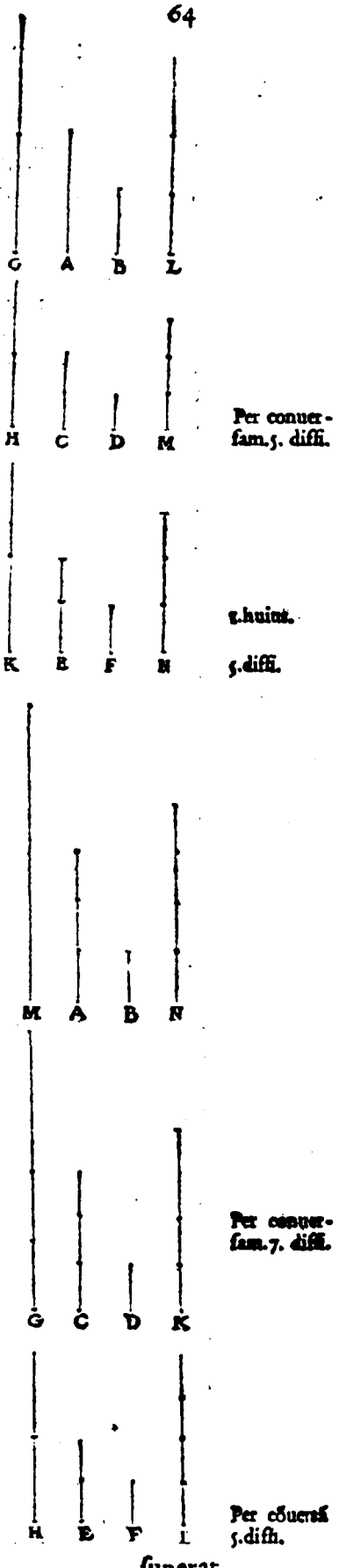


THEO-

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedẽtiũ ad vnã cõſequẽtiũ, ita erũt antecedẽtes oẽs ad omnes cõſequẽtes.

Sint quotcũque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita ſit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B. ita eſſe ACE ad BDF. ſumantur enim ipſarum A C E æque multiplices GHK, et ipſarũ BDF aliæ vtcumque æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita eſt C ad D, et E ad F: et ſumptę ſunt ipſarum quidem ACE æque multices GHK, ipſarum vero BDF aliæ vtcumque æque multiplices LMN; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit, et K ipſam N; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quare et ſi G ſuperat L, ſuperabunt et GHK ipſas LMN; et ſi æqualis, æquales; et ſi minor, minores. ſuntq; G, et GHK ipſarũ A, et ACE æque multiplices: quoniã ſi fuerint quotcũque magnitudines quotcũque magnitudinũ æqualiũ numero, ſingulæ ſingularũ æque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erũt et oẽs omniũ. eadẽ ratione et L et LM N ipſarum B, et BDF ſunt æque multiplices. eſt igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare ſi quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentiũ ad vnã conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quàm quinta ad ſextã: et prima ad ſecundã maiorẽ habebit proportionẽ, quàm quinta ad ſextã.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quàm quinta E ad ſextã F. Dico et primam A ad ſecundam B maiorem proportionẽ habere, quàm quintam E ad ſextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quàm E ad F, ſunt quædã ipſarum CE æque multiplices, et ipſarum D F aliæ vtcumque æque multiplices: et multiplex quidem C ſuperat multiplicẽ D; multiplex vero E non ſuperat multiplicem F. Sumantur, et ſint ipſarum CE æquemultiplices GH, et ipſarum DF aliæ vtcumque æquemultiplices KL, ita vt G quidem ſuperet K; H vero ipſam L non ſuperet: et quotuplex eſt G ipſius C, totuplex ſit et M ipſius A; quotuplex autem K ipſius D, totuplex ſit et N ipſius B. et quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, et ſumptæ ſunt ipſarum AC æquemultiplices MG, et ipſarum BD aliæ vtcumque æque multiplices NK: ſi M ſuperat N, et G ipſam K ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor Sed G ſuperat K. ergo & M ipſam N ſuperabit. H vero non.

ſuperat

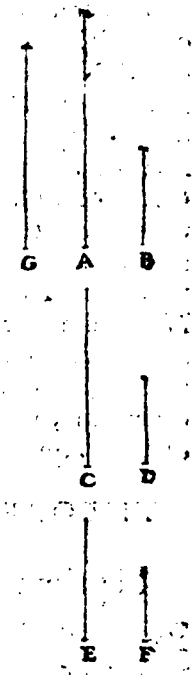
superat L. sunto; MH ipsarum AE æque multiplices; et NL ipsarum B F æque vtcum
7.diffi. que æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionē habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabitur si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad sextam: et primam ad secundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad sextam.

Quòd si prima ad secundam maiorem habeat proportionē, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam.

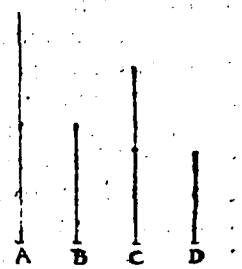
Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem,
8.huius. 1 *quàm E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quàm A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D, & C ad D maiorem habet proportionem, quam E ad F: habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. & similiter demonstrabitur si prima ad secundam minorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartā habeat minorem, quàm quinta ad sextam: & primam ad secundam minorem habere proportionem, quàm quintam ad sextam.*



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: maior autem sit A quàm
8.huius. C. dico et B quàm D maiorem esse. quoniam enim A maior est quā C, et alia vtcūque magnitudo B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad
Ex antece- dente. D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C
10.huius. ad B. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. quare D est minor, quàm B: ac propterea B quā
A D maior erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C; et B ipsi D esse æqualem: et si A sit minor, quàm C; et B
B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda, quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

Hoc lemma est sextidecimi theorematis, quemadmodum vigesimum

mum est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertij.

F. C. COMMENTARIVS.

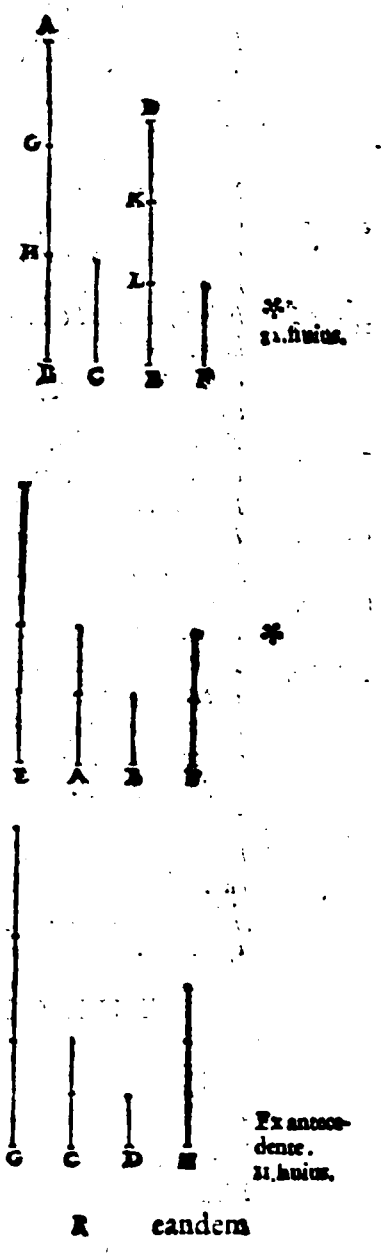
Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem] *Quoniam enim A est aequalis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem habet proportionem ipsae aequales sunt. ergo B ipsi C est aequalis.* A 11.huius. 9.huius.

Et si A sit minor, quàm C, et B quàm D minorem esse,] *nam cum A minor sit, quàm C; habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecedente & C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quàm D minor erit.* 8.huius. B 10.huius.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se cõparatę eandem habent proportionem.

Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipsius F. Dico vt C ad F, ita esse AB ad DE; Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, et DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB. et DE diuidatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE. erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. et quoniam æquales sunt AG GH HB, suntq; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F. ergo vt C ad F, ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem. quod ostendendum fuit.



F. C. COMMENTARIVS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] *Ex ea, quam nos ad septimam huius, addidimus.*

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

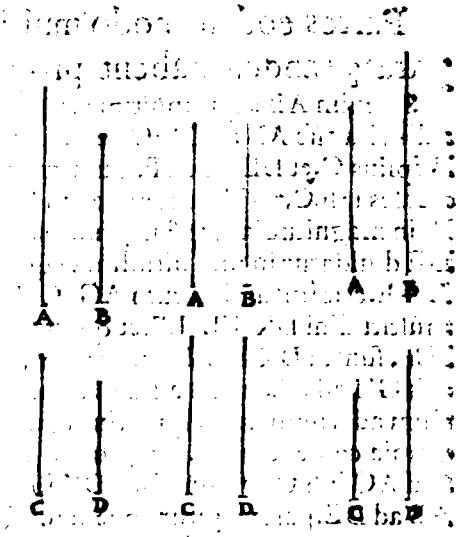
Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur enim ipsarũ quidem AB æque multiplices EF; ipsarum vero CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. et quoniam æque multiplex est E ipsius A, et F ipsius B; partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eãdem habent proportionem: erit vt A ad B, ita E ad F: vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rursus quoniam GH sunt ipsarum CD æque multiplices; partes autem eodem modo multiplicium

eandem proportionem habent inter ſe comparatæ, erit vt C ad D, ita G ad H. ſed
14.huius. vt C ad D, ita E ad F. ergo et vt E ad F, ita G ad H. Quòd ſi quattuor magnitudines proportionales ſint, prima autem maior ſit, quàm tertia; et ſecunda quam quarta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Si igitur E ſuperat G, et F ipſam H ſuperabit, et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq; EF ipſarũ AB æque mul
5.diffi. tiplices, et GH ipſarũ CD aliæ vtcumque æque multiplices. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae demonſtrata ſunt, illud quoque demonſtrabitur.

Si prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, ſitq; prima maior, quàm ſecunda, et tertia, quàm quarta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.



Prima enim A ad ſecundam B eandem habeat proportionem, quàm tertia C ad quartam D: & ſit A maior, quàm B. Dico & C quàm D maiorem eſſe. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quam B ad D. Rurſus quoniam A maior eſt quam B, alia vero vtcũque eſt C; habebit A ad C maiorem proportionem,
8.huius. *quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita eſt B ad D, quod demonſtratum eſt. ergo B ad D maiorem proportionem*
10.huius. *habet, quàm ad C. Ad quam vero eadem maiorem habet proportionẽ, illa minor eſt. quare D minor eſt, quàm C. ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A aequalis ipſi B. dico & C ipſi D aequalem eſſe. nam cum A*
7.huius. *& B ſint aequales. habebit A ad C proportionem eãdem, quam B ad C. vt autem A ad C, ita B ad D. ergo B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad*
9.huius. *quas vero eadem proportionem eãdem habet, illae aequales ſunt. ergo C ipſi D eſt aequalis. Sit poſtremo A minor, quàm B. Dico & C, quàm D minorem eſſe. quoniam enim A minor eſt quàm B,*
8.huius. *habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad C maiorem proportionem habebit, quàm ad*
10.huius. *D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor eſt. ergo C quàm D minor erit. ſi igitur prima ad ſecundam eandem proportioaem habeat, quam tertia ad quartam: ſitq; prima maior, quàm ſecunda, & tertia, quàm quarta maior erit: & ſi aequalis, aequalis: & ſi minor, minor.*

ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: ſitq; A maior, quàm B. Dico & C, quã D maiorẽ eſſe. Quoniã enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D. ſed A maior eſt quam B. ergo ex 14 huius & C, quàm D maior erit. Eodem modo demonſtrabimus ſi A ſit aequalis B, & C ipſi D eſſe aequalem. & ſi A ſit minor, quàm B, & C quàm D minorem eſſe. quod demonſtrare oportebat.

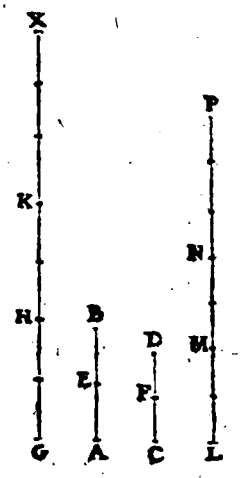
THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XVII.

Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales, et diuiſæ proportionales erunt.

Sint compoſitæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. ſitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuiſas proportionales eſſe, videlicet vt AE ad EB,

ita

ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. et quoniã æque multiplex est GH ipsius AE, et HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque multiplex, et GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, et LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, et LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, et MN ipsius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipsius CD. Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB. æq; igitur multiplex est GK ipsius AB, et LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, et MN ipsius FD; est autem et KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD: & composita HX ipsius EB æque multiplex est, et MP ipsius FD. quòd cum sit vt AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices HX MP; si GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communiq; ablata HK, et GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN ipsam MP, cõmuniq; MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. Similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt. quod demonstrare oportebat.

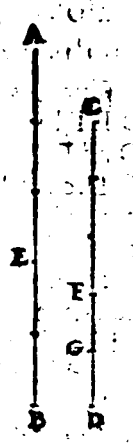


1. huius.
11. huius.
1. huius.
11. huius.
1. huius.
ex conuers. 5. diffi.
5. diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam cõpositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quàm DF, vel ad maiorẽ. sit primũ ad minorẽ, nempe ad DG, & quoniam est vt AB ad BE, ita CD ad DG, cõpositæ magnitudines sunt proportionales. ergo et diuisæ proportionales erũt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur aũt & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quã tertia CF. ergo & secũda DG, quàm quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG, similiter ostendemus neque esse ad maiorem, quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.



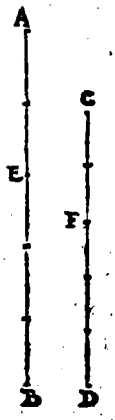
Ex antecedente. 11. huius. 14. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquã

EB ad reliquam FD ita esse,vt totam AB ad totam CD.quoniã enim
16.huius. est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF;& permutando erit vt B
A ad AE, ita DC ad CF.et quoniam compositæ magnitudines sunt
17.huius. proportionales,& diuisæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA,
ita DF ad FC,rursusq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. sed
11.huius. vt AE ad CF,ita posita est AB ad CD.et reliqua igitur EB erit ad re
liquam FD,vt tota AB ad totam CD.quare si fuerit vt tota ad totã,
ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam,erit vt tota ad totam.
quod demonstrare oportebat.



Et quoniam ostensum est vt AB ad CD,ita esse EB ad FD,erit per
mutando vt AB ad BE,ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudi-
nes proportionales sunt.ostẽsum autem est vt BA ad AE, ita DC ad
CF,quod est per conuersionem rationis.

COROLLARIVM.

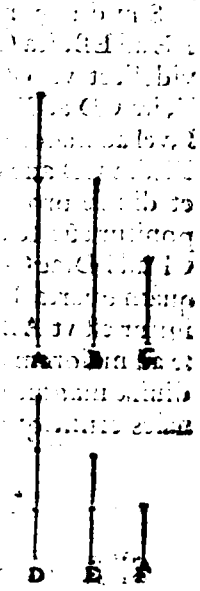
Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales;& per cõuersionem rationis proportionales esse.

Factę autem sunt proportiones et in æque multiplicibus, et in analogijs.nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartę; erit et vt prima ad secundã, ita tertia ad quartam.sed non item ex contrario cõuertitur.Si enim sit vt prima ad secundam,ita tertia ad quartam;nõ omnino erit prima quidem secundę æque multiplex,tertia vero quartæ,velut in sesquialteris,vel in sesquitertijs proportionibus, vel alijs eiusmodi.quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. XX. PROPOSITIO. XX.

Si sint tres magnitudines, et alię ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; & si æqualis,æqualis;et si minor,minor.

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales D E F binæ sumptę,et in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita D ad E;et vt B ad C,ita E ad F;ex æquali autem maior sit A, quã C.Dico et D quàm F maiorem esse;et si æqualis,æqualem;et si mi nor,minorem. Quoniam enim A maior est,quàm C,alia vero vt-
8.huius. cumque B,et maior ad eandem maiorem habet proportionem,
A quàm minor: habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B.Sed vt A ad B,ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad
10.huius. E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem
B habet proportionem,illa maior est.maior igitur est D quàm F. si militer ostendemus et si A sit æqualis C,et D ipsi F æqualem esse; et si minor,minorem.Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipsis numero æquales,quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis,æqualis; et si minor, minor. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

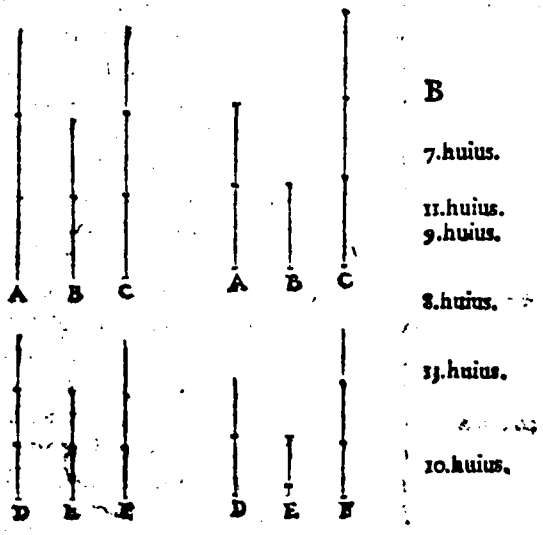
A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quàm C ad B.sed vt A ad B, ita D ad E;

Ex

Ex his ſequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quàm C ad E. vt autem C ad E; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad E.

Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F æqualem eſſe, et ſi minor, minorem]

Si enim A ſit aequalis C, habebit A ad E proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quae vero ad eandē, eandem habent proportionem, inter ſe aequales ſunt. ergo D ipſi F eſt aequalis. Quòd ſi A ponatur minor quàm C, habebit A ad B proportionem minorem, quàm C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quàm C ad E. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorē proportionē, quàm F ad E; ac propterea D quàm F, minor erit.



B

7.huius.

11.huius. 9.huius.

8.huius.

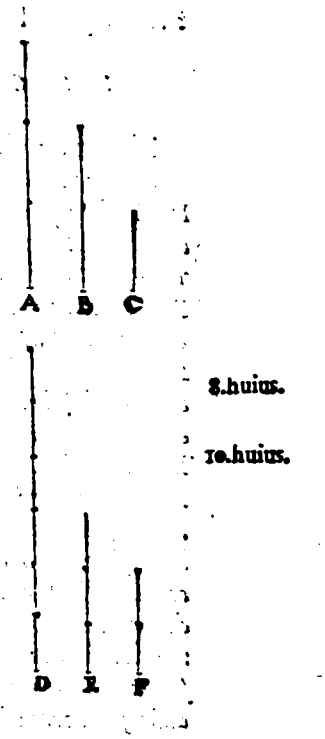
13.huius.

10.huius.

THEOREMA XXI.
PROPOSITIO XXI.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quę binę ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior ſit quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A B C, et aliæ ipſis numero æquales D E F, binæ ſumptæ, et in eadem proportione. ſit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidem ad B, ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A maior ſit, quàm C. Dico et D quàm F maiorem eſſe; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Quoniam enim maior eſt A, quàm C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, et conuertendo vt C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quàm E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor eſt. minor igitur eſt F, quàm D; ac propterea D quàm F maior erit. Similiter oſtendemus et ſi à ſit æqualis C, et D ipſi F eſſe æqualem; et ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata earū analogia, et ex æquali prima maior ſit, quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quod demonſtrare oportebat.



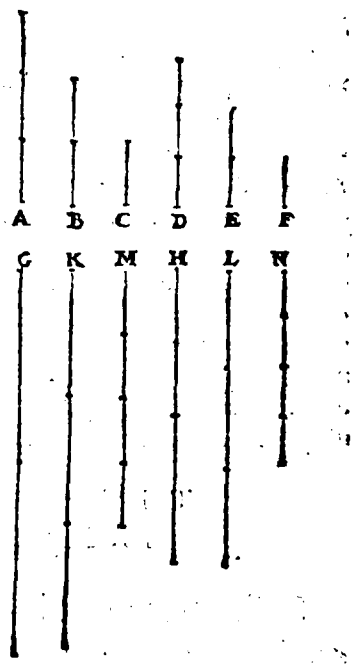
8.huius.

10.huius.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXII.

Si ſint quotcunque magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt.

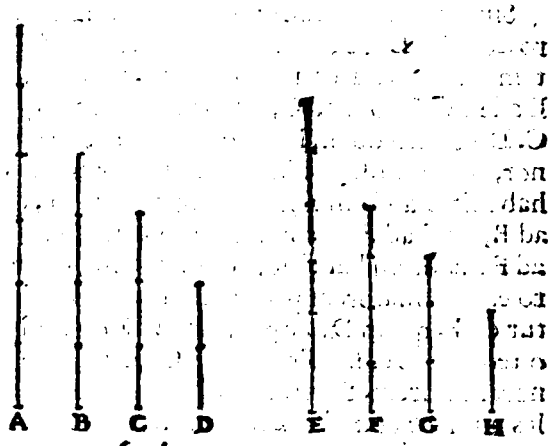
Sint quotcumque magnitudines A B C, et aliæ ipſis numero ęquales DEF binę ſumptæ in eadem proportione, ſitq́; ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eadem proportione eſſe vt A ad C, ita D ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A D æque multiplices G H; ipſarum vero BE alię vtcumque æque multiplices KL, et ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices MN. Quoniã igitur eſt vt A ad B, ita D ad E, et ſumptę ſunt ipſarum AD ęque multiplices G H, et ipſa-
4.huius. rum BE alię vtcumque æque multiplices K L; erit vt G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit vt K ad M, ita L ad N. et cũ ſint tres magnitudines GKM, et alię ipſis numero ęquales H L N, binæ ſumptæ,
20.huius. et in eadem proportione; ex æquali ſi G ſuperat M, et H ipſã N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq́; GH ipſarũ AD æq; multiplices, et MN ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices.
5.diffi. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare ſi ſint quotcumque magnitudines, et aliæ ipſis numero ęquales, quæ binę ſumantur, in eadem proportione; et ex ęquali in eadem proportione erunt. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem demonſtrabitur etiam ſi plures ſint, quàm tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABC D, & aliae ipſis numero ęquales E F G H binae ſumptae in eadem proportione, ſitq́; vt A ad B, ita E ad F; ut aũt B ad C, ita F ad G, et vt C ad D, ita G ad H. Dico ex aequali ut A ad D, ita eſſe E ad H. Quoniam enim eſt vt A ad B, ita E ad F, et vt B ad C, ita F ad G; & ex aequali per ea, quae proxime oſtenſa ſunt, vt A ad C, ita erit F ad G. eſtq́; vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rurſus tres magnitudines ſint ACD, et aliae ipſis numero aequales EGH binae ſumptae in eadem proportione; erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. quod demonſtrare oportebat. & eodẽ modo demonſtrabitur in alijs eiuſmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non ſolum in ordinata analogia, ſed et in perturbata. ſemper enim ad tres magnitudines eiuſdem ordinis ſimiliter reducentur.

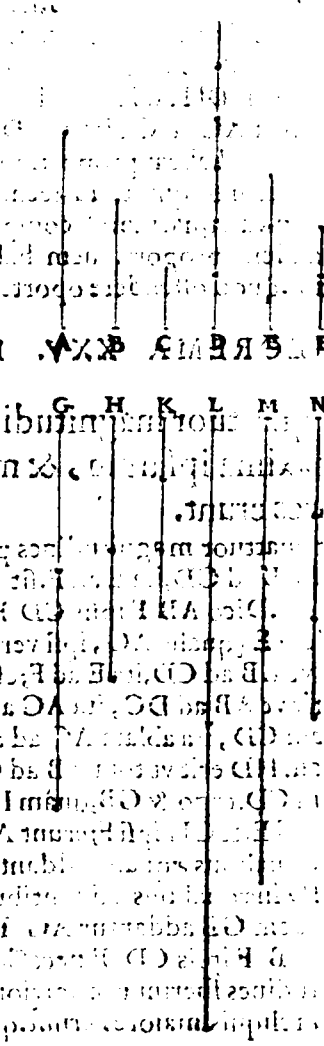


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales binæ sumptæ in eadem proportione D E F; sit autem perturbata earum analogia, et sit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E. Dico vt A ad C, ita esse D ad F. sumantur ipsarum quidem A B D æque multiplices G H K; ipsarum vero C E F aliæ vtcumque æque multiplices L M N. & quoniam G H æque multiplices sunt ipsarum A B, partes autem eodem modo multiplicium eadem habent proportionem, erit vt A ad B, ita G ad H. & simili ratione vt E ad F, ita M ad N. atque est vt A ad B, ita E ad F. vt igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H K; ipsarum vero C E aliæ vtcumque æque multiplices L M. erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est vt vt G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H L, & aliæ ipsis numero æquales K M N binæ sumptæ in eadem proportione, estq; ipsarum perturbata analogia, ex æquali si G superat L, & K ipsam N superabit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G K ipsarum A D æque multiplices: & L N æque multiplices ipsarum C E. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali in eadem proportione erunt. quod demonstrare oportebat.



15. huius.

11. huius.

4. huius.

21. huius.

5. diff.

V. C. COMMENTARIVS.

Dico vt A ad C, ita esse D ad F] *in græco codice impresso hæc desiderantur.* λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

A

Erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est vt G ad H, ita esse M ad N] *hoc loco in græco codice impresso, & in Zamberti versione multa inseruntur superuacanea, quæ à bibliopolis confusa omissa sunt.*

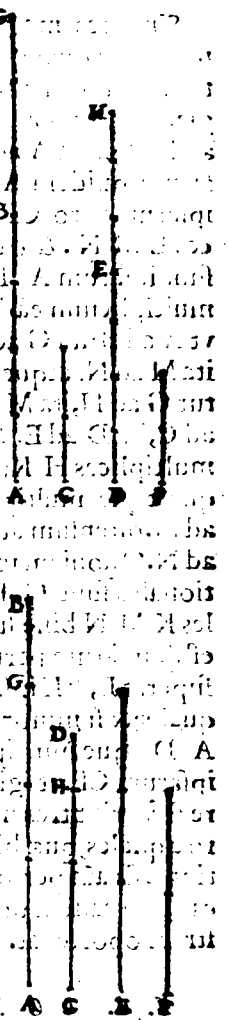
B

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

Prima enim A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. habeat autem & quinta B G ad secundam C proportionem eandem, quam sexta E H ad quartam F. dico & compositam primam, & quintam A G ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam D H ad quartam

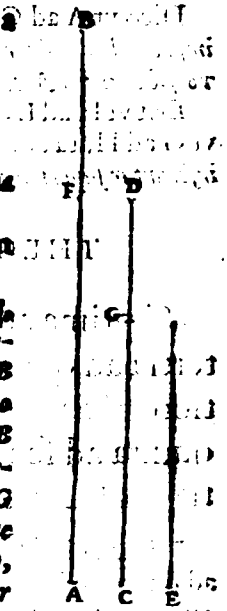
tam F. quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est
22. huius. DE ad F, vt autem C ad BG, ita E ad EH; erit ex æquali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quòd cum diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt, vt igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia & sexta ad quartam. quod ostendere oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima, duabus reliquis maiores erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F; & sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. Dico AB F ipsis CD E maiores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F, estq; AG æqualis E, & CH æqualis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB
19. huius. ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem est AB, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsis CH E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si ipsi quidem GB addantur AG F, ipsi vero HD addantur CH E, fient AB F ipsis CD E necessario maiores. Si igitur quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

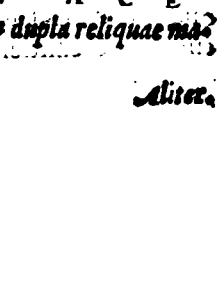


F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quae proxime demonstrata sunt, possimus etiam illud theorema demonstrare.

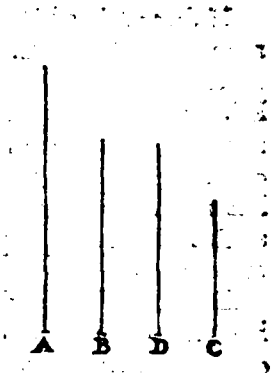
Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

Sint tres magnitudines proportionales AB CD E, quarum maxima AB, sit; vt AB ad CD, ita CD ad E. Dico AB E maiores esse, quàm duplam ipsius CD. ponatur AF æqualis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad totam, &
19. huius. *ablata ad ablatam. quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB ad CD. sed AB ponitur maior, quàm CD. ergo & FB, quam GD est maior. aequalis autem est AF ipsi CD, & CG ipsi E. Sunt igitur AF E ipsis CD CG aequales. quòd si inæqualibus aequalia addantur, tota inaequalia erunt. itaque additis AF E ipsi FB, quæ maior est, quàm GD, & additis CD CG ipsis GD, fient AB E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarum & minima, quam dupla reliquae maiores erunt. quod demonstrare oportebat.*



Aliter.

Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC, & ipſi B ponatur æqualis D. Itaque quoniam eſt vt A ad B, ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. ſunt igitur quattuor magnitudines proportionales ABDC. quare ex iam demonſtratis AC maiores erunt, quàm BD, hoc eſt quàm ipſius AB dupla.

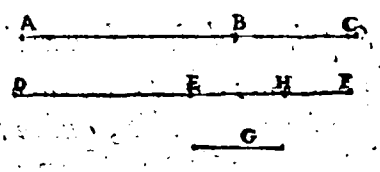


Hęc Euclides de proportionibus ſcripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apollonius, & alij poſteriores nonnullis theorematibus, quae ad huiuſmodi tractationem pertinent, tamquam demonſtratis vtuntur; optimum fore iudicauimus, ſi ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibuſdam additis, detractiſue, prout res ipſa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

Si prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; & conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionẽ habebit, quàm quarta ad tertiam.

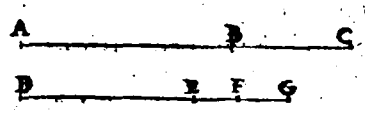
Habeat AB ad BC maiorem proportionẽ, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita ſit DE ad aliam aliquã, vt ad G. ergo DE ad G maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. ac propterea G minor erit, quàm EF. ponatur ipſi G æqualis EH. Quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita DE ad EH; erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. ſed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED. quod demonſtrare oportebat.



8. huius.

8. huius.

Similiter autem & ſi AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; demonſtrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. ſed vt AB ad BC, ita ſit DE ad aliam, vt ad EG; quæ maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED.



8. huius.

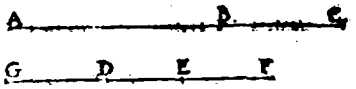
COROLLARIUM.

Ex his conſtat, ſi AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad BA. & ſi AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

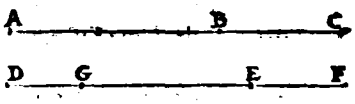
Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm ſecunda ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE



8.huius. sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse,
8.huius. quàm DE. quare permutãdo vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.

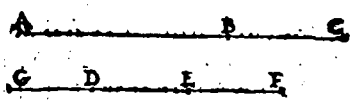
Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ãd EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quędam GE ad EF, quę minor sit, quam DE. Sed AB ad DE minorẽ habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem proportionem, quàm BC ad EF.



THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

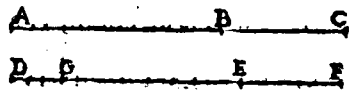
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorẽ proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE. vt enim AB ad BC, ita sit alia quędam



4.huius. GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniã
18.huius. igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componẽdo vt AC ad CB, ita GF ad FE.
8.huius. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB
13 huius. maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonstrare oportebat.

Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componẽdo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rursus enim quoniam

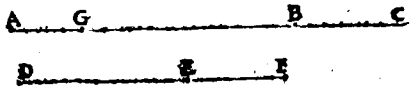


4.huius AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF, ad FE, ita sit alia quę

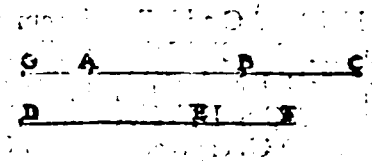


4.huius dam GC ad CB. erit vtique GC minor,

quàm

quàm AC: & dividendo GB ad BC, vt DE ad EF. at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17.huius. 13.huius.

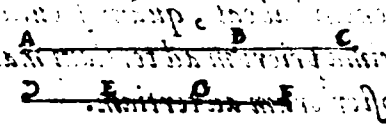
Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & dividendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. si enim rursus sit vt DF ad FE, ita alia quædam GC ad CB; erit GC quàm AC maior atque erit dividendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. 8.huius.tr 17.huius.



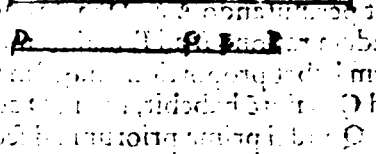
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. sit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quādam, erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. sed FD ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE. Coroll.19.huius.



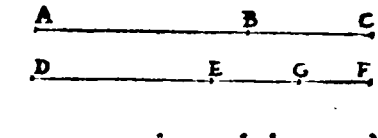
Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per conuersionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam & quartam.

Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportionē habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est; vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & si minor sit proportio partis, totius maior erit. 12.huius. 8.huius.

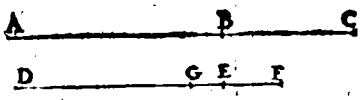


THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad abla

tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Habeat AC ad DF maiorem proportionẽ, quàm AB ad DE. Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG. ergo et reliqua BC ad reliquam GF eſt vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.



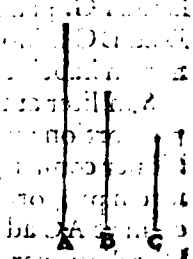
19.huius.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo ſupra, modo oſtendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si ſint tres magnitudines, & alię ipſis numero æquales, habeatq́ue prima priorum ad ſecundam maiorem proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam; ſecunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima poſteriorum ad tertiam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniã enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habebit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. et rurſus permutando A ad C maiorẽ habebit, quàm D ad F. quod oportebat demõſtrare.

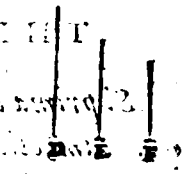


17.huius.

Ex demonſtratis ad 13.huius.

17.huius.

Quòd ſi prima priorum ad ſecundam minorem habeat proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam; ſecũda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm ſecũda poſteriorum ad tertiam: ſimiliter demõſtrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam poſteriorum ad tertiam.



QVINTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

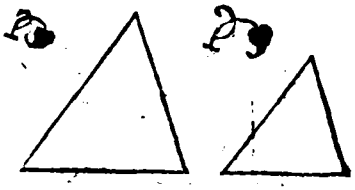
Federici Commandini Vrbinatis.

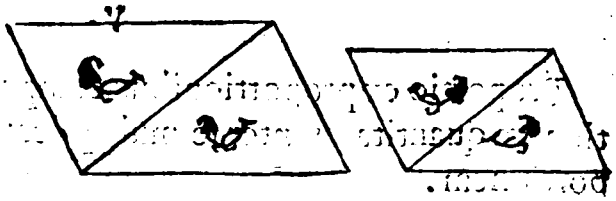
DIFFINITIONES.

I.



IMILES figurę rectilineæ ſunt, quę et ſingulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.

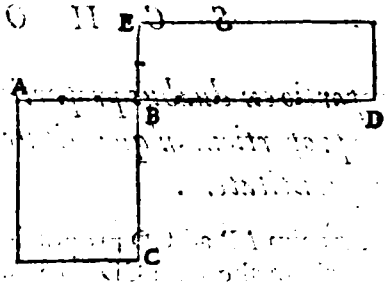


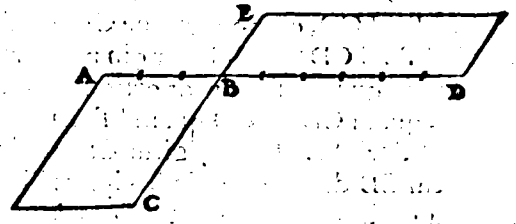


II.

Reciprocę figuræ ſunt, quãdo in vtraque figura antecedẽtes, et conſequentes rationes fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.





Per antecedentes, & conſequentes rationes intellige antecedentes, & conſequentes proportionis terminos: vt ſi ſint duo rectangula ABC DBE, ſitq; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hae figurae reciprocae, ſeu ex contraria parte ſibi ipſis reſpondentes: quoniã in altera quidem eſt terminus antecedens primae proportionis, videlicet AB, et conſequens ſecundae BC; in altera vero eſt conſequens primae BD & antecedens ſecundae EB. ſunt autem dictae figurae etiam inter ſe aequales, vt deinceps oſtendetur.

Extrema

III.

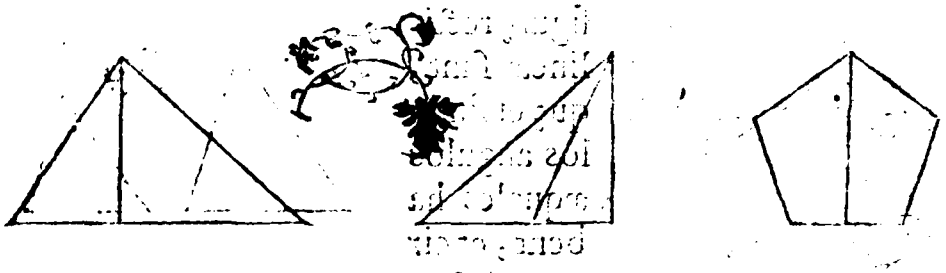
Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

F. C. COMMENTARIVS.

Extrema ac media ratione secari recta linea idcirco dicitur, quòd secetur in duas partes, quae proportionis termini sint, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita diuisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et BC extremus.

IIII.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à verti ce ad basim ducitur.



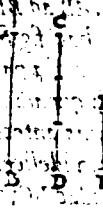
V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

SCHOLIUM.

Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

Habeat enim AB ad CD proportionem datam, vt duplam, vel tri plam, vel aliam aliquam: CD vero ad EF similiter datam proportio nem habeat. Dico proportionem AB ad EF compositam esse ex pro portione AB ad CD, et proportione CD ad EF; vel si quantitas pro portionis AB ad CD multiplicetur in proportionis CD ad EF quan titatem, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primū AB maior, quàm CD, et CD quàm EF maior: Sitq; AB dupla CD, et CD ipsius EF tripla. Quoniā igitur CD quidem ipsius EF tripla est, ipsius autem CD dupla AB; erit AB ipsius EF sextupla: quoniā si tri plum alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc enim proprie est compositio. vel hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est dupla, di uidatur AB in partes æquales ipsi CD, quæ sint AG GB. et quo niam CD est tripla EF, æqualis autē AG ipsi CD, erit AG ipsius EF



tripla.

tripla.ideoq; tota AB ipſius EF ſextupla eſt. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminũ CD;compoſita ex proportione AB ad CD,& próportione CD ad EF.Similiter autem & ſi CD ſit vtriſque AB EF minor,idẽ concludetur.Sit enim rurſus AB quidem tripla ipſius CD, CD vero ipſius EF dimidia.& quoniam CD dimidia eſt ipſius EF,& ipſius CD tripla AB;erit AB ſeſquialtera ipſius EF. ſi enim dimidium alicuius triplicabimus,habebit ipſum ſemel, & eius dimidium. Et quoniã AB ipſius CD eſt tripla, CD vero dimidia EF;quarum partium ipſi CD æqualium AB eſt trium, earum eſt EF duarum.ergo AB ſeſquialtera eſt ipſius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum,cõpoſita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rurſus ſit CD vtriſque AB EF maior:& ſit AB quidem ipſius CD dimidia, CD vero ſeſquitertia ipſius EF.Quoniã igitur quarum partium eſt AB duarum,earum CD eſt quattuor:quarum autem CD eſt quattuor,earum EF eſt trium:& quarum AB duarum,earumdem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rurſus connectitur per CD medium terminum;quę eſt duorum ad tria. Similiter et in pluribus,& in reliquis caſibus.Et manifeſtum eſt,ſi à compoſita proportione vnus quiuis componentium auferatur, vno ſimplicium ejecto, reliquos componentium aſſumi.





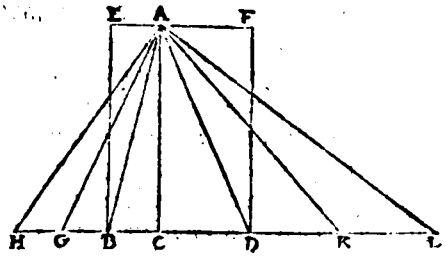
FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propoſitionem ſecundi libri Archimedis de ſphęra & Cylindro, & in commentarijs in vndecimam propoſitionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint triangula quidẽ ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam.Dico vt baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur enim BD ex vtraque parte ad puncta H L,& ipſi quidem BC baſi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipſi vero baſi CD ponãtur quotcũq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iũgãtur. 38.huius. Quoniam igitur CB BG GH inter ſe æquales ſunt;erunt & triãgula AHG AGB ABC inter ſe æqualia.ergo quotuplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, totuplex eſt AHC triangulum trianguli ABC.Eadem ratione quotuplex eſt LC baſis, ipſius baſis CD,totuplex eſt & triangulum ALC ipſius ACD trianguli:et ſi æqualis eſt HC baſis baſi CL,& triangulum AHC triangulo ALC eſt æquale:& ſi baſis HC baſim CL ſuperat,& triangulum AHC ſuperabit triangulum ALC:& ſi minor,minus. Quattuor igitur magnitudinibus exiſtentibus,videlicet duabus baſibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD,ſumpta ſunt æquemultiplicia,baſis quidem BC,& ABC trianguli,videlicet baſis HC,& AHC triãgulum: baſis vero CD,& trianguli ACD, alia vtcunque æque multiplicia,nempe CL baſis, & ALC triangulum:atque oſtenſum

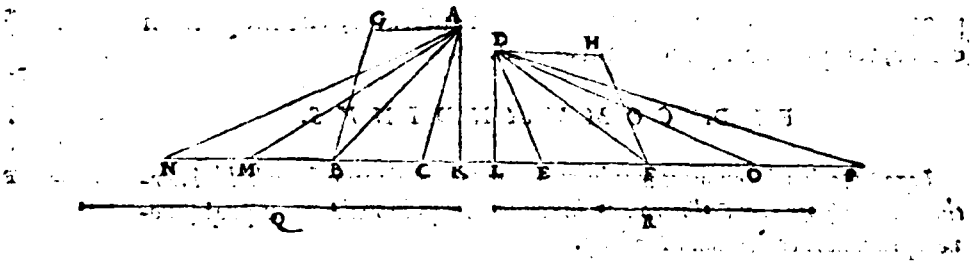


ſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat, & triangulũ AHC ſuperare triangulũ ALC;
5.diff. quinti. & ſi æqualis, æquale; & ſi minor, minus. eſt igitur vt BC baſis ad baſim CD, ita triangulũ ABC ad ACD triãgulũ. Et qm̃ triãguli ABC duplũ eſt parallelogrãmũ EC,
41.primi. & triãguli ACD parallelogrammũ FC duplum; partes autem eodem modo multiplicium eandem inter ſe proportionem habent: erit vt ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur oſtenſum eſt, vt baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC
11 quinti. ad CF parallelogrammum: erit vt BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum eſt, quod demonſtrare hoc loco non putaui eſſe alienum.

Triangula & parallelogramma in æqualibus baſibus conſtituta, eandem inter ſe proportionem habent, quam eorum altitudines.



Sint duo triangula ABC, DEF, & duo parallelogramma CG EH, quae aequales baſes habeãt BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo ſit AK: & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita eſſe & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF, & ponantur baſi BC aequales quotcumque BM MN: & baſi EF aequales quotcumque FO, OP, iungantur q; AM AN DO DP: quot vero magnitudines ſunt in CN aequales baſi CB, tota ſumantur in linea Q aequales ipſi AK altitudini; & quot ſunt in EP aequales baſi EF, tot ſumantur in linea R aequales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC ſunt in aequalibus baſi-
Ex antecedente. *bus conſtituta, & aequali altitudine; etiam inter ſe aequalia erunt. & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter ſe aequalia. Quotuplex igitur eſt linea Q ipſius AK, totuplex eſt triãgulum ANC trianguli ABC: & quotuplex eſt linea R ipſius DL, totuplex eſt triangulum DPE trianguli DEF: & ſi Q ſit aequalis R, & triangulum ANC triangulo DPE aequale erit, ex premiſſa; erit namque altitudo AK, cuius tripla eſt Q aequalis altitudini DL, cuius ipſa R eſt tripla: ſi vero Q ſit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE; et ſi minor, minus. triangulorum enim aequales baſes habentium, quae maiori ſunt altitudine, etiam maiora ſunt, alioqui ſequeretur totum parti aequale eſſe. Cum igitur quattuor ſint magnitudines, videlicet duae altitudines AK DL, & duo triangula ABC DEF: & ſumpta ſint aeque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & trianguli DEF; alia vtcumque multiplicia: & oſtenſum ſit ſi linea Q ſuperat R, & triangulum ANC ſuperare triangulum DPE, & ſi aequalis, aequale; & ſi minor, minus: erit vt altitudo HA ad altitudinẽ DL, ita triangulũ ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplum eſt CG parallelogrammum, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem: erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF. Sed oſtenſum eſt vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita eſt paralelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in aequalibus baſibus conſtituta eandem inter ſe proportionem habent, quam eorum altitudines. quod demonſtrare oportebat.*

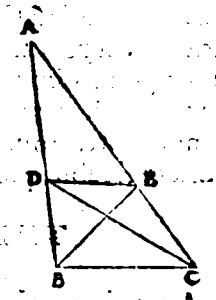
5.dif. quinti. 41.primi. 15.quinti.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habẽt proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triãgulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vt bases, & ob eandem causam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sint, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. ijsdem enim constructis, quoniam est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autẽ BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulũ ADE; et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. Quòd cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiã in eisdem sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triãguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniũgit recta linea reliquo triãguli lateri parallela erit. quod oportebat demonstrare.



37. primi.

7. quinti.

Ex antecedente.

11. quinti.

11. quinti.

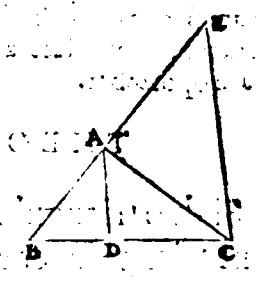
9. quinti.

40. primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. Dico vt BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur enim per C ipsi DA parallella CE, & producta BA conueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædã AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea BA E incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC. ostensus aũt est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC



9. primi.

31. primi.

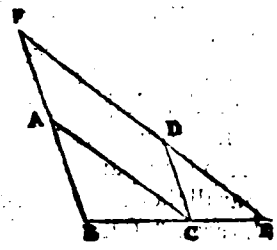
29. primi.

6.primi. Ex antecedente. 7.quinti. Ex antecedente. 9.quinti. 29.primi.

æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. Et quoniam vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita BA ad AE: æqualis aũt est AE ipsi AC: est igitur vt BD ad DC, ita BA ad AC. Sed sit vt BD ad DC, ita BA ad AC: & AD iungatur. Dico angulũ BAC bifariã sectũ esse recta linea AD. ijsdem enim constructis quoniam est vt BD ad DC, ita BA ad AC; Sed & vt BD ad DC, ita BA ad AE, etenim vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD: erit & vt BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est æqualis AE, ac propterea & angulus AEC angulo ECA æqualis. Sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eãdem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt: et homologa siue eiusdẽ rationis sunt latera, quę æqualibus angulis subtenduntur.



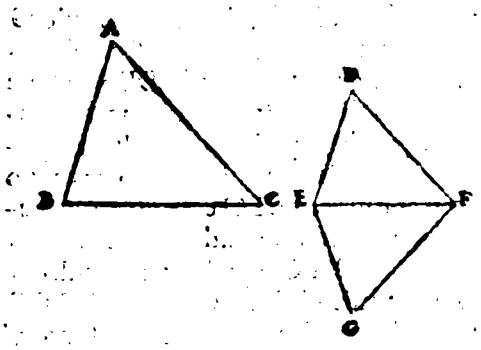
Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulũ quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant: et præterea angulũ BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos, et homologa, siue eiusdem rationis latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus 17.primi. rectis minores sunt: æqualis aũt est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conuenient, producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus 28.primi. DCE est æqualis angulo ABC; erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur 34.primi. est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est æqualis. Et 2.huius. quoniam vni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit 7.quinti. vt BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. Vt igitur BA ad CD, ita BC ad CE: et permutando vt AB ad BC, ita DC ad CE. Rursus quoniam CD 2.huius. parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita FD ad DE. Sed DF est æqualis AC. ergo vt BC ad CE, ita AC ad ED. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam ostensum est, vt AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos: et homologa, siue eiusdem rationis latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, ſitq; ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; vt autem BC ad CA, ita EF ad FD: et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, et æquales habere angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. conſtituatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt æqualis. Ideoq; æquiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, et homologa latera ſunt, quę æqualibus angulis ſubtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt AB ad BC, ita DE ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quòd cum vtraque ipſarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipſi EG æqualis. Eadem ratione et DF æqualis FG. Itaque quoniam DE eſt æqualis EG, cõmunis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales ſunt, et baſis DF baſi FG æqualis. angulus igitur DEF eſt æqualis angulo GEF, et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem DFE eſt æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED eſt æqualis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis eſt angulo DFE: et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebũt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. quod oportebat demonſtrare.



23. primi.

Ex antecedente.

11. quinti.

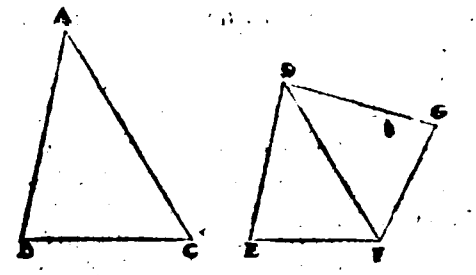
9. quinti.

8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æqualẽ habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ſitq; ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum uero ACB angulo DFE. conſtituatur enim ad rectã lineam DF, et ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG; angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G eſt æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum eſt, ac propterea vt BA ad AC, ita eſt GD ad DF. ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis eſt ipſi DG: & communis DF. ergo duę ED DF duabus GD DF



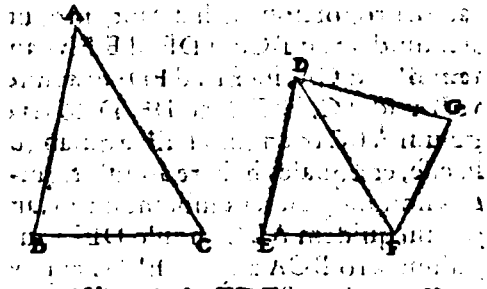
23. primi.

4. huius.

11. quinti.

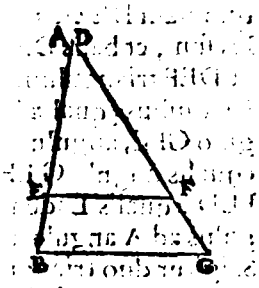
9. quinti.

æquales ſunt : & angulus EDF angulo G
4.primi. DF eſt æqualis . baſis igitur EF, eſt æqualis baſi FG : triangulumq; DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur . ergo angulus quidem DFG eſt æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. ſed angulus DFG æqualis eſt angulo ACB. & angulus igitur ACB angulo DFE eſt æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui ad B æqualis reliquo qui ad E. æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. quod oſtendere oportebat.



EX COMMENTARIIS.

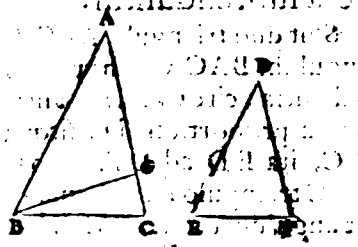
Sunt qui hoc etiam aliter demonſtrẽt. Nam impoſito lateri DE lateri AB, cadet DF in AC, quonam angulus ad punctum D angulo ad A eſt aequalis. Vel igitur DE eſt aequalis ipſi AB, vel inæquale. & ſi quidem aequale, erit & DF aequalis AC. ergo & baſis EF baſi BC, & reliqui anguli reliquis angulis aequales. Si vero DE ſit inæquale ipſi AB, ſit vtrouis ipſorum maius, verbi cauſſa AB. fiat vt BA ad AC, ſic ED ad DF. ergo permutando vt BA ad AE, ſic CA ad AF: & dividendo vt BE ad EA, ſic CF ad FA. quare latus EF
4.primi.
2.huius.
29.primi. *parallelum eſt lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, & angulus AFE angulo ACB eſt aequalis. quod oſtenſum oportuit.*



THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proporrionalia, & reliquorum vtrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, vnum angulũ vni angulo æqualem habentia, videlicet angulũ BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, vt ſit DE ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum qui ad CF. primum vtrumque ſimul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si enim inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF, vnus ipſorum maior erit. Sit maior ABC. & conſtituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG. Et quoniam angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis. æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. quare vt AB ad BG, ſic DE ad EF: vtq; DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC: & vt igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. Quod cum AB ad vtramque BC BG eandem habeat



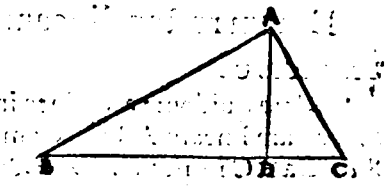
23.primi.
4.huius.

beat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC. minor aũt recto ponitur angulus, qui ad C. ergo & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F. angulus igitur qui ad F recto maior est. atqui ponitur minor recto, quod est absurdũ. nõ igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autẽ & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. igitur & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur vterque angulorum, qui ad C F non minor recto. Dico rursus & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem. sed angulus qui ad C non est minor recto. nõ minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores. quod fieri nõ potest. nõ igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF. ergo æqualis necessario erit. est autẽ & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis. ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. quod oportebat demonstrare.

9. quinti. 5. primi. 13. primi. 17. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim vterque est: et angulus qui ad B communis duobus triãgulis ABC ABD: erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare vt BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulũ æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: et adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eãdem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare vtrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed et BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo vt BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Sic igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectãgulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se, similia sunt. quod oportebat demonstrare.

4. huius. 1. diffi. huius

COROLLARIVM.

COROLLARIVM.

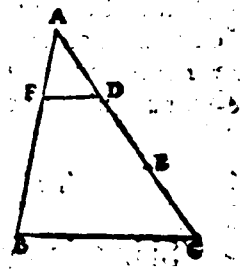
Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; ductam basis partium mediam proportionalem esse: et adhuc basis et vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia: et ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumanturq; in AC quod vis punctum D, et ipsi AD æquales ponantur DE EC. deinde iungatur BC; et per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniã vni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est FD; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo et BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. quod facere oportebat.

a. huius.



PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D E, & ponantur ita, ut angulũ quem vis contineant, iunctaq; BC per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducãtur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est vtrumque ipsorum FH HB: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad KD. æqualis autem est KH quidẽ ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF: & vt ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. quod facere opottebat.

34. primi.

a. huius.



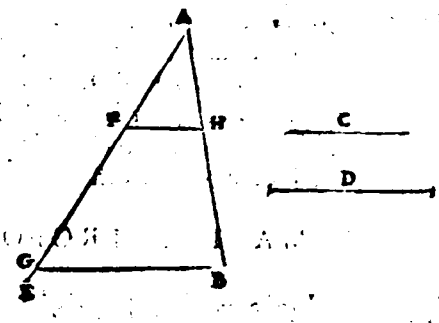
F. C. COMMENTARIVS.

Huic non dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE: & ipsi quidem C æqualis abscindatur AF; ipsi vero D æqualis FG: & iuncta

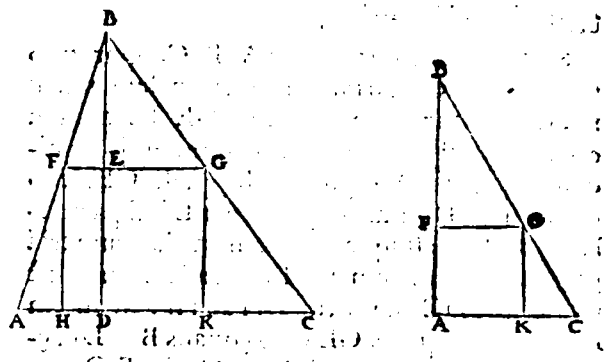
iuncta BC ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita est AF ad FG: est aũt AF æqualis C, & FG ipsi D: erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secta est ad punctum H in proportionem C ad D. quod facere oportebat. 2. huius.



Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sunt, licebit problema absoluere, quod ad quartam propositionẽ quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triãgulo quadratũ describere.

Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datũ triangulum acutiangulum est, vel rectangulum, vel obtusiangulum. Sit primũ acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD: & ex præmissa diuidatur BD in puncto E, ita vt DE ad EB eandẽ proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH, GK parallelae ipsi BD. Quoniam igitur in triangulo ABD ducta est FE ipsi AD parallela. erit angulus B E F angulo B D A aequalis; & angulus BFE aequalis 29. primi.
angulo B A D: atque est angulus F B E vtrique communis. ergo F B E triangulum triangulo A B D aequiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum E B G aequiangulum ipsi D B C. Vt igitur AD ad DB, ita est FE ad EB, & vt BD ad DC, ita B E ad E G. quare ex aequali vt AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo vt AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendoq; vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC, ita est BE ad EG. ergo ex aequali, vt BD ad AC, ita BE ad FG. Itaque cũ sit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex aequali vt AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est aequalis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se aequales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: est q; angulus BDA rectus; 4. huius. 22. quinti. 18. quinti. 4. quinti. 34 primi.
& ipse KHF rectus erit. eadem ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus rectus: Ergo & ipsis oppositi FGK GKH recti sint necesse est. quadratum igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtusiangulo quadratum describemus, ab angulo recto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quòd si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur, vt in subiecta figura, vtemur altera perpendiculari, quæ est trianguli latus, videlicet B A, & similiter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quã CA ad AB; ducetur q; FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC aequiangulum esse. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG. est autem vt CA ad AB, ita AF ad FE. ex aequali igitur, vt CA ad se ipsam, ita AF ad FG; idcoq; AF FG inter se aequales sunt. Et ex ijs, quae proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC; atque illud est, quod facisse oportuit. 34. primi. 29. primi. 34. primi. 2. huius. 4. huius.

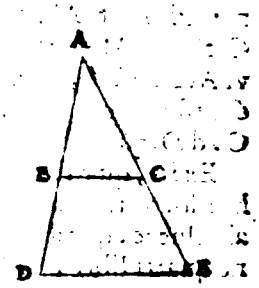


PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita, vt angulum quem uis contineant. oportet ipsarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur enim

enim AB AC ad punctа DE: ponaturq; ipſi AC æqualis BD & iuncta BC, ducatur per D ipſi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, uidelicet ipſi DE parallela ducta eſt BC, erit vt AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem eſt BD ipſi AC. vt igitur BA ad AC, ita eſt AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuenta eſt CE. quod facere oportebat.

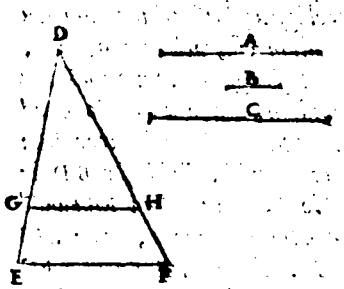


PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipſarum A B C quartam proportionalem inuenire. Exponantur duæ rectæ lineę DE DF angulũ quemuis EDF continentes: & ponatur ipſi quidem A æqualis DG, ipſi vero B æqualis GE, & ipſi C æqualis DH: iunctaq; GH per E ipſi parallela ducatur EF. Itaque quoniam vni laterum triãguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH, erit vt DG ad GE, ita DH ad HF. eſt autem DG ipſi A æqualis, GE vero æqualis B: & DH æqualis C. Vt igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inuenta eſt HF. quod facere oportebat.

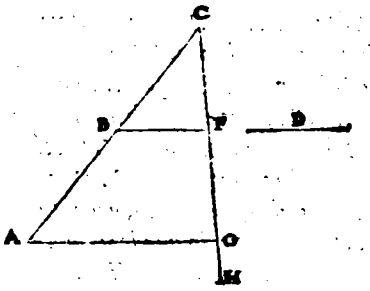
2. huius.



FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

Tribus datis rectis lineis AB BC & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipſam D.

Rurſus inclinetur recta linea CH in quouis angulo & abſcindatur CF æqualis D: iunctaque BF, ipſi parallela ducatur AG. ergo rurſus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC, hoc eſt ad D. Inuenta igitur eſt FG. quod facere oportebat.



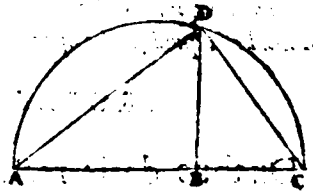
PROBLEMA V. PROPOSITIO. XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ipſarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum, & in ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipſi AC ad rectos angulos BD, & AD DC iungãtur. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus ADC, is rectus eſt: & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt DB, erit DB baſis partium AB BC media proportionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta eſt DB. quod facere oportebat.

31. tertij.

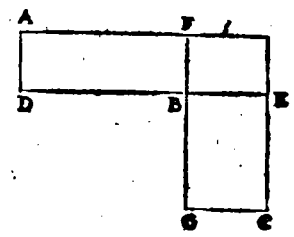
Cor. 8. huius



THEO-

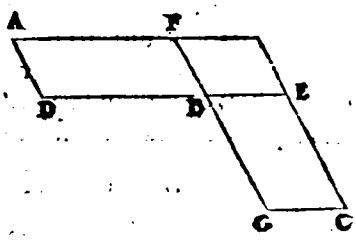
THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIIII.

Aequalium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia.



Sint æqualia parallelogrāma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantnr in directum DB BE. ergo et indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ ſunt circum ęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere: hoc eſt ut DB ad BE, ita eſſe GB ad BF. compleatur enim parallelogrammum FE. et qm̄ parallelogrāmū AB æquale eſt parallelogrāmo BC, aliud autem aliquod eſt FE parallelogrammum; erit vt AB ad FE, ita BC ad FE. Sed vt AB quidem ad FE, ita eſt DB ad BE; vt autem BC ad FE, ita GB ad BF. et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circū ęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera, quæ circū æquales angulos; ſitq; vt DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrāmum AB parallelogrāmo BC æquale eſſe. Qm̄ enim eſt vt DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE: et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit et vt AB ad FE, ita BC ad FE. ęquale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC. ergo ęqualium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrāmorū latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.

7.quinti. 1.huius. 11.quinti. 2



1.huius. 11.quinti. 9.quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

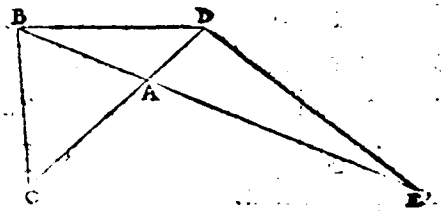
Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FBE aequales duobus rectis; ſed angulus EBG ponitur aequalis angulo FBD. anguli igitur FBE, EBG duobus rectis ſunt aequales, ac propterea rectae lineę FB BG in directum ſibi ipſis erunt.* 14.primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

Aequalium, et vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia.

Sint triangula ABC ADE vnum angulum vni angulo ęqualem habentia, angu-

lum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quę circum
æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere, hoc eſt vt CA ad AD, ita
eſſe EA ad AB. ponantur enim ita vt in di-
14.primi. rectum ſit CA ipſi AD. ergo et EA ipſi AB
in directum erit; et iungatur BD. Quoniã
igitur triangulum ABC æquale eſt trian-
7.quinti. lo ADE, aliud autẽ eſt ABD; erit vt CAB
triangulum ad triangulum BAD, ita trian
gulum ADE ad triangulum BAD. Sed vt
triangulum quidem CAB ad BAD trian-
1.huius. gulum, ita CA ad AD: ut autem triangu-
11.quinti. lum EAD ad ipſum BAD, ita EA ad AB. et ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB.
Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria
parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera triã
gulorum ABC ADE: et ſit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC
triangulo ADE æquale eſſe. Iuncta enim rurſus BD, quoniam vt CA ad AD, ita
1.huius. eſt EA ad AB; ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD;
11.quinti. et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum: erit ut ABC trian-
gulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triãgulum. Vtrumque
igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionẽ;
9.quinti. ac propterea æquale eſt ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur et vnũ
vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angu-
los, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum triangulorum vnũ vni æqua
lem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſi
bi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia. quod demonſtrare oportebat.



SCHOLIVM.

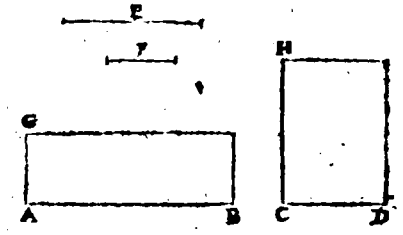
Aequiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera habere, non etiam latera ex contraria parte ſibi ipſis proportione reſpondentia. Aequalibus autem, et æquiangulis latera quoque ex contraria parte reſpondentia habere contingit; æqualia enim ſunt & latera: æqualitatis autem proportio ad ſe ipſam conuertitur, hoc eſt ex antecedente ſumpto & conſequente eadem eſt, & differens. At æqualibus quidem, & vnum angulum ęqualem habentibus contingit ſolum latera habere ex cõtraria parte reſpondentia, non tamen omnia, ſed quæ circum æquales angulos conſiſtunt. Quare alia quidem ſolum proportionalia habent latera, alia vero & proportionalia, & ex contraria parte reſpondentia. & ſunt prima quidem ęquiangula & non æqualia: ſecunda vero æqualia, & vnum angulum habentia æqualem, non tamen æquiangula: reliqua autem & æqualia, & æquiangula ſunt.

THEOREMA. XI. PROPOSITIO. XVII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale eſt ei rectangulo, quod mediis continetur: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis cõtinetur, quattuor rectę lineæ proportionales erũt.

Sint

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH: & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit vt AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur; est enim AG æqualis F: parallelogramũ vero DH quod cõtinetur ipsis CD E; cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis CD E continetur. Sed rectangulum contentum AB F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales esse, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. ijsdem enim constructis quoniam rectangulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur: atque est contentum quidem AB F rectangulum BG; etenim AG est æqualis F: contentum vero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH; & sunt æquiangula. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad AG: æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.



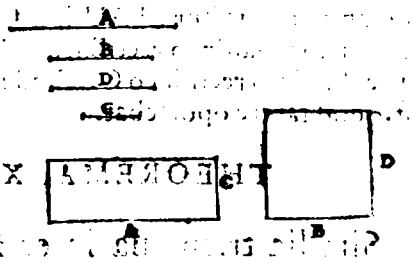
14. huius.

14. huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectę lineæ proportionales erunt.

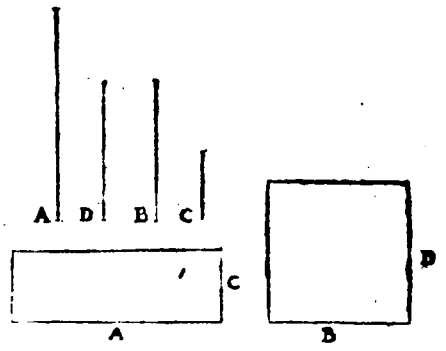
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, & sit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum cõtentũ A C æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit vt A ad B, ita D ad C. Si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint rectangulum extremis cõtentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum AC contentum est æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum A C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico vt A ad B, ita esse B ad C. ijsdem enim constructis



7. quinti. Ex antecedente.

quoniam rectangulum contentum AC æquale eſt quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B eſt rectangulum, quod ipſis BD continetur, eſt enim B æqualis ipſi D: erit rectangulum contentum A C æquale ei, quod BD continetur. Si autem rectãgulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. eſt igitur vt A ad B, ita C ad D. æqualis autem B ipſi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum eſt æquale ei, quod à media fit, quadrato: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

Ex antecedente.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

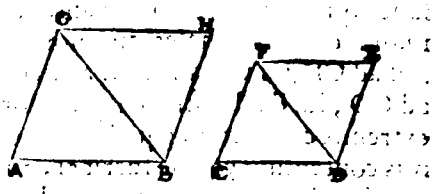
Sit data recta linea AB; datum autem rectilineũ CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitũ rectilineũ deſcribere. Iungatur DF, & ad rectam lineã AB, & ad pũcta in ipſa AB, angulo quidẽ C æqualis angulus conſtituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB eſt æqualis. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rurſus cõſtituatur ad rectã lineam BG, & ad puncta in ipſa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis GBH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. eſt autem & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AC, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH. & propterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſi angulos habent proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE ſimile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

23. primi.

4. huius.

4 huius. 11. quinti.

Diffi. 1. huius.



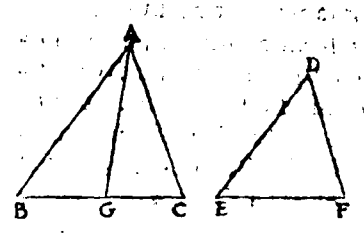
THEOREMA. XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualẽ angulo ad E. & ſit vt AB ad BC, ita DE ad EF; ita vt latus BC homologũ ſit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad

EF.

EF. Sumatur enim ipſarum BC EF tertia proportionalis BG, vt ſit, ſicut BC ad EF, ita EF ad BG: & iũgatur GA. Quoniã igitur vt AB ad BC, ita eſt DE ad EF; erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe æqualia ſunt. æquale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam eſt vt BC ad EF, ita EF ad BG; ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ab ſecundam: habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. eſt autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula inter ſe in dupla ſunt proportione laterum homologorum. quod oſtendere oportebat.



11. huius.

11. quinti.

15. huius.

Diffinit. 10. quinti.

1 huius.

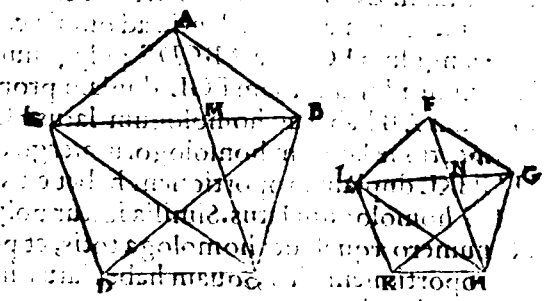
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum: quoniam oſtenſum eſt vt CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulũ ABG, hoc eſt ad triangulũ DEF. quod oſtendere oportebat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XX.

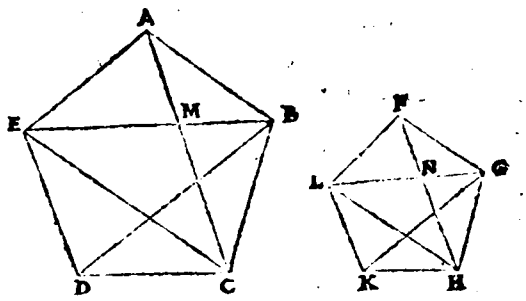
Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDE FGHKL, & ſit AB homologum ipſi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EC GL LH. & quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt æqualis: atque eſt vt BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula ſunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo & ſimile. angulus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL. eſt autem & totus ABG angulus



6. huius.

gulus æqualis toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE FGL, eſt vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter ſimilitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH latera ſunt proportionalia. æquiangulum igitur eſt EBC triangulũ triangulo LGH. quare & ſimile. Eadem ratione & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triãgula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc eſt vt proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem eſſe ABE EBC ECD, conſequentia aũt ipſorum FGL LGH LHK: & ABCDE polygonũ ad polygonũ FGHKL duplã proportionẽ habere eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt AB ad FG. Iungantur enim AC FH. Et quoniam propter ſimilitudinem polygonorum angulus ABC eſt æqualis angulo FGH; atque eſt vt AB ad BC, ita FG ad GH: erit triangulum ABC triangulo FGH æquiangulum. æqualis igitur eſt angulus quidem BAC angulo GFH. angulus vero BCA angulo GHF. præterea qm̃ æqualis eſt BAM angulus angulo GFN, oſtenſus autem eſt & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG æqualis. ergo æquiangulum eſt ABM triangulum triangulo FGN. Similiter oſtendemus & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum eſſe. Vt igitur AM ad MB, ita eſt FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex æquali vt AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triãgulũ ad triãgulũ MBC, & triãgulũ AME ad ipſũ EMC, inter ſe enim ſunt vt baſes. & vt vnũ antecedẽtiũ ad vnũ conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequẽtia. Vt igitur AMB triãgulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipſum CBE. Sed vt AMB ad BMC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triãgulũ ad triangulũ EBC. Eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triãgulũ ad triãgulũ GLH. atq; eſt vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triãgulũ ABE ad triãgulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triãgulum EBC ad triangulum GHL. Similiter oſtendemus iunctis BD GK, & vt BEG triangulum ad triangulum LGH, ita eſſe triangulum ECD ad triangulum LHK. Et qm̃ eſt vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH, & ad huc triangulum ECD ad ipſum LHK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG; ſimilia enim triangula in duplã ſunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula diuidũtur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus: quod oportebat demonſtrare.



6. huius.

7. huius.

11. quinti.

1. huius.

12. quinti.

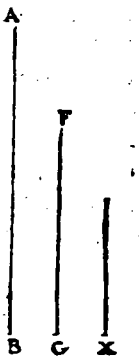
Ex antecedente.

Eodem modo & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in dupla proportione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt & in triangulis.

COROLLARIVM PRIMVM.

Ergo vniuerſe ſimiles rectilineæ figuræ inter ſe ſunt in dupla propor-

proportione homologorum laterum. & ſi ipſarum A B FG tertiam proportionalem ſumamus, quę ſit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.

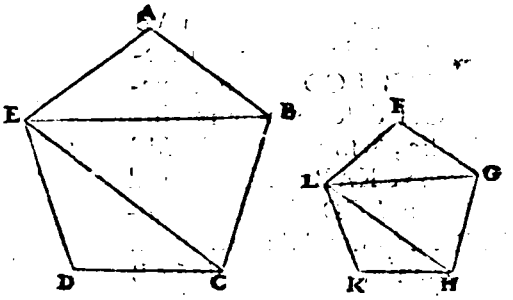


COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam. quod oſtendere oportebat.

Oſtēdemus etiam aliter & expeditius homologa eſſe triāgula.

Exponātur enim rurſus polygona ABCDE FGHKL, & iūgātur BE EC GL LH. Dico vt ABE triāgulū ad triāgulū FGL, ita eſſe triāgulū EBC ad triāgulū LGH; & triāgulū CDE ad ipſum HKL. Qm̄ enim ſimile eſt ABE triāgulū triāgulo FGL; habebit ABE triangulū ad triangulū FGL duplā proportionē eius, quam habet BE ad GL. Eadē ratione & triāgulū BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL, eſt igitur vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulū. Rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. eſt igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, & reliqua vt in priori demonſtratione. quod ipſum demonſtrare oportebat.



Ex antecedente.

11. quinti.

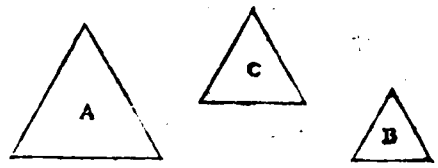
12. quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

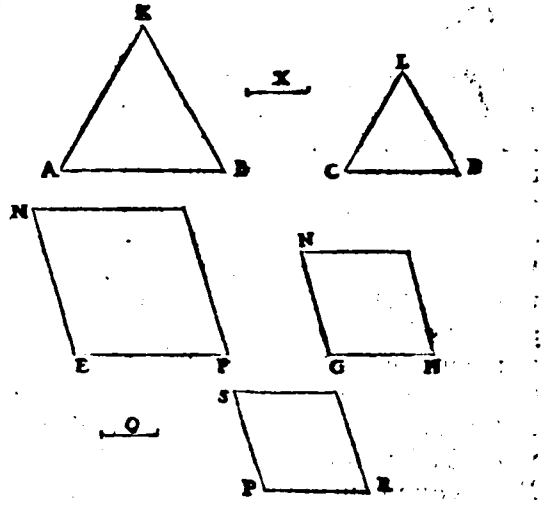
Sit enim vtrumque rectilineorum A B ſimile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe. Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo C, & ipſi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rurſus quoniam ſimile eſt rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipſi erit, & circum

cum æquales ângulos latera pruportionalia habebit. Vtrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH; & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH. describanturq; ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis verò EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineũ MF ad ipsum NH rectilineũ. Sumatur enim ipsarum quidẽ AB CD tertia proportionalis X; ipsarum vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem C D ad X, ita GH ad O; erit exequali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum: vt autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum. Sed sit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ MF ad rectilineũ NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR. & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR: & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum. ponitur autem & vt rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo vt rectilineũ MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quòd cum rectilineum MF ad vtrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectę lineę proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea, quæ ab ipsis

rſ. huius.

v. huius.

Coro. 20. huius.

11. quinti.

ss. huius.

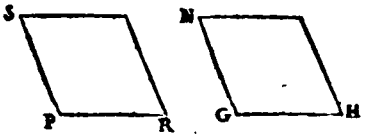
9. quinti.

*

ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

LEMMA.

At vero ſi rectilinea æqualia & ſimilia ſint, homologa ipſorũ latera inter ſe ęqualia eſſe, hoc modo demonſtrabimus.

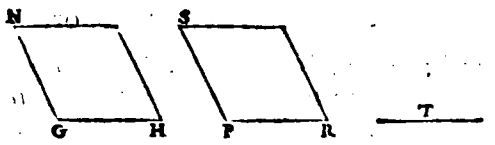


Sint æqualia & ſimilia rectilinea NH SR: & ſit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipſi HG eſſe ęqualem. Si enim inæquales ſint, vna ipſarum maior erit. Sit RP maior, quàm HG. Et quoniam eſt vt RP ad PS, ita HG ad GN; & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN. maior autem eſt PR, quàm HG. ergo & PS quàm GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN eſt maius. Sed & æquale, quod fieri non poteſt. non igitur inæqualis eſt PR ipſi GH. ergo æqualis ſit neceſſe eſt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH eſt æqualis PR] *Demonſtrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non poteſt. Sed tamen licet etiam recta demonſtratione vti, in hunc modum.* *

LEMMA.



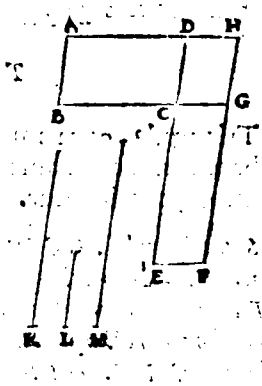
Sint æqualia & ſimilia rectilinea NH SR: ſitq; latus GH homologũ ipſi PR: Dico GH ipſi PR æquale eſſe. *Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliã quae ſit T, erit GH ad T, vt rectilineũ N H ad rectilineũ SR. ergo GH eſt aequalis ipſi T. Sed cũ tres rectae lineae GH PR T ſint proportionales, erit rectangulũ contentum GH T, hoc eſt quadratum GH aequale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipſi PR eſt aequalis. quod oportebat demonſtrare.*

11 huius. Corol. 20 huius.

17. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.



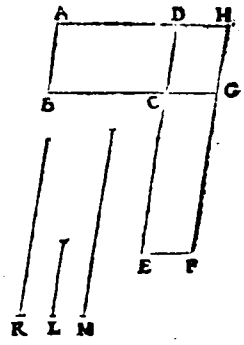
Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrãmum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE. ponatur enim vt BC ſit in directum ipſi CG. ergo & DC ipſi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq; recta linea quędã K: & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L; vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipſius K ad L: & L ad M eędem ſunt, quę proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt vt BC ad CG, ita

14. primi.

12 huius.

1. huius.

AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ſed
11.quinti. vt BC ad CG, ita K ad L: erit & vt K ad L, ita parallelogrãmum AC ad CH parallelogrammum. Rurſus quoniam eſt ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad paralel logrammum CF: vt autem DC ad CE, ita L ad M, & vt
11.quinti. L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrãmũ. Itaque cũ oſtenſum ſit, vt K quidẽ ad L, ita AC parallelogrãmũ ad parallelogrãmũ CH: vt aũt L ad M, ita parallelogrammũ CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compoſitam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demõſtratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compoſitam; ſunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio compoſita eſt K ad M. Quòd ſi ex tribus componenda ſit proportio, rurſus ex ea, quę ex duabus conſtat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quę quidem ex tribus compoſita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.

Sint datae proportiones A ad B, & C ad D, quarũ proportio C ad D ſit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionem
vt. huius. *A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quae inter C & D media ſtatuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatã eſſe à proportione C ad D, & proportionem, quę relinquitur eſſe eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, ſi auferatur vna dictarum proportionum, videlicet C ad F, quae eſt A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud eſt. quod facere oportebat.*

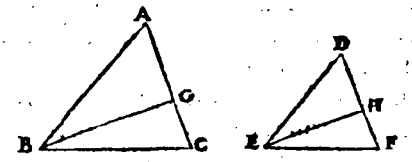


Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur & auferantur ex iam dictis facile conſtare poteſt, & ex ijs, quae tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnae conſtructionis Ptolemęi propoſitione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quae ab his non multum abhorrent: & elementorum loco eſſe poſſunt.

THEOREMA. I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo eſt æqualis, inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus, continentur.

Sint triangula ABC DEF, ſiá, angulus A angulo D aequalis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH ſimile; eſt enim angulus ad A aequalis angulo



ad D,

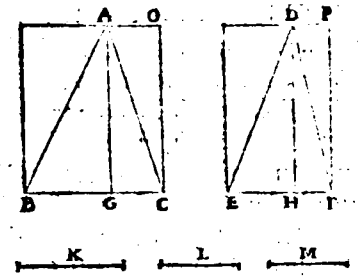
ad D, & angulus BGA rectus aequalis recto EHD. ergo & reliquus reliquo aequalis. Vt igi- 4.huius.
tur GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod fit ex BG & AC ad 1.huius.
rectangulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC. & simili-
ter vt HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igi- 11.quinti.
tur ex BG & AC ad rectangulum BAC est vt rectangulum ex EH, & DF ad rectan-
gulum EDF; & permutando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF,
vt BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Sed rectanguli ex BG & AC dimidium est
ABC triangulum ex 41 primi; habent enim eandem basim AC, & altitudinem eandem BG:
& rectanguli ex EH & DF dimidium triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad trian- 15.quinti.
gulum DEF eandem proportionem habet, quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF.
Quare triangula quorum vnus angulus vni angulo est aequalis inter se proportionem habent
eandem, quam rectangula, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur.
quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

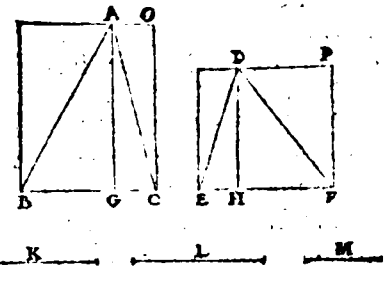
Ex hoc sequitur parallelogramma etiam æquiangula inter se proportionem ha- 15.quinti.
bere eandem, quam rectangula, quæ ipsorum lateribus continentur, cum sint eiusmodi triangulorum dupla.

THEOREMA II.

Triangula et parallelogramma inter se proportionem habent compositã ex proportione basium, et proportione altitudinum.



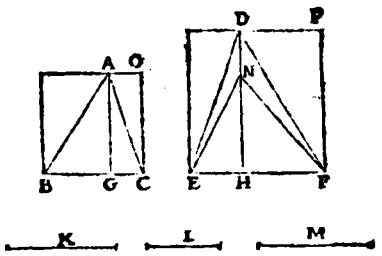
Sint triangula ABC DEF: & ducantur perpendiculares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habere compositam ex proportione basis BC ad basim EF; & ex proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est aequalis DH, vel inæqualis, & rursus vel BC est aequalis EF vel inæqualis. Sit primum AG aequalis DH, & 12.huius.
BC inæqualis ipsi EF, fiatq; vt BC ad EF, ita recta linea quædam K ad L: & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad triangulum DEF est, vt basis BC ad EF basim ex prima huius, hoc est vt K ad L. & cum DH sit aequalis AG, erit M ipsi L aequalis: triangulumq; ABC ad ipsum DEF, vt K ad M: proportio autem K ad M composita 7.quinti.
est ex proportione K ad L, & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demonstrabitur, si basis BC sit aequalis basi EF, cum inæquales sint altitudines AG DH: erunt enim KL inter se aequales, & ex ijs, quae demonstrauimus ad primam huius, triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M, hoc est quam K ad M. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L, hoc est basis BC ad basim EF. & ex proportione L ad M, hoc est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quòd si bases BC EF aequales sint, itemq; altitudines aequales AG DH, nihilominus idem sequetur, nam K L M inter se aequales erunt, & triangulũ ad triangulũ proportionem habebit compositam ex proportione K ad L. & L ad M. hoc est ex proportione basium & proportione altitudinũ. Deniq; si bases BC EF inaequales sint, & similiter inæquales altitudines AG DH. Ponatur AG minor, quàm



DH. & ab ipſa D H abſcindatur H N aequalis AG: iungaturq; EN NF; & rurſus fiat vt baſis B C ad baſim E F, ita K ad L: vt autem N H ad HD, hoc eſt vt AG ad H D, ita L ad M. Quoniam igitur triangula ABC NEF eandem habent

1.huius. *altitudinem, inter ſe erunt vt baſes. quare triangulum A B C ad triangulum N E F eſt vt B C ad EF, hoc eſt vt K ad L. Sed triangulum N E F ad*

Ex demonſtratis 1. huius. *triangulum DEF eſt vt altitudo NH, vel A G ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex aequali igitur triangulum A B C ad triangulum D E F,*



eſt vt K ad M. habet aũt K ad M proportionẽ compoſitã ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulũ ABC ad triangulũ DEF proportionẽ habet compoſitã ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc eſt ex proportione baſis BC ad baſim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinẽ DH. Sed cum trianguli ABC duplũ ſit parallelogrãmũ B O, & triangu

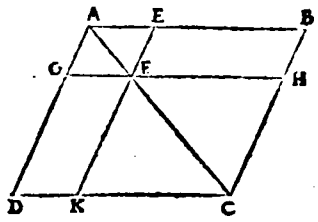
15.quinti. *li DEF duplum parallelogrammum E P; habebit parallelogrammum B O ad parallelogrammum EP proportionem compoſitam ex proportione baſis BC ad baſim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. triangula igitur & parallelogramma inter ſe proportionem habent cõpoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, et toti et inter ſe ſimilia ſunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cuius diame ter AC: circa diametrum vero A C parallelogrãma ſint E G HK. Dico parallelogramma E G HK, et toti ABCD, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim vni laterum trianguli A B C, videli-

4.huius. cet ipſi BC parallela ducta eſt EF, erit vt B E ad EA, ita CF ad FA. Rurſus quoniam vni laterum trianguli ACD, nempe ipſi CD ducta eſt paral-



11.quinti. lela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. Sed vt C F ad F A; ita oſtenſa eſt et B E ad E A. ergo et vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendoq; vt BA ad AE, ita DA ad AG, et permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallegrammorum igitur ABCD EG latera, quę circa communem angulum BAD proportionalia ſunt. Et quoniam paralle-

29.primi. la eſt GF ipſi DC, angulus quidem AGF eſt æqualis angulo A D C; angulus uero GFA æqualis angulo DCA; et angulus DAC eſt communis duobus triãgulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione et triãgulum A C B æquiangulum eſt triangulo A F E. totum igitur parallelogrammum

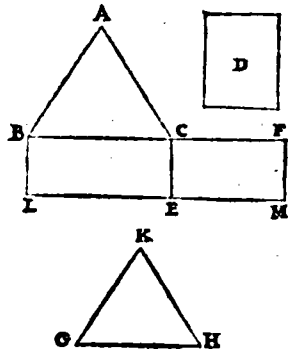
4.huius. ABCD parallelogrãmo EG eſt æquiangulum. ergo ut AD ad D C, ita AG ad GF; vt autem DC ad CA, ita GF ad FA: et vt A C ad C B, ita A F ad F E: et præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam oſtenſum eſt vt D C ad C A, ita eſſe G F ad FA: vt autem AC ad CB, ita AF ad F E; erit ex æquali vt D C ad C B, ita G F ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia ſunt latera, quę circum æquales angulos; ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogremmo EG eſt ſimile. Eadem ratione & parallelogrammum ABCD ſimile eſt parallelogrammo KH. Vtrumque igitur ipſorum EG HK parallelogrammorum parallelogram-

21.hũius. mo ABCD eſt ſimile. quæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt. parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia. quod oſtendere oportebat.

PRO-

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.



Sit datum quidem rectilineum, cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem æquale ſit D. oportet ipſi ABC ſimile, & ipſi D æquale idem conſtituere. applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipſi D, in angulo FCE, qui CBL angulo eſt æqualis. in directum igitur eſt BC ipſi CF, & LE ipſi EM. Sumatur ipſarum BC CF media proportionalis GH. & ab ipſa GH deſcribatur triangulum KGH ſimile & ſimiliter poſitum triangulo ABC. Et quoniam eſt vt BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita eſt figura, quæ fit à prima, ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam: erit vt BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed & ut BC ad CF, ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum. & vt igitur triangulum ABC ad triangulum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare permutando vt ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum. eſt autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur eſt & KGH triangulũ parallelogrãmo EF. Sed EF parallelogrãmũ æquale eſt rectilineo D. ergo & triangulum KGH ipſi D eſt æquale, eſt autem KGH ſimile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt KGH. quod facere oportebat.

44. primi.

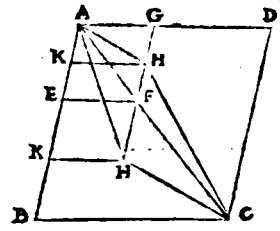
14. primi.
13 huius.
18. huius.

Cor. 20. huius.

11. quinti.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti.



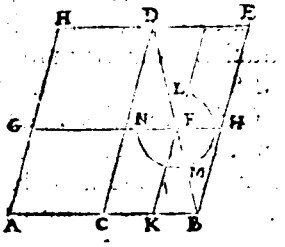
A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, ſimile ipſi ABCD, & ſimiliter poſitum, communemq; ipſi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABDD circa eãdem eſſe diametrum parallelogrammo AF. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit ipſorum diameter AHC & producatur GF vſque ad H; ducaturq; per H alterutri ipſarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG ſimile. ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK. eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammorum ABCD EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. et vt igitur GA ad AE, ita GA ad AK. Quòd cum GA ad utramque ipſarum AK AE eandem proportionem habeat, erit AE ipſi AK æqualis, minor maiori, quod fieri non poteſt. Non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti. quod demonſtrare oportebat.

24. huius.
1. diff. huius.
11. quinti.
9. quinti.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

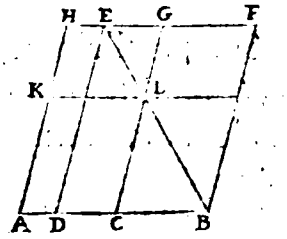
Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei quæ à dimidia describitur; maximũ est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.



A Sit recta linea AB; secetur ipsa bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammũ AD deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius AB descripta est, hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur enim ad re
B ctam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili et similiter posita ipsi DB. Dico AD parallelogrãmum parallelogrammo AF maius esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eãdem diametrum sunt. Ducatur eorum diameter DB, et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG, quoniam et recta linea AC ipsi CB. ergo et GC ipsi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius. omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrãmis similibus, et similiter positis ei, quæ à dimidia describitur; maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente. 43. primi. 36. primi.

C ALITER. Sit etiam rursus AB secta bifariã in pũcto C, et applicatum sit AL. deficiens figura LB. et rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrãmum AE deficiens figura EB simili, et similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiã est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi LB, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter EB, et describatur figura. Et quoniã LF æquale est LH, etenim FG ipsi GH est æqualis: erit LF ipso EK maius. est aũt LF æquale DL. maius igitur est et DL ipso EK. commune apponatur KD. ergo totum AL toto AE est maius. quod oportebat demonstrare.



36. primi. 43. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]

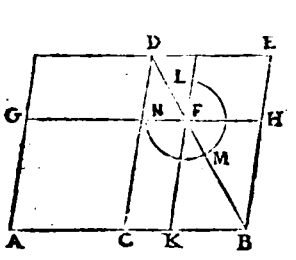
Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcunque libuerit DB, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quae à dimidia ipsius AB descripta est.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF deficiens figura
B parallelogrammia FB, simili et similiter posita ipsi DB.

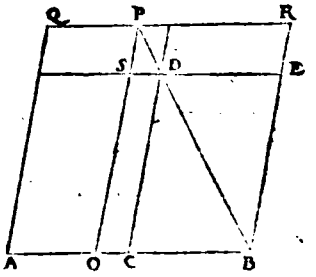
Sumatur in recta linea AB inter C B quoduis punctum K, & ab ipsa KB describatur parallelogrammum simile & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit KBHF, et HF ad G producatur

producatur. erit rursus ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB.

Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C. *Nō videtur hęc alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hunc modū aptius, et manifestius explicabitur.*



Sit recta linea AB, secetur q; bifariam in C, et ab ipsa CB describatur parallelogrammum vtcunque DB, et totum parallelogrammum AB E compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD, deficiens figura parallelogramma DB simili & similiter posita ei, quę descripta est à dimidia ipsius AB, hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris similibus et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Iungatur enim DB parallelogrammi DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda sunt, vel maior quàm dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior, & sit AK; atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur KF, quae diametro DB in F occurrat; & per F ducatur GFH parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB; quippe quae circa eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quàm AF. Quoniam enim suplementum CF est aequale ipsi FE; communi apposito FB, erit totum CH toti KE aequale. at CH est aequale GC, quoniam & AC ipsi CB. ergo & GC aequale est KE. apponatur vtrique commune CF. totum igitur AF gnomoni LMN est aequale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quàm AF. 43. primi.



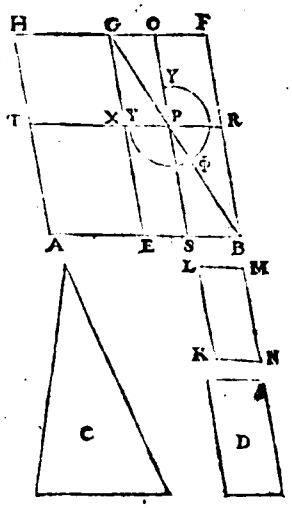
Sumatur deinde AO minor, quàm dimidia AC, & per O ipsi BE parallela ducatur OP, quae cum diametro BD producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB, & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum AP deficiēs figura parallelogramma PB ipsi DB simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam enim parallelogrāmum DR est aequale parallelogrammo DQ, erit DR maius quàm SQ. Sed OD est aequale DR. ergo et OD ipso SQ est maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum AP maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quae sequuntur. quod oportebat demonstrare. 36. primi. 43. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existētibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallellogrammum. Itaque AG vel ęquale est ipsi 18. huius.

eſt ipſi C, vel eo maius, ob determinationem. & ſi quidem AG ſit æquale C, factum iam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma GB, ipſi D ſimili. Si autem non eſt æquale, erit H E maius quàm C; atque eſt H E æquale G B. ergo & G B quàm C eſt maius. quo autem G B ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile & ſimiliter poſitum idem conſtituatur K L M N. Sed D eſt ſimile G B. quare & K M ipſi G B ſimile erit. Sit igitur recta linea quidem K L homologa ipſi G E, L M vero ipſi G F. & quoniã æquale eſt G B ipſis C K M, erit G B ipſo K M maius. maior igitur eſt recta linea G E ipſa K L; et G F ipſa L M. ponatur G X æqualis K L, & G O æqualis L M, & compleatur X G O P parallelogrammum. æquale igitur eſt & ſimile G P ipſi K M. Sed K M ſimile eſt G B. ergo & G P ipſi G B eſt ſimile. circa eandẽ igitur eſt diametrũ G P ipſi G B. Sit ipſorum diameter G P B, & figura deſcribatur. Itaque qm̃ G B eſt æquale ipſis C K M, quorũ G P eſt æquale K M, erit reliquus υφτ gnomon æqualis reliquo C. Et qm̃ O R eſt æquale X S, commune apponatur P B. totum igitur O B toti X B eſt æquale. Sed X B eſt æquale T E, quoniam & latus A E lateri E B. quare & T E ipſi O B æquale. cõmune apponatur X S. ergo totum T S eſt æquale toti gnomoni υφτ. At υφτ gnomon ipſi C oſtenſus eſt æqualis. & T S igitur ipſi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum T S applicatum eſt, deficiens figura parallelogrãma P B ipſi D ſimili, quoniã & P B ſimile eſt ipſi G P. quod facere oportebat.



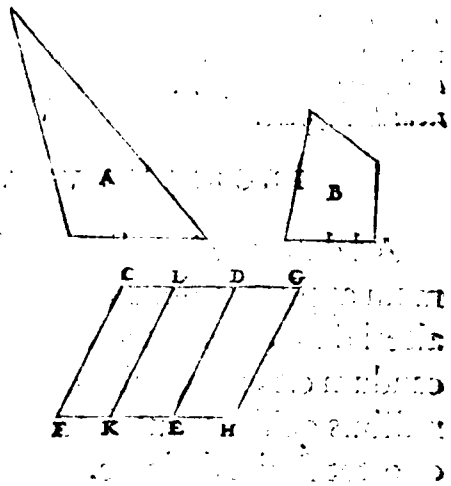
25. huius.
21. huius.
26. huius.
43. primi.
36. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

✻ Quo autem G B ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile, & ſimiliter poſitum idem conſtituatur] *Vt autem exceſſus, quo alterum rectilineum alterum ſuperat, facile inueniatur libuit, ſequens problema apponere.*

Duorum rectilineorũ inæqualiũ exceſſum, quo maius ſuperat minus, inuenire.

Sint duo rectilinea inæqualia A B, quorum maius ſit A. oportet inuenire exceſſum, quo rectilineum A ipſum B ſuperat. Dato enim rectilineo A in quouis angulo aequale parallelogrãmum conſtituatur C D E F: & ad rectam lineam D E in angulo aequali ipſi D C F, applicetur parallelogrammum D G H E aequale rectilineo B. erit recta linea D G in directum ipſi C D, & E H in directum F E. eſt igitur vt parallelogrammum F D ad parallelogrammum D H, hoc eſt vt rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea F E ad E H. atq; eſt rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur eſt recta linea F E ipſa E H. Itaq; à recta linea F E abſcindatur E K ipſi E H aequalis, & à puncto K alterutri ipſarum F C E D parallela ducatur K L. erit parallelogrammum K D parallelogrammo D H aequale, & ob id parallelogrammum F L eſt exceſſus, quo parallelogrammum F D ſuperat parallelogrammum D H, hoc eſt quo rectilineum A ipſum B rectilineum ſuperat. Duorum igitur rectilineorum inæqualium A B exceſſus inuentus eſt. quod feciſſe oportuit.



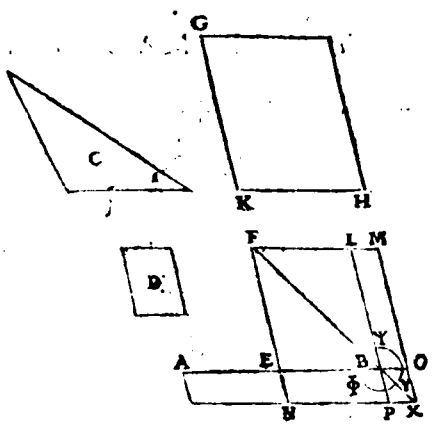
54. primi.
14. primi.

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. Itaq; oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogrāma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF. & vtrisque quidem BF. C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH. Similе igitur est GH ipsi FB. sitq; KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta linea KH maior quàm FL, & KG maior quàm FE. producantur FL, FE: & ipsi quidē KH æqualis sit FLM; ipsi vero KG æqualis FEN: & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL. & MN igitur ipsi EL simile erit; ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΥΥΦ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, æquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΥ. Sed ΦΥΥ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogrāma PO ipsi D simili; quoniā & ipsi EL simile est OP. quod fecisse oportebat.



18. huius.

25. huius

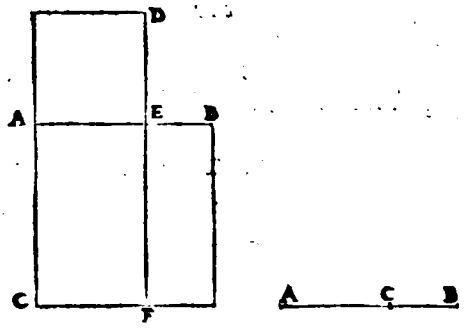
21. huius.
26. huius.

24. huius

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describatur enim ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figurā AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC. ergo & AD, quadratum erit. Et quoniā BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æquiangulū. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. vt igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est autem FE æqualis AC, hoc est ipsi AB. & ED ipsi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB: Sed AB maior



46. primi. Ex antecedente.

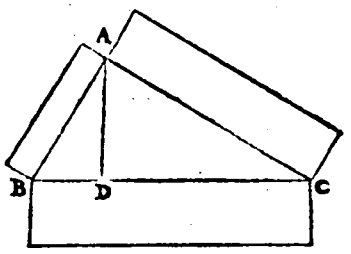
14. huius. 34. primi.

14. quinti. est quàm AE. ergò AE quàm EB est maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E, & maior ipsius portio est AE. quod facere oportebat.

ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipsâ AB extrema ac media rõne secare. Secetur enim AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC æquale sit
11. secundi. quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC,
17. huius. erit vt BA ad AC, ita AC ad CB, ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quę fit ex BC æqualem esse eis, quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectãgulo ABC ab angulo recto, qui est ad A ad BC
8. huius. basim perpendicularis ducta est AD; erunt triãgula ABD ADC, quæ sunt ad perpendiculare similia toti ABC, & inter se se. Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. Quòd cũ
Coro. 20. huius. tres rectæ lineę proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quę ex secunda, similem, & similiter descriptam. Vt igitur CB ad BD, ita figura, quę fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, et similiter descriptam. Eadem
A ratione et vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex CA. quare et vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem BC ipsis BD DC. ergo figura, quę fit ex BC æqualis est eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostendere oportebat.

ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportione laterum homo-
20. huius. logorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad BA, habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex
11. quinti. BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura, quæ ex BC ad eam, quę ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione & vt figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum, & vt igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ita quod
47. primi. ex BC quadratum ad quadrata, quę ex BA AC, quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA AC quadratis. ergo & figura, quæ fit ex BC est æqualis eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare & vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quę ex fit BC ad eas, quæ ex BA AC similes, & similiter descriptas.] *Quoniã enim est vt CB ad BD, ita figura, quae fit à CB ad eam, quae à BA similem, & similiter descriptam; erit & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quae fit à BA ad eam, quae à BC similem & similiter descriptam. preterea cum sit vt BC ad CD, ita figura, quae fit à BC ad eam, quae à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quae fit ab AC ad eam, quae à CB. Sit igitur figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC magnitudo secunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quae fit ab*

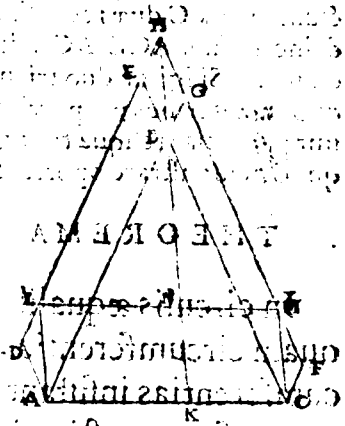
AC

AC magnitudo quinta & recta linea DC sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam; quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesimaquarta quinti libri composita prima & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figurae quae fiunt à BA AC ad eam, quae à BC erunt vt rectae lineae BD DC ad rectam BC & rursus conuertendo figura, quae fit à BC ad eas, quae à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quę à BC ad eas, quę à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. B

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura, quae fit à BA magnitudo prima figurâ, quae à BC secunda; quadratum ex BA tertia; & quadratum ex BC quarta figura vero, quae fit ab AC quinta; & quadratum ex AC sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

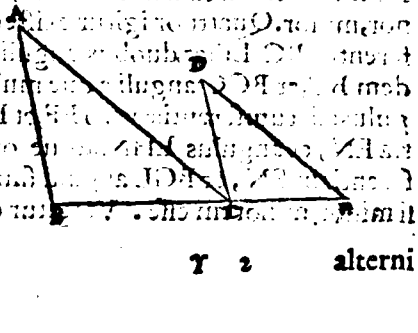
Si sit triangulum ABC, & ab ipsis AB BC describantur quaelibet parallelogramma AB ED BCFG, & lineae DE FG producantur ad H, iungatur que HB: fient parallelogramma ABED BCFG aequalia parallelogrammo contento AC HB, in angulo qui vtrisque BAC DHB sit aequalis.



Producatur enim HB ad K, & per A C ipsi KH parallelæ ducantur AL CM; & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est AL HB; erunt AL BH æquales & parallelæ. Sed BC æquales & parallelæ sunt MC HB. ergo & LA MC æquales & parallelæ sunt necesse est; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur est ALMC in angulo LAC, hoc est in angulo æquali vtrisque BAC DHB. est enim angulus DHB ipsi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammum æquale est parallelogrammo LABH, etenim in eadem basi AB, & in eisdem parallelis AB DH consistit: parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN est æquale, cum sit in eadem basi LA, & in eisdem parallelis LA HK; erit parallelogrammum ADEB æquale parallelogrammo LAKN. et obrandem causam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogramma igitur DABE BCFC parallelogrammo LACM æqualia sunt, hoc est ei, quod AC HB continetur, in angulo L AC, qui est æqualis vtrisque BAC BHL. Atqui hoc multo vniuersalius est, quam quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonstratur. 34.primi. 30.primi. 33 primi. 34.primi. 35.primi.

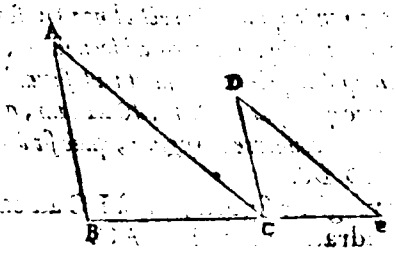
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum; quae duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.



Sint duo triangula ABC DCE, quę duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea AC; erunt anguli 29.primi.

alterni BAC ACD æquales inter ſe ſe. Eadē ratione et angulus CDE æqualis eſt angulo ACD. Quare et BAC ipſi CDE eſt æqualis. Et quoniam duo triāgula ſunt ABC DCE, vnū angulū, qui ad A, vni angulo qui ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quòd ſit vt BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE. oſtenſus autem eſt et angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC eſt æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales ſunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis ſunt æquales. et anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipſi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. quod demonſtrare oportebat.



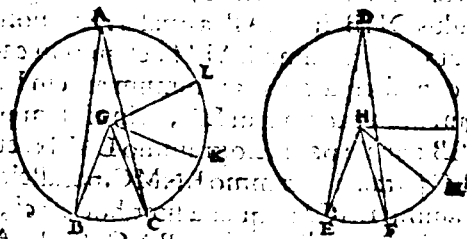
6. huius.

4. primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant. Adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

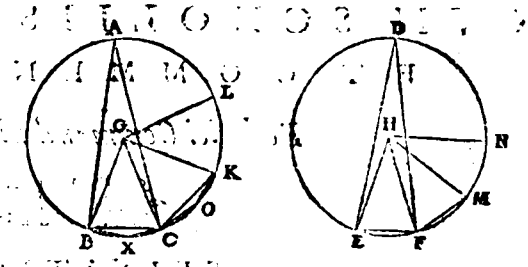
Sint æquales circuli ABC DEF; et ad centra quidem ipſorum GH ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico vt circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF: et adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcumque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rurſus æquales quotcumque FM MN: et iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter ſe ſunt æquales, et anguli BGC CGK KGL inter ſe æquales erūt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex eſt et BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione et quotuplex eſt circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex et EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN, et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et ſi circumferentia BL maior eſt circumferentia EN, maior erit et BGL angulus angulo EHN: et ſi minor, minor. Quattuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentijs BC EF: et duobus angulis BGC EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem BC, et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, et BGL angulus; circumferentiæ vero EF, et EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferentia EN, et angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, et BGL angulum ſuperare angulum EHN, et ſi æqualis, æqualem, et ſi minor, minorem eſſe. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus



27. tertij.

Diffi. 5 quinti.

angulus BGC ad angulum EHE. Sed vt BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriusque est duplus. et vt igitur B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistūt, siue ad centra, siue ad circumferentiam insistant. Dico insuper, et vt B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita esse sectorem G B C ad H F E sectorem. Iungantur enim BC, CK, et sumptis in circumferentijs BC CK punctis X O, iungantur et BX XC CO OK. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, et angulos æquales continēt; erit et basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est et GBC triāgulum triangulo GCK. Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare et angulus B X C angulo C O K est æqualis. similis igitur est B X C, portio portioni C O K: et sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similes circulorū portiones, et inter se æquales sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector vtrique ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est et GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circūferentiæ EF, totuplex est et HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, et sector BGL æqualis est sectori EHN. et si circumferentiæ BL superat circumferentiā EN, superat et BGL sector sectorem EHN, et si minor minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC E F circumferentijs, duobus uerò sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC et GBC sectoris circumferentia BL et GBL sector. circumferentiæ vero E F, et sectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN sector. atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem B G L superare sectorem E H N. et si æqualis æqualem esse; et si minor, minorem. est igitur vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. quod ostendere oportebat.



15.quinti. 20.tertij. 4.primi. 27.tertij. 11.dif. tertij. 24.tertij. 5.diffi.quinti.

COROLLARIVM

Perspicuum etiam est, et vt sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum. 11.quinti.

SEXTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SEPTIMVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.



NITAS est, qua vnumquodque eorũ, quæ sunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, si ter dicetur tertia, si quater quarta. & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; si vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicentur tres quartae. Quòd si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura minorem metitur, numerantem, uel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; si ter, triplus; si quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

SCHOLIVM.

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagoreorum pariter parem, qui ad vnitatem vsque bifariam diuiditur; vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim sex sunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. At ἀρτιοπέριττος, *hoc est impariter par est duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerũ metiri alium numerum. Itaque sciendum est* ἀρτιοπέριττον, *hoc est impariter parem à pythagoreis sic dictum, plures diuisiones susci pere, quæ in partes æquales fiunt, nõ tamẽ ad vnitatẽ vsq; diuisionẽ procedere. Nouit autem hunc & in ipse Euclides, cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina imposita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.*

IX.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS

Ex diffinitione octaua, & nona, & ex ijs, quae in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numerũ appellare eũ, quẽ par numerus per numerum parem metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non: & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur, siue dimidium habeat imparem, siue parem. numeros enim à binario duplatos ipse pariter pares tantum appellat, & eos, qui dimidium imparem habent vocat pariter impares tantum. eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque dimidium habent imparem, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq́, paris numeri species tres sunt; Vna quae dicitur pariter par, alia quae pariter impar, & tertia, quae impariter par. Pariter par numerus est, qui põt in duo paria diuidi, eiusq́, pars in alia duo paria & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad vnitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes aequales, eiusq́, pars rursus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi possunt; sed diuisio ad vnitatem vsque non perducitur. Qui igitur his est pariter par, Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero his pariter impar est, Euclides pariter imparem tantum. & qui his impariter par Euclides & pariter parem, & impariter parem appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sumit Euclides, neque pariter parem esse tantum, neque pariter imparem tantum.

X.

Impariter vero impar numerus est, quẽ impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus, preterquàm quòd ipse se ipsum metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

XIIII.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

XV.

Numerus numerũ multiplicare dicitur, quando quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

Quando

XVI.

Quando duo numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt planus appellatur: latera vero ipſius ſunt numeri ſe ſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius ſe ſe multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter eſt æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter eſt æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecũdi, & tertius quarti æque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes.

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus eſt maior ſecundo, vel minor. & ſi quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur. & ſi metitur erit primus ſecundi aeque multiplex, atque tertius quarti: ſi vero non metitur, quae partes eſt ſecundus primi, eędem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo ſi primus eſt maior ſecundo, quae pars, vel partes eſt ſecundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. ſed ſi primus ſit minor, quae pars, vel quae partes eſt primus ſecundi, eadem pars, vel eędem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem eſſe, vel partes, quod poſtea in quarto theoremate huius demonſtratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui ſuis ipſius partibus minor eſt abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus. ſed & petitiones quaſdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris vti uiſus eſt.

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in alijs.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet ſumi poſſe æquales, vel multiplices.*
2 *Quolibet numero ſumi poſſe maiorem.*
3 *Numerus infinite augetur, ſed non infinite diminuitur.*

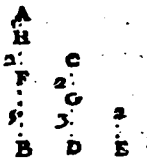
COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiuſdem, vel ęqualium æque multiplices fuerint, & ipſi inter ſe ſunt æquales.*
2 *Quorum idem numerus æque multiplex fuerit, vel quorũ ęque multiplices fuerint æquales, & ipſi inter ſe æquales ſunt.*
3 *Quicumque eiuſdem numeri, vel æqualium eadem pars, vel eadem partes fuerint, & ipſi inter ſe ſunt æquales.*
4 *Quorum idem, vel æquales numeri eadem pars, vel eędem partes fuerint, inter ſe ſunt æquales.*
5 *Omnis numeri pars eſt vnitas ab eo denominata, binarij enim numeri vnitas pars eſt ab ipſo binario denominata, quæ dimidia dicitur, ternarij vero vnitas eſt pars, quæ à ternario denominata tertia dicitur, quaternarij quarta, & ita in alijs.*
6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quę in ipſo ſunt.*
7 *Omnis numerus ſe ipſum metitur.*
8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę ſunt in metiente, vnitates.*
9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipſum producit.*
10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates, quæ ſunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quæ ſunt in multiplicante.*
11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eũ, qui ex illis componitur.*
12 *Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipſe metitur.*
13 *Quicũque numerus metitur totũ & ablatum, etiã reliquũ metietur.*

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expoſitis, detracto ſemper minore de maiore, reliquus minimè metiatur præcedentem, quo ad aſſũpta fuerit vnitas; numeri à principio poſiti primi inter ſe erũt.



Duobus enim inæqualibus numeris expoſitis AB CD, detracto ſemper minore de maiore reliquus minimè metiatur præcedentẽ quoad aſſumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter ſe primos eſſe, hoc eſt ipſos AB CD vnitate ſolã metiri. Si enim AB CD nõ ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; E: & CD quidem ipſum AB metiens relinquat ſe ipſo minorẽ FA, AF vero metiens DC relinquat ſe ipſo minorem GC; & GC metiẽs FH vnitatẽ HA relinquat. quoniam igitur numerus E ipſum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipſum BF metitur; metitur aũt & totũ BA. ergo & reliquũ AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipſum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipſum FH metietur. ſed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus exiſtens. quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.

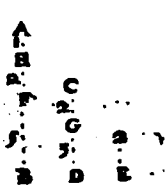
Per 12. cõem notionem.

13. com. not.

PORISMA.

Huius conuerſam hoc modo demonſtrabimus.

Expoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, non ceſſabit huiuſmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.



Sint enim numeri inter ſe primi AB CD; & ſi fieri poteſt iiſdem manentibus, & detracto ſẽper minore de maiore deueniãt ſit ad numerũ HA, qui præcedẽtẽ GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipſum FH metietur. metitur aũt & ſe ipſum, ergo & FA metietur; ac propterea ipſum DG. ſed & metiebatur GC. quare & totũ DC metietur. atq; ob id ipſum BF metitur. metitur aũt & FA, vt oſtenſum eſt. ergo & totũ BA metietur. Itaque quoniã HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter ſe compoſiti. Sed & inter ſe primi ponuntur. quod fieri non poteſt. nõ igitur expoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, ceſſabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit. quod oportebat demonſtrare.

11. com. not.

11. com. not.

Diff. 14.

Sed & illud conſtat.

Expoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, ſi de maiori ſemper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vſque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter ſe primi, ſed & compoſiti. quod eſt abſurdum.

1. huius.

Ex iam demonſtratis problema quoque illud perſpicue apparere poteſt.

Duobus numeris expoſitis comperire an inter ſe primi ſint, an compoſiti.

Facta namque detractione, vt dictum eſt, ſi deueniet ad vnitatem vſque, dicemus eos inter ſe primos eſſe, ſin minus, compoſitos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram inuenire.

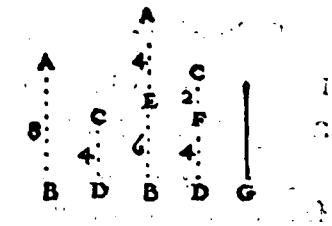
Sint dati duo numeri non primi inter ſe AB CD; quorũ minor ſit CD. oportet ipſorum AB CD maximam communem menſuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam ſe ipſum metiatur, erit CD ipſorum AB CD commuuis menſura. & perſpicuum eſt eam maximam eſſe: nullus enim maior CD ipſum CD metietur;

si vero CD non metitur AB, ipsorum AB CD detracto semper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur precedentem. vnitas quidem non relinquetur; essent enim AB CD primi inter se. quod nō ponitur. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem AE; AE vero metiens CD relinquat se ipso minorem CF: & CF ipsum AE metiatur. Itaque quoniā CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF; & CF ipsum DF metietur. sed & metitur se ipsum. & totū igitur metietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF metitur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est cōmunis mēsura. dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur; CD vero ipsum BE: & G ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autem & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipso CF. ergo CF ipsorum AB CD maxima erit communis mensura. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenta est. quod facere oportebat.

Ex antecedente.

12.com.not.

11.com. not.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AE CD communis mensura CF: & sit numerus aliquis G, qui ipsos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mensuram CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD vero metitur BE: et G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metietur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam scilicet eorum communem mensuram metietur. quod demonstrare oportebat.

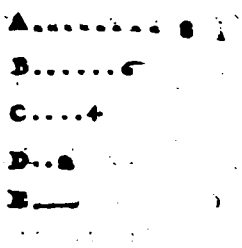
12.com.not.

13.com.not.

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorū cōmunem mensuram inuenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ipsorum ABC maximam communem mensuram inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cōmunis mēsura D. itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primū. metitur autem et ipsos A B. ergo D numeros A B C metitur: et ob id ipsorum est communis mensura. dico et maximam esse. si enim D non est ipsorum A B C maxima communis mensura, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, et sit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipsos AB metietur, et ipsorū AB maximam communē mēsuram, quæ est D. ergo E ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non pōt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsorum ABC maxima est cōis mensura.



Non

Non metiatur autē D ipſum C. Dico primum numeros D C non eſſe primos inter ſe. Quoniam enim ABC non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipſos ABC, & ipſos AB metietur, et ipſorum AB maximam communem menſurā, videlicet D. metitur autem et ipſum C. ergo ipſos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non ſunt inter ſe primi. Sumatur ipſorum maxima communis menſura E. et quoniam E ipſum D metitur, et D metitur ipſos AB; et E ipſos AB metitur. metitur autē et C. ergo et ipſos ABC metietur; eritq; E ipſorum ABC communis menſura. Dico et maximam eſſe. ſi enim E non eſt ipſorum ABC maxima communis menſura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E. metiatur, ſitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipſos AB, et ipſorum AB maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum D. ergo F ipſum D metitur. metitur autem et ipſum C. quare F et ipſos DC, et ipſorum DC maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum E. ergo F ipſum E metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E metietur. ergo ipſorum ABC maxima eſt communis mēſura. Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inuēta eſt. quod facere oportebat.

A.....18
B.....12
C....4
D.....6
E..2
F—

Ex corol. antecēd.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri. A

Eodem modo et pluribus numeris datis maximā communem menſuram inueniemus. B

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifeſtum eſt &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonſtrauimus.* A

Eodem modo &c.] *Sed & illud conſtat, ſi numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars eſt, vel partes.

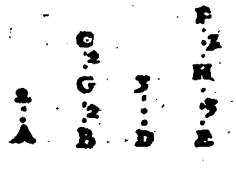
Sint duo numeri A BC, quorum BC ſit minor. Dico BC ipſius A vel partem eſſe, vel partes. Numeri enim A BC vel primi ſunt inter ſe, vel non. ſint prius inter ſe primi, & diuiſo B C in vnitates, quæ in ipſo ſunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in B C, pars aliqua ipſius A. ergo B C ipſius A partes eſt. ſed non ſint A BC inter ſe primi. Itaque B C vel ipſum A metitur, vel non. et ſiquidem metitur, erit BC pars ipſius A: ſin minus, ſumatur ipſorum A BC maxima communis menſura D; et diuidatur BC in numeros ipſi D æquales BE EF FC. Quoniā igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. æqualis autem eſt D vnicuique ipſorum BE EF FC. ergo et vnuſquiſque ipſorum B E EF F C pars eſt ipſius A: ac propterea B C ipſius A partes eſt.

A.....8
B.....5C
A.....8
B....4C
A.....8
B..2E..2F..2C
D..2

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars eſt, vel partes. quòd demonſtrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriuſque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

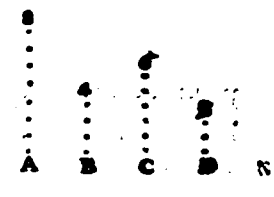


Numerus A numeri BC pars ſit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ eſt A ipſius B C. Dico et vtrumque A D vtriuſque BC EF eãdem partem eſſe, quæ eſt A ipſius BC. Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius EF; quot numeri ſunt in BC æquales ipſi A, tot erũt et in EF numeri æquales ipſi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales, hoc eſt EH HF. erit vtique æqualis multitudo numerorũ BG GC multitudini ipſorum EH HF. & quoniam æqualis eſt BG ipſi A, & EH ipſi D, erunt BG EH ipſis A D æquales. Et eadem ratione cum GC ſit æqualis ipſi A, & HF ipſi D; & GC HF ipſis A D æquales erunt. quot igitur numeri ſunt in BC, æquales ipſi A, tot ſunt & in BC EF æquales ipſis A D. ergo quotuplex eſt BC ipſius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriuſque A D. quę igitur pars eſt A ipſius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriuſque BC EF. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonſtrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriuſque æque multiplex erit, atque vnus vnius.

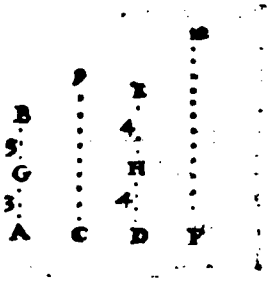


Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aeque multiplex. Dico vtrumque AC vtriuſque BD aeque multiplicem eſſe, atque A ipſius B. quoniam enim A ipſius B multiplex eſt, & C ipſius D aeque multiplex; erit B ipſius A pars aliqua, & D ipſius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita ſunt & vterque BD vtriuſque AC eadem pars erit, quae eſt B ipſius A. Vterque igitur AC vtriuſque BD aeque multiplex eſt, atque A ipſius B. quod demonſtrare oportebat.

Sed quod de duobus dicitur, poſſumus etiam ad quotcunque numeros amplificare. vt] Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, ſinguli ſingulorum æque multiplices, quotuplex eſt vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium [*quod eodem modo demonſtrabimus. Hoc autem reſpondebit ei, quod in prima propoſitione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonſtratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriuſque eædem partes erit, quę vnus vnius.



Numerus enim AB numeri C partes ſit, & alter D alterius F eędem partes, quæ AB ipſius C. Dico & vtrumque AB DE vtriuſque C F eaſdẽ partes eſſe, quæ AB ipſius C. quoniam enim quę partes eſt AB ipſius C, eædem eſt DE ipſius F; quot partes ſunt in AB ipſius C, tot erunt & in DE

partes

partes ipſius F. Diuidatur AB quidem in partes ipſius C, videlicet AC GB; DE vero diuidatur in partes ipſius F, hoc eſt DH HE. erit ipſorum AG GB multitudo æqualis multitudini ipſorũ DH HE. & qm̃ quæ pars eſt AG ipſius C, eadem eſt pars & DH ipſius F: quę pars eſt AG ipſius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtriuſque C F. Simili ratione & quæ pars eſt GB ipſius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriuſque C F. Quę igitur partes eſt AB ipſius C, eędem partes eſt & vterque AB DE vtriuſque C F. quod demonſtrare oportebat.

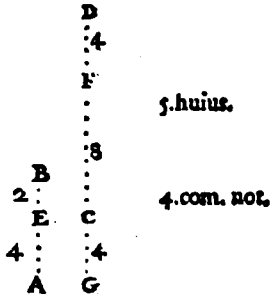
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc, & antecedentem poſſumus ad quotcunque numeros transferre; ut Si quot cunque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, ſintq́; ſinguli ſingulorum vel eadem pars, vel eædem partes; quę pars, vel partes eſt vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars ſit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem eſſe, quę eſt totus AB totius CD. quæ enim pars eſt AE ipſius CF, eadem pars ſit & EB ipſius CG. ergo quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem pars eſt & AB ipſius GF. quæ autẽ pars eſt AE ipſius CF, eadem pars ponitur & AB ipſius CD. quæ igitur pars eſt AB ipſius GF, eadem eſt & AB ipſius CD. quare AB vtriuſque GF CD eadem eſt pars. æqualis igitur eſt GF ipſi CD. communis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD eſt æqualis. & quoniam quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem eſt & EB ipſius GC. æqualis autem eſt GC ipſi FD: quę pars eſt AE ipſius CF, eadem erit & EB ipſius FD. ſed quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem eſt & AB ipſius CD. ergo quæ pars eſt EB ipſius FD, eadem eſt & AB ipſius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonſtrare oportebat.



5. huius.

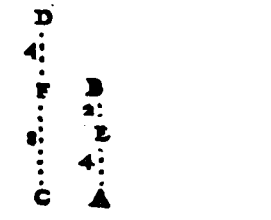
4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonſtrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui æque multiplex erit, atque totus totius.

Iiſdem enim, quae ſupra, manentibus. ſit numerus CD aeque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem eſſe, atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipſius AB aeque multiplex eſt, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipſius CD eadem pars, quae eſt AE ipſius CF. ergo ex iam demonſtratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars eſt, quae totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB. quod demonſtrandum fuerat.

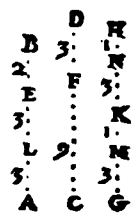


THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quę totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes ſit, quę ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eaſdem partes eſſe, quæ totus AB totius CD. ponatur enim

ipſi AB ęqualis GH.quæ igitur partes eſt GH ipſius CD,eędē eſt & AE ipſius CF.Diuidatur GH quidē in partes ipſius CD,videlicet GK KH:AE vero diuidatur in partes ipſius CF,videlicet AL LE.erit igitur ipſarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipſarum AL LE.Et quoniā quæ pars eſt GK ipſius GD, eadem eſt & AL ipſius CF:maior aūt CD,quā CF.ergo & GK,quā AL eſt maior.ponatur ipſi AL ęqualis GM.quę igitur pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt et GM ipſius CF.quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars eſt, quę totus GK totius CD.Rurſus quoniā quæ pars KH ipſius CD, eadē eſt et EL ipſius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipſi EL ęqualis KN.quę igitur pars eſt KH ipſius CD, eadē eſt & KN ipſius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars eſt, quæ totus KH totius CD. oſtēſum autem eſt & reliquum MK reliqui FD eandem partem eſſe; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipſius DF eædem partes eſt, quę totus HG totius DC.æqualis autem vterque quidem MK NH ipſi EB; HG vero ipſi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes eſt, quæ totus AB totius CD.quod demonſtrare oportebat.

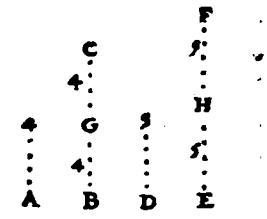


7.huius.

THEOREMA. VII. PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars eſt, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & ſecundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars ſit, & alter D alterius EF eadem pars,quę A ipſius BC.minor autem ſit A,quàm D.Dico & permutādo quę pars eſt A ipſius D, vel partes, eādem partem eſſe & BC ipſius EF,vel eaſdem partes.Quoniam enim quę pars eſt A ipſius BC,eadem eſt & D ipſius EF;quot numeri ſunt in BC ęquales ipſi A,tot ſunt et in EF æquales ipſi D.diuidatur BC quidem in numeros ipſi A æquales,videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D ęquales, EH HF.erit ipſorū BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter ſe ſunt ęquales;ſunt autem et ęquales EH HF;atque eſt ipſorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF:quæ pars eſt BG ipſius EH;vel partes,eadem pars erit et GC ipſius HF,vel eædem partes.ergo quæ pars eſt BG ipſius EH,vel partes, eadem pars erit et vterque BC vtriuſque EF, vel eædem partes. æqualis autem eſt BG ipſi A,et EH ipſi D.quæ igitur pars eſt A ipſius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipſius EF,vel eædm partes.quod demonſtrare oportebat.

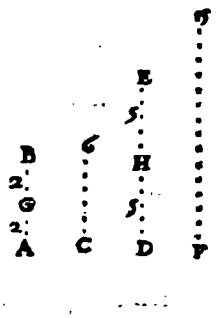


5.huius.
6.huius.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes eſt primus tertij, vel pars, eędem partes erit & ſecundus quarti,vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri C partes ſit, et alter DE alterius F eędem partes:ſit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes eſt AB ipſius DE, vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F,vel eandem partem. quoniam enim quæ partes eſt AB ipſius C,eædem partes eſt et DE ipſius F; quot ſunt in AB partes ipſius C, tot erunt et



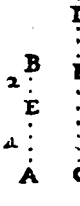
in

in DE partes ipsius F. diuidatur. AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars. erit et C ipsius F, vel eędē partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quę pars est AG ipsius DH, vel partes; eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eædem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

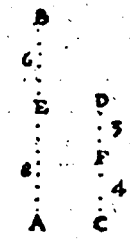
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadē pars erit et AE ipsius CF, vel eædem partes. ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipsius CD, est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.



Diffi. 10.
7. 8. huius.
Per cõuersã.
Diffi. 10.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quàm CD. sed si AB maior sit, quàm CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel non metitur. & si quidē metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quae nos demõstrauimus ad septimã huius; & reliquus EB reliqui FB reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius GD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quae partes est CD ipsius AB, eędem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes est, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

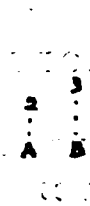


Diffi. 10.
Per cõuersã.
Diffi. 10.
D. ffi. 10.
8 huius.
Per cõuersã.
Diffi. 10.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B, ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.



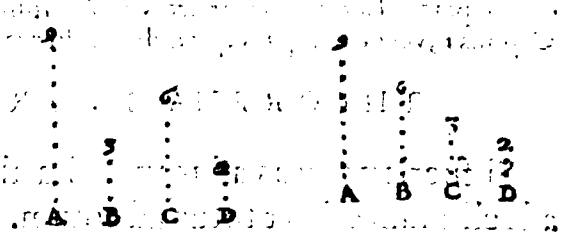
Diffi. 10.
5. 6. huius.
Per conuers.
Diffi. 10.

SCHOLIVM.

Hoc quinto, & ſexto vniuerſalius eſt. quæ enim illic ſeorſum in partes, & partibus, eadem hoc loco vnà demonſtrantur.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hęc demonſtratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint conſequentibus. quòd ſi maiores ſint, rurſus vel B metitur ipſum A, vel non metitur. ſi metitur, ita dicemus. Quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipſius B, atque C ipſius D. ergo ex ijs, quae demonſtrauimus ad quintam huius; & vterque A C vtriuſq;



BD aeque multiplex eſt, atque A ipſius B. V t igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrũq; B D.

Conuer. 20. diffi.

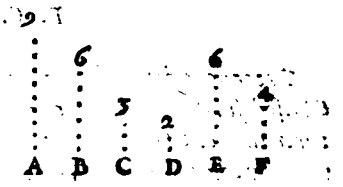
Quòd ſi B non metitur ipſum A, ita argumentabimur. quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae partes eſt B ipſius A, eadem partes erit D ipſius C. ergo & uterq; A C vtriuſque B D eędem partes eſt, quae A ipſius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.

6. huius. Conuer. 20. diffi.

Idem demonſtrabimus etiam ſi plures ſint numeri proportionales, hoc, quod ſequitur, præmiſſo.

Quæ eidem eædem ſunt numerorum proportiones, et inter ſe eædem erunt.

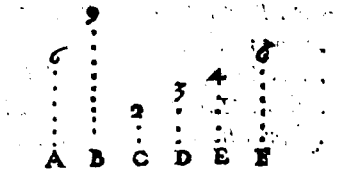
Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad F. Si enim numerus A ſit maior, quàm E, quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes eſt E ipſius A, eadem pars erit, vel partes D ipſius C. Rurſus quoniam vt C ad D, ita eſt E ad F, quae pars eſt, vel partes D ipſius C, eadem pars, vel partes erit F ipſius E. quae igitur pars, vel partes eſt B ipſius A, eadem pars erit, vel partes F ipſius E. ergo vt A ad B, ita eſt E ad F.



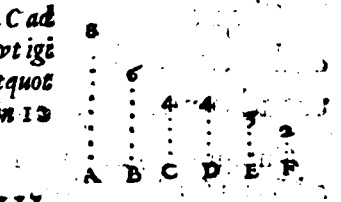
Conuer. 20. diffi.

Si vero A ſit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita eſt C ad D, quae pars eſt, vel partes A ipſius B, eadem pars, vel partes erit C ipſius D. Rurſus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes eſt C ipſius D, eadem pars, vel partes erit E ipſius F. ergo quae pars, vel partes eſt A ipſius B, eadem eſt pars, vel partes E ipſius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonſtrandum propoſuimus.

Conuer. 20. diffi.



Hoc demõſtrato ſint numeri proportionales A B C, D E F; ſitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadẽ ratione demonſtrabimus vt A ad D, ita eſſe A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita eſt C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõſtrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter oſtendemus vt A B ad D E, ita eſſe A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erũt A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem reſpondet ei, quod in 12 quinti vniuerſe de magnitudinibus demonſtratur.

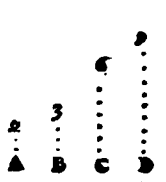


THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; ſitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-

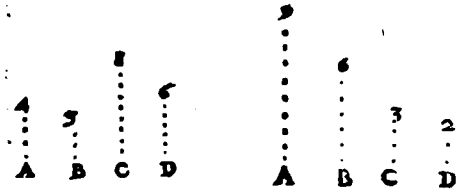
et permutãdo proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quoniã enim est vt A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, vel partes, eadẽ pars erit et C ipsius D, vel eædem partes. permutado igitur quæ pars est A ipsius C, vel partes, eadẽ pars est & B ipsius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat.



Diffi. 10. 9. 10. huius.

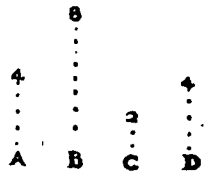
F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sint consequentibus, sitq; A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D.



Diffi. 10. 9. 10. huius. Cõu dif. 10.

Quòd si A sit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumẽtabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est D ipsius C, ea dẽ pars, vel partes erit B ipsius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique si A sit minor, quàm B, & maior, quàm C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutando igitur quae pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars, vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D.

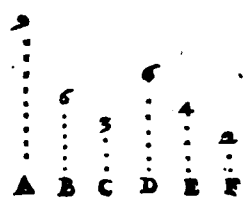


9. 10. huius. Cõu dif. 10.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

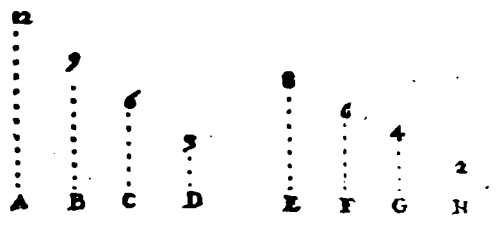
Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione DEF; sitq; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E, erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente. Ex demonstratis ad 12. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri prportionales fuerint ABCD EFGH; sitq; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: similiter demonstrabimus ut A ad C, ita esse E ad G. et quoniã est vt C ad

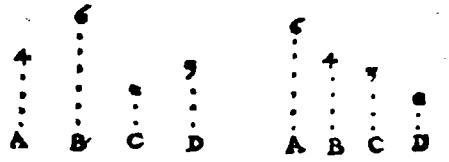


D, ita G ad H, rursus demonstrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.
Sed quoniam Euclides conuersam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq; rationis in numeris omisit; nos eas, ne quid desideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; ut A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita esse D ad C. Si enim A sit minor, quàm B, quo-
Diffi. 20. *niam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel*
partes est A ipsius B, eadē pars, vel eadē partes
Cōu. dif. 20. *erit C ipsius D. ergo ut B ad A, ita est D ad C.*
Si uero A sit maior, quàm B, rursus quoniam
vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes est B
ipsius A, eadem pars, uel partes erit D ipsius C.
Vt igitur B ad A, ita est D ad C.



PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.

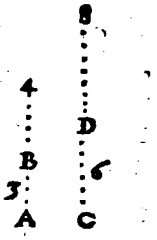
Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & sit vt A ad B, ita C ad D. Dico ut A B ad B, ita esse C D ad D. nam cum sit ut A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita est B ad D. Rursus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.



PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidendo proportionales erunt.

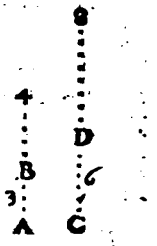
Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt numerus AE, qui ex duobus numeris constat ad numerum B, ita C D ex duobus C D constans ad ipsum D. Dico vt A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est vt AB ad B, ita
15. huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. si autem fuerit ut totus*
11. huius. *ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. ergo A ad C est vt AB ad CD. sed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rursus permutando ut A ad E, ita C ad D.*



PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales sint, et per conuersionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt AB ad B, ita CD ad D. Dico ut AB ad A, ita esse CD ad C. Quoniam enim est ut AB ad B, ita
15. huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum sit vt totus ad*
11. huius. *totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt A B ad CD: & rursus permutando, conuertendoq; ut AE ad A, ita CD ad C.*
Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

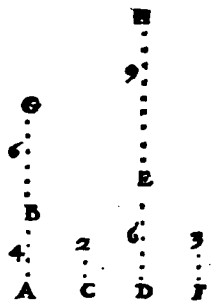


PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad secundum proportionem eandem, quam sextus ad quartum; et compositus primus et quintus ad secundum eandem proportionem

nem habebit, quam tertius et ſextus ad quartum.

Primus enim numerus A B ad ſecundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq́, quintus B G ad ſecundum C eandem proportionem, quam ſextus E H ad quartum F. Dico primum & quintum A G ad ſecundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & ſextus DH ad quartum F. Quoniam enim eſt vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad E H. et quoniam vt A B ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad H E. Sed vt G B ad C, ita eſt EH ad F. rurſus igitur ex aequali vt AG ad C, ita eſt DH ad F.



1. Additarũ.

14. huius.

2. Additarũ.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque ſecundus quartum.

Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot vnitates ſunt in BC, tot ſunt et in EF numeri ęquales ipſi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales EK KL LF. erit igitur ipſorum BG GH HC multitudo ęqualis multitudini ipſorum EK KL LF. & quoniã BG GH HC vnitates inter ſe ęquales ſunt: ſuntq́; numeri EK KL LF inter ſe æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum; & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cõſequentes. eſt igitur vt BG ad numerum E K, ita BC ad EF. æqualis autem eſt BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita eſt BC ad EF. ęqualiter igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipſum EF. quod demonſtrare oportebat.

A.

B. G. H. C

D..

E..K..L..F

12. huius:

Diff. 20.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis inter ſe ęquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipſum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipſi D ęqualem eſſe. Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit C, metietur B ipſum C per vnitates, quæ ſunt in A. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipſo ſunt. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipſum C. quare permutando vnitas E numerum B ęqualiter metitur, atq; A ipſum C. Rurſus quoniam B ipſum A multiplicans fecit D; A metietur ipſum D per vnitates, quæ ſunt in B: metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipſo ſunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipſum D. ſed E unitas numerũ B æqualiter

E. 1

A.. 2

B... 3

C..... 6

D..... 6

10. com. not.

6. com. not.

Ex antecedente.

F æqualiter metitur, atque A ipſum C. Cum igitur A vtrũque ipſorum C D æqua
4.com. not. liter metiatur, erit C ipſi D æqualis. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipſos D E. Dico ut B ad C, ita eſſe D ad E. quoniam enim A ipſum B mul
10.com.not. tiplicans fecit D, metietur B ipſum D per unitates, quæ ſunt in A.
6.com.not. metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ç qualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipſum
Conuerſ.10. Diffi. D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita eſt B ad D. eadem ratione et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demõſtrare oportebat.

F. 1
A..2
B...3
C....4
D.....6
E..... 8

F. C. COMMENTARIVS.

Idem ſequetur etiam ſi numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipſos EFG. Dico vt B ad C, ita eſſe E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt ſupra, demonſtrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita eſſe B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam eſt vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rurſus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita eſt E ad F: & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonſtrare.

H..1
A..2
B...3
C....4
D.....5
E.....6
F... 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipſos D E. Dico vt A ad B, ita eſſe D ad E. Quoniam enim A
16.huius. ipſum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipſum D fecit. Eadem ratione & C ipſum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C
Ex antecedente. duos numeros A B multiplicans ipſos D E fecit. eſt igitur ut A ad B, ita D ad E. quod demonſtrare oportebat.

A...3
B....4
C..2
D.....6
E..... 8

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd ſi plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti ſimiliter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonſtrabimus.

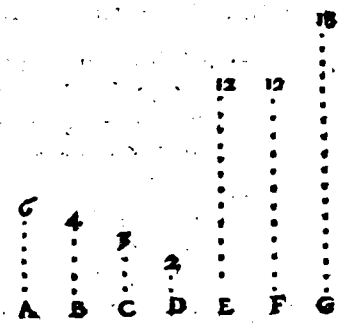
THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, &

quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipsū D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F æqualem esse. multiplicās enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidem C multiplicans fecit G; ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicās fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E æqualis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D, ijsdem enim constructis quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B: & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.



17. huius.

Ex antecedente.

A

17. huius.

B C

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quàm E, vel F; erit vterque ipsorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipsius G; si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F. quare E F inter se aequales sint necesse est.* 3. 4. co. not:

A

Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsorum E F eadem pars, vel eędem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.*

B

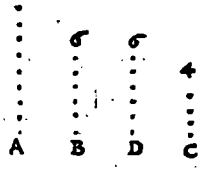
Vt autem G ad F, ita A ad B] *cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.*

C

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC. æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex B D. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi D, qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis sit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit æqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est æqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipſum A, atque EF ipſum B. numerus enim CD ipſius A non eſt partes. Si enim fieri poteſt, ſit CD partes ipſius A. ergo EF ipſius B eædem partes erit, quæ CD ipſius A. quot igitur in CD partes ſunt ipſius A, tot erunt & in EF partes ipſius B. Diuidatur CD quidem in ipſius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipſius B, EH HF. erit igitur ipſarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipſarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter ſe ſunt; ſunt autem & EH HF inter ſe æquales, atque eſt ipſarum CG GD multitudo multitudini ipſarum EH HF æqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quare ut CG ad EH, ita eſt CD ad EF; ac propterea CG EH in eadē ſunt proportione, in qua CD EF, minores ipſis exiſtentes. quod fieri non poteſt: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium. non igitur CD ipſius A partes eſt. ergo eſt pars. et EF ipſius B pars eadem eſt quę CD ipſius A. æqualiter igitur CD ipſum A, atque EF ipſum B metitur. quod oportebat demonſtrare.

C. 2. G. 2. D

E. 2. H. F

A ..... B

B ..... G

20. diffi.

21. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit vt CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuerſam vigeſimae diffinitionis. nam cum CG GD inter ſe aequales ſint, itemq; aequales inter ſe EH HF, ſi CG ſit minor, quàm EH, quae pars, uel partes eſt CG ipſius EH, eadem pars, vel partes erit GD ipſius HF. ſi vero ſit maior, quae pars, vel partes EH ipſius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipſius GD. ergo vt CG ad EH, ita GD ad HF.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres numeri A B C, et alij ipſis multitudine æquales qui bini ſumantur, et in eadem proportione D E F; ſitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita fit E ad F; vt autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita eſſe D ad F. Quoniam enim eſt ut A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD æqualis erit ei, qui ex BE. oſtenſum autem eſt et qui fit ex AF æqualem eſſe ei, qui ex B E. ergo et qui fit ex A F æqualis eſt ei, qui fit ex C D. vt igitur A ad C, ita D ad F. quod demonſtrare oportebat.



19. huius.

19. huius.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter ſe numeri minimi ſunt eorum, qui eādem, quam ipſi proportionem habent.

Sunt

Sint primi inter ſe numeri A B. Diço eos minimos eſſe eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent. ſi enim non ita ſit, erunt aliqui numeri minores ipſis A B, qui eandē, quam A B proportionem habebunt. ſint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, et conſequens cō ſequentem; numerus C ipſum A æqualiter metietur, atque D ipſum B. quoties autem C metitur ipſum A, tot vnitates ſint in E. ergo et D ipſum B metitur per vnitates, quę ſunt in E. et quoniam C metitur ipſum A per vnitates quę ſunt in E, numerus E ipſum A per vnitates, quæ ſunt in C, metietur. et eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ ſunt in D. ergo E ipſos A B metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis A B, qui eandē habeant proportionem. ergo A B minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. quod oportebat demonſtrare.

A.....5
B....4
E——
C——
D——

21.huius.

8.com.not.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipſi proportionem habent, primi inter ſe ſunt.

Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipſi proportionē habent A B. Dico A B primos inter ſe eſſe. ſi enim nō ſunt A B inter ſe primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur; ſitq; C. et quoties C ipſum quidem A metitur, tot vnitates ſint in D. quoties vero C metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. et quoniam C ipſum A metitur per vnitates, quę ſunt in D, multiplicans C ipſum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans E ipſum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo DE in eadem ſunt proportione, in qua AB, minores ipſis exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.

A.....6
B....5
C——
D——
E——

com.not.

17.huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui vnum ipſorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter ſe A B, et aliquis numerus C ipſum A metiatur. Dico et B C inter ſe primos eſſe. Si enim B C nō ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; D. et quoniam D ipſum C metitur, et C ipſum A; et D ipſum A metietur. metitur autem et ipſum B. ergo D numeros A B metitur primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur B C numeros numerus aliquis metietur. ideoq; B C inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.

A.....8
B....3
C...5
D—

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui fit ex ipſis ad eum primus erit.

Duo enim numeri A B ad aliquem numerũ C primi ſint: et A ipſum B multiplicans faciat D. Dico C D inter ſe primos eſſe. ſi enim C D non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur; ſitq; E. et quoniã C A primi inter ſe ſunt, et ipſum C metitur aliquis numerus E; erunt E A inter ſe primi. quoties autem E ipſum D metitur, tot vnitates ſint in F. quare et F metitur ipſum D per vnitates, quæ ſunt in E. ergo E ipſum F multiplicans fecit D. ſed et A multiplicas B ipſum D fecit. qui igitur fit ex E F eſt æqualis ei, qui ex A B. ſi uero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. eſt igitur ut E ad A, ita B ad F. ſunt autem A E inter ſe primi, et qui primi etiam minimi ſunt. minimi vero eãdẽ, quam ipſi, proportionem habentium, eos, qui eandem habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, et conſequens conſequentem. ergo E ipſum B metitur. metitur autẽ et ipſum C. quare E ipſos B C metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.

A..2 B ...3
C.....5
D.....6
E.....
F.....

Ex antecedente.
8. com. not.
9. com. not.
29. huius.
23. huius.
21. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui fit ab vno ipſorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter ſe primi AB; & A ſe ipſum multiplicans faciat C. Dico B C inter ſe primos eſſe. ponatur enim ipſi A æqualis D & quoniam AB ſunt primi inter ſe, æqualis autem A ipſi D; & DB inter ſe primi erunt. vterque igitur ipſorum A D ad B primus eſt. ergo & qui ex AD fit primus erit ad B. ſed qui fit ex AD eſt numerus C. quare C B inter ſe primi ſunt. quod demonſtrare oportebat.

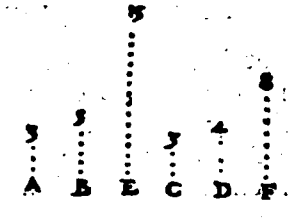
A..2B..3
C....4
D..6

Ex antecedente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui fiunt ex ipſis inter ſe primi erunt.

Duo enim numeri A B ad duos numeros C D vterque ad vtrumque primi ſint: & A quidem ipſum B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D faciat F. Dico EF inter ſe primos eſſe. Quoniam enim vterque ipſorum A B ad C primus eſt, & qui fit ex A B ad C primus erit. qui autem fit ex A B eſt E. ergo E C primi inter ſe ſunt. Eadẽ ratione & E D primi ſunt inter ſe. vterque igitur ipſorum C D ad E primus eſt: ac propterea qui fit ex C D primus erit ad E. qui uero ex CD fit eſt numerus F. ergo E F primi inter ſe erunt. quod demonſtrare oportebat.



26. huius.

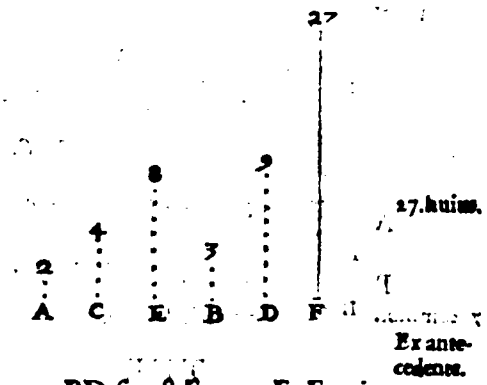
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & vterque ſeipſum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipſis primi erunt inter ſe. & ſi numeri à principio poſiti eos, qui facti ſunt, multiplicantes aliquos

faciant

faciant, & ipſi inter ſe primi erunt: & ſemper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter ſe primi A B: & A ſe ipſum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E: & B ſe ipſũ multiplicãs D faciat; multiplicans autem D faciat ipſum F. Dico C D, & E F inter ſe primos eſſe. Quoniam enim A B primi inter ſe ſunt; & A ſe ipſum multiplicans fecit C; erunt C B primi inter ſe. & quoniam C B inter ſe primi ſunt, & B ſe ipſum multiplicans fecit D; erũt C D inter ſe primi. Rurſus quoniam A B primi ſunt inter ſe, & B ſe ipſum multiplicans D fecit; A D inter ſe primi erunt. Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D vterque ad vtrumque primi ſint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit. ſed qui fit ex AC eſt numerus E, qui vero ex BD fit eſt F. ergo E F primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.



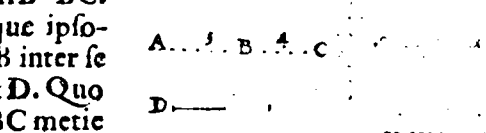
27. huius.

Ex antecedente.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & vterque ſimul ad vtrũque ipſorum primus erit. quòd ſi vterque ſimul ad vnum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri à principio poſiti inter ſe primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter ſe primi AB BC. Dico & vtrumque ſimul, videlicet A C ad vtrumque ipſorum AB BC primum eſſe. Si enim non ſint CA AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & ſit D. Quoniam igitur D metitur ipſos CA AB; & reliquum BC metietur. metitur autem & BA. ergo D ipſos AB BC metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB AC inter ſe primi ſunt. ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus. Sint rurſus CA AB primi inter ſe. Dico & ipſos AB BC inter ſe primos eſſe. Si enim AB BC non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; D. & quoniam D metitur vtrumque ipſorum AB BC, & totum CA metietur; metitur autem & AB. ergo D ipſos CA AB metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB BC numeros numerus aliquis metietur. ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.



13. com. not.

A

11. com. not.

B

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus] *eodem enim modo demonſtrabitur & AC CB inter ſe primos eſſe.* A

Ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt] *idem etiam ſequetur ſi AC CB inter ſe primi ſint. quod eodem modo demonſtrabimus.* B

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

Sit primus numerus A, qui numerum B non metiatur. Dico B A inter ſe primos

esse,si enim non sint B A inter se primi,metietur eos aliquis nu-
A merus.metiatur,et sit C.ergo C non est vnitas . et quoniam C ip
sum B metitur, A vero non metitur ipsum B ; non erit C idem
B qui A.et quoniam C ipsos B A metitur,et metietur ipsum A pri
mum existentem,cum non sit idem,qui A.quod fieri non potest.
non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metietur . quare A B inter se primi sunt.quod demonstrare oportebat.

A ..... 5 B 8
C —

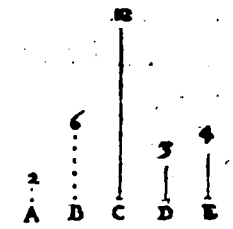
F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non est vnitas] *si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se . quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipsos B A metitur,et metietur ipsum A primum existentem,cum
7. com.not. non sit idem,qui A.quod fieri non potest] *omnis enim numerus se ipsum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciāt, eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum,qui à principio positi sunt,metietur.



Duo enim numeri A B se inuicem multiplicantes faciāt C, ipsum uero C metiatur aliquis numerus primus, qui sit D.Dico D vnū ipsorum A B metiri. ipsum enim A non me
Ex antecedente. tiatur;atque est D numerus primus. ergo A D primi inter se sunt . et quoties D ipsum C metitur, tot unitates sint in E.Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas, quæ sunt in
Com.not.9. E unitates; numerus D ipsum E multiplicans fecit C. sed et A multiplicans B ipsum C fecit . ergo qui fit ex D E æqualis est ei, qui ex A B.est igitur ut D ad A, ita B ad E. et sunt
19.huius. A D primi inter se,primi vero et minimi . sed minimi eos,
23.huius. 21.huius. qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem,hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem.ergo D ipsum B metitur.similiter demonstrabimus,si D non metiatur B ipsum A metiri.quare D metitur vnum ipsorum A B.quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A . Dico primum aliquem numerum
Diff.13. ipsum A metiri. Quoniam enim compositus numerus est A, metietur ipsum aliquis numerus.metiatur ; et sit B. & si quidem primus est B,manifestum est,quod quæritur.si vero compositus, ipsum aliquis numerus metietur.metiatur; sitq; C . Et quoniam C
82.co.not. metitur ipsum B, B uero ipsum A;& C ipsum A metitur.& si quidem primus est C , manifestum est quod quęritur.Si vero compositus eum aliquis numerus metitur.& hac consideratione facta, relinquetur tandem aliquis numerus primus, qui præcedentem & ipsum A metietur.si enim nō relinquitur primus,
3.postul. metientur ipsum A infiniti numeri , quorum alter altero est minor.quod in numeris fieri non potest.ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A.omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

A 8
B 4
C 2

ALITER

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus. & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. erit C minor, quàm B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdū. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandū fuit.

A.....9
B...3
C

THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quæritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

A...3
A.....6 Ex antecedente.
...3

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcūque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi A B C, proportionem habeāt. vel igitur A B C primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, et minimi erunt eandem, quā ipsi proportionem habentium. si vero non primi, sumatur ipsorum A B C maxima communis mensura D, et quoties D vnumquemque ipsorum A B C metitur, tot vnitates sint in vnoquoque horum E F G. et vnusquisque igitur ipsorum E F G vnumquemque ipsorum A B C metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo E F G ipsos A B C equaliter metiuntur, ac propterea E F G in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B C. Dico eos etiā minimos esse. si enim E F G non sint minimi, eandem, quam ipsi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis E F G minores in eadem proportione, in qua A B C. sint H K L, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterque ipsorum K L vtrūque B C metitur. quoties autem H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. et vterque igitur K L vtrumque B C metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. et quoniā H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, et M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipsorū B C metietur per vnitates, quę sunt in utroque K L. ergo M ipsos A B C metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex H M est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem est E, quàm H. ergo et M quàm D est maior, et ipsos A B C metitur. quod fieri nō potest. ponitur enim D ipsorum A B C maxima communis mensura. non igitur erunt alii qui numeri minores ipsis E F G, in eadem proportione, in qua A B C. ergo E F G minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi A B C proportionē habent. quod oportebat demodstrare.

A.....6
B.....8
C.....10 23. huius.
D..2 2. huius.
E...3
F——4
G——5 18. huius.
H.——
K.——
L.——
M.—— 21. huius.

8. com. not.

9. com. not.

19. huius.

F. C.

BIBLIOTHEQUE DE L'OBSERVATOIRE DE LYON 1894

Quoniam ſepe vſu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi ſint, libuit hoc loco ſequens problema adnectere.

Numeris quotcũque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habeant.

Sint dati quotcunque numeri deinceps proportionales ABC. oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipſi A B C proportionem habeant. Itaque vel A B primi ſunt inter ſe, vel non primi; et ſi quidem primi, 23.huius. *& minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent; ſin minus, ſumatur* 2.huius. *ipſorum AB maxima communis menſura D: & quoties D metitur A, tot vnitates ſint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates ſint in F.* 18.huius. *ergo & E F ipſos A B aequaliter metiuntur: ideoq; E F in eadem ſunt proportione, in qua ipſi A B. Dico E F etiam minimos eſſe. ſi enim non ſint minimi, erunt aliqui numeri minores ipſis E F, qui eandem, quam A B proportionem habeant.* 21.huius. *ſint GH, ergo G aequaliter metitur A, atque H ipſum B. & quoties G metitur A, tot vnitates ſint in K. quare & H metietur B per eas, quae ſunt in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quae ſunt in G, metieturq; B per vnitates, quae ſunt in H. ergo K ipſos A B metitur. & quo*

A....4
B....6
C.....?
D..2
E..2
F...3
G——
H——
K——

8. com. not. *niam G ipſum A metitur per eas, quae ſunt in K vnitates, G multiplicans K fecit A. Rurſus quoniam E metitur A per vnitates, quae ſunt in D; & E mul*

19.huius. *tiplicans D fecit A. qui igitur fit ex E D eſt aequalis ei, qui ex GK; ac propterea vt E ad G, ita erit K ad D. eſt autem E maior, quàm C. ergo & K maior quàm D, & ipſos A B metitur. quod fieri non poteſt. erat enim D ipſorum AB maxima communis menſura. non igitur ſunt aliqui numeri minores ipſis E F, qui eandem, quam ipſi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B, ita eſt B ad C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur ſunt minimi numeri E F, qui eandem, quam ipſi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B. oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel primi inter ſe ſunt, vel non. ſint primum A B inter ſe

A..3 B...4
C..... 12
D——————
E——————
F——————

16.huius. primi: & A ipſum B multiplicãs faciat C. ergo & B multiplicans A ipſum C fecit. ac propterea numeri A B ipſum C metiuntur. Dico etiam C minimum eſſe. ſi enim non ita ſit, metientur A B numerum aliquem minorẽ, quàm C. metiantur ipſum D. & quoties A ipſum D metitur, tot vnitates ſint in E; quoties autem B metitur D, tot unitates ſint in F. ergo A quidem ipſum E multiplicans fecit D; B uero multiplicans F ipſum D fecit. quare numerus, qui ex AE fit eſt æqualis ei, qui fit ex BF. vt igitur A ad B, ita eſt F ad E.

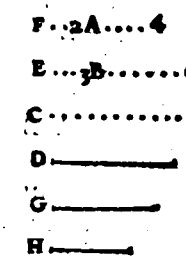
19.huius. 23 huius. 21.huius. & ſunt A B primi. primi autem & minimi. ſed minimi eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipſum E metitur, & conſequens conſequentem. & quoniam A numeros B E multipli-

18.huius. cans fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipſum E. ergo & C ipſum D metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur A B metiuntur aliquem numerum minorem ipſo C, quando A B primi inter ſe fuerint. ergo A B ipſum C minimum exiſtentem metiuntur. Sed non ſint A B primi inter ſe: & ſumãtur

19.huius: minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui ſint F E. æqualis igitur eſt, qui ex A E fit ei, qui ex BF. & A ipſum E multiplicãs faciat C. ergo & B multi-

multiplicans F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiũtur.

Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties autem B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsũ D fecit. qui igitur ex A G fit est æqualis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt F ad E, ita H ad G. & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipsos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum G. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri nõ potest. non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. ergo A B ipsum C minimum existentem metientur. quod demonstrare oportebat.



9. com. not.

19. huius.

21. huius.

18. huius.

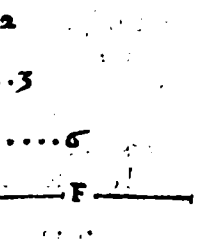
SCHOLIVM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15. eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum C D metiri. si enim E non metitur C D, metiens F D relinquat se ipso minorem CF. & quoniam A B ipsum E metiuntur, E vero ipsum DF; & A B metientur D F. sed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C F minorem ipso E metientur. quod fieri non potest. non igitur E ipsum CD non metitur. quare ipsum metiatur necesse est. quod demonstrare oportebat.



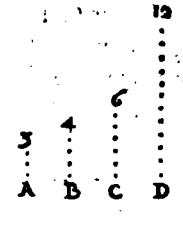
12. com. not.

13. com. not.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.

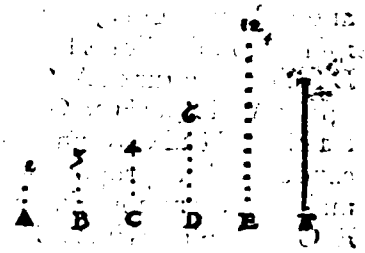
Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. sumatur enim D, quem minimum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non metitur. metiatur primum. sed & A B metiuntur ipsum D. ergo A B C ipsum D metientur. Dico & minimum. si enim non, metientur A B C quendam numerum minorem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipsum E, & A B ipsum E metiuntur. ergo & minimus, quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autem, quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. ergo A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipsum D: & sumatur minimus



Ex antecedente.

36. huius.

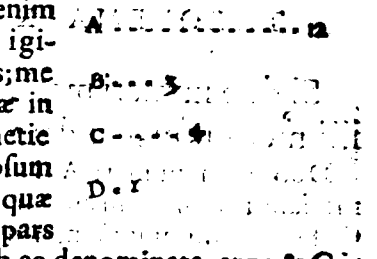
nimus numerus E, quē C D metiuntur. Itaque ẽm A B metiuntur ipſum D, D verò
12.co.not. ipſum E; & A B ipsũ E; metientur. metitur aũt & C ipſum E. ergo A B C ipſum E
metiuntur. Dico & minimum. ſi enim non, mẽtien
tur A B C numerum minorem ipſo E. metiantur
Ex ante- F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipſum
cedente. F metientur. ergo & minimus, quem A B metiun
tur, metietur ipſum F: minimus autem, quem A
B metiuntur, eſt D. quare D ipſum F metitur, &
metitur C ipſum F. ergo D C ipſum F metientur;
ac propterea minimus, quem metiuntur D C, me
tietur & F. ſed minimus, quẽm metiuntur D C, eſt
E ergo E ipſum F metitur, maior minorẽ. quod fie
ri non poteſt. non igitur A B C metiuntur aliquẽ
numerum minorem ipſo E. ergo numerum E minimum exiſtentem ipſi A B C me
tiuntur. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, menſus partem habebit à metiente denominatam.

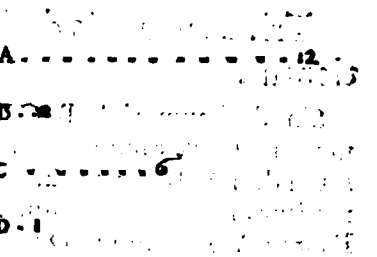
Numerum enim A numerus aliquis B metiatur. Dico
A partem habere ab ipſo B denominatam. quoties enim
B ipſum A metitur, tot vnitates ſint in C. Quoniam igi-
tur B metitur ipſum A per eas, quę ſunt in C, vnitates; me
titur autem & D unitas ipſorum C per vnitates, quæ in
ipſo ſunt: & D vnitas ipſum C numerum æqualiter metie
15.huius. tur, atque B ipſum A. quare permutando unitas D ipſum
B numerum æqualiter metietur, atque C ipſum A. quæ
igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem eſt pars
5. com. not. & C ipſius A. ſed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata. ergo & C ip
ſius A pars eſt denominata ab ipſo B. quare A partem habet C ab ipſo B denomina
tam. quod oſtendere oportebat.



THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcum-
que B; & ab ipſo B denominatus ſit numerus C.
Dico C ipſum A metiri. Quoniam enim B ipſius
5. com. not. A pars eſt denominata ab ipſo C. eſt autem & D
vnitas ipſius C numeri pars ab eo denominata.
quæ igitur pars eſt vnitas D ipſius C numeri, ea-
dem pars eſt & B ipſius A. ergo vnitas D æquali-
ter metitur ipſum B numerum, atque B ipſum
15.huius. A. & permutando unitas D ipſum B numerum
æqualiter metitur, atque C ipſum A. ergo C ipſum A metitur. quod oportebat de-
monſtrare.



PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus exiſtens datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus ſit, habeat partes A B C. ſumantur ab ipſis A B C partibus denominati numeri D E F. & ſumatur minimus numerus G, quem ipſi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F minimum ipſum G, habebit G partes ab ipſis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipſis D E F ſunt A B C. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum eſſe. ſi enim G non exiſtens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipſo G, qui eaſdem partes habeat. ſit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, eum metientur numeri ab ipſis A B C partibus denominati; ſunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipſum H metientur atque eſt H minor ipſo G. quod fieri non poteſt. non igitur erit aliquis numerus minor ipſo H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonſtrare.

A $\frac{1}{2}$ D..2
B $\frac{1}{3}$ E..3
C $\frac{1}{4}$ F....4
G.....12
H ——

38 huius.
39. huius.

SEPTIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER OCTAVVS

CVM COMMENTARIIS,

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.



SI sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri decineeps proportionales A B C D, quorũ extremi ſA D primi inter se sint. Dico A B C D minimos esse omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis A B C D numeri E F G H, & in eadem proportione. Et quoniam A B C D sunt in eadem proportione, in qua E F G H; atque est ipsorũ A B C D multitudo æqualis

14. septimi. multitudini ipsorum E F G H: erit ex æquali ut A ad D, ita E ad H: et sunt A D

21. septimi. primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur E F G H minores ipsis A B C D existentes in eadẽ sunt, in qua ipsi, proportione; ac propterea A B C D minimi sunt omnium, qui eandẽ, quam ipsi proportionem habent. quod demonstrare oportebat.

A.....8
B.....12
C.....18
D.....27
E
F
G
H

PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B. imperentur quattuor: et A se ipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D, et B se ipsum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans C D E ipsos F G H faciat, B vero multiplicans E faciat K. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit C, multiplicãs vero B ipsum D fecit; numerus A duos numeros A B multiplicans fecit C D. est igitur ut A ad B, ita C ad D. rursus quo-

17. septimi.

niam

niam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsū multiplicans fecit E; vterque ipsorum A B multiplicans B vtrumque ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C D multiplicans ipsos F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad C. rursus quoniam A numeros D E multiplicans fecit G H, erit vt D ad E, ita G ad H. sed vt D ad E, ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipsum E multiplicantes faciant H K; erit vt A ad B, ita H ad K. ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales sunt in proportione, quā habet A ad B. Dico ēt minimos esse. Quoniam enim A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi vero, & primi sunt inter se: erunt ipsi A B inter se primi. et vterque quidem ipsorum A B seipsum multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter se sunt. si autem sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo C D E, & F G H K minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionē habēt. quod oportebat demonstrare.

A..2
B...3
C....4
D.....6
E.....9
F.....8
G.....12
H.....18
K.....27

18. septimi.

18. septimi.

23. septimi.

29. septimi.

Ex antecedente.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium; extremos eorū quadrātos esse: si vero quattuor esse cubos.

A.....8
B.....12
C.....18
D.....27

THEOREMA II.
PROPOSITIO. III.

Si sint quotcūque numeri deinceps proportionales, minimi omniū, qui eādem, quam ipsi, proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quā ipsi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumātur enim duo numeri minimi in proportione ipsorum A B C D, qui sint E F, tres vero G H K, & semper deinceps vno plures, quo ad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum A B C D. sumantur, & sint L M M X. extremi igitur ipsorum L X primi in-

E..2
F...3
G....4
H.....6
K.....9
L.....8
M.....12
N.....18
O.....27

Ex antecedente.

29. septimi.

ter ſe ſunt. Quoniam enim EF primi ſunt,& vterque ipſorum ſe ipſum multiplicãs vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK,& LX primi.& quoniam ABCD minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent; ſunt autem & LMNX minimi in eadẽ proportione, in qua A BCD; eſtq; ipſorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipſorum LMNX: erit vnuſquiſque ipſorum ABCD vnicuique ipſorum LMNX æqualis. Ergo A quidem eſt æqualis L, B vero ipſi M, C ipſi N,& D ipſi X. quòd cum LX primi ſint inter ſe,& L ipſi A æqualis,& X ipſi D;& AD inter ſe primi erũt. quod oportebat demõſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Sumãtur enim duo minimi numeri in proportione ipſorum ABCD] *ex eo, quod ad 35 huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

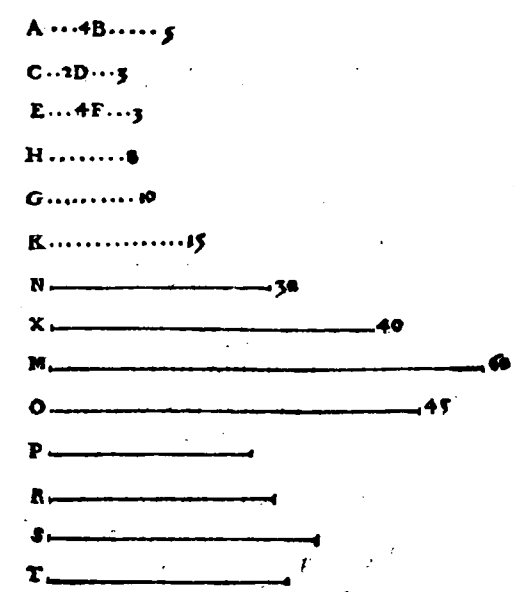
Sint datæ proporriones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B,& in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F. Sumatur enim minimus numerus, 36. ſeptimi. quem BC metiuntur; ſitq; G.& quoties B metitur G, toties A ipſum H metiatur; quoties vero C ipſum G metitur, toties & D metiatur K. itaque E ipſum K vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K, toties F ipſum L metiatur.& quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipſum G; erit vt A ad B, ita H ad 17. ſeptimi. G. Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K;& adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales ſunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F. Dico etiam minimos eſſe. Si enim non ſint HGKL deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis HGKL deinceps minimi in eiſdem proportionibus. ſint N X M O. & quoniam eſt vt A ad B, ita N ad X;& ſunt A B minimi; minimi autem eos, qui 21. ſeptimi. eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem,& minor minorem, hoc eſt antecedens antecedẽtem, & conſequẽs conſequentem: metietur B ipſum X. Eadem ratione & C ipſum X metietur. quare A B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipſum X metietur. minimus autem, quem metiuntur B C, eſt G. ergo G metietur X, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis H G K L deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipſum K;& ſumatur minimus numerus, quem ipſi E K metiuntur; 36. ſeptimi. ſitq; M. quoties autem K metitur M, toties & vterque ipſorum HG vtrumque N X metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipſũ N æqualiter metitur, atque G ipſum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, 7. ſeptimi. ita A ad B.& vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rurſus quoniã E ipſum M æqualiter metitur, atque F ipſum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps proportionales ſunt in proportionibus A ad B, C ad D,& E ad F. Dico minimos quoque eſſe. Si enim non ſint NXMO deinceps minimi

A...3 B...4
C..2 D...5
E....4 F.....5
H.....6
G 8
K.....12
L.....15
N
X
M
O

in

in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erũt aliqui numeri minores ipſis NX MO deinceps minimi in eiſdem proportionibus. ſint PRST. & cum ſit vt P ad R, ita A ad B; ſintq; AB minimi; minimi vero eos, qui eãdẽ habẽt proportionẽ, æqualiter metiũtur, antecedẽs antecedẽtẽ, & cõſequẽs cõſequẽtẽ: numerus B ipſũ R metietur. 21. ſeptimi.

Eadem ratione & C metietur ipſũ R. ergo B C ipſum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiũtur B C, ipſum R metietur. minimus aũt, quẽ metiũtur B C, eſt G. ergo G metitur ipſum R. atque eſt vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipſum S metitur: metitur autem & E ipſum S; idcoq; E K ipſum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipſum S. Sed minimus, quem metiũtur E K, eſt M. ergo M ipſum S metietur, maior minorem. quòd fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi ſunt in eiſdem proportionibus. quod demonſtrare oportebat. B 37. ſeptimi. C



F. C. COMMENTARIVS.

Eadem ratione & C ipſum X metitur.] *Quoniam enim eſt vt C ad D, ita X ad M; & ſunt C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur: numerus C ipſum X metietur.* A

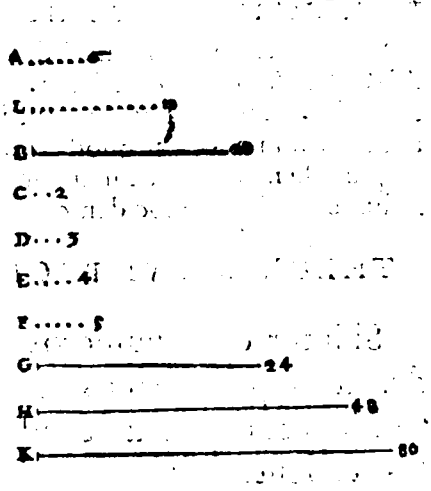
Eadem ratione & C metietur ipſum R] *eſt enim vt C ad D, ita R ad S: ſintq; C D minimi. ergo ob iam dictam cauſſam C ipſum R metietur.* B

Atque ut G ad R, ita K ad S] *eſt enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.* C

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter ſe proportionẽ habẽt ex lateribus cõpoſitã.

Sint plani numeri A B, et ipſius quidem A latera ſint C D numeri; ipſius vero B latera ſint E F. Dico A ad B proportionẽ habere ex lateribus cõpoſitã. proportionibus enim datis, videlicet quã hẽt C ad E, & quã D ad F, ſumãtur numeri deinceps minimi G H K in proportionibus C ad E, & D ad F, ſitq; vt C ad E ita G ad H: vt aũt D ad F, ita H ad K. ergo G H K inter ſe proportiones habẽt laterũ. Sed proportio G ad K compoſita eſt ex proportione G ad H, et proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compoſitam. Dico igitur vt A ad B, ita eſſe G ad K; numerus enim D ipſum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipſum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad



Ex antecedente.

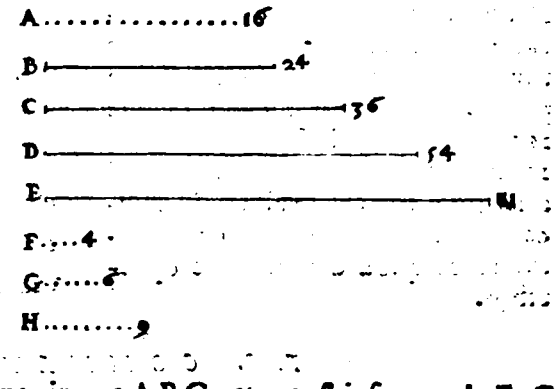
E, ita

B, ita A ad L. ut autem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L. quare ex æquali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps sese nō metiri, perspicuum est; neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipsum C. nam quot sunt A B C, tot sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentes. & sint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem sunt proportione, in qua A B C, atque est ipsorum A B C multitudo æqualis multitudini ipsorum F G H; erit ex æquali vt A ad C; ita F ad H. & quoniam est vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt F H primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neq; igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonstrare oportebat.

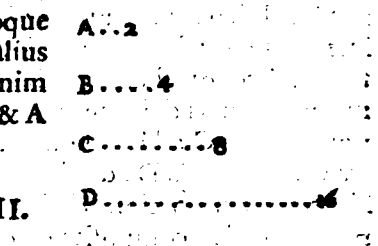


huius:

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D; & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoque B metiri. si enim A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur quod est absurdū. ponitur enim A ipsum D metiri. metitur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. quod demonstrasse oportuit.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales cecid erint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter

Inter duos enim numeros A B cadant numeri C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter E F deinceps proportionales cadere. quot enim numeri ſunt A C D B, totidem ſumantur minimi numeri eandem, quam ipſi A C D B proportionem habentium G H K L. ergo extremi ipſorum G L primi inter ſe ſunt. & quoniam A C D B ad ipſos G H K L in eadem ſunt proportione; atque eſt ipſorum A C D B multitudo æqualis multitudini ipſorum G H K L; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & ſunt G L primi. ſed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G æqualiter metitur ipſum E, atque L ipſum F. quoties autem G metitur ipſum E, toties & vterque ipſorum H K vtrũque M N metiatur. numeri igitur G H K L ipſos E M N F æqualiter metiuntur. ideoq; G H K L in eadem ſunt proportione, in qua ipſi E M N F. at G H K L ſimiliter in eadem ſunt proportione, in qua A C D B. ergo A C D B in eadem proportione erunt, in qua E M N F. Sed A C D B ſunt deinceps proportionales. ergo & E M N F deinceps proportionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidẽ deinceps proportionales & inter E F cadent. quod demonſtrare oportebat.

A..2
C....4
D.....8
B.....16 — 25. ſeptimi.
G.1
H..2 — 3. huius.
K....4
L.....8 — 24. ſeptimi.
E...3
M .....6 — 23. ſeptimi.
N.....12 — 21. ſeptimi.
F.....24

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

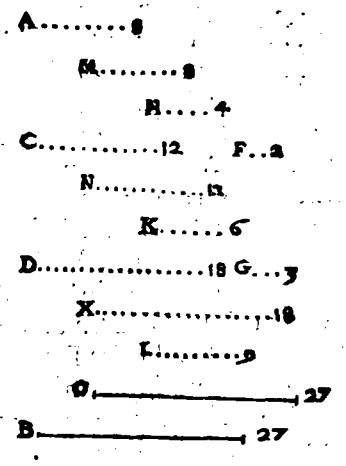
Si duo numeri inter ſe primi fuerint, & inter ipſos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipſos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter ſe primi A B; & inter ipſos deinceps proportionales cadant C D; exponaturq; vnitas E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipſos A B, totidem & inter vtrumque ipſorum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. ſumantur enim duo quidem numeri minimi F G in eadem proportione, in qua ſunt A C D B; tres vero H K L, & ſemper deinceps vno plures, quo ad fiat ipſorum multitudo æqualis multitudini ipſorum A C D B. ſumantur, & ſint M N X O, itaque manifeſtum eſt F ſe ipſum quidem multiplicantem feciſſe H, multiplicantem vero H feciſſe M: & G ſe ipſum quidẽ multiplicantem feciſſe L; multiplicantem vero L feciſſe O. & quoniam M N X O minimi ſunt qui eãdem, quam ipſi F G proportionem habent; ſunt autem & A C D B minimi eandem, quam F G proportionem habentium; atque eſt ipſorum M N X O multitudo æqualis multitudini ipſorum A C D B; erit vnuſquiſque ipſorum M N X O vnicuique ipſorum A C D B æqualis. æqualis igitur eſt M ipſi A, & O ipſi B. & quoniã F ſe ipſum multiplicans fecit H, metitur F ipſum H per vnitates, quæ ſunt in F. 19. com. not.

A.....8
M.....8
H....4 — A
C.....12 F..2
N.....12 — 2. huius.
K.....6
D.....18 G...3
X.....18
L.....9
O——————27
B——————27

metitur

6.com. not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque F ipsum H. Conuer. 20 diff. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quæ sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipsum M. ergo Conuer. 20 diff. vt E unitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & ut E unitas ad numerum F, ita esse F ad H. & ut igitur E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est æqualis ipsi A. quare vt B E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & ut E unitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod oportebat demonstrare.



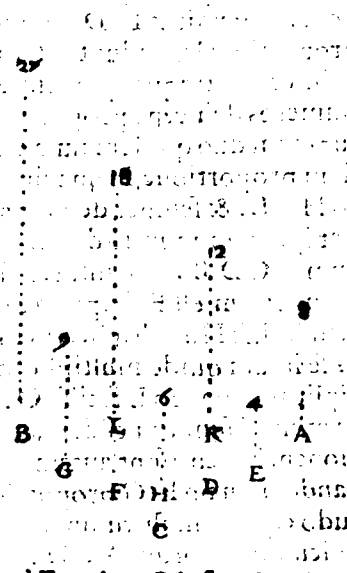
F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B] *ex problemate, quod nos ad 35 septimi conscripsimus.*

B Eadem ratione, & vt E unitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] *quoniam enim G se ipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quae sunt in ipso G: metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. ergo E vnitas aequaliter metitur numerum G, atque G ipsum L, quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans L fecit O, manerus L ipsum O metietur per vnitates, quae sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. aequaliter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est aequalis. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri cecideri-
A nt, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.



Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadant D E, & FG. Dico quot inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H, vterque autem ipsorum D F ipsum H multiplicans faciat vtrumque
20.diff. K L. & quoniam est ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipsum D numerum

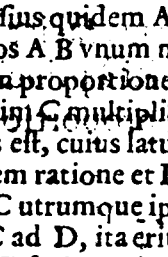
rum æqualiter metietur, atque D ipsum E. Sed unitas C numerum D metitur per vnitates, quæ sunt in D. ergo & numerus D ipsum E per vnitates, quæ sunt in D metitur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt vnitas C ad D numerum, ita est E ad A; vnitas C ipsum D numerum æqualiter metitur, atque E ipsum A. sed vnitas C ipsum D numerum metitur per vnitates, quæ sunt in D. quare et E ipsum A per vnitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsum E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero G ipsum B fecit. et quoniam D se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem causam vt D ad F, ita H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniam D vtrumque ipsorum E H multiplicans fecit vtrumque A K; erit vt E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad K. Rursus quoniam vterque D F ipsum H multiplicans vtrumque K L fecit, vt D ad F, ita est K ad L. vt autem D ad F, ita erat A ad K. & vt igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H G multiplicans vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed vt H ad G, ita D ad F. ergo & vt D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & vt D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demonstrare oportebat.

6. com. not. 9. com. not. 20. diffi. 9. com. not. 17. septimi. 17. septimi. 18. septimi. 17. septimi.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionē habet eius, quam latus habet latus.

Sint quadrati numeri A B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. et quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione et D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C utrumque ipsorum C D multiplicans vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, et D se ipsum multiplicans fecit B, duo numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipsos E B fecerunt. est igitur vt C ad D, ita E ad B. sed vt C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quā habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.



18. diffin. 17. septimi. Diffi. 25.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

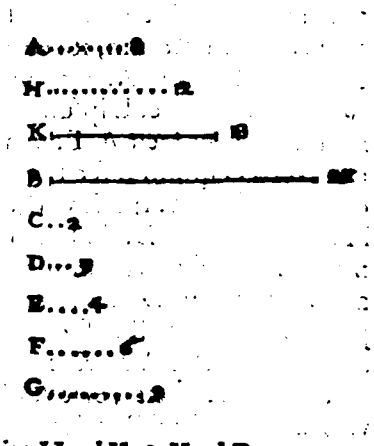
Sint numeri cubi A B; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere; et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E; multiplicans vero D ipsum F faciat, et D se ipsum multiplicans fa-

ciat G: et vterq; ipſorum C D multiplicãs F vtrumque H K faciat. Quoniam igitur cubus eſt A, & eius latus C, numerus C ſe ipſum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipſum A fecit, ſimiliter & D ſe ipſum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipſum B. & quoniam C vtrũque ipſorum C D multiplicans vtrumque E F fecit, vt C ad D, ita eſt E ad F. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rurſus quoniam C vtrumque ipſorum E F multiplicans fecit vtrumque A H, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rurſus quoniam vterque ipſorum C D multiplicans F vtrumque H K fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rurſus quoniam D vtrumque F G multiplicans fecit vtrumque K B, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. oſtenſum autem eſt vt C ad D, ita eſſe A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipſos A B duo H K medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales ſunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quã habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonſtrare oportebat.

17. ſeptimi.

18. ſeptimi.

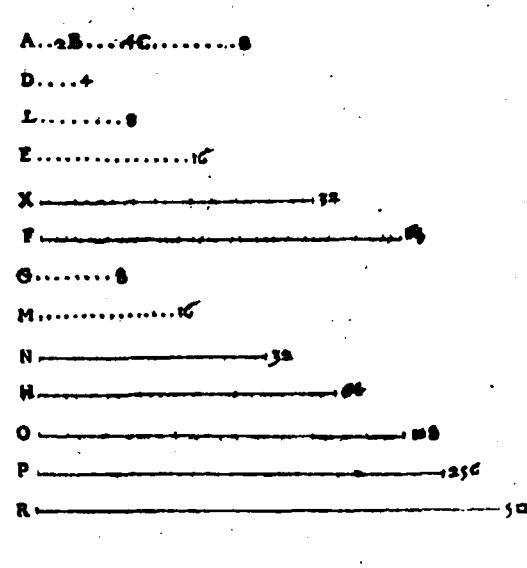
23. diffin.



THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnuſquiſque ſe ipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis proportionales erunt. et ſi poſiti à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipſi proportionales erunt. et ſemper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; ſitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipſi A B C ſe ipſos multiplicantes faciant D E F: ipſos uero D E F multidlicantes faciant G H K. Dico nnmeros DEF & G H K deinceps proportionales eſſe. numerus enim A ipſum B multiplicans faciat L; vterque autem ipſorum A B multiplicans L faciat vtrumque M N. et rurſus B quidem multiplicans C ipſum X faciat; vterque vero ipſorum B C multiplicans X faciat vtrumque O P. A ſimiliter ijs, quę dicta ſunt, oſtendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ B eſt A ad B: & adhuc E X F, & H O P K deinceps eſſe proportionales in proportione B ad C. atque eſt vt A ad B, ita B ad C. ergo & D L E in eadem ſunt proportione, in qua E X F: & preterea G M N H in eadem proportione, in qua H O P K. eſtq; ipſorum quidem D L E multitudo



multitudo multitudini ipſorum E X F æqualis. multitudo autẽ ipſorum G M N H æqualis multitudini ipſorum H O P K. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. vt autem G ad H, ita H ad K. quod demonſtrare oportebat. 14. ſeptimi.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta ſunt, oſtendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ eſt A ad B] *quoniam enim A duos numeros A B multiplicãs fecit D L, erit vt A ad B, ita D ad L. rurſus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipſos L E fecit; vt A ad B, ita erit L ad E. ſed vt A ad B, ita eſt D ad L. vt igitur A ad B, ita eſt & D ad L, & L ad E. quare ſequitur D L E deinceps proportionales eſſe in eadem proportione, in qua eſt A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipſos G M, erit vt D ad L, hoc eſt vt A ad B, ita G ad M. rurſus quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipſos M N fecerunt, vt A ad B, ita erit M ad N. Præterea cũ B duos numeros L E multiplicans faciat N H, erit vt L ad E, videlicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat & G ad M, & M ad N. vt igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo C M N H deinceps proportionales ſunt in eadẽ proportione, in qua eſt A ad B.* A. 17. ſeptimi. 18. ſeptimi.

Et adhuc E X F, & H O P K deinceps eſſe proportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo ſupra, modo oſtendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipſos N X, & numerus C duos numeros B C multiplicans ipſos X F fecit. ergo vt B ad C, ita eſt & E ad X, & X ad F. Præterea B duos numeros E X multiplicans fecit H O. & duo numeri B C multiplicantes X fecerunt ipſos O P. rurſus C duos numeros X F multiplicans ipſos P K fecit. quare vt E ad X, hoc eſt vt C ad B, ita H ad O. & rurſus vt C ad B, ita O ad P. præterea vt X ad F, hoc eſt vt B ad C, ita eſt P ad K. vt igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus conſtat E X F, & H O P K deinceps proportionales eſſe in ea proportione, in qua eſt B ad C.* B. C. A.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D, & A ipſum B metiatur. Dico & latus C ipſum D metiri. numerus enim C multiplicans A ipſum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales ſunt in proportione, quæ eſt C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps ſunt proportionales, metiturq; A ipſum B; & A ipſum E metietur. atque eſt vt A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipſum D. ſed C metiatur ipſum D. Dico & A ipſum B metiri. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus A E B deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniam eſt vt C ad D, ita A ad E. metitur autem C ipſum D. & A ipſum D metietur. & ſunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipſum B, ſi igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

A 4
E 6
B 9
C 2
D 3

Ex demonſtratis in 2. huius. 7. huius. *

F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur & A ipſum B] *quoniam enim A E B deinceps proportionales ſunt, metiturq; A ipſum E; & E ipſum B metietur. quare A ipſum B metiatur neceſſe eſt ex duodecima communi notione.* * 20. diff.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur

tietur: & ſi latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur: & ipſius quidem A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico C ipſum D metiri. numerus enim C ſe ipſum multiplicans faciat E, & multiplicãs D faciat F: D verò ſe ipſum multiplicãs faciat G, & vterque ipſorum C D multiplicans F vtrumque H K faciat. manifeſtum A eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione, quę eſt C ad D. & quoniã A H K B deinceps proportionales ſunt, metiturq; 7. huius. A ipſum B; & A ipſum H metietur. eſt aũt vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipſũ D metietur. ſed C metiatur D. Dico & A ipſum B metiri. ijſdẽ enim cõſtructis ſimiliter oſtẽdemus A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniã C ipſum D metitur, eſtq; vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

A 8
H 16
K 32
B 64
C .. 2
D 4
E 4
F 8
G 16

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifeſtum eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ eſt C ad D] *hoc ſimiliter vt in 13 demonſtrabimus.*

B Et A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur] *quoniam enim eſt vt A ad H, ita H ad K; metiturq; A ipſum H; & H metietur ipſum K. quare & A ipſum K metietur. rurſus quoniam vt A ad H, ita eſt K ad B, & K ipſum B metietur. ergo & A ipſum B metiatur neceſſe eſt.* 21. diffi. 11. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D. & A non metiatur ipſum B. Dico neque C ipſum D metiri. ſi enim metitur C ipſum D, & A ipſum B metietur. nõ metitur autem A ipſum B. non igitur C ipſum D metietur. 14. huius. ſed C non metiatur D. Dico neque A ipſum B metiri. Si enim A metitur ipſum B, & C ipſum D metietur: atqui C nõ metitur D; neque igitur A ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

A 9
B 16
C ... 3
D ... 4

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipſius quidẽ A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico C ipſum D nõ metiri.

A 8
B 27
C .. 2
D ... 3

ſi enim

ſi enim C metitur ipſum D, & A ipſum B metietur. atqui non metitur A ipſum B, non igitur C ipſum D metietur. Sed non metiatur C ipſum D. Dico neque A ipſum B metiri. ſi enim A ipſum B metitur, & C metietur ipſum D. non metitur autem C ipſum D. neque igitur A ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos ſimiles planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter ſe ſimiles A B; & ipſius quidem A latera ſint C D; ipſius vero B latera E F. & quoniam ſimiles plani ſunt, qui latera habent proportionalia; erit vt C ad D, ita E ad F. Dico inter ipſos A B vnum medium proportionalem cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim eſt vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F. & quoniam planus numerus eſt A, cuius latera CD, numerus D ipſum C multiplicans fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipſum B fecit. numerus autem D ipſum E multiplicans faciat G. & cum D ipſum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. ſed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rurſus quoniam E ipſum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipſum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. oſtenſum eſt autem & vt D ad F, ita eſſe A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales ſunt; ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales ſunt, A ad B duplam proportionem habebit eius, quam habet ad G. atque eſt vt A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demõſtrare.

A.....6
G.....12
B.....24
C..2
D...3
E....4
F.....6

21. diffi.

17. ſeptimi.

Diffi. 3.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Inter duos ſimiles ſolidos numeros duo medij proportionales cadunt; & ſolidus ad ſolidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri ſolidi inter ſe ſimiles A B, & ipſius quidem A latera ſint C D E; ipſius uero B latera F G H, & quoniam ſimiles ſolidi ſunt, qui latera habent proportionalia, erit vt C ad D, ita F ad G. vt autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipſos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipſum D multiplicans faciat K, F uero multiplicans G ipſum L faciat. & quoniam C D in eadem ſunt proportione, in qua F G: & ex ipſis C D

A.....8
N.....12
X.....18
B.....27
C..2
D..2
E..2
F...3
G...3
H...3
K....4
M.....6
L.....9

Prz. diffi.

fit

Ex antecedente.

fit K; ex ipſis vero F G fit L, erunt K L ſimiles plani numeri. quare inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. ſit is numerus M. ergo M fit ex D F, vt in præcedenti theoremate. eſt igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipſum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit vt C ad F, ita K ad M. ſed vt K ad M, ita M ad L. ergo K M L deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F. & quoniã vt C ad D, ita F ad G, erit permutando vt C ad F, ita D ad G. rurſus quoniam vt D ad E, ita G ad H, & permutãdo erit vt D ad G, ita E ad H. ergo K M L deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F, & D ad G, & E ad H. vterque autem ipſorum E H multiplicans M faciat vtrumq; N X & quoniam ſolidus eſt A, latera autem ipſius C D E, numerus E cum, qui fit ex C D multiplicans fecit A: qui vero fit ex C D eſt K. ergo E multiplicans K ipſum A fecit. Eadem ratione & H multiplicans L, qui fit ex F G, fecit ipſum B. & quoniam E ipſum K multiplicans fecit A. ſed & multiplicans M fecit N; erit vt K ad M, ita A ad N. vt autem K ad M, ita C ad F, & D ad G, & adhuc E ad H. ergo vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita A ad N. rurſus quoniam vterque ipſorum E H multiplicans M fecit vtrumque N X, erit vt E ad H, ita N ad X. ſed vt E ad H, ita C ad F, & D ad G. eſt igitur vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita & A ad N, & N ad X. rurſus quoniam H multiplicans M fecit ipſum X; ſed & multiplicans L fecit B: erit vt M ad L, ita X ad B. ſed vt M ad L, ita C ad F, & D ad G, & E ad H. & vt igitur C ad F, & D ad G, & E ad H, ita non ſolum X ad B, ſed & A ad N, & N ad X. ergo A N X B deinceps proportionales ſunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam habet numerus C ad F, vel D ad G, & E ad H. Quoniam enim quattuor numeri proportionales ſunt A N X B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N. ſed vt A ad N, ita oſtenſus eſt & C ad F, & D ad G, & E ad H. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quã C habet ad F, & D ad G, & E ad H. quod demonſtrare oportebat.

17. ſeptimi.

Diffi. 24.

A ... 8
N ... 12
X ... 18
B ... 27
C ... 2
D ... 2
E ... 2
F ... 3
G ... 3
H ... 3
K ... 4
M ... 6
L ... 9

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipſum K multiplicans fecit A] *eſt enim K, qui fit ex C D, & E multiplicans eum, qui fit ex C D ipſum A fecit.*

B Rurſus quoniam H multiplicans M fecit ipſum X, ſed & multiplicans L fecit B] *eſt enim L, qui fit ex F G, & H eum, qui fit ex F G multiplicans ipſum B fecit.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri ſimiles plani erũt.

Inter duos enim numeros A B vnus medius proportionalis cadat C. Dico numeros A B ſimiles planos eſſe. Sumantur enim minimi numeri D E, eandem, quam ipſi A C B proportionem habentium. eſt igitur vt D ad E, ita A ad C. vt autem A ad C, ita C ad B. ergo & vt D ad E ita C ad B. æqualiter igitur D ipſum A metitur, atque E ipſum C. ergo quoties D metitur A, tot vnitates ſint in

A ... 8
C ... 12
B ... 18
D ... 4
E ... 6
F ... 2
G ... 3

A

2. diffi.

F; propterea q; F multiplicans D ipſum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare A planus numerus eſt, cuius latera D F. rurſus qm̃ D E minimi numeri ſunt, eandē quā C B proportionē habētiū; æqualiter D ipſum C metitur, & E ipſum B. quoties aūt E ipsū B metitur, tot vnitates ſint in G. ergo E ipsū B metitur per eas, quæ ſunt in G vnitates. quare G ipſum E multiplicās fecit B: ideoq; B numerus planus eſt, cuius latera E G. ergo numeri A B ſunt plani. Dico & ſimiles eſſe. Quoniam enim uterque ipſorum F G multiplicans E vtrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut aūt C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare A B ſimiles plani ſunt; cum ipſorum latera ſint proportionalia. id quod demonſtrare oportebat.

9. com: not.

21. ſeptimi.

9. com. not:

18. ſeptimi.

B

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim minimi numeri DE, eandem, quam ipſi A C B proportionem habentium] *ex eo, quod additum eſt ad 35 ſeptimi.* A

Quare A B ſimiles plani ſunt, cum ipſorum latera ſint proportionalia] *quoniam enim eſt vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & ſunt D F latera ipſius A, & E G latera ipſius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, ſimiles inter ſe erunt.* B

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri ſimiles ſolidi erunt.

Inter duos enim numeros A D duo medij proportionales cadant C D. Dico ipſos A B ſimiles ſolidos eſſe. ſumantur enim minimi numeri tres, eandem quā A C D B proportionē habentiū, qui ſint E F G. extremi igitur ipſorum E G primi inter ſe ſunt. & quoniam inter E G unus medius proportionalis cecidit F, erunt numeri E G ſimiles plani. ſint ipſius quidem E latera H K; ipſius uero G latera L M. manifeſtum eſt ex antecedente E F G deinceps proportionales eſſe in proportione H ad L, & in proportione K ad M. & quoniam E F G minimi ſunt, eandem, quam A C D proportionem habentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: & ſunt E G primi, ſed primi & minimi. minimi uero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorē, hoc eſt antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo E ipſum A æqualiter metitur, atque G ipſum D. quoties autem E metitur A, tot unitates ſint in N. ergo N ipſum E multiplicās fecit A. ſed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui fit ex H K multiplicās ipſum A fecit. ſolidus igitur eſt A, cuius latera H K N. Rurſus quoniam E F G minimi ſunt, eandem quam ipſi C D B proportionem habentium, E ipſum C æqualiter metitur, atque G ipſum B. & quoties G metitur B, tot unitates ſint in X. ergo G ipſum B metitur per eas, quę ſunt in X unitatis; ideoq; X multiplicans G ipſum B fecit. at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipſum C fecit. ſolidus igitur eſt B, & eius latera L M X. quare A B ſolidi ſunt. Dico etiam ſimiles eſſe. quoniam enim N X multiplicantes E ipſos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C, hoc eſt E ad F. ſed vt E ad F, ita H ad L, & K ad M, & vt igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. ſunt autem

A 8
C 12
D 18
B 27
E 4
F 6
G 9
H .. 2
K .. 2
N .. 2
L ... 3
M .. 3
X ... 3

A

3. huius:

Ex antecedenti.

B

23 ſeptimi.

21. ſeptimi.

9. com. not.

C

HKN

HKN latera ipsius A, & L M X latera ipsius B. ergo A B similes solidi erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam A C D B proportionem habentium] *inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam A C D B proportionem habentium ex iis, quae nos ad 35 septimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 septimi sumantur tres minimi numeri eandem, quam A C D proportionem habentium.*

B Manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M] *quoniam enim E G similes plani sunt, ipsorum latera eandem habent proportionem. est igitur vt H ad K, ita E ad M: & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaque quoniam K ipsum H multiplicans fecit E; multiplicans* 17. septimi. *vero L ipsum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, vt K ad M, ita est F ad G. ostensum est autem vt H ad L, ita esse K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea E F G deinceps proportionales sunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.*

C Quoniam enim N X multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C] *etenim E ipsum C aequaliter metitur, atque G ipsum B, vt ostensum est. quoties autem G metitur B, tot vnitates sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; sitq; primus A quadratus. Dico & tertium C quadratum esse. Quoniã enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erũt A C similes plani. sed A est quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

20. huius.

A....4
B.....6
C.....9

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A sit cubus. Dico & D cubum esse. Quoniam enim inter A D duo medij proportionales cadunt B C, erunt A D similes solidi. est autem A cubus; ergo et D cubus erit. quod demonstrare oportebat.

21. huius.

A..... 8
B.....12
C..... 18
D.....27

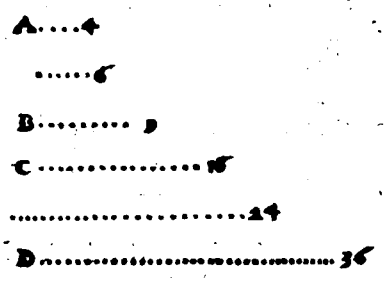
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D: sitq; A quadratus. Dico & B quadratum esse.

quoniam

quoniam enim CD quadrati ſunt, erunt C D ſimiles plani; ideoq; inter ipſos CD vnus medius proportionalis cadit. eſt autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. eſtq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.

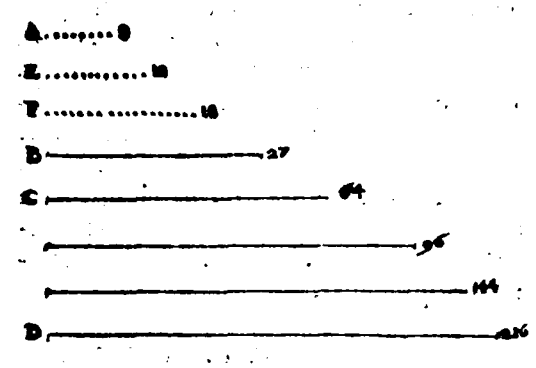


18. huius.
8. huius.
22. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

Duo enim numeri A B inter ſe proportionem habeant, quam cubus numerus C ad numerũ cubum D, ſitq; A cubus. Dico & B cubum eſſe. Quoniam enim CD cubi ſunt, erunt CD ſimiles ſolidi. idcircoq; inter ipſos duo medij proportionales cadent: quot autem inter C D cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. ergo inter A B duo medij cadent proportionales. cadant E F. quoniam igitur quattuor numeri A E F B deinceps proportionales ſunt, eſtq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonſtrare.

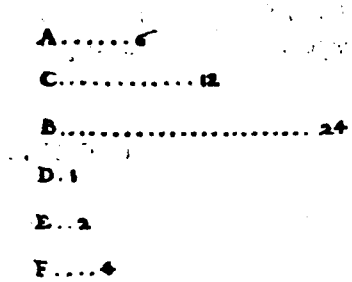


19. huius.
8 huius.
23. huius.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint ſimiles plani numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim AB ſimiles plani ſunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, ſitq; C: & ſumantur minimi numeri, eandem, quam ABC proportionẽ habentiũ D E F. ergo ipſorum extremi D F quadrati ſunt. & quoniam eſt vt D ad F, ita A ad B; et ſunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod demonſtrare oportebat.



18. huius.
35. ſeptimi.
Con. 2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & huius conuerſum verum eſt. quod hoc modo demonſtrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter ſe ſimiles ſunt.

Sint plani numeri A B, qui proportionem habeant, quã quadratus numerus C ad quadratum numerum D. Dico eos inter ſe ſimiles eſſe. Quoniam enim C D quadrati ſunt, erunt ſimiles plani. quare inter eos cadit vnus medius proportionalis: atque eſt vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipſos A B vnus medius proportionalis cadit. numeri igitur A E ſimiles plani ſunt. quod demonſtrare oportebat.

18. huius.
8. huius.
20. huius.

A..... 6
B.....24
C.
D....4

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Similes ſolidi numeri inter ſe proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint ſimiles ſolidi numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quoniã enim A B ſimiles ſolidi ſunt, inter ipſos duo medij cadent proportionales: cadãt C D; & ſumantur minimi numeri, qui eãdem, quam A C D B proportionem habeant, ipſis multitudine æquales E F G H. ergo eorum extremi E H cubi ſunt. atque eſt vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. quod demonſtrare oportebat.

19. huius.
35. ſeptimi.
Corol. 2. huius.

A.....16
C.....24
D.....36
B.....54
E.....8
F.....12
G.....18
H.....27

F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuerſum verum eſt. quod ita demonſtratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter ſe ſimiles ſunt.

Sint ſolidi numeri A B proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D, Dico eos inter ſe ſimiles eſſe. Quoniã enim C D cubi ſunt, erũt ſimiles ſolidi; ac propterea inter eos cadũt duo medij proportionales. eſt autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter ipſos A B duo medij proportionales cadent. ſimiles igitur ſolidi ſunt numeri A B. quod demonſtrare oportebat.

19. huius.
8. huius.
21 huius.

A.....16
B.....54
C.....8
D.....27

OCTAVI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER NONVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

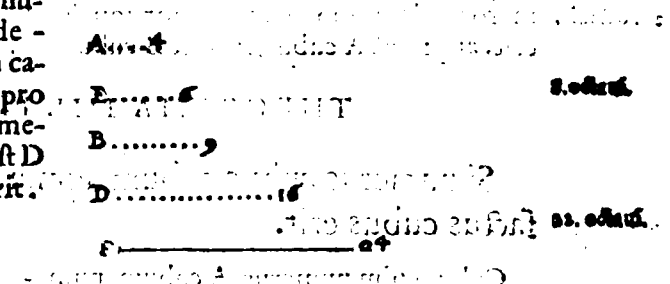
THEOREMA I. PROPOSITIO. I.



SI DVO ſimiles plani numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo ſimiles plani numeri A B, & A ipſum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. Et quoniam A B ſimiles plani ſunt, inter ipſos vnus medius proportionalis cadet. ſi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales cecide rint, quot inter ipſos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque eſt D quadratus. ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonſtrare.

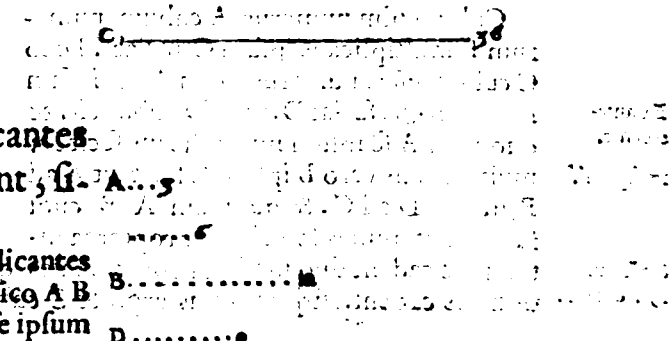
17. ſeptimi. 18. octaui.



THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri ſe multiplicantes quadratum numerum efficiant, ſimiles plani erunt.

Duo enim numeri A B ſe ſe multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B ſimiles planos eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus eſt, ſed & C; erũt D C ſimiles plani. quare

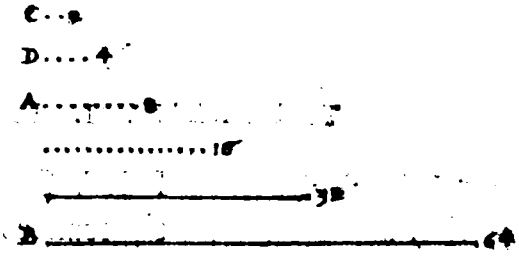


8.octaui. inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. atque eſt vt D ad C, ita A ad B. ergo
20. octaui. & inter A B cadet vnus medius proportionalis. ſi autem inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat. erunt ſimiles plani. ergo A B ſimiles plani ſunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cubus numerus ſe ipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A ſe ipſum multiplicans faciat B. Dico B cubum eſſe. ſumatur enim ipſius A latus C, & C ſe ipſum multiplicans faciat D. manifeſtū eſt C multiplicantem D facere ipſum A. & quoniam C ſe ipſum multiplicans facit

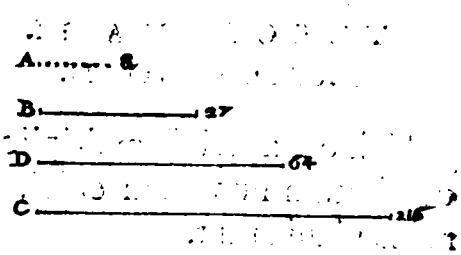


1o. com. not. D, metitur C ipſum D per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ſed & vnitas
6. com. not. metitur C per eas, quę in ipſo ſunt
Conuer. 20. diffi. vnitates. eſt igitur vt vnitas ad C, ita C ad D. rurſus quoniam C multiplicans D ipſum A fecit, metitur D ipſum A per unitates, quæ ſunt in C. metitur autem & vnitas ipſum C per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ergo vt unitas ad C, ita D ad A. ſed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq; inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rurſus quoniã A ſe ipſum multiplicans fecit B & A ipſum B metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt. metitur autem & vnitas ipſum A per vnitates, quæ ſunt in ipſo. eſt igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. ſed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportio
8. octaui. nales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd ſi inter duos nu
23. octaui. meros cadant duo medij proportionales, primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit. atque eſt A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicãs faciat aliquẽ, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipſum C faciat. Dico C cubum eſſe. numerus enim A ſe ipſum
Ex antecedente. multiplicans faciat D. ergo D cubus eſt. & quoniam A ſe ipſum multiplicans fecit D;
17. ſeptimi. multiplicans vero B ipſum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi ſunt, erunt ſimiles ſolidi; ac propterea in-



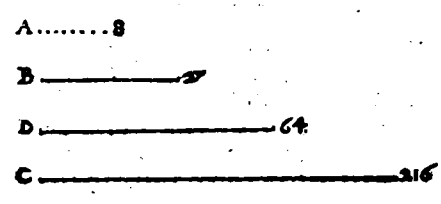
8. octaui. ter ipſos cadent duo medij proportionales. quæ vt & inter D C duo medij propor
23. octaui. tionales cadent. eſtq; D cubus. ergo & C cubus erit.

THEOREMA. V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerũ aliquem B multiplicans faciat cubum C. Dico B cubum eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicãs faciat D. ergo D cubus eſt. & quoniam A ſe ipſum quidem multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipſum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi ſunt, ſimiles ſunt ſolidi; ac propterea inter ipſos cadunt duo medij proportionales: atque eſt vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent eſtq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod oportebat demonſtrare.



Ex antecedente. 17. ſeptimi. 8. octaui. 23. octaui.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus precedentibus & illa ſequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nõ erit cubus.

Si enim factus ſit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex anteced ente. quod non ponitur.

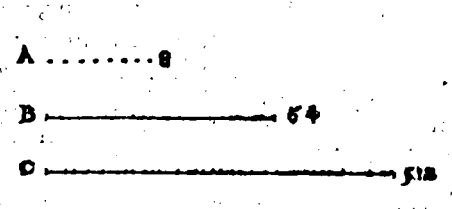
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit.

Numerus enim A ſe ipſum multiplicãs cubum B faciat. Dico & A cubum eſſe. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipſum C fecit, erit C cubus. & quoniam A ſe ipſum quidem multiplicans fecit B; multiplicãs uero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C. quod cum BC cubi ſint, ſimiles ſolidi erũt ideoq; inter ipſos cadent duo medij proportionales. & eſt ut B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunta. tque eſt B cubus, ergo & A cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonſtrare.

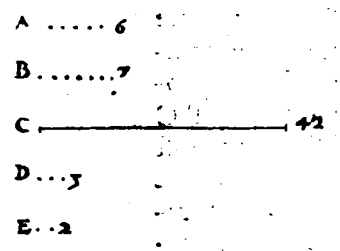


Diffi. 19. 17. ſeptimi. 19. octaui. 23. octaui.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicãs, quempiam faciat, factus ſolidus erit.

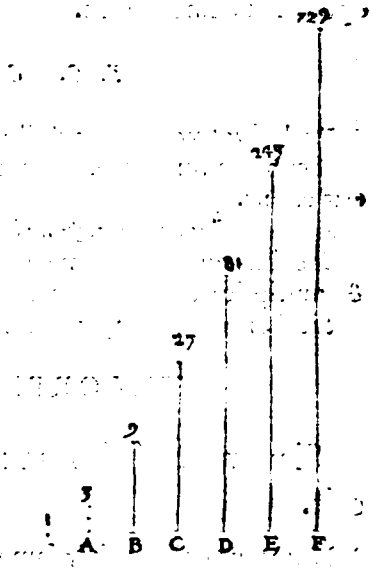
Cõpoſitus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipſum C faciat. Dico C ſolidũ eſſe. Quoniã enim A cõpoſitus eſt, eũ numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipſum A metitur, tot unitates ſint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniam A ipſum B multiplicans fecit C; eſtq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipſum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum, qui fit ex D E, ipſum C fecit. ac propterea C ſolidus eſt, cuius latera DE. quod oportebat demonſtrare.



13. diffi. 9. com. not. 16. ſeptimi Diffi. 17.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: quartus aũt eſt cubus, & duos intermittẽtes omnes: ſeptimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

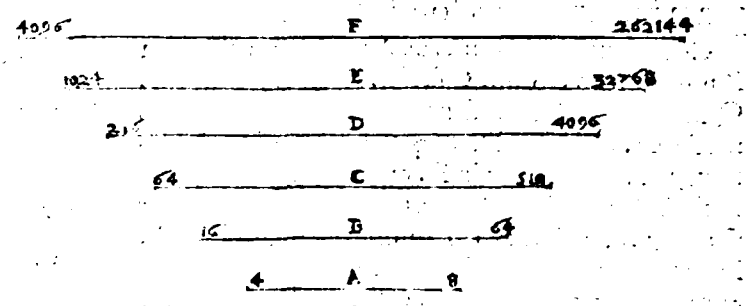


Sint ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E F. Dico tertium quidẽ ab vnitate B quadratum eſſe, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum, & duos intemittentes omnes; ſeptimum vero F cubum ſimul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes. Diffin. 10. 6. com. not. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipſum B. ſed vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipſo ſunt. Ergo & A ipſum B per vnitates, quę ſunt in A metitur. quare A ſe ipſum multiplicans fecit B. quadratus igitur eſt B. & quoniam B C D deinceps proportionales ſunt; eſtq; B quadratus; & D quadratus erit. 22. octaui. Eadem ratione erit & F quadratus. ſimiliter demonſtrabimus & vnum intermittentes omnes quadratos eſſe. Dico & quartum ab vnitate videlicet C eſſe cũbum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim eſt vt vnitas ad A, ita B ad C; vnitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipſum C. ſed vnitas numerum A metitur per vnitates, quę in A ſunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quę ſunt in A; & ob id A multiplicans B ipſum C fecit. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit B; multiplicans vero B fecit C; erit C cubus. quòd cum C D E F deinceps proportionales ſint; ſitq; C cubus; & F cubus erit. oſtẽsũ aũt eſt & quadratũ eſſe. ſeptimus igitur ab vnitate F, & cubus eſt, & quadratus. Similiter quoque demonſtrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos eſſe. quod demonſtrare oportebat.

10. diffin. 6. com. not. 5. com. not. 19. diffi. 23. octaui.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt vnitatem ſit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem ſit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.



Sint ab vnitate numeri quotcumque deinceps proportionales A B C D E F, & qui poſt vnitatem A ſit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe: tertiũ quidem ab vnitate

B eſſe

B esse quadratum,& vnum intermittentes omnes,demonstratum iam est.sed & reli qui omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus quoniam B C D deinceps propor- A
tionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit.similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse.sit autem A cubus.Dico & reliquos cubos esse.quar tum quidem ab vnitate C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demon- stratum est.sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita A ad B,vnitas numerum A æqualiter metitur,atque A ipsum B. sed vnitas metitur 20.diffin.
numerum A per vnitates,quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vni tates,quæ in ipso sunt.ergo A seipsum multiplicans fecit B,atque est A cubus.si au tem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem,factus cubus erit. Ergo 2 huius.
B est cubus.& quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales sunt, estq; A cubus;& D cubus erit. Eadem ratione & E est cubus,& similiter reliqui om B
nes cubi sunt.quod demonstrare oportebat.

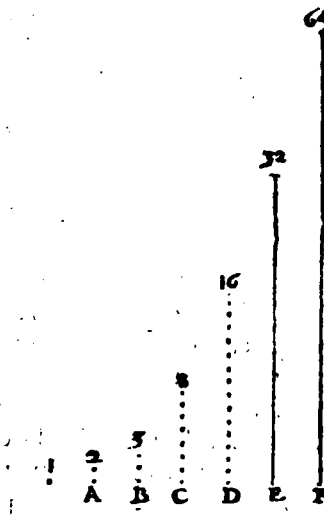
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam BCD deinceps proportionales sunt,est autem B quadratus; et A
D quadratus erit] *videntur hæc supernacanea esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitate quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.*

Eadem ratione & E est cubus] *quattuor enim numeri E C D E deinceps proportionales* A
sunt; atque est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est. 23.octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportionales fue- rint, qui uero post unitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate,& unum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cu bus erit,præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes oẽs.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri A B C D E F, & qui post vnitatem A non sit quadra tus. Dico neque alium vllum quadratum esse, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit C quadratus;est autem & qua dratus B. ergo B C inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: atque est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B in ter se proportionem eam,quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoq; AB similes plani sunt. & est B quadratus. ergo & A quadratus;est. quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. si- militer ostendemus neque alium ullum quadratum esse,præter tertium ab vnitate, & vnum intermitten- tes omnes. sed non sit A cubus. Dico neque alium vllum cubum esse, præter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cu- bus.est autem & cubus C; quartus enim est ab vnita te. & vt C ad D, ita est B ad C.ergo & B ad C proportionem habet,quam cubus ad cubum; ac propterea B C similes solidi sunt. atque est C cubus. ergo & B cubus 26.octaui. A
27.octaui. B
erit. & quoniam est vt unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autem numerum A metitur per unitates,quæ sunt in ipso: & A metietur B per vnitates, quæ in ipso

sunt.

ſunt. quare A ſe ipſum multiplicans cubum B fecit. ſi autẽ numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit. cubus igitur eſt A. quod non ponitur. ergo neque D eſt cubus. ſimiliter demonſtrabimus neque alium vllũ cubũ eſſe, præter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. quod demõſtrare oportebat.

6. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ideoq; A B ſimiles plani ſunt. & eſt B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quoniam enim A B ſimiles plani ſunt, inter eos unus medius proportionalis cadit. ſunt igitur tres numeri deinceps proportionales; eſtq; primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*

18 octaui. 22 octaui.

B Ac propterea B C ſimiles ſolidi ſunt; atque eſt C cubus; ergo & B cubus erit] *quoniam enim ſimiles ſolidi ſunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quòd cum primus ſit cubus, & quartus cubus ſit neceſſe eſt.*

19. octaui. 23. octaui.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipſorum C D. Quũ enim eſt vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numerũ B æqualiter metitur, atque D ipſum E. quare permutãdo A vnitas numerum æqualiter D metitur, atque B ipſum E. ſed A vnitas metitur D per eas, quę ſunt in ipſo D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ ſunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorũ, qui ſunt in numeris proportionalibus. quod demonſtrare oportebat.

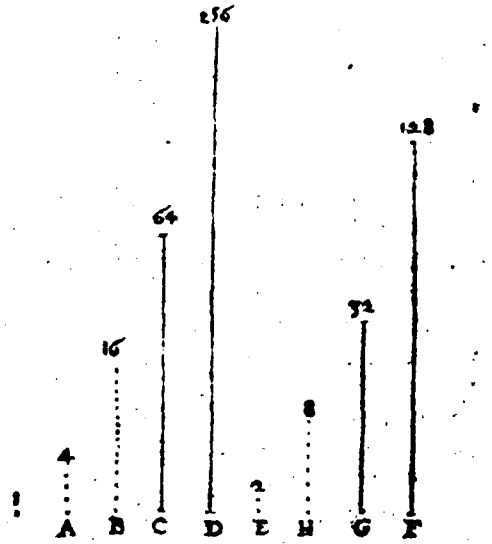


15. ſeptimi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales, quicumque primorum numerorum metiuntur ultimum, ijdẽ & eum, qui unitati proximus eſt, metientur.

Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eoſdem & ipſũ A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipſum D. Dico E ipſum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipſum A, atq; E eſt primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem nõ metitur, primus eſt. ergo E A numeri inter ſe primi ſunt. et quoniam E metitur ipſum D, metiatur per vnitates, quę



31. ſeptimi. 9. com. not.

ſunt

ſunt in F. ergo E multiplicans F ipsũ D fecit. Rurſus quoniam A metitur ipſum D per eas, quæ ſunt in C vnitates, A multiplicans C ipſum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur ſit ex A C ei, qui ſit ex E F eſt æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. ſuntq; A E primi: primi aũt, & minimi; minimi vero eos, qui eandẽ habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. metitur igitur E ipſum C. metiatur per G. ergo E ipſum G multiplicans fecit C. ſed ex antecedente & A multiplicans B ipſum C fecit. qui igitur ſit ex A B æqualis eſt ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & ſunt A E primi. ſed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. quare & E ipſum B metitur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipſum H fecit B. ſed & A ſe ipſum multiplicans fecit B. ergo qui ſit ex H E eſt æqualis ei, qui ſit ab ipſo A. eſt igitur vt E ad A, ita A ad H. ſuntq; A E primi: ſed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiũtur eos, qui eandem, quam ipſi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo E metitur ipſum A. ſed & non metitur. quod fieri non poteſt. non igitur A E ſunt inter ſe primi. ergo compoſiti erunt. compoſitos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipſos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur: primum autem non metitur alius numerus prẽter ſe ipſum. metitur igitur E ipſos A E: ideoq; E ipſum A metitur. metitur autem & ipſum D. ergo E ipſos A D metietur. ſimiliter demonſtrabimus quicumque primorum numerorum metiuntur ipſum D, eoſdem & ipſum A metiri. quod demonſtrare oportebat.

19. com. not. A
19. ſeptimi. 23. ſeptimi. 21. ſeptimi. B
19. ſeptimi. 23. ſeptimi. 21. ſeptimi.
20. ſeptimi.
14. diff.

F. C. COMMENTARIVS.

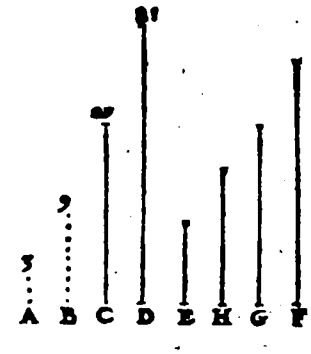
Rurſus quoniam A metitur ipſum D per eas, quæ ſunt in C vnitates] *hoc enim in antecedente demonſtratum fuit.* A

Sed ex antecedente & A multiplicans B ipſum C fecit] *quoniam enim, vt in antecedente demonſtratum eſt, A metitur ipſum C per B; & A multiplicans B fecit C.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero poſt vnitatem primus ſit: maximum nullus alius metietur prẽter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcũque numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D, & qui poſt vnitatem, videlicet A ſit primus. Dico maximum D nullum alium numerum metiri, præter ipſos A B C. ſi enim fieri poteſt, metiatur E ipſum D, & non ſit E idem, qui aliquis ipſorum A B C; manifeſtum eſt E primum non eſſe. Si enim primus ſit, & metiatur D, ipſum quoque A metietur primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt. non igitur E primus eſt. ergo compoſitus: omnem autem compoſitum numerum primus aliquis numerus metitur. Di



Ex antecedente.
13. diff.

co nullum alium primum metiri ipſum E prætereſquam A. ſi enim alius metitur E, & E metitur D, & ille ipſum D metietur. quare & ipſum A primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt. ergo A ipſum E metitur. & quoniam E metitur D, metiatur ipſum per F. non erit F idem, qui aliquis ipſorum A B C. ſi enim eſt idem, metiturq; ipſum D per E; & vnus ipſorũ A B C ipſum D per E metietur, ſed vnus ipſo

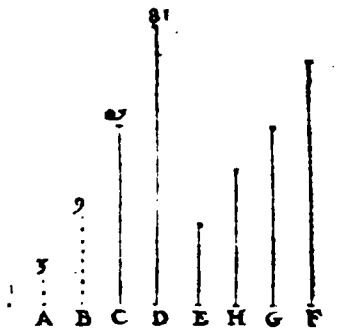
12. com. not. Ex antecedente. 11 huius.

rum A B C metitur D per aliquem ipsorũ A B C. quare & E idem erit, qui vnus ipsorũ A B C. quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum A B C. similiter ostendemus A metiri ipsum F, rursus ostendentes non esse F primum numerũ. si enim est primus, & metitur ipsum D, ipsum quoque A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo cõpositus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipsum F præterquàm A. si enim alius metitur F, & F metitur D; & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex A C est æqualis ei, qui ex EF. ergo vt A ad E, ita est F ad C. sed A metitur E. quare & F ipsum C metietur. metiatur per G. similiter demonstrabimus G non esse eundem, qui vnus ipsorum A B, & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicãs F ipsum G fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex A B ei, qui ex F G est æqualis. vt igitur A ad F, ita est G ad B. metitur autem A ipsum F. ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundẽ, qui A. & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex A. ergo ut H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipsum G. quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A B C. quod demonstrandum fuerat.

Ex antecedenti.

19. septimi.

20. septimi.

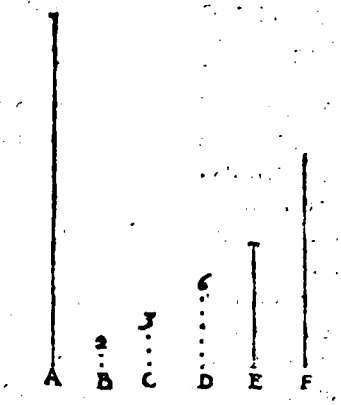


THEOREMA. XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B C D metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipsum A, præter ipsos B C D. si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum B C D. & quoniã E metitur A, ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B C D. si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; & vnum eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo B C D metientur vnum ipsorum E F. ipsum quidem E non metientur; etenim E primus est; & nõ idem qui aliquis ipsorum B C D. ergo ipsum F metientur, qui est minor, quàm A. quod fieri nõ potest. ponitur enim A minimus eorum, quos B C D metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B C D. quod demonstrare oportebat.

32. septimi.



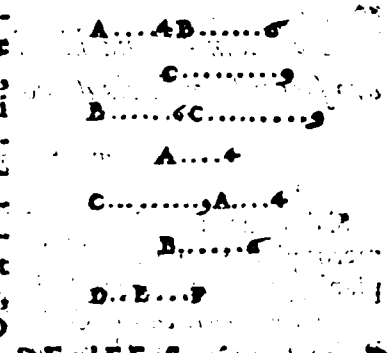
THEOREMA XV. PROPOSITIO. XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ

qui

qui eandem, quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet cõ positi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum, qui eãdem, quam ipsi proportionem habent A B C. Dico duos quoslibet compositos ad reliquũ primos esse, videlicet A B ad C, & B C ad A, & A C ad B. sumantur enim duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant D E E F. manifestum est D E se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero E F facere B; & E F se ipsum multiplicantem facere C. & quoniam D E E F minimi sunt, primi erũt inter se. si autem duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque primus erit. ergo D F ad vtrumque ipsorum D E E F primus est. Sed & D E ad E F est primus. quare D F D E ad E F primi sunt: ac propterea qui fit ex F D D E primus est ad E F. si autem duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquum primus erit. ergo qui fit ex F D D E ad eum, qui fit ex E F est primus. sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F. qui igitur ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F primus est ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B, & qui ex E F est C. ergo A B compositi ad ipsum C primi sunt. similiter ostendemus & B C ad A esse primos. Dico & A C ad B primos esse. Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit. Sed ei, qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. & rursus diuidendo qui fiunt ex D E, & E F ad eum, qui fit ex D E E F primi sunt. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B; & qui ex E F est C. ergo A C compositi ad ipsum B primi erunt. quod demonstrare oportebat.



A
2. octaui.
24. septimi.
30. septimi.
26. septimi.
27. septimi.
B
C
D
E
F

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentium.] *ex iis, quae demonstrauimus ad 35 septimi.* A

Sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F.] *Hoc in lineis demonstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non solum hoc ex illis demonstrauit, sed & quæcunque in secundo libro tradita sunt, quae nos vtpote non aliena hoc loco apponenda censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.* B

Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit.] *nam cum D F ad vtrumque ipsorum D E E F sit primus, erit D F primus ad eum, qui ex D E E F ex 16 septimi. quare ex 27 eiusdem & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F est primus.* C

Sed ei, qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F.] *hoc in lineis demonstratur in secundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.* D

Ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.] *si enim non sunt primi, compositi erunt. quare eos aliquis numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrunque & compositum ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. sed & metitur eum, qui fit ex D E E F. ergo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F non sunt primi ad eum, qui ex D E E F. atqui primi fuit. quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.* E

11. com. not.

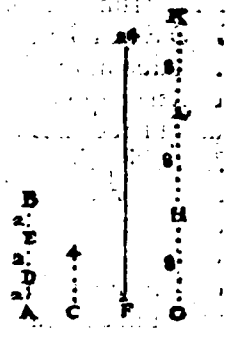
F Et rurſus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi ſunt.

Si enim non ſint primi, eodem, quo ſupra, modo oſtendemus eos, qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui fit ex DE EF non eſſe primos ad eum, qui ex DE EF, quod eſt abſurdum: ſunt enim primi, vt demonſtratum iam fuit. ergo qui fiunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi ſint neceſſe eſt.

Barlaam Monachi arithmetica demonſtratio eorum, quę Euclides libro ſecundo in lineis demonſtrauit.

THEOREMA I.

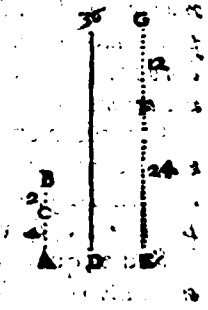
Si duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt.



Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui fiunt ex C AD, & C DE, & C EB æqualem eſſe. ſit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipſum F fecit, C 10. com. not. *metitur F per eas, quae ſunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur GH per vnitates, quae ſunt in AD: & metitur HI per vnitates, quae in DE: & IK per vnitates, quae in EB. ergo C metitur totum GK per vnitates, quae ſunt in AB. metiebatur autem & ipſum F per eas, quae ſunt in AB vnitates. vterque igitur ipſorum F GK æque multiplex eſt* 1. com. not. *numeri C. qui vero eiuſdem ſunt æque multiplices, inter ſe æquales ſunt. ergo F ipſi GK eſt æqualis: atque eſt F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compoſitus ex numeris planis, qui fiunt ex C, & ſingulis ipſorũ AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus æqualis eſt planis numeris, qui ex C, & ſingulis ipſorum AD DE EB fiunt. quare ſi duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis æqualis erit numeris, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte, inter ſe cõpoſiti æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.



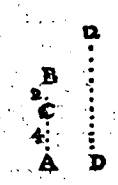
Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui fiunt ex BA AC, & AB BC inter ſe compoſitos, quadrato, qui fit ex AB, æquales eſſe. numerus enim AB ſe ipſum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem AB multiplicans faciat FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipſum EF fecit, AB metitur 10. com. not. *EF per eas, quae ſunt in AC vnitates. Rurſus quoniam CB ipſum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per vnitates, quae ſunt in CB. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in AC. ergo AB totum EG per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt metitur. rurſus quoniam AB ſe ipſum multiplicans fecit D, metitur AB ipſum quoque D per vnitates, quae in ſeipſo ſunt. ergo AB vtrumque ipſorum D, EG metitur per eas, quae in ſeipſo ſunt vnitates. quotuplex igitur eſt D ipſius AB, totuplex erit & EG ipſius AB. qui vero eiuſdem numeri ſunt æque multiplices inter ſe æquales ſunt. ergo D ipſi EG eſt æqualis. atque eſt D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compoſitus ex duobus planis, qui fiunt ex AB BC, & BA AC. quadratus igitur numerus ex AB eſt æqualis numero compoſito ex duobus planis, qui ex AB BC, & BA AC fiunt. quare ſi numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte inter ſe compoſiti æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atque illud eſt. quod oportebat demonſtrare.*

THEO-

THEOREMA III.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui fit à CB aequalem eſſe. numerus enim AB multiplicans BC ipſum D faciat. AC vero multiplicans CB faciat EF: & CB ſe ipſum multiplicans faciat FG. itaq; quoniam AB ipſum BC multiplicans fecit D, metitur EC ipſum D per vnitates, quae ſunt in AB. rurſus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quae ſunt in AC vnitates. rurſus quoniam CB ſeipſum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt: metiebatur autem & EF per vnitates, quae ſunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quae ſunt in AB vnitates: metiebatur autem & ipſum D per vnitates, quae in AB. ergo CB vtrumque D, EG aequaliter metitur: ij vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter ſe aequales ſunt. quare D eſt aequalis ipſi FG. atque eſt D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC: EG vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC eſt aequalis ei, qui ex AC CB, & quadrato, qui à CB. ſi igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & ima parte fit aequalis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. quod oportebat demonſtrare.



10. com. not.

4. com. not.

THEOREMA IIII.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis eſt quadratis, qui à partibus fiũt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem eſſe. ſit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex AC, & GH quadratus, qui ex CB: numerus autem planis, qui fit ex AC CB uterque ipſorum FG HK. quoniam igitur AC ſe ipſum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quae in ſe ipſo ſũt. rurſus quoniam BC multiplicans CA fecit FC, metitur CA ipſum FG per vnitates, quae ſunt in BC. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in ipſo ſunt. ergo AC totum EG per vnitates, quae ſunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipſum EG fecit: ideoq; EG eſt numerus planus, qui fit ex BA AC. ſimiliter oſtendemus & GK numerum planum eſſe, qui fit ex AB BC. atque eſt D numerus quadratus, qui ex AB efficitur. ſi autem numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus aequalis eſt duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipſi EK eſt aequalis. ſed EK conſtat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano. atque eſt D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB eſt aequalis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit, numero plano. Ergo ſi numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus aequalis eſt quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonſtrare oportebat.



10. com. not.

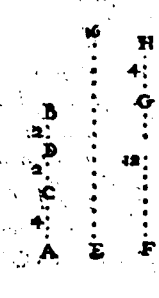
9. com. not.

Ex 2. huius.

THEOREMA V.

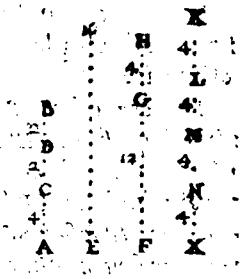
Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti æqualis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Sit par numerus AB: & bifariam in AC CB diuidatur: diuidatur & in partes inæquales AD DB. Dico quadratum ex CB numero plano, qui



fit ex

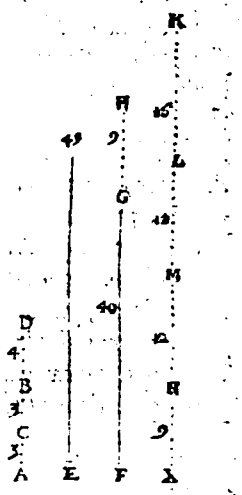
fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex C D aequalem eſſe. ſit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus ſit GH. itaq; quoniam numerus B C diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex B C, hoc eſt E aequalis quadratis ex Ex antecedente. *BD DC vnà cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. ſit igitur ex B D quidem quadratus K L, ex D C vero quadratus N X: & planus ex BD DC uterque ipſorum LM MN: totus igitur KX ipſi E eſt aequalis. et quoniam BD ſe ipſum multiplicans fecit KL, metitur BD ipſum KL per* 10. com. not. *vnitates, quae in ſe ipſo ſunt. rurſus quoniam C D ipſum D B multiplicas fecit L M; D B metitur L M per vnitates, quae ſunt in CD. metiebatur autem KL per eas, quae in ſe ipſo ſunt vnitates. ergo D B totum K M metitur per vnitates, quę ſunt in C B. aequalis autem eſt C B ipſi C A. quare D B metitur K M per vnitates, quae ſunt in C A. rurſus quoniam CD multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae ſunt in CD vnitates. metiebatur autem & KM per vnitates, quae ſunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quae ſunt in AD, metitur. ſed & DE metitur FG per vnitates, quae ſunt in AD: ponitur enim F G, qui fit ex AD DB. aequalis igitur eſt F G ipſi KN. qui enim ſunt eiuſdem aeque multiplices inter ſe aequales ſunt. eſt autem et GH aequalis NX, cum vterque quadratus ex CD ponatur. totis igitur KX toti FH eſt aequalis; eſtq; ipſi E aequalis KX. Ergo FH ipſi E aequalis erit. atque eſt FH quidem numerus planus ex AD D B vnà cum quadrato, qui fit ex D C. E vero eſt qui fit ex C B quadratus. numerus igitur planus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex DC aequalis eſt ei, qui fit ex CB quadrato. ergo ſi par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri inter ſecti aequalis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonſtrare.*



THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij eſt aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto conſtat.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros A C C B: & ipſi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CB aequalem eſſe ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus, qui fit ex AD DB 4. antecedentium. *ſit FG: & ex CB quadratus CH. & quoniam quadratus ex CD eſt aequalis quadratis ex DB BC vnà cũ eo, qui bis fit ex DB BC; ſit quadratus quidem ex BD numerus KL: planus vero numerus ex DB BC ſit vterque ipſorum LM MN: & ex BC quadratus NX. totus igitur KX eſt aequalis quadrato ex CD: eſt aũt E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipſi E eſt aequalis. & quoniam BD ſe ipſum multiplicans fecit K L, B D metitur KL* 10 com. not. *per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt. metitur autem & LM per vnitates, quę ſunt in CB. ergo DB metitur totum KM per eas, quae ſunt in CD vnitates. eſt autem CB ipſi C A aequalis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quae ſunt in AD. ſed DB metitur quoque ipſum F G per vnitates, quae ſunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipſi KN eſt aequalis. eſt autem & HG, aequalis NX, vterque enim eſt quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH eſt aequalis toti KX. ſed KX oſtenſus eſt aequalis ipſi E, ergo & FH ipſi E eſt aequalis. atque eſt FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB; E vero eſt quadratus, qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB eſt aequalis ei, qui fit ex C D quadrato. Ergo ſi par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij eſt aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto conſtat. quod oportebat demonſtrare.*



THEO-

THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato.

Numerus enim A B diuidatur in numeros AC CB. Dico quadratos, qui fiunt ex BA AC aequales esse numero plano, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius BC quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex AB, est aequalis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex EC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC est aequalis duobus quadratis, qui ex AC, & quadrato ex CE vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui semel fit ex BA AC est aequalis ei, qui semel fit ex BC CA vnà cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC aequalis erit ei, qui bis fit ex EC CA vnà cum duobus quadratis ipsius CA. communis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA aequales sunt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC aequalis est ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum quadrato reliquae partis CB. ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis aequalis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquae partis quadrato. quod oportebat demonstrare.

B 3 C 5 A — 4. antecedentium. — 3. antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico numerum planũ, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipsius AC aequalẽ esse ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipsi BC aequalis BD. & quoniam quadratus ex AD aequalis est quadratis, qui ex AB BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atque est BD aequalis BC. ergo qui fit ex AD quadratus aequalis est quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC aequales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex AC. atque est quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitur: cetenim BD ipsi EC est aequalis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis aequalis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D 2 B 2 C 6 A — Ex antecedente.

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus AB bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inæquales AD DB. Dico quadratos, qui fiunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC, CD duplos esse. Quoniam enim par numerus AB in numeros aequales diuiditur AC CB: & in numeros inaequales AD DB: qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CD aequalis est ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex AD DB vnà cùm duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC. si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupli est du-

B 2 D 5 C 5 A — 5. antecedentium.

plus,

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vnà cũ duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor eſt, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. rurſus quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum numero compoſito ex quadratis AD DB aequalis eſt ei, qui fit ex AB quadrato: erit compoſitus ex AD DB quadratis maior, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atque eſt quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compoſitus igitur ex quadratis AD DB maior eſt, quàm duplus quadrati ex AC, duplo quadrati ex DC. ergo duplus eſt quadratorum, qui ex AC CD fiunt. ſi igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli ſunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipſos interiecti. quod demonſtrare oportebat.

4. antecedentium.

B a D 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonſtratio obſcuriuſcula eſt, quare apertius hoc modo explicabitur.

Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, aequalis quadratis ex AC CD vnà cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB ſit aequalis ipſi AC, quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB. quadrati igitur ex AD DB aequales ſunt quadratis ex BC CD DB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. ſed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium ſunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD vnà cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB aequales ſunt duplis quadratorum ex BC CD, hoc eſt duplis quadratorum ex AC CD: ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonſtrare oportebat.

B a D 3 C 5 A

THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati dupli ſunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos eſſe. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB BD, erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB vnà cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB eſt aequalis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC CB; eſt enim AC ipſi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB ſũt aequales ei qui bis fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CB eſt aequalis quadrato ex CD: erit qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CB quadratis aequalis duobus quadratis, quæ ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales ſunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur ſunt quadratorũ ex AC CD. atque eſt quadratus quidẽ ex AD, qui fit ex toto cũ adiecto; quadratus uero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cũ adiecto vnà cũ eo, qui ex adiecto, duplus eſt quadrati, qui fit ex dimidio vnà cũ quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto cõſtat. quare ſi par numerus bifariã diuidatur, adijciaturq; ipſi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli ſunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonſtrare oportebat.

7. antecedentium.

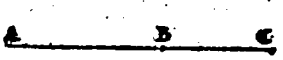
D a B 3 C 5 A

6. antecedentium.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem, quod vndecimę ſecundi libri reſpondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis ſit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri poteſt.

Si enim fieri poſſit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB. vt qui ex AB BC fit numerus

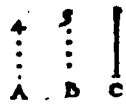


rus planus aequalis sit quadrato ex AC. qui igitur quater fit ex AB BC quadrati ex AC quadruplus est. ergo qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC quintuplus est ipsius quadrati ex AC. sed qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC numerus quadratus est; etenim aequalis est quadrato, qui à toto AB, et à parte BC tamquam ab vno efficitur ex octauo prœmissorum. est autem & qui fit AC quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad vnum. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte fit numerus planus aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit, quadrato. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit vt primus ad secũdum, ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. Dico non esse ut A ad B, ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita B ad C. & sunt AB primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B, vt antecedens antecedentem. sed & ipse se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existentes. quod est absurdum. non igitur est vt A ad B, ita B ad C. quod oportebat demonstrare.

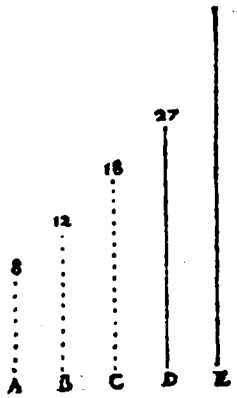


23. septimi.
21. septimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, extremi autem ipsorum A D primi sint inter se. Dico non esse vt A ad B, ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & sunt A D primi; sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipsum C; & ob id A quoque ipsum C metitur. & quoniam est vt B ad C, ita C ad D; metitur autem B ipsum C, & C ipsum D metietur. Sed A metitur C. quare & ipsum D. metitur autem & se ipsum. Ergo A ipsos A D primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. non igitur erit vt A ad B, ita D ad alium vllum. quod demonstrare oportebat.

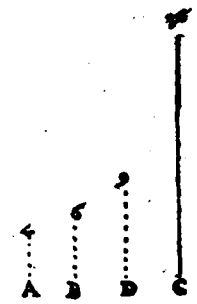


23. septimi.
21. septimi.
2. huius. nost.

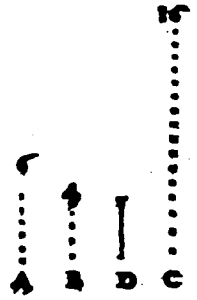
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat conſiderare an poſſit tertius ipſis proportionalis inueniri. Itaque AB vel primi inter ſe ſunt, vel non primi. ſi quidem primi, iam oſtenſum eſt, fieri non poſſe, vt tertius ipſis proportionalis inueniatur. Sed non ſint A B inter ſe primi, & B ſe ipſum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipſum C fecit. ſed & B ſe ipſum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D eſt æqualis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipſis A B tertius proportionalis D inuentus eſt.



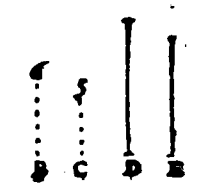
Sed non metiatur A ipſum C. Dico fieri non poſſe, vt ipſis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri poteſt, inuentus ſit D. ergo qui fit ex A D aequalis eſt ei, qui fit ex B. ſed qui fit ex B eſt C. qui igitur fit ex A D ipſi C eſt æqualis. ergo A ipſum D multiplicans fecit C. & ob id A ipſum C per D metitur. ſed & non metiri poſitum eſt, quod eſt abſurdum. non igitur fieri poteſt, vt ipſis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipſum C non metitur. quod demonſtrare oportebat.



PROBLEMA II. PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis conſiderare an quartus ipſis proportionalis inueniri poſſit.

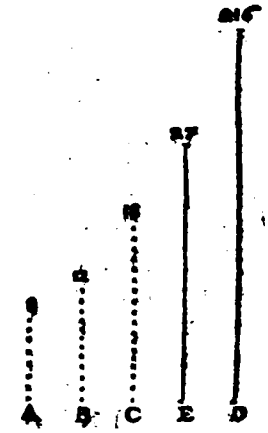
Sint dati tres numeri A B C, & oporteat conſiderare an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri. ergo ipſi A B C vel deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi primi inter ſe ſunt, vel non deinceps proportionales, & eorũ extremi ſunt primi inter ſe, vel proportionales quidẽ deinceps, non autem extremi ipſorum inter ſe primi, uel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter ſe ſunt. ſi quidem igitur A B C deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter ſe, iam demonſtratum eſt fieri non poſſe, vt quartus ipſis proportionalis inueniatur. ſi vero non ſunt deinceps proportionales, & extremi ipſorum ſunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non poſſe. ſi enim inueniri poteſt ſit D. vt igitur A ad B, ita C ad D: & vt B ad C, ita ſit D ad E. ergo ex æquali vt A ad C, ita C ad E: ſed ſunt A C primi; primi autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo A ipſum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & ſe ipſum. quare A ipſos A C primos inter ſe exiſtentes metitur. quod fieri non poteſt. ipſis igitur A B C non poteſt quartus proportionalis inueniri.



17. huius.

25. septimi.

21. ſeptimi.



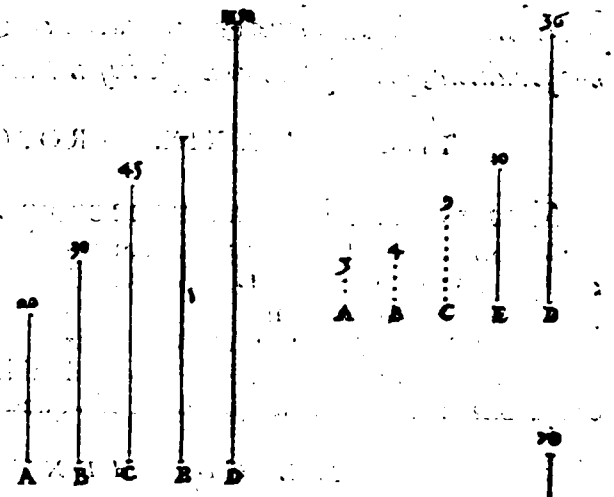
Rurſus A B C proportionales quidem ſint deinceps, nõ autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri poſſe. multiplicans enim B ipſum C faciat D. itaque vel A metitur ipſum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D. ſed & B multiplicãs C ipſum D fecit. qui igitur fit eſt A E eſt æqualis ei, qui ex B C; propterea; vt A. ad B, ita eſt C ad E. ipſis igitur A B C quartus proportionalis E inuentus eſt.

9. com. not.

19. ſeptimi.

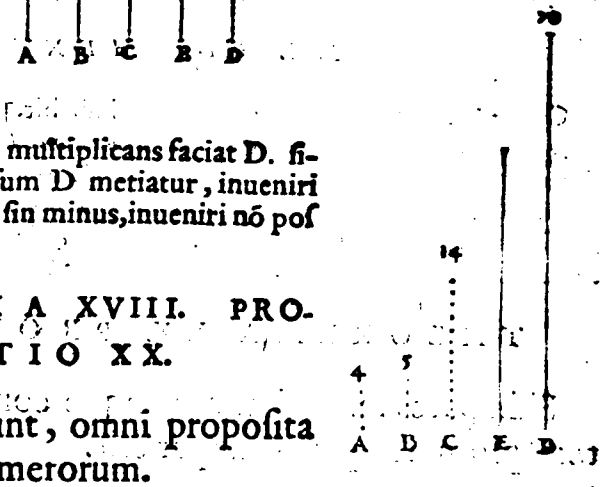
Sed

Sed non metiatur A ipſum D. Dico fieri non poſſe, vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis. ſi enim inueniri poteſt, inueniatur, ſitq; E. ergo qui fit ex A E æqualis ei, qui ex BC. ſed qui fit ex BC eſt D. quare qui fit ex A E ipſi D eſt æqualis: & ob id A ipſum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipſum D per E. quare A ipſum D metitur. ſed & nō metitur. quod eſt abſurdum. non igitur fieri poteſt, vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipſum D non metitur.



9. ſeptimi.

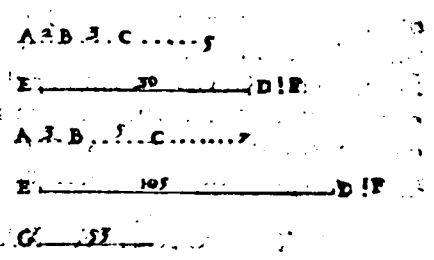
Sed non ſint neque deinceps proportionales A B C, neque A C inter ſe primi, & B ipſum C multiplicans faciat D. ſimiliter demonſtrabimus, ſi A ipſum D metiatur, inueniri poſſe quartum proportionalem. ſin minus, inueniri nō poſſe. quod demonſtrandum fuerat.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

Sint propoſiti primi numeri A B C. Dico ipſis A B C plures eſſe primos numeros. ſumatur enim minimus, quem ipſi A B C metiantur; ſitq; DE: & ipſi DE apponatur vnitas DF. ergo E F vel primus eſt, vel non. ſit primum primus. Inuenti igitur ſunt primi numeri A B C E F plures, quàm ipſi A B C. ſed non ſit E F primus. ergo eum primus aliquis metitur. metiatur G. Dico G nulli ipſorum A B C eundem eſſe. ſi enim G idem ſit, qui vnus ipſorū A B C; ipſi autem A B C metiatur D E, & G ipſum D E metietur. metitur autem & E F. & reliquam igitur D F vnitatem metietur numerus exiſtens. quod eſt abſurdum. ergo G non eſt idem, qui unus ipſorum A B C, & ponitur primus. Inuenti igitur ſunt primi numeri A B C G plures propoſita multitudine primorum numerorum A B C. quod oportebat demonſtrare.



11. com. not.

SCHOLIVM.

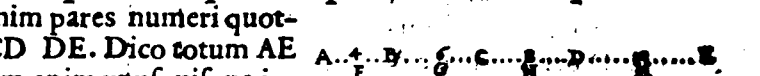
In hoc theoremate vult oſtendere infinitos eſſe numeros primos; ſi enim omni propoſita numerorum multitudine primi plures ſint, infinitos eſſe primos manifeſtum eſt. ſi autem hoc, videtur obſiſtere philoſophorum dogmati, qui aſſerunt prima determinata eſſe, & numero minora

quid igitur dicemus? primos numeros non esse principium numerorum, sed vnitatem ipsam, quæ & contracta est & sola. quare & in numeris hoc seruatur, principium non esse infinitum, sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE par est, habet partem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.



* 6. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

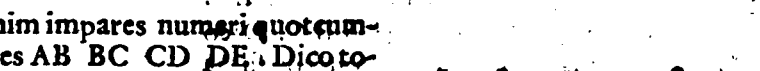
* Quare & totus AE partem dimidiam habebit.] *Quoniam enim vnusquisque eorum habet dimidium, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimidiam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. sed AF dimidia est ipsius AE. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.*

12. septimi.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorum par. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

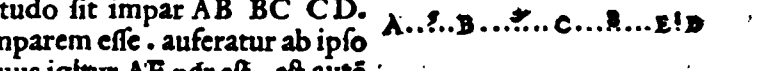


Ex antecedente.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componãtur, & multitudo ipsorum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcumque, quorum multitudo sit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquus igitur AE par est. est autẽ & AC par. ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.



21. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

7. diffi. Atque est DE vnitas. impar igitur est AD] *impar enim numerus est, qui à pari vnitate differt.*

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & B C. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. quod oportebat demonstrare.

A...6...C..4..B *

F. C. COMMENTARIVS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam] *Sit ipsius AB dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE. & dividendo AC ad CB, vt DE ad EB. rursusq; permutando AC ad DE, vt CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & DE ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC partē habeat dimidiam bifariā diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandū proponebatur.*

A...5..D..C..2..E..B *

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD est par. atque est CD vnitas. ergo CA impar est. quod demonstrare oportebat.

A...7....C..D..4..B

Ex antecedens.

THEOREMA. XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & CD est par. quare & reliquus AC par est. quod oportebat demonstrare.

A..4..C...6...D..B

24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est D A vnitas. ergo C A impar est. quod oportebat demonstrare.

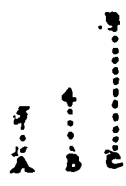
A..D..4..C..4..B

24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit. ergo C est par. quod demonstrare oportebat.



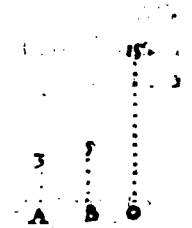
21. huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A vnitates. atque est vterque ipsorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, & ipse impar erit. ergo C est impar. quod demonstrare oportebat.

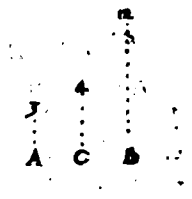


23. huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXX

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium ejus metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsũ per C. Dico C non esse imparem. nã si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar; ac propterea impar est. quod est absurdum. par enim ponitur. non igitur C est impar. ergo par. quare A ipsum B pariter metitur. & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonstrare.



9. com. not.

SCHOLIVM.

Et ob id eius quoque dimidium metitur] *quoniam enim A ipsum B metitur per C; & C ipsum B per A metietur. habet autem vterque ipsorum CB partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium dimidium ipsius B per A metietur; ideoq; A multiplicans ipsius C dimidium, dimidium ipsius B fecit. quare A ipsius B dimidium per dimidium ipsius C metitur.*

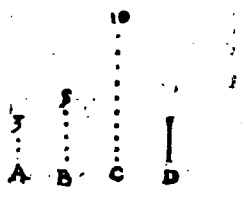
9. com. not.

10. com. not.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerũ B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primũ esse. si enim non sint AC primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; D: & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsum A. quare D ipsos AB metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo AC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente.

SCHOLIVM.

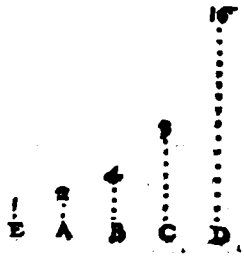
Et est A impar. impar igitur est & D] *quoniam enim A impar est, metitur autem ipsum numerus D, vt positum est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares eſſe tantum. at vero vnumquem ipſorum BCD pariter parem eſſe, manifeſto conſtat. à binario namque duplatus eſt. Dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales ſunt, & poſt vnitatem A primus eſt; maximum ipſorum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipſos ABC. atque eſt vnuſquiſque ipſorum ABC par. ergo D pariter par eſt tãtum. ſimiliter demonſtrabimus & vnumquemque ipſorũ ABC pariter parẽ eſſe tãtũ. quod demõſtrare oportebat.



13. huius.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar eſt tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem eſſe tantum. at vero pariter imparem eſſe perſpicuum eſt. dimidius enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. Dico & tantum. nam ſi A ſit etiam pariter par, dimidius ipſius par erit; atque eum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipſius par numerus metitur, impar exiſtens. quod eſt abſurdum. quare A pariter impar eſt tantum.

A 12

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si par numerus neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par eſt, & pariter impar.

Numerus enim A neque ſit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem eſſe. at vero A pariter eſſe parem, manifeſtum eſt; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem eſſe. nam ſi A bifariã ſecemus, & dimidium ipſius bifariam, & hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur. ſi enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar eſt. oſtenſum autem eſt & pariter eſſe parem. eſt igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonſtrare oportebat.

A 24

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à ſecundo, & ultimo æquales primo; erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

Sint

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipſo BC;& ab EF æqualis ipſi A, videlicet GC FH. Dico vt BG ad A, ita eſſe EH ad A BC D; ponatur enim ipſi quidem B C æqualis F K; ipſi vero D æqualis FL. Quoniam igitur FK eſt æqualis ipſi BC, quorum FH eſt æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB æqualis. & quoniam eſt vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A; æqualis autem eſt D ipſi FL, & BC ipſi FK, & A ipſi FH: erit vt EF ad FL ita LF ad FK, & KF ad FH: quare diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. eſt igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atque eſt K H quidem æqualis BG, FH vero ipſi A, & LF KF HF æquales ipſis D BC A. ergo vt BG ad A, ita eſt EH ad D BC A. eſt igitur vt ſecundi exceſſus ad primum, ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes. quod oportebat demonſtrare.

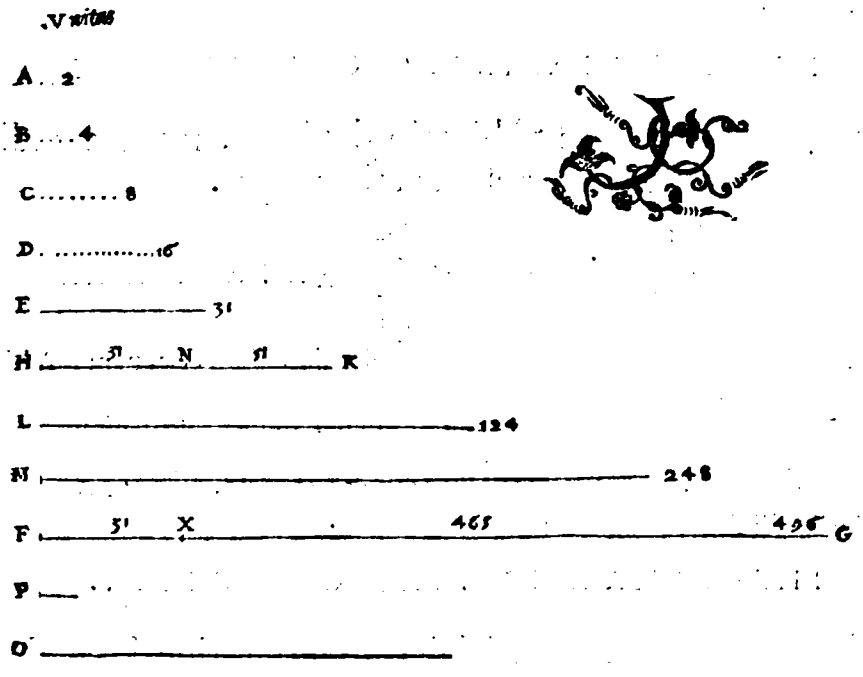
A..2
B.2. G.2.C
D.....8
E....8....L..4..K.2.H.2.F

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare diuidendo vt EL ad LF] *ex ijs, quae nos ad 14 ſeptimi demonſtrauimus.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponãtur in dupla analogia, quoad totus compoſitus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.



Ab vnitate enim exponantur quotcumque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus compoſitus primus fiat A B C D: & toti æqualis ſit E: & E ipſum D multiplicans faciat FG. Dico FG perfectum eſſe. quot enim ſunt A B, CD mul-

C D multitudine, tot ſumantur ab ipſo E in dupla analogia, qui ſint E HK L M. ergo ex æquali vt A ad D, ita erit E ad M: ac propterea qui fit ex E D eſt æqualis ei, qui ex A M. eſt autem qui ex E D ipſe FG. quare FG eſt, qui fit ex A M. multiplicãs igitur A ipſum M fecit FG. ergo M metitur F G per vnitates, quæ ſunt in A. atque eſt A binarius. duplus igitur eſt FG ipſius M. ſunt autem & M L HK E deinceps dupli inter ſe. ergo E HK L M FG deinceps proportionales ſunt in dupla analogia. auferatur à ſecundo HK, & ab vltimo FG ipſi primo E æqualis vterque HN, FX. eſt igitur vt ſecundi numeri exceſſus ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes. quare vt NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque eſt NK ipſi E æqualis. ergo & XG eſt æqualis ipſis M L HK E. eſt aũt & FX æqualis ipſi E; atque E ipſis A B C D, & vnitati æqualis. tótus igitur FG æqualis eſt & ipſis E HK L M, & ipſis A B C D, & vnitati; omnesq; ipſum FG metiuntur. Dico FG nullum alium metiri præter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatem. ſi enim fieri poteſt, metiatur aliquis numerus ipſũ FG, qui ſit O: ſitq; O nulli ipſorũ A B C D E HK L M idẽ. & quoties O ipſum FG metitur, tot vnitates ſint in P. ergo P ipſum O multiplicans fecit FG. ſed & E multiplicans D ipſum FG fecit. eſt igitur vt E ad P, ita O ad D. & quoniam ab vnitate deinceps proportionales ſunt A B C D, et poſt vnitatem A primus eſt, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipſos A B C: & ponitur O nulli ipſorum A B C idem. non igitur O ipſum D metietur. vt autem O ad D, ita E ad P. ergo neque E metietur ipſum P. atque eſt E primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt. quare E P primi inter ſe ſunt. ſed primi & minimi; minimi vero eos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentẽ. atque eſt vt E ad P, ita O ad D. ergo E æqualiter metitur ipſum O, atque P ipſum D. ſed D nullus alius metitur præter ipſos A B C. quare P idẽ eſt, qui vnus ipſorum A B C. ſit idẽ, qui B. & quot ſunt B C D multitudine, tot ab ipſo E ſumantur E HK L: ſuntq; E HK L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur vt B ad D, ita eſt E ad L. ergo qui fit ex B L eſt æqualis ei, qui ex D E. ſed qui fit ex D E eſt æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare vt P ad B, ita eſt L ad O. eſtq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O. quod fieri non poteſt. etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur. non igitur ipſum FG metitur aliquis numerus præter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatẽ. atque oſtenſus eſt FG æqualis ipſis A B C D E HK L M, et vnitati. perfectus autem numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat demonſtrare.

19. ſeptimi.
10. com. not.
9. cõis. not.
19. ſeptimi.
13. huius.
31. ſeptimi.
25. ſeptimi.
21. ſeptimi.
19. ſeptimi.
19. ſeptimi.

NONI LIBRI FINIS.

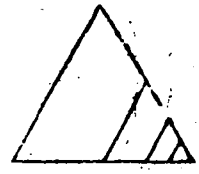
SCHOLIVM.

Propoſitum eſt Euclidi in decimo libro tractare de commenſurabilibus & incommenſurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem ſunt incommenſurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura ſunt; irrationalia vero & rationalia poſitione. ſi enim quadrati diametrum natura incommenſurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, ſed ex illius rationibus, quæ in ipſa ſunt. quare neque irrationale eſt eorum, quæ natura ſunt incommenſurabilia, ſed incommenſurabile. etenim natura ipſa hoc facit iuxta omnem menſuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus tractat, eorum naturã exquirens: poſtea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obſiſtentes ipſa reprehendunt: ſed de maxime ſimplicibus ſpeciebus, quibus compoſitis infinitæ irrationales gignũtur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad ſcientiam autem attinet, cauſas, principia, & ſimplicia conſiderare, non ſingularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium ſimplices ſpecies tredecim, quæ tribus modis inuentę ſunt, his enim aliæ ſimplices non inuenientur. Horum modorum vnus eſt iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam ſpeciem eorũ. alius iuxta compoſitionẽ, per quẽ ſex ſpecies; tertius iuxta diuiſionẽ, per quem reliquas ſex inuenit. Venerũt autem initio ad inquiſitionem ſymmetriæ, hoc eſt commenſurabilitatis Pythagorei primi, ipſam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas, ſit omnium numerorum communis menſura, & in magnitudinibus communis menſura inueniri non poſſit. Huius cauſſa eſt, quòd omnis numerus, iuxta quaſlibet ſectiones diuiſus relinquit particulam aliquam minimã, & quę ſectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitũ diuiſa non relinquit particulam, quæ propterea quòd minima ſit, ſecari non poſſit. ſed & illa in infinitum ſecta infinitas efficit particulas, quarũ ſingulę in infinitum ſecabuntur. & ſimpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps eſt principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini eſt particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps eſt infiniti. Itaque quoniam oportet menſuras minores eſſe ijs, quæ menſurantur; menſuratur autem omnis numerus, neceſſe eſt omnium minimam eſſe menſuram. quare & magnitudinum, ſi omnes menſura communi menſurantur, neceſſe eſt eam minimam eſſe. Sed in numeris quidem eſt communis menſura, terminatur enim, quemadmodum dictum eſt: in magnitudinibus vero

non

non item. non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagorei, vt fieri potuit, in magnitudinibus mensuram inuenerunt. omnes enim quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellarunt, eas uero, quas non metitur eadē mensura, incōmensurabiles. & harum rursus, quascumque alia quæpiam cōmunis mensura metitur inter se cōmensurabiles; quascumque vero non metitur illis incōmensurabiles. & ita sumptis mensuris, omnes possunt esse commensurabiles: rationales aūt omnes, & omnes irrationales esse possunt, vt ad aliquid; propterea quod commensurabile quidem & incommensurabile natura illis inest: rationale autem, & irrationale positione. Inueniuntur autē commensurabiles & incōmensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ, superficies, & solida, vt Theon demonstrauit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse, hoc theoremate ostenderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant: & vni portioni æqualem abscindentes in altero latere, per pūctum diuisionis ad basis partes parallelam ducunt: & rursus æquilaterum constitutum est triangulum, cuius basim eodem modo secantes similiter faciunt, & nūquam desinunt ad trianguli verticē. si enim desinerent, sequeretur æquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia esse, quod est absurdum.



Quod autem horum vtilis, nec superuacanea sit cognitio, vel ex veteri pythagoreorū sermone colligi potest. fabulantur enim eū, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto proferre est ausus, naufragio periisse. idq; ea factum de caussa, quòd omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt præterea, si quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore statim, vt in generationis, hoc est profundi locum deferatur, perpetuisq; illic obruatur fluctibus, tanta veneratione hi viri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER DECIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.



COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectę lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffinivit, quòd in prima diffinitione magnitudinum commensurabilium comprehendantur; sunt enim rectę lineę longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IIII.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumque rectę lineæ propositę rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Et

VI.

Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea propoſita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineę, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, quę ipſis æqualia quadrata deſcribunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quędam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hę.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Qualibet magnitudo multiplicata poteſt omnem propoſitam magnitudinem eiuſdem generis ſuperare.*

2 *Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quã illa ipſa metitur.*

3 *Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

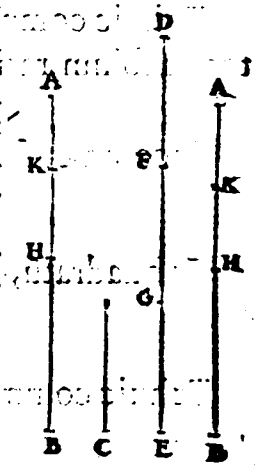
4 *Quęcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quę ex ipſis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt rurſus auferatur maius, quam dimidium; & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſita minor erit.

Sint

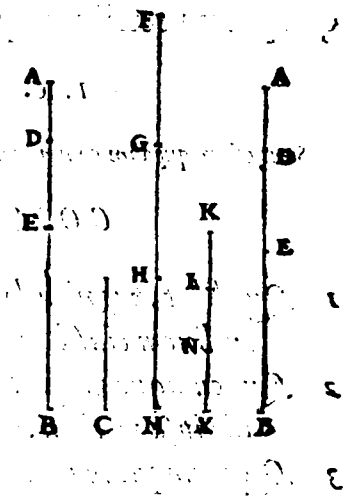
Sint duæ magnitudines inæquales A B C, quarum maior A B. Dico ſi ab ipſa A B auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. 1.com. not.



enim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine A B. multiplicetur, & ſit D E ipſius quidem C multiplex, maior autem, quàm A B, diuidaturq; D E in partes ipſi C æquales D F F G G E. & ab ipſa A B auferatur maius, quàm dimidium B H; ab ipſa vero A H rurſus maius, quàm dimidium auferatur H K, atque hoc ſemper fiat, quoad diuiſiones, quæ ſunt in A B, multitudine æquales fiant diuiſionibus, quę in D E: ſint igitur diuiſiones A K K H H B diuiſionibus D F F G G E multitudine æquales. & quoniam maior eſt D E, quàm A B, & ablatum eſt ab ipſa quidem D E minus, quàm dimidium E C; ab ipſa vero A B maius, quàm dimidium B H; erit reliquum G D reliquo H A maius. rurſus quoniam maior eſt G D, quàm H A, & ablatum eſt ab ipſa quidem G D dimidium G F; ab ipſa vero H A maius, quàm dimidium H K; reliquum F D reliquo A K maius erit. eſtq; F D æqualis ipſi C. ergo C quã A K eſt maior. minor igitur eſt A K, quàm C. Ergo ex magnitudine A B relicta eſt magnitudo A K expoſita minori magnitudine C minor. quod demonſtrare oportebat.

* ſimiliter autem demonſtrabitur etiam ſi dimidia ablata fuerint.

ALITER. Exponãtur duæ magnitudines inęquales A B C, ſitq; C minor. & quoniam minor eſt C multiplicata erit aliquando magnitudine A B maior. fiat vt F M, diuidaturq; in partes ipſi C ęquales M H H G G F: & ab ipſa A B auferatur maius, quàm dimidium B E, & ab E A maius, quàm dimidium E D: atque hoc ſemper fiat, quoad diuiſiones, quę ſunt in F M, æquales fiant diuiſionibus, quę in A B. fiant igitur vt B E E D D A. & ipſi D A vnaquæque ipſarum K L, L N N X ſit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuiſiones K X ęquales ſint diuiſionibus ipſius F M. & quoniam B E maior eſt, quàm dimidium ipſius A B, erit B E maior, quàm E A. multo igitur maior eſt B E, quàm D A. ſed ipſi D A ęqualis eſt X N. ergo B E maior eſt, quàm X N. rurſus quoniam E D maior eſt quàm dimidium E A, erit E D maior, quàm D A. ſed ipſi D A eſt æqualis N L. quare E D, quàm N L eſt maior. tota igitur D B maior eſt, quàm X L. ipſi vero D A æqualis eſt L K.



quare tota A B, quàm tota X K maior erit. ſed & M F maior eſt, quam B A. multo igitur M F, quàm X K eſt maior, & quoniam X N N L L K inter ſe æquales ſunt; ſunt autem & M H H G G F inter ſe æquales: atque eſt multitudo earum, quæ ſunt in M F æqualis multitudini ipſarum, quæ in X K. erit vt K L ad F G, ita K X ad F M. maior autem eſt F M, quàm X K. ergo & G F quàm L K eſt maior. atque eſt F G ipſi C æqualis; & K L ęqualis ipſi A D. ergo C quàm A D maior erit. quod oportebat demonſtrare.

11.quinti. 14.quinti.

SCHOLIVM.

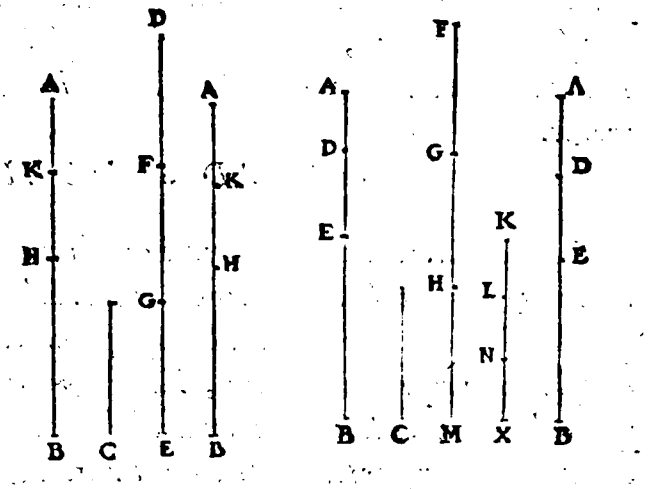
In magnitudinibus aſymetriam ineſſe.

Ex hoc theoremate perſpicuum fit in magnitudinibus aſymetriam, hoc eſt incommenſurabilitatem ineſſe. ſi enim expoſita magnitudine minorem aſſumere licet, & rurſus hac minorem, & ſemper minorem, magnitu-

magnitudines in infinitum ſecantur; & non in minimam menſuram determinatam, vt in numeris eſt vnitas. ſi igitur non eſt determinata magnitudo minima, erunt quędam magnitudines incommenſurabiles, quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata ſit, non metietur.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem demonſtrabitur, etiam ſi dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipſa AB dimidium BH: & ab ipſa AH dimidium HK: idq; ſemper fiat. quo ad diuiſiones AB æquales ſint diuiſionibus ipſius DE: & quoniam DE maior eſt quàm AE, & ab ipſa quidem DE ablatum eſt minus quàm dimidium: ab ipſa vero AB ablatum eſt dimidium; erit reliquum GD maius reliquo HA. rurſus quoniam GD maior eſt quàm HA: & ab ipſa GD ablatum eſt dimidium GF; ab ipſa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit, quae deinceps ſunt ſimiliter demonſtrabuntur.*

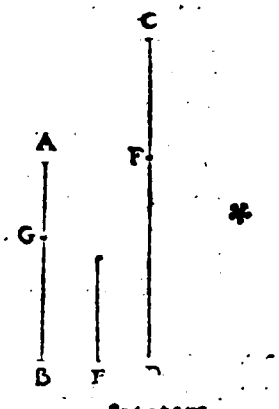


Sed in alia demonſtratione. auferatur ab ipſa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED: atque hoc fiat, quoad diuiſiones, quae ſunt in FM aequales ſint diuiſionibus, quae in AB: ſint autem BE ED DA. & ipſi DA aequalis ſit vnaquęque ipſarum KL LN NX. & quoniam BE eſt aequalis ipſi EA, & EA maior quàm AD, erit BE quàm DA maior. ſed ipſi DA eſt æqualis XN. ergo BE maior eſt quàm XN. rurſus quoniam ED DA ſunt aequales ipſis NL LK, tota AB quæ tota XK maior erit. reliqua vero ſimiliter demonſtrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inęqualibus expoſitis detracta ſem per minore de maiore, reliqua minime præcedentem me tiatur magnitudines incommenſurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inęqualibus expoſitis AB C D, quarum minor ſit AB, & detracta ſemper minore de maiore, reliqua minime metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B CD incommenſurabiles eſſe. ſi enim commenſurabiles ſint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, ſi fieri poteſt, ſitq; E: & AB quidem metiens DF relinquat ſe ipſa minorem CF: C F vero metiens BG relinquat ſe ipſa minorem AG; & hoc ſemper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ ſit minor ipſa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipſa E minor. Quoniã igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipſam DF metitur. ſed & metitur totã CD. ergo & reliquam CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipſam BG metitur. metitur autem



& totam

& totam AB.& reliquam igitur AG metietur,maior minorem,quod fieri non pōt. non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommenſurabiles erunt AB CD magnitudines.Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detracta ſemper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur,incommenſurabiles magnitudines erunt.quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

Magnitudines quaſdam longitudine eſſe incommenſurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commenſurabiles eſſe perſpicue apparet. magnitudinum autem commenſurabilium maximam communem menſuram inuenire, non cuius vis eſt, ſed hominis eruditi: cuius quidem maximæ communis menſurę inuentionem in ſequenti theoremate tradit.

ALIVD SCHOLIVM.

Cum in antecedenti theoremate cauſſam explicauerit incommenſurabilitatis, in hoc ſignum incommenſurabilium magnitudinum affert, quando ſcilicet incommenſurabiles ſunt. in ſextodecimo autem theoremate ipſarum proprium exponit, ita vt & cauſſa, & ſignum, & proprium habeatur. At in commenſurabilibus magnitudinibus cauſſam velut manifeſtam prætermiſit; exponit autem & ſignum, & proprium.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hoc ſemper fiat,quoad relinquatur quædā magnitudo,quæ ſit minor ipſa E.] *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit ſe ipſa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit ſe ipſa minorem AG:erit AG minor,quàm BG.ergo ex AB ablatum eſt maius, quàm dimidium ipſius,videlicet BG. & ita ſemper fiet. quòd cum ex AB ſemper auferatur maius,quàm dimidium,relinquetur tandem aliqua magnitudo,quae ipſa E minor erit.*

Ex antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. III.

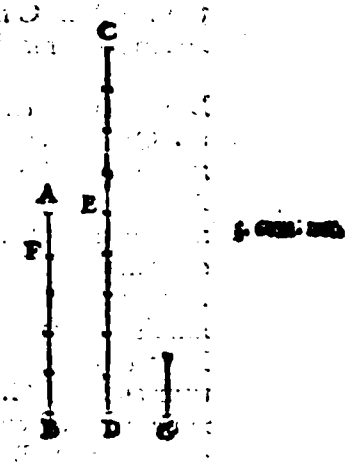
Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis,maximam earum communem menſuram inuenire.

Sint datæ duæ magnitudines commenſurabiles AB CD, quarum minor AB.oportet ipſarum AB CD maximam communem menſuram inuenire.vel igitur AB metitur CD,vel non metitur.& ſi quidem AB metitur CD,metitur autem & ſe ipſam; erit AB ipſarum AB CD communis menſura.& perſpicuū eſt maximam eſſe;magnitudo enim maior magnitudine AB ipſam AB non metietur.ſi vero AB non metitur CD;detracta ſemper minore de maiore, relinquetur tandē quædam magnitudo,quę præcedentem metietur; propterea quòd AB CD non ſint incommenſurabiles. & AB quidem metiens ED relinquat ſe ipſa minorem EC: EC vero metiens FB relinquat ſe ipſa minorem AF;& AF ipſam CE metiatur. Qm̄ igitur AF metitur CE;ſed CE metitur FB:& AF ipſam FB metitur.metitur autem & ſe ipſam.& totam igitur AB metietur.ſed AB metitur DE.ergo AF ipſam DE metitur. metitur autem



2. com. not.
3. com. not.

tem & CE. & totã igitur CD metietur. ergo AF ipſas AB CD metitur; ac propterea ipſarum eſt communis menſura. Dico & maximam eſſe. niſi enim ita ſit, erit aliqua magnitudo maior ipſa A F, quę ipſas A B CD metietur. Itaque metiatur, & ſit G. & quoniam G metitur AB, A B vero metitur E D; & G ipſam E D metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam C E metietur. ſed C E metitur F B. quare G ipſam F B metitur. metitur autem & totam A B. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non poteſt. non igitur magnitudo quædam maior ipſa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipſarum AB CD maxima erit communis menſura. Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis AB CD maxima ipſarum communis menſura inuenta eſt AF. quod facere oportebat.



5. com. not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri. 4

SCHOLIVM.

Tamquam manifeſtum ſit, eſſe magnitudines commenſurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius oſtendit, quemadmodum in ijs, quæ in commenſurabiles ſunt. conſtat enim magnitudines omnes alicuius multiplices, ſi comparentur cum ea, cuius ſunt multiplices, commenſurabiles eſſe.

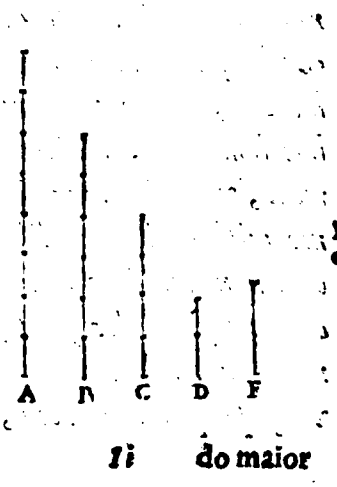
F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri] *ſequitur illud ex vltima parte demonſtrationis, vt ad ſecundam propoſitionem ſeptimi libri in numeris explicauimus.* 4

PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram inuenire.

Sint datæ tres magnitudines commenſurabiles A B C. oportet ipſarum A B C maximam communẽ menſuram inuenire. ſumatur enim duarum A B maxima cõis menſura, quę ſit D. itaque D ipſam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & qm̃ D ipſam C metitur, metitur autem & AB; & ipſas A B C metietur. Quare D ipſarum A B C communis eſt menſura: & manifeſtum eſt maximam eſſe. magnitudo enim maior magnitudine D ipſas A B C non metietur. nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitu-



Ex antecedent.

do maior ipsa D, quæ sit E. Quoniã igitur E magnitudines A B C metitur, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communẽ mensuram D, maior minorẽ, quod fieri nõ potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primũ C D commensurabiles esse. Quoniã enim commensurabiles sunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet & ipsas A B metitur. ergo & ipsarum A B maximã cõmunem mensurã D. metitur autem & ipsam C. quare dicta magnitudo ipsas C D metitur. ideoq; C D nõ mensurabiles sunt. sumatur ipsarum maxima cõmunis mẽsura; & sit E. Quoniã igitur E metitur D, D vero metitur A. B; & E ipsas A B metietur. metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C communis est mensura. Dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communem mensuram, quæ est D. ergo F metitur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur. & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.



COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

SCHOLIVM.

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuersum: vult ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quonam modo commensurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticorum libro fecit. postquam enim ostendit quinam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quòd non omnino incommensurabiles sunt, vt magnitudines; ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem superparticularem

particularem, vel multiplicem ſuperpartientem, quos ipſe breuitatis cauſſa ex minori nominauit, vel partem, vel partes. per partem intelligens ſubmultiplicem, vel ſubſuperparticularẽ, vel ſubmultiplicem ſuperparticularem. per partes vero ſubſuperpartientem, vel ſubmultiplicem ſuperpartientem. hoc igitur volens oſtendere eo indigebat, quo modo commenſurabilium maxima cõmunis menſura inueniatur. quod etiam hoc loco obſeruauit. Poſtea in quinto theoremate oſtẽdet cõmẽſurabiles magnitudines inter ſe proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commenſurabilem magnitudinem omnis commenſurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem eſſe, vel partes: hoc enim eſt proportionem habere, quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus. quamobrem eo vſus eſt. Sciendum autem & ipſas demonſtrationes; quæ ex arithmeticis petuntur, incommutabiles eſſe.

ALIVD.

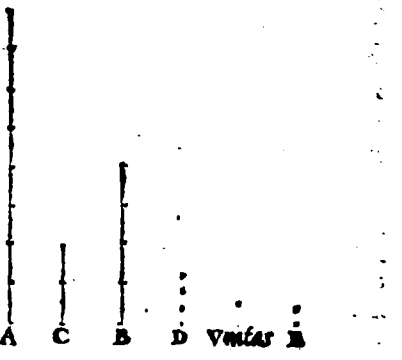
Poſtquam docuit, quæ ſint magnitudines incommenſurabiles, deinceps quid ipſas conſequatur oſtendet; & inſuper quid conſequatur commenſurabiles in quinto, & ſexto theoremate. & quoniam indigebat cõmuni menſura earum, quæ ſunt in ſymmetria, videlicet commenſurabilium; hoc aſſumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inueniendæ ſint commenſurabilium communes menſuræ. ſeptimum autem theorema inquirit; quæ conſequantur incommenſurabiles magnitudines non ſimpliciter, ſed ſecundum ſpeciem, vt incommenſurabiles longitudine, vel potentia; nam de incommenſurabilibus ſecundum priuationem nihil dixit; vt pote, quæ non ſint ipſis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quę longitudine, & potentia commenſurabiles ſunt, & incommenſurabiles: his enim indiget in nono theoremate, & ſequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compoſitionem, & diuiſionem commenſurabilitas, & incommenſurabilitas inquiritur vſque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commenſurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commenſurabiles ſunt, metietur ipſas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit C. & quoties C ipſam A metitur, tot vnitates ſint in D; quoties autem C metitur B, tot vnitates ſint in E.

quoniam igitur C ipſam A metitur per vnitates, quę ſunt in D: metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipſo ſunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. ergo vt C ad A, ita eſt vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatem. Rurſus quoniam C ipſam B metitur per vnitates, quæ ſunt in E; metiturq; vnitas numerum E per vnitates, quę in ipſo ſunt: vnitas numerum E æqualiter metietur, atque C ipſam B. eſt igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatē. quare ex æquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commẽſurabiles igitur magnitudines A B inter ſe proportionem habent, quam D numerus ad numerũ E. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

Hoc proprium eſt commenſurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars eſt, vel partes. ſi quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam vnitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; ſi vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim ſubmultiplicem facit proportionem: partes vero vnam reliquarum ſubproportionalium. ſi igitur rectæ lineæ ſint, & plana, quæ ab ipſis fiunt, & ſolida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. ſi vero plana, & quæ ab ipſis ſolida, non item rectæ lineæ, niſi proportio numerorũ ſit quadrati ad quadratum. & ſi ſolida nõ omnino quę ipſa præcedunt, niſi proportio ſit cubi ad cubum. quòd ſi ſolida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ lineæ habebunt: non enim ſunt commenſurabiles. In hoc autem theoremate & ſequenti de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus ſimpliciter diſſerit; at in ſeptimo de incommenſurabilibus longitudine, ex quo manifeſtum eſt & de potentia incommenſurabilibus. In octauo denique ortum tradit commenſurabilium, & in commenſurabilium longitudine & potentia.

F. C. COMMENTARIVS.

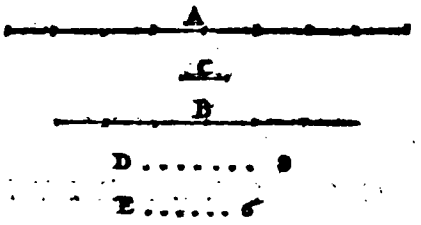
Ex iam demonſtratis poſſumus illud quoque problema abſoluere.

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam inter ſe proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propoſitæ magnitudines commenſurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis menſura, quæ ſit C. & quoties C metitur A, tot vnitates ſint in D: quoties autem metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. habebit igitur A ad B proportionẽ eã, quã habet numerus D ad E numerum. itaque ſi A B rectæ lineæ ſint, & earum quadrata erunt cõmenſurabilia, & inter ſe proportionem habebunt, quam

numerus

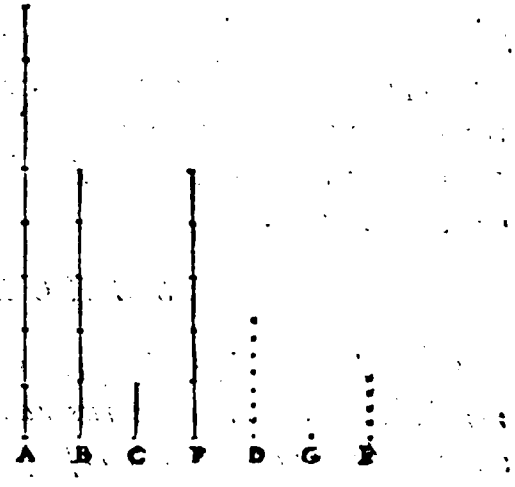
numerus quadratus ad quadratum numerum. si vero sint superficies, vel numeri D E sint quadrati, vel non quadrati; & si non sint quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & si quidem sint quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae linae, quae ipsas superficies, vel superficies ipsis aequales possunt, erunt longitudine commensurabiles. si vero numeri non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommensurabiles, quamquam potentia commensurabiles sint. quae omnia in nona propositione huius libri demonstrabuntur.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines commensurabiles esse. quot enim vnitates sunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipsarum æqualis sit C: quot autem vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi C cõponatur magnitudo F. Quoniam igitur quot sunt in D vnitates, tot magnitudines sunt in A, ipsi C æquales; quæ pars est vnitas ipsius D, eadem pars erit & C ipsius A. vt igitur C ad A, ita est vnitas ad D. metitur autem vnitas ipsum D numerũ. ergo & C ipsam A metietur. & quoniam est vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C, ita D numerus ad vnitatem. rursus quoniam quot vnitates sunt in E, tot sunt & in F magnitudines ipsi C æquales; vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. ostensum autem est & vt A ad C, ita D esse ad vnitatem. ergo ex æquali ut A ad F, ita est D ad E. sed ut D ad E, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita A ad F. quòd cum A ad utramque ipsarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipsi F æqualis. metitur autem C ipsam F. ergo & ipsam B metietur. sed & metitur A. quare C ipsas A B metitur. commensurabilis igitur est A ipsi B. Quare si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.



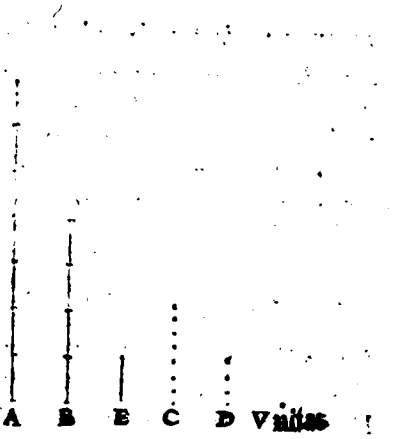
9. quint.

ALITER.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commensurabiles esse. quot enim unitates sunt in C, in tot partes æquales A diuidatur, & uni ipsarum æqualis sit E. est igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. est autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex

æquali

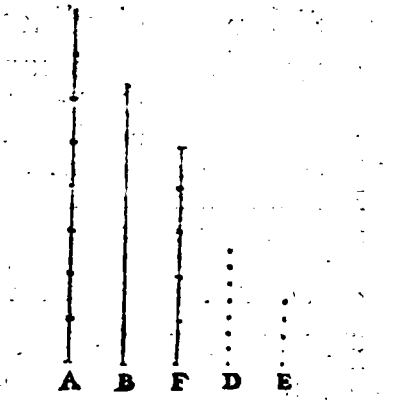
æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. ſed unitas metitur D. ergo & E ipſam B metitur. metitur autem & E ipſam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipſarum A B metietur; ideoque A B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri, vt D E, & recta linea vt A, fieri poſſe, vt D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. ſi autem ipſarum A F media proportionalis ſumatur, ut B, erit vt A ad F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc eſt vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. ſed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur eſt & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

Cor. 20. ſexti



SCHOLIVM.

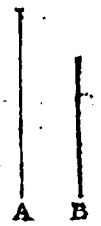
Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque ſpacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipſæ commenſurabiles ſunt; & rectæ lineæ, quæ ipſas poſſunt, longitudine ſunt commenſurabiles. vel quando rectæ lineæ inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipſæ commenſurabiles ſunt longitudine, & quæ ab ipſis fiunt quadrata, vel ſpacia quadratis ipſarum æqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur ſe extendunt potentia commenſurabiles, quàm commenſurabiles longitudine; & continentiores ſunt, vt ex ſequentibus theorematibus fiet manifeſtum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint

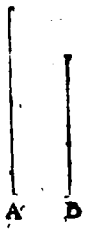
Sint incommensurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. si enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum, commensurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. nō igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeāt, quā numerus ad numerū, incōmēsurabiles erūt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem non habeāt quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse, si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A B magnitudines. ergo si duę magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod oportebat demonstrare.



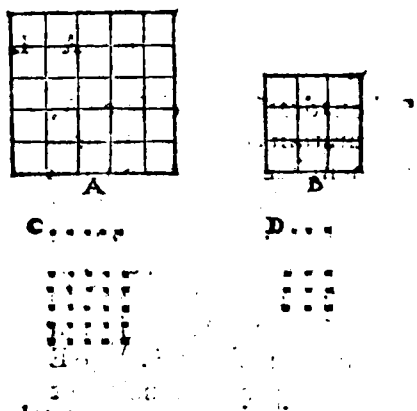
THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

A

B

Sint rectæ lineæ A B longitudine cōmensurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat eam, quam numerus C ad numerū D. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes enim figuræ in dupla sunt proportione homologorum laterum: proportionis vero, quā habet numerus C ad numerum D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratum; etenim duorū numerorū quadratorum vnus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod



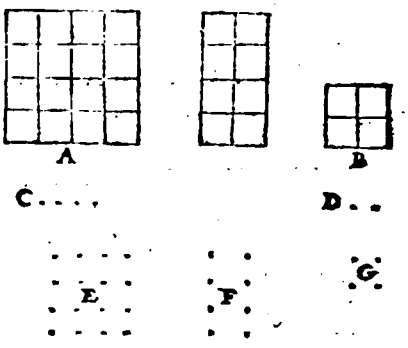
5. huius.

Coroll. 20. sexti.

11. octaui.

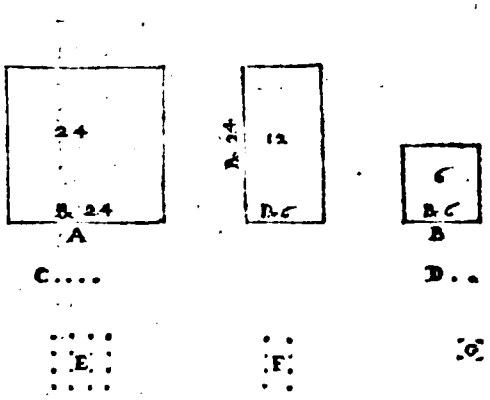
quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

ALITER.



Quoniam enim cõmensurabilis est A ipsi B longitudine, proportionẽ hẽt quã numerus ad numerũ. habeat quã C ad D. & C se ipsum quidẽ multiplicans faciat E; multiplicans vero D faciat F: & D se ipsum multiplicans faciat G. itaque quoniã C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicãs vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc est
1. sexti. vt A ad B, ita E ad F. sed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectãgulum, quod fit ex A B. est igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulũ, quod ex A B, ita E ad F. rursus quoniam D se ipsum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita erit F
1. sexti. ad G. vt autem A ad B, ita rectangulũ, quod fit ex A B ad quadratũ, quod fit ex B. ergo vt rectangulũm, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. sed vt quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex æquali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. est autem vterque ipsorum E G quadratus. & E quidem est à numero C; G uero ab ipso D. quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed sit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratũ, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. Dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Quoniam enim est vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. sed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla est proportionis, quã
Coroll. 20. sexti. 11. octaui. hẽt A ad B: proportio vero quadrati numeri, qui est à numero C ad quadratũ numerũ, qui à numero D itidẽ dupla est proportionis, quã hẽt C numerus ad numerum D. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam numerus C ad D numerum: ac propterea A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod oportebat demonstrare.
6. huius.

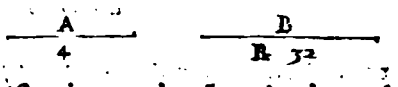
ALITER.



Sed quadratũ, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G. Dico A ipsi B longitudinem commẽsurabilem esse. sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; & C ipsum
17. septimi. D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales sũt in proportione, quæ est C ad D. & quoniam quadratorum, quæ
17. septimi. fiunt ex A B, medium proportionale est rectangulum, quod ex A B: numerorum vero quadratorum E G medium proportionale est F, erit vt quadratum

dratum, quod fit ex A, ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: sed vt quadratum ex A ad rectangulum ex A B, ita A ad B. ergo A B commensurabiles sunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem D ipsum F fecit. est igitur vt C ad D, ita E ad F. 17. septimi.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B lõgitudine. Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem nõ habere, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. si enim quadratũ ex A ad quadratũ ex B proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quę deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.



COROLLARIVM.

Et manifestum est ex iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quę vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectę lineę commensurabiles longitudine, non solum longitudine, sed & potentia commensurabiles. C 6. huius.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata proportionẽ habeãt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: quęcunq; quadrata proportionẽ nõ habẽt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, sed simpliciter quã aliquis alius numerus ad aliũ numerũ, cõmẽsurabilia sunt, hoc est rectę lineæ à quibus ipsa describũtur, cõmẽsurabiles sunt potẽtia, nõ aũt & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, nisi earum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommensurabiles non omnino & potentia incõmensurabiles esse. Qm̃ potentia cõmensurabiles possunt proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ideoq; cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt in commensurabiles. ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia: sed longitudine incommensurabiles existentes pos- D E F

C sunt potentia & incommensurabiles, & commẽsurabiles esse. potentia vero in commensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in cõmensurabiles. quòd est absurdum. potentia igitur in commensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIVM.

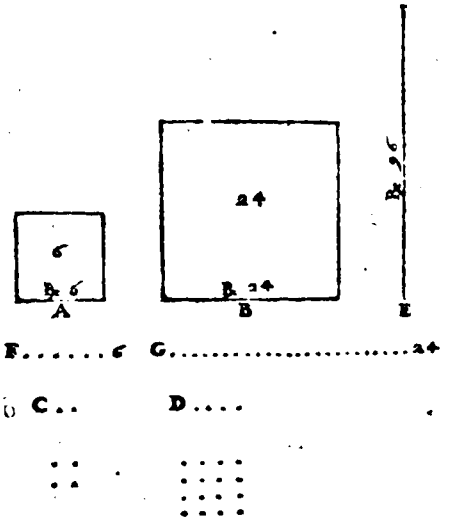
Hoc theorema Theateti est inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theaeteto. sed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuerse. namq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neque enim omnia commensurabilia spacia, quorum & latera commensurabilia sunt, comprehendit; si quidem quadratorum spaciorum commensurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur, quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, sed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent, commensurabilia habere latera oporteret. non habent autem, est enim maioris latus ad latus minoris, vt quadrati diametex ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset, quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset, non comprehendens ea, quę cum latera commensurabilia habeant, à quadratis numeris non mensurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appositum est, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; comprehenduntur enim omnia spacia, quæ & si à quadratis numeris non mensurantur; tamen cum sint commensurabilia, latera quoque commensurabilia habent. nam 18 & 8 commensurabilibus existentibus, propterea quòd à lateribus commensurabilibus describuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque sumentes latera ipsorum 9 & 4, æqualiter secabimus. propositorum quadratorum latera: & habebimus commensurabilitatẽ. namque vt quadrata ad quadrata, ita sunt latera ad latera.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæ à rectis lineis longitude commensurabilibus fuerint quadrata] *intellige rectas lineas longitudine commensurabiles inter se se, non expositae rationali: hoc enim non solum rationalibus contingit, sed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.* A

Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia] *Per quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non solum intelligenda sunt ea, quae totidem quadratas mensuras continent, quot vnitates sunt in numeris quadratis; sed & quae inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. sint enim duo numeri plani similes F G, & recta linea A. sitq; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario sextę propositionis huius, vt F ad G, ita A ad aliam lineam, quae sit E. & inter A E sumpta media proportionali E, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum, quod ex secunda, hoc est ita quadratum, quod ex A ad quadratum, quod ex B. sed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G. vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq; quadratum ex A continebit totidem mensuras quadratas, vt exempli gratia totidem pedes quadratos, quot vnitates sunt in F, videlicet sex, & quadratum ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates sunt in G, hoc est 24. & quoniam numeri plani similes F G inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; habebit etiam quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. similiter demonstrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non possint, tamen inter se longitudine commensurabilia esse. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iumores eiusmodi latera radices quadratas, vel radices simpliciter appellat; dicetur enim A radix 6, & B radix 24. atque est ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum sit quadrati ex A, erit B ipsius A dupla. similes enim rectilineę figurae in dupla sunt proportione homologorum laterum.* B



Coroll. 20. sexti.

26. octaui.

Coroll. 20. sexti.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus] *Ostendit quomodo prima corollarij pars sequatur ex prima parte theorematis.* C

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rursus ostendit quomodo idem ex secunda parte theorematis sequatur.* D

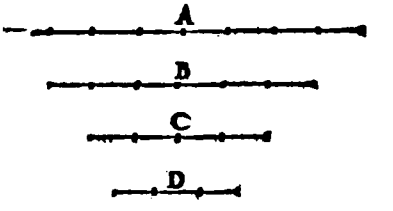
Quęcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum] *Hoc ad secundam partē Corollarij attinet, & sequitur ex vltima parte theorematis.* E

Dico & longitudine incommensurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.* F

Potentia vero incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt] *Hęc est vltima corollarij pars, quae per deductionem ad id, quod fieri non potest ex prima parte theorematis demonstratur.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartę commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundę fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, ſitq; vt A ad B, ita C ad D, & ſit A ipſi B commenſurabilis. Dico & C ipſi D commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum: atque eſt vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. commenſurabilis igitur eſt C ipſi D. ſed A ipſi B ſit incommenſurabilis. dico & C ipſi D incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A ipſi B, non habebit A ad B proportionē, quam numerus ad numerum. eſt aũt vt A ad B, ita C ad D. ergo neque C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. ſi enim C ad D proportionem habeat, quã numerus ad numerum; & A ad B eam, quã numerus ad numerũ proportionē habebit; atq; erit A ipſi B cōmēſurabilis. quod eſt abſurdũ; in cōmēſurabilis enim ponitur. ergo C ad D proportionē nō hēt, quã numerus ad numerum; ideoq; C ipſi D eſt incommenſurabilis. Si igitur quattuor magnitudides proportionales fuerint; prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis, & tertia quartæ commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

5. huius.
6. huius.
7. huius.
8. huius.

LEMMA. I.

Oſtenſum eſt in arithmeticis numeros planos ſimiles inter ſe proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & ſi duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe proportionalia proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ſe enim haberent; ſimiles plani eſſent. quod non ponitur. ergo diſſimiles plani inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

26. octaui.

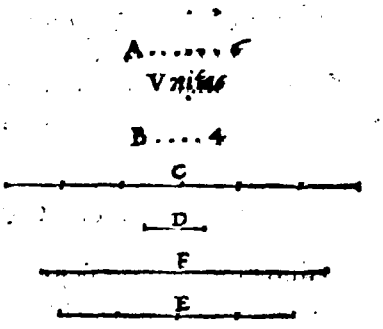
A

LEMMA. II.

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri A B; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad ſecundum numerum. quot enim vnitates ſunt in A, in tot partes æquales diuidatur C recta linea, & uni

vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus cõponatur recta linea E. est igitur vt vnitas ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearũ C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nãque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F sunt rectę lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta est.

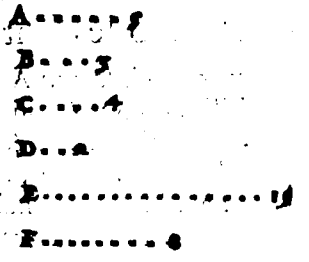


Coroll. 20. sexti.

LEMMA III.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

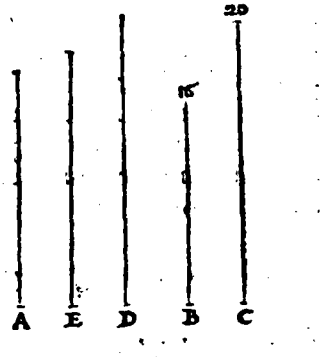
Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.



PROBLEMA III.
PROPOSITIO. XI.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum est. ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, neque quadratum ex A ad quadratũ ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarum A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit. incommensurabilis



9. huius. Coroll. 20. sexti.

D

rabilis igitur eſt A ipſi E potentia. ergo propoſitæ rectæ lineæ rationali, à qua dicebamus menſuras ſumi, vt ipſi A potentia quidem commenſurabilis inuenta eſt D, hoc eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis, irrationalis vero E. irrationales enim vniuerſe appellantur, quæ rationali & longitudine, & potentia incommenſurabiles ſunt.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ſi duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe] *Hoc ab Euclide non demonſtratur in arithmeticis, ſed nos ad vigeſimam ſextam octaui libri demonſtrauimus.*

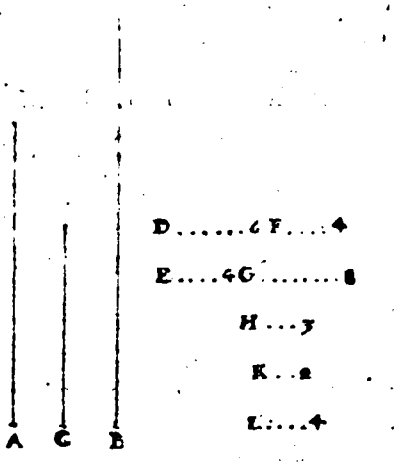
B Exponantur enim duo numeri B C inter ſe proportionem non habentes, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc eſt diſsimiles plani] *Hoc in promptu eſt, ſed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur.*

C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditũ eſt] *In corollario ſcilicet ſexti theorematis. & quamquam hoc ex illo perſpicue appareat, tamen ſecundum lemma, quod in græcis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommenſurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt.



Vtraque enim ipſarum A B ipſi C ſit commenſurabilis. dico & A ipſi B commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A commenſurabilis
5.huius. eſt ipſi C, habebit A ad C proportionem, quã numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipſum E. Rurſus quoniam commenſurabilis eſt B ipſi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuſcunque, videlicet quam habet D ad E, & quam
4.octaui. habet F ad G; ſumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus H K L; ſitq; vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita K ad L. Quoniam igitur eſt vt A ad C, ita D ad
11.quinti. E; ſed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L; erit & vt B ad C, ita K ad L. eſt autem & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet. quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipſi B eſt commenſurabilis. Quæ igitur eidẽ magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt. quod oportebat demonſtrare.
6.huius.

SCHOLIVM.

Hoc ab identitate non conuertitur. non enim quę inter ſe ſunt commenſurabiles, & eidem commenſurabiles ſunt; quemadmodum neque æquales inter ſe eidem ſunt æquales, ſed contra. nam contingit & incõ

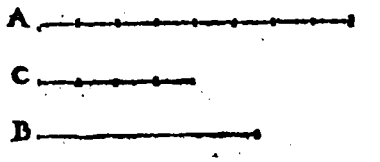
menſurabiles

mensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duę magnitudines A B, alia autem sit C: & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico & A ipsi B incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & C commensurabilis ipsi A; erit & C ipsi B cōmensurabilis. quod non ponitur.

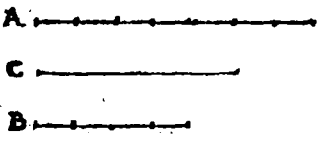


Ex antecedente.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIIII.

Si duę magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est B ipsi C, est autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines cōmensurabiles sint, altera autē ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.



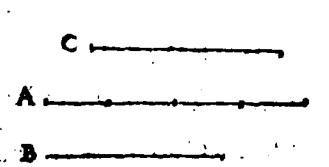
8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonstrata sunt; licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

Sint duae magnitudines incommensurabiles A B: sitq; C ipsi A commensurabilis: & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis; & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursus quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.



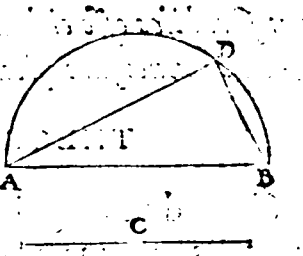
Ex antecedente.

LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

Sint

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior sit AB. oportet inuenire id, quo AB plus potest, quàm C. Describatur in recta linea AB semicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipsi C æqualis, & D B iungatur. perspicuum est angulum ADB rectum esse, & ipsam AB plus posse, quàm A D, hoc est quàm C, quantum est rectæ lineæ DB quadratum.



1. quarti. 31. tertij. 47. primi.

Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest, hoc modo inuenietur.

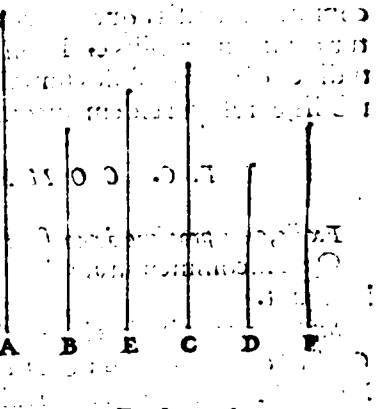
Sint duæ datæ rectę lineę AD DB; & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipsas possit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulum contineant ADB. & AB iungatur. rursus perspicuum est rectam lineam AB ipsas AD DB posse.

47. primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint; prima vero tãto plus possit, quàm secunda, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi cõmensurabilis longitudine: & tertia tãto plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tanto plus possit, quàm secunda, quãtum est quadratum rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales A B C D, sitq; ut A ad B, ita C ad D; & A quidẽ plus possit, quàm B, quadrato, quod fit ex E: C vero plus possit, quàm D, quadrato ex F. Dico si A ipsi E sit commensurabilis, & C ipsi F cõmensurabilem esse. si uero A ipsi E sit incommensurabilis, & C ipsi F incommensurabilem esse. quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum. sed quadrato quidem, quod fit ex A æqualia sũt quadrata, quæ ex ipsis E B; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F D. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ ex F D ad quadratum ex D: & diuidẽdo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratũ ex D. quare vt E ad B, ita est F ad D: & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. est autem & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita est C ad F. ergo si A est commensurabilis ipsi E, & C ipsi F erit commensurabilis; si vero incommensurabilis est A ipsi E, & C ipsi F incommensurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



2. 22. sexti. 22. sexti. 10. huius.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & totæ magnitudo

magnitudo vtrique ipsarum cõmensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis, & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



Componantur duæ magnitudines commensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum A B B C commensurabilem esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A B B C, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D. & quoniam D metitur ipsas A B B C, & totam A C metietur. metitur autem & A B B C. Ergo D magnitudines A B B C, & ipsam A C metitur. commensurabilis igitur est A C vtrique ipsarum A B B C. Sed A C vni ipsarum A B B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B. Dico & A B B C. commensurabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas C A A B, & reliquam B C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipsas A B B C metitur: ac propterea A B B C commensurabiles sunt. Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

1. diffi.
4. com. not.
3. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componãtur, & tota magnitudo vtriquè ipsarum incommensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum fit incõmensurabilis, et quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum A B B C incommensurabilem esse. si enim non sunt incommensurabiles C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D, si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas C A A B, & reliquam B C metietur. metitur autem & B A. ergo D ipsas A B B C metitur; ac propterea commensurabiles sunt A B B C. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas C A A B metietur aliqua magnitudo. quare C A A B incommensurabiles sunt. similiter & A C C B incommensurabiles esse demõstrabimus. ergo A C vtrique ipsarum A B B C est incommensurabilis. sed A C vni ipsarũ A B B C incõmensurabilis sit; & primũ ipsi A B. Dico & A B B C incõmensurabiles esse. si enim sunt cõmensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & sit D. quæ igitur D metitur ipsas A B B C, & totã A C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipsas C A A B metitur: ideoq; C A A B commensurabiles sunt. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas A B B C metietur aliqua magnitudo. quare A B B C incommẽsurabiles erũt. similiter demonstrabimus A C, & reliquã B C esse incommensurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

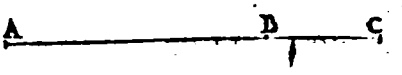
4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis illud etiam constat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit.

Sit enim tota magnitudo AC incommensura bilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquae BC incommensurabilem esse. Quoniã enim CA est incommensurabilis ipsi AB, erunt AB, BC incommensurabiles. & quoniam AB BC incommensurabiles sunt, & AC utrique ipsarum incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

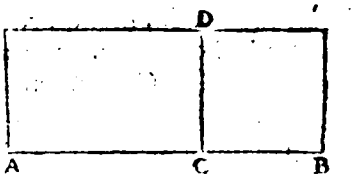


Ex demonstratis.

LEMMA. I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

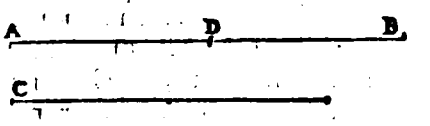
Ad aliquam enim rectam AB applicetur AD parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata DB. Dico parallelogrammum AD rectangulo ACB æquale esse; quod quidem per sese patet. quoniam enim quadratum est DB, erit DC ipsi CB æqualis, atque est parallelogrammum AD, quod AC CB continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



LEMMA II.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.

Si enim fieri potest, sint duæ rectæ lineę inæquales AB C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quæ scilicet, fit à DB ipsius AB dimidia, erit ex præcedenti lemmate id, quod applicatum est æquale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc est æquale quadrato ex D B. etenim AB bifariã in puncto D secatur. quod igitur quater fit à DB æquale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à D B est ipsius AB quadratum; nam longitudine duplæ potentia quadruplę sunt: quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex AB est æquale quadrato ex C, hoc est quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri non potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad AB per bipartitam sectionẽ trãsit.

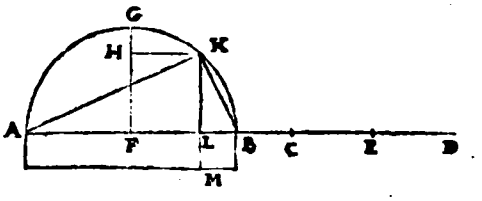


LEMMA. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Sint datę duæ rectæ lineæ inæquales AB CD; sitq; maior AB. & oporteat facere quod propositum est. secetur CD bifariã in E. manifestum est quartam partem quadrati, quod fit à CD esse quadratum ex CE. & describatur in recta linea AB semicirculus; seceturq; AB bifariã in F: & à puncto F ipsi AB ad rectos angulos ducatur

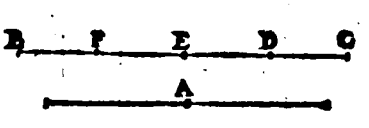
ducatur F G. Quoniam igitur A B maior eſt, quàm C D, erit & ipſius A B dimidia maior, quàm dimidia ipſius C D, hoc eſt maior quàm C E. ponatur F H æqualis C E, & per H ipſi A B parallela ducatur H K, atque à puncto K ad A B perpẽdicularis ducta K L, iungantur A K K B. rectangulum igitur eſt triangulum A K B, & ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt K L. ergo rectangulum A L B eſt æquale quadrato, quod fit ex K L. producatur K L, & ponatur ipſi L B æqualis L M, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex K L, hoc eſt quod ex F H eſt æquale parallelogrammo A M. ſed quod fit ex F H eſt æquale quadrato ex C E, hoc eſt quartæ parti quadrati ex C D: eſtq; A M deficiens figura quadrata. quod ipſum facere oportebat.



8 & 17. ſexti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales ſint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quòd ſi maior tanto plus poſsit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudiue commenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectæ iineæ inæquales A B C, quarum maior B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc eſt ei, quod fit à dimidia ipſius A, æquale parallelogrãmum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur B D D C, ſitq; B D ipſi D C commenſurabilis longitudine. Dico B C plus poſſe, quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. ſecetur enim B C bifariam in puncto E, & ipſi D E æqualis ponatur E F. reliqua igitur D C eſt æqualis B F. & quoniam recta linea B C ſecatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit B D C rectangulum vnà cum quadrato ex E D æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla quod igitur quater B D D C continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale eſt quadrato quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater B D D C continetur æquale eſt quadratum ex A: ei vero, quod quater fit ex D E æquale eſt quadratũ, quod ex D F; etenim D F ipſius D E eſt dupla: & ei quod quater fit ex E C æquale eſt quadratum quod ex B C; rurſus enim B C dupla eſt ipſius E C. ergo quadrata, quæ fiunt ex A D F æqualia ſunt ei, quod fit ex B C quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex B C maius eſt, quàm quadratũ, quod ex A, quadrato, quod ex D F. recta igitur linea B C tanto plus poteſt, quàm A, quantum eſt ipſius D F quadratum. oſtendendum eſt & B C ipſi D F commenſurabilem eſſe. Quoniam enim B D commenſurabilis eſt ipſi D C longitudine, erit & B C ipſi C D longitudine commenſurabilis. ſed D C ipſis C D B F eſt commenſurabilis longitudine. æqualis enim

5. ſecundi.

5. quinti.

B

C

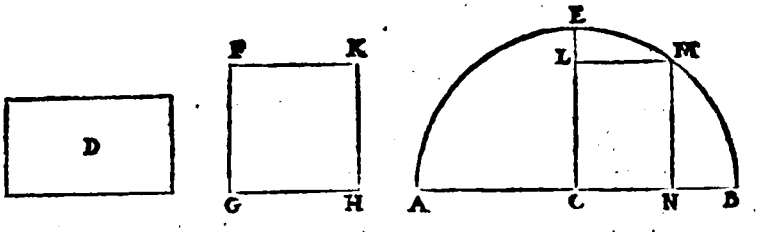
D lis enim eſt C D ipſi B F. quare & B G ipſis B F C D longitudine eſt commenſurabi-
E lis, & reliquę igitur F D longitudine commenſurabilis erit. ergo B C plus poteſt, quàm A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Sed B C plus poſſit quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad B C applicetur, deficiens figura quadrata: & ſit quod continetur B D D C. oſtendendum eſt B D ipſi D C lõgitudine commẽſurabilem eſſe. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter demonſtrabimus B C plus poſſe, quàm A, quadrato rectæ lineæ F D. ſed B C plus poteſt, quàm A, qua-
F drato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. ergo B C commenſurabilis eſt ipſi F D longitudine. & reliquę igitur, vtrique ſcilicet B F D C longitudine eſt commenſurabilis, ſed vtraque B F D C ipſi D C commẽſurabilis eſt longitudine;
G etenim B F eſt æqualis D C. ergo & B C ipſi C D longitudine eſt commenſurabilis.
H ex quibus conſtat B D ipſi D C longitudine commenſurabilem eſſe. Si igitur duę rectæ lineę inæquales ſint, & reliqua. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc eſt ei, quod fit à dimidia ipſius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud eſt, niſi rectam lineam maiorem, ita ſecare, vt rectangulum ipſius portionibus contentum quartae parti quadrati minoris ſit aequale. ſed poſſumus illud idem vniuerſalius explicare in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum, quod partibus cõtinetur, ſit æquale dato rectilineo. oportet autem datum rectilineũ minus eſſe quadrato, quòd à dimidia deſcribitur.

Sit data recta linea A B, diuiſa bifariam in C; datumq́, rectilineum D. & oportet facere quod propoſitum eſt. Deſcribatur in A B ſemicirculus A E B; & à puncto C ipſi A B ad rectos angu-
25. primi. *los ducatur C E: deinde rectilineo D fiat aequale quadratum F G H K. erit eius latus F G minus*



ipſa A C, hoc eſt ipſa C E. quare à recta linea C E abſcindatur C L, quae ſit aequalis F G: & per L quidem ducatur L M parallela ipſi A B: per M vero ducatur M N parallela C E. Dico rectam lineam A B ſectam eſſe in puncto N, vt oportebat, hoc eſt rectangulum A N B rectilineo D aequale eſſe. aequale etenim eſt quadrato ex M N. ſed cum M N ſit aequalis ipſi C L, hoc eſt ipſi F G, erit rectángulũ A N B quadrato F G H K, hoc eſt rectilineo D æquale. quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, vt qui ex ipſis producitur dato numero ſit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis eſſe debet, quadrato dimidij minorem eſſe.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere, vt qui ex partibus producitur, ſit aequalis dato numero 75. Accipiatur ipſius 20 medietas, quae eſt 10, & in ſe multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum, videlicet 75, & relinquetur 25. huius igitur latus 5 additũ ipſi 10 conſtituit 15; & detractum ab eodem conſtituit 5. Dico 20 in has partes ita diuiſum eſſe, vt oportebat, hoc eſt eum, qui ex ipſis producitur, aequalem eſſe dato numero 75. Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes aequales, & in duas partes inæquales, numerus planus, qui fit ex partibus inæqualibus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis eſt ei, qui fit à dimidio quadrato, quod demonſtratum eſt à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum, quae nos ad 15 noni appoſuimus

apposuimus. ergo qui fit ex 15, & 5 vnà cũ quadrato ipsius 5 est aequalis quadrato dimidij, videlicet 100: & detracto communi quadrato 25, erit qui producitur ex 15, & 5 aequalis dato numero 75. quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur æquale est quadratum ex A]Po B
nitur enim parallelogrammum rectãgulum D B C aequale quartae parti quadrati, quod fit ex A.

Erit & BC ipsi CD longitudine cõmẽsurabilis]*Ex prima parte sextae decimae huius.* C

Quare BC ipsis BF CD longitudine est commensurabilis]*Ex 12 huius.* D

Et reliqua igitur F D longitudine commensurabilis erit]*Ex eo, quod nos ad 17. hu-* E
ius demonstrauimus. sumantur enim BF DC simul, ac si vna linea esset.

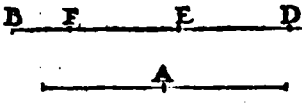
Et reliquę igitur, vtrique scilicet B F D C longitudine est commensurabilis]*Ex* F
eodem theoremate, quod ad 17 huius apposuimus.

Ergo & BC ipsi DC longitudine est commensurabilis.]*Ex 12 huius.* G

Ex quibus constat BD ipsi DC longitudine commensurabilem esse] *Ex secunda* H
parte sextae decimae huius.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XIX.

Si duæ rectę lineæ inæquales sint, quartę autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus porerit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si maior tanto plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartę autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori A, æquale parallelogrammum ad ipsam BC applicetur, deficiẽs figura quadrata; & sit quod continetur B D D C; sitq; BD ipsi DC longitudine incommensurabilis. Dico B C plus posse, quàm A quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommẽsurabilis. ijsdem enim, quę supra, constructis, similiter ostendemus ipsam BC plus posse, quàm A, quadrato rectę lineæ D F. ostendendum igitur est B C ipsi D F longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim incommensurabilis est B D ipsi D C, erit & BC ipsi C D longitudine incommensurabilis. sed DC incommensurabilis est vtrisque BF DC. ergo & BC ipsis BF DC longitudine est incommensurabilis. ac propterea reliquę F D ipsi commensurabilis est longitudine; & BC plus potest; quàm A. quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommẽsurabilis. Sed BC rursus plus possit, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod BD DC continetur. ostendendum est BD ipsi DC longitudine incommensurabilem esse. Ijsdem enim constructis, similiter demonstrabimus BC plus posse quàm A, quadrato rectæ lineæ DF. ergo ostendendum relinquitur BC plus posse, quàm A, quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. incommensurabilis igitur est BC ipsi DF longitudine. quare & reliquę, videlicet vtrique BF DC est incommensurabilis. sed vtraque BF DC commensurabilis est longitudine ipsi DC. ergo & BC ipsi CD est incommensurabilis longitudine; ac propterea diuiden-

17. huius. 14. huius. Ex demonstratis ad 17. huiusce

Ex demonstratis ad 17. huius. 14. huius. 17. huius.

do

do BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis erit. Si igitur duę rectæ lineę inæquales ſint, & reliqua, quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus, nunc ad rationales & medias tranſit.

LEMMA. I.

Quoniam demonſtratum eſt longitudine commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe. potentia vero commenſurabiles non omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: manifeſtum eſt, ſi expoſitæ rationali aliqua commenſurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia, longitudine enim commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitę rationali aliqua fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quòd ſi expoſitæ rationali rurſus aliqua commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic rationalis potentia tantum commenſurabilis.

Coroll. 9. huius.

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expoſitæ rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. ſunt autem & aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitę rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus rationales, ſed commenſurabiles inter ſe vel longitudine, & potentia, vel potentia ſolum. & ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ rationales longitudine commenſurabiles, vt intelligatur etiam potentia commenſurabiles eſſe: ſi vero potentia ſolum, inter ſe ſunt commenſurabiles, dicuntur ipſæ quoque rationales potentia ſolum commenſurabiles.

Rationales commenſurabiles ſunt. 12. huius.

At vero rationales commenſurabiles eſſe ex his conſtat.

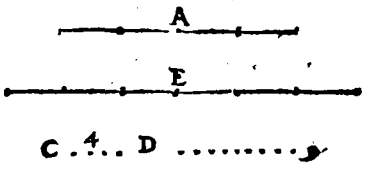
Quoniam enim rationales ſunt, quæ expoſitę rationali ſunt commenſurabiles, quæ vero eidem commenſurabiles etiam inter ſe commenſurabiles ſunt, ſequitur rationales commenſurabiles eſſe. quod demonſtrare oportebat.

LEMMA. III.

Inuenire duas rationales longitudine commenſurabiles.

Exponatur

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel ſimpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quæ demonſtrata ſunt A E longitudine commenſurabiles.



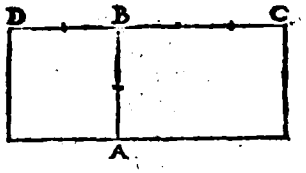
Ex corol. 8. huius.

In 9. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum continetur rectãgulum rationale eſt. A

Rationalibus enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale eſſe. deſcribatur ex A B quadratum A D. ergo A D eſt rationale. Et quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C longitudine, atque eſt A B æqualis BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. eſt autem & vt DB ad BC, ita DA ad AC: & commenſurabilis eſt DB ipſi BC. ergo & DA ipſi AC commenſurabile erit. eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale. quod igitur rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum rationale eſt. quod demonſtrare oportebat.



B

1. ſexti. C

D

F. C. COMMENTARIVS.

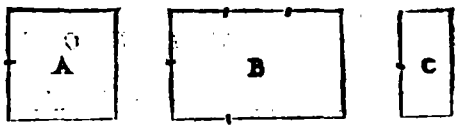
Secundum aliquem prædictorum modorum] *Rectarum enim linearum AB BC vel vtreque ſunt expoſitae rationali longitudine commenſurabiles, vel vtreque eidem commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe commenſurabiles longitudine. quocunque autem modo ſe habeãt, quod ex ipſis fit rectangulum rationale eſt, & eadem demonſtratio in omnibus congruit.* A

Ergo AD eſt rationale] *Ex diffinitione 9. ſiue enim longitudine ſint commenſurabiles expoſitae rationali, ſiue potentia ſolum, earum quadrata rationalia ſunt, quippe quae quadrato expoſitae rationalis ſint commenſurabilia.* B

Ergo & DA ipſi AC commenſurabilis erit] *Ex decima huius.* C

Eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale] *rationali namque commenſurabile & ipſum rationale eſt. quod ita demonſtrabitur.* D

Sit expoſitae rationalis quadratum A, & ipſi commenſurabile ſit ſpacium B. erit B rationale ex 9 diffinitione. ſit rurſus aliud ſpacium C ipſi B commenſurabile. Dico & C rationale eſſe. Quoniam enim ſpacia A C eidem ſpacio B ſunt commenſurabilia, & inter ſe commenſurabilia ſunt ex 12 huius. Quòd cum C ipſi A ſit commenſurabile, etiam rationale erit ex 9 diffinitione. quod demonſtrare oportebat.



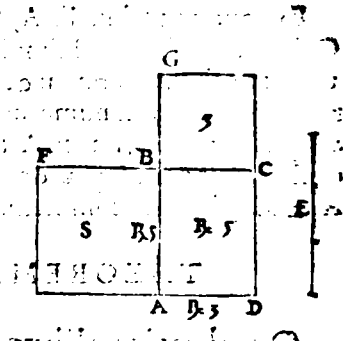
Vt autem ea, quae hoc loco de rationalibus dicuntur, manifeſtiora ſint, & quaſi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quae ad ea etiam, quae ſequuntur, vtilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datũ erit.

Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum

datum esse. Exposita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraque commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine, altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraque est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datum erit ex iis, quę Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex iis, quae nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositionē libri Archimedis de circuli dimensione: si vero vtraque expositae rationali potentia solum est commensurabilis, nihilominus rectangulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia sunt commensurabiles, earum quadrata commensurabilia erunt. ideoq; inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipsum K multiplicans faciat M, cuius radix sit N. erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps proportionales; rectangulum enim contentum H K est aequale quadrato ex N, hoc est ipsi M. & quoniam quadratum F A ad rectangulum AC est vt FB ad BC, hoc est vt AB ad BC; vt autem AB ad BG, hoc est ad EC, ita rectangulum AC ad CG quadratum: erunt & tres hę magnitudines deinceps proportionales. quādo autem tres magnitudines deinceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad secundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC. sed quadratum AF ad quadratum CG est, vt numerus H ad ipsum K. & cum H ad K similiter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum F A ad rectangulum AC, vt H ad N. sunt autem magnitudines H N datae; ideoq; data ipsarum proportio: & datum est quadratum F A. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione demonstrabimus rectangulum datum esse, si altera datarum linearum sit longitudine commensurabilis, altera vero potentia solum, quod demonstrare oportebat.



A 5. huius. 17. sexti. g 1. sexti. 11. quinti. 10. diffinquinti. 1. datorum Euclid. a. Datorum Euclid.

OPERATIO.

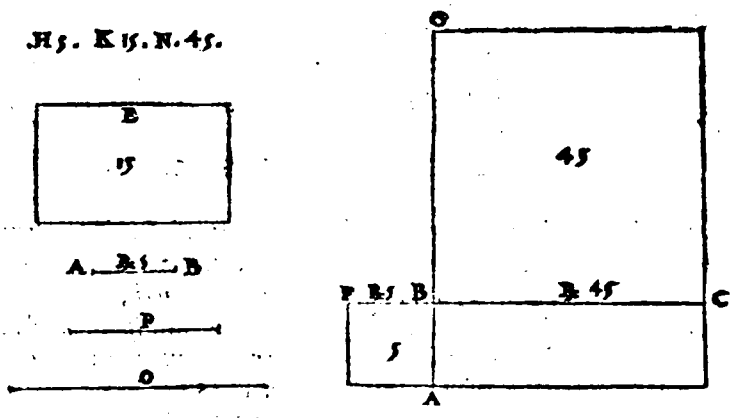
Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hoc nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarū inter se. vt si AB sit radix 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex R 5, & R 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD R 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod quęritur.

THEOREMA II.

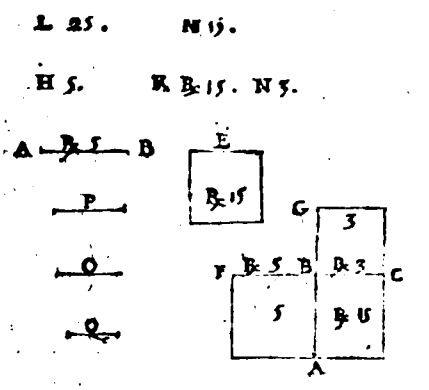
Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

Sit data recta linea rationalis AB, & spacium datum E. Dico si ad rectam lineam AB spacium E applicetur, latitudinem, quam facit, datam esse. vel igitur recta linea AB expositae rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spacium E rationale est, vel irrationale, quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spacium E rationale, illud manifestum erit ex iis, quae Regiomontanus demonstrauit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex iis, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstrauimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spacium E siue rationale, siue irrationale, vel A B est longitudine commensurabilis, & spacium E irrationale, latitudo, quā facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spacium E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio

E commensu-



E commenſurabile; ac propterea ad ipſum proportionem habebit, quam numerus ad numerum habeat quam numerus H ad numerum K; fiatq́, ex corollario ſextae propoſitionis huius libri vt H ad K, ita recta linea AB ad alium rectam lineam O: & inter AB & O ſumpta media proportionali P, erit vt numerus H ad numerum K, ita quadratum rectae lineae AB ad rectę lineae P quadratum. ſed & quadratũ rectae lineae AB ad ſpaciũ E erat, vt numerus H ad numerũ K. Cum igitur quadratum ex AB ad ſpacium E eãdem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipſa P; erit quadratũ ex P ſpacio E aequale. Itaque ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC aequale quadrato ex P, hoc eſt aequale ſpacio E; latitudinem faciens BC. & ex AB BC deſcribãtur quadrata AP CG. numerus autem K ſe ipſum multiplicans faciat M, & M per K diuiſo exeat N. erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales; rectangulũ enim ipſis KN contentum eſt aequale quadrato ex K. Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC eſt vt rectangulum AC ad CG quadratum, quod ſuperius oſtenſum eſt. quadratum autem FA ad rectangulum AC eſt, vt numerus H ad numerum K; erit & rectangulum AC ad quadratum CG, vt K ad N. ſed datum eſt quadratum FA, & rectangulum AC; quòd numeri K N ſint dati. ergo & quadratum CG datum erit, & data ipſius radix BC, videlicet latitudo, quam facit ſpacium E ad rectam lineam AB applicatum. 9. quinti. 2. datorum Euclid.



Sit rurſus recta linea AB potentia ſolum commenſurabilis, & ſpacium E irrationale. ergo quadratum rectae lineae AB incommenſurabile eſt ſpacio E. ſit autem quadratum rectae lineae AB ad ſpacium E, vt H ad K, hoc eſt ad radicẽ numeri M: & H ſe ipſum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati ſint, & eorum latera HK, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad rectam lineam Q: & inter AB & Q ſumatur media proportionalis O. habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque eſt vt L ad M, ita AB ad Q. ergo vt H ad K, ita AB ad O. Rurſus inter AB & O inueniatur media proportionalis P; erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad quadratum ex P. vt igitur H ad K, ita eſt quadratum ex AB ad quadratum ex P. ſed erat vt H ad K, ita quadratum ex AB ad ſpacium E. Ergo quadratum ex AB ad quadratum ex P eandem habet proportionem, quam ad ſpacium E. ideoq́, quadratum ex P ſpacio E aequale erit. Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC, aequale quadrato ex P, hoc eſt ſpacio E aequale, quod faciat latitudinem BC: deinde ex AB BC fiant AF CG quadrata; & rurſus ipſarum H K magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ducta K inter ſe ſe; & quod producitur diuiſo per B, vt proxime dictum eſt. ſit autem tertia proportionalis N. Eadem ra 9. quinti.

tione demonſtrabitur vt quadratum ex AB ad rectangulum AC, ita eſſe rectangulum AC ad CG quadratum. Quoniam igitur H K N deinceps proportionales ſunt, quadratum autem FA ad rectangulum AC eſt vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. ſed datum eſt quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC, hoc eſt latitudo, quae fit ſpacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonſtrabitur ſi recta linea AB ſit longitudine commenſurabilis, et ſpacium E irrationale.

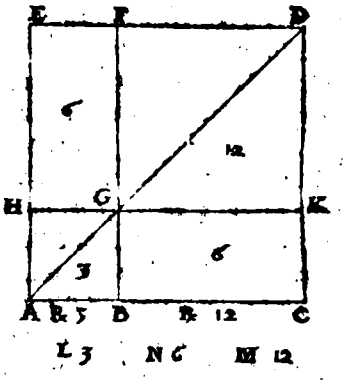
OPERATIO.

Si datae magnitudines radices numerorũ fuerint, numerus, qui ſpacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; ſi vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea eſt radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius eſt radix, diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectã lineam applicatum. eſt autem hęc diuiſio radicum inter ſe ſe, quam dicunt. vt ſi Bꝛ 15 diuidenda ſit per Bꝛ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix eſt quod ſit Bꝛ 15 per Bꝛ 5 diuiſa: ſi vero Bꝛ 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipſius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix eſt id, quod quęritur.

THEOREMA III.

Quæ ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.

Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. vel igitur datae rectae lineae expoſitae rationali longitudine commenſurabiles ſunt, vel commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe lõgitudine commenſurabiles. Et ſi quidem expoſitae rationali ſint commenſurabiles longitudine, quae ex ipſis componitur recta linea data erit, ex demonſtratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propoſitione tertia, & ex ijs, quae nos eodem in loco demonſtrauimus. ſi uero expoſitae rationali ſint commenſurabilis potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles, earum quadrata proportionem habebunt; quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat recta e lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erũt numeri L M ſimiles plani. ſi enim quadrati ſint, rectae lineae AB AC longitudine erunt commenſurabiles. quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & ſit N. deſcribaturq; ex recta linea AC quadratum ACDE; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipſarum AE CD parallela BGF. per G vero ducatur HGK alterutri ipſarum AC ED parallela. ſimiliter vt ſupra demonſtrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita eſſe, vt rectangulum GC ad GD quadratum. ſed quadratum AG ad quadratum GD eſt vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC eſt vt numerus L ad ipſum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. eſt autem rectangulum EG, quod eſt alterum ſupplementorum, aequale reliquo GC. Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB eſt vt L ad M vnà cum duplo ipſius N: & conuertendo gnomon EKB ad quadratum AG, vt M vnà cum duplo ipſius N ad ipſum L. ergo componendo, rurſuſq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compoſitum ex L & M vnà cum duplo ipſius N. ſed compoſitum hoc eſt datum, quippe cum dati ſint numeri ipſum componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis conſtat. atque illud eſt, quod demonſtrandum proponebatur.



9. huius.

11. octaui.

OPERATIO.

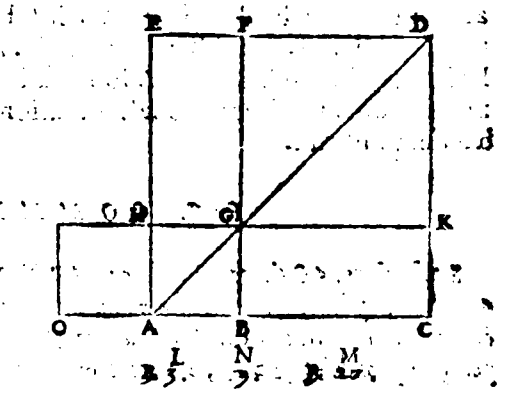
Numeros reſpondentes quadratis datarum linearum ſimul conceruabimus vnà cum duplo lateris

ueris quadrati eius, qui ex eorum inter se multiplicatione producitur, hoc est vnà cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipsos medius interijcitur; et huius compositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis rectis lineis constat. atque hęc est radicum inter se additio, quam dicunt: vt si radix 3 addenda sit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod est 6 duplabimus: et omnibus simul coacervatis fient 27, cuius radix est recta linea, quam quęrimus. Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, si inter se componantur, vna recta linea fit, sic ex duobus spacijs medijs commensurabilibus, si itidem inter se componantur vnum fiet medium. Quòd si duae rationales longitudine incommensurabiles inter se addendae sint, vt ℞ 3. ℞ 5, dicemus ℞ 3 vnà cum ℞ 5, vel ℞ 3 addita ℞ 5, vel vtemur hac voce plus, quod est in communi vsu, hoc modo ℞ 3 plus ℞ 5, et 3 plus ℞ 8, et ita fiet etiam si plures sint, quàm duae, vt 2 plus ℞ 3 plus ℞ 5. Quòd si duae sint, dicentur ex binis nominibus, seu binomia, vt Campanus, et recentiores. si vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. et eodem modo in alijs.

THEOREMA III.

Duarum datarum rationalium, quae inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae rationales inequales, & longitudine commensurabiles rectae lineae AB AC, quarum differentia sit EC. Dico BC datam esse. si enim AB AC sint expositae rationali longitudine commensurabiles, earum differentia data erit ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propositione 4, & ex ijs, quae à nobis eodem in loco demonstrata sunt. si vero expositae rationali commensurabiles sint potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat igitur rectae lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM similes plani; ideoq; inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, sitq; N. & ex recta linea AC describatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum superius. producta vero CA vsque ad O, ita vt AO, sit aequalis AB, quadratum OH describatur, quod quidem quadrato rectae lineae AB, hoc est ipsi AG aequale erit. atque est quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratum CE, vt CK ad CD, hoc est vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC, ita est rectangulum HC ad E quadratum. sed & numeri LNM deinceps proportionales sunt, & quadratum OH ad quadratum CE est vt L numerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quòd cum rectangulum EG sit aequale rectangulo GC, supplementa etenim sunt, addito vtrique aequali quadrato, erit rectangulum HC aequale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. si igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectangulo HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectae lineae BC est aequale. quod etiam in septima propositione secundi libri demonstratum est. & quoniam numeri LNM sunt dati, & quadrata OH CE data erunt, & rectangulum HC, atque eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonstrare oportebat.



APPENDIX.

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul iungemus, & ab eo, qui factus est, auferemus duplum numeri, qui inter ipsos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim

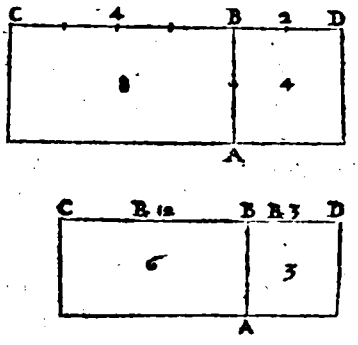
quadratum, cuius radix erit recta linea, quam quærimus. atque hæc est radicum quadratarum subtractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui est 9, videlicet 18, & relinquentur 12, cuius radix est ea, quam quærimus. eodem modo & spaciorum mediorum inæqualium, quae commensurabilia sint, differentia inuenietur. si uero ab aliqua rationali auferenda sit alia minor, quae ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à Bꝛ 5 auferre velimus Bꝛ 3, dicemus Bꝛ 5 dempta Bꝛ 3, vel vtemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo Bꝛ. 5 minus Bꝛ 3, & Bꝛ 6 minus Bꝛ 4, quas Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores residua, seu recisa.

Si igitur recta linea AB sit Bꝛ 3, & recta BC Bꝛ 12, erit ex ante demonstratis in primo antecedentium theorematum, rectangulum AC Bꝛ 36, hoc est 6. & rursus si AB sit Bꝛ 8, & BC Bꝛ 18, erit AC rectangulum Bꝛ 144, hoc est 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, lõgitudine cõmensurabilẽ.

Rationale enim AC ad rationalem secũdum aliquem rursus dictorum modorũ applicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC rationalem esse, & ipsi ab longitudine commensurabilẽ. Describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est: sed & rationale est AC. ergo AD ipsi AC est commensurabile. atque est vt DA ad AC, ita DB ad BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est autem DB æqualis BA. quare AB ipsi BC commensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis igitur est & BC, & ipsi BA longitudine commensurabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportebat demonstrare.



23. primi.

Ex lẽma 2. ad 10. huius 10. huius.

6. diffi.

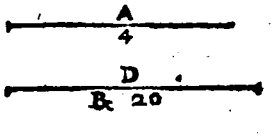
F. C. COMMENTARIVS.

Sit spacium AC 6. & recta linea AE Bꝛ 3. erit ex 2 theoremate præmissorum CB Bꝛ 12, quae ipsi Bꝛ 3 longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC 12, & recta linea AB Bꝛ 8, erit CB Bꝛ 18. atque est Bꝛ 18 ad Bꝛ 8, ut 3 ad 2. nam si Bꝛ 18 diuidatur per Bꝛ 8 proueniet Bꝛ 2 $\frac{1}{4}$, videlicet Bꝛ $\frac{2}{4}$, quae est. $\frac{1}{2}$

LEMMA. I.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles.

Exponatur rationalis A, & duo numeri BC non habẽtes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quę ostensa sunt AD potentia solũ cõmensurabiles.



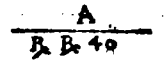
Corol. 6. huius.

LEMMA. II.

Recta linea, quæ potest irrationale spacium, irrationalis est.

Posit

Posſit enim recta linea A ſpacium irrationale; hoc eſt quadratum, quod fit ab A irrationali ſpacio ſit æquale. Dico A irrationalem eſſe. ſi enim ſit rationalis, erit quod ab ipſa fit quadratum rationale; ſic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non eſt. ergo A irrationalis ſit neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat.

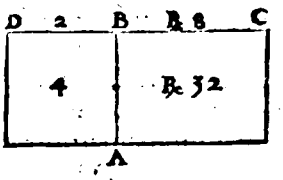


Diffi. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

Quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt: & recta linea ipſum potens eſt irrationalis. vocetur autem media.

Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipſum poteſt, irrationalem eſſe. vocetur autem media, ſeu media lis. deſcribatur enim ex A B quadratum AD. ergo AD rationale eſt. Et quoniam AB incommenſurabilis eſt ipſi BC longitudine, potentia enim ſolum ponuntur commenſurabiles, atque eſt AB æqualis B D. incommenſurabilis igitur eſt DB ipſi BC longitudine. eſt autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipſi AC eſt incommenſurabile. ſed DA rationale eſt. irrationale igitur eſt AC. Quare & recta linea, quę ipſum AC poteſt, videlicet quę poteſt quadratum ipſi æquale eſt irrationalis. vocetur autem media; propterea quòd ipſius quadratum eſt æquale rectangulo, quod AB BC continetur, & ipſarum AB BC media ſit proportionalis. quod demonſtrare oportebat.



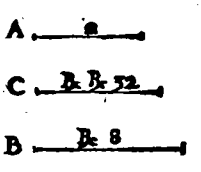
Diffi. 10.

Diffi. 11.

SCHOLIVM. I.

Media eſt irrationalis, quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.

Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis A B ſpacium contineatur. oſtendendum eſt huiuſmodi ſpacium irrationale eſſe. ſumatur enim ipſarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB eſt æquale quadrato ex C; ac propterea C poteſt rectangulum, quod ipſis AB continetur. eſt igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex ſecunda, quod demonſtratum eſt in corollario 20 ſexti elementorum. incommenſurabilis autem eſt A ipſi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C eſt incommenſurabile. ſed quadratū ex A rationale eſt. irrationale igitur eſt quadratum ex C, hoc eſt rectāgulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C eſt irrationalis. media autem idcirco vocatur, quòd irrationalis exiſtens ipſarum A B media eſt proportionalis.



Diffi. 11.

SCHOLIVM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ vna eſt irrationalium, in geometrica analogia conſiderari: media enim eſt proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia ſolum commenſurabiles.

&

& recta linea ipsũ potẽs est media: si enim quod extremis cõtinetur æquale est quadrato, quod fit à media, tres rectæ lineæ proportionales sunt.

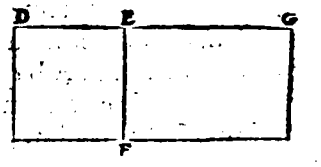
17. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sciendum est spacium illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari.
Sit recta linea AB 2; & recta BC R 8, erit rectangulum AC R 32, quod irrationale est, & medium dicetur. recta autem linea ipsum potens est R R 32, quæ media appellatur.

LEMMA.

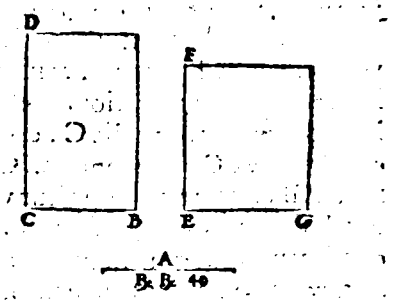
Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.



Sint duæ rectæ lineæ FE EG. Dico vt FE ad EG, ita esse quadratum ex FE ad FEG rectangulum. describatur ex FE quadratum DF, & GF cõ-
1. sexti. pleatur. Quoniam igitur est vt FE ad EG, ita DF ad FG; atque est DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc est rectangulum FEC: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. similiter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est vt GF ad FD, ita est GE ad EF.

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.



Sit media quidem A, rationalis autem CB,
45. primi. & ad CB ei, quod fit ex A æquale spacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico CD rationalem esse, & ipsi BC longitudine incommensurabilem. Quoniam enim media est
Ex antecedenti. A, potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. posit GF: sed potest & BD. æquale igitur est BD ipsi GF. atque est æquiangulum. æqualium autem, &
14. sexti. æquiangulorum parallelogrammorũ latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo vt BC ad EG, ita
22. sexti. est EF ad CD. est igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. sed quadratum ex BC commensurabile
1. pars 10. huius. est quadrato ex EG; vtraque enim ipsarum est rationalis. commensurabile igitur est & quadratum ex EF quadrato ex CD. est autem quadratum ex EF rationale. ergo & rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rationalis. itaq; quoniam FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia enim solum cõ-
Ex antecedente lemmate. mensurabiles sunt; vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectangulũ: erit quadratum ex EF incommensurabile rectangulo FEG. sed quadrato quidem
ex EF commensurabile est quadratum ex CD; rationales enim sunt potentia, vt ostensum est. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG est incommensurabile. rectangulo autem FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt enim quadrato

ex A

ex A æqualia.incommensurabile igitur est,& quadratum ex CD rectangulo DCB. sed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum,ita est DC ad CB.ergo DC ipsi CB incommensurabilis est longitudine.& ob id DC est rationalis,& ipsi C B longitudi ne incommensurabilis.quod oportebat demonstrare. 13.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

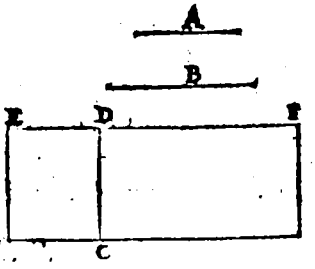
Rationales enim sunt potentia] *hoc est potentia commensurabiles: rationales enim commensurabiles sunt, vt in Scholio ante vigesimam huius demonstratur. & quamquam hę voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. quod nonnulli negarunt.* *

Sit quadratum ex A ℞ 40, CB vero sit 2. si igitur ad CB applicetur ℞ 40, latitudinem faciet ℞ 10. rursus si CB sit ℞ 5. & ad ipsam applicetur ℞ 40, erit latitudo, quam facit ℞ 8 ex 2. theoremate præmissorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Mediæ commensurabilis,media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico & B mediam esse.Expo natur enim rationalis CD,& qnadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CE, latitudinem efficiens ED. rationalis igitur est ED,& ipsi CD longitudine incommensurabilis.quadrato autem ex B æquale ad GD applicetur spacium rectangulum CF, latitudinem efficiens D F.Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B,erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF.atque est vt EC ad CF, ita ED ad DF.ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis,& incommensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rationalis est, & ipsi DC longitudine incommensurabilis. rationales igitur sunt CD DF potentia solũ commensurabiles.quod autem rationalibus potentia scilicet commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis: vocetur autem media.ergo recta linea, quę potest rectangulum C D F est media. sed B potest rectangulum CDF.quare B media erit.



45.primi. Ex antecedente. cor.9.huius 13.huius. 22.huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile, medium esse.possunt enim ipsa rectæ lineæ, quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est, ita & in medijs dicemus,rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; vniuersę enim quę longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles.si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, si- *

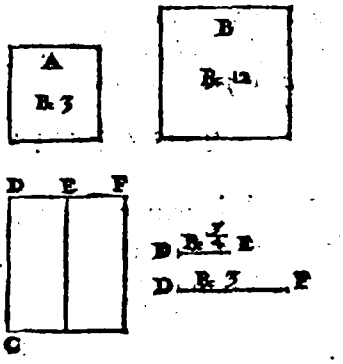
quidem

quidem etiam longitudine, dicuntur & ſic medię & longitudine, & potentia commenſurabiles. ſi autem potentia ſolum, dicuntur mediæ potentia ſolum commenſurabiles.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifeſtum eſt ſpacium medio ſpacio commenſurabile medium eſſe.

Sit ſpacium medium A, & ipſi commenſurabile ſit alterum ſpacium B. Dico B medium eſſe. Exponatur enim rationalis CD, & ad ipſam applicetur ſpacium rectangulum C E ſpacio A aequale, quod latitudinem faciat ED. erit E D rationalis, & ipſi C D longitudine incommenſurabilis. Rurſus ad eãdem C D applicetur aliud ſpacium rectangulum CF, aequale ſpacio B, latitudinemq; faciens DF. Quoniam igitur ſpacium A eſt cõmenſurabile ſpacio B; eſtq; ſpacio quidem A aequale rectangulum CE; ſpacio autem B aequale rectangulũ CF: rectangulum C E rectangulo C F commenſurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita eſt ED ad DF. ergo & E D ipſi DF longitudine eſt commenſurabilis. ſed ED rationalis eſt, & ipſi CD incommenſurabilis longitudine, ergo & DF rationalis, & ipſi CD longitudine eſt incõmenſurabilis. ſunt igitur CD DF rationales, & potentia ſolum commenſurabiles. ergo rectangulum CF, quod ipſis continetur, irrationale eſt, & medium: ac propterea ſpacium B ipſi aequale, medium ſit neceſſe eſt. quod oportebat demonſtrare.



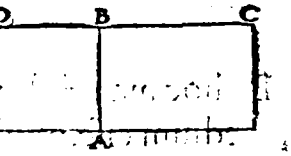
ex. huius.

ex. huius.

SCHOLIVM.

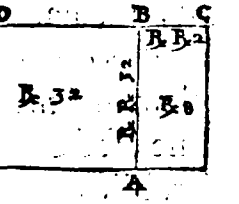
Media duplex eſt, videlicet potens quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, & quæ mediæ eſt commenſurabilis. poſtquam autem oſtendiſſet mediam eſſe, quę poteſt id quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quę ſequuntur. oportet enim primum oſtendere aliquas eſſe commenſurabiles medias, deinde inquirere quale ſpacium illud ſit, quod ipſis comprehenditur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.



Quod ex mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulũ medium eſt.

Mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico A C medium eſſe. deſcribatur enim ex AB quadratum A D. ergo AD medium eſt. & quoniam commenſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine, æqualis autem AB ipſi B D, erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. quare & DA commenſurabile eſt ipſi AC. ſed A D eſt medium. ergo & AC medium erit. quod demonſtrare oportebat.



Ex antecedẽte coroll:

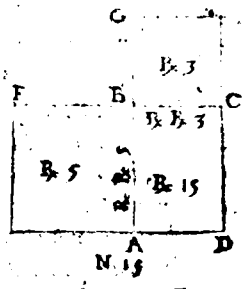
F. C. COMMENTARIVS,

Quae de rationalibus supra demonstrata sunt, eadem & de medijs demonstrabuntur.

THEOREMA. I.

Quod datis duabus medijs, vel media & rationali cõtinetur rectãgulũ datũ erit.

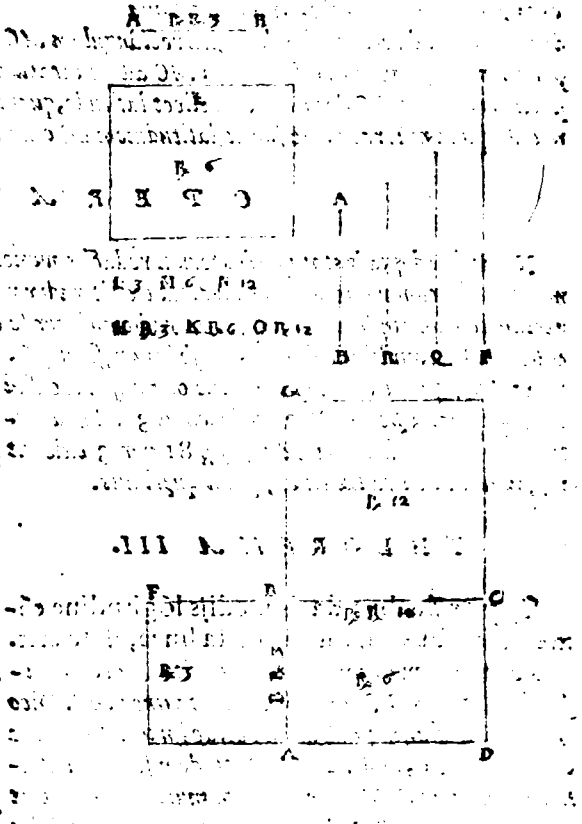
Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali AB AD continentur rectangulum AC. Dico AC datum esse. sint primum AB AD mediae, & fiant ex ipsis quadrata AF CG. erunt ea irrationalia, quae mediae appellantur. habeant autem inter se proportionem, quam H ad K. & H quidem se ipsam multiplicans faciat L, K vero se ipsam multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipsum N faciat, cuius N radix sit Σ; & rursus ipsius O sit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deinceps sunt proportionales, sunt & earũ radices HPK, & HTK deinceps proportionales erunt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectãgulum AC ad CG quadratum. quod superius demonstratum est. quadratum autem FA ad quadratum CG est, vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. est autem HP data, et datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum sit necesse est. sed sit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media, et ex ipsis rursus fiant quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et eisdem constructis similiter demonstrabitur rectangulum AC datum esse. quod demonstrare oportebat.



2. Datorum Euclid.

OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum reductos inter se multiplicabimus, & eius qui producitur radix radicis erit rectangulum, quod datis rectis lineis continetur. atque hec est multiplicatio radicum radicum inter se, quam dicunt. Vt si AB sit R R 5 AD R R 3, multiplicabimus 5 per 3, fient 15; & R R 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter se ductis producitur. si vero AB sit R R 5, AD 2, quadratũ quadrati ipsius 2, videlicet 4 & per 5 multiplicabimus, fient 80, & R R 80 erit ea, quae ex eorũ multiplicatione oritur. deniq; si AB sit R R 2, & AD R R 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2, hoc est 4 per 5, & producti accipiemus radicẽ radicis, erit R R 20 ea, quam inquirimus.

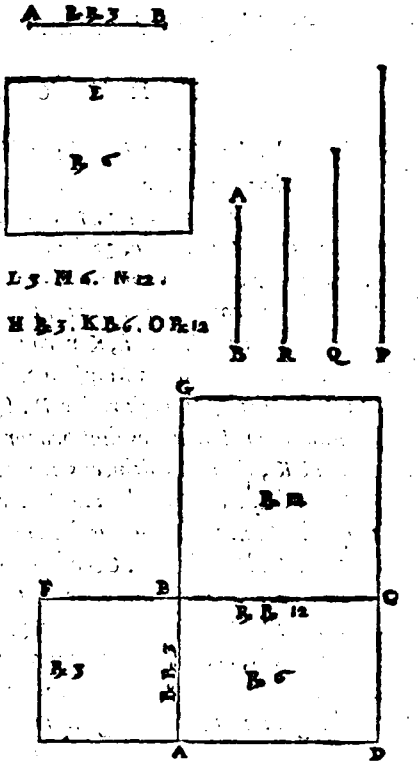


THEOREMA. II.

Si ad datum mediam applicetur spacium datum, latitudo, quam facit, data erit.

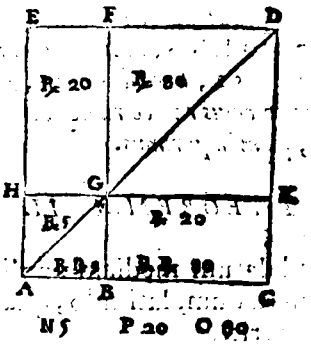
Sit data media AB, et spacium datum E, quod ad ipsam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam esse. vel igitur spacium E rationale est, vel irrationale, quod

medium appellatur. sit primum irrationale, ac medium, habeatq; quadratum ipsius AB ad spacium E proportionem eam, quã habet H ad K; et H quidem se ipsum multiplicans faciat L: K vero se ipsum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc est H ad K. Itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: et inter AB, et P sumpta media proportionali, Q, habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rursus inter AB et Q sumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R est vt H ad K. sed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad 9. quinti. *spacium E. ergo quadratum ex R spacio E est aequale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectãgulum AC, aequale quadrato ex R, quod et spacio E aequale erit. et ex AB AD fiant AF, CG quadrata; numerorum autem LM inuenietur tertius proportionalis N, cuius radix sit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps sunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erũt. atque est vt quadratum FA ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare similiter ac superius demonstrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita esse, vt K ad O. ergo et quadratũ CG, et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quærimus. non alia ratione demonstrabimus, si spacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam esse. quod oportebat demonstrare.*



OPERATIO.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo spacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit spacium ad rectum lineam applicatum; et hęc est radicum inter se diuisio, quam dicunt, vt si diuidenda sit B 6 per B B 3, multiplicabimus 6 in se ipsum, fient 36, et diuidemus 36 per 3, exibunt 12, et B B 12 erit, quae ex earum diuisione oritur. si vero diuidere oporteat 3 per B B 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et fient 81, diuisisq; 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix est ea, quam quærimus.



THEOREMA III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmẽsurabilibus cõponitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commensurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse. sit quadratum rectae linae AB ad quadratũ ipsius BC, vt L ad M, et L quidem se ipsum multiplicans faciat N; M vero se ipsum multiplicans faciat O, et quoniam AB BC longitudine commensurabiles

sint, earum quadrata L M, & rursus quidfatorum quadratum N O inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo inter ipsos N O cadet vnus medius proportionalis numerus cadat, sitq; P, cuius radix Q. & ex AC descripto quadrato A C D B, & reliqua figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q, & rectangulum GB ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L, & M vnà cum duplo ipsius Q. quòd cum dati sint L Q M, & compositum ex ipsis dabitur, ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit. quod oportebat demonstrare. 9 huius

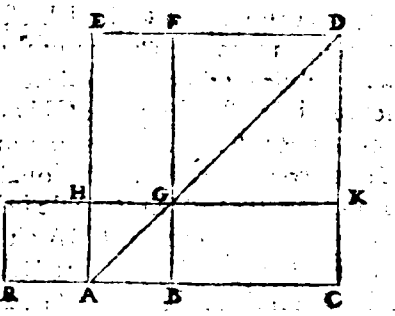
OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vnà cum duplo mediae proportionalis, & huius compositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis constat; atque hęc est Rx Rx inter se additio, quam vocant, vt si Rx Rx 5 addenda sit Rx Rx 80, iungemus ex ante demonstratis Rx 5 cum Rx 80, & cum duplo Rx 20, quae faciunt Rx 405, cuius radix, videlicet Rx Rx 405 est recta linea, quae ex earum additione producitur. Quòd si duae, vel plures mediae longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendae sint, vel etiam rationales, & mediae vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo Rx Rx 5 plus Rx Rx 3, vel Rx Rx 2 plus Rx Rx 3, plus Rx Rx 5, vel Rx 2 plus Rx Rx 6, vel 3 plus Rx 5 plus Rx Rx 6. & sic in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quae inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inequales, & longitudine commensurabiles AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratum ipsius AC, vt L ad M. & sit rursus ipsius L quadratum N, & ipsius M quadratum sit O. habebunt N O inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit P, cuius radix Q. & ex AB AC descriptis quadratis R H AD, & figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum R H ad rectangulum H C esse, vt L ad Q, & rectangulum H C ad quadratum C E, vt Q ad M. & praeterea duo quadrata R H AD aequalia esse duplo rectanguli H C & quadrato F R. ergo si ab ipsis L N auferatur duplum ipsius Q, reliquum erit id, quod quadrato F K respondet. datae autem sunt L Q M magnitudines. ergo & quadratum F K, atque eius radix B C dabitur. quod demonstrare oportebat.



N 5. P 45. O 405.

L 5. Q 45. M 1. 405.

A B 5 B. A B Rx 405 C.

OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, et ab ea, quae facta est, auferemus duplam mediae proportionalis, quae inter ipsas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quærimus; atque hęc est Rx Rx subtractio, quam appellant. vt si Rx Rx 405 auferenda sit Rx Rx 5, iungemus ex ante demonstratis Rx 5 cum Rx 405, fient Rx 500, a qua auferemus duplum Rx 45, hoc est Rx 180, relinquetur Rx 80. ergo BC erit Rx Rx 80. At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quae longitudine sit ipsi incommensurabilis; vel a media rationalis, vel contra a rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationa-

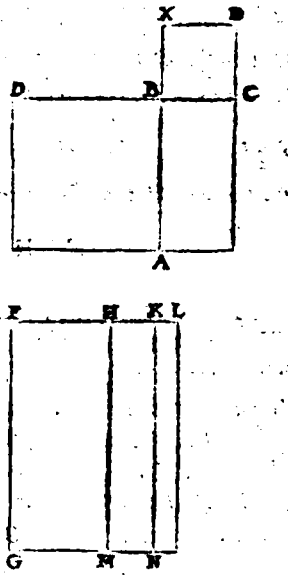
libus dictis est hoc ipsum R R 5 *minus* R R 3, *vel* R R 12 *minus* R R 3, *vel* R R 9 *minus* R R 3, *vel* R R 6 *minus* R R 30, *vel* 3 *minus* R R 40. *et ita in reliquis.*

Itaque si mediae longitudine lineae commensurabiles sint AB BC videlicet R R 32, *et* R R 2. *erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipsis continetur* R R 64, *hoc est* R 8; *sunt enim* R R 32 *et* R R 2 *longitudine commensurabiles, videlicet vt* 2 *ad* 1. *nam si* R R 32 *dividatur per* R R 2 *provenit* R R 16, *hoc est* 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quòd medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium.

Medijs enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B BC contineatur rectangulũ A C. Dico AC vel rationale esse, vel medium. describantur enim ex AB BC quadrata AD BE. vtrumque igitur ipsorum A D BE medium est. exponatur rationalis FG, & ipsi quidem AD æquale ad FG applicetur parallelogrammum rectangulum GH, latitudinem faciens FH; ipsi vero A C æquale ad HM applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens HK; & insuper ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur NL, latitudinẽ faciens KL. In recta igitur linea sunt FH HK KL. Quoniam igitur medium est vtrũque ipsorum AD BE; atque est AD quidem æquale ipsi GH, BE vero ipsi NL; erit & vtrumque ipsorum G H NL medium, & ad rationalẽ FG applicata sunt. ergo & vtraque ipsarũ FH KL est rationalis, & ipsi FG longitudine incommensurabilis. & quoniam cõmensurabile est AD ipsi BE, erit & GH ipsi NL commensurabile. est igitur & vt GH ad NL, ita FH ad K L. ergo FH ipsi K L est commensurabilis longitudine; ac propterea FH KL rationales sunt longitudine commensurabiles. rationale igitur est rectangulum, quod FH KL continetur. et quoniam BD quidem ipsi BA est æqualis; XB uero ipsi B C, erit vt DB ad BC, ita A B ad BX: sed vt D B ad BC, ita DA quadratum ad rectangulum A C: vt autem A B ad BX, ita AC rectãgulum ad quadratum CX. est igitur vt XC ad CA, ita CA ad A D: æquale autem est AD ipsi GH, & AC ipsi MK, & CX ipsi NL. quare vt GH ad M K, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoq; quod FH KL continetur est æquale quadrato, quod fit ex HK. est autem quod continetur FH KL. rationale. ergo & rationale est quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK rationalis. & si quidem HK commensurabilis est ipsi HM, hoc est ipsi FG longitudine, erit rectangulũ MH rationale; si vero HK est incõmensurabilis ipsi F G lõgitudine, KH HM rationales erunt potentia solum commensurabiles: & ob id rectangulum HN medium erit. ergo HN vel rationale est, vel medium. sed HN est æquale ipsi A C. quare AC vel rationale, vel medium est. quod igitur medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est, vel mediũ. quod oportebat demonstrare.



21. huius. 45. primi. 24. primi. 23. huius. 1. sexti. 10. huius. 1. sexti. Conuertendo. 17. sexti. 20. huius. 22. huius.

SCHOLIVM.

Admiratione dignum est triadis vel ternarij vim, ac facultatem ita potentem esse, vt etiam irrationalium potestatem definiat, & ad illorum vsque extrema permeet. preterea & illud mirum est vnamquãque

irrationalitatis

irrationalitatis speciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Musica. porrò anima ipsa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in se habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non sunt, & ipsam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud est, nomen commune mediæ in ea, quæ magis est particularis, natura positum esse. nam & quæ potest spacium contentum rationalibus longitudine commensurabilibus, media omnino est rationalium illarum; & quæ potest spacium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, sed quę potest ante dictum spacium. Illud quoque animaduertendum est, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias versatur, similem facere rationalibus. etenim has vel longitudine, vel potentia solum commensurabiles, quemadmodum illas esse dicit. & spacium quidem, quod medijs longitudine commensurabilibus continetur, medium esse, quemadmodum illic spacium rationalibus contentum rationale. spacium vero contentum medijs potentia solum cõmensurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, medium esse. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit. & videtur ea, quę inter medias longitudine commensurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia solum commensurabiles omnino media esse; quæ vero inter medias potentia solum commensurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media. ideoq; & incommensarabilis potentia interdum rationalis, interdum media est. duę enim mediæ potentia commensurabiles esse possunt, quemadmodum & duę rationales potentia commensurabiles. existimandum igitur est analogiam causſam esse ortus contentorum spaciorum: vt potequæ inter extrema; hoc est vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem constituit; & totum nexum quandoque similem facit extremis, quandoque ipsis dissimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiuę a potẽtibus appellat Euclides.

Contẽplatio quæ circa medias similis est ei, quæ circa rõnales versatur.

Medium tripliciter, rationale uero dupliciter continget.

F. C. COMMENTARIVS.

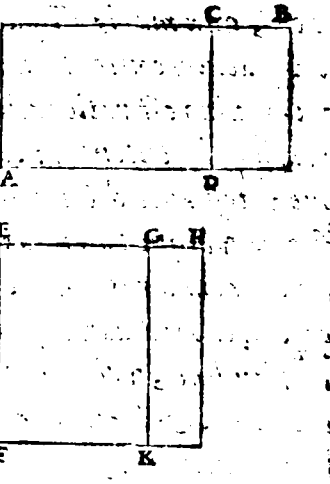
Sint mediae potentia solum commensurabiles AB BC, & sit AB ℞℞ 54, & BC ℞℞ 24, erit rectangulum ipsis contentum ℞℞ 1296, videlicet 6, quod est rationale. Rursus sint mediae potentia solum commensurabiles ℞℞ 128, & ℞℞ 22, rectangulum, quod ipsis continetur, erit ℞℞ 9216, videlicet ℞ 96, quod est medium. At vero ℞℞ 54, & ℞℞ 24: itemq; ℞℞ 128, & ℞℞ 72 esse potentia solum commẽsurabiles patet tum ex 28, & 29, huius, tum ex eo, quòd si ℞℞ 54 per ℞℞ 24 dimidatur, proueniet ℞℞ $\frac{1}{4}$, hoc est ℞ $\frac{1}{2}$. erit igitur ℞℞ 54 ad ℞℞ 24, vt

24. vt B 3 ad B 2. Rursus si BB 128 diuidatur per BB 72, proueniet BB 7. quare BB 128 ad BB 72 erit vt B 4 ad B 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVII.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B. & exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H: ipsi vero A C æquale auferatur F G. reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. rationale autē est B D. ergo & K H rationale. quoniam igitur medium est vtrumque ipsorum A B, A C; estq; A B æquale F H, & A C æquale F G: erit & vtrumque ipsorum F H F G medium: & ad rationalem E F applicata sunt. rationalis igitur est vtraque carum H E E G, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale, & K H rationale erit. est autem ad E F applicatum. rationalis igitur est G H, & ipsi E F commensurabilis longitudine. sed & E G est rationalis, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. ergo E G incommensurabilis est ipsi G H longitudine. atque est vt E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod E G, G H continetur. incommensurabile igitur est quadratum ex E G rectangulo E G H. sed quadrato quidem ex E G commensurabilia sunt ex E G, G H quadrata. vtraque enim sunt rationalia. rectangulo autem E G H commensurabile est quod bis E G G H continetur; est enim ipsius duplum. ergo quadrata ex E G, G H incommensurabilia sunt ei, quod bis E G, G H continetur. & vtraque igitur, videlicet quadrata ex E G, G H, & quod bis continetur E G G H, hoc est quadratum ex E H, incommensurabilia sunt quadratis ex E G G H. sunt autē rationalia, quę ex E G G H quadrata. irrationale igitur est quadratum ex E H: ac propterea E H est irrationalis: sed & rationalis. quod fieri non potest. non igitur medium superat medium rationali. quod oportebat demonstrare.

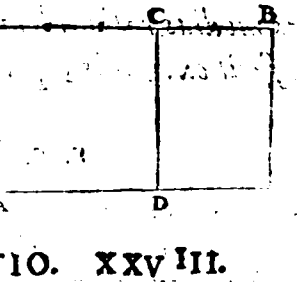


23. huius.
21. huius.
Coro. 23. huius.
20. huius.
6. huius.
24. huius.
4. secundi.
17. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non superare rationale nisi rationali, hoc modo demonstrabitur.

Sint parallelogramma rectangula A B A C rationalia. Dico D B, quo parallelogrammum A B ipsum A C superat, rationale esse. quoniam enim A B, A C sunt rationalia, & inter se commensurabilia sunt. atque est tota magnitudo A B ex magnitudinibus A C D B composita vni ipsarum A C commensurabilis. ergo & reliqua D B commensurabilis erit. sed A B est rationale. quare & D B rationale sit necesse est. quod nos ad 25 huius demonstrauimus.



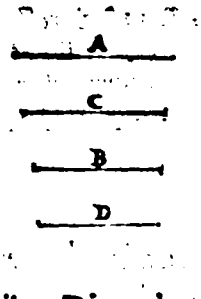
16. huius.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur

Exponatur duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB; & ſumatur ipſarum AB media proportionalis C: fiatq; vt A ad B, ita C ad D. quoniã igitur AB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit quod ipſis A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadratum ex C medium. ergo recta linea C media eſt. & quoniam vt A ad B, ita eſt C ad D; ſuntq; AB potentia ſolũ commenſurabiles: & CD potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem recta linea C media. media igitur eſt & D. quare C D mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. Dico etiam ipſas rationale continere. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D. ſed vt A ad C, ita C ad B. ergo & vt C ad B, ita B ad D. quod igitur ipſis C D continetur quadrato ex B eſt æquale. rationale autem eſt quadratum ex B. ergo & quod continetur C D rationale erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. atque illud eſt. quod facere oportebat.



11. ſexti. * 22. huius. 10. huius. 14. huius. 17. ſexti.

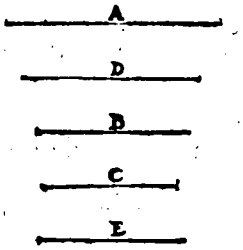
F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq; ut A ad B, ita C ad D] *Sit* A 3, *&* B ℞ 6, *erit rectangulum, quod ipſis continetur* ℞ 54, *&* *recta linea C inter ipſas A B media proportionalis, quae ipſum poteſt* ℞ ℞ 54. *itaque fiat ut A ad B, hoc eſt ut* ℞℞ 81 *ad* ℞℞ 36, *ita C videlicet* ℞℞ 54 *ad aliam, quae ſit D, hoc modo. multiplicetur* 54 *per* 36, *fiet* 1944. *ergo* ℞℞ 1944 *eſt rectangulum, quod continetur* ℞ ℞ 36, *&* ℞℞ 54 *ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad* ℞℞ 81 *latitudinem faciet* ℞℞ 24 *ex ſecundo eorundem. quare rectangulum contentũ* ℞℞ 81, *&* ℞ ℞ 24 *eſt æquale ei, quod continetur* ℞ ℞ 36, *&* ℞ ℞ 54. *eſt igitur ut* ℞℞ 81 *ad* ℞ ℞ 36, *ita* ℞℞ 54 *ad* ℞℞ 24. * 16. ſexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentia ſolum cõmenſurabiles A B C, ſumaturq; ipſarum A B media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D ad E. Quoniam igitur A B rationales ſunt, potẽtia ſolum commenſurabiles, erit quod A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadratum ex D medium. ergo D media eſt. & quoniam B C ſunt rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt vt B ad C, ita D ad E, rectę lineæ D E potẽtia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem D media. ergo & E media eſt; ac propterea D E medię ſunt potetia ſolum commenſurabiles. Dico ipſas etiam medium continere. Quoniam enim eſt vt B ad C, ita D ad E, erit permutando vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita eſt D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad E. quod igitur A C continetur rectangulum eſt æquale contento D E. eſt autem quod continetur A C medium. ergo & quod continetur D E medium erit. Inuentę igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, vt facere oportebat.



* 22. huius. 20. huius. 30. huius. 24 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit A* 4, *B* ℞ 8, *et C* ℞ 6, *erit rectangulum, quod A B continetur* *

tinetur ℞ 128, *& recta linea* D *inter ipſas* A B *media proportionalis* ℞℞ 128. *ſit igitur vt* B *ad* C, *hoc eſt vt* ℞℞ 64 *ad* ℞℞ 36, *ita* D *videlicet* ℞℞ 128 *ad aliam, quae ſit* E. *eodem modo, quo ſupra, multiplicetur* 128 *per* 36, *fit* 4608, *&* 4608 *diuidatur per* 64, *exeunt* 72. *ergo* ℞℞ 72 *erit quarta proportionalis* A, *quam quærebamus.*

LEMMA. I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipſis cõponitur etiã quadratus ſit.

Exponantur duo numeri AB BC, qui vel pares ſint, vel impares. & quoniam ſiue à par par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; erit AC numerus par. ſecetur AC bifariam in D. ſint autem AB BC uel ſimiles plani,

A B C D

A

B ni, vel quadrati, qui & ipſi ſimiles plani ſunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex C D eſt æqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque eſt quadratus, qui fit ex

C AB BC; oſtenſum enim eſt, ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquem faciãt, factum quadratum eſſe. Inuenti igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum faciunt, nempe eum, qui fit ex BD. quod ipſum facere oportebat.

COROLLARIVM.

Et manifeſtum eſt rurſus inuentos eſſe duos numeros quadratos, & qui fit ex B D, & qui ex C D, ita vt ipſorum exceſſus, videlicet qui

D *fit ex AB BC, ſit quadratus, quando AB BC ſimiles plani ſint. Quãdo autem non ſint ſimiles plani, inuenti ſunt duo quadrati & qui fit ex BD, & qui ex CD, quorũ exceſſus, qui ex AB BC nõ eſt quadratus.*

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar reliquus par eſt] *ex 24, & 26 noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD eſt æqualis ei, qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonſtratur à Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quae nos ad 15 noni libri apposuimus.*

C Oſtenſum eſt enim ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquem faciãt, factum planum eſſe] *in prima propoſitione noni libri.*

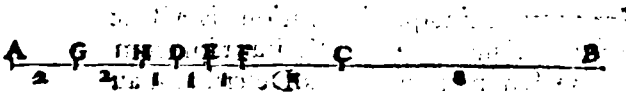
D Quando autem non ſint ſimiles plani, inuenti ſunt] *Sint enim duo numeri AB BC,* A C D C B
qui non ſint ſimiles plani, & AC bifariam ſecetur in D. rurſus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD eſt dequalis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. ſed qui fit ex AB BD non eſt quadratus. ſi enim quadratus ſit, erunt numeri AB BD ſimiles plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri ſunt, qui ſunt ex BD, & DC, quorum exceſſus, qui fit ex AB BC non eſt quadratus.

LEMMA. II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit

Sit enim qui ex A B BC quadratus, vt dictum est, & par numerus CA; secetur; CA bifariam in D. perspicuum est quadratum ex AB BG vnà cum quadrato ex CD æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadratus ex AB BC vnà cum quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. Dico igitur quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si enim est quadratus vel æqualis est quadrato ex BE, vel eo minor, nō autem maior, vt ne vnitas secetur; neue qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD, qui est æqualis quadrato ex BD æqualis sit quadrato ex AB BC vnà cum quadrato ex CE, sit primum, si fieri potest, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & sit GA duplus ipsius DE vnitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus, quorum AG est duplus DE, erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in punctō E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis ponitur quadrato ex BE. ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis ei, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE; & communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. Dico neque quadrato ex BE minorē esse. si enim fieri potest, sit quadrato ex BF æqualis, & ipsius DF duplus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita ut & HC in F bifariam diuidatur; ac propterea qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF æqualis sit quadrato ex BF. ponitur autem & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex FB. ergo sequitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualem esse ei, qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis minori, quàm sit quadratus ex BE. ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem esse. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri possit, vt idem pluribus modis ostendatur, vnus qui proxime dictus est nobis sufficiat, ne longam tractationem longius producamus.



A

B

C

D

E

F

F. C. COMMENTARIVS.

A Perspicuum est quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CD æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

B Non autem maior vt ne vnitas secetur] *si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius latus est BD, vel minus quàm BD. & si quidem BD, erit totum parti aequale, quod fieri non potest. si vero minus quam BD, cum sit maius quàm BE, vnitas secabitur. quod itidem fieri non potest.*

C Erit & reliquus CG ipsius GE duplus] *Ex 7 vel 11 septimi libri.*

D Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis] *Relinquetur enim qui ex AB BC aequalis ei, qui ex GB BC. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC est vt AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est aequalis. quod est absurdum.*

E Concludetur rursus HC duplus CF.] *Quoniam enim AC ipsius CD est duplus, quorum AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.*

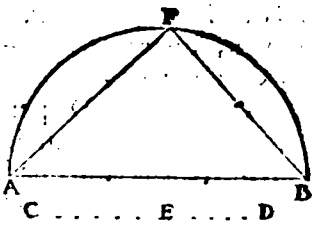
F Quod est absurdum] *Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quòd AB sit maior quam BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex CF; quoniam AC quàm CF est maior.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur enim quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD DE, ita vt ipſorum exceſſus CE non ſit quadratus. Deſcribatur autẽ in recta linea AB ſemicirculus AF B: fiatq; vt DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur eſt, vt quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, quã numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF eſt commenſurabile. ſed rationale eſt quadratum ex AB. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF eſt rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt recta linea BA ipſi AF longitudine. ergo AB AF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quòd cum ſit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF, erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex AB ad quadratũ ex BF proportionẽ habebit, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & ob id recta linea AB ipſi BF longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineę BF ſibi commenſurabilis longitudine. Inuentæ igitur ſunt duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles BA AF, ita vt maior BA plus poſſit, quàm minor AF, quadrato ipſius FB, ſibi long itudine commenſurabilis. quod facere oportebat.

Ex corolla. primi lem. antecedentium.
Per Coroll. 6. huius.
6. huius.
diffi. 9. huius
9. huius.
Ex 47. primi, uel ex coroll. ante 15. huius.
9. huius
47. primi.



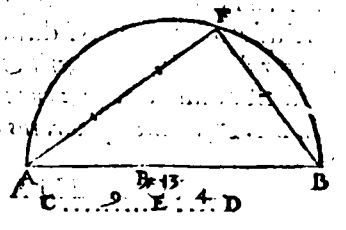
SCHOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quæ per compoſitionem fiunt; præmittit autem theoremata hęc, vtpote ex quibus eiuſmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipſis componi tur nõ ſit quadratus. atque in recta linea AB ſemicirculus AFB deſcribatur: & fiat vt DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF: & iuncta FB, ſimiliter oſtendemus, vt in antecedente, BA AF rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad id quod ex AF quadratum; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nõ igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

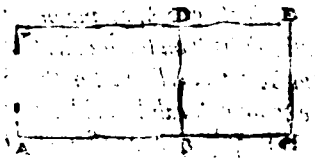


merum. ergo A B ipsi B F longitudine est incommensurabilis. & B A plus potest, quàm A F quadrato rectæ lineæ B F sibi incommensurabilis longitudine. quare A B B F rationales sunt potentia solum commensurabiles, & A B plus potest, quàm A F quadrato rectæ lineæ F B sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

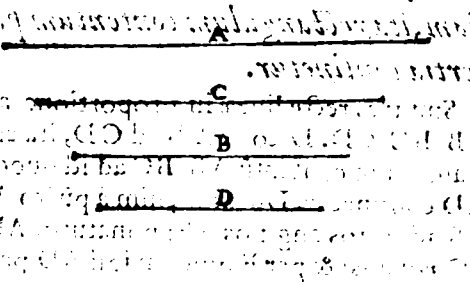
Sint duæ rectæ lineæ A B B C in proportione aliqua. Dico vt A B ad B C, ita esse rectangulum ex A B B C ad quadratũ ex B C. describatur enim ex B C quadratum B D E C, & compleatur A D parallelogrammũ. manifestum est ut A B ad B C, ita esse A D parallelogrammum ad parallelogrammum B E. atque est A D quidem, quod A B B C continetur; est enim B C ipsi B D æqualis. B E vero est quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex A B B C ad id, quod ex B C quadratum. quod demonstrare oportebat.



1. sexti.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



Exponantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B, ita vt A maior plus possit, quàm B minor, quadrato rectę lineę sibi lõgitudine commensurabilis. & sit rectangulo ex A B æquale quadratum, quod fit à recta linea C. medium autem est quòd ex A B. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipsa C media, at quadrato quod fit ex B æquale sit rectãgulum ex C D. rationale autem quod ex B, ergo & rectangulum ex C D est rationale. & quoniam est vt A ad B, ita rectangulum ex A B ad id, quod ex B quadratum, sed rectangulo quidem ex A B æquale est quadratum ex C; quadrato autem ex B æquale rectangulum ex C D: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex C D rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex C D, ita recta linea C ad ipsam D: vt igitur A ad B, ita C ad D. commensurabilis autem est A ipsi B potentia solũm. ergo & C ipsi D potentia solũ est commensurabilis. atque est C media. media igitur & D. & quoniam est vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis lõgitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Inuentę igitur sunt duæ mediæ potentia solum commensurabiles C D, quæ rationale continent, & C plus potest quàm D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine, quãdo A plus possit, quàm B quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis.

20. huius.

21. huius.

Ex antecedenti lemmate.

1. sexti.

10. huius.

24. huius.

15. huius.

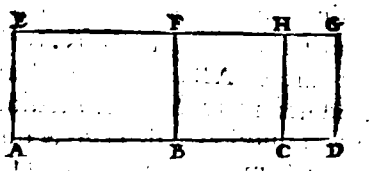
*

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commẽ ſurabiles] *Maneant eadem quae ſupra, & A plus poſſit, quàm B quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſimiliter vt ante demonſtrabitur, rectam lineam D mediam eſſe. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. ergo rurſus inuentae ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles C D, rationale continentes, & C plus poteſt quàm D quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. Sit A 8, B R 28. erit rectangulũ, quod ipſis cõtinetur R 1792, & recta linea C R R 1792, quae media eſt. fiat vt 8 ad R 28, ita R R 1792 ad aliam, quae ſit D. erit ea R R 343. ergo R R 1792 & R R 343 duae mediae ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine cõmenſurabilis. nam ſi à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à R 1792 auferatur R 343, relinquetur R 567. & ſint duae mediae R R 1792 R R 567 inter ſe longitudine commenſurabiles, videlicet vt 4 ad 3. ſi enim R R 1792 diuidatur per R R 567, prouenit R R 3 $\frac{13}{81}$, quae eſt 1 $\frac{1}{3}$, hoc eſt $\frac{4}{3}$. Rurſus ſit A 8. B R 20, erit rectangulum ipſis contentum R 1280, & recta linea C R R 1280. fiat ut 8 ad R 20, ita R R 1280 ad aliam, quae ſit D. erit ea R R 125. ſunt igitur R R 1280, & R R 125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A 3 B R 6, rectangulum ipſis contentum erit R 54, & recta linea C R R 54. Rurſus fiat ut 3 ad R 6, ita R R 54 ad aliã, erit ea R R 24. quare R R 54, & R R 24 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 6; & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis.*

LEMMA

Si fuerint tres rectæ lineę in proportione aliquâ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.



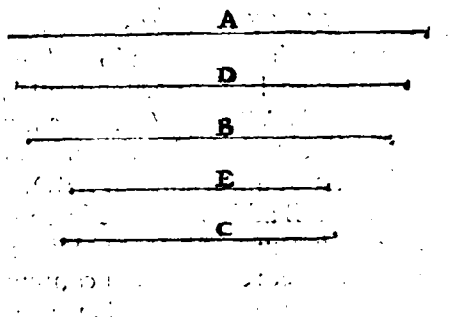
Sint tres rectę lineæ in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt A B ad C D, ita eſſe rectangulum contentũ AB BC ad id quod B C CD continetur. Ducatur enim à pũcto A ipſi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipſi BC æqualis; & per E quidem ipſi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF CH DG parallelæ ipſi A E. quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum B H; ut autem BC ad CD, ita parallelogrammum BH ad ipſum C G: erit ex æquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum C G. & eſt parallelogrãmum quidem A F, quod AB BC continetur; namque AE eſt æqualis BC; parallelogrammum vero CG eſt, quod continetur BC CD; etenim BC ipſi CH eſt æqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima & media ad rectangulum media & tertia cõtentum. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Exponantur

Exponatur tres rationales A B C, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine: & ſit rectangulo ex ipſis A B æquale quadratum, quod fit ex D. medium autem eſt rectangulum ex AB. ergo & quadratũ ex D medium erit; & recta linea D media. rectangulo autem ex BC æquale ſit rectangulum ex DE. Quoniam igitur eſt vt rectangulum ex AB ad rectangulum ex BC, ita recta linea A ad ipſam C; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C æquale rectangulum ex DE: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E rectangulum. ſed ut quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & ut igitur A ad C, ita D ad E. commenſurabilis autem eſt A ipſi C potentia ſolum. ergo & D ipſi E potentia ſolum eſt cõmenſurabilis. atque eſt D media. media igitur & E. itaquè cũ eſt vt A ad C, ita D ad E; & A plus poteſt, quàm C quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectę lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine. Dico præterea rectangulum ex DE medium eſſe. Quoniam enim rectangulo ex B C æquale eſt, quod ex D E rectangulum; medium autem eſt quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuentę igitur ſunt duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles DE, quæ medium continẽt, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis. Rurſus ſimiliter inuenientur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles. & medium continentes, ità vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; quando ſcilicet A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod facere oportebat.



26.

22. huius.

Ex antecedente lemmate.

Lem. 23. huius.

24. huius.

15. huius.

22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 8 B Rx 48, C Rx 28, rectangulũ quod ipſis AB cõtinetur, erit Rx 3072. & recta linea D RxRx 3072, quae eſt media. fiat vt A ad C, ita D ad aliã, quae ſit E. erit E RxRx 588. ergo RxRx 3072, & RxRx 588 duae mediae ſunt potentia ſolũ commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine commenſurabilis. ſi enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à Rx 3072 auferatur Rx 588, reliqua erit Rx 972. ſuntq; RxRx 3072, & RxRx 972 duae mediae longitudine inter ſe commenſurabiles, vt 4 ad 3. nã ſi RxRx 3072 diuidatur per RxRx 972, exibit RxRx 3, $\frac{13}{81}$ quae eſt 1. $\frac{1}{3}$ hoc eſt $\frac{4}{3}$. rurſus ſit A 8, B Rx 48, C Rx 20, erit D cadẽ, quę ſupra, videlicet RxRx 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quae ſit E. erit E RxRx 300. ſunt igitur RxRx 3072, & RxRx 300 duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A Rx 6, B Rx 3, C Rx 2, erit D RxRx 18. fiatq; vt A ad C, ita RxRx 18 ad aliã, quae ſit E, erit E RxRx 2. ergo RxRx 18, & RxRx 2 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, & medium continentes, quarum maior plus poteſt, quã minor, quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine.

LEMMA I.

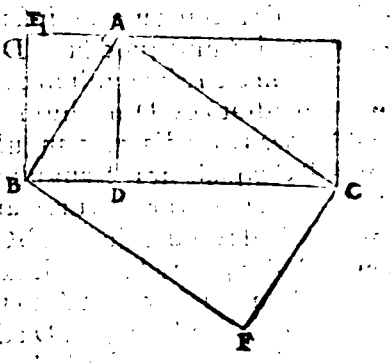
Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum BAC, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD æquale eſſe quadrato, quod fit ex BA; cõtentum vero BC CD æquale quadrato ex CA; & contentum BD DC æquale quadrato ex

DA

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale esse.

Quoniam enim in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD, triãgula ABD ADC similia sunt, & toti triangulo ABC, & inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulũ, quod CB BD continetur quadrato ex AB est æquale. Eadem ratione et rectangulum contentum BC CD æquale est quadrato ex AC, rursus quoniã in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, ducta basis partiũ media proportionalis est. quare ut BD ad DA, ita AD ad DC; ac propterea rectãgulum, quod BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt dixímus, triangulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit. Dico præterea si describamus parallelogrammum rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulum EC ipsi AF æquale esse. vtrũque enim ipsorum duplum est triãguli ABC. atque est rectangulũ quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectãgulum, quod cõtinetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.

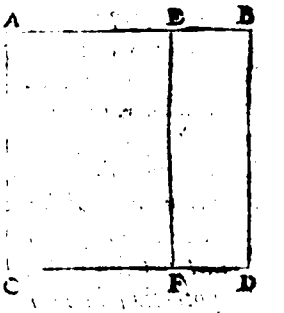
8 sexti.
4. sexti.
17. sexti.
8. sexti.
4. sexti.
16. sexti.



LEMMA II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulũ, quod tota, & minori continetur.

Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæquales ad E. Dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. describatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E quidem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrãmum ad parallelogrammum FB. atque est AF quidẽ parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis: parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis enim est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cõtinetur. quod oportebat demonstrare.

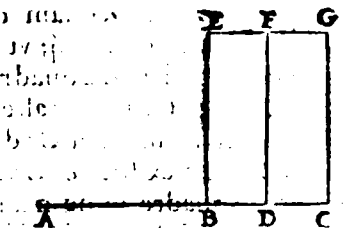


LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ inæquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrammum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum. atque est BG quidem, quod AB BC continetur; etenim AB est æqualis BE. DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DF est æqualis. quod oportebat demonstrare.

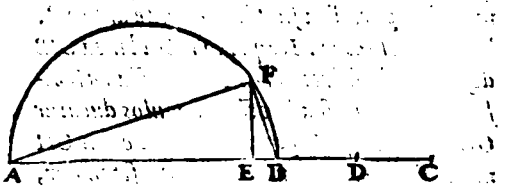


1. sexti.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium.

Exponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, quã minor BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & secta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineã AB applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB; ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duę rectæ lineę AB BC inæquales sunt, & AB plus potest, quàm BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipsi EB incommensurabilis. atque est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE æquale quadrato ex BF. quadratũ igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum, quod fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus quoniam rectangulum AEB est æquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE est æqualis BD; ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulũ igitur ABC duplum est rectãguli, quod AB EF continetur. sed rectangulum ABC est medium. ergo & medium quod continetur AB EF. est autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est. sed & ostensum est rationale, quod componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuentę igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AF FB, quę faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium. quod facere oportebat.



31. huius.

Per lemma ante 19. huius uel per 28. sexti.

19. huius.

Per 2. lemma ex antecedentibus.

Per 1. lemma

Per 9. diffi.

Per 3. lemma 22. huius.

Cor. 24. huius.

Per 1. lemma

SCHOLIVM.

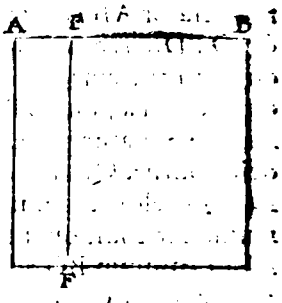
At vero ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

Exponatur

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex AB ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis. ergo & BA reliqua AE incommensurabilis est longitudine. vt autem AB est ad vtramque ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorum. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurabile erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quæ rationalis sunt partes, & ipsum rationale cõplet.

Corol. 10. huius.

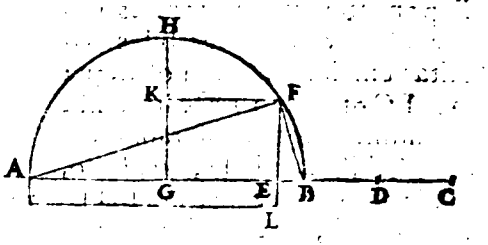
9. huius. Ex demonstratis ad 17 huius. 1. sexti.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 8, BC ℞ 20. erit BD, vel DC ℞ 5: & quadrato ipsius BD, quod est 5 aequale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figura quadrata. illud autem facile assequemur, si quæ tradita sunt in lemmate ante 18. huius repetantur. Itaque in recta linea AB descripto semicirculo AFB; & secta AB bifariam in G, ipsi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK æqualis BD. est enim GH maior, quam BD. nam cum AB sit maior, quam BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quam dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque a puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quae protendatur in L, ita vt EL sit aequalis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & aequale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD aequale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta linea AB secatur in partes aequales ad G, & in partes inæquales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vnà cum quadrato ipsius GE aequale quadrato dimidiae AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE ℞ 5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB est aequale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE ℞ 11. ergo AE constans ex AG GE est 4 vnà cum ℞ 11, vel 4 plus ℞ 11. & EB 4 dempta ℞ 11, vel 4 minus ℞ 11. vt autem sciamus, quae sint AF FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE EB. quare non inutile visum est theoremata nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quae ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.

11. huius.



2. secundi.

THEOREMA. I.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB ℞ 11. Dico quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB vtcunque secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratum totius aequale quadratis partium, & rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum AC est 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est ℞ 176, cuius duplum ℞ 704. ergo quadratum AB est 27 plus ℞ 704.

A 4 C ℞ 11 B

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: sitq; AB 6, BC R 10, & CD R 3. Dico et quadratum ipsius dari. nã cum AD secetur in duobus punctis B C, erit quadratum totius aequale rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis cõtinentur, ex ijs, quae à nobis demõstrata sunt ad secundã propositionẽ secũdi libri. quadratum igitur AB est 36, & rectangulũ contentũ AB BC est R 360; contentum vero AB CD est R 108. & rursus contentum AB BC est R 360, & quadratum BC est 10. preterea rectangulum, quod continetur BC CD est R 30, & quod rursus continetur AB CD R 108; & quod continetur BC CD R 30. & denique quadratũ CD est 3. sed duplum R 360 est R 1440, & duplum R 108 est R 432; duplum vero R 30 est R 120. quare summa totius erit 49 plus R 1440 plus R 432 plus R 120, quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs facie mus quot cumque nomina habeant.

A B C D

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

Sint rectae lineæ AB CD; constetq; AB ex binis nominibus AE EB; & sit AE 5, EB R 12; CD vero constet ex CF FD, & sit CF 4 FD R 7. Dico rectangulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vtcumque secantur in punctis E F, rectangulum ipsis cõtẽtũ est aequale rectãgulis, quae vnaquaq; partevnius ad vnãquãq; partẽ alterius applicata, continentur, ex ijsquae nos demõstrauimus ad primã propositionẽ secũdi libri theoremate primo. rectãgulũ igitur contentũ 4 & 5 est 20, & contẽtũ 4, & R 12 est R 192. quod aũt cõtinetur R 7, & 5 est R 175, & quod continetur R 7, & R 12 est R 84. totius ergo summa est 20 plus R 192 plus R 175 plus R 84. quod est rectangulum ipsis AB CD contentum. non aliter inuestietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus constent.

A 5 E R 12 B

C 4 F R 7 D

THEOREMA III.

Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC, & recta linea ipsi congruens sit CB; sitq; tota AB 4, BC R 11. erit AC 4 minus R 11. Dico & quadratum ipsius datum esse. Vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secundi libri, vt ante, sed septima eiusdem. non enim 4, & R 11 sunt partes dictae lineae, sed 4 est tota linea, et R 11; est pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur vtcumque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB, et BC vnà cum alterius partis AC quadrato. est igitur quadratum ipsius AB 16, et quadratum BC 11; rectangulum autem, quod tota AB, et BC continetur est R 176, cuius duplum R 704. ergo R 704 vnà cum quadrato ex AC est aequale 27; ac propterea quadratum ex AC est 27 minus R 704. qui vero ex quarta propositione secundi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed et Philosophus, ac medicus prestantissimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verũ quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.

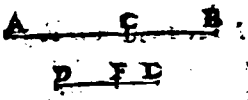
A C B

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sint duae apotomae datae AC DF: et ipsi quidem AC cõgruat CB; ipsi vero DF congruat FE: sitq; tota AB 8, BC R 12: et sit DE 4, EF R 3. erit AC 8 minus R 12, et DF 4 minus R 3. Dico

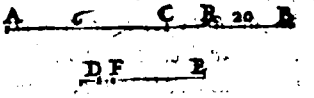
et rectãgulum, quod ipſis continetur, datum eſſe. Quoniam enim duę rectae lineae AB DE vtcumque ſecantur in punctis C F, erit rectangulũ, quod continetur totis AB DE vnà cum rectãgulo contento partibus CB FE aequale rectangulo contento tota AB, et parte FE vnà cum contento tota DF, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus AC DF continetur, ex iis, quae demonſtrata ſunt à nobis ad primã propoſitionem ſecundi libri theoremate ſecundo. itaque rectangulum contentum AB DE eſt 32, & contentum CB FE eſt R 36, hoc eſt 6; rectangulum vero, quod continetur AB FE eſt R 192, et quod continetur DE CB eſt R 192, quae duae radices inter ſe iunctae faciunt R 768. quare 38 eſt aequalis R 768 vnà cum eo, quod AC DF continetur. ex quibus ſequitur rectangulum contentum AC DF eſſe 38 minus R 768. at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; et ob id aſſerunt ſi minus per minus multiplicetur produci plus, ſed non recte, cum vtendum ſit theoremate ſecundo; neque enim 8, et R 12 ſunt partes vnius rectae lineae; immo vero 8 eſt tota linea, et eius pars R 12, et ſimiliter dicendũ de 4 minus R 3. ex ipſorum tamen operatione nullus ſequitur error.



THEOREMA X.

Data recta linea, quae ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectangulum, quod ipſis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quae conſtet ex binis nominibus AC CB, vt ſit AC 6, CB R 20. data autem apotome ſit DF, et ipſi congruens FE, vt tota DE ſit 4, et EF R 12. erit DF 4 minus R 12. Dico rectãgulũ, quod ipſis AB DF cõtinetur datum eſſe. Quoniam enim duae rectae lineae AB DE vtcumque ſecantur in punctis CF, erit ex ſecundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipſis AB DE continetur, aequale rectangulis, quae ſunt vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata; videlicet rectangulo contento DF AC, et contento DF CB: et praeterea rectangulo, quod continetur FE AC, et quod continetur FE CB. rectangulum autem contentum DE AC vnà cum contento DE CB eſt aequale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima ſecundi libri. Itaque rectangulum contentum DE AC eſt 24, et contentum DE CB eſt R 320. rectangulũ vero, quod cõtinetur FE AC eſt R 432, et quod continetur FE CB R 240. ergo rectangula, quae continẽtur DF AC, et DF CB, hoc eſt rectangulum contentum DF AB eſt 24 plus R 320, minus R 432, et minus R 240. Eodem modo procedemus, ſi rectae lineae AB DE ex pluribus nominibus conſtent.



Ex quibus apparet ſi plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.

His ita demonſtratis conſtat, quadratum ipſius AE eſſe 27 plus R 704, et quadratum EB eſſe 27 minus R 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod eſt 5, erit quadratum ex AF 32 plus R 704, et quadratum ex FB 32 minus R 704, rectaq; linea AF radix huius ſummae 32 plus R 704, quam radicem vniuerſalem appellant, et ita notant, videlicet R V. 32 plus R 704: et ſimiliter BF R V. 32 minus R 704, quarum quidem quadrata inter ſe iuncta videlicet 32 plus R 704, et 32 minus R 704 faciunt 64, quod eſt ipſius AB quadratum. praeterea quoniam rectangulum, quod continetur rectis lineis AF FB eſt aequale contẽto ipſis AB EF, vt demonſtratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF eſt R 320: erit etiam rectangulum, quod his lineis R V. 32 plus R 704, et R V. 32 minus R 704 continetur R 320. Hoc autem ita eſſe ex earum quoque inter ſe multiplicatione manifeſto apparere poteſt. diſpoſitis enim his radicibus videlicet R V. 32 plus R 704, et R V. 32 minus R 704, ut quid ex earum multiplicatione proueniat cognoſcamus, operandum eſt, quemadmodum in ſimplicibus radicibus; nimirũ multiplicãdo earũ quadrata inter ſe, et eius, quod producitur radix erit id, quod quaeritur. cũ aũt quadrata utriuſq; cõſtẽt ex duabus partibus, erit rectãgulũ, quod totis cõtinetur, ac ſi lineę eſſent, aequale rectãgulis, quę fiũt ſingulis partibus vnius ad ſingulas alterius applicatis, ut demonſtratũ eſt. ſi igitur 32 in ſe multiplicentur fiunt 1024; rurſus ſi 32, hoc eſt R 1024 multiplicet R 704 fit R 720896. et ita ſi 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. poſtremo ſimul tiplicetur R 704 per minus R 704 fiunt minus 704. totũ igitur ex his compoſitũ eſt 1024 plus

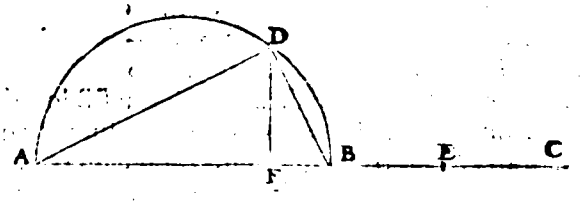
R 720896

R 720896 *minus* R 720896 *minus* R 704, *hoc est* 1014 *minus* 704. *itaq; detractis* 704 *de* 1024 *relinquetur* 320, *& eius radix erit id quod quæritur. ergo si multiplicemus* R V. 32 *plus* R 704 *per* R V. 32 *minus* R 704 *producetur* R 320. *Quatenus vero ad scholiũ pertinet, sit* AB 10 *& numeri* CD 5. 3. *& fiat vt* 5 *ad* 3. *ita quadratũ ex* AB, *hoc est* 100 *ad quadratũ ex* BE, *erit ad* 60. *ergo ipsa* BE *est* R 60, *&* AE 10 *minus* R 60. *rectãgulum autem* BF *est* R 6000, *& rectangulum* AF 100 *minus* R 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectãgulum vero quod ipsis continetur rationale.

Exponantur duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant, ita vt AB plus possit quam BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. & in ipsa AB describatur semicirculus DB, secetq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur AF FB. incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine. à puncto autem F ipsi AB ad rectos angulos ducatur FD; & AD DB iungantur. itaque quoniam AF est incommensurabilis FB; erit & BAF rectangulum rectangulo ABF incommensurabile. est autem rectangulũ quidem BAF quadrato ipsius AD æquale; rectangulum vero ABF æquale quadrato ipsius DB incommensurabile igitur est quadratum AD ipsius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam medium est quadratum ipsius AB, erit & compositum ex quadratis ipsarum AD DB medium. quòd cum dupla sit BC ipsius DF, & rectangulum ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commensurabile. rationale autem est rectangulum ABC, ita enim ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD est rationale. sed rectangulo ex AB FD æquale est rectangulum ADB quare & ipsum ADB rectangulum rationale erit. Inuentæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommẽsurabiles AD DB, quæ faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum uero, quod ipsis continetur rationale.



2. huius

Lemma ad 19. huius.

19. huius.

Lemma 2.

Lemma 2.

Lemma 3.

Lemma 1. ad 2. 34. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

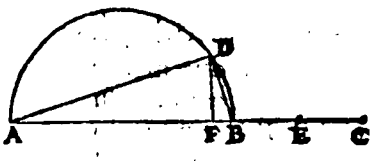
Sit recta linea AB R R 54, BC R R 24. *& diuisa* R R 24 *bifariam, erit eius dimidia* BE R R 1 $\frac{1}{2}$. *applicetur ad* AB *parallelogrammum aequale quadrato ipsius* BE, *hoc est aequale* R R 1 $\frac{1}{2}$, *deficiens figura quadrata. quod similiter, atque supra fiet. diuisa enim rursus* AB. *hoc est* R R 54 *bifariam, erit eius dimidia* R R 3 $\frac{1}{8}$. *& si ab ipsius quadrato, videlicet a* R R 3 $\frac{1}{8}$ *auferatur* R R 1 $\frac{1}{2}$, *reliqua erit* R R $\frac{1}{64}$. *ergo recta linea* AF *est* RR 3 $\frac{1}{8}$ *plus* RR $\frac{1}{8}$, *&* FB RR 3 $\frac{1}{8}$ *minus* RR $\frac{1}{8}$. *quadratũ aũt ipsius* AF *eodẽ modo inuenietur esse* R 6 *plus* R 4 $\frac{1}{16}$. *& quadratũ ex* FB R 6 *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quibus addito cõi quadrato ipsius* FD, *videlicet* R 1 $\frac{1}{2}$, *erit quadratum ex* AD R R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *& quadratum ex* DB R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$. *ideoq; rectæ lineæ* AD R R V R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *&* DB R R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quarũ quadrata simul iuncta faciunt* R 54, *videlicet rectae lineae* AB *quadratum. quod est medium. At rectangulum, quòd* AD DB *continetur est æquale contento* AE DF. *contentum vero* AB DF, *hoc est* R R 54, *&* R R 1 $\frac{1}{2}$ *est* R R 81, *hoc est* 3. *ergo quod continetur* AD DB *est* 3. *sed et idem aliter conflat multiplicando* R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R R V R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$; *fit enim* R 9,

quæ est 3. sunt igitur hæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectãgulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq́ue composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentia solũ commensurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quẽadmodũ in ijs, quæ superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex AB, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quòd cum rectangulũ AFB æquale sit quadrato alterutrius ipsarũ BE DF, erit DF æqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplũ est eius, quod AB FD continetur. medium autem est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediũ, atque est æquale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lõgitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurabile est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quæ ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentæ sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.



73 huius.

Coroll. 14 huius. 1. lemma ad 34. huius. 15. huius.

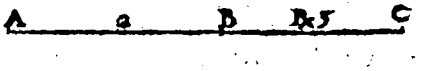
F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 18, & BC ℞℞ 2. diuidatur 4, BC bifariam in E, erit BE ℞℞ $\frac{1}{2}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, hoc est ℞ $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{2}$ & FB ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ minus ℞℞ $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipsius AF ℞ 3 $\frac{1}{20}$ plus ℞ 3, & quadratum FB ℞ 3 $\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito utrique quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & quadratum ex DB ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD est ℞ V. ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, quarũ quadrata simul iuncta faciunt ℞ 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est ℞ 1 $\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, potẽtia enim solũ



commensu-

commensurabiles sunt, & vt AB ad BC, ita rectãgulum ABC ad id, quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed recta gulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC continetur incommensurabile est quadratis ex A B B C. & componendo quod bis AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incõmensurabile est composito ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 1. sexti. 10. huius. 6. huius. 13. huius. 4. secundi. 10. diffi. 11. diffi.

SCHOLIVM.

Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2, & BC Rℝ 3. erit AC 2 plus Rℝ 3. & eius quadratum 7 plus Rℝ 48. est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur Rℝ 12, cuius duplum est Rℝ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.

Componantur enim duę mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quę rationale contineãt. dico totam AC irrationalem esse. Quoniam enim in commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed A B C rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex A C irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

A ℝℝ 54 B ℝℝ 24 C

A B C

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hę inueniantur docuit in 28 huius. sit autem AB Rℝ 54, BC Rℝ 24, erit tota AC Rℝ 54 plus Rℝ 24.* A

Et quadrata ex A B B C incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis A B BC continetur] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum] *Ex 4 secundi,* C

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.* D

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duę mediæ potentia solum commensurabiles componantur,

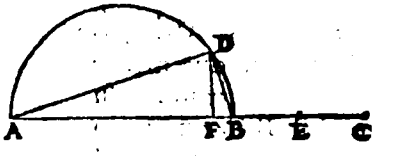
quæ medium

quae est 3. sunt igitur hę rectae lineae potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentia solũ commensurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quẽadmodũ in ijs, quæ superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex AB, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quòd cum rectangulũ AFB æquale sit quadrato alterutrius ipsarũ BE DF, erit DF æqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplũ est eius, quod AB FD continetur. medium autem est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediũ, atque est æquale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lõgitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurabile est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quę ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentæ sunt duę rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.



23 huius.

Coroll. 24 huius.

1. lemma ad 34. huius.

25. huius.

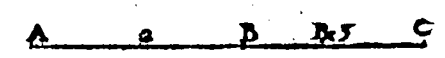
F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 18, & BC ℞℞ 2. diuidatur ꝟ BC bifariam in E, erit BE ℞℞ $\frac{1}{8}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, hoc est ℞ $\frac{1}{8}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF ℞℞ $1\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{2}$ & FB ℞℞ $1\frac{1}{8}$ minus ℞℞ $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipsius AF ℞ $3\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & quadratum FB ℞ $3\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito utrique quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD ℞ $4\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & quadratum ex DB ℞ $4\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD est ℞ V. ℞ $4\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ $4\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, quarũ quadrata simul iuncta faciunt ℞ 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est ℞ $1\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, potẽtia enim solũ



commensu-

commensurabiles sunt; & vt AB ad BC, ita rectãgulum ABC ad id, quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed recta gulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC continetur incommensurabile est quadratis ex A B B C. & componendo quod bis AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incõmensurabile est composito ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 1. sexti. 10. huius. 6. huius. 13. huius. 4. secundi. 10. diffi. 11. diffi.

SCHOLIVM.

Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2, & BC ℞ 3. erit AC 2 plus ℞ 3. & eius quadratum 7 plus ℞ 48. est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur ℞ 12, cuius duplum est ℞ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.

Componantur enim duę mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quę rationale contineãt. dico totam AC irrationalem esse. Quoniam enim in commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed A B C rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex A C irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima. A ℞ 54 B ℞ 24 C A B

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hę inueniantur docuit in 28 huius. sit autem A B ℞ ℞ 54, B C ℞ ℞ 24, erit tota AC ℞ ℞ 54 plus ℞ ℞ 24.* A

Et quadrata ex A B B C incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis A B BC continetur] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum] *Ex 4 secundi.* C

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.* D

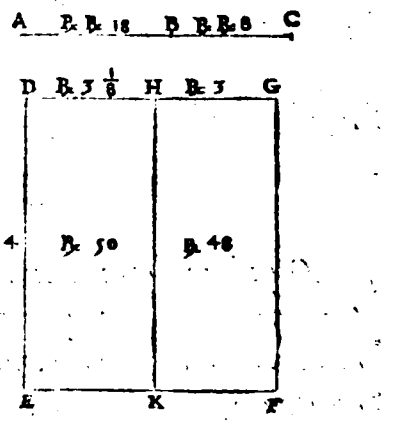
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duę medię potentia solum commensurabiles componantur,

quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles, AB BC, quæ medium
B contineant. Dico AC irrationalem esse. exponatur rationalis DE: & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinē faciat DG.
C itaque quoniam quadratum ex AC æquale est
4. secundi quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB BC continetur. applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammū
E rectangulum EH. reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB BC, erūt & qua
F drata ex AB BC media. medium autem ponitur & quod bis continetur AB BC. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo autem bis AB BC contento æquale est ipsum HF. me-
G dium igitur est vtrumque ipsorum EH HF: & ad rationalē applicantur. ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis.
H & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC lōgitudine; atque est vt AB ad BC,
K ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum: erit quadrato ex AB rectangulum
L ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC: rectangulo autem ABC est commensurabile,
M quòd bis AB BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC. sed quadratis ex AB BC æquale est parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF pa-
N rallelogrammum. quare EH ipsi HF est incommensurabile; & ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales. ergo DH
O HG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est irratio-
P nalis; rationalis autem DE; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulū
Q irrationale est. spacium igitur DF est irrationale, & quę ipsum potest irrationalis. pótest autem ipsum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.



SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medijs secundam; quoniam medium est non rationale, quod ipsis AB BC continetur; medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

ex huius. Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ medię potentia solum commensurabiles AB BC, quę medium contineant.] *Quomodo autem hę inueniantur docet in 29 huius. sit AB* RR 18, *et BC* RR 8, *erit AC* RR 18 *plus* RR 8, *cuius quadratum* R 50 *plus* R 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum

gulum DF ad ipſam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4, ad quam ſi applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quae ſit DH: et ſi ad eadem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quae ſit HG. ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale eſt quadratis] *Ex quarta ſecundi, vel* 4. *Barlaam monachi.* C

Applicetur ad ipſum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum rectangulum EH] *Quadratum ipſius AB eſt* R 18, *et quadratum BC* R 8, *quae inter ſe iuncta faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH eſt* R 50, *et recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$. D

Reliquum igitur FH eſt æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc eſt* R 48, *et recta linea HG* R 3, *vt dictum eſt.* E

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod AB BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur eſt ei commenſurabile, videlicet duplum ex 6. huius, et ipſum medium erit, ex corollario 24. huius.* F

Ergo vtraque recta linea DH HG eſt rationalis, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23. huius.* G

Atque eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23 huius appoſito, vel ex 1. ſexti.* H

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommenſurabile] *Ex 10. huius.* K

Sed quadrato quidem ex AB commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commenſurabiles. ergo & earum quadrata commenſurabilia erunt, et compoſitum ex ipſis commenſurabile vtriuſque quadrato ex 16. huius.* L

Ergo compoſitum ex quadratis AB BC incommenſurabile erit ei, quod bis continetur AB BC] *Ex 14. huius.* M

Et ob id recta linea DH ipſi HG incommenſurabilis longitudine] *Ex 1. ſexti, et 10. huius.* N

Ac propterea DG eſt irrationalis] *Ex 37. huius.* O

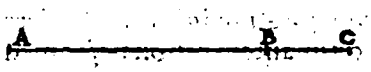
Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale eſt] *Quomodo hoc ſequatur in antecedenti ſcholio dictum fuit.* P

Et quę ipſum poteſt irrationalis] *Ex 11. diffinitione.* Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componãtur, quæ faciãt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem maior.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico AC irrationalem eſſe. Quoniam enim id, quod AB BC continetur, medium eſt, & quod bis continetur AB BC medium erit. compoſitum autem ex ipſarum AB BC quadratis eſt rationale. ergo quod bis AB BC continetur incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis ipſarum AB BC. & ob id quadrata ex AB BC vna cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt quadratum ex AC, incommenſurabile eſt quadratis ex AB BC. rationale autem eſt compoſitum ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit, ac propterea recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem maior.

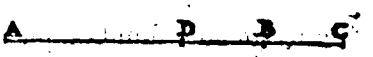


A B

SCHOLIVM.

Vocantur autem ipſam maiorem, propterea quòd rationalia ex AB BC maiora

BC maiora ſint medio, quod bis AB BC continetur: oporteatq; à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC maiora eſſe eo, quod bis AB BC continetur, ſic oſtendemus.



Manifeſtum igitur eſt AB BC inter ſe inæquales eſſe. ſi enim ſint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit. quod nõ ponitur. Inæquales igitur ſunt AB BC. ponatur maior AB, & ipſi BC
7. ſecundi. æqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia ſunt ei, quod bis AB BD cõtinetur vnà cum quadrato ex DA. æqualis autem eſt DB ipſi BC. quadrata igitur ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoq; quadrata ex AB BC maiora ſunt, quàm id, quod bis AB BC continetur, quadrato ipſius DA.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt] *Inueniuntur autẽ hæ ex 34 huius. ſit AB R V. 34 plus R 704, et*
B *BC R V. 32 minus R 704. erit tota AC R V. 32 plus R 704 plus R V. 32 minus R 704.*
C Et quod bis AB BC continetur medium erit] *Ex corollario 24 huius.*
Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt, quadratum ex AC incommenſurabile eſt quadratis ex AB BC] *Ex 17. huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommẽſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico A



B C irrationalem eſſe. Quoniam enim cõpoſitum ex ipſarum AB BC quadratis medium eſt; quod autem bis AB BC cõtinetur rationale: erit compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis incommenſurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare componẽdo quadratum ex AC eſt incommenſurabile ei, quod bis continetur ABBC. eſt autem rationale, quod bis AB BC continetur. quadratum igitur ex AC irrationale eſt; ideoq; recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipſam idcirco appellauit, quòd poſſit bina ſpacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale præcedit irrationale, ipſius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Componãtur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea quæ propoſita ſunt] *Hæ autem inueniuntur ex 35 huius. ſit AB R V. R 13 ½ plus*

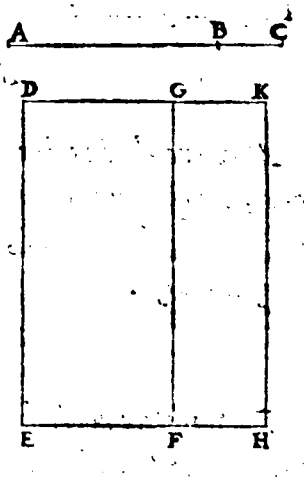
Rᵉ 4 ½, BC Rᵉ V. Rᵉ 13 ½ minus Rᵉ 4 ½, vt tota AC fit Rᵉ V. Rᵉ 13 ½ plus Rᵉ 4 ½ plus Rᵉ V. Rᵉ 13 ½ minus Rᵉ 4 ½.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius.* B *ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.*

Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis con- C
tinetur AB BC] *Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC vna cum eo, quod bis AB BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC.* 4. secundi.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectę lineę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis cõtinetur medium, incommensurabileq; compositum ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bina media potens.



Componantur enim duæ rectæ lineę potẽtia incõmensurabiles AB BC, quę faciant compositum quidẽ ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum quadratis. Dico AC irrationalẽ esse. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelógrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. totum igitur DH quadrato ipsius AC est æquale. & quõniam medium est compositum ex quadratis ipsarum AB BC, & æquale parallelogrammo DF; erit ipsum quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatũ est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE lõgitudine incommensurabilis. ob eandem causam & GK est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG; hoc est ipsi DE. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur; erit & parallelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK; & sunt rationales. quare DG GK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationalis est. vocetur autem bina media potens. A B C D E F G

SCHOLIVM.

Vocauit ipsam bina media potẽtem; propterea quod potest bina spacia media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis; & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur. n. duæ rectę lineę potentia incõmensurabiles AB BC, quæ faciãt A

compoſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis medium, quod autem ipſis cõtinetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri poſsint, tradit in 36. huius. Sit AB* R *V.* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R 3, *& BC* R *V.* R 4 $\frac{1}{2}$ *minus* R 3. *erunt earum quadrata ſimul iuncta* R 18, *& rectangulum ipſis contentum* R 1 $\frac{1}{2}$, *cuius duplum eſt* R 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum DF æquale quadratis ipſarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam ſi applicetur parallelogrammum DF, aequale compoſito ex ipſarum AE BC quadratis, videlicet* R 18, *latitudinem faciet* R 2, *quae ſit DG: & ſi ad eandem applicetur parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* R 6, *latitudinẽ faciet* R $\frac{3}{7}$, *quae ſit GK. tota igitur latitudo DK erit* R 2 *plus* R $\frac{3}{7}$, *quae eſt irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit aequale quadrato ipſius AC, ex 4 ſecundi.*

C Rationalis igitur eſt DG ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommenſurabilis eſt ipſi GK] *Ex 10 huius, eſt enim vt* D *F ad GH, ita DG ad GK, ex 1. ſexti.*

E Ac propterea DK eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale eſt] *Nam quod rationali, & irrationali continetur eſt irrationale, vt in ſcholio 39. huius demonſtratum fuit.*

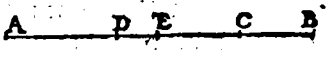
G Et ipſum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCHOLIUM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quę propoſitas ſpecies conſtituunt, mox demonſtrabimus, ſi prius lemma quoddam expoſuerimus, quod huiuſmodi eſt.

LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & ſecetur tota in partes inæquales ad vtrumque punctorum CD: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipſarum AC CB quadratis AD DB maiora eſſe.



Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam maior eſt AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB eſt autem AE ipſi EB æqualis. ergo D E quàm EC eſt minor: & puncta CD non æqualiter diſtant à bipartita ſectione. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineæ CE eſt æquale quadrato ipſius EB; ſed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineę DE eſt æquale ipſius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipſius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipſius DE. Quorum quadratum ipſius DE eſt minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus eſt rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus eſt eo, quod bis continetur AD DB. ſed compoſitum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, eſt æquale compoſito ex quadratis ipſarum AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. eſt enim vtrumque eorum quadrato ipſius AB æquale. & reliquum igitur compoſitum ex quadratis AC CB maius erit compoſito ex quadratis AD DB. quod demonſtrare oportebat.

5. ſecundi.

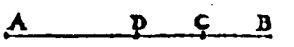
4. ſecundi

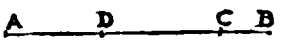
ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuiſa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex AC CB maiora eſſe quadratis ex AB DB.

Quoniã enim quadrata ex AC CB dupla ſunt quadratorum ex AD DC, quod demonſtratum eſt in nono theoremate ſecundi libri elementorum; & ſunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD; propterea quòd AB in D bifariam ſecatur; quod autem bis fit ex DC duplum eſt quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB æqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora ſunt quàm quadrata ex AD DB, eo, quod bis fit ex DC. Nõ ſecetur autem AB bifariam, ſed vtcunque in punctis CD, ita vt AD ſit maior, quàm CB. ſimiliter demonſtrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora eſſe. Quoniam enim recta linea AB vtcũque ſecatur in C, quadratum ex AB eſt æquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratũ ex AB eſt æquale quadratis ex AD DB vnà cũ eo, quod bis AD DB continetur. quorũ quod bis continetur AD DB maius eſt eo quod bis AC CB continetur. eſt enim rectangulum ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora ſunt. quod demonſtrare oportebat.





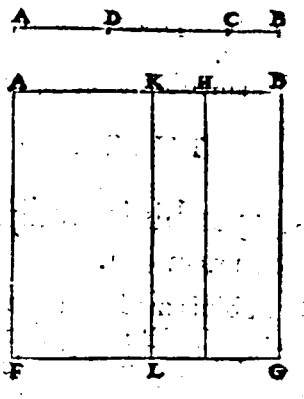
4 secundi.

Ex proxime demõſtratis.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perſpicue apparet exceſſum, quo compoſitum ex quadratis rectarum linearum AC CB ſuperat compoſitum ex quadratis ipſarum AD DB, æquale, vel potius eundem eſſe exceſſui, quo rectangulum bis contentum AD DB ſuperat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipſam AF applicetur parallelogrammum FH æquale compoſito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG æquale rectangulo bis contento AC CB. Rurſus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK æquale compoſito ex quadratis AD DB, reliquum igitur parallelogrammum KG eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH eſt æquale compoſito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK eſt æquale compoſito ex quadratis AD DB: erit parallelogrammum LH exceſſus, quo alterum alterum ſuperat. Sed idem LH eſt exceſſus, quo rectangulum bis contentum AD DB ſuperat id, quod bis AC CB continetur. conſtat igitur verum eſſe, quod nos demonſtrandum propoſuimus.



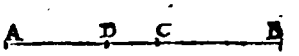
4. secundi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B diuiſa in nomina ad punctum C. ergo AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Dico AB ad aliud punctũ non diuidi in duas rationales potentia ſolum commenſurabiles. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt AD DB rationales ſint potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles. Itaq; manifeſtũ eſt A B C non eſſe eandem, quæ D B. ſi enim fieri poteſt, ſit eadem. erit igitur & AD ea-

dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD ad DA : & AB in D similiter diuisa erit, atque in punctо C. quod non ponitur. ergo AC non est eadē, quę DB. simili ratione & puncta CD non æquali



D
E
F ter distant à bipartita sectione. quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectarum linearū AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB; & quadrata ipsarum AD DB vnà cū
G eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ip
H sa media sint. atqui medium non superat medium rationali. nō igitur quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 37 huius.*

B Itaque manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse aequalem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro aequali.*

C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit aequalis ipsi DB, dempta BC vtrique communi, erit reliqua AD reliquae CB æqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuisa, atque in ipso C.*

E Simili ratione & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione] *Nā si AD CB inter se æquales non sint, neque puncta CD aequaliter distabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD bifariam diuidit.*

F Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis cōtinetur AC CB] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum est.*

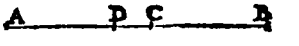
G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt] *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non superat medium rationali] *Ex 27 huius.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XLIIII.

Quę ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs prima AB diuisa in punctо C, ita vt AC CB medię sint potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineāt. Dico AB in alio punctо non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur etiam in D, ita vt AD DB sint medię potentia solum cōmensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis AD DB ab eo, quod bis AB CB continetur, hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim sunt rationalia: sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio punctо diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.



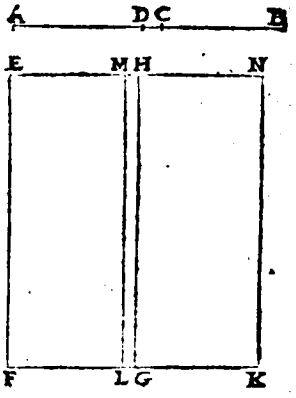
Ex demonstratis ad 21 huius.

27. huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs ſecunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs ſecũda AB diuiſa in C, ita vt AC CB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quę medium contineant. manifeſtum eſt punctum C non eſſe in bipartita ſectione, quoniam nõ ſunt longitudine commenſurabiles. Dico ipſam A B in alio puncto non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt AC non ſit eadem, quæ DB. ſed maior A C poſitione. Itaque conſtat quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora eſſe, vt ſupra oſtendimus; & AD DB medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Exponatur rationalis EF: & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipſam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æquale auferatur EG. reliquum igitur HK æquale eſt ei, quod bis AC CB continetur. rurſus quadratis ex AD DB, quæ minora ſunt quadratis ex AC CB, vt oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur EL. ergo reliquum MK eſt æquale ei, quod bis cõtinetur AD DB. et quoniam media ſunt quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum eſt. quare EH rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione & HN eſt rationalis, & ipſi EF incommenſurabilis lõgitudine. Quòd cum AC CB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, erit AC ipſi C B incommenſurabilis longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB continetur. quadratum igitur ex A C incommenſurabile eſt ei, quod continetur AC. CB. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex A C C B, etenim AC CB potentia ſunt commenſurabiles; ei uero, quod continetur AC CB, commẽ ſurabile eſt illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autẽ ex AC CB æquale eſt parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB eſt æquale HK. ergo EG ipſi HK eſt incommenſurabile; & ob id recta linea EH ipſi HN incommenſurabilis longitudine; ſuntq; rationales. ergo EH HN rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur, tota irrationalis eſt, quę ex binis nominibus appellatur. quare EN ex binis nominibus eſt diuiſa in puncto H. eadem ratione & EM MN oſtendentur rationales potentia ſolum cõmenſurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiſa, uidelicet ad H, & ad M. & non eſt EH eadem, quæ MN: quoniam quadrata ex AC C B quadratis ex AD DB ſunt maiora; quadrata autẽ ex AD DB maiora ſunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc eſt parallelogrammum EG multo maius eſt eo, quod bis continetur AD DB, hoc eſt parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN eſt maior. non igitur E H eadem eſt, quę MN. quod demonſtrare oportebat.



A B C D E

F. C. COMMENTARIVS.

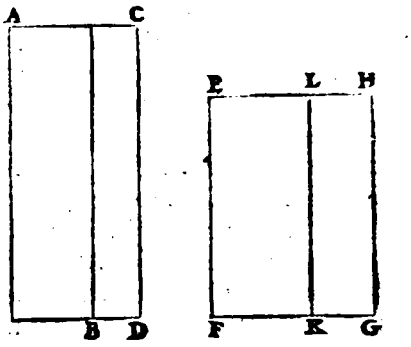
Sed maior AC poſitione] *Hoc eſt ponatur nunc AC maior, quam DB.* A
Vt ſupra oſtendimus] *In lemmate, quod poſitum eſt ante 43. huius.* B
Reliquum igitur HK æquale eſt ei, quod bis AC CB cõtinetur.] *Ex 4. ſecundi libri.* C
Et quoniam media ſunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] *Rectæ enim li* D

neæ

neae AC CB ponuntur mediae potentia ſolum commenſurabiles. quare & media erunt ipſarum quadrata, atque inter ſe commenſurabilia; & ſi componatur vnum fiet medium, quemadmodũ ex duabus rationalibus, ſi longitudine commenſurabiles ſint, vna ſit rationalis.

At vero ſpacium ex medijs compoſitum irrationale eſſe ſic demonſtrabimus.]

Componantur duo media ſpacia AB BC. Dico totum AD eſſe irrationale. ſit enim rationale, ſi fieri poteſt; exponaturq́, rationalis quędam recta linea EF; & ad ipſam applicetur parallelogrammum EG ipſi AD aequale, latitudinẽ faciens EH: à parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipſi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC eſt aequale. & quoniam medium eſt vtrumque ipſorum AB BC; atque eſt EK quidem ipſi AB aequale; LG vero ipſi BC: erit & vtrumque ipſorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata ſunt. rationalis igitur eſt vtraque ipſarum EL LH, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam AD rationale ponitur, eſtq́, ipſi EG aequale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationali: erit, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. eſt autem EL eidem EF incommenſurabilis longitudine. ergo EH ipſi EL longitudine incommenſurabilis erit. ſed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commenſurabile eſt quadratis ex HE EL; vtrumque enim ipſorum eſt rationale. & rectangulum contentum HE EL eſt commenſurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quae ad 14. huius demonſtrauimus, quadrata ex HE EL incommenſurabilia ſunt ei, quod bis continetur HE EL. ſed quadratis ex HE EL aequale eſt id, quod bis HE EL continetur vnà cum quadrato ipſius LH, ex 7 ſecundi libri. ſi autem magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentium ſit incommenſurabilis, & reliquae incommenſurabilis erit. quod à nobis demonſtratum eſt ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommenſurabilia ſunt quadrato ex LH. rationalia autem ſunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale eſt: & ob id recta linea LH eſt irrationalis; ſed & rationalis, vt demonſtratum fuit; quod fieri non poteſt. non igitur ſpacium AD eſt rationale. quare irrationale ſit neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat.



23. huius
22. huius.
23. huius.

E Quare EH rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis.] *Ex 23 huius.*

F Ergo EC ipſi HK eſt incommenſurabile] *Ex demonſtratis ad 14 huius.*

G Tota irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur] *Ex 37 huius.*

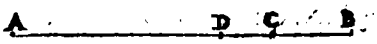
H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiſa, videlicet ad H, & ad M] *Quod fieri non poſſe in 43 huius demonſtratum eſt. non igitur quae ex binis medijs ſecunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi neceſſarium eſt.*

K Et non eſt EH eadem, quæ MN] *Oſtendit EH ipſi MN non eſſe aequalem.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB diuiſa in C, ita ut AC CB potentia incommenſurabiles ſint, faciẽtes compoſitum quidem ex ipſarum AC CB quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipſis continetur, mediũ. Dico AB in alio puncto non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incõmenſurabiles ſint, faciẽtes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis continetur, medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis continetur AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur.

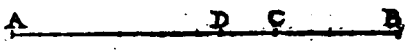


ſed

sed quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia sunt. ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali superat id, quod bis AC CB cõtinetur, cũ media sint. quod est absurdũ. nõ igitur maior ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur necesse est. Ex demonstratis ad 27 huius. Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

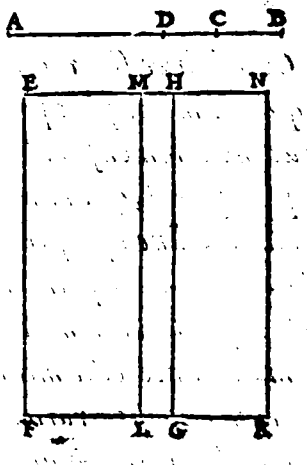
Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit rationale, ac medium potens AB, diuisa in C; ita vt AC CB potentia incõmensurabiles sint; faciantq; compositũ quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem ipsis continetur, rationale. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt etiam AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali superat id, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali, cum media sint. quod est absurdum. non igitur rationale, ac mediũ potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit bina media potens AB, diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes etiam compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium; & quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita vt faciat quæ proposita sunt. Si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt rursus AC non sit eadem, quæ DB, sed sit AC positione maior; exponaturq; rationalis EF, & ad ipsam quadratis quidẽ ex AC CB æquale parallelogrammum EG applicetur; rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK est æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rursus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur, reliquo MK est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB medium ponitur, erit & parallelogrammum EG medium. & ad rationalem EF applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, ipsiq; EF incommensurabilis longitudine. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammũ EG ipsi HK incommensurabile. ergo & recta linea EH est incommensurabilis rectę HN. & sunt rationales. quare EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles 4. secundi. 2. huius.

biles. & ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoque M diuidi: & non est H eadem, quæ MN. ergo quæ ex
Ex 43. huius. binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3 Quòd si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rursus si maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectę lineæ sibi lōgitudine incommensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd si neutrum, dicatur sexta.

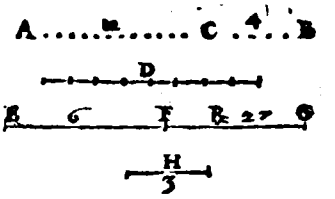
SCHOLIVM.

Cum igitur sex rectæ lineę ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas uero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quòd commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam uero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis, videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;



numerum;ad ipſum vero CA proportionem non habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum.& exponatur quędam rationalis D;& ipſi D longitudine commenſurabilis ſit EF. ergo EF eſt rationalis.fiat autẽ vt BA numerus ad numerum AC, ita ipſius EF quadratum ad quadratũ FG. Sed BA ad AC proportionem habet,quam numerus ad numerum. ergo & quadratum ipſius EF ad quadratũ FG proportionẽ habebit,quã numerus ad numerũ.cõmenſurabile igitur eſt quadratũ ex EF quadrato ex FG;atq; eſt EF rationalis.ergo & rationalis FG. & qm̃ BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipſi FG incommenſurabilis eſt longitudine.& ob id EF FG rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles.ex binis igitur nominibus eſt EG.Dico & primam eſſe.Quoniã enim eſt vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG quadratum.maior autem eſt BA,quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG eſt maius.ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H.Quoniam igitur eſt vt BA ad AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuerſionem rationis vt AB ad BC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. ſed AB ad BC proportionem habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum.quare EF ipſi H longitudine eſt commẽſurabilis. ideoq; EF plus poteſt, quàm FG quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſunt autem EF FG rationales,& EF ipſi D longitudine eſt commenſurabilis. ergo EG ex binis nominibus eſt prima.

D E F G H K L

F. C. COMMENTARIVS.

Exponantur duo numeri AC CB,ita vt compoſitus ex ipſis videlicet AB ad ipſum quidem BC proportionem habeat,quam quadratus numerus ad quadratum numerum;ad ipſum vero CA proportionem non habeat] *Inuenientur aũt hi ex corollario primi lemmatis ante 30 huius.* A

Ergo EF eſt rationalis] *Ex 6 diffinitione.* B

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipſius EF quadratum ad quadratum FG] *Ex corollario 6 huius.* C

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex EF quadrato ex FG] *Ex ſexta huius.* D

Ergo & rationalis FG] *Ex 6 diffinitione.* E

Ergo EF ipſi FG incommenſurabilis eſt longitudine] *Ex 9 huius.* F

Ex binis igitur nominibus eſt EG]*Ex 37 huius.* G

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H]*Inuenietur quadratum ipſius H ex lẽmate ante 15 huius.* H

Quare EF ipſi H longitudine eſt commenſurabilis]*Ex 9 huius.* K

Ergo EG ex binis nominibus eſt prima]*Ex prima ſecundarum diffinitionum.* L

Sit AC numerus 12,CB 4,& EF 6.fiatq; vt 16 ad 12,ita 36 ad aliũ.erit ad 27,ergo 6 plus ℞ 27 eſt ex binis nominibus prima.

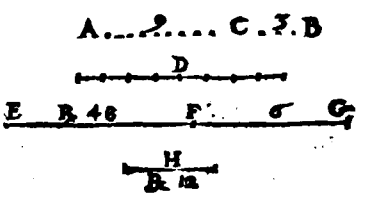
PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO L.

Inuenire ex binis nominibus ſecundam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB ad ipſum BC quidem proportionem habeat,quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

numerum:& exponatur rationalis D:& ſit FG ipſi D longitudine commenſurabilis.ergo FG rationalis eſt.fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE.commenſurabile igitur eſt quadratum ex GF quadrato ex FE. ergo & EF eſt rationalis. & quoniã CA numerus ad ipſum AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionẽ habebit,quàm numerus quadratus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt GF ipſi FE longitudine. quare EF FG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles;ac propterea ex binis nominibus eſt EG. Oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. Quoniam enim conuertendo eſt vt BA numerus ad numerũ AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG:maior autẽ eſt BA,quàm AC.ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG eſt maius.ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H.eſt igitur per conuerſionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. ſed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.ergo & quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionẽ habebit,quam quadratus numerus ad quadratum numerum;& ob id EF ipſi H longitudine eſt commenſurabilis.quare EF plus poteſt, quàm FG quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabiles longitudine.ſuntq; rationales EF FG potentia ſolum cõmenſurabiles:& FG minus nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi D expoſitæ rationali.ergo EG ex binis nominibus eſt ſecunda.

6.diffi. Corol. 6. huius. 6.huius. 6.diffi. 9.huius. 9.huius. 8.diffi. ſecũdarum.



F. C. COMMENTARIVS.

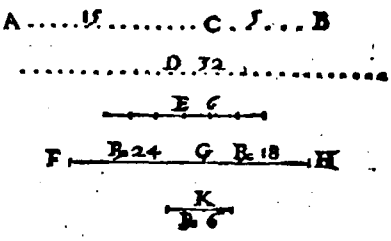
Sit AC 9 CB 3.& FG 6.fiat autem vt 9 ad 12,ita 36 ad aliũ erit ad 48.quare ℞ *48 pl ns. 6 eſt ex binis nominibus ſecunda.*

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB ad BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipſorum BA AC proportionem non habeat,quam quadratus numerus ad quadratum numerum.denique exponatur rationalis quędam recta linea E; fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG.quadratum igitur ex E quadrato ex FG eſt commenſurabile.rationalis autem eſt E.ergo & FG eſt rationalis.& quoniam D ad AB proportionem non habet,quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit,quã quadratus numerus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt E ipſi FG longitudine.Rurſus fiat vt BA numerus ad numerum AC,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. ergo quadratum ex FG quadrato ex GH eſt commenſurabile. rationalis autem eſt FG.quare;& GH eſt rationalis.& quoniam BA ad AC proportionem non habet,quã quadratus numerus ad quadratum numerum,neque quadratum ex FG ad quadratum

Corol.6.huius. 6.huius. Diffi.6. 9.huius. 6.huius.



tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. Dico & tertiam esse. Q̃m enim est vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est vt AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & ob id FG plus potest, quam GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntq; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex binis nominibus est tertia.

9.huius. 9.huius. 9.huius. 3 diffi. secundarum.

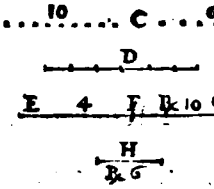
F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30, rationalis autẽ E sit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ. erit ad 24. rursus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo R̃ 24 plus R̃ 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrũque ipsorum proportionem non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipsi D commensurabilis sit EF longitudine. ergo EF est rationalis. fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG: ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi FG longitudine incommensurabilis. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam enim est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem est BA, quàm AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi H longitudine est incommẽsurabilis; ac propterea EF plus potest, quàm FG quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles; & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta.



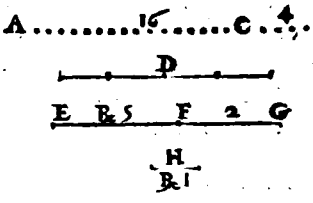
diffi. 6. 6. huius. 9. huius. 37. huius. 9. huius. 4. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 10, CB 6. rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10. erit 4 plus R̃ 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.



Exponantur duo numeri A C C B, ita vt AB ad vtrumque ipſorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipſi D longitudine commenſurabilis ſit FG. ergo FG eſt rationalis: & fiat vt C A ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum. rationalis igitur eſt FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nō habet, quam numerus quadratus ad quadratū numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex FE proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF FG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id EG ex binis nominibus eſt. itaque dico & quintam eſſe. Quoniam enim eſt vt CA ad AB, ita quadratū ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex E F ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG eſt maius. ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per cōuerſionem igitur rationis eſt vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. ſed AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea E F ipſi H longitudine eſt incommēſurabilis. quare EF plus poteſt, quàm FG, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; EF FG rationales potentia ſolum commenſurabiles: & FG minus nomen expoſitę rationali D commenſurabilis eſt longitudine. ergo EG ex binis nominibus eſt quinta.

4. diffi.

57 huius.

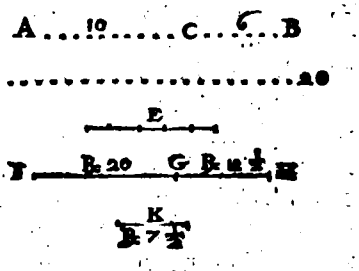
5. diffi. ſecundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit B 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus ſextam.



Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipſorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ſit etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipſorum BA AC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & exponatur rationalis quędā recta linea E: fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. commēſurabilis igitur eſt E ipſi F G potentia, atque eſt E rationalis. quare & rationalis eſt F G. Et quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipſi F G longitudine eſt incommenſurabilis. itaque rurſus fiat ut BA ad AC, ſic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH eſt commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH eſt rationale: ob idq; recta linea GH eſt rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionē nō habet,

9. huius.

9. diffi.

bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est FH. ostendendum est & sextã esse. Quoniam enim vt D ad AB, ita est quadratũ ex E ad quadratũ ex FG; est autẽ & vt BA ad AC, ita quadratũ ex FG ad quadratũ ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratũ ex E ad quadratũ ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommẽsurabilem esse. quare utraque ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratũ ex FG quadrato ex GH maius. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. ergo per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed AB ad BC proportionem non habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K longitudine est incommensurabilis. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: suntq; FG GH rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta.

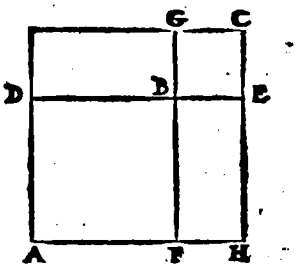
9. huius: 37. huius. 9. huius. 6. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E sit 5, & fiat vt 20 ad 16, ita 25 ad aliud, nempe ad 20. rursus fiat vt 16 ad 10, ita 20 ad aliũ, erit ad 12 ½. ergo ℞ 20 plus ℞ 12 ½ est ex binis nominibus sexta.

LEMMA

Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, vt DB sit in directum ipsi BE. ergo & FB ipsi BG in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum esse: & quadratorum AB BC rectangulum DG medium esse proportionale; itemq; ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.



Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE toti FG æqualis. sed DE æqualis est vtrique ipsarum AK HC. ergo & vtraque AH vtrique AK HC est æqualis. æquilaterũ igitur, est AC parallelogrãmum. est autem & rectangulum. ergo quadratum est AC. Et quoniam est vt FB ad BG, ita DB ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igitur AB ad DG, ita est DG ad BC: ideoq; ipsorum AB BC medium proportionale est DG. Dico præterea ipsorum AC CB medium proportionale esse DC. nam cũ sit vt AD ad DK, ita KG ad GC: est enim vtraque vtrique æqualis: & componendo erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. sed vt AK ad KD, ita AC ad CD; & vt KC ad CG, ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorum AC CB medium proportionale est CD. quod ostendendum proponebatur.

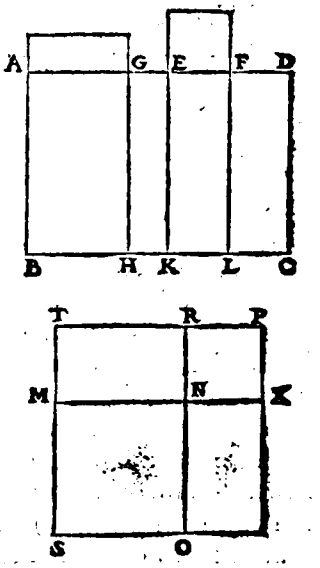
14. primi. 1. secti.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

Si spacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta

recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spaciũ enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpacium AC irrationalem eſſe, quę ex binis nominibus appellatur. Quoniã enim AD eſt ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctum E: & ſit AE maius nomen. manifeſtum eſt AE ED rationales eſſe potentia ſolũ commenſurabiles, & AE plus poſſe, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea AE expoſitæ rationali AB longitudine commenſurabilem eſſe. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur AE plus poteſt, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſi quartę parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex EF æquale parallelogrammũ ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. itaque applicetur, & ſit AGE. ergo AG ipſi GE longitudine eſt commenſurabilis. Deinde per pũcta G E F alterutri ipſarum AB DC parallelæ ducantur GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum conſtituatur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi NX. ergo RN ipſi NO in directum erit: & parallelogrammum SP compleatur. quadratum igitur eſt SP. & quoniam rectangulum AGE eſt æquale quadrato ex EF, erit vt AG ad EF, ita FE ad EG. quare & vt AH ad EL, ita eſt EL ad KG: ac propterea parallelogrammorum AH KG mediũ proportionale eſt EL. Sed parallelogrammo AH æquale eſt quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP. ergo quadratorum SN NP medium proportionale eſt EL. ſed & eorumdem SN NP medium proportionale eſt & MR. æquale igitur eſt MR ipſi EL. ſed MR eſt æquale OX, & EL ipſi FC. ergo totũ EC ipſis MR OX eſt æquale. ſunt autem & AH GK æqualia ipſis SN NP. totũ igitur AC eſt æquale toti SP, hoc eſt quadrato ex MX; ideoq; ipſa MX poteſt parallelogrammum AC. Dico MX ex binis nominibus eſſe. quoniam enim AG commenſurabilis eſt ipſi GE, erit AE utrique ipſarum AG GE commenſurabilis; ponitur autem & AE commenſurabilis ipſi AB longitudine. ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles; ſunt; atque eſt AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipſarũ AG GE: & ob id rationale vtrũq; ipſorum AH GK: & AH ipſi GK eſt commenſurabile. ſed AH eſt æquale ipſi SN, & GH ipſi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia ſunt, & commenſurabilia. Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG; DE vero ipſi EF: erit & AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis. ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL. ſed AH eſt æquale SN, & EL ipſi MR. quare SN eſt incommenſurabile ipſi MR: vt autem SN ad MR, ita ON ad NR. incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR: eſt autẽ ON æqualis MN, & NR ipſi NX. ergo MN ipſi NX eſt incommenſurabilis. atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX: & vtrumque rationale. quare MN NX rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus eſt, & poteſt parallelogrammum AC. quod demonſtrare oportebat.



1. Secundarũ diffin.

14. ſecundi.

Ex antecedẽti lemmate.

C 1. ſexti.

43. Primi.

D

E

F

G

H

K L

M

N

37. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A In partes commenſurabiles ipſam diuidet] *Ex 2 parte 1 S huius.*

Itaque

Itaque applicetur, & ſit AGE] *Ex 3 lemmate ante 18 huius.* B
Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14 ſexti.* C
Erit AE vtrique ipſarum AG GE commenſurabilis] *Ex 16 huius.* D
Ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles ſunt] *Ex 12 huius.* E
Et ob id rationale vtrumque ipſorum AH GK] *Ex 20 huius.* F
Et AH ipſi GK eſt commenſurabile] *Eſt enim ex 1 ſexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogramum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipſi GK eſt commenſurabile.* G
Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine] *Ponitur enim AD eſſe ex binis nominibus prima, quae conſtat ex duabus rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.* H
Erit & AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis] *Ex ijs, quae ad 14 huius demonſtrauimus.* K
Ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipſum EL. quare ex 10 huius propoſitum concludetur.* L
Incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam eſt.* M
Atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim ſupra demonſtratum eſt.* N

Sit AB 5, & AD 4 plus ℞ 12. erit EF, vel FD ℞ 3. & ſi ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonſtratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammũ AH eſt 15, GK 5, & EL vel FC ℞ 75: ideoq; totum AC parallelogrammum erit 20 plus ℞ 300. Huiuſmodi vero ſpacia iuniores etiam binomialia, ſeu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quae tradita ſunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis ſpacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit binomiale ſpacium 20 plus ℞ 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati minoris nominis, hoc eſt aequale 75. erit ex ijs, quae nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico ℞ 15 plus ℞ 5 eſſe latus quadratum eius ſpacij 20 plus ℞ 300. Quoniam enim recta linea, quae ex binis nominibũ cõſtat, videlicet ℞ 15 plus ℞ 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius aequale quadratis partiũ vnà cum rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum ℞ 15 eſt 15; & quadratum ℞ 5 eſt 5: rectangulum autem, quod continetur ℞ 15 & ℞ 5 eſt ℞ 75, & eius duplum eſt ℞ 300. quae omnia ſi componantur facient 20 plus ℞ 300, et idem erit quadratũ, quod fit ex recta linea ℞ 15 plus ℞ 5. ergo ℞ 15 plus ℞ 5 eſt latus quadratum, vel radix huius ſpacij binomialis 20 plus ℞ 300. Eodem modo & aliorum ſpaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AC poteſt, ex binis medijs primam eſſe. Quoniam enim AD eſt ex binis nominibus ſecunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE ſit maius nomen. ergo AE ED rationales ſunt potẽtia ſolum cõmenſurabiles: & AE plus poteſt quàm ED quadrato rectę lineę ſibi longitudine cõmenſurabilis: & minus nomen ED commenſurabile eſt ipſi AB longitudine. ſecetur ED bifariam in F: & quadrato ipſius EF æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AGE. commenſurabilis igitur eſt AG ipſi GE lõgitudine. & per puncta G E F ipſis AB DC parallelę ducantur GH EK FL. parallelogrammo autẽ AH æquale quadratum SN conſtituatur, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi

1. diffi tecũ. darum.

18. huius.

ipſi NX.ergo & RN ipſi NO in directum erit; & compleatur SP quadratum.manifeſtum iam eſt ex ijs,quæ demõſtrata ſunt,parallelogrammum MR medium eſſe proportionale quadratorum SN NP:& parallelogrammo EL æquale. & præterea rectã lineam MX poſſe ſpacium AC. oſtendendum igitur eſt ipſam MX ex binis medijs primam eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, cõmenſurabilis aũt ED ipſi AB; erit AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis. Et quoniam AG commenſurabilis eſt longitudine ipſi GE,erit AE vtrique ipſarũ AG GE lõgitudine cõmẽſurabilis.atque eſt AE rationalis.rationalis igitur & vtraque AG GE. Quòd cũ AE ſit incommenſurabilis quidem ipſi AB lõgitudine, commenſurabilis autẽ vtrique ipſarum AG GE, erunt AG GE ipſi AB longitudine incommenſurabiles. quare BA, AG, GE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt vtrumque parallelogrammorum AH GK. & ob id vtrumque quadratorum SN NP eſt medium.ergo rectæ lineæ MN NX mediæ ſunt. rurſus quoniam commenſurabilis eſt AG ipſi GE longitudine, erit parallelogrammum AH parallelogrammo GK commenſurabile, hoc eſt quadratum SN ipſi NP, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NX.ergo MN NX potentia commenſurabiles ſunt.& quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine: & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG;ED vero ipſi EF:erit AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis.quare & parallelogrammum AH incommenſurabile parallelogrammo EL,hoc eſt SN ipſi MR,hoc eſt ON ipſi NR, hoc eſt MN ipſi NX incommenſurabilis eſt longitudine.oſtenſæ autem ſunt MN NX & mediæ,& potentia commenſurabiles.ergo MN NX mediæ ſunt,potentia ſolum commenſurabiles.Dico & rationale continere.Quoniam enim DE ponitur commẽſurabilis vtrique ipſarum AB EF. erit FE ipſi EK longitudine commenſurabilis:atque eſt rationalis vtraque ipſarum, rationale igitur eſt & parallelogrammum EL, hoc eſt MR. eſtq; MR,quod MN NX continetur. ſi autem duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant;tota irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur.ergo MX ex binis medijs eſt prima,quod demonſtrare oportebat.

In antecedẽti lemmate.

Ex demonſtratis in antecedente.

37.huius.

14.huius.

16.huius.

6.diffi.

14.huius.

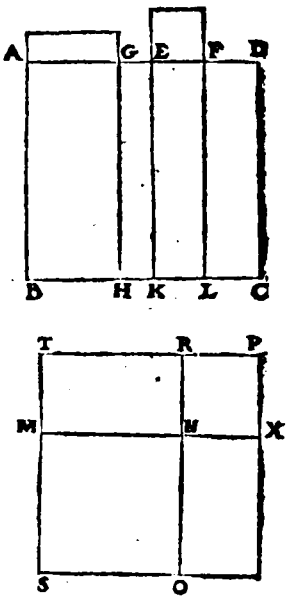
22. huius.

Ex demonſtratis ad 14 huius.

21.huius.

20 huius.

38.huius.



F. C. COMMENTARIVS.

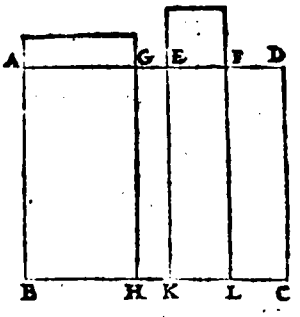
Sit AB 6, AD ℞ 12 plus 3. erit EF vel FD 1 $\frac{1}{2}$: & ſi ad AE applicetur parallelogrammũ aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata; erit AG ℞ 6 $\frac{1}{4}$ GE ℞ $\frac{3}{4}$ .parallelogrammum igitur AH eſt ℞ 243, GK ℞ 27, & EL 9: & totum AC parallelogrammum ℞ 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, diuidemus ℞ 432 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati 18, hoc eſt aequale 81. erit ex iam dictis maior pars ℞ 108 plus ℞ 27: quae duae radices ſi inter ſe componantur facient ℞ 243. minor autem pars erit ℞ 108 minus ℞ 27. & detracta ℞ 27 à ℞ 108 relinquitur ℞ 27. maior igitur pars eſt ℞ 243, & minor ℞ 27. quare ſpacij binomialis ℞ 432 plus 18 radix erit ℞℞ 243 plus ℞℞ 27.

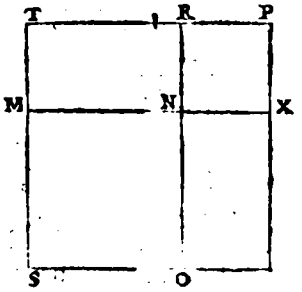
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

Si ſpacium contineatur rationali,& ex binis nominibus tertia, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis medijs ſecunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. Dico rectam lineam, quę potest spacium AC irrationalem esse, quę ex binis medijs secúda appellatur. construantur enim eadem, quæ supra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia est, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles, & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine: neutraq; ipsarum AE, ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostẽdemus MX eam esse, quæ spacium AC potest, & MN NX ex binis esse medijs. itaque ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; atque est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secunda.





diffi. 3. secundarum.

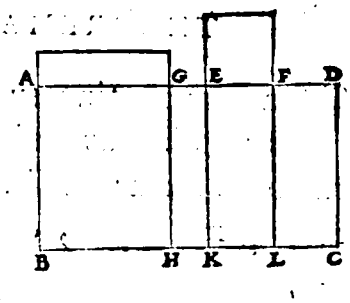
F. C. COMMENTARIVS.

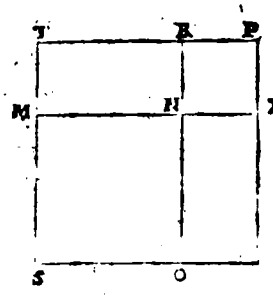
Sit AB 6, AD Rx 18 plus Rx 10. erit EF Rx 2 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammũ AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit AG Rx 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est Rx 450, GK Rx 18, & EL Rx 90: & totum parallelogrammum AC est 648 plus Rx 360. Diuidatur Rx 648 in duas partes, ita vt quod ipsis continetur sit aequale quartae parti quadrati Rx 360, hoc est 90. erit maior pars Rx 450, & minor Rx 18. spatij igitur binomialis Rx 648 plus Rx 360 radix est Rx Rx 450 plus Rx Rx 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ vocatur maior.

Spacium enim AC contineatur, rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E, quorum AE sit maius. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus est quarta, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. erit igitur AG ipsi GE longitudine incommen-

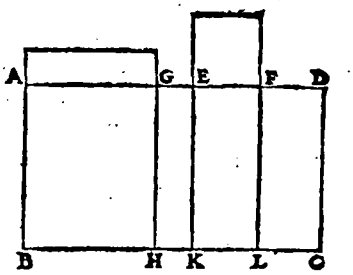


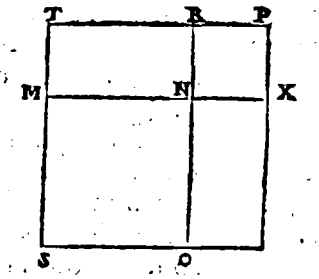


diffi. 4. secundarum.

19. huius

ſurabilis. Ducâtur ipſi AB parallelę GH EK FL. & eadem fiãt, quę ſupra. conſtat igitur MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtendendum eſt MX irrationalem eſſe, quæ vocatur maior. Quoniã enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt lõgitudine, erit & AH parallelogrammum ipſi GK incommẽſurabile, hoc eſt SN ipſi NP. ergo MN NX potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum AK rationale eſt. atque eſt æquale quadratis ipſarum MN NX. ergo compoſitũ ex quadratis MN NX eſt rationale. quòd cum DE ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; ſit autem commenſurabilis ipſi EF: erit EF ipſi EK incommenſurabilis longitudine. quare KE EF rationales ſunt potentia ſolũ commenſurabiles: & ob id medium eſt parallelogrammum EL, hoc eſt MR, & MN NX continetur: eſtq; compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX rationale: & MN ipſi NX potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium; tota irrationalis erit. vocetur autem maior. ergo MX irrationalis eſt, quæ maior appellatur, & poteſt ſpacium AC. quod demonſtrare oportebat.





20. huius.

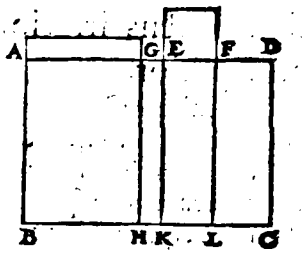
40. huius.

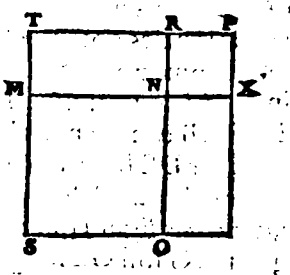
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD 6 plus R 24. *erit EF* R 6. *ſi autem ad AE applicetur parallelogrammum AG E aequale quadrato ipſius EF, et deficiẽs figura quadrata; erit AG 3 plus* R 3, *& GE 3 minus* R 3. *ergo AH parallelogrammũ eſt 18 plus* R 108, *GK 18 minus* R 108, *& EL vel FC* R 216, *totumq; parallelogrammum AC 36 plus* R 864. *itaque ſi diuidamus 36 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit æquale* 216, *erit maior pars 18 plus* R 108, *& minor 18 minus* R 108. *quare ſpacij binomialis 36 plus* R 864 *radix eſt* R *V. 18 plus* R 108 *plus* R *V. 18 minus* R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt, vocaturq; rationale, & medium potens.





Spacium. n. AC cõtineatur rationali AB, & AD exbinis nominibus quinta, quę diuidatur in nomina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ ſit AE. Dico rectam lineã, quę põtſpaciũ AC, irrationalẽ eſſe, quę vocatur rationale, ac mediũ potens. conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. manifeſtũ eſt MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtẽdere oportet MX irrationalem eſſe, quæ rationale, ac medium poteſt.

19. huius. Quoniã enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt longitudine, & parallelogrammum AH eſt incom-

menſurabile

mensurabile parallelogrammo HE, hoc est quadratū ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incōmensurabiles sunt. Quòd cū AD sit ex binis nominibus quinta; sitq; minor ipsius portio ED; erit ED ipsi AB cōmensurabilis longitudine; sed AE ipsi ED est incommensurabilis. ergo & AB incommensurabilis est longitudine ipsi AE; ac propterea BA AE rationales sunt potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. & quoniam DE commensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; estq; DE commensurabilis ipsi EF: erit & FE ipsi EK commensurabilis. rationalis autem est EK. ergo & FE est rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. ergo MX potens est rationalè, ac medium, & potest spacium AC. quod demōstrare oportebat.

Diff. 5. secundarum.

21. huius.

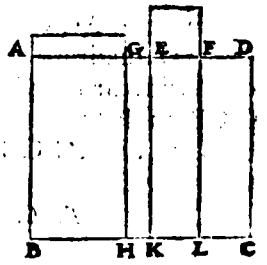
12. huius. 20. huius.

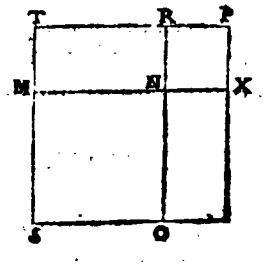
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD R 24 plus 4, erit EF 2. applicetur ad AE parallelogrammum AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiēs figura quadrata; erit AG R 6 plus R 2, GE R 6 minus R 2; parallelogrammum AH R 216 plus R 72; GK R 216 minus R 72; EL 12: & totum AC parallelogrammum R 864 plus 24. si igitur diuidamus R 864 in duas partes, vt id, quod ex ipsis producitur, sit æquale 144, erit maior pars R 216 plus R 72, & minor R 216 minus R 72. quare spacij binomialis R 864 plus 24 radix est R V. R 216 plus R 72 plus R V. R 216 minus R 72.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO LX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est: vocaturq; bina media potens.





Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC, irrationalem esse, quæ vocatur bina media potens. constituantur enim eadem, quę supra, manifestū est MX posse spacium AC: & MN ipsi NX potentia incommensurabilem esse. Et quoniam EA ipsi AB incommensurabilis est longitudine, erunt EA AB rationales potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarū MN NX. Rursus quoniam incōmensurabilis est ED ipsi AB longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis. ergo & FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea medium est EL, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incōmensurabile erit. Sed AK quidem est cōpositū ex quadratis ipsarū MN NX: EL vero est quod MN, NX continetur. incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque est vtrumque ipsorum medium; & MN NX potentia sunt incommensurabiles. ergo MX est bina media potens, & potest spacium AC. quod demonstrare oportebat.

21. huius.

A

B

C

D

F. C. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam incõmensurabilis est ED ipsi ab longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis] *Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.*

B Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF] *Ex 15 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.*

C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles] *Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratũ ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.*

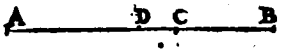
C Ergo MX est bina media potens] *Ex 42 huius.*

D *Sit AB* 5, *AD* R 10 *plus* R 8. *erit EF* R 2. *si igitur ad AE applicetur parallelogrammum AGE, aequale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AG* R 2 $\frac{1}{2}$ *plus* R $\frac{1}{2}$, *GE* R 2 $\frac{1}{2}$ *minus* R $\frac{1}{2}$ *& parallelogrammum AH* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$, *GK* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$, *et EL* R 50: *totumq; AC parallelogrammum* R 250 *plus* R 200. *Diuidatur* R 250 *in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale* 50; *erit maior pars* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$, *& minor* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$. *Eius igitur spacij binomialis* R 250 *plus* R 200 *radix est V.* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$ *plus* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

Sit recta linea A B, & secetur in puncto C, ita vt AC sit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, quod bis AC CB continetur. secetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem æquales secatur ad D, in partes vero inæquales ad C;



5. secundi. rectangulum, quod AC CB continetur vnà cum quadrato ipsius CD est æquale ei, quod fit ex AD quadrato. ergo rectangulũ ACB quadrato ex AD est minus. quod igitur bis continetur AC CB minus est quàm duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

✱ Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur] *Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quàm dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quàm duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur.*

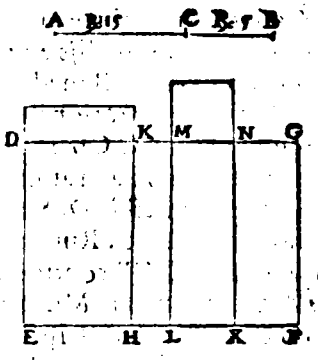
THEOREMA XLIII. PROPOSITIO. LXI.

Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa in nomina ad punctum C, ita vt AC sit maius nomen: exponaturq; rationalis DE; & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam esse. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC æquale parallelogrammum DH: quadrato autem ipsius BC æquale KL.

reliquum

reliquum igitur, quod bis AC CB continetur eſt æquale parallelogrammo MF. ſecetur MG biſariã in N: & alterutri ipſarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum MX NF eſt æquale ei, quod ſemel AC CB continetur. Et quoniam ex binis nominibus eſt AB, diuiſa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia ſolum commenſurabiles. ergo quadrata ex AC CB rationalia ſunt, & commenſurabilia inter ſe ſe: & ob id compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB commenſurabile eſt earumdem AC CB quadratis. rationale igitur eſt compoſitũ ex quadratis AC CB, atque eſt æquale parallelogrammo DL. ergo & DL eſt rationale, & ad rationalem DE applicatum eſt. rationalis igitur eſt DM, & ipſi DE commenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, medium eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt MF, & ad rationalem ML applicatum eſt. rationalis igitur eſt MG, & ipſi ML hoc eſt ipſi ED longitudine incommenſurabilis. eſt autem & MD rationalis, & ipſi DE commenſurabilis longitudine. ergo DM ipſi MG longitudine eſt incommenſurabilis. ſuntq; rationales. ergo DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & primam eſſe. Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale eſt, quod AC CB continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale MX. eſt igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc eſt vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN eſt æquale. Et quoniam quadratum ex AC commẽſurabile eſt quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo KL commenſurabile. ergo & DK ipſi KM longitudine eſt commenſurabilis. quòd cum quadrata ex AC CB maiora ſint eo, quod bis AC CB continetur; erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo MF: ideoq; recta linea DM ipſa MG eſt maior. atque eſt rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc eſt quartæ parti quadrati ex MG. & DK ipſi KM longitudine eſt commenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes cõmenſurabiles ipſam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſuntq; rationales DM MG, & DM, quæ eſt maius nomen expoſitę rationali DE longitudine eſt commenſurabilis. ergo DG eſt ex binis nominibus prima. quod demonſtrare oportebat.



4. ſecundi

37. huius.

16. huius.
6. diffi.

23. huius.

13. huius.

Ex lemmate ad 55. huius.
1. ſexti.
17. ſexti.

1. ſexti.
10. huius.
Ex antecedentium.
1. ſexti.
14. quinti.

19. huius.

1. diffi. ſecundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

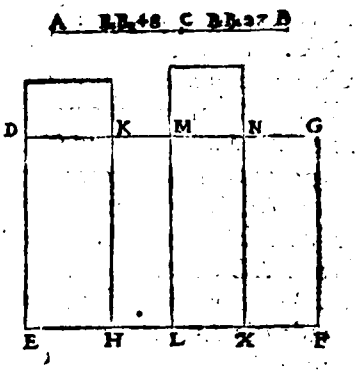
Sit AB R 15 *plus* R 5, *& DE* 5. *erit DH* 15 *KL* 5, *& MX* R 75 *& NF* R 75. *quare ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK* 3: *& ſi applicetur KL faciet KM* 1. *Quòd ſi ad eandẽ applicetur MX videlicet* R 75 *faciet latitudinẽ MN* R 3 *ex theoremate eorum, quae ad* 20 *huius conſcripſimus. et ſimilitrr NG erit* R 3. *ergo tota DG eſt* 4 *plus* R 12, *quae eſt ex binis nominibus prima.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quę eſt ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuiſa in medias ad pũctum C, quarum AC ſit maior: exponaturq; rationalis DE; & ad ipſam applicetur parallelogrammum æquale quadrato

quadrato ipſius AB, quod ſit DF, latitudinem faciés DG. Dico DG ex binis nominibus ſecundā eſſe. Cōſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniam AB ex binis medijs eſt prima, diuiſa ad pūctum C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum cō menſurabiles, quæ rationalem continent. quare & quę fiunt ex AC CB media ſunt; ideoq; DL eſt medium, quod ad rationalem applicatū eſt. rationalis igitur eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rationale eſt quod bis AC CB continetur, erit & MF rationale, & ad rationalem ML applicatum eſt. ergo & MG eſt rationalis; & ipſi ML, hoc eſt ipſi DE commenſurabilis longitudine. incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG, & ſunt rationales. quare DM MG rationales ſunt potētia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendēdum eſt & ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora ſunt eo, quod bis AC CB continetur, erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. ergo & recta linea DM maior eſt ipſa MG. Quòd cum quadratum ex AC quadrato ex CB ſit commenſurabile, & DH parallelogrammum parallelogrammo KL commenſurabile erit. quare & DK commenſurabilis ipſi KM: atque eſt quod DK KM cōtinetur quadrato ipſius MN æquale. ergo DM plus poteſt, quàm MG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. eſtq; MG commenſurabilis longitudine ipſi DE. quare DG ex binis nominibus eſt ſecunda.



38. huius.
39. huius.
21. huius.
15. huius.
37. huius.
Ex lem. ad 61. huius.
1. sexti
14. quinti
19. huius.
2. diffi. secundarum.

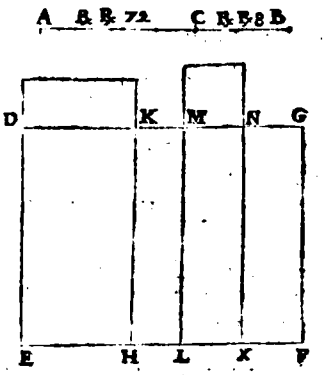
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 48 *plus* RR 27, *et DE* 4; *erit DH* R 48, *KL* R 27, *MX, et NF* 6. *ergo ſi ad DE applicetur DH, faciet DK* R 3 *ex* 2 *theoremate iam dicto, et eadem ratione ſi ad eandem applicetur KL, erit KM* R 1 $\frac{1}{16}$ *et ſi applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG* 1 $\frac{1}{2}$ *et quoniam DK KM hoc eſt* R 3, R 1 $\frac{11}{16}$ *longitudine cōmenſurabiles ſunt, ſi inter ſe componantur, erit ex tertio theoremate eorum, quae nos ad* 20 *huius appoſuimus, DM* R 9 $\frac{1}{16}$ *ergo tota DG eſt* R 9 $\frac{1}{16}$ *plus* 3 *videlicet ex binis nominibus ſecunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXIII.

Quadratum eius, quę eſt ex binis medijs ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

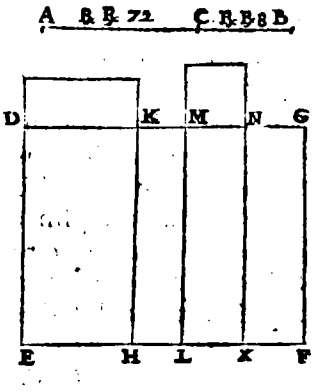
Sit ex binis medijs ſecunda AB, diuiſa in medias ad C, ita vt AC ſit maior portio. rationalis autem ſit DE: & ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus tertiam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniā AB eſt ex binis medijs ſecūda, diuiſa ad punctū C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. ergo & compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium eſt, & ipſi DL æquale. medium igitur eſt DL, & ad rationalem DE applicatur. ergo rationalis eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione, & MG eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi ML, hoc eſt ipſi DE. vtraque igitur ipſarum



39. huius. A
23. huius.

DM

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incōmensurabile ipsi MF. et ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: suntq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendū est et tertiā esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. atque est rectangulum DKM quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quàm MG, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertia.



1. sexti, uel ex lemm. ad 23. huius: B

1. sexti. & 10. huius.

37. huius.

19. huius.

3. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo et compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] *Ex duobus enim mediis commensurabilibus, si inter se componantur, vnum fit medium, vt in 45 huius diximus.* A

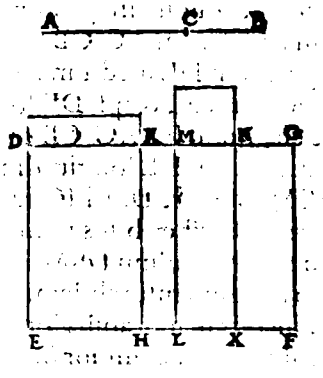
Ergo et compositum ex quadratis AC, CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum commensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectangulo ACB est incōmensurabile, vt potè eius duplum. ergo ex ijs, quae nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.* A B

Sit AB RR 72 *plus* RR 8, *et DE* 4. *erit DH* R 72, *KL* R 8, *MX, vel NF* R 24. *quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R 4 ½. *si vero applicetur KL faciet KM* R ½. *et si MX, vel NF faciet MN, vel NG* R 1 ½. *At si DK KM componantur, hoc est* R 4 ½, *& R ½ fiet DM* R 8. *tota igitur DG est* R 8 *plus* R 6, *quae est ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIIII.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB, diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quā CB. rationalis autem quędam sit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartā esse. Constituantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam maior est AB, diuisa in C, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DC longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalē ML est applicatum; erit et MG rationalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est; ac propterea DM MG rationales



40. huius.

41. huius.

23. huius.

57.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex duobus nominibus eſt DG. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim ſuperioribus cõcludemus DM maiorem eſſe, quàm MG: et rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incõmenſurabile eſt quadrato ex CB, erit et DH parallelogrammum incõmenſurabile parallelogrãmo KL. et ob id recta linea DK ipſi KM incõmenſurabilis. ſi aũt ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior plus poterit, quàm minor quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ergo DM plus poteſt, quàm MG, quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; DM MG rationales potentia ſolum commenſurabiles: atque eſt DM commenſurabilis expoſitæ rationali DE. quare DG eſt ex binis nominibus quarta.

1.ſexti & 10.huius.

19 huius.

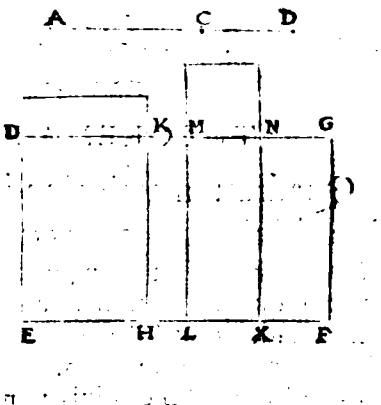
4 diffi. ſecũdarium.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB Rx V. 10 plus Rx 37 1/2 plus Rx V. 10 minus Rx 37 1/2: et DE ſit 5. erit DH 10 plus Rx 37 1/2: KL 10 minus Rx 37 1/2: MX, vel NF Rx 62 1/2. itaque ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciẽs DK, erit DK 2 plus Rx 1 1/2: ſi vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus Rx 1 1/2: & ſi applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG Rx 2 1/2. Quòd ſi componantur DK KM, hoc eſt 2 plus Rx 1 1/2, & 2 minus Rx 1 1/2, fiet DM 4. ergo tota DG eſt 4 plus Rx 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Sit rationalè, ac medium potens A B, diuiſa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC ſit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum D F ad ipsã DE applicetur, latitudinem faciens D G. Dico DG ex binis nominibus quintam eſſe. Conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam rationale, ac medium potens eſt AB, diuiſa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommenſurabiles, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis, erit & parallelogrãmum DL medium: ideoq; recta linea DM rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rationale eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt parallelogrammum MF; erit MG, rationalis, & ipſi DE longitudine commenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt, DM ipſi MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demõſtrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN eſſe æquale; & DK ipſi KM longitudine eſſe incommenſurabilem. quare DM plus poteſt, quàm M G quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: ſuntq; DM MG rationales, potẽtia ſolum commenſurabiles; & minor MG commenſurabilis eſt ipſi DE lõgitudine. ergo DG eſt ex binis nominibus quinta.

41.huius.

23.huius.

21.huius.

13.huius.

5.diffi ſecundarium.

F. C.

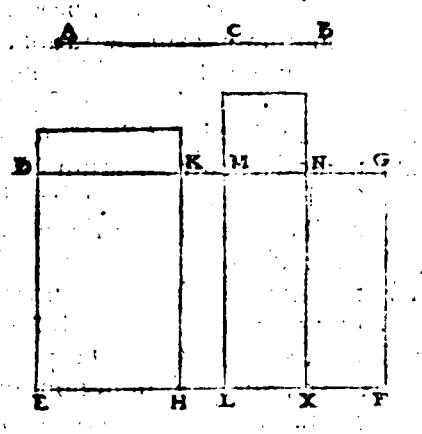
P. C. COMMENTARIVS.

Sit ab R *v.* R 125 *plus* 5, *plus* R *v* R 125 *minus* 5; *& DE sit* 5. *erit parallelogrammũ DH* R 125 *plus* 5; *KL* R 125 *minus* 5; *MX vel NF* 10: *& si ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudinem faciens DK, erit DK* R 5 *plus* 1. *si vero applicetur KL latitudinẽ faciens KM, erit KM* R 5 *minus* 1. *& si applicetur MX uel NF, erit MN, vel NG* 2. *quòd si componantur DK KM videlicet* R 5 *plus* 1, R 5 *minus* 1, *fiet DM* R 20. *tota igitur DG est* R 20 *plus* 4. *nimirum ex binis nominibus quinta.*

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens AB, diuisa ad punctum C: rationalis autem sit DE: & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus sextam esse. Construantur enim eadem quę supra. Et quoniam bina media potens est AB, diuisa ad C, erũt AC CB potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis medium: & quod ipsis continetur medium; & adhuc incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum. ergo ex iam demonstratis medium est vtrumque parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata sunt. rationalis igitur est & vtraque DM MG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum AC CB quadratis incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommensurabile: & idcirco DM incommensurabilis MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ex binis nominibus est DG. Dico & sextam esse. similiter enim prædictis rursus ostendemus rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale, & DK ipsi KM longitudine incommensurabilem esse. ergo DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine: & neutra ipsarum DM MG longitudine commensurabilis est expositę rationali DE. quare DG ex binis nominibus est sexta.



42. huius.

23. huius.

19. huius.

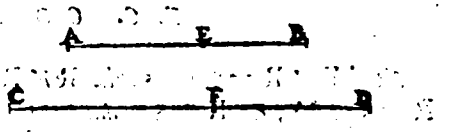
6. diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *v.* R 252 *plus* R 72, *plus* R *v.* R 252 *minus* R 72: *& DE sit* 6. *erit DH* R 252 *plus* R 72: *KL* R 252 *minus* R 72: *MX, vel NF* R 180. *applicetur ad DE parallelogrammũ DH latitudinem faciens DK. erit DK* R 7 *plus* R 2. *Rursus applicetur KI faciens latitudinem KM, erit KM* R 7 *minus* R 2. *denique applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG* R 5. *ergo tota DG est* R 28 *plus* R 20 *ex binis nominibus sexta.*

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

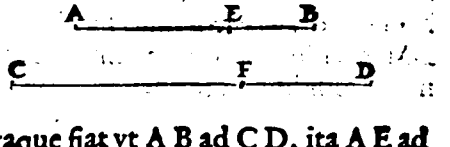


Sit ex binis nominibus AB, & ipſi AB longitudine commenſurabilis ſit CD. Dico CD ex binis nominibus eſſe, & ordine eandem ipſi AB. quoniam enim ex binis nominibus eſt AB, diuidatur in nomina ad punctum E, & ſit AE maius nomen. ergo AE EB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur EB ad reliquam FD eſt, ut AB ad CD. commenſurabilis autem eſt AB ipſi CD longitudine. ergo & AE ipſi CF, & EB ipſi FD longitudine eſt commenſurabilis. ſuntq; rationales AE EB: rationales igitur ſunt & CF FD. & quoniam eſt vt AE ad CF, ita EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: ſunt autem AE EB potentia ſolum commenſurabiles. ergo & CF FD potentia ſolum cõmenſurabiles erunt. & ſunt rationales. ex binis igitur nominibus eſt CD. Dico & ipſi AB ordine eandẽ eſſe. uel enim AE plus poteſt, quàm EB quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel incommenſurabilis. ſi quidem commenſurabilis, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectę lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi AE ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, & CF eidem commenſurabilis erit, & ob id vtraque ipſarum A B CD ex binis nominibus eſt prima; hoc eſt ordine eadem. Si vero EB ſit commenſurabilis expoſitę rationali, & FD eidem erit commẽſurabilis. ob eamq; cauſſam CD ipſi AB ordine eadem eſt; vtraque enim eſt ex binis nominibus ſecunda. quòd ſi neutra ipſarum AE EB ſit expoſitę rationali commenſurabilis, & neutra CF FD eidem commenſurabilis erit; & eſt vtraque tertia. At ſi AE plus poſſit, quàm EB quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſi AE ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, & CF eidem commenſurabilis erit, & eſt vtraque quarta. quòd ſi EB, & ipſa FD, & eſt vtraque quinta. ſi vero neutra ipſarũ AE EB, & neutra GF FD expoſitę rationali erit cõmenſurabilis, & eſt vtraque ſexta. ergo ei, quę eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, & ordine eadem.

11.ſexti. 19.quinti. 10.huius. 8.diffi. 10.huius. 13.huius. 14.huius. 15.huius.

THEOREMA L. PROPOSITIO. LXVIII.

Ei, quę eſt ex binis medijs longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis medijs eſt, atque ordine eadem.



Sit ex binis medijs AB, & ipſi A B commenſurabilis longitudine ſit CD. Dico CD ex binis medijs eſſe, & ipſi AB ordine eandẽ. quoniam enim A B ex binis medijs eſt, diuiſa in medias ad punctum E, erunt AE EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Itaque fiat vt A B ad C D, ita A E ad CF. ergo & reliqua EB ad reliquam FD eſt vt AB ad CD. commẽſurabilis autem eſt AB ipſi C D longitudine. quare & AE ipſi C F longitudine commenſurabilis erit, & EB ipſi FD. ſuntq; mediæ AE EB. mediæ igitur & CF FD. Et quoniã eſt vt AE ad EB, ita CF ad FD, & ſunt AE EB commenſurabiles potentia ſolum; erunt & CF FD potentia ſolum commenſurabiles. oſtenſę autem ſunt & mediæ. ergo C D eſt ex binis medijs. Dico & ipſi AB ordine eandem eſſe. Quoniam enim eſt vt AE ad EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratũ ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex A E ad quadratum ex C F, ita rectangulum AEB ad C F D rectangulum. commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD eſt commenſurabile. ſi igitur rationale eſt rectangulum AEB, & rectãgulum CFD rationale erit: atque eſt ex binis medijs prima. ſi vero medium eſt rectangulum AEB

23.huius. 11.ſexti. 19.quinti 10.huius. 24.huius.

AEB, & ipſum CFD erit medium: & eſt vtraque ex binis medijs ſecunda. ergo CD ipſi AB ordine eadem eſt. quod demonſtrare oportebat.

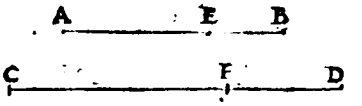
F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim eſt vt AE ad EB, ſic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD] *Nam cum ſit ut AE ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1 ſexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad FD. ſed vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.* ✻ 11. quinti

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commenſurabilis, & ipſa maior eſt.

Sit maior AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico CD maiorem eſſe. diuidatur AB in E. ergo AE EB potentia ſunt incommenſurabiles, quę faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis cõtinetur, medium. & fiant eadem, quæ ſupra. quoniam igitur eſt vt AB ad CD, ita AE ad CF, & EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commenſurabilis autẽ eſt AB ipſi CD. ergo & vtraque ipſarum AE EB vtrique CF FD eſt commenſurabilis. & quoniam eſt vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & componendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex AB ad quadratũ ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ſimiliter demonſtrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita eſſe quadratum ex CD ad quadratum ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. commenſurabile autẽ eſt quadratum ex AB quadrato ex CD, ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD ſunt commenſurabilia. atque eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB rationale. ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis CF FD. ſimiliter aũt & quod bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur. atque eſt medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD continetur. ergo CF FD potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis rationale: quod autem ipſis cõtinetur medium. tota igitur CD irrationalis eſt, quæ vocatur maior. ergo maiori commenſurabilis & ipſa maior eſt. quod demonſtrare oportebat.



40. huius

A
B
C

D
E
F

F. C. COMMENTARIVS.

Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF] *Ex 22 ſexti libri.* A

Similiter demonſtrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita eſſe quadratum ex CD ad quadratum ex CF] B

Quoniam enim eſt vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conuerſionẽ rationis vt BA ad AE, ita DC ad CF. ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex CF. 22. ſexti.

Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratũ ex CD ad quadrata ex CF FD] C

Eſt enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autẽ

ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.

D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 ſecundi quadratum ex AB eſt aequale quadratis ex AE EB unà cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD eſt aequale quadratis ex CF FD unà cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur ſit ut totum ad totum, ita ablatũ ad ablatũ, uidelicet ut quadratum ex AB ad quadratũ ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquũ ad reliquũ, ut totum ad totũ; hoc eſt quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. ſed quadratum ex AB commenſurabile eſt quadrato ex CD. ergo ex 10 huius & quod bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur.*

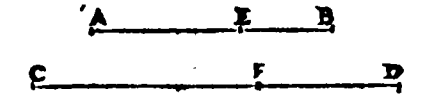
E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.] *Ex corollario 24 huius. quare & medium eſt, quod ſemel continetur CF FD.*

F Ergo CF FD potentia ſunt incommenſurabiles] *Vt enim AE ad EB, ita eſt CF ad FD. ſed AE eſt potentia incommenſurabilis ipſi EB. ergo & CF ipſi FD potẽtia incommenſurabilis erit. ſunt igitur CF FD potentia incommenſurabiles.*

10. huius.

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

Rationale, ac medium potenti commenſurabilis, & ipſa rationale, ac medium potens eſt.

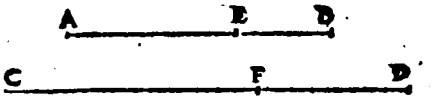


Sit rationale, ac medium potens AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. oſtendendum eſt & CD rationale, ac medium potẽtem eſſe. diuidatur AB in rectas lineas ad punctum E. ergo AE EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium: quod autem ipſis continetur rationale. & eadem, quæ prius conſtruantur. Similiter demonſtrabimus CF FD potentia eſſe incommenſurabiles: & compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB commenſurabile eſſe compoſitõ ex quadratis CF FD. Quod autẽ continetur AE EB cõmẽſurabile eſt ei, quod CF FD continetur. ergo & compoſitum ex quadratis ipſarum CF FD eſt medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens eſt CD. quod oſtendere oportebat.

40. huius.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commenſurabilis, & ipſa bina media potens eſt.



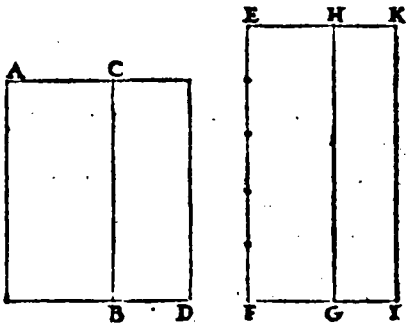
Sit bina media potens AB, & ipſi AB commẽſurabilis CD. oſtendendũ eſt CD bina media potentem eſſe. Quoniam enim bina media potens eſt AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare AE EB potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt cõpoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum. & conſtruantur eadem, quę ſupra. ſimiliter demonſtrabimus CF FD potentia incommenſurabiles eſſe: & compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB commẽſurabile compoſito ex quadratis CF FD. quod autem AE EB continetur commenſurabile eſt ei, quod continetur CF FD. quare & compoſitum ex quadratis ipſarum CF FD medium eſt: itemq; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens eſt CD. quod oſtendendum fuit.

41. huius.

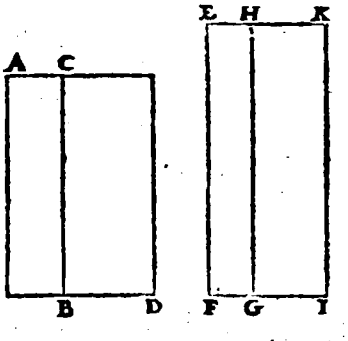
THEO-

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale,& medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea,quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima,vel maior,vel rationale ac medium potens.



Sit rationale quidem ſpacium AB, medium autem CD. Dico eam, quę poteſt ſpacium AD, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis medijs primam, vel maiorem, vel rationale, ac medium potentem. etenim AB vel maius eſt, quã CD, vel minus. ſit primum maius, expoq; rationalis EF: & ad ipſam applicetur parallelogrammũ EG ipſi AB æquale, quod latitudinem faciat EH: ipſi vero CD æquale ad EF, hoc eſt ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK. & quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt æquale EG, erit & EG rationale; & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EH. ergo EH eſt rationalis, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt CD, & ipſi eſt æquale HI; erit & HI medium; & ad rationalem EF, hoc eſt HG applicatum eſt, latitudinem faciens HK. quare HK eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi EF longitudine. quòd cum medium ſit CD, rationale autem AB; erit AB ipſi CD incommẽſurabile. ergo & EG incõmenſurabile eſt ipſi HI. vt autem EG ad HI, ita eſt recta linea EH ad HK. ergo EH ipſi HK longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtræq; rationales. quare EH HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibns eſt EK, diuiſa ad pũctum H. & quoniam maius eſt AB, quàm CD, æquale autem AB ipſi EG, & CD ipſi HI; erit & EG, quàm HI maius. ergo & EH maior eſt quàm HK. vel igitur EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectæ linæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit maior HE expoſitę rationali EF commenſurabilis. ergo EK ex binis nominibus eſt prima, atque eſt EF rationalis. Si autem ſpacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta linea ſpacium potens ex binis nominibus eſt. ergo quæ poteſt ſpacium EI eſt ex binis nominibus. quare & ea quæ poteſt ſpacium AD. Sed EH plus poſsit, quàm HK, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſit maior EH expoſitę rationali EF commenſurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt quarta, & eſt EF rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ maior appellatur. potens igitur ſpacium EI maior eſt. ergo & potẽs ſpacium AD maior. ſit deinde ſpacium AB minus, quàm CD. erit & EG quàm HI minus; & ob id recta linea EH minor, quàm recta HK. vel igitur KH plus poteſt, quàm HE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis longitudine, & ſit minor EH commenſurabilis expoſitæ rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt ſecunda: rationalis autem EF. quod ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens eſt ex binis medijs primam:



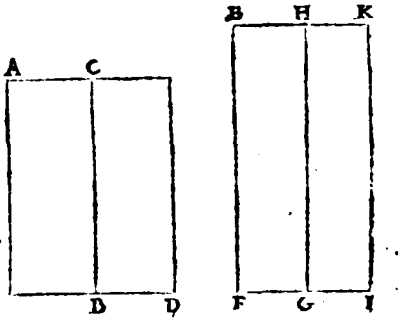
21. huius.
23 huius.
1. ſexti.
10. huius.
1. Diffi. ſecundarum.
55. huius.
4. diffi.
58. huius.
56. huius.

prima. potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs.ergo & potẽs ſpaciũ AD.Sed KH plus poſsit,quàm HE quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis;ſitq; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine.quare EK ex binis nominibus eſt quinta;atque eſt rationalis EF. ſi autem ſpacium 59.huius. contineatur rationali,& ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea rationale ac medium potẽs eſt.quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale & medium potens eſt;ideoq; rationale & mediũ potẽs eſt quæ pót ſpaciũ AD.Si igitur rationale, & medium componantur,quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens. quod demonſtrare oportebat.

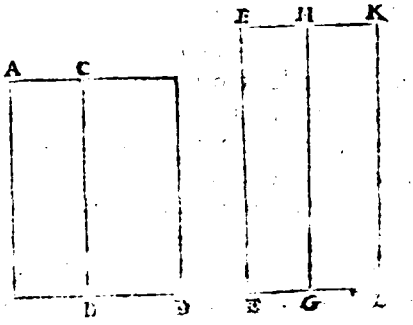
THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incõmenſurabilia inter ſe AB CD. Dico rectam lineam, quæ ſpaciũ AD poteſt vel ex binis medijs ſecundam eſſe, vel bina media potentem. ſpacium enim AB vel maius eſt, quàm CD, vel minus.ſit primum maius; exponaturq; rationalis EF: & ad EF ſpacio quidem AB æquale applicetur EG,latitudinem faciens EH.ipſi vero CD æquale applicetur HI, latitudinem faciens HK. & quoniam medium eſt vtrumq; ipſorũ AB CD,erit & vtrũq; EG HI medium,& ad rationalem EF applicata ſunt, quæ latitudinem faciunt EH HK.ergo vtraque EH HK rationalis eſt,& ipſi EF longitudine incommenſurabilis.quòd cum AB incõmenſurabile ſit ipſi CD; ſitq; AB quidem æquale EG; CD vero ipſi HI:erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile.ſed vt EG ad HI, ita eſt EH ad HK, incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK lõgitudine:ideoq; EH HK rationales sũt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex binis nominibus eſt EK.Itaque vel EH plus poteſt,quàm HK quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis.poſsit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali EF.ergo EK ex binis nominibus eſt tertia, & eſt FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia,recta linea ſpaciũ potens eſt ex binis medijs ſecũda.ergo quę poteſt ſpacium EI,hoc eſt AD eſt ex binis medijs ſecunda. ſed EH plus poſsit quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & vtraque ipſarum EH HK longitudine incõmenſurabilis eſt expoſitę rationali EF. quare EK ſexta eſt ex binis nominibus. At ſi ſpacium contineatur rationali,& ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium poteſt recta linea eſt bina media potẽs. ergo quę poteſt ſpacium AD bina me-



21.huius. 1.ſexti. 10.huius. 37.huius. 57. huius. 60.huius.



dia

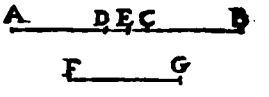
dis potens est. similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quàm CD, rectam lineam, quæ spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquæ duæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. quod demonstrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt, irrationales neq; mediæ, neque inter se eædem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem. quòd autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam, quod ab ea, quę est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundã. Quod ab ea, quæ est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinẽ efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quæ rationale, ac mediũ potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam. Quod ab ea, quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt et à prima & inter se: à prima quidem, quòd rationalis sit; inter se se vero, quod ordine non sint eædem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse. 23. huius. 61. huius. 62. huius. 63. huius. 64. huius. 65 huius. 66. huius.

SCHOLIVM.

Septem sunt senarij, de quibus hactenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium: secundus autem diuisionem, nempe quòd ad vnum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primę, secundę, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextę. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæ lineæ inter se differant. namque vsus ijs, quæ ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quę ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorũ spaciorũ. In sexto aũt quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media sumitur proportionalis inter portiones cuiusque lineę irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipsa eiusdem speciei cũ ijs, inter quarũ portiones media interijcitur. itaq; primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet.

Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quàm C B. auferatur à recta linea AC ipsi B C æqualis AD, & CD bifariam in E secetur. constat igitur AE ipsi EB æqualem esse. ponatur alterutri ipsarum ęqualis F G. manifestum est quo differt A C ab ipsa F G, eo differre EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine E C: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmeticæ analogiæ proprium. cõmensurabilis autem est F G ipsi A B; est enim eius dimidię æqualis. ergo FG ex binis nominibus est. similiter ostendetur & in alijs. 67. huius.



PRIN-

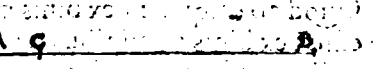
PRINCIPIVM SENARIORVM

PER APHÆRESIM HOC EST *Per detractionem.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtẽs toti, reliqua irrationalis eſt. vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur BC, potentia ſolum cõmenſurabilis exiſtens toti. Dico reliquã AC irrationalem eſſe, quæ vocatur apotome. Quoniã enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine; atq; eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id quod continetur AB BC: erit quadratũ ex AB incommenſurabile ei, quod AB BC continetur. ſed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC: ei vero, quod continetur AB BC, commenſurabile eſt quod bis AB BC continetur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC, incommenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC; quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem ſunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC eſt irrationalis, vocetur autem apotome.



A
B
C
D
E

F. C. COMMENTARIVS.

A Atque eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. ſexti, vel ex lemmate, quod 23 huius inſeruit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia] *Ex demonſtratis à nobis ad 14 huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC iucommenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC] *Ex demonſtratis ad 17 huius.*

D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC cõtinetur, vnà cum quadrato ex AC] *Ex ſeptima 2 libri.*

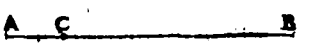
E Ergo recta linea AC eſt irrationalis] *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommenſurabilia ſunt quadrato ex AC, & ſunt quadrata ex AB BC rationalia, ſequitur quadratum ex AC irrationale eſſe, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC eſſe irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC R 3, erit AC 2 minus R 3. reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae eſt ex binis nomibus, de qua in 37 huius agitur; & BC reſpondet minori. atque eſt AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem mediæ apotome prima.

A media enim AB auferatur media BC, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi AB, & cum ea rationale faciens, videlicet quod AB BC continetur. Dico reliquam AC irrationalẽ eſſe. vocetur autem mediæ apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ ſunt,



A erunt & quæ ex AB BC quadrata media. rationale autem eſt quod bis continetur

AB

AB BC.quadrata igitur ex AB BC incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AB BC continetur.ergo & reliquo,videlicet quadrato ex AC incõmenſurabile eſt id,quod bis AB BC continetur,quoniam ſi tota magnitudo vni componentium ſit incommenſurabilis,& quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt. Irrationalis igitur eſt AC.vocetuŕq; medię apotome prima. B C D

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem eſt,quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod ſemel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo,videlicet quadrato ex AC incommenſurabile eſt id, quod bis AB BC continetur] *Namque ex 7 ſecundi quadrata ex AB BC ſunt aequalia ei,quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato,quod fit ex AC.* B

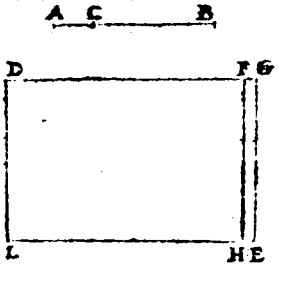
Quoniam ſi tota magnitudo vni componentium ſit incommenſurabilis] *Ex 17 huius.* C

Irrationalis igitur eſt AC] *Nam cum id,quod bis AB BC continetur ſit rationale,& incõmenſurabile quadrato ex AC,erit quadratum ex AC irrationale: idcircóq, recta linea AC irrationalis ex 11.diffinitione.* D

Sit recta linea AB ℞℞ 54,BC ℞℞ 24.erit AC ℞℞ 54 minus ℞℞ 24.reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae eſt ex binis mediis prima,de qua in 38 huius, & BC minori,eſt igitur AC reliqua portio maioris nominis,minori ex eo detracto.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti,quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis eſt.vocetur autem mediæ apotome ſecunda.



A media enim AB auferatur media BC potẽtia ſolum commenſurabilis exiſtens toti AB,& cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC. Dico reliquam AC irrationalem eſſe. vocetur autem mediæ apotome ſecunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipſam DI applicetur,latitudinem faciens DG:ei vero quod bis AB BC continetur ęquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur,latitudinem faciens DF.reliquum igitur FE eſt æquale quadrato ex AC. & quoniam media ſunt,quæ ex AB BC quadrata; erit & parallelogrammum DE medium.& ad rationalem DI applicatum eſt, latitudinem faciens DG.ergo DG eſt rationalis,& ipſi DI longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt quod AB BC continetur,erit & quod bis continetur AB BC medium: atque eſt ęquale parallelogrammo DH. ergo & DH eſt medium, & ad rationalem DI applicatum eſt latitudinem faciens DF. rationalis igitur eſt DF, & ipſi DI longitudine incommenſurabilis.& quoniam AB BC potentia ſolum cõmenſurabiles ſunt,erit AB ipſi BC incommenſurabilis longitudine. ergo quadratum ex AB incommenſurabile eſt ei,quod AB BC continetur.ſed quadrato quidẽ ex AB commenſurabilia ſunt quæ ex AB BC quadrata;ei vero,quod AB BC continetur commenſurabile eſt id,quod bis continetur AB BC.quadrata igitur ex AB BC incommenſurabilia ſunt ei,quod bis AB BC continetur. parallelogrammum autem DE eſt ęquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale eſt ei,quod bis continetur AB BC.ergo DE ipſi DH eſt incommenſurabile.ſed vt DE A B C D E Coroll. 24. huius. F

1. decimi. 20. huius. ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longitudine, & sunt vtræque rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum cõmensurabiles. ergo FG apotome est; & DI est rationalis. quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis. sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC est irrationalis. vocetur autem mediæ apotome secunda.

G
H
K

F. C. COMMENTARIVS.

A Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC] *Ex 7 secundi libri.*

B Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

C Erit & quod bis continetur AB BC medium] *Ex corolario 24 huius.*

D Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur] *Est enim vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC longitudine sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur; ex 10 huius.* Lemma. ad 23. huius.

E Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata] *Nam rectae lineae AB BC potentia commensurabiles ponuntur.*

F Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

G Ergo FG apotome est] *Ex 74 huius.*

H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Ex scholio ad 39 huius apposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.*

K Ergo AC est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞℞ 18, BC ℞℞ 8. erit AC ℞℞ 18 minus ℞℞ 8. respondet autem ipsa AB maiori nomini eius, quae est ex binis medijs secunda; & BC respondet minori. de qua in 39 huius.

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est. vocetur autem minor.

A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommensurabilis existens toti, faciẽsq; cum tota AB compositum quidem ex ipsarũ AB CB quadratis rationale; quod autem bis AB BC continetur medium. Dico reliquam AC irrationalem esse, quę vocatur minor. Quoniam enim cõpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est: quod autem bis AB BC continetur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia. sed quadrata ex AB BC rationalia sunt. irrationale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irrationalis. vocetur autem minor.



A
B
C

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

B Irrationale igitur est quadratum ex AC] *Ex 10 diffinitione.*

C Ideoq; recta linea AC est irrationalis] *Ex vndecima diffinitione:*

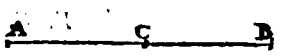
Sit AB ℞ V. 32 plus ℞ 704, BC ℞ V. 32 minus ℞ 704. erit AC ℞ V. 32 plus ℞ 704 minus ℞ V. 32 minus ℞ 704. respondet autem AB maiori nomini eius, quae dicitur maior, & BC respondit minori nomini eiusdem; de qua in 40 huius.

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est; vocetur que cum rationali medium totum efficiens.

A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incommensurabile est ei, quod bis continetur AB BC. atque est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aũt cũ rationali medium totum efficiẽs.



17 huius

10. diffi.

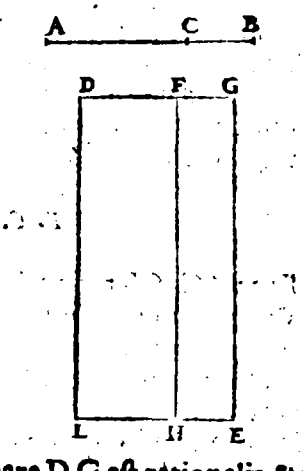
COMMENTARIVS.

Sit AB Ř V. Ř 13 ½ plus Ř 4 ½. BC Ř V. Ř 13 ½ minus Ř 4 ½. erit AC Ř V. Ř 13 ½ plus Ř 4 ½ minus Ř V. Ř 13 ½. minus Ř 4 ½; respondetq; AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis cõtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiẽs.

A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potẽtia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; cõpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis mediũ; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis D I: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam D I applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens D F. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex A C. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammo DE æquale, erit ipsum DE medium: & ad rationalẽ DI applicatũ est, latitudinẽ faciẽs DG. quare D G est rationalis, & ipsi DI longitudine incõmensurabilis. Rursus qm̃ id quod bis AB B C cõtinetur mediũ est, & æquale parallelogrãmo DH, erit DH mediũ, & ad rationalẽ D I applicatũ



23. huius.

23.huius: est, latitudinem faciens DF: ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incōmensurabilis longitudine. Quòd cum quadrata ex A B BC incommensurabilia sint ei, quod bis AB
1.sexti. BC continetur, & parallelogrāmum D E ipsi D H est incommensurabile. vt autem
10.huius. DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incōmensurabilis igitur est DG ipsi DF, & sunt vtrǫque rationales. ergo GD DF rationales sunt, potentia solum cōmen
A surabiles. apotome igitur est FG: & FH est rationalis. quod autem rationali, & apo
B toma continetur rectangulum irrationale est, ipsumq; potens est irrationalis. sed A
C C potest parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens,

F. C. COMMENTARIVS.

A Apotome igitur est F G] *Ex 74 huius.*

B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale est] *Etenim in scholio ad 39 huius appositio demonstratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse.*

C Ipsumq; potens est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*
Sit AB Ɽ V. Ɽ 13 ½ plus 3, BC Ɽ V. Ɽ 13 minus 3. erit AC Ɽ V. Ɽ 13 ½ plus 3 minus Ɽ V. Ɽ 13 ½ minus 3. & respondet AB maiori nomini eius, quae uocatur bina media potens; & BC respondet minori, de qua in 42 huius.

THEOREMA LXII. PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia solum cōmensurabilis existens toti.

A Sit apotome A B: congruens autem ipsi sit BC. ergo AC CB rationales sunt potē-



tia solum commensurabiles. Dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentia solum sit comensurabilis toti. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC
B CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraque enim excedunt eodem quadra
C to, quod fit ex AB. & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC
D CB continetur. sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtraque rectarum linearum rationalis est. quod igitur bis continetur AD
E DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non potest; vtrāq;
F enim media sunt. medium autem medium non superat rationali. ergo rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. vna igitur tantum ipsi congruit.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 74 huius.*

B Vtraque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] *Quadrata enim ex AD DB aequalia sunt ei, quod bis AD DB continetur vnà cum quadrato ex AB, ex 7 secundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB sunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vnà cum quadrato ex AB.*

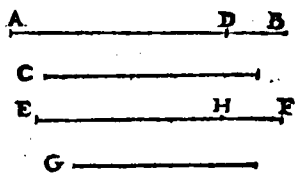
C Et permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB] *Hoc sequenti lemmate demonstrabimus.*

LEMMA

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.

Sit enim DB exceſſus, quo AB excedit C: & HF exceſſus quo EF excedit G. erunt DB HF æquales; itemq; æquales inter ſe AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem exceſſu, quo C ipſam G. & additis vtrinque æqualibus DB HF, excedet AB ipſam EF, vel ab ea excedetur eodem exceſſu, quo AD ipſam EH, hoc eſt quo C ipſam G. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.



Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali] *Rationale enim non ſuperat rationale, niſi rationali. quod nos ad 27 huius demonſtrauimus.* D

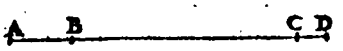
Vtraque enim media ſunt] *Nam quod rationalibus potentia ſolũ commenſurabilibus continetur rectangulum irrationale eſt, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediũ igitur eſt id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, vt pote eius duplum ex corollario 24 huius. eadem ratione & medium eſt, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non ſuperat rationali] *Ex 27 huius.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipſi AB cõgruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quę rationale continent. Dico ipſi AB alteram non congruere mediam, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodẽ & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim rurſus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. ſed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraque enim rationalia ſunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nõ poteſt; vtraque enim ſunt media. medium autem medium non ſuperat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quę potentia ſolum toti ſit commẽſurabilis, & cum tota rationale contineat.



75 huius.

7. secundi.

Ex antecedẽti lemmate.

Ex demonſtratis ad 17. huius.

27. huius.

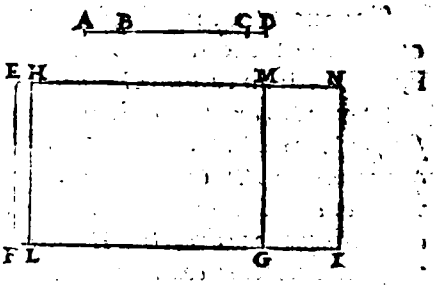
THEOREMA LXIIII. PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ ſecundę vna tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipſi AB alteram

76. huius.

alteram non congruere mediam quæ potentia ſolum ſit cõmenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ADB continent: & exponatur rationalis EF: quadratiſq; ex AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EM, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur

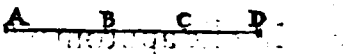


EL eſt æquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL æquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniã mediæ ſunt AC CB, erunt & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt me-
24. huius. dium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam mediũ eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt æquale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum
23. huius. eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC in
Ex lemm. ad 23. huius. commenſurabilis ipſi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod continetur AC CB. incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex AC, ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB; ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt, quod
Ex demonſtratis in 14. huius. bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommẽſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atque eſt quadratis ex AC CB æquale parallelogrammum EG; ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt in
1. ſexti. commenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM
10. huius. ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt vtræque rationales. ergo EM
74. huius. MH rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EH; & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiEx 80. huius ſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo mediæ apotomę ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis continetur mediũ.

77. huius. Sit minor A B, & ipſi A B congruat B C. ergo A C C B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium,



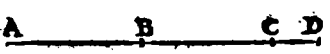
Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quę eadem faciat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes cõ-
Ex lemmate ad 80. huius poſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. quod fieri non potest. etenim vtraque sunt media. ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cũ tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod vero bis ipsis continetur medium. 17 huius

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIIII.

Ei, quæ cũ rationali mediũ totũ facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipsi BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Dico ipsi AB alterã non congruere eadem facientem. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB potẽtia sunt incõmensurabiles, facientes cõpositum quidem ex ipsarũ AD DB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo ex excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur: quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedẽt quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraque sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis cõtinetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea.

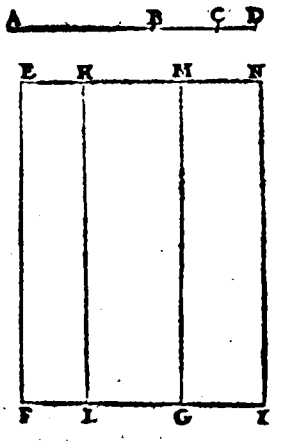


78. huius

THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quę cum medio medium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

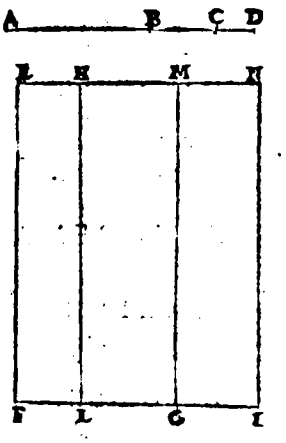
Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incõmensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ proposita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommensu



79. huius

rabiles

rabiles ſint, faciantq́; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ipſis continetur medium, & incomenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. & exponatur rationalis EF; & quadratis ipſarum AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinē facens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB æquale parallelogrammum auferatur HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur quadratum ex AB eſt æquale parallelogrammo EL. ergō AB ipſum EL pōt. rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipſi HI eſt quale. & quoniam compoſitum ex quadratis AC CB medium eſt, & æquale parallelogrāmo EG, erit & EG medium, quod ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. quare EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommēſurabilis. Rurſus quoniam quod bis AC CB continetur eſt medium, & æquale ipſi HG, erit & HG medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. quòd cum quadrata ex AC CB incommenſurabilia ſint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC incommenſurabile ipſi GH; ideoq́; recta linea EM rectæ MH longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtræque rationales. cum igitur EM MH rationales ſint, potētia ſolum commenſurabiles, recta linea EH apotome eſt, & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus EH rurſus apotomen eſſe, ipſiq́; congruentem HN. ergo apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ipſi AB altera congruet recta linea. quare vna tantum congruet, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.



23. huius.

10. huius.

74. huius.

80. huius.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1 Expoſita rationali, & apotoma, ſi quidē tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; ſitq́; tota expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, & tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectę lineæ ſibi cōmenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

3 Quòd ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitę rationali, & tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

4 Rurſus ſi tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

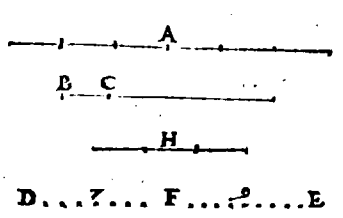
Si vero congruens expositę rationali sit longitudine commen- 5
surabilis, vocetur apotome quinta.

Quòd si neutra, dicatur apotome sexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum excessus DF nō sit quadratus. neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt E D ad D F, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commē surabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex G C; rationale autē est quadratū ex BC. ergo & quadratum ex GC est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. Dico & primam esse. sit enim quadratum ex H id, quo quadratū ex BG plus potest, quàm quadratum ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est BG ipsi H lōgitudine. & BG plus potest, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poterit, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BG expositę rationali A commensurabilis lōgitudine. ergo BG apotome est prima. Inuēta igitur est prima apotome. quod facere oportebat.



6. diffi.

Coroll. 1. lē. ad 30. huius

9. huius.

74. huius.

9. huius.

3. diffi. tertiarum.

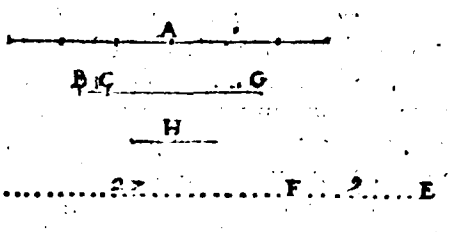
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4. numerus autem DE sit 16, EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC Ɍ 7. ergo BC est 4 minus Ɍ 7, quae est apotome prima.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

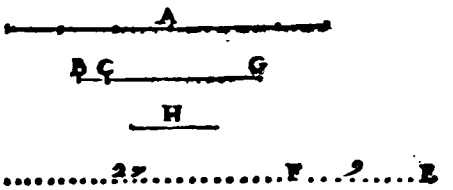
Inuenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri quadrati D E EF, quorū excessus DF, nō sit quadratus fiatq; vt F D ad D E, ita quadratum ex CG ad quadratum ex G B. commensurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex G B. sed quadratum ex



6. Diffi. Corol. 1. lemma ad 30. huius.

CG eſt rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex GB; ac propterea ipſa GB eſt rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum,



9.huius. erit CG ipſi GB incommenſurabilis longitudine; & vtræque ſunt rationales. ergo CG GB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, & ob id B

74.huius. C eſt apotome. Dico & ſecundam eſſe. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, ſit ex H quadratum. Quoniam igitur eſt vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuerſionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque eſt vterque ipſorum DE EF quadratus. quadratũ igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem ha-

9.huius. bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipſi H longitudine eſt commenſurabilis. & plus poteſt BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poteſt, quàm GC quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt congruens CG expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine. ergo B

33.diff. C apotome eſt ſecunda. inuenta igitur eſt ſecunda apotome BC. quod facere oportebat.

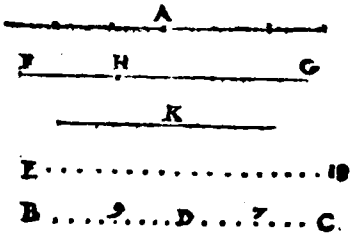
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE ſit 36, & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GB eſt ℞ 12, & EC ℞ 12 minus 3, quae eſt apotome ſecunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis A, & exponãtur tres numeri E BC CD non habentes inter ſe proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus



Cor.6.huius. ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad

6.huius. quadratum ex GH. commẽſurabile igitur eſt quadratum ex A quadrato ex FG. atque eſt quadratum ex A rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG eſt rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. in

9.huius. cõmenſurabilis igitur eſt A ipſi FG longitudine. rurſus qm̃ eſt vt BC ad CD, ita

6.huius. quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commenſurabile. rationale autẽ eſt quadratum ex FG. ergo & quadratũ ex GH eſt rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quòd cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratũ ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam̃ quadratus numerus ad

9.huius. quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt FG ipſi GH longitudine: & ſunt vtræque rationales. ergo FG GH rationales ſunt potentia ſolum commenſu-

94.huius. rabiles; ac propterea apotome eſt FH. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt E quidem

quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad GD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ. ergo A ipsi GH longitudine est incommẽsurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH 9. huius. expositę rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex FG plus potest, quàm quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & 9. huius. plus potest FG, quàm GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longitudine commensurabilis est expositę rationali A. quare FH apotome est tertia. In- 33. diff. uenta igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat.

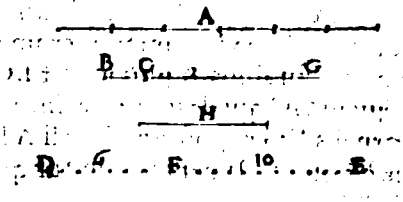
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7. erit BD 9. fiat vt 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est ℞ 32. rursus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium, erit ad 14 quare GH est ℞ 14 & FH ℞ 32 minus ℞ 14, quae est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO. LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.

Exponatur rationali A: & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo BG est rationalis. exponantur præterea duo numeri D F FE, ita vt totus DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC. est autem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratũ ex GC; ideoq; recta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est BC. Dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG, quàm GC, sit quadratum ex H. & quoniam est vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommẽsurabilis igitur est BG ipsi H longitudine: & plus potest BG, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, atque est tota BG commẽsurabilis expositę rationali A. ergo BC apotome est quarta. Inuenta igitur est quarta apotome BC. quod facere oportebat.



6. huius.

9. huius.

74. huius.

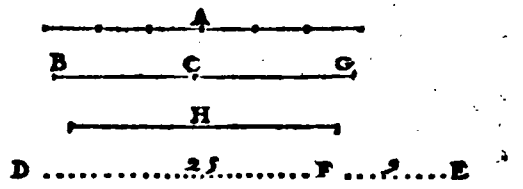
4. diff. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; si fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC R 10 & BC 4 minus R 10, quae est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem rursus nō habeat, quā numerus quadratus ad quadratū numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB. est autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB: & idcirco recta linea GB est rationalis. & quoniam vt DE ad EF, ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC: & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtraque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. Dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG, quàm quadratum ex GC, sit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF, erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratū. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine. atque est cōgruens CG expositę rationali A longitudine commensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuenta est igitur quinta apotome BC. quod facere oportebat.

6. huius.

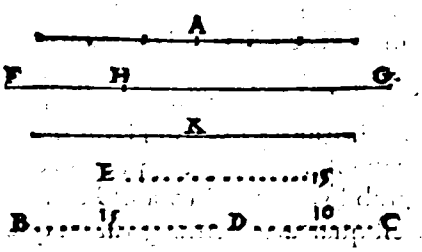
9. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF sit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG, quod est 9 ad alium, erit BG R 34, & BC R 34 minus 3, quę est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO. XCI.

Inuenire sextam apotomen.



Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter se, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. & fiat vt E ad BC, ita quadratū ex A ad quadratū ex FG: ut aūt BC ad CD, ita quadratū ex FG ad quadratū ex GH. qm̄ igitur est vt E ad BC ita, quadratū ex A ad quadratū ex F G; erit quadratum ex A quadrato ex FG cō

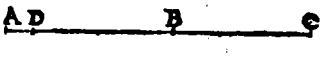
6. huius.

mensurabile.

menſurabile. rationale autem eſt quadratum ex A. ergo & quadratum ex FG rationale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem nõ habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommẽſurabilis igitur eſt A ipſi FG longitudine. rurſus quoniam eſt vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum ex FG commenſurabile quadrato ex GH. eſt autem quadratum ex FG rationale. rationale igitur eſt & quadratum ex GH; & ipſa GH rationalis. quòd cũ BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo F G ipſi G H longitudine eſt incommenſurabilis: & ſunt vtræque rationales. quare FG GH rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles, & FH apotome eſt. Dico & ſextam eſſe. Quoniam enim eſt vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. ſed E ad CD proportionem non habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo A ipſi GH longitudine eſt incommenſurabiiis: & neutra ipſarum FG GH expoſitæ rationali A commenſurabilis eſt longitudine. quo igitur plus poteſt quadratum ex FG, quàm quadratum ex GH, ſit quadratum ex K. & quoniam eſt vt BC ad CD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit per conuerſionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K. at C B ad B D proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo incommenſurabilis eſt FG ipſi K longitudine. & FG plus poteſt, quã GH quadrato ex K. plus igitur poteſt FG, quàm GH quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum FG GH eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali A. ergo FH apotome eſt ſexta. Inuenta eſt igitur ſexta apotome F H. ſed & expeditiùs ſex dictarum linearum inuentionem oſtendere licet.

9 huius. 6. huius. 9. huius. 74. unius. 9 huius. 6. tertiarum diffi.

Si enim oporteat inuenire primam apotomẽ, exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius maius nomẽ ſit AB. & ponatur B D ipſi BC æqualis. ergo AB BC, hoc eſt AB BD rationales ſũt, potentia ſolum commenſurabiles: & AB plus poteſt, quàm BC, hoc eſt quàm B D quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & AB eſt commenſurabilis lõgitudine expoſitę rationali. apotome igitur prima eſt AD. ſimiliter & reliquas apotomas inueniemus, eas, quæ ex binis nominibus eiuſdem ordinis exponentes.



F. C. COMMENTARIVS.

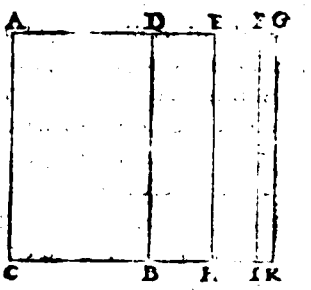
Sit A 6. numerus autem E ſit 15, BC 25, & CD 10. fiat igitur ut 15 ad 25, ita 36 ad aliũ, erit ad 60. Rurſus fiat ut 25 ad 10, ita 60 ad alium, erit ad 24. ergo F G eſt R 60, & G H R 24. ac propterea FH eſt R 60 minus R 24, quę eſt apotome ſexta.

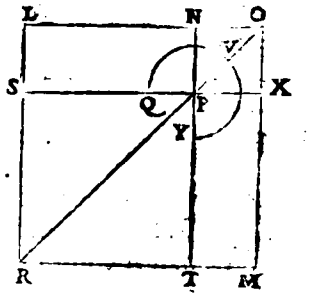
THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si ſpacium cõtineatur rationali, & apotoma prima, recta linea ſpacium potens apotome eſt.

Contineatur

Contineatur enim ſpacium AB rationali AC, & apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium AB apotomen eſſe. Quoniã enim AD prima apotome eſt, ſit ipſi congruens
1.diffi.tertiarum. DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & tota AG longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC. & præterea AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, ęquale parallelogrammũ ad AG applicetur, de-
18.huius: ficiens figura quadrata, in partes longitudine cõmenſurabiles ipſam diuidet. ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. commenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine: & per E F G puncta ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. & qñ AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabi-
16.huius. lis, erit & tota AG vtrique ipſarum AF FG cõmenſurabilis longitudine. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AC. vtraque igitur AF FG ipſi AC longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt AC rationalis. ergo & rationalis vtra-
10.huius. 16.huius. que AF FG; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK eſt rationale. & quoniam DE ipſi EG longitudine eſt commenſurabilis, erit & DG vtrique DE EG commenſurabilis longitudine: eſtq; rationalis DG, & ipſi AC longitudine incõ-
14.huius. 22.huius. menſurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & incommenſurabilis ipſi AC longitudine: & ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium eſt. ponatur ipſi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LO
16.sexti. M. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectãgulum AFG eſt æquale quadrato ex
14.sexti. EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: ſed vt AF ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK: & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipſum KF: parallelogrammorum igitur AI KF medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN, vt ſuperius oſtenſum eſt. parallelogrammumq; AI eſt æquale quadrato LM; & parallelogrammum KF quadrato NX æquale. ergo & parallelogrammum MN eſt æquale ipſi EK. ſed parallelogrammum quidem EK eſt æquale parallelogrammo DH; parallelogrammum vero MN ipſi LX; parallelogrammum igitur DX eſt æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. eſt autẽ & parallelogrãmũ AK quadratis LM NX ęquale. ergo & reliquũ AB eſt ęquale quadrato ST. at quadratũ ST eſt id, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN eſt æquale parallelogrammo AB; ideoq; recta linea LN ipſum AB poteſt. Dico LN apotomen eſſe. Quoniam enim rationale eſt vtrumque parallelogrammorum AI FK, & ſunt ęqualia quadratis LM NX, erit & vtrumque LM NX rationale, hoc eſt vtrumque ipſorum, quæ fiunt ex LO ON; & vtraque igitur LO ON rationalis eſt. rurſus Qñ medium eſt parallelogrammum DH, atque eſt æquale ipſi DX, erit & LX mediũ. cũ igitur LX quidẽ medium ſit, NX vero rationale, incõmenſurabile eſt LX ipſi
10.huius: NX; vtq; LX ad XN, ita eſt recta linea LO ad ON. ergo LO ipſi ON longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtręque rationales. quare LO ON rationales ſunt poté-
74.huius. tia ſolum commenſurabiles. & idcirco apotome eſt LN; & ſpacium AB poteſt. quod igitur poteſt ſpacium AB eſt apotome. ergo ſi ſpacium contineatur rationali, & apotoma prima, recta linea ſpacium potens apotome eſt.





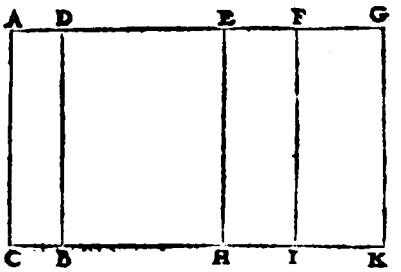
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD 7 minus R 13. *erit DG* R 13, *& DE, uel EG* R 3 ¼. *quòd ſi ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipſius EG, deficiensq; figura quadrata 22, erit ex demonſtratis ad 18 huius AF 6 ½ FG ½. ergo parallelogrammum AI eſt 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum uero DK eſt* R 468, *DH, uel EK* R 117, *EI* R 117 *minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB eſt 42 minus* R 468. *Huiuſmodi autem ſpacium iuniores etiam apotomen primam, uel reſiduum primum appellare conſueuerunt, cuius latus quadratum, uel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum eſt in ſpacijs binomialibus, præterquã quòd loco uocis plus, utemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes; ita ut quod ex ipſis producitur, ſit aequale quartæ parti 468, hoc eſt 117. erit maior pars 39, minor 3: idcoq;* R 39 *minus* R 3 *erit latus quadratum, uel radix huius ſpacij reſidui 42 minus* R 468.

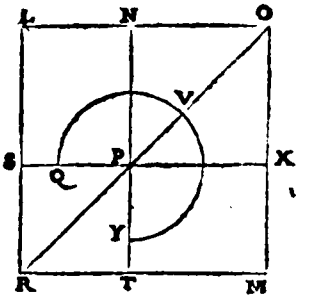
THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſecunda, recta linea ſpacium potens mediæ eſt apotome prima.

Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AB poteſt mediæ apotomen eſſe primam. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & congruẽs DG commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC; totaq; AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ipſius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E: & quadrato ipſius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. ergo commenſurabilis eſt AF ipſi FG longitudine; & per puncta EFG ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabilis, erit AG vtrique ipſarum AF FG commenſurabilis longitudine. rationalis autem eſt AG, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis. ergo & vtraque AF FG eſt rationalis, ipſiq; AC incommenſurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium eſt. Rurſus quoniam DE commenſurabilis eſt ipſi EG, erit & DG vtrique DE EG commẽſurabilis. ſed DG commenſurabilis eſt ipſi AC longitudine. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammorum DH EK eſt rationale. conſtituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum ſunt quadrata LM NX. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media ſint, & ſibi ipſis commenſurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON medię sũt, potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam rectangulum AFG eſt æquale quadrato



a. diff. tertiarum.



28. huius

16. huius.

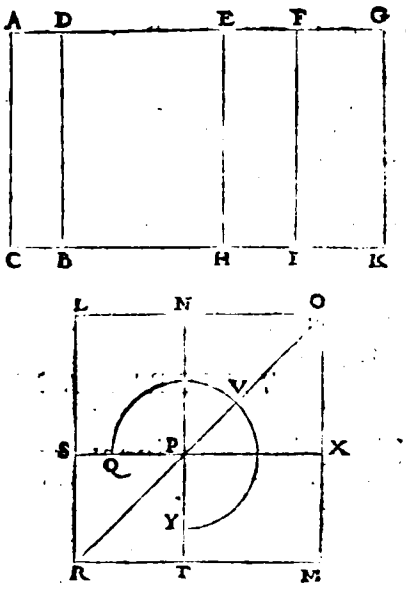
21 huius.

16. huius.

20. huius

26. sext.

14.ſexti. drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: ſed vt AF ad EG, ita eſt parallelogrãmum AC ad ipſum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF: parallelogrammorum igitur AI FK mediũ proportionale eſt EK. eſt autẽ & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidẽ eſt ęquale quadrato LM; parallelogrãmum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipſi EK eſt ęquale. ſed DH eſt æquale EK, & LX ipſi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX ęquale erit. itaq; quoniam totum AK ęquale eſt quadratis LM NX, quorum DK eſt æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX; erit reliquum AB ęquale quadrato ST, hoc eſt ei, quod fit ex LN. quadratũ igitur ex LN eſt ęquale ſpacio AB; ideoq; recta linea LN ſpacium AB poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe primam. quoniam enim rationale eſt EK, & ęquale ipſi MN, hoc eſt ipſi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem oſtenſum eſt NX. quare LX eſt incommenſurabile ipſi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine ſunt incommenſurabiles; ac propterea LO ON mediæ ſunt commenſurabiles potentia ſolum, quæ



75.huius rationale continent. quare LN medię apotome prima eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens medię eſt apotome prima.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 4, & AD ℞ 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipſius EG, deficienſq; figura quadrata: erit AF ℞ 27, FG ℞ 3. & ob id parallelogrammum AI ℞ 432, FK ℞ 48, & totum AK parallelogrãmum ℞ 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus ℞ 48. ergo AB eſt ℞ 768 minus 24, quod ſpacium etiam apotomen ſecundam, vel reſiduum ſecundum vocãt. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur ℞ 768 in dnas partes, ita vt productum ex ipſis ſit aequale quartae parti quadrati 24, hoc eſt aequale 144, erit maior pars ℞ 432, minor ℞ 48. quare ℞℞ 432 minus ℞℞ 48 eſt latus quadratum, ſeu radix eius ſpacij reſidui ℞ 768 minus 24.

THEOREMA LXX. PROPOSITIO XCIIII.

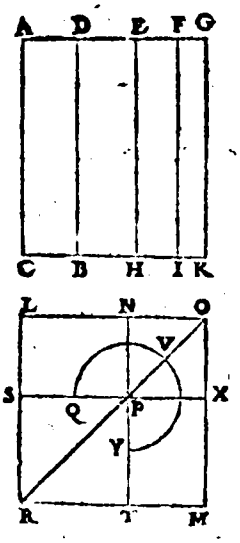
Si ſpacium cõtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea ſpacium potens medię eſt apotome ſecunda.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectã lineam, quæ poteſt ſpacium AB, mediæ eſſe apotomen ſecundam. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt, potẽtia ſolum commenſurabiles, & neutra ipſarum AG GD longitudinę commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC, totaq; AG plus poteſt, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabiles longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati ipſius DG ęquale parallelogrãmum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ipſius EG æquale ad

18.huius. AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG: & per puncta EFG

ipſi

ipſi AC parallelę ducantur EH FI GK. ergo AF FG commenſurabiles ſunt: atque ob id parallelogrammũ AI parallelogrammo FK eſt commenſurabile. & quoniã AF FG commenſurabiles ſunt longitudine, erit & AG vtrique ipſarum AF FG longitudine commenſurabilis. eſt autem rationalis AG, & ipſi AC incommenſurabilis longitudine. & vtraque igitur AF FG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK eſt medium. Rurſus quoniam DE commenſurabilis eſt ipſi EG longitudine, erit & DG vtrique DE EG cõmenſurabilis. ſed DG rationalis eſt, & ipſi AC incõmenſurabilis longitudine. rationalis igitur eſt & vtraque DE EG, & ipſi AC lõgitudine incommenſurabilis. ergo vtrumque parallelogrammorũ DH EK medium eſt. quòd cum AG GD potentia ſolum commẽſurabiles ſint, AG ipſi GD longitudine erit incommẽſurabilis. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AF longitudine, & DG ipſi GE. eſt igitur AF ipſi EG longitudine incommenſurabilis. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum. ergo incõmenſurabilis eſt AI ipſi EK. conſtituatur ipſi quidem AI æquale quadratum LM; ipſi vero FK æquale auferatur NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. Quoniam igitur rectangulum AFG eſt æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo & vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & parallelogrammum AI quidem æquale eſt quadrato LM; FK vero ipſi NX. ergo & EK eſt æquale MN. ſed MN æqũale eſt LX, & EK ipſi DH. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. eſt autem & parallelogrammũ AK æquale quadratis LM NX. ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ST, hoc eſt quadrato ex LN. & ob id recta linea LN ipſum AB ſpacium poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe ſecundam. Quoniam enim media oſtenſa ſunt parallelogramma AI FK, & ſunt æqualia quadrãtis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcirco vtraque LO ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON commenſurabile. Rurſus quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi EK, & LM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt quadratum ex LO rectangulo LON. quare & recta linea LO ipſi ON longitudine eſt incommenſurabilis. ſunt igitur LO ON mediæ commenſurabiles potentia ſolum. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonſtratum eſt EK, atque eſt rectãgulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea LN mediæ apotome ſecunda eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens mediæ apotome eſt ſecunda.



46. huius.

42. huius.

16. huius.

42. huius

Ex demonſtratis ad 14 huius.

16. ſexti.

14. ſexti.

Lem. ad 33. huius.

76. huius.

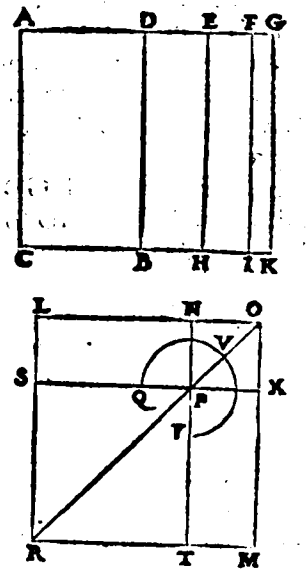
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, & AD R 27 minus R 15. erit DG R 15, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{4}$. quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum æquale quadrato ex EG, deficienſq; figura quadrata, quod ſit AF G, erit AF R 18 $\frac{3}{4}$, FG R $\frac{3}{4}$. ideoq; parallelogrammum AI eſt R 675, FK R 27, & totum AK parallelogrammum R 972. parallelogrammum autem DK R 540, EK R 135, & EI R 135 minus R 27. eſt igitur AB R 972 minus R 540. quod ſpacium eſt apotome tertia, vel tertium reſiduum. Itaque diuidatur R 972 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit æquale

R 135. erit maior pars R 675, & minor R 27. ergo RR 675 minus RR 27 eſt latus quadratum, vel radix ſpacij illius reſidui R 972 minus R 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea ſpacium potens minor eſt.



Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium AB poteſt, minorem eſſe. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & A G cõmenſurabilis eſt expoſitę rationali AC lõgitudine, totaq; AG plus poteſt, quàm GD, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ſi igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit A FG. ergo AF ipſi FG longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta EFG ipſis AC B D parallelæ EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſurabilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rurſus quoniam incommenſurabilis eſt DG ipſi AC longitudine, & ſunt vtræque rationales, erit parallelogrammum DK medium. quòd cum AF ipſi FG longitudine ſit incommenſurabilis, erit & parallelogrammum AI incommenſurabile parallelogrammo FK. conſtituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem, quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaque quoniã rectangulum AFG eſt ęquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. ſed vt AF quidem ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque eſt parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & EK æquale eſt MN. ſed EK quidem eſt æquale parallelogrammo DH, MN vero ipſi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. & quoniam totum AK æquale eſt quadratis LM NX, quorum DK eſt æquale gnomoni YVQ, & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc eſt quadrato ex LN. ergo LN ſpacium AB poteſt. Dico LN irrationalem eſſe, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale eſt, & æquale quadratis ipſorum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON rationale. Rurſus quoniam parallelogrammum DK medium eſt, atque eſt æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON cõtinetur mediũ: oſtenſũ aũt eſt parallelogrãmũ AI incõmenſurabile ipſi FK. ergo & quadratũ ex LO incõmenſurabile eſt quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia ſunt incommenſurabiles, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium. quare LN irrationalis eſt, quæ minor appellatur, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens minor eſt.

4. diffi. tertiarum.

16. huius.

20. huius.

22. huius.

26. ſexti.

14. ſexti.

77. huius.

F. C.

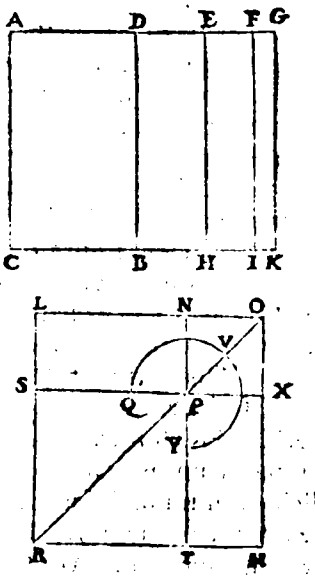
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6. AB 7 minus R 14. *erit DG* R 14, *& DE, vel EG* R 3 $\frac{1}{2}$. *Si vero ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit AF* 3 $\frac{1}{4}$ *plus* R 8 $\frac{1}{4}$: *FG* 3 $\frac{1}{2}$ *minus* R 8 $\frac{1}{4}$, *& parallelogrammum AI est* R 21 *plus* R 315, *FK* 21 *minus* R 315, *& totum AK* 42. *parallelogrammum vero DK est* R 504, *CK* R 126. *& AB* 42 *minus* R 504. *quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum. si igitur* 42 *dividatur in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit æquale quartæ parti* R 504, *hoc est* R 126, *erit maior pars* 21 *plus* R 126, *& minor* 21 *minus* R 126. *ergo* R *V.* 21 *plus* R 126 *minus* R *V.* 21 *minus* R 126 *est latus quadratum, seu radix spacij residui* 42 *minus* R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO. XCVI.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectā lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum cūmensurabiles; & congruens DG longitudine commensurabilis est expositę rationali AC; totaq; AG plus potest, quam GD quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelę EH FI GK. & quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC lōgitudine, & sunt vtręque rationales; erit parallelogrammum AK medium. Rursus quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Constituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; ipsi vero FK æquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quem LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter osteōdemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam DK rationale est, & æquale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi FK. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; Ideoque LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsorum quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua LN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.



29. huius.

21. huius.

20. huius

26. huius

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD R 56 *minus* 4, *erit DG* 4, *& DE, vel EG* 2. *quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ex CG, deficiensq; figura quadrata, erit AF* R 14 *plus* R 10; *FG* R 14 *minus* R 10. *& parallelogrammum AI eſt* R 504 *plus* R 360, *FK* R 504 *minus* R 360: *totumq; AK* R 2016. *At vero DK eſt* 24, *EK* 12, *& AB* R 2016 *minus* 24. *quod ſpacium eſt apotome quinta, vel reſiduum quintum. Diuidatur* R 2016 *in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit aequale* 144, *erit maior pars* R 504 *plus* R 360, *& minor* R 504 *minus* R 360. *quare* R *V.* R 504 *plus* R 360 *minus* R *V.* R 504 *minus* R 360 *eſt latus quadratum dicti ſpacij reſidui* R 2016 *minus* 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſexta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma ſexta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium AB poteſt, eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales

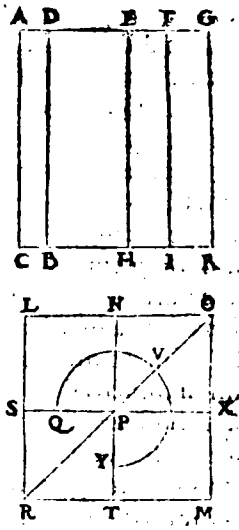
6 diffin. tertiarum. ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC longitudine. totaq; AG plus poteſt, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. ſi igitur quartæ parti quadrati ex DG ęquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata,

19. huius. in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. incommenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine. vt autem AF ad FG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum FK. ergo AI ipſi FK eſt incommenſurabile. & quoniam AG AC

10. huius: 22. huius rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit parallelogrammum AK medium. ſunt autem AC DG rationales, & incommenſurabiles longitudine. medium igitur eſt & DK. quòd cum AG GD potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit AG ipſi GD longitudine incommenſurabilis. ſed ut AG ad GD, ita eſt AK ad KD. incommenſurabile igitur eſt AK ipſi KD. itaque conſtituatur parallelogrammo AI ęquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale auferatur quadratum NX,

10. huius. 14. ſecti. angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eãdem ſunt diametrum. ſit eorum diameter OR, & figura deſcribatur. ſimiliter vt ſupra, oſtendemus rectam lineam LN ſpacium AB poſſe. Dico LN eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniã enim medium oſtenſum eſt AK, atque eſt æquale quadratis ipſarum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON medium. Rurſus quoniam medium oſtenſum eſt DK, & eſt ęquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommenſurabile autem oſtenſum eſt AK ipſi KD. ergo & quadrata ex LO ON incommenſurabilia ſunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommenſurabile. ergo LO ON potentia ſolum commenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium, quod autem ipſis bis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſa-

79. huius. rum quadratis. ergo LN irrationalis eſt, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & poteſt AB ſpacium. recta igitur linea ſpacium AB potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.



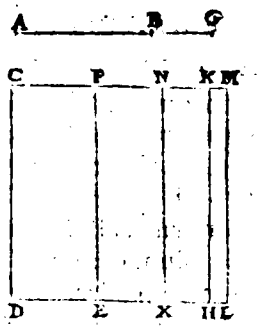
F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD R 32 *minus* R 20. *erit DG* R 20, *& DE vel EG* R 5. *si autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, æquale quadrato ex EG, & deficiens figura quadrata, erit AF* R 8 *plus* R 3, *FG* R 8 *minus* R 3: *& idcirco parallelogrammum AI* R 288 *plus* R 108, *FK* R 288 *minus* R 108, *& totum parallelogrammum AK* R 1152. *parallelogrammum vero DK est* R 720, *DH* R 18, *& AB* R 1152 *minus* R 720. *quod spacium est apotome sexta, vel sextæ residuum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur esse* R *V.* R 288 *plus* R 108 *minus* R *V.* 288 *minus* R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.



Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinē faciens CF. Dico CF apotomen esse primam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rationales sunt potentia solum cō mensurabiles: & quadrato quidē ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG æquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB continetur est æquale. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX: vtrumque igitur ipsorum FX LN est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia sunt, atque est quadratis ex AG GB æquale parallelogrammum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationalē CD applicatum est, latitudinē faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. Rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG GB, estq; ei, quod bis AG GB continetur; æquale parallelogrammum LF; erit ipsum LF medium: & applicatum est ad rationalem CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB medium. quadrata igitur ex AG GB incommēsurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. ergo CL ipsi LF est incommensurabile. vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommēsurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea CF est apotome. Dico & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrāmum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB æquale KF. erit ipsorum CH KL medium proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. vt autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK. & ob id rectangulum CKM est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartę parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG cōmensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. sed vt CH ad KL ita est recta linea CK ad ipsam KM. commensurabilis igitur est CK ipsi KM. itaque cum duæ rectæ lineę inæquales sint CM MF, & quartę parti quadrati ex FM æquale parallelogramum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, quod scilicet

74. huius.

7. secundi.

21. huius.

23. huius.

1. sexti.

74. huius.

Lem. ad 55. huius.

11. quinti.

17. sexti.

18.huius. scilicet CK KM continetur; sitq; CK commensurabilis ipsi KM: recta linea CM plus
1.diffi. tertiæ potent. poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est CM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF est prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

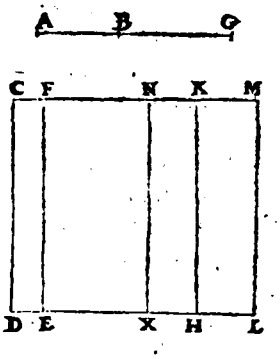
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R 33 *minus* R 3, *BG* R 3. *rationalis autem CD sit* 6; *& si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est* 33, *latitudinem faciens CK, erit CK* 5 $\frac{1}{2}$. *& si ad eandem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est* 3, *latitudinem faciens KM, erit KM* $\frac{1}{2}$, *& tota CM* 6. *Rursus si ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod est* R 99, *latitudinem faciens FN, erit FN* R 2 $\frac{1}{4}$, *& eadem ratione NM est* R 2 $\frac{1}{4}$, *& tota FM* R 11. *ergo CF est* 6 *minus* R 11, *quę est apotome prima.*

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum mediæ apotomæ primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autē CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammū CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomē esse secundam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt
73.huius. potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent: & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est ęquale quadratis ex AG GB medijs existētibus. quare & CL est medium; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem
23.huius. faciens CM. rationalis igitur est CM, & ipsi CD longitudine incommensurabilis, itaque quoniam CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB ęquale est parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æqua-
9 secundi. et.huius. le ipsi FL. est autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur est & EL; & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc est parallelogrammum CL medium est; quod autem bis contiuetur AG GB, videlicet FL est rationale: erit CL incommēsurabile ipsi LF. vt autem CL ad
1.sexti. 10.huius. LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incōmensurabilis. & sunt vtræque rationales. sunt igitur CM MF rationales potentia solum commensu-
94.huius. rabiles. ideoq; CF apotome est. Dico & secundam esse. secetur enim FM bifariam in puncto N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum
Lem. ad 55. huius. ex AG GB medium proportionale est, quod AG GB continetur; estq; quadratū ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipsi KL: erit parallelogrammorū CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. Sed vt C-
8.quinti. 17.sexti. H ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK; ac propterea rectāgulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex EM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex CB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile, hoc est recta linea CK commensurabilis ipsi KM. quòd cum



duæ

dunę rectæ lineę inæquales sint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æquale parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: atque est congruens FM expositę rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomę primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. 18. huius: 2. Diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

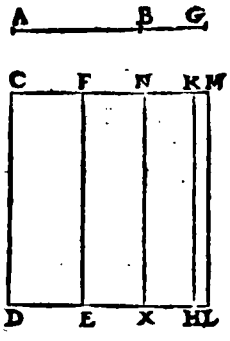
Ex iam demonstratis perspicuum fit, vt apotomę quadratū inueniamus, nos vti septima propositione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum est.

Sit AB RR 972 *minus* RR 108, *BG* RR 108, *rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est* R 972, *latitudinem faciens CK; erit CK* R 27: *& si ad eādem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est* R 108 *latitudinem faciens KM; erit KM* R 3. *& tota CM* R 48. *Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX aequale rectangulo AGB, quod est* 18, *latitudinem faciens FN; erit FN* 3, *itemq; NM* 3, *& tota FM* 6. *ergo CF est* R 48 *minus* 6, *quae est apotome secunda.*

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit mediæ apotome secunda AB; rationalis autem CD & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciēs CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam AG GB potentia solum commensurabiles sunt, erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commensurabile est quod bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, sunt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine; & sunt vtrę que rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabilis. & ob id apotome est CF. Dico & tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit



76. huius: 23. huius. 7. secundi: 23. huius. Lem. ad 23. huius. Ex demonstratis in 24 huius. 1. sexti. 10. huius. 74 huius.

erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & recta linea CK est cõmensurabilis ipsi KM. & quoniam quadratorum ex AG GB mediũ proportionale est rectangulũ AGB; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL: erit parallelogrammorum CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK, ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens figura quadrata, quod in partes cõmensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & neutra ipsarum CM MF longitudine commensurabilis est expositæ rationali CD. ergo CF tertia est apotome. quadratum igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.

Lem. ad 55. huius.

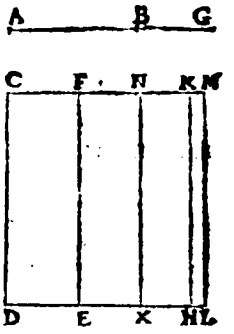
1. sexti.

11. quinti.

27. sexti.

18. huius.

3 diffin. tertiarum.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 882 *minus* RR 18, *BG* RR 18, *& rationalis CD sit 6. quòd si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* R $24\frac{1}{2}$. *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM* R $\frac{1}{2}$; *& tota CM* R 32. *praeterea si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, quod est* R 126, *latitudinem faciens FN, erit FN* R $3\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *ergo CF est* R 32 *minus* R 24, *quae est apotome tertia.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

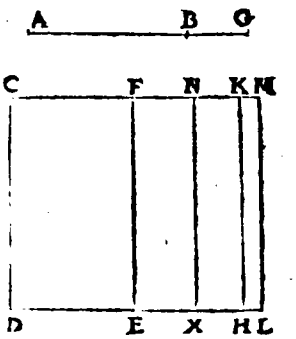
Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrãmum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB congruës BG. ergo AG GB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; quod autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atque est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciẽs CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB cõtinetur. Itaque secetur FM bifariam in N; & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quod bis continetur AG GB medium est, & æquale parallelogrammo LF. erit & LF medium.

97. huius.

ex. huius.

7. secundi.



dium. & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. ergo FM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam compositū ex quadratis ipsarum AG GB est rationale; quod autem bis AG GB continetur mediū: erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL; & ei quod bis AG GB continetur est æquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF. quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis: & sunt vtræque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & eam ob causſam apotome est CF. Dico & quartam esſe. Quoniam enim AG GB potentia sunt iucommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB est æquale KL. incommensurabile igitur est CH ipsi KL. sed vt CH ad KL, ita est CK ad KM. ergo CK ipsi KM est incommensurabilis longitudine. & quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectangulum; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB æquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita CK ad MN; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt CK ad MN ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartę parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duę rectæ lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens figura quadrata, quod est CKM, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine. & est tota CM longitudine commensurabilis expositę rationali CD. ergo CF quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

23. huius. 1. sexti. 10. huius. 74. huius. 1. sexti. 10. huius. Lem. ad 55. huius. 1. sexti. 11. quinti. 17. sexti. 19. huius. 4. Diffi. commensurum.

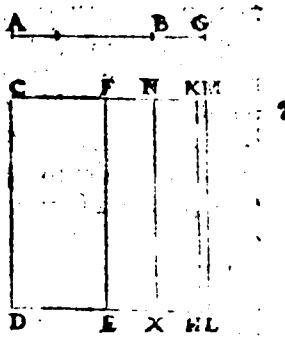
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.21 plus* R 3 15; *minus* R *V.21 plus* R 3 15; *BG* R *V.21 minus* R 3 15: *rationalis autem CD sit 6. & si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* 3 $\frac{1}{2}$ *plus* R 8 $\frac{1}{4}$. *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM* 3 $\frac{1}{2}$ *minus* R 8 $\frac{1}{4}$: *& tota CM* 7. *Quòd si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, videlicet* R 126; *latitudinem faciens FN, erit FN* R 3 $\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *est igitur CF* 7 *minus* R 14, *quae est apotome quarta.*

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius, quę cum rationali mediū totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quę cum rationali medium totum efficit AB; rationalis autem CD; & quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esſe quintam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incōmensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem bis ipsis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammū CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale applicetur KL latitudinē faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed compositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium. ergo & medium est parallelogrammum CL; &



76. huius.

ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB, erit reliquum EL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaque secetur FM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale est, & æquale parallelogrammo FL, erit & FL rationale, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. ergo FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. est autem parallelogrammum CL medium, & FL rationale. incommensurabile igitur est CL ipsi LF, & vt CL ad LF, ita CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. & sunt vtraque rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ob idque apotome est CF. Dico & quintam esse. similiter enim demonstrabimus rectangulum CKM esse æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. quod cum quadratum ex AG incommensurabile sit quadrato ex GB; sitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL. erit CH ipsi KL incommensurabile. sed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipsi KM longitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ CM MF inæquales sunt: & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad ipsam CM applicatum est, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit; recta linea GM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, atque est congruens FM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF quinta apotome est. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

83. huius

7 secundi.

21. huius.

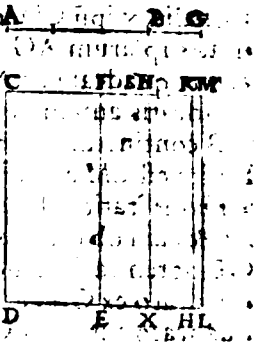
1. secundi. 20. huius.

74. huius.

1. sexti. 20. huius.

19. huius.

5. diffi. tertiarum.



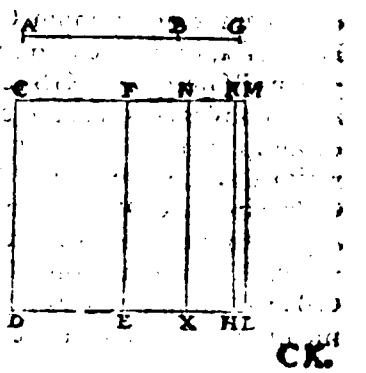
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. R 288 plus R 207 minus R V. 288 minus R 207. EG R V. R 288 minus R 207: rationalis autem C D sit 6. quòd si ad C D applicetur parallelogrammum C H aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK R 8 plus R 5 1/4. & si applicetur K L aequale quadratò ex GB, latitudinẽ faciens KM erit KM R 8 minus R 5 1/4, & tota CM R 32. Rursus si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN 1 1/4 a & tota FM 3. quare CF est R 32 minus 3, quae est apotome quinta.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quę cum medio medium totum efficit A B; rationalis autem C D: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens C F. Dico CF apotomen esse sextam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem bis ipsis AG GB continetur medium, & adhuc quadratis ipsarum incommensurabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG æquale parallelogrāmū C H, latitudinem faciens



CK.

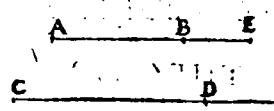
CK:quadrato aũt ex BG ęquale applicetur KL,latitudinem faciens KM. totũ igitur CL eſt ęquale quadratis ex AG GB:ac propterea CL eſt mediũ,& ad rationalẽ CD applicatum eſt, latitudinem faciens CM.ergo CM rationalis eſt,& ipſi CD longitudine incommenſurabilis. Quoniam igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB,quorum CE æquale eſt quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei,quod bis AG GB continetur. atque eſt quòd bis cõtinetur AG GB medium.ergo & FL eſt medium, & ad rationalem FE applicatum eſt,latitudinem faciens FM. eſt igitur FM rationalis, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AG GB continetur; atque eſt quadratis quidem AG GB ęquale parallelogrammum CL; ei vero,quod bis continetur AG GB, æquale FL: erit CL ipſi LF incommenſurabile. ſed vt CL ad LF, ita eſt CM ad MF. quare CM ipſi MF incommenſurabilis eſt longitudine: & ſunt vtręque rationales. ergo CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ob id CF eſt apotome. Dico & ſextam eſſe. Quoniã enim FL eſt ęquale ei, quod bis continetur AG GB, ſecetur FM bifariã in puncto N; & per N ipſi CD parallela ducatur NX. vtrũq; igitur parallelogrammiorum FX NL eſt æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex AG incommenſurabile quadrato ex BG. ſed quadrato quidem ex AG eſt æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipſi KL eſt incommenſurabile. vt autem CH ad KL,ita eſt CK ad KM. incommenſurabilis igitur eſt CK ipſi KM. quòd cum quadratorum ex AG GB medium proportionale ſit rectangulum AGB;ſitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectangulo; AGB æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum eſt commenſurabilis lõgitudine expoſitæ rationali CD. ergo CF ſexta eſt apotome. quadratum igitur eius,quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.* R 396 *plus* R 288 *minus* R *V.* R 396 *minus* R 288; *BG* R *V.* R 396 *minus* R 288; *& rationalis CD ſit* 6. *ſi vero ad CD applicetur parallelogrammum CH, latitudinem faciens CK; erit CK* R 11 *plus* R 8, *& ſi applicetur KL æquale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM; erit KM* R 11 *minus* R 8, *& tota CM* R 44. *Rurſus ſi ad CD applicetur FX, æquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat FN, erit ea* R 3, *& tota FM* R 12. *ergo CF eſt* R 44 *minus* R 12, *quæ eſt apotome ſexta.*

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO. CIIII.

Recta linea apotomę longitudine cõmenſurabilis, & ipſa apotome eſt, atque ordine eadem.



Sit apotome AB; et ipſi AB longitudine cõmenſurabilis ſit CD. Dico CD apotomen eſſe, atque ordine eandem, quę AB, quoniam enim apotome eſt AB, ſit ipſi congruens BE. ergo AE EB rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles. & fiat proportio BE ad DF eadem, quę eſt AB ad CD. quare vt vna ad vnam, ita erunt omnes ad omnes. eſt igitur vt AB ad CD, ita AE ad CF. commenſurabilis autem eſt AB ipſi CD longitudine. ergo & AE ipſi CF longitudine commenſurabilis erit, & BE ipſi DF. ſunt autem AE EB rationales potentia ſolum cõmenſurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia ſolum commẽſurabiles: ac propterea CD apotome eſt. Dico & ordine eandem eſſe. Quoniam enim eſt vt AE ad CF, ita BE ad FD, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: vel igitur AE plus

74. huius.

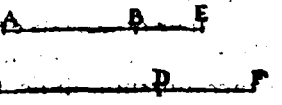
12. quinti.

10. huius.

A B

74. huius.

potest, quàm EB quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & siquidem commensusabilis, & C F plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę sibi lõgitudine cõmensurabilis: & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositę rationali; & CF expositæ rationali lõgitudine commensurabilis erit: si vero EB est cõmensurabilis, & DF cõmensurabilis erit: & si neutra ipsarũ AE EB cõmensurabilis est expositæ rationali longitudine, & neutra ipsarũ CF FD eidẽ longitudine erit cõmensurabilis. quòd si AE plus possit, quã EB quadrato rectę lineæ sibi incõmensurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectę lineę sibi lõgitudine incõmensurabilis: & siquidem AE sit cõmensurabilis expositæ rationali lõgitudine, & CF eidẽ longitudine cõmensurabilis erit: si uero BE, & DF: & si neutra ipsarũ AE EB, & neutra ipsarũ CF FD erit expositæ rationali lõgitudine cõmẽsurabilis. ergo CD apotome est, & ordine eadẽ, quę AB.



F. C. COMMENTARIVS.

A 10. huius B 10. huius.

Et BE ipsi DF.] *Quoniam enim est vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF; vt AE ad CF, hoc est vt AB ad CD. commensurabilis igitur est & BE ipsi DF longitudine.*

Ergo & CF FD rationales erunt potentia solum commensurabiles.] *Nam cum sit vt AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autẽ AE EB rationales potentia solũ cõmensurabiles. ergo & CF FD rationales potentia solũ cõmensurabiles erũt.*

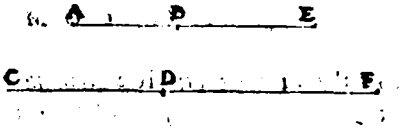
THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, & ipsa mediæ apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB, & ipsi AB lõgitudine commensurabilis sit CD. Dico CD mediæ apotomen esse, & ordine eandem. Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens. ergo AE EB mediæ sunt potentia solum commensurabiles: & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. sunt autem AE EB mediæ potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD mediæ potẽtia solũ cõmẽsurabiles erũt; ac propterea mediæ apotome est CD. ostendendum est & ordine eandem esse; quę AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. sed quadratum ex AE cõmẽsurabile est quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. si vero rectangulum AEB medium est, & medium erit rectangulum CFD. mediæ igitur apotome est CD, atque ordine eadem, quæ AB.

75, 76. huius

Lem. ad 25. huius.



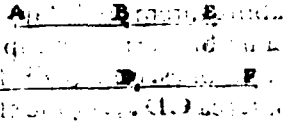
THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

Recta linea minori commensurabilis, & ipsa minor est.

Sit minor AB, & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico & CD minorem esse. fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE EB potentia sunt incõmensurabiles, & CF FD potentia incõmẽsurabiles erit. est autẽ vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadratũ ex AE ad quadratũ ex EB, ita quadratũ ex CF ad

77. huius.

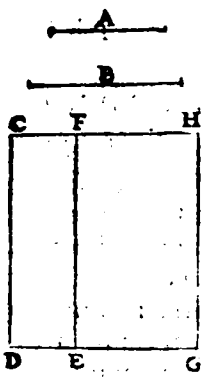
21. sexti.



quadratum

quadratum ex FD : & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando. commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB composito ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositū ex quadratis AE EB est rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. Rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium. ergo CD est minor. 77. huius.

ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse. Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta est CF. quadrato autem ex B æquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commensurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; et spacium FG rationali, et apotoma quarta continetur. recta igitur linea spacium potens minor est. potest autem spacium FG ipsa B. ergo B est minor.

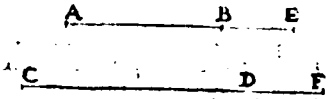


20. huius. 104. huius. 95. huius.

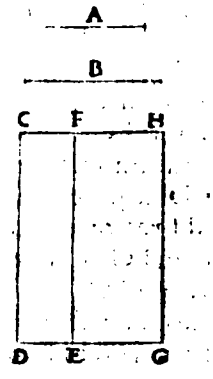
THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens AB, et ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eam, quę cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes cōpositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. et eadem construantur. similiter demonstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportione, in qua AE EB: et compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare et CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est quæ cum rationali medium totum efficit.



78. huius.



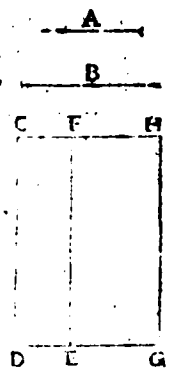
78. huius.

ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiē A, et ipsi A commensurabilis B. Dico B esse eam, quę cū rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quinta: quadrato aūt ex B æquale

80. huius.

FG ad

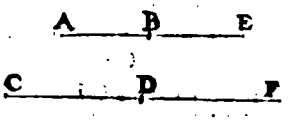
FG ad ipſam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. ſed quadrato ex A æquale eſt parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE eſt commebſurabile ipſi FG; ob idque recta linea CF ipſi FH longitudine eſt commenſu-
104.huius. rabilis. apotome autem quinta eſt CF. ergo & FH eſt apotome quinta; eſtq; FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea ſpacium
96.huius. potens eſt, quæ cum rationali medium totum efficit. ſed ipſa B poteſt ſpacium FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens eſt.



THEOREMA LXXXIIII. PROPOSITIO CVIII.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

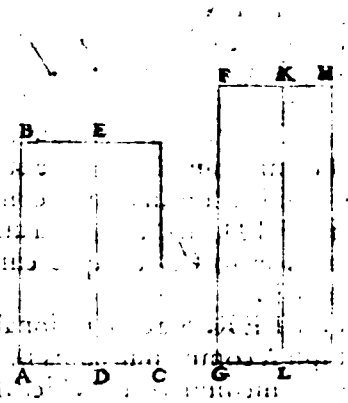
Sit cum medio medium totum efficiens AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico CD eſſe eã, quę cum medio medium totum efficit. ſit ipſi AB
79.huius. congruẽs BE, & eadem cõſtruantur. ergo AE EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium; quod autem ipſis continetur medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. & ſunt AE EB commenſurabiles ipſis CF FD, vt oſtenſum eſt: & compoſitum ex quadratis AE EB commenſurabile compoſito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium; quod autem ipſis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. ergo CD eſt quę cum medio medium totum efficit.
79.huius.



THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum ſpacium poteſt, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum ſpacium EC poteſt, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomẽ vel minorem. Exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CE eſt æquale LH. Itaque quoniam rationale eſt BC, medium autem BD: atque eſt BC æquale GH, & BD ipſi GK; erit GH rationale; medium autem GK, & ad ra-
21.huius. tionalem FG applicatum eſt. rationalis igitur eſt
23.huius. FH, & ipſi FG longitudine commenſurabilis: KH vero rationalis, & incommenſurabilis ipſi FG longitudine. ergo FH ipſi FK longitudine incommenſurabilis eſt; & HF FK rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea HK eſt apotome: ipſi vero
23.huius.
74.huius.



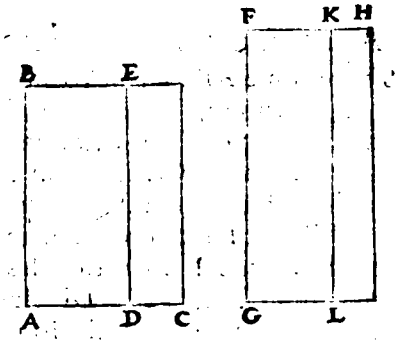
congruens

congruens KF. vel igitur HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectę lineę ſibi commẽ ſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis: poſsit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis. atque eſt tota HF commenſurabilis longitudine expoſitę rationali FG. ergo HK prima eſt apotome. recta autem linea, quæ poteſt ſpacium rationali, & apotoma prima contentum eſt apotome. Ergo quæ poteſt LH hoc eſt CE apotome eſt. quòd ſi HF plus poſsit, quàm FK quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; eſtq; tota HF expoſitæ rationali FG longitudine commenſurabilis; erit HK apotome quarta, & quę poteſt ſpacium rationali, & apotoma quarta contentum minor eſt. quæ igitur poteſt ſpacium LH, videlicet EC eſt minor. r-tertiarum. diffin. 92. huius. 4 diffin. tertiarum. 95. huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

Rationali de medio detracto aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim BC rationale BD detrahatur. Dico rectã lineã, quæ reliquũ ſpaciũ EC poteſt, vnã duarum irrationalium fieri vel mediæ apotomen primam, vel eam, quę cum rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis FG, & ad ipſam ſimiliter ſpacia applicentur; erit rationalis quidẽ FH, & ipſi FG longitudine incommenſurabilis; rationalis autem FK, & incommenſurabilis ipſi FG longitudine. ergo HF FK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt HK, & ipſi congruẽs KF. vel igitur HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. & ſi quidẽ commenſurabilis; atque eſt congruens FK commenſurabilis expoſitæ rationalis FG longitudine: erit HK apotome ſecunda. eſt autem FG rationalis. ergo quæ poteſt ſpacium LH, hoc eſt CE, mediæ eſt apotome prima. quòd ſi HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis; atque eſt congruens FK commenſurabilis expoſitę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. recta igitur linea potens ſpacium EC eſt quæ cum rationali medium totum efficit.

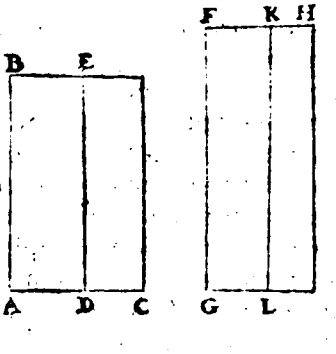


23. huius. 21. huius. 74. huius. 2. diffi. tertiarum. 93. huius. 5. diffi. tertiarum. 99. huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO. CXI.

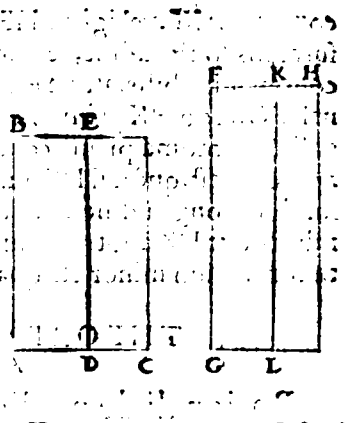
Medio de medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquę duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur enim, vt in propoſitis figuris de medio BC medium BD, quod ſit incommenſurabile toti. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium CE, vnã eſſe ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim medium eſt vtrumque ipſorũ BC BD, & BC incommenſurabile eſt ipſi BD, hoc eſt GH ipſi GK; erit HF ipſi FK incommenſurabilis longitudine. ergo HF FK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id apotome eſt HK, & ipſi congruens KF. itaque vel



23. huius. 74. huius.

HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: & ſi quidem commenſurabilis, & neutra ipſarum HF FK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia. rationalis autem eſt KL: & rectangulum rationali, & apotoma tertia contẽtum irrationale eſt. ergo recta linea, quę ipſum poteſt, eſt irrationalis, & vocatur medię apotome ſecunda. ſi vero HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & neutra ipſarum HF FK longitudine cõmenſurabilis eſt expoſitæ rationali FG; erit HK apotome ſexta. at recta linea potens quod rationali, & apotoma ſexta cõtinetur eſt quæ cum medio medium totum efficit. ergo quæ poteſt ſpacium LH, hoc eſt EC eſt cum medio medium totum efficiens.

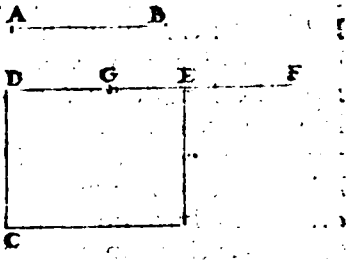


3. diffi. tertiarum.
94. huius.
6. diffi. tertium.
97. huius.

THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. ſit enim, ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis DC, & quadrato ex AB æquale rectangulum CE ad ipſam DC applicetur latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apotome eſt AB, erit DE apotome prima. ſit ipſis congruens EF. ergo DF FE rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles: & DF plus poteſt, quàm FE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commẽſurabilis: atq; eſt DF cõmẽſurabilis expoſitę rationali CD longitudine. Rurſus qm̃ ex binis nominibus eſt AB, erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G, ſitq; DG maius nomẽ. ergo DG GE rationales ſunt, potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles: & DG plus põt, quã GE quadrato rectæ lineæ ſibi cõmẽſurabilis lõgitudine: & maior DG longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali DC. quare DF ipſi DG longitudine eſt commenſurabilis. & reliquę igitur FG commenſurabilis erit. Itaq; quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG, atque eſt rationalis DF; erit & FG rationalis. Rurſus quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG longitudine, atque eſt DF ipſi FE incommenſurabilis longitudine; erit & FG ipſi FE longitudine incommenſurabilis, & ſunt rationales. ergo GF FE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EG. ſed & rationalis. quod fieri non poteſt. ergo apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.



98. huius.
1. diffi. tertium.
61. huius
57. huius.
12. huius
Ex demonſtratis ad 17. huius.
74. huius.

Apotome, & quę poſt ipſam ſunt irrationales, neque medię, neque inter ſe eædẽ ſunt: quadratum enim, quod à media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem, & ei, ad quam applicatur, longitudine incommenſurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotomæ prima ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam. quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea, quæ cum rationali mediũ totũ efficit ad rationalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã. quod ab ea, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam. Quoniam igitur diſtę latitudines differunt tum à prima, tum inter ſe ſe, à prima quidem, quòd rationalis ſit, inter ſe vero, quod ordine non ſint eædẽ; manifeſtum eſt & ipſa irrationales inter ſe differentes eſſe. & oſtenſum eſt apotomẽ non

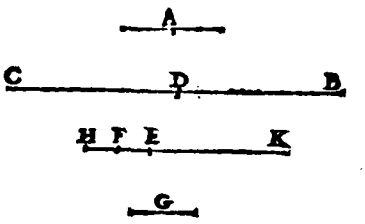
83. huius.
98. huius.
99. huius.
100. huius.
101. huius.
102. huius.
103. huius.

non esse eandem, quæ ex binis nominibus. quadrata autem apotomæ & earum quę sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusdē ordinis, cuius & illæ sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ est ex binis nominibus, & earum, quæ posi ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illę sunt. ergo rectę lineæ, quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter se differunt, ita vt omnes sint numero tredecim, videlicet.

1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quę ex binis medijs prima
4 Quæ ex binis medijs secunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome secunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

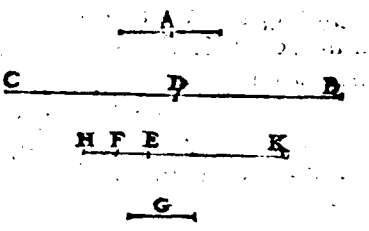
THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



Sit rationalis A; ea, quę est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD: & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod BC EF continetur. Dico EF apotomen esse, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis CD DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF est æquale ei, quod BD G continetur, erit vt CB ad BD, ita G ad EF: A
maior autem est CB, quàm BD. ergo & G quàm EF maior erit. sit ipsi G æqualis E B
H. est igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo vt CD ad DB, ita HF ad FE,
fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE. vt enim C
vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia
consequentia. sed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB. D
cōmēsurabile aūt est quadratū ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratū ex HK qua E
drato ex KF est commensurabile. atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex F

KF, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportiones sunt, commensurabilis igitur est HK ipsi
G KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniã quadratum ex A est æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est.
21. huius rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoq; & EK, quæ est incommensurabilis ipsi HE rationali erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autẽ CD DB potentia solum cõmensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabi-
H lis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsiq; CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentiã solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis,
15. huius. etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & FK eidem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quòd si CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.



F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 sexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quæ à nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quæ ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] *Ex 22 sexti, & decima huius.*

F Atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario secundo 20 sexti.*

G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] *Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensurabilis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.*

K Et idcirco EF apotome est] *Ex 74 huius.*

Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinẽ faciẽs G, erit G 1 $\frac{1}{3}$, cui æqualis sit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF vide ut et vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 $\frac{1}{3}$ ad aliũ. multiplicabimus igitur 3 per 1 $\frac{1}{3}$ producetur 4, & 4 dividemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per aporomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producitur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & ob id R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quã 4, si applicetur ad R 12 plus
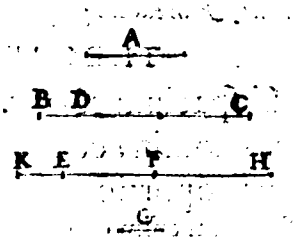
3 *sed*

sed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit R 21 $\frac{1}{7}$ minus 4 quadratum rationalis, recidit ad 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad R 12 plus 3 applicatum latitudinem facit R 21 $\frac{1}{7}$ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.

Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale sit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus ipsius BD; & in eadem proportione: & K H eundem habere ordinem, quem habet B D. fit enim ipsi BD congruens DC. ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A æquale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est æquale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quàm BD. ergo & KH, quàm G est maior. ponatur ipsi G æqualis KE. commẽsurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. & quoniam est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per cõuersionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est vt BC ad CD. sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum cõmensurabiles erũt. & cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi B C longitudine commensurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniã est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autem est B C ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; B C C D rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineæ sibi lõgitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, est commensurabilis longitudine expositę rationali, erit & ipsa FH eidem commẽsurabilis; & si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH. at si BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & siquidem BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH. quòd si neutra ipsarum BC CD, & neu-



74. huius.

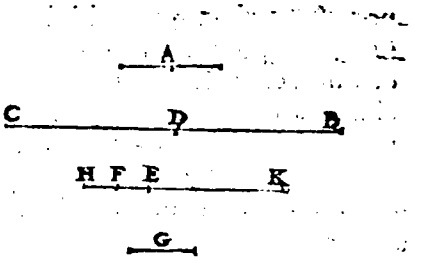
1. huius.

14. serti: Ex demonstratis ad 16. quinti.

19. quinti.

11. quinti.

Corr. 2. 20. serti.



KF, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportiones sunt, commensurabilis igitur est HK ipsi
G KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniã quadratum ex A est æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est.
21. huius rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoq; & EK, quæ est incommensurabilis ipsi HE rationalis erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autẽ CD DB potentia solum cõmensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabi-
H lis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsiq; CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentiã solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis,
15. huius etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & FK eidem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quòd si CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 sexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quæ à nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quæ ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] *Ex 22 sexti, & decima huius.*

F Atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario secundo 20 sexti.*

G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] *Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensurabilis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.*

K Et idcirco EF apotome est] *Ex 74 huius.*

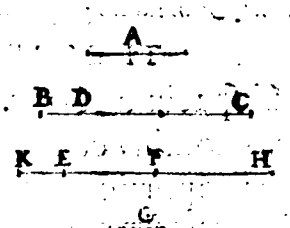
Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinẽ faciẽs G, erit G 1 $\frac{1}{3}$, cui æqualis sit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF vide ut et vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 $\frac{1}{3}$ ad alium. multiplicabimus igitur 3 per 1 $\frac{1}{3}$ producetur 4, & 4 dividemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per aporomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producitur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & ob id R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quã 4, s. applicetur ad R 12 plus

3 *sed*

sed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit R 21 ¼ minus 4, quae igitur rationalis 2, videlicet 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad R 12 plus 3 applicatum latitudinem facit R 21 ¼ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.



Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale sit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportione: & K H eundem habere ordinem, quem habet B D. fit enim ipsi BD congruens DC. ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A æquale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est æquale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quàm BD. ergo & KH, quàm G est maior. ponatur ipsi G æqualis KE. commẽsurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. & quoniam est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per cõuersionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est vt BC ad CD. sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum cõmensurabiles erũt. & cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi B C longitudine commensurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniã est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autem est B C ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; B C C D rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineæ sibi lõgitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, est commensurabilis longitudine expositę rationali, erit & ipsa FH eidem commẽsurabilis; & si neutra ipsarũ BC CD, & neutra ipsarũ KF FH. at si BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & siquidem BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH: quòd si neutra ipsarum BC CD, & neu-

74 huius.

11. huius.

14. secti: Ex demonstratis ad 16. quinti.

19. quinti.

11. quinti.

Corr. 2. 20. secti.

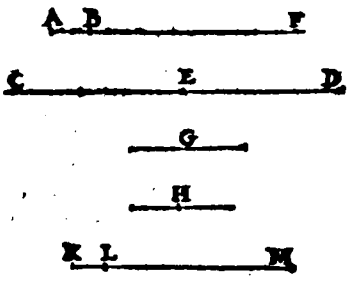
tra ipſarum KF FH. ex binis igitur nominibus eſt KH, cuius nomina KF FH commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportione; & KH eundem cohet ordinem, quem ipſa BC.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, BD R 18 minus R 10. & multiplicetur R 18 minus R 10 per eam, quę ex binis nominibus ipſi reſpondet, videlicet per R 18 plus R 10, producitur 8, rurſus multiplicetur ipſius A rationalis quadratum, quod eſt 4 per eandem, producitur R 288 plus R 160, habebit igitur 8 ad R 288 plus R 160 proportionem eandem, quam R 18 minus R 10 ad 4 ex 17 ſeptimi. quare ſi R 288 plus R 160 applicetur ad 8 latitudinem faciet R 4 ÷ plus R 2 ½, & eandem latitudinem faciet 4, ſi ad R 18 minus R 10 applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad R 18 minus R 10 latitudinem facit eam, quae eſt ex binis nominibus tertia, hoc eſt R 4 ½ plus R 2 ½ cuius nomina commenſurabilia ſunt apotomae nominibus, & in eadem proportione.

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si ſpacium cõtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomę, & in eadem proportione; recta linea ſpacium potens eſt rationalis.



Spacium enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quę ſit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commenſurabilia nominibus apotomæ AF FB: & in eadẽ proportione; ſitq; recta linea G potens ſpacium contentum AB CD. Dico ipſam G rationalem eſſe. exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur eſt KL, cuius nomina KM ML commenſurabilia ſint nominibus eius, quę eſt ex binis nominibus CE ED, & in eadem proportione. ſed CE ED commenſurabiles ſunt ipſis AF FB, atque in eadem proportione. eſt igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL eſt vt AF ad KM. commenſurabilis autem eſt AF ipſi KM. ergo & AB ipſi KL eſt cõmenſurabilis. eſtq; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. ſed rectangulum contentum CD KL eſt æquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H eſt commenſurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB eſt æquale quadrato ex G. ergo quadratũ ex G commenſurabile eſt quadrato ex H. atque eſt quadratum ex H rationale. rationale igitur eſt quadratum ex G; & idcirco ipſa G eſt rationalis; & poteſt quod CD AB continetur. Si igitur ſpacium contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadẽ proportione, recta linea ſpacium potens eſt rationalis.

inj. huius.

19. quinti. 10. huius. 1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex ijs manifeſto conſtat fieri poſſe, vt ſpaciũ rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

F. C.

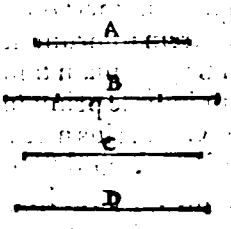
P. C. COMMENTARIVS.

Sit apotome AB R 21 ÷ *minus 4. ea vero, quae ex binis nominibus CD sit* 12 *plus 3. & mul tiplicetur* R 21 ÷ *minus 4 plus* R 12 *plus 3. fit* R 256, *quae est* 16 *minus* 12, *hoc est 4, quod est rationale, & eius radix 2 rationalis.*

THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

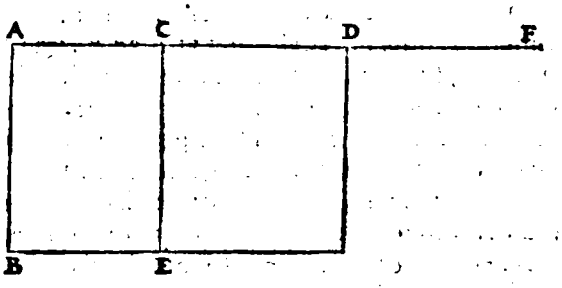
A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A. Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. expo natur enim rationalis B. & rectangulo contento A B æquale sit quadratum ex C. irrationalis igitur est ipsa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quę prius est eadem: non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectãgulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D. irrationale igitur est, quod fit ex D: & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C. Similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.



In scholio ad 39. huius

ALITER. Sit media AC. Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandẽ esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB: sitque AB rationalis, & BC cõpleatur. irrationale igitur est BC, & quæ ipsum potest est irrationalis. posit autẽ ipsum recta linea CD. ergo CD irrationalis est, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. posit ipsum recta linea DF. ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullius enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD. ergo à media infinitę irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.



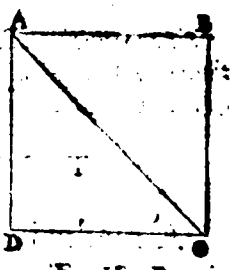
THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrũ lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter AC. Dico AC ipsi AB longitudine incõmensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. Dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse, & imparem. itaque manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB. & quoniam AC commensurabilis est ipsi AB, habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerũ. habeat, quam EF ad

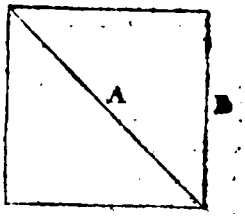
A
B

EF ad G: ſintq; EF, G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas eſt EF. ſi enim eſt vnitas, & habet ad G proportionem eam, quam AC ad AB; eſtq; AC maior, quàm AB: & EF vnitas, quàm G numerus maior erit. quod eſt abſurdum. ergo EF non eſt vnitas. quare numerus ſit neceſſe eſt. & quoniam vt AC ad AB, ita eſt EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem eſt quadratum ex CA quadrati ex AB, ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: ac propterea quadratus ex EF par eſt, & ipſe EF par. ſi enim eſſet impar, & qui fit ab ipſo quadratus impar eſſet, quoniam ſi impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar; & totus impar erit. ergo EF eſt par. ſecetur bifariam in H. & quoniam numeri EF G minimi ſunt eorum, qui eandem habent proportionem, inter ſe primi ſunt: & eſt EF par. impar igitur eſt G: ſi enim eſſet par, numeros EF G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter ſe ſunt. quod fieri non poteſt. non igitur G eſt impar: ergo par. & quoniam FE duplus eſt ipſius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. eſt autem quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur eſt quadratus ex G quadrati ex EH. ideoq; par eſt qui fit ex G quadratum. & ex iam dictis ipſe G eſt par; ſed & impar. quod fieri non poteſt. non igitur AC commenſurabilis eſt ipſi AB longitudine. ergo eſt incommenſurabilis.



C D E F G H K

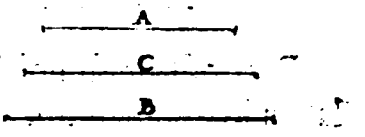
ALITER. Sed & aliter oſtendendum eſt incommenſurabile eſſe quadrati diametrum ipſius latera. ſit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipſi B longitudine incommenſurabilem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit commenſurabilis. & rurſus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipſum G: ſintq; minimi eorum, qui eandem habent proportionem. ergo EF G primi inter ſe ſunt. Dico primum, G non eſſe vnitatem. ſi enim fieri poteſt, ſit G vnitas. & quoniam eſt vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem eſt quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: atq; eſt G vnitas. binarius igitur eſt quadratus ex EF. quod fieri non poteſt. ergo G non eſt vnitas. numerus igitur. & quoniam eſt vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. ſed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus metitur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipſum EF latus metitur. metitur autem & ſe ipſum. ergo G numeros EF G metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri minime poteſt. non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis. quare incommenſurabilis ſit neceſſe eſt.



24. ſeptimi.

L

Itaque inuentis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines ex duabus dimenſionibus. nimirum ſuperficies incommenſurabiles inter ſe ſe. ſi enim ipſarum AB mediam proportionalem ſumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, & ſimiliter deſcriptam, ſiue quadrata, ſiue alia rectilinea ſimilia, ſiue circuli, qui circa diametros AC deſcribantur. quando quidem circuli inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur ſunt ſpacia plana inter ſe incommenſurabilia. oſtenſis autem his oſtendemus etiam ex ſolidorum



M N

rum contemplatione ipſa ſolida eſſe commenſurabilia, & incommenſurabilia inter ſe ſe. nam ſi in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipſis æqualia ſint ſolida æque alta conſtituamus, ſiue parallelepipeda, ſiue pyramides, ſiue priſmata, erunt ea inter ſe, vti baſes. & ſi quidem baſes commenſurabiles ſint, erunt ſolida commenſurabilia; ſi vero incommenſurabiles, & ipſa incommenſurabilia erunt. ſed & duobus circulis exiſtentibus AB, ſi in ipſis conos æque altos, ſiue Cylindros conſtituamus, erunt inter ſe, vti ipſorum baſes, hoc eſt vt AB circuli, & ſi quidem circuli commenſurabiles ſint, cõmenſurabiles erunt & coni inter ſe ſe, & Cylindri; ſi vero incommenſurabiles, & coni, & Cylindri incommenſurabiles erunt. ex quibus perſpicuum eſt non ſolum in lineis, & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem, ſed & in ſolidis figuris. O P

F. C. COMMENTARIVS.

Manifeſtum eſt quadratum ex AC duplum eſſe quadrati ex AB] *Ex 47 primi.* A

Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum] *Ex 5. huius.* B

Et quoniam vt AC ad AB, ita eſt EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam enim eſt vt AC ad AB, ita EF ad G, erit et vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. ſed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita eſt quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario ſecundo 20. ſexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita eſt quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.* C

Quoniam ſi impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totum impar erit] *Ex 23 noni. ſequitur enim hoc ex 29 eiuſdem.* D

Inter ſe primi ſunt] *Ex 24 ſeptimi.* E

Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus] *Ex 11. octaui.* F

Duplus igitur eſt quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, compoſita eſt ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. ſed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH eſt quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratũ ex G eſt dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.* G

Ideoq; par eſt, qui fit ex G quadratus] *Quoniam enim quadratus ex G duplus eſt quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par neceſſario erit.* H

Et ex iam dictis ipſe G eſt par] *Si enim ſit impar, & quadratus ex ipſo impar eſt ex 29 noni. ſed & par. quod fieri non poteſt.* K

Et propterea latus G ipſum EF latus metitur] *Ex 14 octaui,* L

Erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, & ſimiliter deſcriptam] *Ex corollario ſecundo vigeſimae ſexti.* M

Quandoquidem circuli iuter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata] *Oſtenditur id in ſecunda propoſitione duodecimi libri. vnde colligi poteſt hac ſiue ſint Euclidis, ſiue alterius alieno loco poſita eſſe.* N

Nam ſi in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quę ipſis æqualia ſint, ſolida æque alta conſtituamus, ſiue parallelepipeda, ſiue pyramides, ſiue priſmata, erunt ea inter ſe vti baſes] *Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi,* O

Sed & duobus circulis exiſtẽtibus AB, ſi in ipſis conos æque altos, ſiue Cylindros conſtituamus, erunt inter ſe, vti ipſorum baſes] *Ex 11. duodecimi.* P

DECIMI LIBRI FINIS.

SCHO-

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à ſcientia ſolidorum diſtinxerunt. etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato oſtendit in politicis; hanc autem ſtereometriam. At vero Iuniores cum utriuſque ſcientiæ communis ſit cognitio, quæ circa magnitudines verſatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas velut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia vero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in ſolidis, alia conſtant ex planis rectilineis, alia ex ſphæricis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et ſphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea vero, vel quæ ex rectilineis ſunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum eſt. & ſi aliquod eſt corpus, hoc & ſolidum eſt, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta ſunt: hęc enim imaginabilia ſunt ſolida, non antitypa, hoc eſt dura, & reſiſtentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER VNDECIMVS, ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.



SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

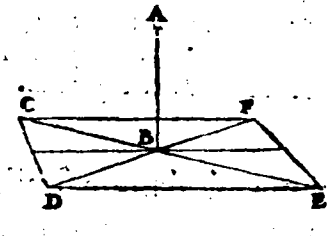
Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si posset planum in rectas lineas resolvi, ita dixisset. Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum constat, rectos facit angulos, tunc & ad ipsum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinite rectis lineis sectum in ipsas non resoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano. contingentes autem addit, ut non parallelæ sint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ad subiectum planum CDEF perpendicularis, siue recta, & à puncto B ducantur quotcunque rectae lineae in eodē plano BC BD BE BF. erūt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quòd si anguli CBA DBA EBA EBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum CDEF perpendicularem, siue rectam esse.

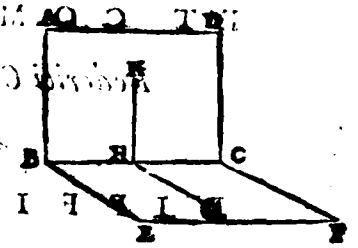


III.

Planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineę in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

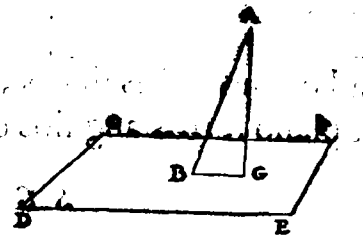
Sit planum ABCD ad planum BEFC rectũ, ſitq; eorũ cõis ſectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpẽdicularis ad ipſã BC. erit recta linea GH ad planũ ABCD perpẽdicularis, ſiue recta. Si ſi recta GH, vel planũ ABCD perpẽdicularis ſit, ſiue recta, erit ea ad BC cõem duorũ planorũ ſectionẽ perpẽdicularis. Et ſimiliter cõtinget, ſi in alio plano ducatur KH perpẽdicularis ad ipſã BC. ponatur autẽ nũc cõem duorũ planorũ ſectionẽ rectã lineã eſſe, quod in ſequentibus demonſtrabitur.



Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, quando à ſublimi termino lineę ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui eſt in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & ſtante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB inclinata ad ſubiectum planũ CDEF: atque à puncto ſublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectae lineae AB ad planum CDEF inclinatio.

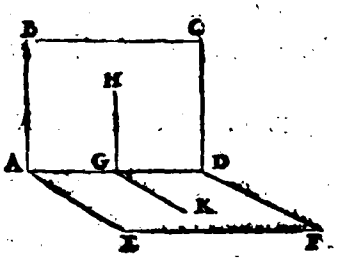


VI.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis lineis cõtentus, quę ad rectos angulos communi planorum ſectioni ad vnum ipſius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter ſe inclinata ABCD EADF, quorum cõmunis ſectio AD, & ſumpto in ipſa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK, erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.



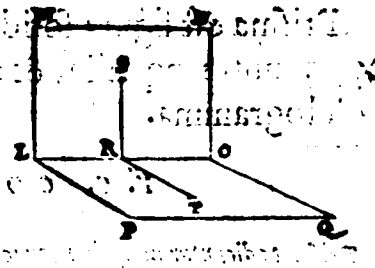
VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

F. C.

P. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD. EADF, de quibus proxime dictum est: sintq; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & sint anguli HGK SRT aequales. dicetur planum ABCD ad planum EADF similiter inclinatum, atque planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela sunt, quę inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figurę sunt, quę similibus planis multitudine æqualibus continetur.

X.

Aequales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium, quàm duarum linearum, quæ se se contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, & ad vnum punctum constitutis.

COMMENTARIVM.

Euclides quidem inclinationem angulum vult esse: Stoici vero dicunt inclinationem esse angulum, sed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. haec autem definitio imperfecta est. angulus enim quarę partis sphaerę pluribus quidem, quàm duobus superficiebus comprehenditur, sed non planis: & dimidius conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est angulus: & totus conus vertex angulus erit. quare & ex duobus superficiebus & ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est. melius igitur erit solidum angulum definire, inclinationem magnitudinis, vel magnitudinum ad vnum punctum. κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. σύστημα. σύστημα.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

XIII.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Prismata dicuntur non solum, quae bases habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quecunque plana, quae opponuntur, sine triangula, siue quadrilatera, siue pentagona, siue plurilatera, & aequalia, & similia habent, reliqua vero parallelogramma. quod ex ijs, quae tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas laterales vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & Cylindros columnas rotundas.

XIIII.

Sphæra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituatur rursus in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

XVII.

Diameter sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta, & ex vtraque parte à superficie sphæræ terminata.

XVIII.

Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituatur locum, à quo moueri cœpit. & si quidem manens recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectũ angulũ cõuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor, ambligonius; & si maior, oxigonius.

XIX.

Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

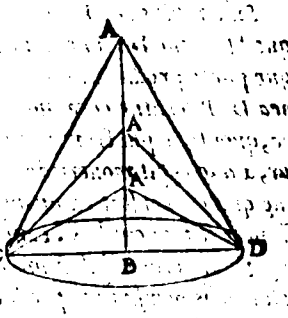
Basis

XX.

Basis vero circulus à conuersa recta linea descriptus.

SCHOLIVM.

Ostendendum quomodo conus orthogonius sit, vel angulum rectum ad verticem habeat.



Exponatur triangulum orthogonium ABC rectũ habens ABC angulum; & rectam lineam BC, rectę AB æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum constitui. producatur enim CB vsque ad D: ponaturq́; BD ipsi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB est æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC æqualis, & vterque ipsorũ dimidius recti, quòd rectus ponatur ABC: Eadem ratione & BAD est recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus est; & idcirco conus circa ABC descriptus est orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eũdem locum restituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB necesse est in conuersione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipsi BD sit æqualis: & circulus à puncto C descriptus basis erit coni, qui à triangulo ABC constituitur, & eius circuli diameter erit basis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd si conus à vertice A ad basim vsque bifariam diuidatur, portionum superficies non aliud erunt, nisi triangulum ADC, quod est orthogonium. quare & coni uertex orthogonius erit. si vero angulus BAC sit maior dimidio recti, erit ob eandem caussam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtusus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtusum habebit. si denique BC sit minor, quam AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ ostensa sunt, DAC angulus recto minor, hoc est acutus, & conus oxygonius erit.

F. C. COMMENTARIVS.

IXX.

Euclides conos, & cylindros duntaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuersę ex Apollonio, Serenoq́; ortum explicare visum est.

EX APOLLONIO.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur, & manente puncto cõuertatur circa circuli circũferentiã, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri superficiem à recta linea descriptam, constantemq́ue ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta: voco Conicam superficiem, Verticem ipsius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctu, et centrum circuli ducitur: Conum autem voco figuram contentam circulo

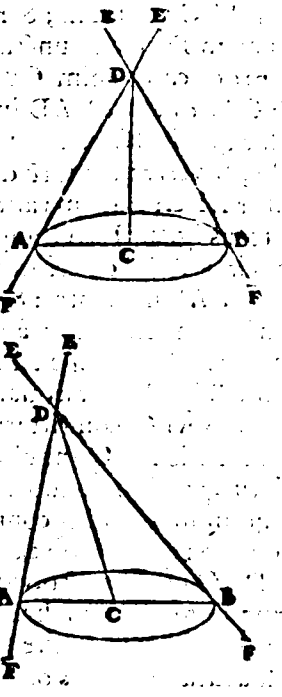
&

& conica ſuperficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur. Verticem coni punctum, quod et ſuperficiei conicæ vertex eſt. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Baſim circulum ipſum.

Conorũ rectos quidẽ voco, qui axes habẽt ad rectos angulos ipſis baſibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habẽt.

Quem locum explicans Eutocius ita ſcribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod ſublime D: iunctaque D B in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E F. Si igitur recta linea D B feratur eo vſque in circuli A B circumferentia, quouſque punctum B rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cępit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quę quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus, ad D punctum ſe ſe tangentibus. eam voco conicam ſuperficiem; quę & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipſã deſcribens in infinitum producitur. verticem ſuperficiei dicit, punctum D; axem, rectam D C. conum vero appellat figuram cõtentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B ſola deſcribit: coni verticem punctum D: axẽ D C: & baſim, A B circulum. At ſi D C ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; ſin minus, ſcalenum.



Deſcribetur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quae non ſit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineae, quod eſt in ſublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipſam conuertatur: comprehenſa etenim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur lineam circumductam in conuerſione quandoque maiorem; quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.

XXI.

Cylindrus eſt comprehenſa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, parallelogrammum conuertatur, quouſque rurſus reſtituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XXII.

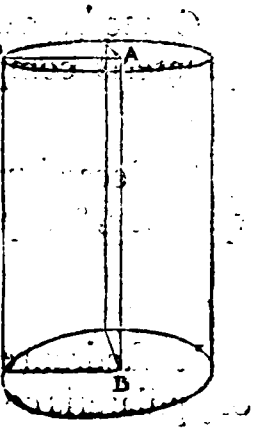
Axis Cylindri eſt manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII.

Baſis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuerſis deſcibuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latere AB manente intelligatur latus CD conuerti, quousq; ad eum locum redeat, à quo capit moueri. erit iã descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.



EXSERTO.

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorũ diametri semper inter se se parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & vnà circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo mouri cœpit: superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, Cylindrila superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri basis circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius Cylindri, bases vtraſque contingit: quam & circumlatam describere superficiem Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIIII.

Similes coni, & Cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffinimus.

Similes coni, & Cylindri sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Octaedrum

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis continetur.

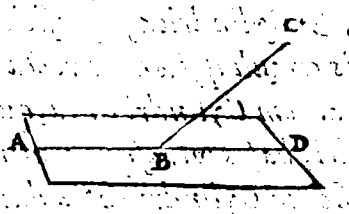
XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida, quę viginti triangulis æqualibus & æquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.

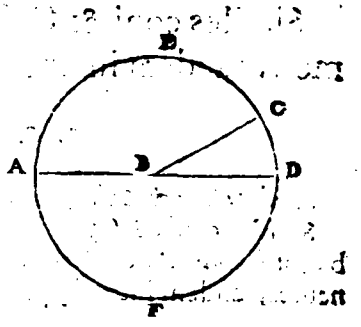
Si enim fieri poteſt rectæ lineę AB pars quidem AB ſit in ſubiecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit vtique recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubiecto plano.



A ſitq; BD: duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio eſt AB, quod fieri non poteſt; recta enim linea cum recta linea non conuenit in pluribus punctis, quàm vno.

B alioqui rectæ lineę ſibi ipſis congruęt. non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.

SCHOLIVM.



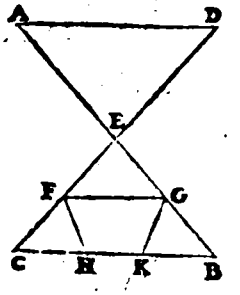
A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD cõmunis portio eſt AB, quod fieri non poteſt.] *Duabus enim rectis lineis non eſt communis portio. ſi enim fieri poteſt, ſint duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & ſumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallum vero BA, & circulus AEF deſcribatur. Quoniam igitur punctum B centrum eſt circuli AEF, & per B ducta eſt quędam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter ABC. diameter autem circulum bifariam ſecat. ergo AEC ſemicirculus eſt. Rurſus quoniam B centrum eſt AEF circuli, & per B recta linea quędam ducta eſt ABD, erit ABD circuli AEF diameter. oſtẽſa autem eſt & ABC diameter eiuſdem circuli; & ſemicirculi eiuſdem circuli ſunt aequales inter ſe. ergo AEC ſemicirculus ſemicirculo AED eſt aequalis, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur duabus rectis lineis communis portio eſt, ſed differens; ac propterea neque fieri poteſt, vt terminatae rectae lineae alia recta linea in directum continuata ſit ex iis, quae ante oſtenſa ſunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non eſt recta linea.*

B Alioqui rectę lineę ſibi ipſis congruent.] *Manifeſtum eſt congruentibus rectis lineis, & earum fines inter ſe congruere. ſi autem hoc, duae rectae lineę eoſdem fines habentes ſpacium cõtinebunt. quod fieri non poteſt.*

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent, in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

Duę enim rectæ lineę AB CD ſe inuicem in puncto E ſecent. Dico ipſas AB CD in vno eſſe plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis EB EC quæuis puncta FG; iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum conſiſtere in vno plano. Si enim trianguli EBC pars quidem FHC, vel GBK in ſubiecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in ſubiecto plano, & pars in alio. Quòd ſi trianguli ECB pars FG BG ſit in ſubiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarúq; recta rum linearum EC EB quędam pars erit in ſubiecto plano, quædam vero in alio. quod abſurdũ eſſe oſtendimus. Triangulum igitur EBC in vno eſt plano. in quo autem plano eſt BCE triangulum, in hoc eſt vtraque ipſarum BC EB. in quo autem vtraque ipſarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.



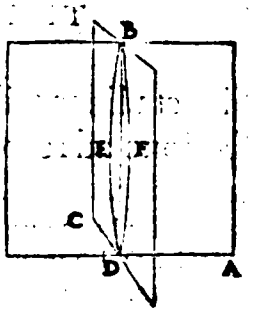
SCHOLIVM.

Propoſitum eſt oſtendere rectas lineas, quę ſe mutuo ſecant in vno plano eſſe. quoniam autem hoc per triangulum oſtenditur, illud appoſuit, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana ſe inuicem ſecent, cõmunis ipſorum ſectio recta linea erit.

Duo enim plana AB BC ſe inuicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit DB linea. Dico lineam DB rectam eſſe. ſi enim non ita ſit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtique duarũ rectarũ linearum DEB DFB ijdem termini, & ipſę ſpacium cõtinebunt, quod eſt abſurdum. non igitur DEB DFB rectæ lineæ ſunt. Similiter oſtendemus neque aliam quãpiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam eſſe, pręter ipſam DB, communem ſcilicet planorum AB BC ſectionem. ſi igitur duo plana ſe inuicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

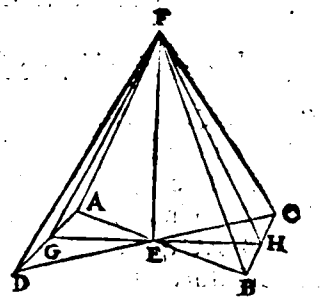


THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiã ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD ſe inuicem ſecãtibus in E puncto, ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat. Dico EF etiam plano per AB CD

ducto ad rectos angulos eſſe. ſumantur enim rectæ lineæ AE EB CE ED inter ſe æquales: perq; E ducatur recta linea GEH vtcunque, & iungantur A D CB; deindeà quouis puncto F ducantur FA F G FD FC FH FB. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E ED duabus rectis lineis CE EB æquales ſunt, & angulos æquales continent, erit AD baſis baſi CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis eſt angulo EBC. eſt aũt & angulus AEG æqualis angulo BEH. Duo igitur triangula ſunt AGE BEH duos angulos duobus angulis æquales habẽtia, alterũ alteri, & vnũ latus AE vni lateri EB æquale. quod eſt ad æquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt, ergo GE quidem eſt æqualis EH; AG verò ipſi BH. Quòd cum AE ſit æqualis EB, communis autem & ad rectos angulos FE; erit baſis AF baſi FB æqualis. Eadem quoq; ratione & CF æqualis erit FD. Præterea quoniam AD eſt æqualis CB, & AF ipſi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & oſtẽſa eſt baſis DF æqualis baſi FC. angulus igitur FAD angulo FBC eſt æqualis. Rurſus oſtenſa eſt AG æqualis BH. ſed & AF ipſi FB eſt æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales ſunt, & angulus FAG æqualis eſt angulo FBH, vt demonſtratum fuit. baſis igitur GF baſi FH eſt æqualis. Rurſus quoniam GE oſtenſa eſt æqualis EH, communis autem FE; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & baſis HF eſt æqualis baſi F G. angulus igitur GEF angulo HEF eſt æqualis, & idcirco rectus eſt vterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH vtcunque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter oſtendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubiecto ſunt plano, rectos angulos efficere. recta autẽ ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, & in eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos. quare FE ſubiecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubiectum planum eſt quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.



4. primi.

26. primi.

4. primi.

8. primi.

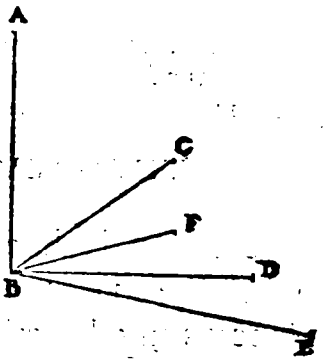
4. primi.

3. diffi.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis ſe ſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos inſiſtat. Dico BC BD BE in vno plano eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD BE quidẽ in ſubiecto plano, BC vero in ſublimi, & planum per AB BC producatur. cõmunẽ vtique ſectionem in ſubiecto plano faciet rectam lineam. faciat BF. in vno igitur ſunt plano per AB BC ducto tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB vtrique ipſarum BD BE ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem DB BE eſt ſubiectum planum. ergo A B ad ſubiectum planum recta eſt. quare & ad omnes rectas lineas ipſam contingentes,



3. huius.

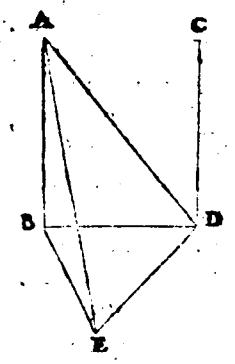
Ex antecedente.

3. diffi.

tes,quæ in eodem plano ſunt,rectos faciet angulo; ſed ipſam tangit BF in ſubiecto exiſtens plano. ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem & ABC angulus rectus:equalis igitur eſt angulus ABF angulo ABC,& in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt.recta igitur linea BC non eſt in plano ſublimi. quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſe ſe tangentibus in cómuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat,tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, illę inter ſe ſe parallelæ erunt.



Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſubiecto plano ſint ad rectos angulos. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe. occurrant enim ſubiecto plano in punctis BD,iungaturq; BD recta linea,cui ad rectos angulos in ſubiecto plano ducatur DE, & poſita DE ipſi AB equali,iungantur BE AE AD.Qm igitur AB recta eſt ad ſubiectum planum, & ad omnes rectas lineas,quę ipſam cõtingunt, & in ſubiecto ſunt plano, rectos angulos efficiet.contingit autem AB vtraque ipſarum BD BE exiſtens in ſubiecto plano. ergo vterque angulorum ABD ABE rectus eſt, Eadem ratione rectus etiam eſt vterq; ipſorum CDB CDE.& quoniam AB equalis eſt ipſi DE,cõmunis autem BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales,& rectos angulos continent.baſis igitur AD baſi BE eſt æqualis. rurſus quoniam AB eſt æqualis DE, & AD ipſi BE,duę AB BE duabus ED DA æquales ſunt,& baſis ipſarum AE communis.ergo angulus ABE angulo EDA eſt equalis.ſed ABE rectus eſt.rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA eſt perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad vtramque ipſarum BD DC.quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos inſiſtit angulos.tres igitur rectæ lineę BD DA DC in vno ſunt plano. in quo autem ſunt BD DA,in hoc & AB:omne enim triangulum in vno eſt plano. ergo AB BD DC in vno plano ſint neceſſe eſt,atque eſt vterque angulorum ABD BDC rectus.parallela igitur eſt AB ipſi CD. quare ſi duæ rectæ lineæ eidē plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter ſe ſe parallelæ erunt.

Diffi. 3.

4. primi.

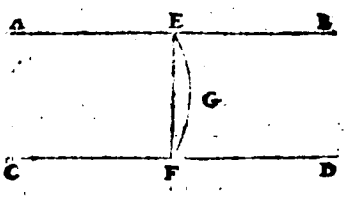
8. primi.

Ex antecedente 2. huius.

28. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duę rectæ lineę parallelæ ſint,ſumantur autem in vtraque ipſarum quælibet puncta; quę dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano,in quo & parallelę.



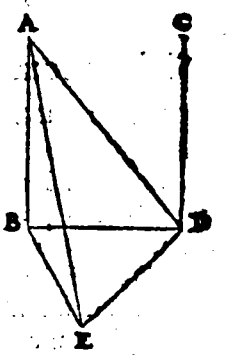
Sint duæ rectę lineæ parellelæ AB CD, & in vtraque ipſarum ſumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F cõiungit,in eodem plano eſſe,in quo ſunt parallelę.non enim,ſed ſi fieri poteſt,ſit in ſublimi,vt EGF, & per EGF planũ ducatur, quod in ſubiecto plano ſectionem faciet, rectam lineam faciat vt EF.ergo duæ rectæ lineæ EGF E F ſpacium continebunt,quod fieri non poteſt. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt plano, quare erit in eo,quod per AB CD parallelas tranſit.ſi igitur duæ rectæ lineæ parallelę ſint, & reliqua, quæ ſequuntur.quod oportebat demonſtrare.

9. huius.

10 com. not. primi libri.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si duę rectę lineæ parallelę ſint, altera autem ipſarum plano ali cui ſit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

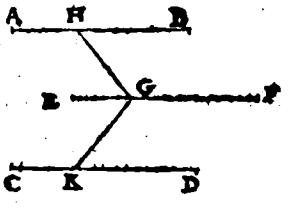


Sint duę rectę lineæ parallelę AB CD, & altera ipſarum AB ſubiecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe. occurrāt enim AB CD ſubiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo A B CD BD in vno ſunt plano. Ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubiecto plano DE: & ponatur DE ipſi AB æqualis: iunganturq; BE AE AD. Et quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, ſuntq; in ſubiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur eſt vterque angulorum ABD ABE. Quòd cū in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD, erūt anguli ABD CDB duobus rectis æquales. rectus autem eſt ABD. ergo & CDB eſt rectus; ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. Et quoniam AB eſt æqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales ſunt; & angulus ABD eſt æqualis angulo EDB, rectus enim vterq; eſt. baſis igitur AD baſi BE eſt æqualis. Rurſus quoniam AB æqualis eſt DE, & BE ipſi AD; erunt duę AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & baſis earum communis AE. quare angulus ABE eſt æqualis angulo EDA. rectus autem eſt ABE. ergo & EDA eſt rectus, & ED ad DA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BD. ergo ED et ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem exiſtentes plano ipſā contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD eſt DC, quoniam in plano per BD DA ſunt AB BD: in quo autem ſunt AB BD in eodem eſt ipſa DC. quare ED ipſi DC eſt ad rectos angulos; ideoq; CD ad rectos angulos eſt ipſi DE. ſed & CD ipſi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB ſe mutuo ſecantibus in cōmuni ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE DB eſt ad rectos angulos. planum autem per DE DB eſt ſubiectum planum. ergo CD ſubiecto plano ad rectos angulos erit.

Ex antecedente.
8. diff.
29. primi.
4. primi.
8. primi.
4. huius.
8. diff.
8. huius.
4. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Quæ eidem rectę lineę ſunt parallelę, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano; etiam inter ſe parallelæ erunt.



Sit enim vtraque ipſarum AB CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano. Dico AB ipſi CD parallelā eſſe. ſumatur in EF quod uis punctum G, à quo ipſi EF in plano quidem per EF AB tranſeunte ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem tranſeunte per FE CD rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. Et quoniam EF ad vtramque ipſarum GH GK eſt perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK tranſeunte. atque eſt EF ipſi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos eſt. eadem ratione & CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. vtraq; igitur ipſarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter ſe ſe. ergo AB ipſi CD eſt parallela.

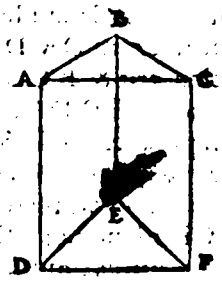
4. huius.
Ex antecedente.
6. huius.

THEO-

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectę lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. Assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallela, erit & AD æqualis & parallela ipsi BE. Eadē ratione & CF ipsi BE æqualis & parallela erit. Vtraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallela. Quæ autem eidem rectę lineę sunt parallelę, nō existentes in eodem, in quo ipsa plano; & inter se parallelę erūt. ergo AD parallela est ipsi CF, & æqualis. atque ipsas coniungunt AC DF. & AC igitur ipsi DF æqualis est & parallela. & quoniā duæ rectę lineę AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF, erit angulus ABC angulo DEF æqualis. si igitur duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingētibus sint parallelę, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. quod oportebat demonstrare.



32. primi.

Ex antecedente.

33. primi.

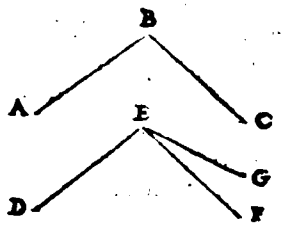
8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non existentibus, & earum vna parallela sit unæ continentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo anguli æquales ABC DEF: & rectæ lineæ AB BC angulum ABC continentes nō sint in eodem plano, in quo DEF. sit autem DE parallela ipsi AB. Dico & EF ipsi BC parallelam esse. Si enim nō est EF parallela ipsi BC, erit alia ipsi parallela, sit EG. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC duabus rectis lineis sese cōtingentibus DE EG sunt parallelæ, nō autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC est æqualis. Sed et angulus DEF ponitur æqualis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur EG parallela est ipsi BC. similiter ostendemus neque aliam vllam eidem BC parallelam esse præter ipsam EF. ergo EF ipsi BC est parallela. quod demonstrare oportebat.



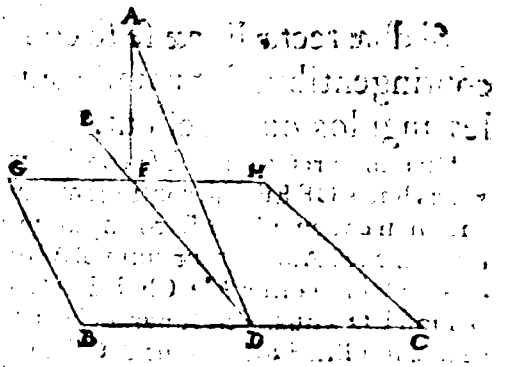
PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem pūctum sublime A, datum autem subiectum planum. oportet à puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineā ducere. In subiecto enim plano ducatur quędam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad B

C per

C perpendicularis agatur AD. Si quidem igitur AD perpẽdicularis sit etiam ad subiectum planum, factum iam erit, quod proponebatur: sin minus, ducatur à puncto D ipsi BC in subiecto plano ad rectos angulos DE: & à pũcto A ad DE perpendicularis ducatur AF. deniq; per F ducatur GH ipsi BC parallela. Et qm̃ BC vtriq; ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit & BC ad rectos angulos plano per ED DA transeunti, atq; est ipsi parallela GH. Si aũt sint duæ rectæ lineę parallelæ, quarum vna plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quę in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis. contingit aũt ipsam AF existẽs in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad FA, & ob id FA est perpẽdicularis ad GH: est autem AF & ad DE perpẽdicularis. ergo AF perpendicularis est ad vtrãq; ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese cõtingentibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subiectum planum. ergo AF ad subiectum planum est perpẽdicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subiectum planum perpendicularis recta linea ducta est AF. quod facere oportebat.

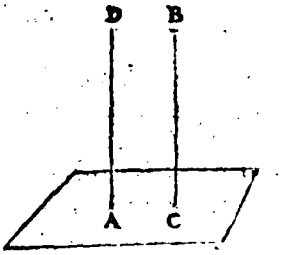


11. primi. 12 primi. 4. huius. 8 huius. 3. diffi. 4. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipso datum, est ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subiectum, punctum autẽ, quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad rectos angulos rectã lineam constituere. Intelligatur aliquod punctũ sublime B, à quo ad subiectũ planum agatur perpendicularis BC; & per A ipsi BC parallela ducatur AD. Qm̃ igitur duę rectæ lineæ parallelæ sunt AD CB, vna autem ipsarum BC subiecto plano est ad rectos angulos; & reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum ad rectos angulos recta linea constituta est. quod facere oportebat.

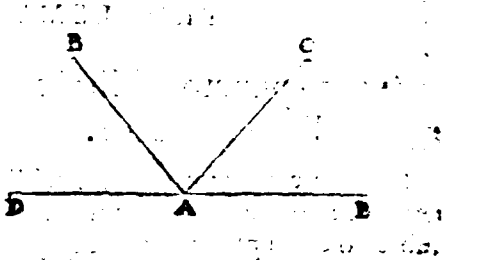


Ex antecedente. 8 huius.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à pũcto, quod in ipso est, duæ rectę lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano à puncto quod in ipso est A, duæ rectę lineę AB AC ad rectos angulos constituantur ex eadem parte: & ducatur planũ per BA AC, quod faciet sectionem per A in subiecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in vno sunt plano. Et quoniam CA subiecto plano ad rectos angulos est, & ad omnes rectas lineas, quę in subiecto plano



8. huius. A 8. diffi.

cto plano existentes ipsam contingunt, recto s faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quę est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadē parte. quod demonstrare oportebat. B

F. C. COMMENTARIVS.

Et ducatur planum per B A A C] *Sunt enim ex secunda huius rectae lineae BA AC in vno plano.* A

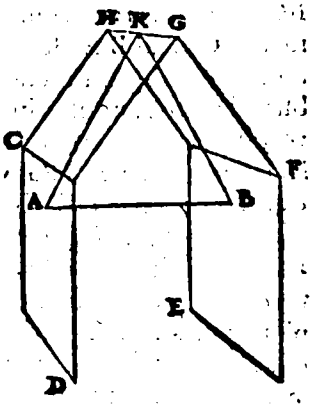
SCHOLIVM.

Quod fieri non potest] *Essent enim & parallelae, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelae autem essent ex sexta huius.* B

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se, cōueniāt; & cōem sectionē faciāt rectā lineā GH; & in ipsa GH sumpto quouis pūcto K, iungantur AK B K. Qm igitur AB perpēdicularis est ad EF planū, erit & perpēdicularis ad ipsā BK rectā lineā in plano EF producto existētē. quare angulus A B K rectus est. Eadē ratione & B A K est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana C D E F producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quę igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.



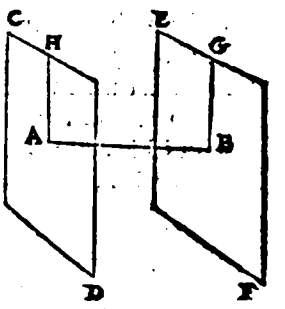
9 diff.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quae ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

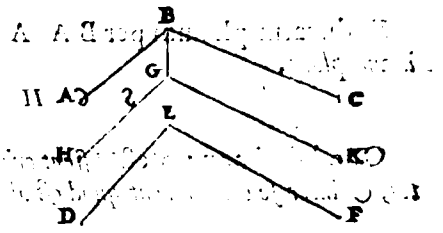
Sint duo plana parallela CD EF, & recta quędam linea AB ad planum C D sit perpendicularis. Dico A B etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient tandem inter sese rectae lineae BG AH. quare & ipsa plana conuenient. atqui parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.



THEO-

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XV.

Si duæ rectæ lineæ seſe tangentes duabus rectis lineis seſe tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.



Duæ enim rectæ lineę seſe tangẽtes AB BC duabus rectis lineis seſe tangẽtibus DE EF parallelæ sint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF transeunt, si producantur, inter se non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF transit perpendicularis BG, quę plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF parallela GK. Itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam vtraque earum GH GK, quę est in eodem plano. rectus igitur est vterque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA BGH duobus rectis sunt ęquales. rectus autem est BGH. ergo et GBA rectus erit; ideoq; GB ad BA est perpendicularis. Eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se inuicem secantibus ad rectos angulos insistat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem causſam BG est perpendicularis ad planum per HG GK. sed planum per HG GK est illud, quod per DE EF transit. quare BG ad planũ quod transit per DE EF est perpendicularis. ostensa autem est BG etiam perpendicularis ad planũ per AB BC: atq; est ad planũ per DE EF perpẽdicularis. ergo BG perpẽdicularis est ad vtrũq; planorũ, quæ per AB BC DE EF trãseũt. Ad quæ vero plana eadẽ recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. parallelũ igitur est planũ per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ seſe tangentes duabus rectis lineis seſe tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. quod demonstrare oportebat.

8. diff. 11.

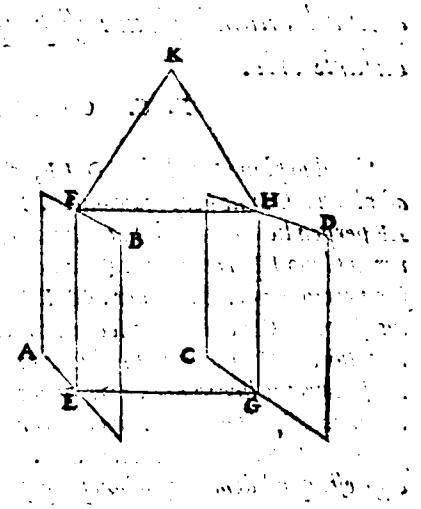
29. primi.

8. huius.

Ex antecedente.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelę erunt.



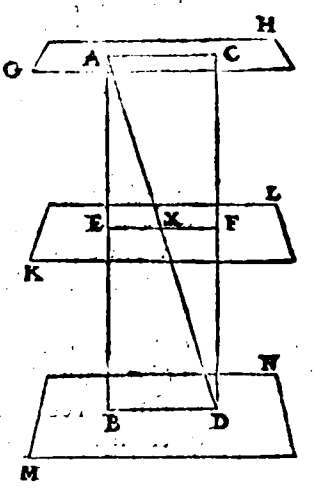
Duo enim plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH secentur: communes autem ipsorũ sectiones sint EF GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse. si enim non est parallela, productæ EF GH inter se conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, vt ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumantur puncta in eodem plano erunt. vnum autem punctorum, quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. Eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se cõuenient. non conueniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectę lineę productę conuenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque ad partes EG conuenire, si producantur

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelę sunt, ergo EF ipsi GH est parallela. si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

Si duæ rectę lineę à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ enim rectæ lineę AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A E B C F D. Dico vt AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Iungantur enim AC BD A D: & occurat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelę sunt. Eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC secantur, communes ipsorũ sectiones AC FX sunt parallelæ. Et quoniã vni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, vt AE ad EB, ita erit AX ad XD. Rursus quoniam vni laterum trianguli AD C, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit vt AX ad XD, ita CF ad FD ostensum autem est & vt AX ad XD, ita esse AE ad EB. & vt igitur AE ad EB, ita est CF ad FD. Quare si duę rectę lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

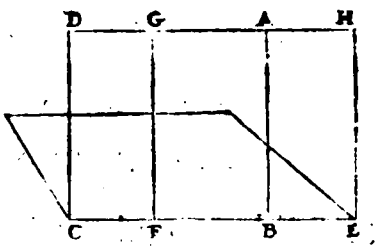
2. huius.

11. quinti.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quædam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subiecto plano ad rectos angulos esse. producatur enim per AB planum DE, sitq; plani DE, & subiecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad subiectũ planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in eodem sunt plano perpendicularis erit. quare ẽt ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est. sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FG. est autem AB subiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos angulos erit. At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductę rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos sint: & communi planorum sectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectũ est ad subiectum planum. similiter demonstrabuntur, & omnia quę per AB trãseũt plana subiecto plano recta esse. si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



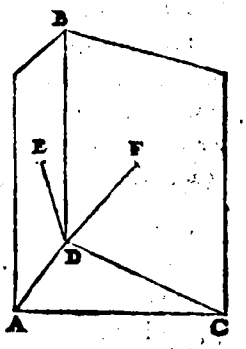
3. diffi.

8 huius.

4. diffi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana ſe inuicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.



Duo enim plana ſe inuicem ſecantia AB BC ſubiecto plano ſint ad rectos angulos: communis autem ipſorum ſectio ſit BD. Dico BD ſubiecto plano ad rectos angulos eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt; non ſit BD ad rectos angulos ſubiecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipſi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autē BC ducatur ipſi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad ſublectum planum rectum eſt, & communi ipſorum ſectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta eſt DE, erit DE ad ſubiectum planum perpendicularis. ſimiliter oſtendemus & DF perpendicularem eſſe ad ſubiectum planū. quare ab eodē puncto D ſubiecto plano duę rectæ lineę ad rectos angulos conſtitutę ſunt ex eadem parte, quod fieri non poteſt. non igitur ſubiecto plano à puncto D ad rectos angulos conſtituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipſam DB, communem planorum AB BC ſectionem. Ergo ſi duo plana ſe inuicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidē plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonſtrare.

8 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis apparet conuerſum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Fit enim recta linea dictorum planorum communis ſectio. quare cum ea plana plano cuipiam ad rectos angulos eſſe ponantur, & recta linea quae ipſorum communis ſectio eſt eidem plano ad rectos angulos erit.

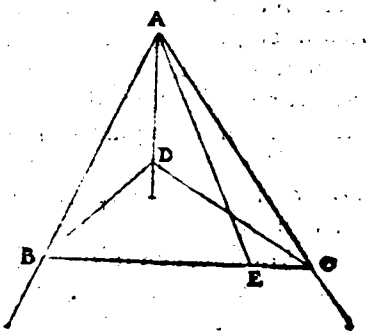
Conuerſum vero preſentis theorematis apparet ex antecedente. quod huiuſmodi eſt.

Quorum planorum ſe ſe mutuo ſecantium communis ſectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & ſecantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum ſectio eſt recta linea, per quam dicta plana tranſeunt. quod cum recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipſa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores ſunt, quomodocumq; ſumpti.



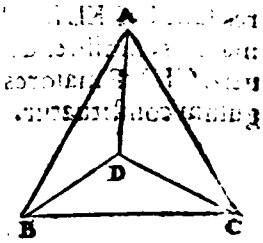
Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores eſſe, quomodocumque ſumptos. ſi enim BAC CAD DAB anguli inter ſe æquales ſint, perſpicuum eſt duos quoslibet reliquo maiores eſſe, quomodocumque ſumptos. Sin

minus

minus, sit maior BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A constituatur angulo DAB in plano per BA AC transeũte, æqualis angulus BAE; ponaturq; ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC & DB DC iungantur. Itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duę DA AB duabus BA AE æquales sunt: & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est æqualis. Et quoniam duę DB DC ipsa BC maiores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quàm reliqua EC maior. Quòd cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC maior, basi EC; erit angulus DAC angulo EAC maior. ostensus autem est & DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores sunt. similiter demonstrabimus & si duo quilibet alij sumantur eos reliquo esse maiores. si igitur solidus angulus tribus angulis planis cõtineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocunque sumpti, quod demonstrare oportebat. 21. primi. 4. primi. 2. primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur.

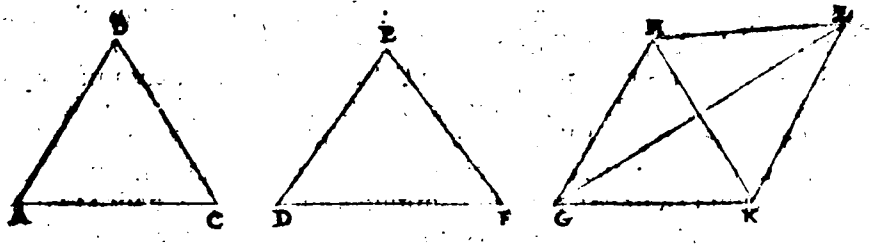


Sit solidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB cõtẽtus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor rectis esse minores. sumãtur enim in vnaquaq; ipsarũ AB AC AD quęuis pũcta B C D; & BC CD DB iugãtur. Quoniam igitur solidus angulus ad B tribus angulis planis cõtinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores sunt. anguli igitur CBA ABD angulo CBD sunt maiores. Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt maiores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt æquales duobus rectis. Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores sunt. Quòd cũ singulorũ triãgulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD, æquales sex rectis, quorũ sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt maiores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum quattuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur. quod oportebat demonstrare.

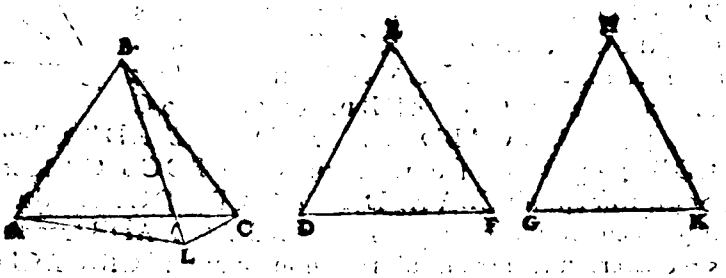
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales fieri potest, vt ex iis, quæ rectas æquales coniungunt triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocunque sumpti, videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC; & præterea anguli GHK ABC angulo DEF maiores sintq; æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungatur. Dico fieri posse, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulũ cõstituatur, hoc est ipsarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua esse maiores, quomodocunque sumptas. si quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter se æquales sint; manifestũ



est & æqualibus factis AC DF GK ex æqualibus ipsis triangulum constitui posse.
23.primi. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipsa H, angulo ABC æqualis angulus constituatur KHL, & ponatur vni ipsarum AB BC DE EF GH HK æqualis HL: & GL KL iungantur. Itaque quoniam duæ AB BC duabus KH HL æquales sunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit basis AC æqualis basi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF sunt maiores; æqualis autem est angulus ABC angulo KHL: erit GHL angulo DEF maior. Quòd cum duæ GH HL duabus DE EF æquales sint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior, basis GL basi DF maior erit. Sed GK KL ipsa GL sunt maiores. multo igitur maiores sunt GK KL ipsa DF. est autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF sunt maiores. similiter demonstrabimus, & ipsas quidem AC DF maiores esse GK, ipsas uero GK DF maiores AC. fieri igitur potest vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur.

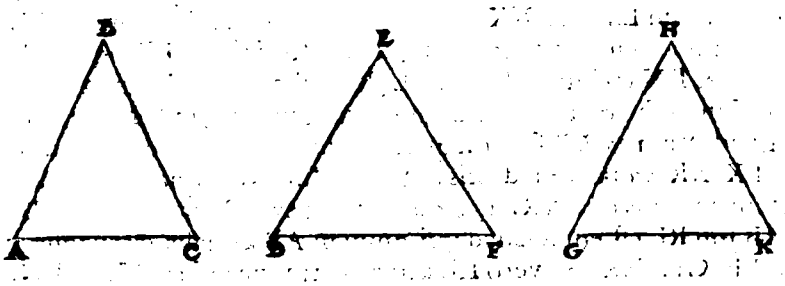


ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti: cõtineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri posse, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est rursus duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. si igitur rursus anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales erunt, & duæ reliqua maiores. sin minus, sint inæquales an-
24.primi. guli ad B E H, & maior qui est ad B vtroque ipsorum qui ad E H. maior igitur est & recta linea AC vtraque ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC vnà cũ altera ipsarum DF GK reliqua esse maiorem. Dico & DF GK ipsa AC maiores es-
23.primi. se. constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & vni ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL LC iungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H angulo ABC maiores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quoniam duæ LB BC duabus DE, EF
24.primi. æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC maior; basis DF basi LC maior erit. ostensa est autem GK æqualis AL. ergo DF GK ipsis AL LC sunt maiores. sed AL LC maiores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK ipsa AC maiores erunt. quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliquæ maiores sunt, quomodocumque sumptæ; ac propterea fieri potest, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. quod oportebat demonstrare.

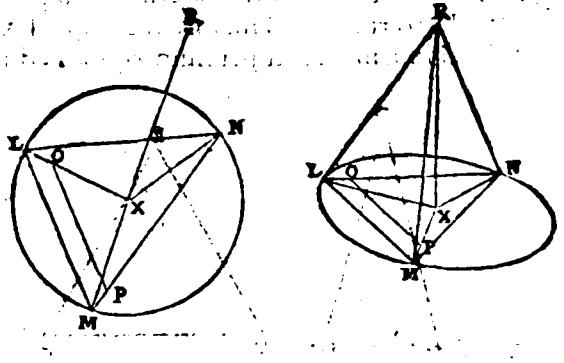
PRO-

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis esse minores.



Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK; quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumq; sumpti. sintq; tres anguli quattuor rectis minores, oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindãtur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK iungãtur. fieri igitur põt, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur triangulum. Itaque constituatur LMN, ita vt AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturq; ipsius cẽtrum X; quod vel erit intra triangulũ LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primũ intra: sitq; X: & LX MX NX iungãtur. Dico AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB est æqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC; est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt: altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM est æqualis. Eadem ratione & angulus quidẽ DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis sunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. Dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum est. est igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX, quàm XO. ergo & LM quàm OP est maior. Sed LM posita est æqualis AC. ergo & AC quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC maior basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonstrabimus & DEF angulum maiorem esse angulo MXN; & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN



Ex antecedente. 22. primi.

5. quarti.

8. primi.

Coroll. 15. primi.

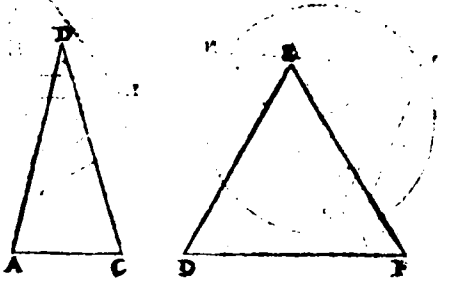
2. sexti.

4. sexti.

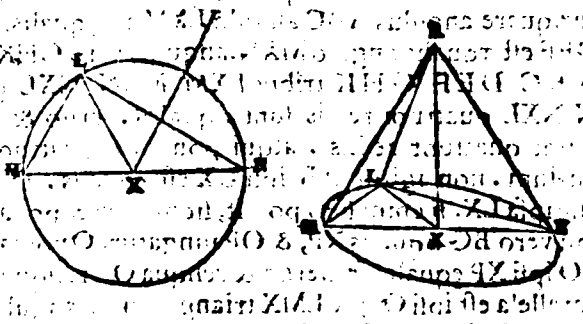
25 primi.

MXN NXL ſunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores po-
Coro.15.primi. nuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed
& æquales. quod eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt, quàm LX. oſtenſum autẽ
12.huius. eſt neque eſſe æqualem. ergo maior ſit neceſſe eſt. conſtituatur à puncto X circuli
LMN plano ad rectos angulos XR, & exceſſui, quo quadratum ex AB ſuperat qua-
dratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod ſit ex RX. Iungantur RL RM RN.
5.diffi. tur. Quoniam igitur RX perpendicularis eſt ad planum LMN circuli, & ad vnam-
quamque ipſarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX eſt æqualis
4.primi. XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit baſis LR æqualis baſi RM. Ea-
dem ratione & RN vtrique ipſarum RL RM eſt æqualis. Tres igitur rectæ lineæ R
L RM RN inter ſe æquales ſunt. Et quoniam quadratum XR ponitur æquale exceſ
ſui, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB qua-
47.primi. dratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale eſt quadratũ ex RL;
rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit;
ideoq; AB ipſi RL eſt æqualis. ſed ipſi quidem AB æqualis eſt vnaquæque ipſarum
BC DE EF GH HK; ipſi vero RL æqualis vtraque ipſarum RM RN. vnaquæque
igitur ipſarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipſarum RL RM RN eſt æ-
qualis. Quòd cum duæ LR RM duabus AB BC æquales ſint, & baſis LM ponatur
8.primi. æqualis baſi AC, erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angu-
lus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK eſt æqualis. ex
tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales ſunt tribus datis ABC
DEF GHK ſolidus angulus conſtitutus eſt ad R, qui angulis LRM MRN LRN co-
tinetur.

Sed ſit centrum circuli in vno laterum trianguli, videlicet in MN, quod ſit X, & X
L iungatur. Dico rurſus AB maiorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB eſt æ-
qualis L, X vel ipſa minor. ſit primum æqualis. duæ igitur AB BC, hoc eſt DE EF

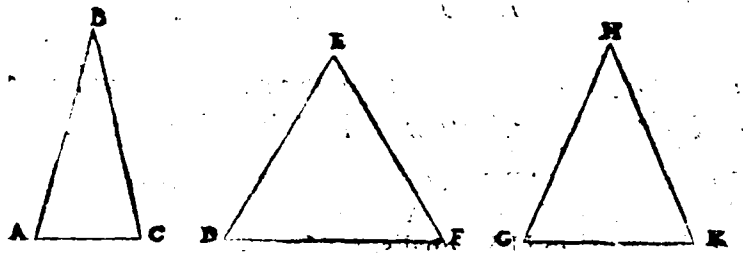


duabus MX XL, hoc eſt ipſi M
N æquales ſunt. ſed MN ponitur æqualis DF. ergo DE EF
20.primi. ipſi DF ſunt æquales. quod fieri non poteſt. non igitur AB
eſt æqualis LX. ſimiliter neq;
minor. multo enim magis id
quod fieri non poteſt, ſequere
tur. ergo AB ipſa LX maior
eſt. & ſimiliter ſi exceſſui quo
quadratũ ex AB ſuperat qua-
dratũ ex LX æquale ponatur,
vt quadratum ex RX, & ipſa R
X circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

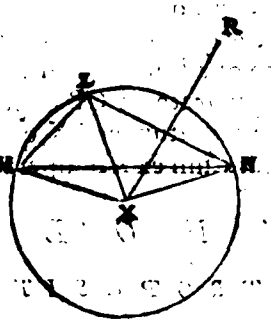


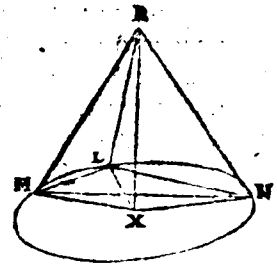
Sed ſit centrum circuli extra triangulum LMN, quod ſit X, & LX MX NX iungantur. Dico & ſic AB ipſa LX maiorem eſſe. ſi enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales ſunt, altera alteri; & baſis AC eſt æqualis baſi ML. angulus igitur ABC æqualis eſt angulo MXL. Eadem

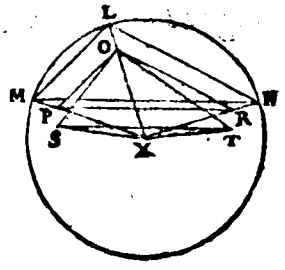
8.primi



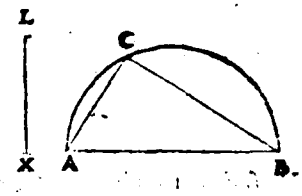
dem ratione & GHK angulus ipſi LXN eſt æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. ſed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores ſunt. & angulus igitur MXN ipſo DEF eſt maior. Et quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales ſunt, & baſis DF æqualis baſi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. oſtenſus autem eſt maior, quod eſt abſurdum. non igitur AB eſt æqualis LX. deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare maior neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos cõſtituamus XR, & ipſi æqualẽ ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, problema conſtituetur. Itaque dico neque minorem eſſe AB ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB æqualis ponatur XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB ipſi BC eſt æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur eſt LM ipſi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX quàm XO. ergo LM quàm OP eſt maior. ſed LM eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP ſunt æquales, altera alteri; & baſis AC maior eſt baſi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. ſimiliter & ſi XR ſumatur æqualis vtriq; ipſarum XO XP, & iungatur OR, oſtendemus angulum GHK angulo OXR maiorem, conſtituatur ad rectam lineam LX, & ad punctum in ipſa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipſi OX æqualis: iungantur; OS OT ST. Et quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales ſunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit baſis AC, hoc eſt LM baſi OS æqualis. Eadem ratione & LN eſt æqualis ipſi OT. Quod cum duæ ML LN duabus OS ST ſint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT; erit et baſis MN baſi ST maior. ſed MN eſt æqualis DF. ergo et DF quam ST maior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales ſunt, et baſis DF maior baſi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autẽ eſt angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior eſt. ſed et minor. quod fieri non poteſt.







2. huius. 4. huius



25. primi.

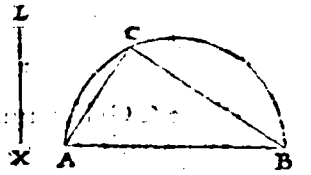
4 primi

4 2. primi.

25. primi.

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ita oſtendemus.



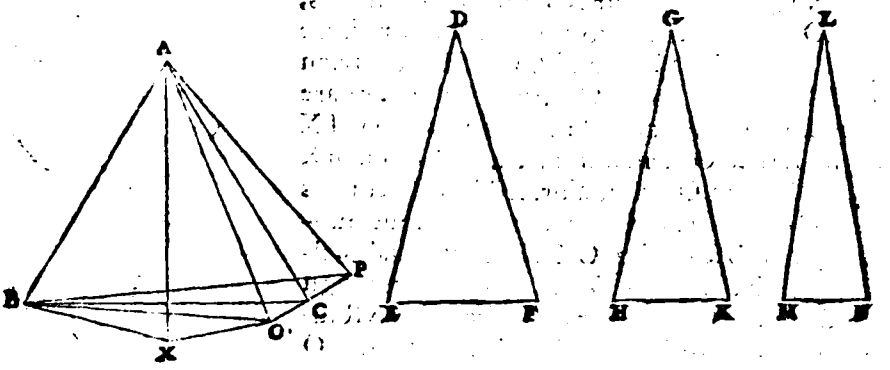
Exponãtur rectę lineæ AB LX, ſitq; maior AB, & in ipſa deſcribatur ſemicirculus A C B; in quo aptetur recta linea AC ipſi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in ſemicirculo ABC angulus eſt AGB, erit A C B rectus. quadratum igitur quod fit ex AB ęquale eſt, & quadrato quod ex A C, & ei, quod ex C B. ergo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem eſt AC ipſi LX. quadratum igitur ex AB ſuperat quadratum ex LX, quadrato ex C B. Quare ſi ipſi C B æqualem ſumamus XR, quadratum ex AB ſuperabit quadratum ex LX, eo quod fit ex RX quadrato.

31. tertii.
47. primi.

SCHOLIVM.

PROPOSITIO I.

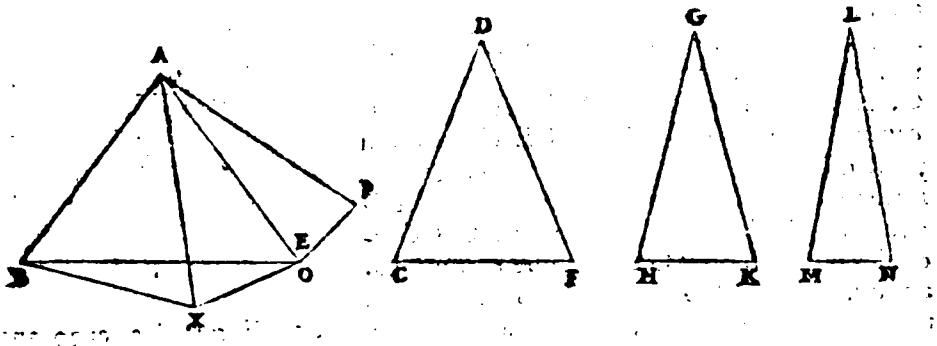
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorũ vno reliqui ſint maiores quo modocunque ſumpti, contineant autem ipſos rectæ lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos ſubtendentium, vna reliquas maiores eſſe quomodocũque ſumptas: hoc eſt fieri poſſe, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura conſtituatur.



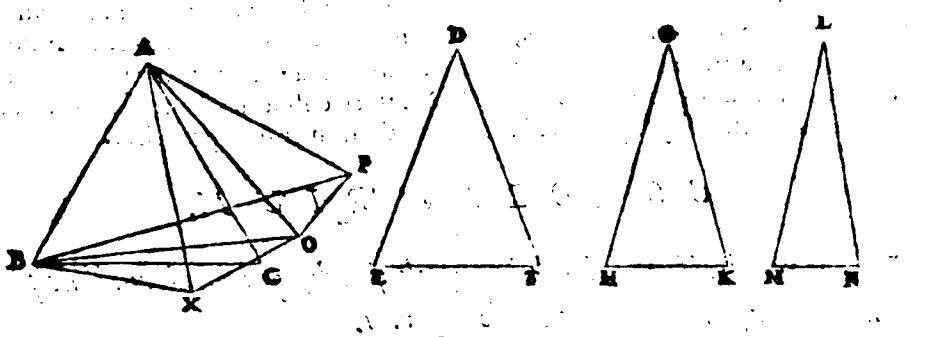
Vt ſi dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorum tres reliquo ſint maiores quomodocumq; ſumpti: æquales autem ſint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN: & iungantur BC EF HK MN. Dico ipſarum BC EF HK MN tres reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas. ſi enim æquales ſint anguli ad puncta A D G L, & latera BC EF HK MN ęqualia erunt. & manifeſtum eſt tres vna reliqua eſſe maiores, quomodocumque accipiãtur. ſi vero inęquales ſint, ſit maior qui ad A. baſis igitur BC ſingulis ipſarum EF HK MN maior eſt. quare BC cũ vna earum reliquis quibuslibet eſt maior: & cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam EF HK MN ipſa BC maiores eſſe. Quoniam enim angulus ad A maior eſt ſingulis ipſorum D G L, conſtituatur ad BA rectam lineam, & ad pũctum in ipſa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX, & ad rectam lineam AX, & ad pũctũ in ipſa A angulo, qui ad G æquali cõſtituto angulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipſam, vel extra ipſam. Cadat primũ intra, & ad rectam lineam OA, & ad

24. primi.
23. primi.

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L æqualis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo sunt maiores. & ipsis AB AC æquales ponatur AX AO AP: iungãturq; BX XO BO OP BP. Qm igitur duę BA AP duabus BA AC sunt æquales, angulus aũt BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi AC maior. Sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP mul- 24. primi.



to maiores sunt ipsa BC. atque est BX quidem æqualis ipsi EF, quoniam & angulus BAX æqualis est angulo EDF; XO vero est æqualis HK, & OP ipsi MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum æqualem angulo G cadat in ipsam AC, vt in secunda figura: & BX XC CP iungantur. Itaque quoniam BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN, erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. Denique recta linea AO, q. æ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, vt in tertia figura: ponaturq; æqualis ipsi AP: & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam 4. primi.

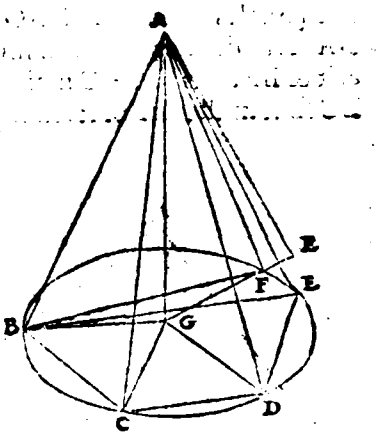


igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales sunt, angulus autem BAP maior est angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rursus quoniam BO OP maiores sunt quã BP; & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed BP est maior BC. quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC: sũtq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sunt. Et quoniam tres reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptæ, fieri potest, vt ex ipsis quadrilaterum ipsam constituatur. 24. primi.

PROPOSITIO II.

Si in aliquod planũ à quodam sublimi puncto æquales rectę lineę cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.

A puncto enim A in ſubiectum planum æquales rectæ lineæ cadãt AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia eſſe. Iungantur enim in ſubiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triãgulum circulus deſcribatur BCDF. ergo puncta BCD in circuli circumferentia ſunt. Dico etiam ipſum E in circumferẽtia eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & ſumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectę lineæ ducantur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F ſecet, & iungantur AE AG. Quoniã igitur AB ipſi AC eſt æqualis, eſt autem & BG æqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æquales ſunt. & baſis AG eſt vtrique communis.



8. primi. angulus igitur ABG angulo ACG eſt æqualis, triangulumq; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus AGB æqualis eſt angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æqualis erit. Quòd cum AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem exiſtentes

4. huius. plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipſas ducitur perpendicularis erit. quare ad circulum ipſum. Itaque quoniam GD ipſi GF eſt æqualis, communis

4. primi. autem & ad rectos angulos GA; erit baſis AD baſi AF æqualis. ergo & vnaqueque

16. primi. ipſarum AB AC AE æqualis eſt ipſi AF. Et quoniam angulus AFE maior eſt recto AGF, quòd exterior ſit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF an-

19. primi. gulus qui eſt ad F maior eſt angulo qui ad E. quare & latus AE maius eſt latere AF. ſed & oſtenſum eſt æquale. quod eſt abſurdum. non igitur punctum E extra circuli circumferentiam cadit. ſimiliter oſtendemus neque cadere intra. ducentes enim ad ipſum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rurſuſq; ab A ad dictũ punctum rectam lineam iungentes, oſtẽdemus ipſam & æqualem eſſe, & minorem. quod eſt abſurdum. At ſi neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipſam circumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli ſunt circumferentia, & AG ad ipſum circulum eſt perpendicularis. quod demonſtrare oportebat.

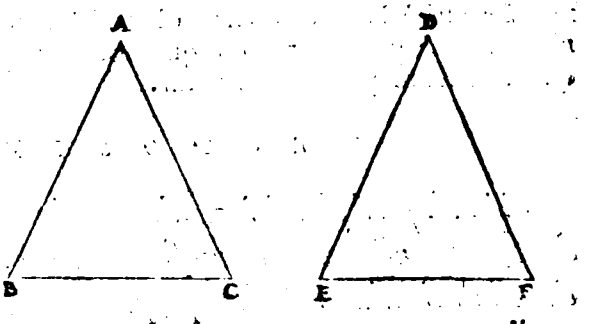
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi.

PROPOSITIO XXI.

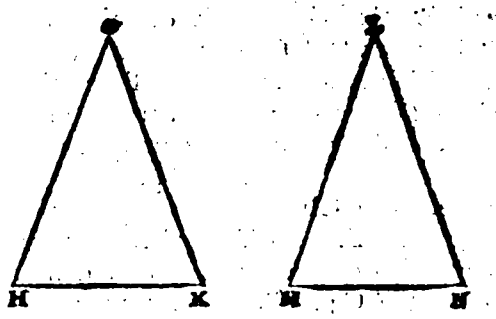
Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui ſint maiores quomodocũq; ſumpti, ſolidũ angulũ cõſtituere. oportet autẽ datos angulos quatuor rectis eſſe minores.

Sint dicti anguli BAC ED F HGK MLN. oportet ex angulis qui ſunt ad puncta A D G L ſolidum angulum conſtituere. ſumantur æquales rectæ

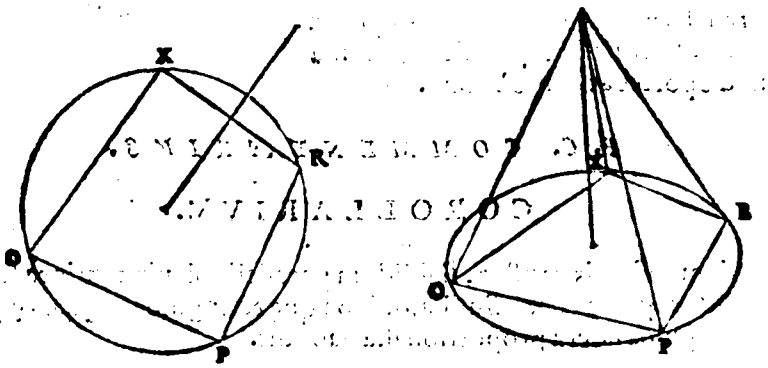


lineæ

lin eæ, quę ipſos angulos continent, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur ſunt triangula, quæ vnó quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque ſumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiẽt. ſi at & ſit X O P R. Et quoniã oportet ex æquicruribus triangulis B AC EDF HGK MLN ſolidum angulum conſtituere: omnis autem ſolidi



Ex coral. 23 quadrag.

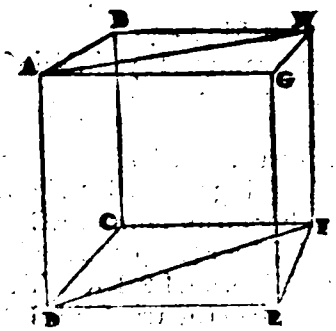


anguli, qui æquicruribus triangulis continetur baſim circumſcribit circulus; & anguli ſolidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, baſim circulus circumſcribet. dicti vero anguli baſis conſtat ex baſibus ipſorum triangulorum, videlicet XO PR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circũſcribit. Et deinceps eadem conſtruentes ijs, quę dicta ſunt in angulo ſolido pro baſi triangulum habente propoſitum efficiemus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico oppoſita eius plana, & æqualia & parallelogramma eſſe. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC ſecantur, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. ergo AB ipſi CD eſt parallela. Rurſus quoniã duo plana parallela BF AE ſecantur à plano AC, cõmunes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. parallela igitur eſt AD ipſi BC: oſtẽſa autem eſt & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, & vnumquodque ipſorum DF FG GB BF AE parallelogrammum eſſe. ſũgantur AH DF. Et quoniam parallela eſt AB quidem ipſi DC; BH vero ipſi CF, erunt duę AB BC ſe ſe tangentes duabus DC CF ſe ſe tangentibus parallelæ, & non in eodem plano. quare æquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an-

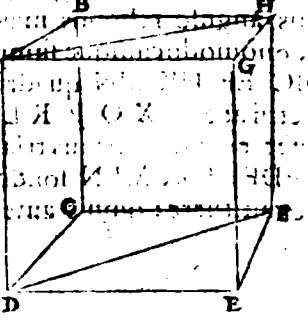


15. huius.

10. huius.

gulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB, BH duabus DC CF æquales sunt, & angulus ABH æqualis angulo DCF, erit basis AH basi DF æqualis: & ABH triãgulum æquale triangulo DCF. Quòd cum ipsius quidem ABH triãguli duplũ sit BG parallelogrãmũ, ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrãmũ CE: erit BG parallelogrãmũ æquale parallelogrãmo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, oppositæ ipsius plana, & æqualia & parallelogramma sunt, quod oportebat demonstrare.

34. primi.
4. primi.
41. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM.

Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis contineatur oppositæ ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quę & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

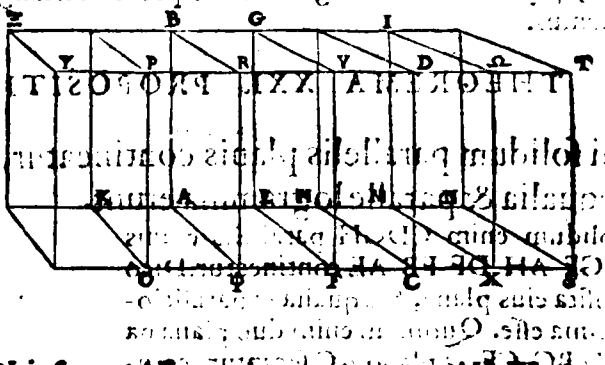
8. diffi. sexti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidũ enim parallelepipedum AB CD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico vt AEFΦ basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponantur ipsi quidem EH æquales quotcumque HM MN; ipsi uero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniã igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ, erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se æqualia: itemq; æqualia inter se parallelogramma KX KB AG, & adhuc parallelogramma LΨ KP AR inter se æqualia, oppositæ enim sunt. Eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æquala inter se, itemq; parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt, sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadem ratione & tria solida ED DM MT sunt æqualia inter se, quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. Et eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius HY solidi: & si basis LF

1. sexti. Ex antecedente.



est

est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit. & si basis LF superat NF basim, & LY solidum solidum NY superabit, & si minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY YH sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & HY solidi, nempe basis NF. & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superabit, & si æqualis æquale, & si minor minus. est igitur vt AF basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum YH. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum. quod oportebat demonstrare.

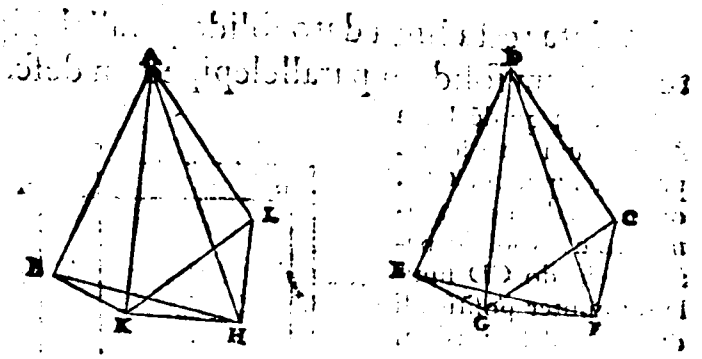
F. C. COMMENTARIVS.

Quod si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo; erit solidum ad solidum, vt altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione XVIII.

PROBLEMA LIII. PROPOSITIO. XXVI.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

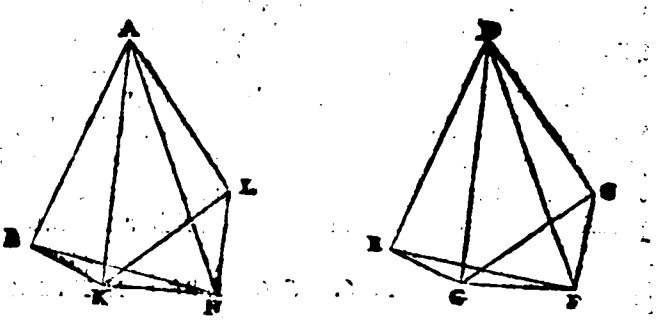


Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis cõtineatur. oportet ad datam rectam lineã AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æquale solidum angulum constituere. sumatur enim in linea DF quod vis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL, angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq; ipsi GF æqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contento. sumantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectum planum; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, sunt q; in subiecto plano rectos faciet angulos. Vterque igitur angulorum FGA FGD FGE rectus est. Eadem ratione, & vterq; ipsorum HKA HKB est rectus. Et quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis igitur et HB ipsi FE. Rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estq; AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; et basis HB est æqualis basi FE. ergo angulus BAH angulo EDF æqualis erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL est

æqualis

11. huius. 23. primi. 12. huius. 3. diff. 4. primi. 4. primi. 8. primi.

æqualis toti EDC, quorum BAK ipſi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. Et quoniã duæ KA AL duabus GD DC æquales ſunt, et angulos æquales continent; baſis KL baſi GC æqualis erit. eſt autem et KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus DC GF ſunt æquales; angulosq; rectos continent. ergo baſis HL æqualis eſt baſi FC. Rurſus quoniam duæ HA AL duabus FD DC æquales ſunt, & baſis HL æqualis baſi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atque eſt angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtitutus eſt. quod facere oportebat.



4. primi.

8. primi.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

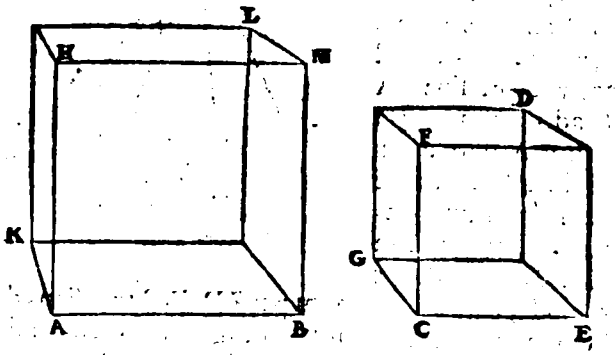
Sit recta quidẽ linea AB; datum vero ſolidũ parallelepipedum CD. oportet à data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcribere. conſtituatur enim ad rectam lineam AB, & ad datum in ipſa punctum A angulo ſolido ad C æqualis angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita vt angulus quidem BAH æqualis ſit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angulo GCF, & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK; vt autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL ſolidum. Quoniam igitur eſt vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales angulos ECG BAK latera ſunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE ſimile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH ſimile eſt parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogrãma ſolidi AL tribus parallelogrãmis ſolidi CD ſimilia ſunt. ſed tria tribus oppoſitis ſunt æqualia, & ſimilia. Ergo totũ AL ſolidum toti ſolido CD ſimile erit. A data igitur recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum AL deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

Per antecedentem.

22. ſexti.

2. diffi. ſexti.

24. huius.

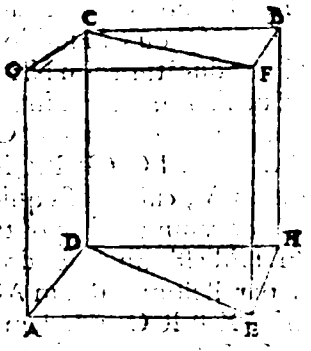


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum

positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

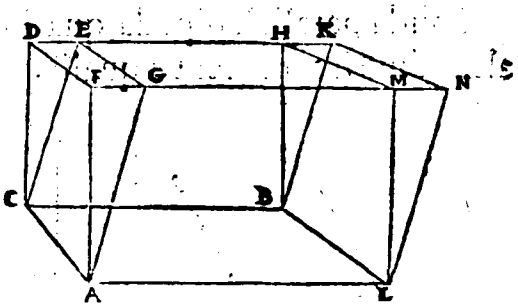
Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorũ planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continetur. ergo totum AB solidum à plano CDEF bifariam secatur. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quę in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stãtes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est vtrumque ipsorum CH CK; erit CB vtrique ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autẽ DG est æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammũ CG parallelogrammo BN æquale: oppositа enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.



34. primi.

1. sexti.

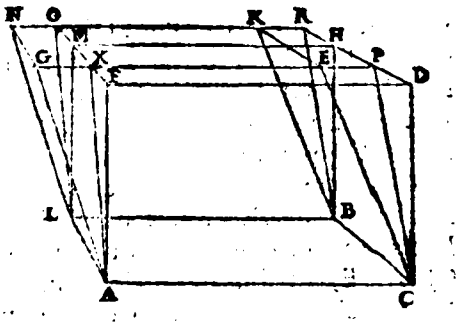
24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

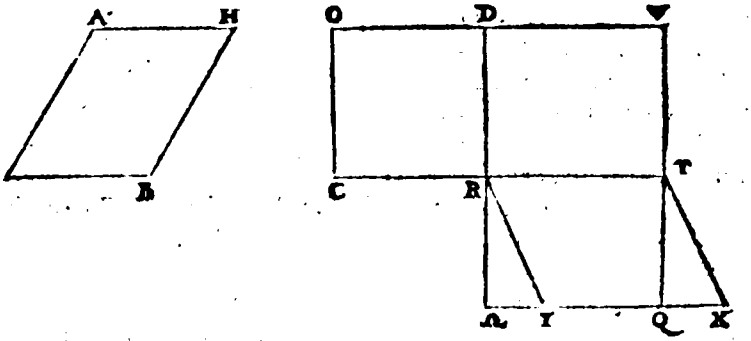
Sint in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum ſtantes AF AG LM LN CD CE BH BK non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidũ CM ſolido CN æquale eſſe. producãtur enim NK DH & GE FM, cõueniantq; inter ſe in punctis RX: & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. ſolidum CM, cuius baſis quidẽ ACBL parallelogrammum, oppoſitum autẽ ipſi FDHM eſt æquale ſolido CO, cuius baſis parallelogrammum ACBL, & ei oppoſitũ X P R O; in eadem enim ſunt baſi ACBL, & ipſorum ſtantes AF AX LM LO CD CP BH BR ſunt in eiſdem rectis lineis FO DR. Sed ſolidum CO, cuius baſis quidem parallelogrãmum ACBL, oppoſitum autem ipſi XPRO eſt æquale ſolido CN, cuius baſis ACBL parallelogrãmum, & ipſi oppoſitum GE KN. etenim in eadem ſunt baſi ACBL, & eorum ſtantes AG AX CE CP LN LO BK BR ſunt in eiſdem rectis lineis GP NR. quare & CM ſolidum ſolido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadẽ ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdẽ rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.



Ex antecedente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus, & eadẽ altitudine inter ſe ſunt æqualia.



Sint in æqualibus baſibus AB CD ſolida parallelepipeda AE CF, & eadẽ altitudine. Dico ſolidum AE ſolido CF æquale eſſe. ſint autem primum ſtantes HK BE AG LM OP DF CR ad rectos angulos baſibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD ſit inæqualis, & producatur ipſi CR in directum RT: conſtituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipſa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipſi quidem AL æqualis RT, ipſi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipſi RT parallela ducatur XY, compleaturq; baſis RX, & ſolidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales ſunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & ſimile parallelogrammo HL. Et quoniam rurſus AL eſt æqualis RT, & LM ipſi RS, angulosq; æquales continẽt, parallelogrammum RV parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipſi SY æquale eſt & ſimile. tria igitur parallelogrãma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſolidi TY æqualia & ſimilia ſunt. Sed & tria tribus

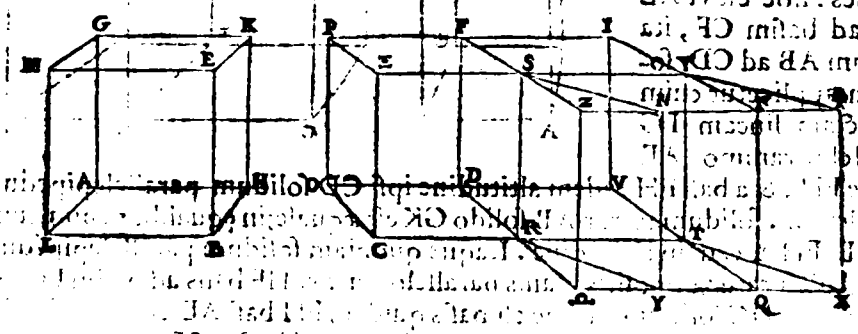
ex.pdmi.

ex.diffi. ſexti.

bus oppoſita & æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedũ toti ſolido parallelepipedo τY eſt æquale. producantur DR XY, cõueniantq; inter ſe in punctum Ω per T ipſi D Ω parallela ducatur TQ, & producatur TQ OD, & cõueniant in V, compleanturq; ſolida Ωτ RI. ſo idem igitur Φ Ω cuius baſis eſt Rτ parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi Ωτ eſt æquale ſolido τY, cuius baſis eſt Rτ parallelogrammum, & oppoſitum ipſi τΦ, in eadem enim ſunt baſi Rτ, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN ατ ac ſimiles ſunt æqualibus lineis ΩXZΦ. Sed ſolidum τY æquale eſt ſolido AE. ergo & ſolido AE eſt

24. huius

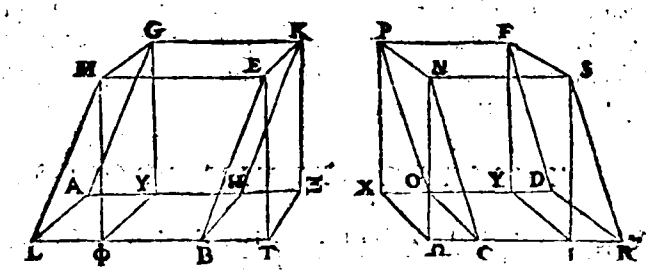
29. huius



æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD eſt æquale, quoniam & ipſi AB; parallelogrammumq; Ω T æquale parallelogrammo C D: aliud autem parallelogrammum DT. eſt igitur vt CD baſis ad baſim DT, ita Ω T ad ipſam DT. Et quoniam ſolidum parallelepipedum CI plano RF ſecatur planis oppoſitis parallelo; erit vt CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidum. Eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum Ω I ſecatur plano R τ oppoſitis planis parallelo, vt Ω T baſis ad baſim C D, ita erit ſolidum Ω τ ad RI ſolidum. ſed vt CD baſis ad baſim D T, ita baſis Ω T ad ipſam T D. Vt igitur ſolidum CF ad RI ſolidum, ita ſolidum Ω τ ad ſolidum R I. Quod cum vtrumque ſolidorum CF Ω τ ad ſolidum RI eandem habeat proportionem, ſolidum CF ſolido Ω τ eſt æquale. ſolidum autem Ω τ oſtenſum eſt æquale ſolido AE. ergo & AE ipſi CF æquale erit. ſed non ſunt ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE æquale eſſe ſolido CF. Ducãtur à punctis K E G M P F N S ad ſubiectum planum perpendiculares K Ξ ET GY MΦ PX Fτ Nα SI, & plano in punctis Ξ T Y Φ X τ Ω I occurãt, & iungantur Ξ T YΦ XY TΦ Xτ XΩ Ω τI. æquale igitur eſt KΦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eadem altitudine; quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed KΦ ſolidum ſolido AE eſt æquale: ſolidum vero PI æquale ſolido CF. ſi quidem in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quę in æqualibus ſunt baſibus, & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.

25. huius

9. quint.

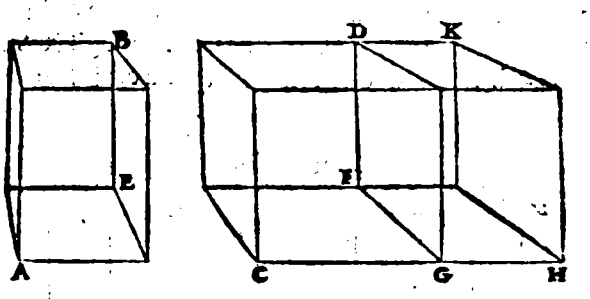


Ex proxime demõſtratis, 30. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quę eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes.

Sint ſolida parallelepipeda AB CD, quæ eadem altitudinem habeant. Dico inter ſe eſſe vt baſes. hoc eſt vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad CD ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE



æquale FH, & à baſi FH eadem altitudine ipſi CD ſolidum parallelepipedum GK compleatur. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt æquale; in æqualibus enim ſunt baſibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam ſolidum parallelepipedum CK plano DG ſecatur, oppoſitis planis parallelo; erit vt HF baſis ad baſim FC, ita ſolidum HD ad DC ſolidum, atque eſt baſis quidem FH baſi AE æqualis: ſolidum vero GK æquale ſolido AB. eſt igitur & vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad ſolidum CD. Quare ſolida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente 25. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conſtat etiam ſolida parallelepipeda in eadem baſi, vel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum, propoſitione XIX.

COROLLARIVM.

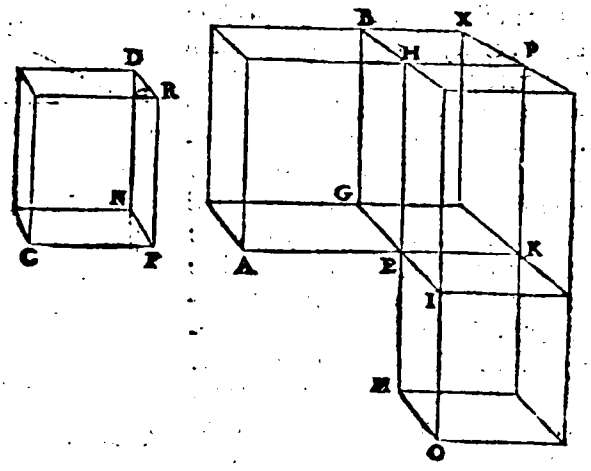
Ex his igitur & iam demonſtratis ſequitur priſmata triãgulares baſes habentia, quę vel in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituũtur, & eadem altitudine inter ſe æqualia eſſe. Et inſuper quæ eandem habent altitudinem inter ſe eſſe, vt baſes. Et quę vel in eiſdem vel æqualibus baſibus conſtituuntur, inter ſe eſſe, vt altitudines.

28. huius. *Sunt enim ea ſolidorum parallelepipedorum dimidia. per baſes autem priſmatis intelligimus non quaſcunque, ſed alterum duntaxat oppoſitorum planorum ſimilium & parallelorum, vt nũc in priſmate triangularem baſim habente, alterum triangulum, alioquin obſtarent, quæ in vltima propoſitione huius traduntur.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplam proportionem habere eius, quã habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipſis AE GE HE: & ipſi quidem CF æqualis ponatur EK, ipſi vero FN æqualis EL; & adhuc ipſi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO ſolidum compleatur. Quoniam igitur duę KE EL duabus CF FN æquales ſunt; ſed & angulus KEL angulo CFN eſt æqualis; quod & angulus AEG ipſi CFN ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum ſimile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum



mum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipſi DF parallelogrammo. tria igitur parallelegramma ſolidi KO tribus parallelogrammis CD ſolidi æqualia & ſimilia ſunt. Sed tria tribus oppoſitis æqualia ſũt & ſimilia. totum igitur KO ſolidum æquale eſt & ſimile toti ſolido CD. compleatur GK parallelogrãmũ; & à baſibus quidẽ GK KL parallelogrãmis, altitudine vero eadẽ ipſi AB ſolida cõpleãtur AX LP. Et qm̃ ob ſimilitudinẽ ſolidorũ AB CD eſt vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; æqualis aũt EC ipſi EK; & FN ipſi EL, & FR ipſi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. ſed vt AE quidẽ ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. ſed vt AG quidem ad GK, ita AB ſolidum ad ſolidũ EX: vt autem GK ad KL, ita ſolidum XE ad PL ſolidum: & vt PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. & vt igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. ſi autem quattuor ſint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quàm ad ſecundam. ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. ſed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipſam EK. quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam proportionem habebit eius, quã AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, & recta linea EK rectæ CF eſt æqualis. ergo & AB ſolidum ad ſolidum CD triplam habet proportionẽ eius, quam latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus. quod demonſtrare oportebat.

24 huius.

7. ſexti.

Ex antecedente.

11. quinti.

11. diffi. quinti.

Ex antecedente.

1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod fit à prima ad ſolidum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionẽ habet eius, quam ad ſecundam.

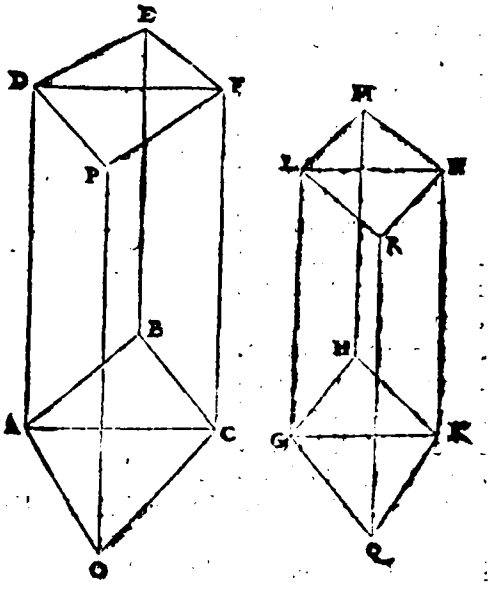
P. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis, ſequitur priſmata ſimilia, quę triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia priſmata triangulares baſes habentia, & ſimiliter poſita AF GN, & priſmatis quidem AF baſis ſit triangulum A B C, & quod ipſi opponitur DEF: priſmatis uero G N baſis ſit triangulum G H K, & ipſi oppoſitum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Dico priſma AF ad priſma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Com-

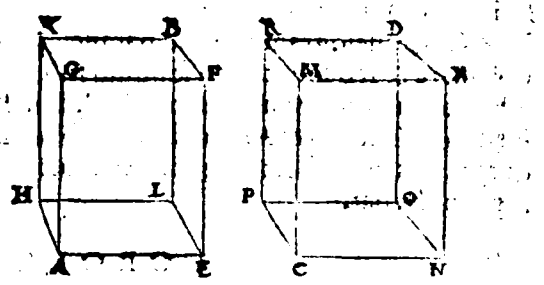
pleantur enim ſolida parallelepipeda, & ſit ſolidi quidē parallelepipedi AF baſis quadrilaterum ABCO, & ipſi oppoſitum quadrilaterū DEFP ſolidi vero parallelepipedi GN baſis ſit quadrilaterū GHKQ, & quod ipſi opponitur LMNR. Itaque qm̄ priſma AF ponitur ſimile priſmati GN, erit parallelogrāmum AEED ſimile parallelogrammo GHML. quare & ipſi oppoſitum parallelogrāmum OCFP ſimile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonſtrabitur parallelogrammum AOPD ſimile ipſi GQRL. ſolidum igitur parallelepipedum AF ſimile eſt ſolido parallelepipedo GN. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in tripla ſunt proportione homologorū laterū. quare & ipſorum dimidia in eadē proportione erūt. priſma igitur AF ad priſma GN triplā proportionē habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonſtrare.

9.diff.huius
24.huius.



THEOREMA XXIX.
PROPOSITIO XXXIIII.

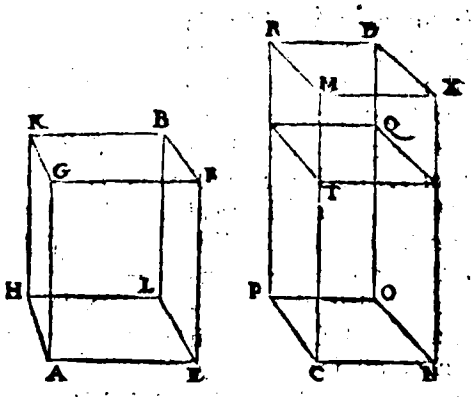
Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.



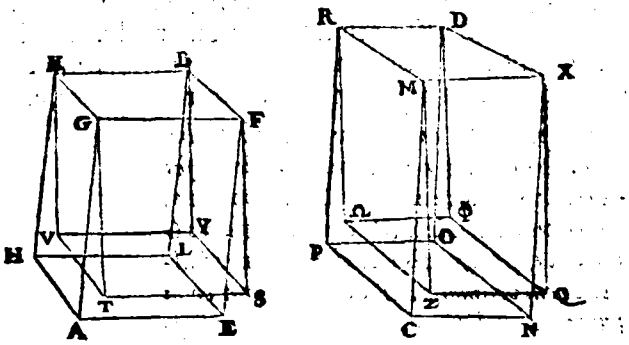
Sint æqualia ſolida parallelepipeda AB CD. Dico ipſorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpōdere: hoc eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Sint enim primū ſtantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos baſibus ipſ rū. Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. Si igitur baſis EH baſi NP ſit æqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido CD; erit & CM æqualis ipſi AG. ſi enim baſibus EH NP æqualibus exiſtentibus non ſint AG CM altitudines æquales, neque AB ſolidum ſolido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis eſt altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis ſit neceſſe eſt; ac propterea vt EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG. ex quibus conſtat ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere. At vero non ſit baſis EH æqualis baſi NP. Sed EH ſit maior. eſt autem & AB ſolidum ſolido CD æquale. ergo maior eſt CM ipſa AG; alioqui rurſus ſequeretur ſolida AB CD æqualia non eſſe, quæ ponuntur æqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipſi AG: & à baſi quidem NP, altitudine autem CT ſolidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur ſolidum AB ſolido CD eſt æquale, aliud autem aliquod eſt VC, & æqualia ad idem eandem habēt proportionem; erit vt AB ſolidum ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. ſed vt AB ſolidum ad ſolidum CV, ita baſis EH ad NP baſim æquealta enim ſunt AB CV ſolida. Vt autem ſolidum CD ad ipſum CV, ita MP baſis ad baſim PT, & MC ad CT. & vt igitur baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. eſt autem CT æqualis AG. ergo & vt EH baſis ad baſim NP, ita

7.quinti.
32.huius.
25 huius.
1.ſexti.

NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AG CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim MP, ita solidi CD altitudo ad altitudinē solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Sint enim rursus stātes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. ergo solidum AB solido CD est æquale. sed nō sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH maior. maior igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est vt EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AC; æqualis autem est AC ipsi CT: erit vt basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed vt basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æquealta enim sunt solida AB CA. vt autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum & vt igitur solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. Quòd cum vtrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandē proportionē habeat; erit AB solidū solido CD æquale. quod demonstrare oportebat.



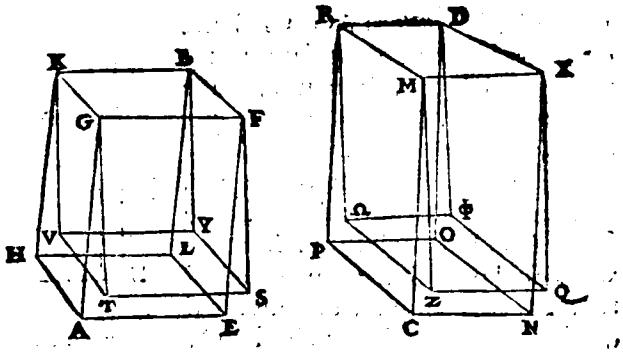
Non sint autem stātes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpēdiculares, quę planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurant & cōpleantur solida FVXΩ. Dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est solidum BT; in eadem namq; sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos; bases altitudinibus ex contraria parte respondent. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare vt EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eędem autem sunt altitudines solidorum DZ BT, itemq; solidorum DC BA. est igitur vt EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB: ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex cōtraria parte respōdeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Iisdem namque constructis,



5o. huius.

51. huius.

Ex ante demonstratis.

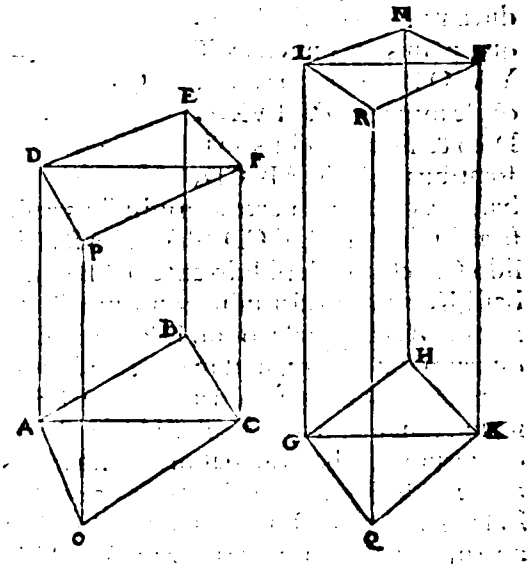


tis, quoniam vt EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi C D altitudo ad altitudinẽ ſolidi AB; & baſis quidem EH eſt æqualis baſi FK; NP vero ipſi XR: erit vt FK baſis ad baſim XR, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. eædẽ autem ſunt altitudines ſolidorum AB CD, & ipſorũ BT DZ. eſt igitur vt FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. quare ſolidorũ BT DZ parallelepipedorũ baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus; quorum autem ſolidorum parallelepipedorum altitudines ſunt ad rectos angulos baſibus ipſorum, & baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. ergo BT ſolidum ſolido DZ eſt æquale. ſed ſolidũ quidem BT æquale eſt ſolido BA, etenim in eadem ſunt baſi FK, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis: ſolidum vero DZ eſt æquale ſolido D C, ſi quidem in eadem ſunt baſi XR, & eadem altitudiue, & non in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidũ AB ſolido CD eſt æquale. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quę ante dicta ſunt, illud etiam demonſtrari poteſt.

Aequalium priſmatum & triangulares baſes habentium baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondent: & quorum priſmatum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.



Sint priſmata, quae triangulares baſes habent AF GN inter ſe aequalia. Dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt triangulum ABC ad triangulum GHK, ita eſſe priſmatis GN altitudinem ad altitudinem priſmatis AF. Compleantur enim ſolida parallelepipeda, quę etiam inter ſe æqualia erũt, cum ſint priſmatum dupla: æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. ergo vt ſolidi parallelepipedi AF baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi GN, hoc eſt vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita eſt ſolidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem. ſolidi parallelepipedi AF. ſed vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum GHK. Vt igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo ſolidi parallelepipedi GN ad altitudinẽ ſolidi parallelepipedi AF, hoc eſt ita priſmatis GN altitudo ad altitudinẽ priſmatis AF. Rurſus priſmatum AF GN baſes ex cõtraria parte reſpondeant altitudinibus, hoc eſt vt triangulũ ABC ad triangulũ GHK, ita ſit priſmatis GN altitudo ad altitudinem priſmatis AF. Dico priſmata AF GN inter ſe aequalia eſſe. compleantur enim rurſus ſolida parallelepipeda, erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, vt triangulum ABC

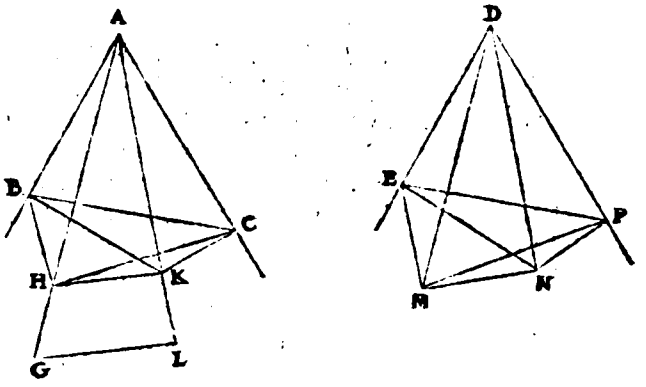
15. quinti.

ad

ad triãgulum GHK. quare vt ſolidi parallelepipedi AF baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi GN, ita erit priſmatis GN altitudo ad altitudinẽ priſmatis AF, hoc eſt, ita ſolidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi AF. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. ergo et æqualia erunt eo rum dimidia. priſma igitur AF priſmati GN eſt æquale. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipſorum ſubli mes rectæ lineæ conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quæuis puncta, atque ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineæ: cum ſublimibus æquales angulos continebunt.



Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis AD ſublimes rectæ lineæ AG DM conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineãt, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & ſumantur in ipſis AG DM quæuis puncta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN, occurrentes planis in punctis L N; & L A ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN æqualem eſſe. ponatur ipſi DM æqualis AH, & per H ipſi GL parallela ducatur HK. eſt autem GL perpendicularis ad planum per BAC. ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. Ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale eſt quadratis ex HK KA; quadrato autem ex HA æqualia ſunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale eſt quadratum ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA eſt rectus. Eadem ratione & angulus DFM rectus eſt. ergo angulus ACH ipſi DFM eſt æqualis. eſt autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula ſunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; uidelicet HA ipſi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC eſt æqualis DF. Similiter demonſtrabimus & AB ipſi DE æquale eſſe. iungantur HB ME. Et quoniam quadratum ex AH eſt æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia ſunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed quadratis

8. huius.

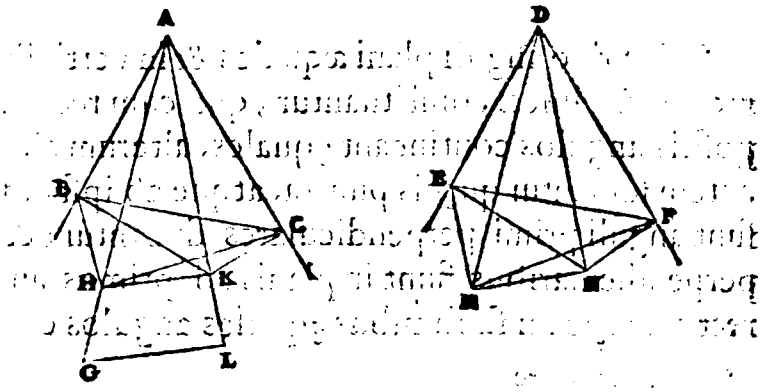
47. primi.

47. primi.

48. primi.

26. primi.

dratis ex BK KH æquale eſt ex BH quadratum; rectus enim angulus eſt HKB, propterea quòd & HK perpendicularis eſt ad ſubiectum planum. quadratũ igitur ex
48.primi. AH æquale eſt quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus eſt. Eadem ratione & angulus DEM eſt rectus. eſt autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita
26.primi. enim ponitur: atque eſt AH ęqualis DM, ergo & AB ipſi DE eſt æqualis. Quoniam igitur AC quidem eſt æqualis DF, AB vero ipſi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo FDE
4.primi. eſt æqualis. baſis igitur BC baſi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis ęquales ſũt. ergo angulus ACB angulo DFE. eſt autem & rectus ACK ęqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. Eadem ratione & CBK angulus eſt æqualis angulo FEN. Itaque duo triangula ſunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri ęquale, quod eſt ad æquales anguli-
26.primi. los, videlicet BC ipſi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt. æqualis igitur eſt CK ipſi FN. eſt autem & AC ipſi DF æqualis. quare duæ AC CK
4.primi. duabus DF FN ęquales ſunt, & rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt æqualis baſi DN. Et cum AH ſit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia ſunt ex AK KH quadrata; etenim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM ęqualia ſunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus ſit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM ſunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt æquale. & ideo recta linea HK ipſi MN æqualis. quòd cum duæ HA AK duabus MD DN ęquales ſint, altera alteri, & baſis HK baſi NM oſtenſa ſit ęqualis, angulus HAK angulo MDN æqualis
8.primi. erit. quod oportebat demonſtrare.



COROLLARIVM.

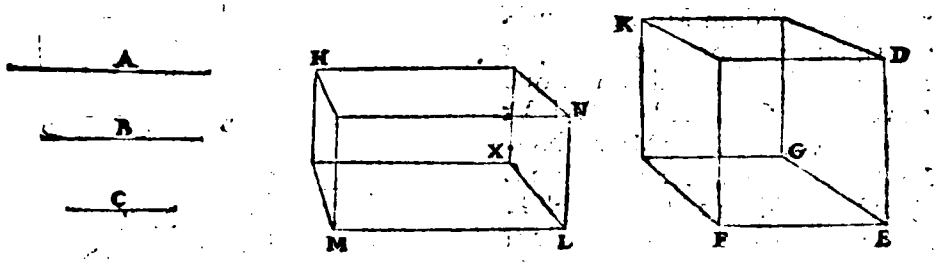
Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quę cum rectis lineis à principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quę ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducantur, inter ſe ęquales eſſe.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectę lineę proportionales ſint, ſolidum parallelepipedũ, quod à tribus fit ęquale eſt ſolido parallelepipedo, quod fit à media, ęquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sitq; vt A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus an-



gulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidē B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum æquales angulos MLN DEF, latera ex cōtraria parte sibi ipsis respondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, & in ipsis sublatæ rectæ lineæ constituuntur LX EG æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atque est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod demonstrare oportebat.

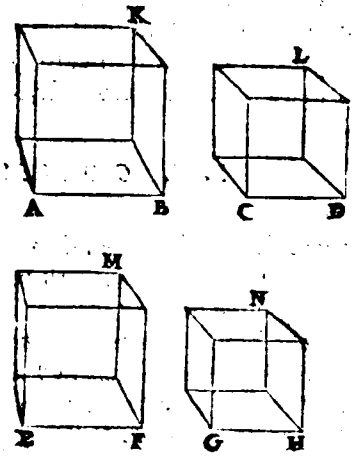
14. sexti.

Ex antecedenti.

31. huius.

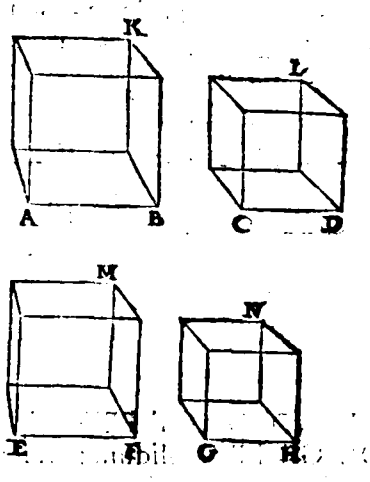
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXVII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiūt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quę ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta pportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectę lineę proportionales A B CD EF GH, sitque vt A B ad C D, ita EF G H, & describātur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda K A L C M E N G. Dico vt K A ad LC, ita esse ME ad N G. Quo-

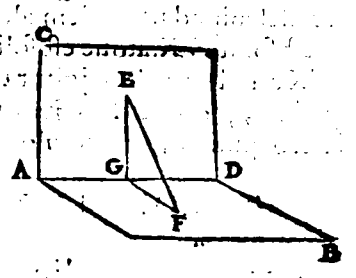
niam enim ſolidum parallelepipe-
g.huius. dum KA ſimile eſt ipſi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadē ratione & ſolidum ME ad ipſum N G triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque eſt vt AB ad CD, ita EF ad GH. Vt igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed ſit ut ſolidum AK ad ſolidum L C, ita ME ſolidum ad ſolidum NG. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam G H. Quoniam enim rurſus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

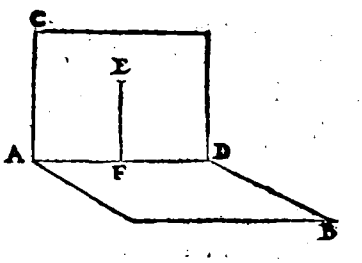
Si planum ad planum rectum ſit, & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum ſectionem cadet.

Planum enim CD ad planum AB rectum ſit; cōis aũt eorum ſectio ſit AD; & in ipſo CD plano quod uis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AD. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iũgatur. qm̃ igitur F G plano CD eſt ad rectos angulos; contingit autem ipſam recta linea EG, quæ eſt in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. ſed & EF plano AB ad rectos angulos eſt. rectus igitur eſt angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus re-
17.primi. ctis ſunt æquales; quod eſt abſurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipſam cadat neceſſe eſt. Si igitur planum ad planum rectum ſit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Poſſumus et recta demõſtratione vti hoc modo. Sit rurſus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipſorum ſectio ſit AD; & in plano CD quod vis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipſam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum eſt, & commu-



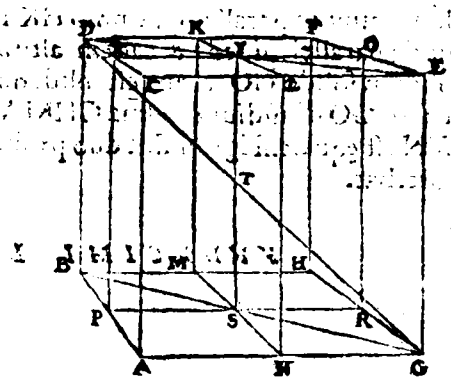
ni planorum

ni planorum ſectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta eſt EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum ſectionem AD cadit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecẽtur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur, cõmunis planorum ſectio, & ſolidi parallelepipedi diameter ſeſe bifariam recabunt.

In ſolido enim parallelepipedo AE oppoſitorum planorum CF AH latera bifariã ſecentur in punctis KLMNXPOR. & per ſectiones plana ducantur KN XR communis autem planorum ſectio YS, & ſolidi parallelepipedi diameter ſit DG. Dico YS DG ſeſe bifariam ſecare, hoc eſt YT quidem ipſi TS DT vero ipſi TG æqualem eſſe. Iungantur enim DY YE BS SG. Quoniam igitur DX parallela eſt ipſi OE, alterni anguli DXY YOE inter ſe æquales ſunt. Et quoniam DX quidem eſt æqualis OE XY vero ipſi YO, & angulos æquales continent; erit baſis DY æqualis baſi YE, & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD eſt æqualis angulo OYE, & ob id recta linea eſt DYE. Eadem ratione & BSG recta eſt. atque eſt BS æqualis SG. Et quoniã CA ipſi DB æqualis eſt & parallela, ſed CA eſt æqualis & parallela ipſi EG; erit & DB ipſi EG æqualis & parallela & ipſas coniungũt rectæ lineæ DE GB. parallela igitur eſt DE ipſi BG. & ſumpta ſunt in vtraque ipſarum quæuis puncta DYGS, & iunctæ ſunt DG YS. ergo DG YS in vno ſunt plano. Quod cum DE ſit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim ſunt. eſt autem & DTY angulus æqualis ipſi GTS. duo igitur ſunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, uidelicet DY ipſi GS: dimidia enim ſunt ipſorum DE BG. ergo & reliquos angulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem eſt æqualis TG, YT uero ipſi TS. Si igitur in ſolido parallelepipedo, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

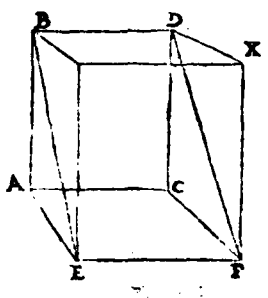


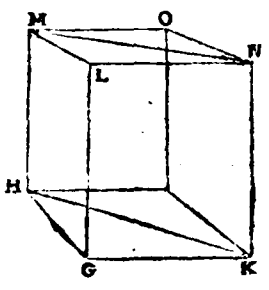
29. primi.
4. primi.
14. primi.
9. huius.
33 primi.
7. huius.
29. primi.
15. primi.
26. primi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

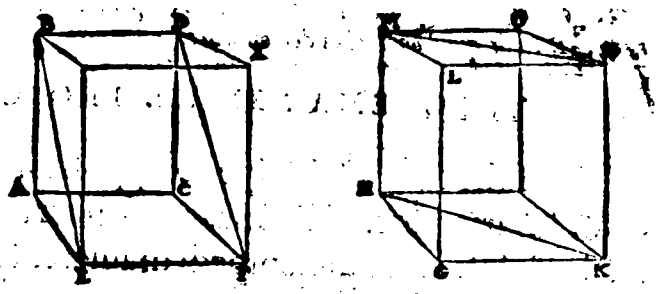
Si ſint duo priſmata æqualta, quorũ vnũ quidẽ baſim habeat parallelogrãmũ, alterum vero triangulũ, & parallelogrammũ duplum ſit trianguli; ea inter ſe æqualia erunt.

Sint priſmata æqualta ABCDEF GHKLMN, &





naam quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum uero GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammũ triãguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. compleãtur enim AX GO solida. Et quoniam parallelogrãmum AF trianguli GHK



est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum triãguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ uero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi uero GO dimidium prisma GHKLMN: ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. si igitur sint duo prismata æquealta, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

7. huius.

FINIS LIBRI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER DVODECIMVS

ET SOLIDORVM SECVNDVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

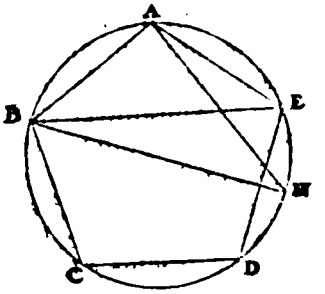
Federici Commandini Vrbinatis.

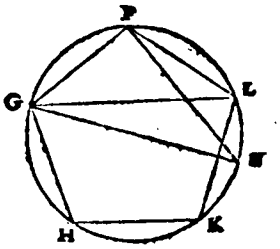
THEOREMA I. PROPOSITIO I.



IMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Iungantur enim BE AM GL FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est vt BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL vnum angulum vni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL: circa æquales autē angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis; in eadem enim circumferentia consistūt. angulus autem FLG æqualis est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triāgulum AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. Sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratū ex GN; proportionis vero BA ad GF dupla est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL: & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrum quadrata.

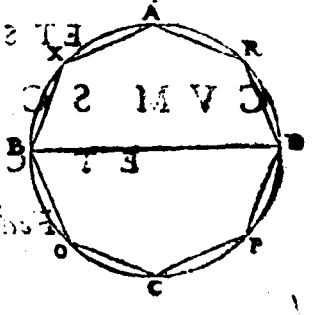


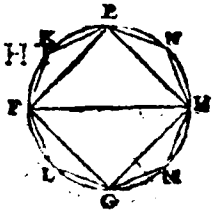


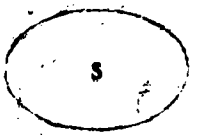
THEOREMA II. PROPOSITIO. II

Circuli inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH: diametri autem ipſorũ ſint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita eſt; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod ſit S: & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. Itaque deſcriptum in circulo quadratum maius eſt dimidio circuli EFGH; quoniam ſi per puncta EFGH contingentes circulum ducamus; erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH maius eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis KLMN: & EK KF FL LG GM MH HN NE iungantur. Vnum quodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE maius eſt dimidio portionis circuli in qua conſiſtit, quoniam ſi per puncta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę ſunt in rectis lineis EF FG GH HE cõpleamus; erit vnumquodque triãgulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt: ſed portio minor eſt parallelogrammo. quare vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE maius eſt dimidio portionis circuli, in qua conſiſtit, reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & iungentes rectas lineas: atque hoc ſemper facientes relinquemus tandẽ quaſdã circuli portiones, quę minores erũt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis ſi à maiori auferatur maiuſquã dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rurſus maiuſquàm dimidium, & hoc ſemper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquam, quę minori magnitudine expoſita ſit minor. Itaque relictæ ſint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ maiores ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit ſpacio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpacium S. ergo & vt circulus ABCD ad ſpacium S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipſo eſt, ita ſpacium S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem eſt circulus ABCD eo, quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpacium S maius eſt polygono EKFLGMHN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH. ſimiliter oſtendemus neque eſſe vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpacium maius circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius ſpaciũ S. erit igitur conuertendo ut quadratum ex FH ad quadratum eſt BD, ita ſpacium S ad ABCD circulum. ſed vt ſpacium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, vt demonſtrabitur. ergo & vt quadratum







A

B

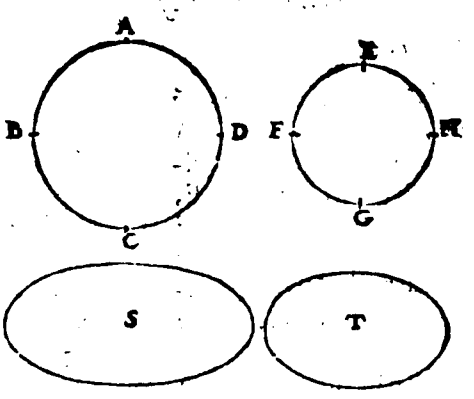
C

Ex antecedenti.

11. quint.

ex

ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Nó igitur vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.



LEMMA

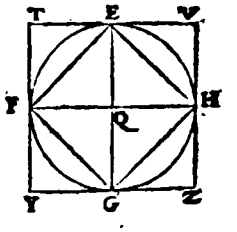
Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH, eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. Dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. Quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFCH, ita ABCD circulus ad ſpacium T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciũ S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH] A

Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH punctа rectis lineis, quae circulum contingant, vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſeſe in puncto Q ſecantes, quae circuli diametri erunt: atque erit Q circuli cẽtrum. angulus igitur QEV eſt rectus. 18. tertij. *ſed & rectus EQH; ſi quidẽ duae FQ QE aequales ſunt duabus HQ QE; & baſis EF aequalis baſi EH. ergo angulus FQE angulo HQE eſt aequalis: & ob id vterque rectus. ex quibus ſequitur* 8. primi: 28. primi. *rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelae ipſi EQG: & inter ſeſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. Quòd cum FQ ſit aequalis QH, erit ẽt TE ipſi EV aequalis: ideoq; TV eſt dupla ipſius TE. ſimiliter demonſtrabimus & TY ipſius TF duplam. cumq; TY TV aequales ſint, erunt & earum dimidiae FT TE aequales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplũ erit. ſimiles enim rectilineae figurę in dupla ſunt proportione homologorũ laterũ. ſed quadratũ ex EF eſt aequale quadratis ex FT TE, quae quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare.* 34. primi. Cor. 20 ſexti. 47. primi. B



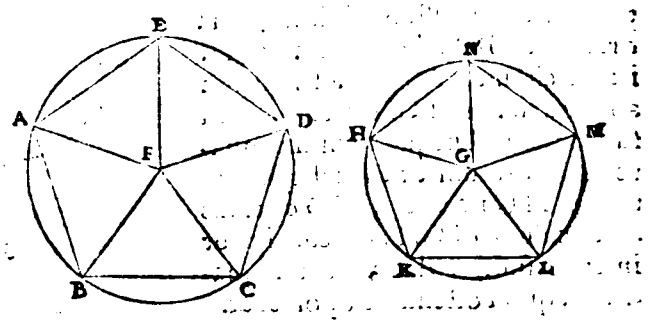
Erit vnum quodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt [*Ex 41 primi.*

SCHOLIVM.

Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. C

In

In dato circulo, deſcripto in circulo polygono ſimile polygonum deſcribere.



Sint duo circuli, quorũ centra FG, & in circulo A B C D E polygonũ quoduis deſcribatur ABCDE, iũgãturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quędam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem A FB cõſtituatur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cõſtituatur. ergo reliquus AFE reliquo HGN eſt æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. eſt autem vt A F ad F B, ita HG ad GK; ſimilia enim ſunt AFB LGK triangula, quod oſtenſum eſt in theoremate ſexto ſexti libri elementorum. Vt igitur ſemidiameter circuli ad circuli ſemidiametrum, ita BA ad HK. ſimiliter oſtendemus & vnamquamque ipſarũ BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sũt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales ſunt. polygona igitur ABCDE HKLMN ſingulos angulos ſingulis angulis æquales habẽt: & circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE ſimile eſt polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE ſimile polygonum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

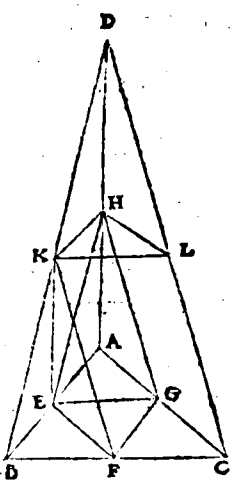
23. primi.

4. ſexti.

1. diffi. tertia

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens baſim diuiditur in duas pyramides, æquales & ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimilesq; toti; & in duo priſmata æqualia, quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt maiora.



Sit pyramis, cuius baſis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares q; baſes habentes, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia; & duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe maiora. ſecentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem eſt æqualis EB, AH vero ipſi HD; erit EH ipſi DB parallela. Eadem ratione & HK eſt parallela ipſi AB. parallelogrammum igitur eſt HEBK. quare HK eſt æqualis EB. Sed EB ipſi A E eſt æqualis. ergo & A E ipſi H K æqualis erit. eſt autẽ & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH H D æquales ſunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis angulo KHD. baſis igitur E H baſi K D eſt æqualis. quare triangulum AEH æquale eſt & ſimile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale eſt & ſimile. Et quoniam duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes EH HG duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KD DL parallelæ ſunt, non autem in eodẽ plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG eſt æqualis angulo KDL.

2. ſexti.

34. primi.

29. primi.

4. primi.

10. undecimi

KDL. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidē est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK, erit triāgulū ADB triāgulo DHK æquiāgulū, & latera habēt proportionalia. Simile igitur est ADB triāgulū triāgulo DHK: & eadē ratione triangulū quidē DBC simile est triangulo DKL; triangulū vero ADC triangulo DHL. quòd cum duę rectę lineę se se tangentes BA AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoq; pyramis, cuius basis quidem triangulum ABC, uertex autem pūctum D similis est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & uertex pūctum D. sed pyramis cuius basis quidem HKL triangulum, uertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triangulum AEG, & uertex H punctum. Quare & pyramis cuius basis triangulum ABC & uertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. Vtraque igitur ipsarum AEG H HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triāguli GFC. & quoniam duo prismata æquealta sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estq; parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrāmis EBFG EBKH KHFG est æquale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFGL LCGH HKEG continetur. & manifestum est vtrumque ipsorum prismatum, & cuius basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea: & cuius basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, uertices autem puncta H D; quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, uertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & uertex K punctū est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H; æquabus enim & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrammum EBFG, opposita autē ipsi rectæ linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triāgulum, & uertex pūctum H. prisma vero cuius basis parallelogrammum EBFG & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati, cuius basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum & uertex pūctū D. ergo duo prismata de quibus dictū est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorū bases triāgula AEG HKL, uertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triangulum, uertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. quod ostendere oportebat.

4. primi.

10. undecimi.

A

B

C

10. diffi. undecimi.

F. C. COMMENTARIVS.

Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC. *Iuncta enim EF quoniam BF est æqualis FC, & EG parallela ipsi EC, erit triangulum BEF æquales triāgulo FGC. sed parallelogrammum EBFC duplum est trianguli BEF. ergo & ipsius FGC trianguli duplum erit.*

A

28. primi.

4. primi.

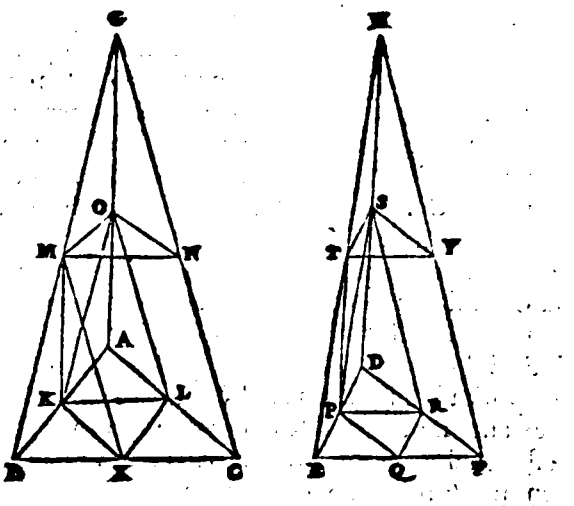
Erunt in prismata inter se æqualia. *Ex vlt. undecimi libri.*

B

C Prisma quidē cuius basis est EBFG parallelogrāmū. & opposita ipsi recta linea MK, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem pūctum K] *Velut totum est sua parte maius; est enim pyramis ipsius prismatis pars quędam. sed inferius ex ijs, quae in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partē esse, cum sit tertia pars prismatis, cuius basis GEC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si sint duę pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habeant, diuidatur autem vtraque ipſarum, & in duas pyramides ęquales inter ſe, ſimileſq; toti, & in duo priſmata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in vna pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.



Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habeāt A BC DEF, uertices autem ſint pūcta GH, & diuidatur vtraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſq; toti, & in duo priſmata ęqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuiſa intelligatur: atq; hoc sēper fiat. Dico vt ABC baſis ad baſim DEF ita eſſe priſmata oīa, quę ſunt in pyramide ABC ad priſmata omnia, quæ in pyramide DEF multitudine ęqualia. Quoniam enim BX quidem eſt æqualis XC, AL vero ęqualis LC; erit XL ipſi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC ſimile. Eadem ratione & triangulum DEF ſimile eſt triangulo RQF. Et quoniam BC quidem eſt dupla CX; EF vero dupla ipſius FQ, vt BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & deſcripta ſunt ab ipſis BC CX ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ABC LXC; ab ipſis vero EF FQ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea DEF RQF. eſt igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. ſed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita priſma cuius baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma cuius baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY. & ut igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita priſma, cuius baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma, cuius baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY. Et quoniam duo priſmata, quæ in pyramide ABCG inter ſe ęqualia ſunt, ſed & quæ in pyramide DEFH priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma, cuius baſis parallelogrammum KLXB, oppoſita uero ipſi recta linea MO ad priſma cuius baſis LXC triangulum, & oppoſitum ipſi OMN, ita priſma cuius baſis parallelogrammum EPRQ & oppoſita ipſi recta linea ST ad priſma cuius baſis RQF triangulum, oppoſitum uero ipſi STY. quare cōponēdo vt priſmata KBXLMO LXCMNO ad priſma LXCMNO, ita priſmata PEQRST RQFSTY ad priſma RQFSTY. & permutando ut priſmata KBXLOMN LXCOMN ad priſmata PEQRST RQFSTY, ita priſma LXC

MNO

a. huius.

12. huius.

12. quinti.

MNO ad prisma RQFSTY. Vt autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triagulum DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autē & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quę in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prisma, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY, hoc modo ostendemus.

In eadē enim figura intelligātur ab ipsis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorū plana, quę inter se ęqnales erunt; propterea quod pyramides ipsæ ęquealtę ponuntur. Et quoniam duę rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in easdem proportiones secabuntur. & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadē ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur. & sunt æquales perpendiculares, quę ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quę à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. ęquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF. opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur ęquealta, inter se sunt ut bases, & eorū dimidia ut LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erūt. quod demonstrare oportebat. 17. undecimi. 15. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

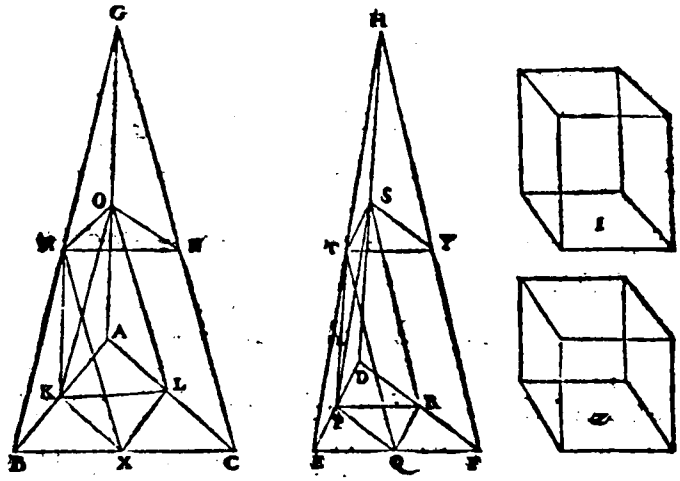
Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triagulum & oppositum ipsi STY] *Hoc ēt cōstare pōt ex corollario, quod nos ad 32 vndecimi conscripsimus.*

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt vt bases.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triagula ABC DEF, uertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, uel ad solidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Sit primum ad solidum minus, sitq; Z. & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atque hoc semper fiat, quo adsumantur quædam pyramides à pyrami-

de DEFH, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis DEFH ſolidum Z ſuperat. Itaque ſumantur, & ſint exempli cauſſa pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in



pyramide DEFH priſmata ſolido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes ſimiliter pyramidi DEFH. ergo vt ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quæ in pyramide DEFH; ſed vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramis ABCG ad ſolidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad priſmata, quæ in ipſa ſunt, ita ſolidum Z ad priſmata, quę in pyramide DEFH. maior autem eſt pyramis ABCG priſmatibus, quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide DEFH eſt maius. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad ſolidum aliquod minus pyramide DEFH. ſimiliter oſtendemus neque ut DEF baſis ad baſim ABC, ita eſſe pyramidem DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque eſſe vt ABC baſis ad baſim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod ſolidū maius pyramide DEFH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius, uidelicet ad ſolidum I. erit igitur conuertendo vt DEF baſis ad baſim ABC, ita ſolidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem ſolidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime oſtenſum fuit. & ut igitur DEF baſis ad baſim ABC, ita pyramis DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. quod eſt abſurdum. non igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt ABCG pyramis ad ſolidum aliquod maius pyramide DEFH. oſtenſum autem eſt, neque ad minus. quare vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

Extenſum.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

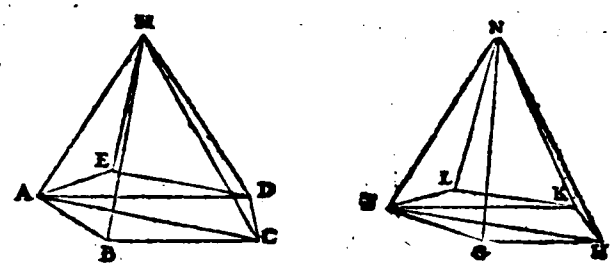
Pyramides, quæ eadem ſunt altitudinę, & multiangulas baſes habent, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas baſes habeant ABCDE FGHKL: uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; baſis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æquealtę ipſis pyramidibus, quę à principio. Quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangu-

lum

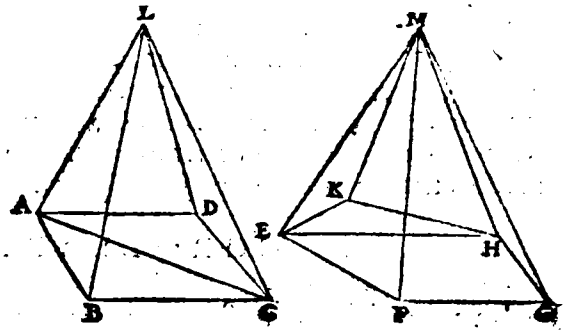
lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyramidē ACDM: & componendo ut ABCD trapeziū ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidē ACDM. ſed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex ęquali ut ABCD baſis ad baſim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM: & rurſus componendo ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem ratione & ut FGHKL baſis ad baſim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides ſunt ADEM FKLN, quæ triangulares baſes habent & eadem ſunt altitudine; erit ut ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidem FKLN. Quòd cū ſit ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidē ADEM; ut aūt ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidē FKLN: erit ex ęquali ut baſis ABCDE ad FKL baſim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. ſed ét ut FKL baſis ad baſim FGHKL, ita erat et FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rurſus ex ęquali ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſt ABCDEM pyramis ad pyramidē FGHKLN. Pyramides igitur, quæ eadem ſunt altitudine, et multiangulas baſes habent inter ſe ſunt, ut baſes. quod oportebat demonſtrare.

Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem etiam demonſtrabitur, ſi baſes inęqualibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides aequealtae ABCDLEFGHKM, ſitq; pyramidis ABCDL baſis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM baſis ſit pentagonum EEGHK, & vertex L. Dico vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Jungantur AC EG EH. erit quadrilaterum ABCD diuiſum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuiſum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligentur ab vnoquoque triangulo pyramides aequealtę primis pyramidibus. Et quoniam eſt ut triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonſtrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita eſſe pyramidem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita eſt pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. quare ex ęquali vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EHK, ita eſt pyramis EFGHM ad piramidem EHKM: & rurſus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM: conuertendoq; vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulum ACD ad triangulum EHK, ita eſt pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem ut quadrilaterum ABCD ad triangulū ACD ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Quare rurſus ex ęquali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis ABCDL



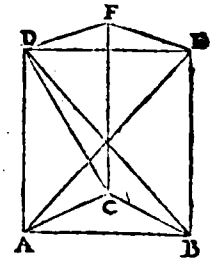
Ex antecedente.

Ex antecedenti.

BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonſtrabitur, quotcunque lateribus baſes earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne priſma triangularem habens baſim diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, quę triangulares baſes habent.



Sit priſma cuius baſis quidem triangulum ABC, oppoſitũ autem ipſi DEF. Dico priſma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes. Iungantur enim BD EC CD. Et quoniam parallelogrammum eſt A
34 primi. BED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo E BD ęquale. ergo pyramis cuius baſis triangulum ABD, ver-
5.huius. tex autem punctum C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis E D B triangulum & vertex punctum C. Sed pyramis cuius baſis ED B triangulum & vertex punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijſdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius baſis triangulũ ABD, vertex autem punctũ C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EBC triangulum, & vertex pũctum D. Rurſus quoniam FCBE parallelogrammum eſt, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE eſt ęquale. ergo & pyramis, cuius baſis BEC triangulum, vertex autem punctum D æqualis eſt pyramidi, cuius baſis triãgulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius baſis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D oſtenſa eſt æqualis pyramidi, cuius baſis triãgulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius baſis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis eſt pyramidi cuius baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. Priſma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter ſe ęquales, quæ triangulares baſes habent. Et quoniam pyramis, cuius baſis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijſdem namque planis continentur: pyramis aũt, cuius baſis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars oſtenſa eſt priſmatis, cuius baſis ABC triangulum, & oppoſitum ipſi DEF. & pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum DEF.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualẽ; quoniam etiam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandẽ, diuiditur in priſmata, quę triangulares baſes habent, & quę ipſis opponuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus ſequitur priſmata omnia', quę eadem ſunt altitudine inter ſe eſſe, vt baſes: ſunt enim ea pyramidum eiuſdẽ altitudinis tripla.

Sed & hęc uera ſunt, quę nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum propoſitione. XX. & XXI.

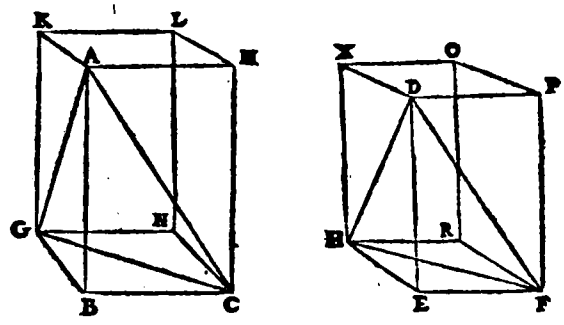
Priſmata omnia, & pyramides, quę in eiſdem, vel ęqualibus baſibus conſtituuntur eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines.

Et

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quę triangulares bases habent in tripla sũt proportione homologorum laterum.



Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem GH puncta. Dico ABCG pyramidẽ ad pyramidem DEFH triplam proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleãtur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis AB CG similis est pyramidi DEFH, erit angulus A B C angulo D E F æqualis, angulusq; GBC æqualis angulo HEF, & angulus A B G angulo D E H. atque est vt A B ad DE, ita BC ad EF, & B G ad EH. Quoniam igitur est vt A B ad D E, ita B C ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione & parallelogrammum B N simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrãmo. Triæ igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia, & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO. Similia autem solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplã habet proportionem eius, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed vt BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sextæ pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplam proportionem habebit eius, quam BC habet ad EF.

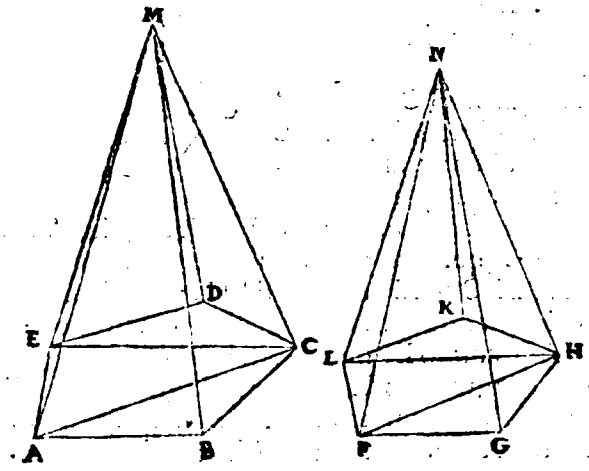
9. diffi. Vndecimi.
1. diffi. sexti.
24. Vndecimi.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multangulas bases habent inter se esse in tripla proportione homologorum laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habẽtes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in pyramide altera triãgulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multiangulam habens basim ad pyramidem, quæ multangulam basim habet. Sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem

ramidem, quæ triangularem baſim habet eſt in tripla proportione homologorum laterum. & pyramis igitur multiangulam habẽs baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologam habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.



Sint enim pyramides ſimiles & ſimiliter poſitae, quae pro baſibus pentagona habeant ABCDEM FGHKLN, ſitq́; pyramidis quidem ABCDEM baſis pentagonum ABCDE, & uertex punctum M, pyramidis uero FGHKLN baſis pentagonum FGHKL, & vertex N punctum, & ſit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidẽ ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC CE FH HL. & quoniam polygona ſimilia in ſimilia triangula diuiduntur, numeroq́; aequalia, & homologa totis; erit triãgulum ABC ſimile triangulo FGH, triangulumq́; ACE triangulo FHL ſimile; & triangulum CDE triangulo HKL. eſt autem ob pyramidum ſimilitudinem triangulum AMB ſimile triangulo FNG. quare vt MA ad AB, ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH. ex aequali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH, non aliter demonſtrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC ſimile eſt triangulo NFH. eſt autem & triangulum MBC ſimile triangulo NGH ob ſimilitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC & vertex M punctum, ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum FGH, & vertex punctum N: quippe quod ſimilibus triangulis contineantur. Eadem ratione demonſtrabitur pyramis ACEM ſimilis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. ſed pyramis quidem ABCM ad pyramidem FGHN triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc eſt quam AB habet ad FG, eſt enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutãdo vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis autem CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK, hoc eſt quam AB ad FG. Quoniã enim vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex aequali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam conſequentium, hoc eſt pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, hoc eſt ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonſtrare oportebat.

12. 5. huius

9. diff. und.

COROLLARIVM.

Ex his colligitur pyramides ſimiles, quæ multiangulas baſes habent diuidi in pyramides triangulares baſes habentes ſimiles, & numero æquales & homologas totis.

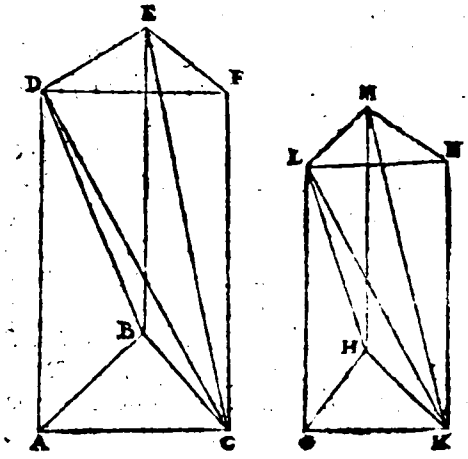
Sed

Sed quod Euclides demonſtrauit in pyramidibus ſimilibus, nos etiam in ſimilibus priſmatibus demonſtrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonſtratũ ſit priſmata ſimilia, quæ triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonſtrare in hunc modum.

THEOREMA. I.

Priſmata ſimilia, quæ triangulares baſes habẽt in pyramides ſimiles, numeroq; æquales diuiduntur, & priſma ad priſma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint priſmata ſimilia, & ſimiliter poſita AE GM & priſmatis quidem AE baſis ſit triangulum ABC, & quod ipſi opponitur triangulum DEF: priſmatis vero GM baſis ſit GHK triangulum & oppoſitum ipſi LMN: ſitq; latus AB lateri GH homologum. Dico priſmata AE GM diuidi in pyramides ſimiles, numeroq; æquales, & priſma AE ad priſma GM triplã habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonſtratis priſma AE diuiſum in tres pyramides æquales inter ſe, & priſma GM ſimiliter diuiſum in totidem pyramides æquales, quæ pyramidibus priſmatis AE ſimiles erunt. Quoniam enim ob priſmatum ſimilitudinem parallelogrammum ABED ſimile eſt parallelogrammo GHML, erit vt DA ad AB, ita LG ad GH: atque eſt angulus DAB æqualis angulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG eſt ſimile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quæ ſunt parallelogrammorum dimidia aliis triangulis, quibus reſpondent ſimilia demonſtrabuntur. Et quoniam vt DC ad CA, ita eſt LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH: erit ex æquali vt DC ad CB, ita LK ad LH. Et ſimiliter demonſtrabitur vt DB ad BC, ita eſſe LH ad HK. quare triangulum DBC ſimile eſt triangulo LHK. Quòd cum triangulum DAB ſimile ſit triangulo LGH, triangulumq; DBC ſimile triangulo LHK, & triangulum DAC ipſi LGK; erit pyramis, cuius baſis triangulum ABC, uertex autem D punctum ſimilis pyramidi, cuius baſis triangulum GHK, & uertex punctum L. Eandem ob cauſſam erit pyramis cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, ſimilis pyramidi cuius baſis MHK triangulum, uertex autem punctum L, & adhuc pyramis, cuius baſis triangulum ECF, & uertex punctum D ſimilis pyramidi, cuius baſis triangulum MKN, & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD ſimilis eſt pyramidi GHKL, ſimiles autem pyramides ſunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AE ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc eſt quam AB habet ad GH; eſt enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & ſimiliter pyramis ECFD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc eſt BC ad HK, hoc eſt AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum priſma AE ad totum priſma GN. ſed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & priſma AE ad priſma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.



9. diff. angulo ſimi.

4. ſexti.

9. diff. undecimi.

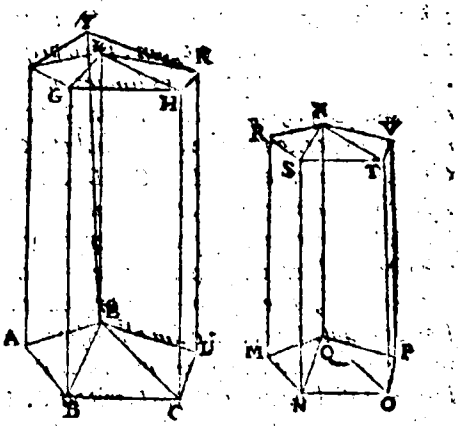
22. quinti.

ALITER. Quoniã igitur pyramis ABCD ſimilis eſt pyramidi GHKL; ſimiles autem pyramides ſunt in tripla proportione homologorum laterum: habebit pyramis ABCD ad pyramidẽ GHKL triplam proportionẽ eius, quam AB habet ad GH. ſed vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita priſma AE ad priſma GM, ſunt enim priſmata pyramidum tripla. ergo & priſma AE

ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam habet EB ad GH. Prismata igitur similia, quae triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. II.

Prismata similia, quę multiãgulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHKL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MV homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quae triangulares bases habent, similia & numero aequalia, & homologa totis; & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iungantur EB EC LG L, H QN QO XS XT. pẽtagonũ igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq; FGHKL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: & pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur unumquodque prismatũ AK MV diuisum in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, perq; LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL similia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq; ECD LHK ipsis QOP XTV similia. Et quũ prisma AK ponatur simile prismati MV, parallelogrammũ ABGF simile erit parallelogrãmo MNSR, & parallelogrammũ AELF simile ipsi MQXR. quare ut LE ad EA, ita XQ ad QM: ut aũt AE ad EB, ita MQ ad QN. ex æquali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq; ut BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est aequalis angulo XQN ob similitudinẽ prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est aequalis angulo XQN, alter eorum maior erit. sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituatur aequalis angulus BET, ut recta linea ET terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto T; & iungantur FT TK. erit pentagonum FGHKT simile pentagono RSTVX. sed & pentagonum FGHKL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHKL simile est pentagono FGHKT. quare angulus FLK aequalis est angulo FTK. sed & maior. quod fieri nõ potest. Non igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inæqualis est angulo XQN. quare necessario est aequalis; & ob id angulus EBG aequalis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ sunt aequales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prisma AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSX; similibus enim planis continentur. est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QPVX. ergo & prisma BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositum LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulum QNO, et ipsi oppositum XST, & denique prisma CL cuius basis triangulum ECD, & oppositum ipsi LSK, simile est prismati OX, cuius basis triangulum QOP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autem, prismata

10. sexti.

9. diffi. unde cimi.

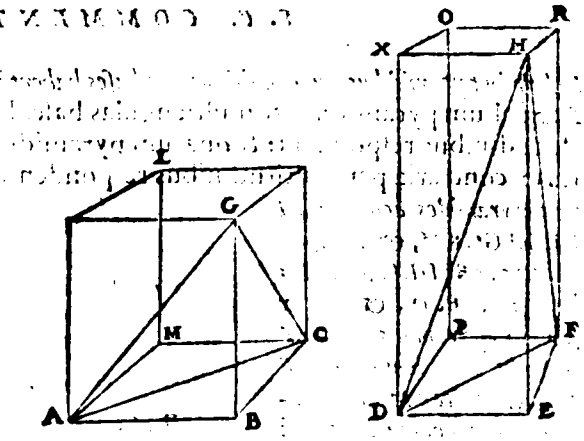
1. diffi. sexti.

14. primi.

priſmata, quae triangulares baſes habent ſunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34. propoſitionem antecedentis libri, & proxime aliter demonſtrauimus. priſma igitur AL ad priſma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN, & priſma BH ad priſma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc eſt AB ad MN. priſma autem CL ad priſma OX triplam proportionem habet eius, quam habet CD ad OP, hoc eſt AB ad MN ut ſupra demonſtrauimus. homologa enim latera omnia inter ſe eandem habent proportionem. Quare vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Vt igitur priſma AL ad priſma MX, ita omnia priſmata ad omnia priſmata, hoc eſt totum priſma AK ad totum priſma MV. priſma autem AL ad priſma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN. ergo & priſma AK ad priſma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur priſmata, quae multiangulas habent baſes in ſimilia priſmata triangulares baſes habentia diuidantur, numeroq; aequalia, & homologa totis; & priſmo ad priſma triplum proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonſtrare.

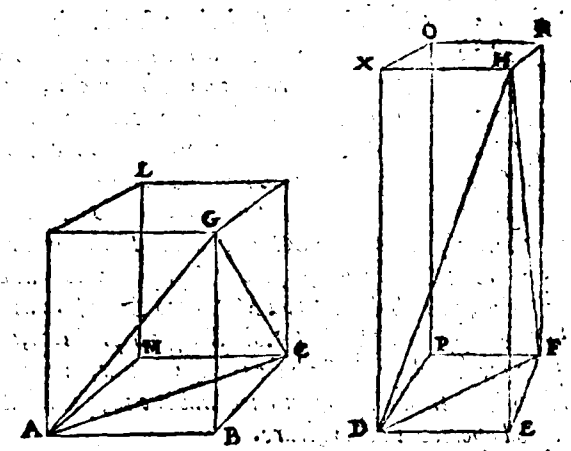
THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Aequalium pyramidum, & triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales.



Sint enim pyramides æquales, quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices vero GH puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, & vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Cõpleantur enim BGML EHPO ſolida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG eſt æqualis pyramidi DEFH, atque eſt pyramidis quidem ABCG ſextuplum BGML ſolidum, pyramidis vero DEFH ſextuplum ſolidum EHPO; erit ſolidum BGML. ſolido EHPO æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed ut BM baſis ad baſim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita ſolidi EHPO altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt altitudini pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt altitudini pyramidis ABCG. eſt igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Sed pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus, ſitq; vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem eſſe. ijſdem enim conſtructis, quoniam vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramimidis ABCG; vt autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrãmũ ad parallelogrãmũ EP: erit & vt parallelogrãmũ BM ad EP parallelogrãmũ, ita pyramidis DEFG altitudo ad altitudinẽ pyra

15. quinti. 34. undecimi. 15. quinti. 15. quinti.

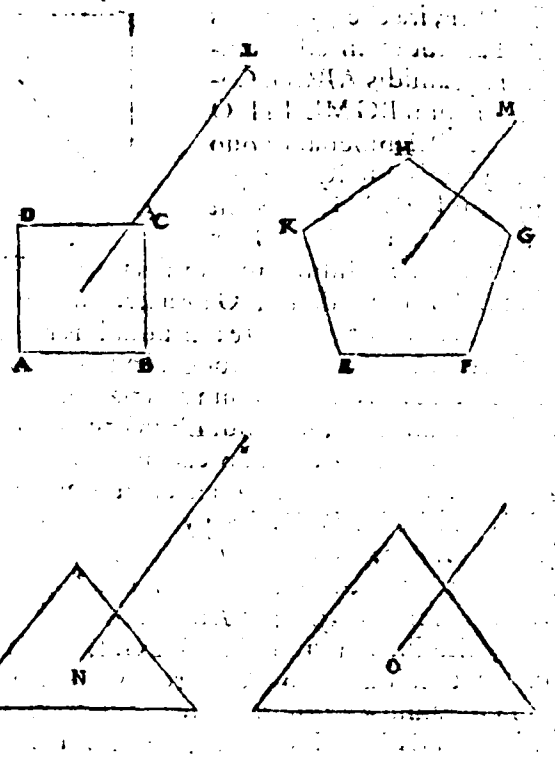


midis ABCG. Sed pyramidis quidē DEFH altitudo eadē eſt altitudini ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt altitudini ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur vt BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO ſitidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK eſt æqualis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent illæ ſunt æquales. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & in pyramidibus, quæ multiangulas baſes habent idem demonſtrabitur hoc modo.

Aequalium pyramidum & multiangulas baſes habentium, baſes ex cōtraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum multiangulas baſes habentiū baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales.



Sint pyramides aequales ABCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL baſis ſit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM ſit baſis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: hoc eſt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinē pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxv. ſexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rurſus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis æquealta pyramidi ABCDL: à triangulo autem O erigatur alia pyramis aequealta pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: ſunt enim in baſibus aequalibus, & æqualem habent altitu-

6. huius.

dinem

dinem: & ſimili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyramidi O eſt aequalis. aequalium autem pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumque enim vtrique eſt aequale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc eſt altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed ijſdem ſtantibus ſit ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem eſſe. eſt enim ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL, hoc eſt ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illae ſunt aequales. aequalis igitur eſt pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM eſt aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas baſes habentium, & reliqua. quod demonſtrare oportebat.

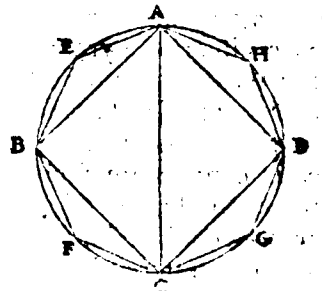
COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur priſmatum omnium æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: & quorum priſmatum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea eſſe æqualia; priſmata enim in eiſdem baſibus conſtituta, & eadem altitudine ſunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat enim conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus nõ ſit triplus coni, vel maior erit, quàm triplus, vel minor. Sit primũ maior quàm triplus; & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius eſt, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æquealtũ cylindro, quod quidem priſma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti: & ſunt ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æquealta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt vt baſes, & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulũ ABCD deſcribitur, atq; eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulũ ABCD. priſma igitur erectũ à quadrato ABCD æquealtũ cylindro dimidio cylindri eſt maius. ſecentur circũferentiæ AB BC CD DA bifariã in punctis EFGH; & AE EB BF FC CG GD DH HA iungantur. Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit, vt ſuperius demonſtratũ eſt. erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA priſmata æquealta cylindro. ergo & vnumquodque erectorum priſmatum maius eſt dimidio portionis cylindri quæ ad ipſum eſt, quoniam ſi per puncta EFGH parallelę ipſis AB BC CD DA ducãtur, & compleatur in ipſis AB BC CD DA parallelogramma: à quibus ſolida parallele-

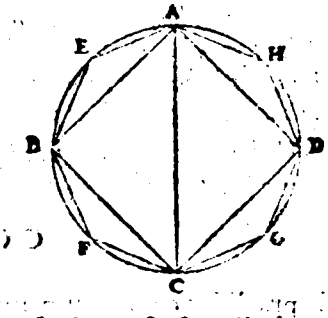


Ex coroll 7. huius.

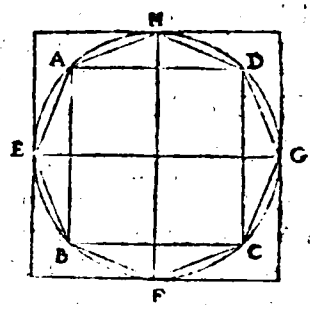
parallelepipeda æqualta cylindro erigantur: erunt vniuscuiusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora sunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes prismata æqualta cylindro, & hoc semper facientes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri, quæ sint minores excessu; quo cylindrus ipsius coni triplum superat. reliquantur iam & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cuius basis quidem polygonū AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quę cylindri, maius est, quàm triplum coni. Sed prisma cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum est pyramidis, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem, qui coni. & pyramis igitur, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idē qui coni, maior est cono, qui basim habet ABCD circulum. Sed & minor; ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico insuper neq; cylindrum minorem esse, quàm triplum coni, si enim fieri potest, sit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri. Describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius est quā dimidiū ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticē habēs eundē quē conus. pyramis igitur erecta maior est quàm coni dimidium: quoniam, vt ante demonstrauimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æqualta cono, quæ & prismata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto, etenim inter se sunt vt bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur, cuius basis quadratum ABCD, dimidia est eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, maior est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cuius basis ABCD quadratum, vertex autem idē qui coni, maior est, quàm coni dimidium. secentur circumferentię AB BC CD DA bifariā in punctis EFCH. & iungātur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius est, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior est, quàm dimidium coni portionis, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandē quasdam coni portiones, quę maiores erunt excessu, quo conus terriam cylindri partem superat. Relinquantur & sint, quę in ipsis AE EB BF FC CG DH HA. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum AEBFCGH, & uertex idem qui coni, maior est, quàm tertia cylindri pars. sed pyramis cuius basis polygonum AEBFCDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis, cuius basis polygonū AEBFCDH, altitudo autem eadem quę cylindri. prisma igitur, cuius basis AEBFCGH polygonum, & altitudo eadem, quę cylindri, maius est cylindro, cuius basis

Ex 1. decimi.

Ex corol. 7. huius.



5. quinti.



est

est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est, quàm triplus coni. ostensum autem est neque maiorem esse, quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus est tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eadē, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

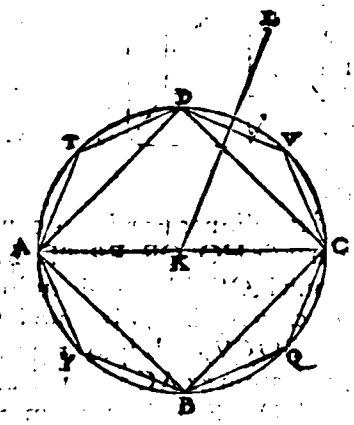
Eodem modo illud etiam demonstrabitur in conis & cylindris scalenis.

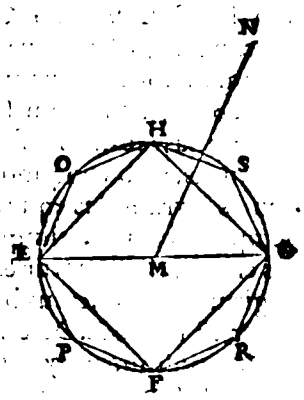
COROLLARIVM.

Ex quibus constat omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scaleni, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

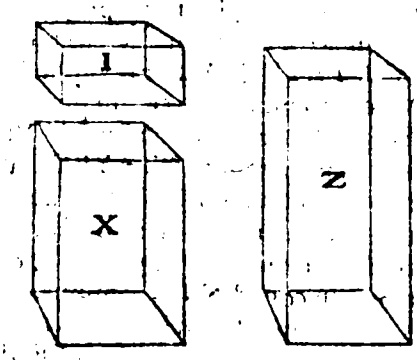
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

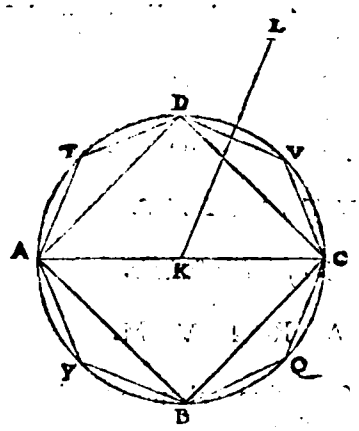
Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.

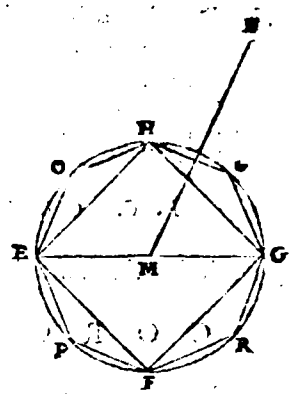




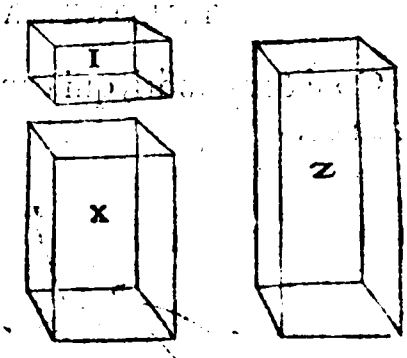
Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. si enim non ita sit; erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidū minus cono EN, vel ad maius. sit primū ad minus, quod sit X, & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratū EFGH. ergo quadratum maius est, quàm dimidium circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æqualta cono. pyramis igitur erecta maior est, quàm coni dimidium; nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æqualtam cono, erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptę dimidia; etenim inter se sunt vt bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, uertex autem







autem idem qui coni, maior eſt quàm coni dimidium. ſecentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis OPRS; & OE EP PF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius eſt, quàm dimidiũ portionis circuli, in qua conſiſtit. erigatur ab vnoquoque triangulorum HOE EPF FEG GSH pyramis æquealta cono. ergo & vnaquæque erecta rum pyramidum maior eſt, quàm dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam; & iũgentes rectas lineas, & ab vnoquoque triãgulorum erigentes pyramides æquealtas cono,



atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ ſolido I minores erunt. relinquantur & ſint quę in ipſis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius baſis polygonũ HOEPFRGS, altitudo autẽ eadẽ, quę coni, maior eſt ſolido X. Deſcribatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS ſimile & ſimiliter poſitum polygonum DTAYBQCV, & ab ipſo erigatur pyramis æquealta cono AL. Quoniam igitur eſt vt quadratum ex AC ad quadratum ex EG ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; vt autem quadratum ex AC ad quadratũ ex EG, ita ABCD circulus ad circulũ EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. ſed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X ſolidum: & vt polygonũ DTAYBQCV ad polygonũ HOEPFRGS, ita pyramis cuius baſis DTAYBQCV polygonũ, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & uertex punctum N. Vt igitur conus AL ad X ſolidum, ita pyramis, cuius baſis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L. ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & uertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidem, quæ in ipſo eſt, ita ſolidum X ad pyramidẽ, quę in cono EN. conus autem AL maior eſt pyramide, quæ in ipſo. maius igitur eſt ſolidum X pyramide, quæ in cono EN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt AL conus ad ſolidum aliquod minus cono EN. Similiter demonſtrabitur neque vt EFGH circulus ad circulum ABGD, ita eſſe conum EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. Dico præterea neque eſſe vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod ſolidum maius cono EN. Si enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum maius, quod ſit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit ſolidum Z ad AL conum. ſed ut ſolidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulũ ABCD, ita conus EN ad aliquod ſolidum

minus

v. huius.

2. huius.

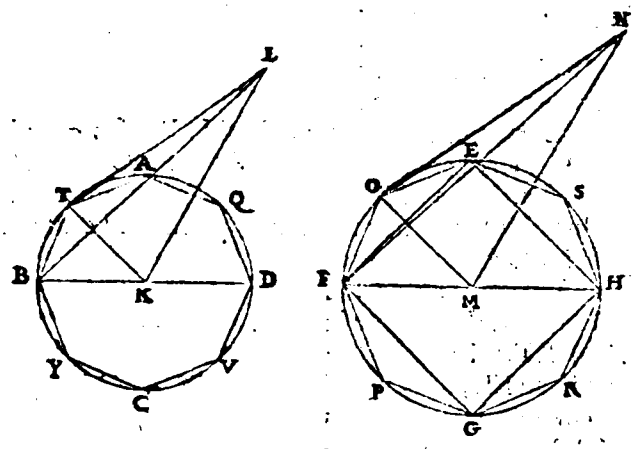
minus cono AL,quod fieri non posse ostensum est. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus.ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum.sed vt conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim vterque utriusque triplus.& ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH,ita in ipsis cylindri æquealti conis.ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinẽ inter se sunt ut bases.quod demonstrare oportebat. 15.quinti. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

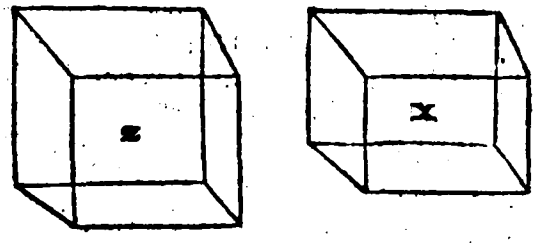
Et hoc in conis & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

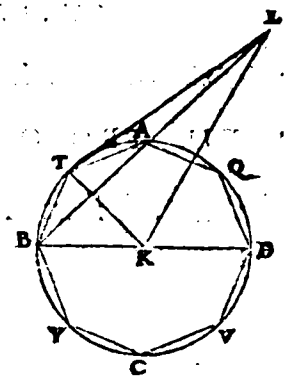


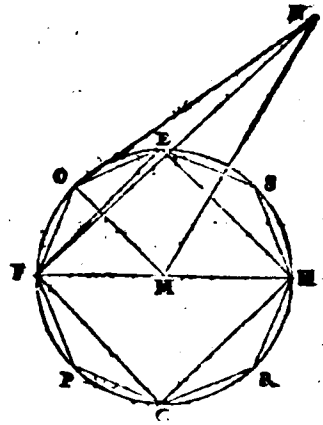
Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH;diametri vero basium BD FH: & axes conorum,vel cylindorum HK. MN. Dico conũ cuius basis ABCD circulus,vertex autẽ punctum L ad conũ, cuius basis circulus EFGH,vertex autem N punctum, triplam habere proportionẽ eius, quã habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius,quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem,uel ad maius. habeat primum ad minus,quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius est,quàm dimidium EFCH circuli.& erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono.ergo erecta pyramis maior est, quàm coni dimidia. Itaque secetur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungãtur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorũ EOF FPG GRH HSE maius est quàm dimidium portionis circuli EFGH, in qua consistit. & eriga

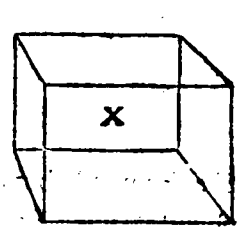


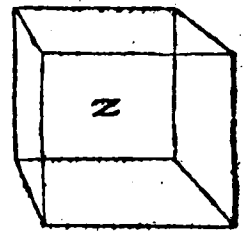
tur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem uerticẽ habẽs, quem conus.ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est quàm dimidia portionis coni,quæ est ad ipsam.secantes igitur reliquas circumferentias bifariam,iũgentesq; rectas lineas,& ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem,quem conus; atque hoc semper facientes tãdem relinquemus quasdam coni portiones,quę minores erũt excessu,quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. Relinquãtur & sint quę in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE.

HIS SE. Reliqua igitur pyramis, cuius basis quidem polygonum EOFPGRHS, uer tex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD po lygono EOFPGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus; & triangulorum continē tium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, vnū sit LBT; triangulorū vero continentiū pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonū, & vertex punctū N, vnum sit NFO, & iūgātur KT MO. Qm igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit vt BD ad FH, ita KL axis adaxē MN. vt aūt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & ut BK ad FM, ita KL ad MN, & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. perpēdicularis enim vtraque est, & circa æqualesan gulos BKLFMN latera sūt proportionalia. Simile igi tur est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est vt BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quę pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K centrū, eadem est pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT triāgulo FMO simile. Et quoniā ostensum est vt BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis aūt est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recta enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. Quòd cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem uero triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO. Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit vt LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triangulum BKT, uertex autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triangulum, & uertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quę triangulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDVCY ad K, à punctis vero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdē habentes, quos coni, ostendemus & vnāquamque pyramidū eiusdē ordinis ad vnaquāq; alterius ordinis triplā proportionē habere eius, quā habet BK latus homologū ad homologū latus FM, hoc est quā BD ad FH. Sed vt vnū antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia









quentia. est igitur & vt BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidē cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD uertex autem punctum L ad solidum X triplam proportionem habere eius, quam BD ad FH. Vt igitur conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quę in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonū, uertex aūt punctū L; ita solidum X ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N. dictus autem conus maior est pyramide, quę in ipso; etenim eam comprehendit. maius igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRHS, uertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionē habet eius quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum maius cono EFGHN triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. si enim fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. conuertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD; ut autem solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplā proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existēs basi, in qua conus, & ipsi æqualtus coni triplus est. cum ostē sum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habē eis, & aequalem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionē habebit eius, quam BD habet ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorū, quæ sunt in basibus. quod demonstrare oportebat. 15. quint. 10. huius.

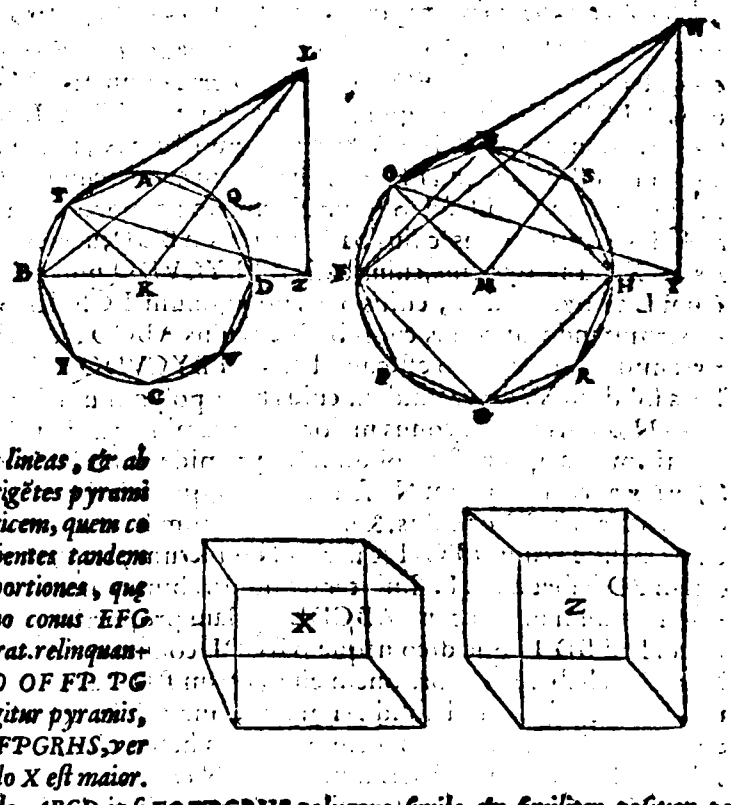
F. C. COMMENTARIVS.

Præcedens demonstratio in conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos uniuerse ad omnes tam rectos quam scalenos accōmodabimus hoc pacto.

Similes coni & cylindri omnes interse in tripla sunt proportionem diametrorū, quę sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quae bases secent, sintq; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quae circulorū diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, et vertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quàm dimidium EFGH circuli. Erigatur à quadrato EFGH pyramis aequealta cono, quae maior erit, quàm coni dimidia, & secentur EF FG GH HE circumferentiae bifariam in punctis OPRS, iungantur q; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est, quàm

dimidiã portionis circuli EFGH, in qua cõſiſtit: & erigatur ab vnoquoque triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus verticem habens. ergo et vnaquæque erectarũ pyramidũ maior eſt, quã dimidia coni portionis, q ac eſt ad ipſam. ſecãtes igitur reliquas circũferentias bifariam, iungẽtesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus: atque hoc ſemper facientes tandem relinquemus quaſdã coni portiones, quæ minores erunt exceſſu, quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis EO OF FP PG GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis, cuius baſis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N ſolido X eſt maior.



Deſcribatur etiam in circulo ABCD ipſi EOFPGRHS polygono ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ATBYCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundem, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius baſis polygonum ATBYCVDQ; & vertex punctum L, vnum aliquod ſit LBT: triangulorũ vero continentium pyramidem, cuius baſis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum ſit NFO: & KT MO iungantur. Quoniã igitur conus ABCD ſimilis eſt cono EFGH, erit ex diffinitione conorum ſimilium, quã nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axẽ: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atque eſt angulus BKL æqualis angulo FMN ex eadem diffinitione conorum ſimilium. cum igitur circa æquales angulos BKL FMN latera ſint proportionalia; erit BKL triangulum ſimile triangulo FMN. Et quoniam vt BK ad KT, ita eſt FM ad MO; anguli autem BKT eſt æqualis angulo FMO: etenim quæ pars eſt angulus EHT quattuor rectorũ, qui ſunt ad centrum K, eadem eſt pars angulus FMO quattuor rectorum, quæ ſunt ad M centrum. rurſus erunt circa æquales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO eſt ſimile. Itaque quoniam eſt vt BK ad KL, ita FM ad MN; æqualis autem eſt BK ipſi KT, & FM ipſi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN. & ſunt in conis rectis anguli TKL OMN inter ſe æquales, quòd recti ſint. ergo in ipſis cum circa æquales angulos TKL OMN latera ſint proportionalia; erit triangulum LKT ſimile triangulo NMO. At in conis ſcalenis hoc modo demonſtrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis baſium rectæ lineæ LΦ NΥ, quæ cadent in communes planorum & baſium ſectiones BD FH ex 38. antecedentis libri. & iungantur TΦ OΥ. Cum igitur ex diffinitione conorum ſimilium angulus LKΦ ſit æqualis angulo NMΥ, & anguli LΦK NΥM utrique recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNΥ æqualis, & triangulum LΦK ſimile triangulo NΥM. rurſus cum angulus EKT ſit æqualis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ æqualis erit reliquo OMΥ. eſt autem ob ſimilitudinem triangulorum LΦK NΥM, ut ΦK ad KL, ita ΦM ad MN, & ob ſimilitudinem triangulorũ BKL FMN, ut LK ad KB, hoc eſt ad KT ipſi æqualem, ita NM ad MF, hoc eſt ad MO. ergo ex æquali vt ΦK ad KT, ita ΥM ad MO. & cum circa æquales angulos TKΦ OMΥ latera ſint proportionalia, erit & triangulum KTΦ triangulo MOΥ ſimile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita NΥ ad ΥM: & vt ΦK ad ΦT, ita ΥM ad MO. quare ex æquali vt LΦ ad ΦT, ita NΥ ad ΥO. & ſunt anguli LΦT NΥO

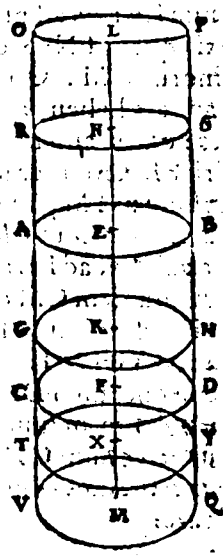
inter

inter ſe aequales, quòd vtrique recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum rectè eſt vna igitur circa aequales angulos LΦT NΥO latera ſint proportionalia, ſequitur triangula quoq; LTΦ NOΥ inter ſe ſimilia eſſe. ideoq; vt LT ad TΦ, ita NO ad OΥ: & vt TΦ ad TK, ita OΥ ad OM. ex aequali igitur vt LT ad TK, ita eſt NO ad OM, demonſtratum autem eſt vt LK ad KT, ita eſſe NM ad MO, quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN. rurſus igitur ex aequali vt TL ad LK, ita eſt ON ad NM. quòd cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, aequiangula ſunt, & ob inter ſe ſimilia. Itaq; quoniam ob ſimilitudinem triangulorum BKL FMN eſt vt LB ad BK. ita NF ad FM, & ob ſimilitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO, erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN. Rurſus quoniam ob ſimilitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita eſt NO ad OM, & ob ſimilitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF; ex aequali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. oſtenſum autem eſt & vt TB ad BL, ita OF ad FN, rurſus igitur ex aequali vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera ſunt proportionalia, ob eamq; cauſſam & aequiangula & inter ſe ſimilia erunt. pyramis igitur, cuius baſis triangulum BKT, vertex autem punctum L ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum FMO, & vertex N punctum, ſimilibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem ſimiles in tripla ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua ſimiliter vt in antecedente demonſtrabimus. 6. vnde

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH ſecetur oppoſitis planis AB CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita eſſe EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipſi quidem EK axi exponantur æquales quotcumq; EN NL; ipſi vero FK æquales quotcumque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipſis AB CD parallela; atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipſis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligãtur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter ſe ſunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter ſe vt baſes: baſes autem æquales ſunt. ergo & cylindri PR RB BG ſunt æquales. Quòd cum axes LN NE EK inter ſe æquales ſint, itẽq; cylindri PR RB BG inter ſe æquales; ſitq; ipſorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipſorum PR RB BG: quotuplex eſt axis KL, ipſius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratione & quotuplex eſt MK axis ipſius axis KF, totuplex eſt & QG cylindrus cylindri GD. & ſi quidem axis LK ſit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si autem axis LK maior ſit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, & ſi minor minor. quattuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD ſumpta ſunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis uero KF, & cylindri GD æquemultiplicia, axis ſcilicet KM, & GQ cylindrus, & demonſtratum eſt ſi LK axis ſuperat axem KM & PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ, & ſi æqualis æqualis, & ſi minor minor. eſt igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. quod demonſtrare oportebat.



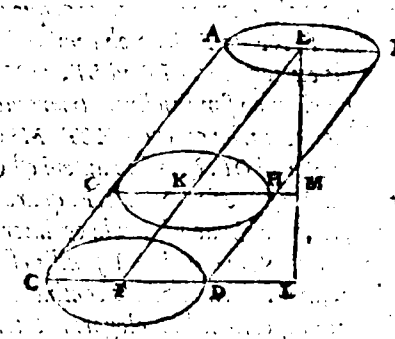
11. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro ſcaleno; quod eadem ratione demonſtrabitur.

Ex quibus conſtat ſi quilibet cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita eſſe altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

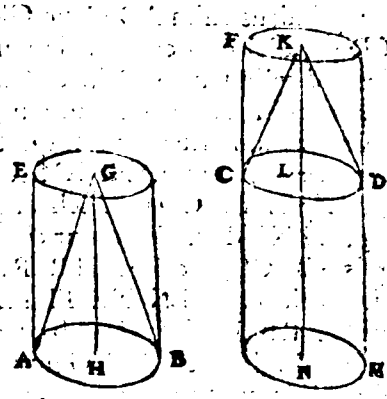
In cylindris enim rectis illud perſpicuum eſt, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in ſcalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad baſis planum perpendiculari, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duę rectę lineę EF EL ſecantur à pla-
15. undecimi *nis parallellis, in eaſdem proportiones ſecabitur. quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea ut B G cylindrus ad cylindrum G D, ita cylindri B G altitudo EM ad ML altitudinem cylindri G D, quod propoſitum fuerat demonſtrandum.*



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri inter ſe ſunt vt altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB CD cylin-
* dri EB FD. Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe G H axem ad axem K L. producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturq; ipſi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus C M. Quoniam igitur cylindri EB CM
11. huius. eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes: baſes autem ſunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter ſe æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM plano ſecatur CD, oppoſitis planis
Ex antecedente. parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur vt EB cylindrus ad cylindrũ F D, ita axis GH ad KL axem: vt autem EB cylindrus
15. quinti. 5. huius. ad cylindrum FD; ita ABC conus ad conũ CDK; cylindri enim ſunt cõorum tripli. ergo & vt GH axis ad axem KL, ita eſt ABG conus ad conum C D K, & cylindrus EB ad F D cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri inter ſe ſunt, ut altitudines. quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

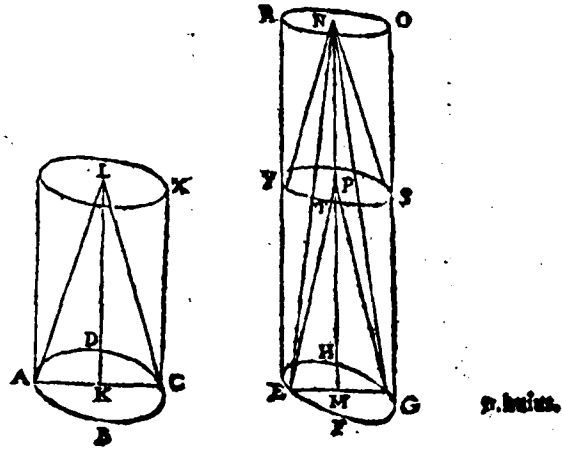
* Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL] *Hoc eſt ita eſſe altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, altitudo ipſa axis eſt, ſine ab axe determinatur; in ſcalenis uero non item. ſed tamen nihilominus demonſtrabitur conos & cylindros in aequalibus baſibus conſtitutos inter ſe eſſe vt axes, & ob id vt eorum altitudines ex iis, quae nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus

altitudinibus reſpondent, & quorum conorum & cylindrorũ baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni & cylindti, quorum baſes quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum ſunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudiné MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non æqualis. Sit primum æqualis: atque eſt AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter ſe ſunt vt baſes. æqualis igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH, ac propterea ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. eſtq; vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed maior ſit MN, & auferatur ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM, & per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus æqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrũ. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrũ, ita MN altitudo ad altitudinẽ MP. nam cylindrus EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autẽ eſt MP altitudo altitudini KL. quare vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent.



3. huius.

3. huius.

15. huius.

Sed cyiindrorũ AX EO baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinẽ. Dico AX cylindrũ cylindro EO æqualẽ eſſe. ijſdẽ enim cõſtructis quoniã vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis eſt altitudini MP: erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. eſt igitur vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt æqualis. ſimiliter autem & in conis. quod demonſtrare oportebat.

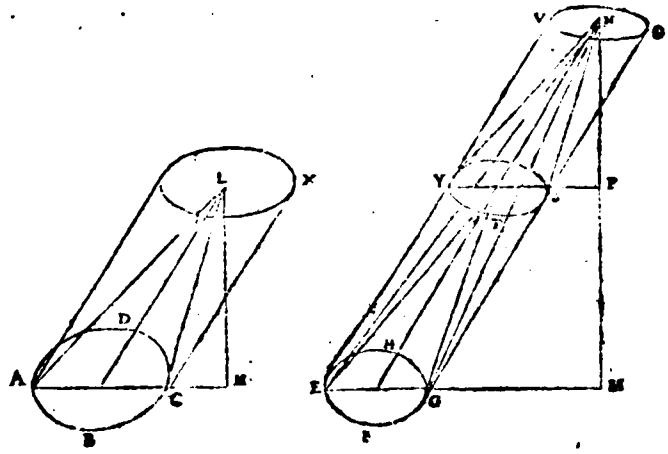
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonſtrauit. Sed & in omnibus demonſtratur hoc modo.

Sint æquales coni, & cylindri ſiue recti ſiue ſcaleni, quorum baſes circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere; hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM ſunt æquales vel inæquales; ſi æquales, cum æquales ſint cylindri, erunt & baſes æquales inter ſe: cylindri enim & coni qui

eandem

eandem habẽt altitudinẽ, inter ſe ſunt vt baſes. quare baſes ex contraria parte altitudinibus reſpõdẽt. Si vero altitudines nõ ſint aequales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur PM aequalis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum ſecans, oppoſitis planis parallelum TYS, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaque quoniam cylindrus AX eſt aequalis cylindro EO, & alius cylindrus eſt ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed



11. huius. 13. huius. *vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFCH baſim, cum eandem habeant altitudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP; cylindrus enim EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita eſt NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur baſis ABCD ad EFGH baſim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem eſt altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſt altitudo NM ad LK altitudinem.*

Sed cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondeant, ſitq; vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO aequalem eſſe. iiſdem enim conſtructis quoniam vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK eſt aequalis ipſi PM altitudini; erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quòd eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO eſt aequalis. ſimiliter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quorum conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt aequales. quod demonſtrare oportebat.

Sed & illud uerum eſt, quod nos demonſtrauimus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus ad propoſitionem XI.

Cylindri omnes, et coni inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium & ex proportione altitudinum.

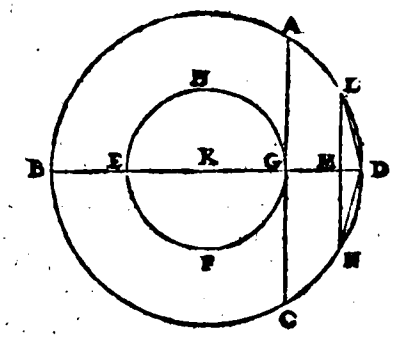
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum exiſtẽtibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum deſcribere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum deſcribere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipſi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam ſecantes, & eius dimidium rurſus bifariam, & hoc ſemper facientes tandem relinquemus

circumferentiam

circumferentiam minorem ipſa AB. Relinquatur, ſitq; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iunganturq; LD DN LN. ergo LD ipſi DN eſt æqualis. Et quoniam LN parallela eſt AC, & AC tangit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. Quòd ſi ipſi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonũ æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. quod facere oportebat.

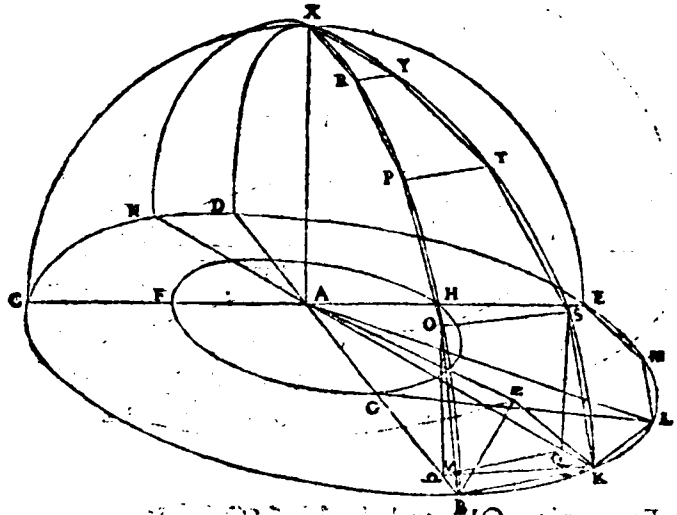


F. C. COMMENTARIVS.

Ergo LD ipſi DN eſt æqualis] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, quare & biſariam ipſam ſecabit. atque erit LM aequalis MN. cum igitur duae LM MD duabus NM MD aequales ſint & angulos aequales contincant, nempe rectos: erit baſis LD baſi LN aequalis.* 3. tertii. 4. primi.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus in maiori ſolidum polyhedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.



Intelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A. oportet in maiori ſphæra deſcribere ſolidum polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. ſecentur ſphæræ plano aliquo per centrum ducto, erunt ſectiones circuli, quoniam diametro manẽte, & ſemicirculo circumducto, ſphæra facta eſt. ergo in quacumque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planũ in ſuperficie ſphęræ circulum efficiet, & conſtat circulum maximum eſſe, cùm diame-



16. tertij.

ter ſphæræ,quæ & ſemicirculi,& circuli diameter eſt, maior ſit omnibus rectis lineis,quæ in circulo vel ſphæra ducũtur.ſit igitur in maiori quidem ſphęra circulus BCDE;in minori autem circulus FGH:& ducantur ipſorum duæ dimetri ad rectos inter ſe angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus B CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum deſcribatur,nõ tãgẽs minorẽ circulũ FGH;cuius latera ſint in BE circuli quadrãte BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N:& à puncto A plano circuli BCD E ad rectos angulos cõſtituatur AX; quæ ſuperficiei ſphærę in puncto X occurrat: & per AX,& vtramque ipſarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiẽt in ſuperficie ſphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, & ſint in diametris BD K N eorum ſemicirculi BXD KXN. Quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli B CDE, erunt omnia plana,quæ per ipſam XA tranſeunt ad planum circuli BCDE re cta.quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum. Et quoniam ſemicirculi; BED BXD KXN æquales ſunt,in ęqualibus enim cõſiſtũt BD KN diametris;erũt & eorũ quadrantes BE BX KX inter ſe æquales.quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante BE,tot erunt & in quadrantibus BX KX æqualia ipſis BK KL LM ME. Deſcribantur & ſint BO OP PR RX KS ST TY YX: iungaturq; SO TP YR,& ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadẽt hæ in communes planorum ſectiones BD KN,quoniam & plana ſemicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta ſunt. Itaque cadant,ſintque OVSQ:& V Q iungatur. Cum igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN æquales circumferẽtiæ ſumptę ſint BO KS,& ductę perpendiculares OV SQ: erit OV quidem ipſi SQ æqualis,BV vero ęqualis KQ. eſt autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA eſt ęqualis. Vt igitur BV ad VA,ita KQ ad QA,ideoq; VQ ipſi BK parallela eſt. Quod cum vtraque ipſarum OV SQ recta ſit ad circuli BCDE planũ, erit OV ipſi SQ parallela. oſtenſa autem eſt & ipſi ęqualis. ergo QV SO æquales

Ex antecedente.

18.undecimi

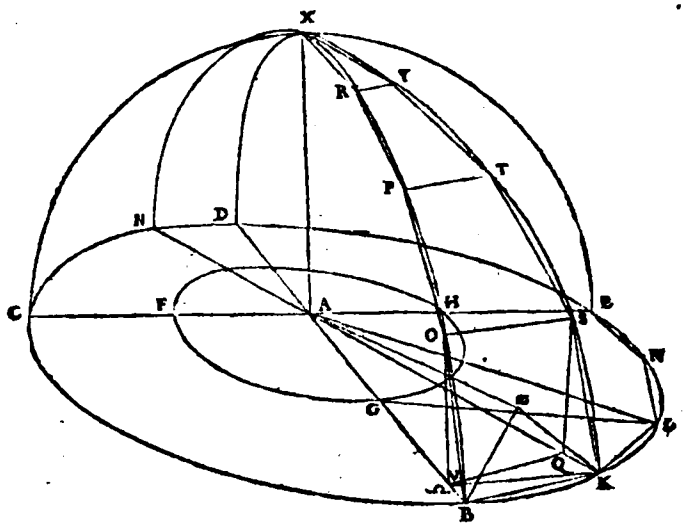
B

28.undecimi.

6.undecimi.

33.primi.

2.ſexti.



ſunt & parallelæ. Et quoniam QV parallela eſt ipſi SO,ſed & parallela ipſi KB; erit & SO ipſi KB parallela:& ipſas coniungnnt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterũ eſt in vno plano:nã ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in vtraque ipſarum quæuis pũcta ſumantur,quæ dicta puncta coniungit recta linea iſi eodem eſt plano, in quo parallelę. Et eadem ratione vtraque ipſorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno ſunt plano. eſt autem in vno plano & triangulum YRX. Si igitur à pũctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida

9.undecimi.

C

8.undecimi.



ſolida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus compoſita, quarũ baſes quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autẽ punctum A. quòd ſi in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem conſtruamus, & in reliquis tribus quadrãtibus, & in reliquo hemiſphęrio conſtituetur figura quædam polyhedra in ſphęra deſcripta, & compoſita ex pyramidibus, quarum baſes ſunt quadrilatera iam dicta, & YRX triãgulum; & quæ eiuſdem ordinis ſunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tãgere ſuperficiem minoris ſphæræ, in qua eſt circulus FGH. Ducatur à puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta eſt ad quadrilateri KBSO planum, et ad omnes rectas lineas, quę ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipſarum BZ ZK eſt perpendicularis. et quoniam AB eſt æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK æquale, et ſunt quadrato quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus eſt: quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK eſt æquale; ideoq; recta linea BZ rectę ZK æqualis. Similiter oſtendemus, & quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipſarum BZ ZK æquales eſſe. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipſarum ZB ZK deſcriptus, etiam per puncta OS trãſibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniã KB maior eſt, quàm QV, æqualis autem QV ipſi SO; erit & KB, quàm SO maior. Sed KB eſt æqualis vtrique ipſarũ KS BO. ergo vtraque KS BO, quàm SO eſt maior. cum igitur in circulo quadrilaterum ſit KBOS, & æquales ſint KB BO KS, & minor OS; ſitq; ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KΩ. Et quoniam BD minor eſt, quã dupla ipſius DΩ; atq; eſt vt BD ad DΩ, ita rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ ad rectangulum, quod DΩ ΩB cõtinetur, nempe deſcripto ex BΩ quadrato; & completo parallelogrãmo in ipſo ΩD. quare & rectangulũ contẽtũ DB BΩ minus eſt, quã duplum eius, quod DΩ ΩB continetur: & iuncta KD, quod DB BΩ continetur eſt æquale quadrato ex KB; & quod continetur DΩ ΩB æquale quadrato ex KΩ. quadratum igitur ex KB minus eſt, quàm duplum quadrati ex KΩ. ſed quadratum ex KB maius eſt, quàm duplum quadrati ex BZ. ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BZ eſt maius. Et quoniam BA eſt æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK æquale. & ſunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato autem ex AK æqualia quadrata ex KΩ ΩA. quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex KΩ ΩA ſunt æqualia; quorum quadratum ex KΩ maius eſt quadrato ex BZ. ergo reliquum ex ΩA quadratum quadrato ex ZA eſt minus; ac propterea recta linea AZ maior, quàm recta AΩ. multo igitur maior eſt AZ, quàm AG. atque eſt AZ quidem ad vnam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphęræ. quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangit.

5. diffi. undecimi.

49. primi.

D E F G H K

Oſtendendum autem aliter & expeditius, maiorem eſſe AZ, quàm AG. Ducatur à puncto G ipſi AG ad rectos angulos GL, & AL iungatur. Itaque circumferentiã EB bifariam ſecantes, & dimidiam ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCD, quæ ſubtenditur æquali ipſi GL. relinquatur, ſitq; circumferentia KB. minor igitur eſt recta linea KB, quàm GL. Et quoniã in circulo eſt BKSO quadrilaterum, & ſunt æquales OB BK KS, & minor OS; erit angulus BZK obtuſus: ideoq; BK maior, quàm BZ. ſed GL quàm BK eſt maior. multo igitur maior eſt GL, quàm BZ, & quadratum ex GL quadrato ex BZ maius. & cum æqualis ſit AL ipſi AB, erit & quadratum ex AL quadrato ex AB æquale. ſed quadrato quidem ex AL, æqualia ſunt quadrata ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia ſunt; quorum quadratum ex BZ minus eſt quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius eſt quadrato ex AG. & ob id recta linea ZA, quã recta AG eſt maior. Duabus igitur ſphæris circa idẽ

A B

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum descriptum est, minoris sphæræ superficiem non tangens. quod facere oportebat.

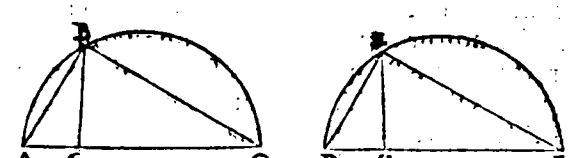
COROLLARIVM.

Quod si etiam in altera sphæra, solido polyhedro descripto in sphæra ABCDE simile solidũ polyhedrum describatur, habebit solidũ polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplam proportionem eius, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphęrę diametrũ. diuisis enim solidis in pyramides numero æquales, & eiusdem ordinis; erunt pyramides similes, similes autem pyramides inter se in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphæra eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphærę circa centrum A existentis ad eam, quę est ex centro alterius sphęræ. Similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiusdem ordinis, quę sunt in altera sphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quę est ex cẽtro alterius sphærę. Et vt vnũ antecedentium ad vnũ consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphęrę, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphærę diametrum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt sectiones circuli.] *Hoc vniuersè à Theodosio demonstratur in prima propositione sphæricorum, nempe quomodocunque plano sphæra secetur, semper sectiones fieri circulos.*

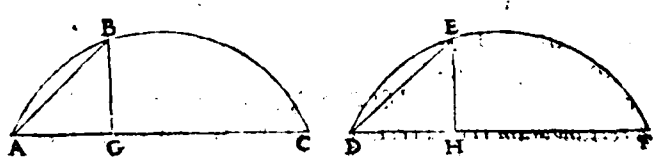
B Erit OV quidem ipsi SQ æqualis. BV vero æqualis KQ.] *Sint enim duo semicirculi æquales ABC DEF, sumanturq; æquales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi EH, & AG ipsi DH æqualem esse. Quoniam enim circumferentia AB est æqualis circumferentiae DE, quae sunt æqualium circulorum, erunt rectae lineae AB DE inter se æquales, & eadem ratione æquales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus æqualis recto DEF. cum igitur circa æquales angulos latera sint proportionalia*



19. xiij.

ſia, erit triangulum ABC ſimile triangulo DEF. ſed triangulum ABG eſt ſimile triangulo ABC, ergo & ipſi DEF. triangulum autem DEH eſt ſimile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triangulo DEH eſt ſimile. ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad EH. aequalis autem eſt AB ipſi DE. ergo & BG ipſi EH eſt aequalis. & eodem modo demonſtrabitur AG aequalis ipſi DH, quod demonſtrare oportebat. ſed & illud vniuerſe in omnibus portionibus demonſtratur ſequenti lemmate. 6.ſexti. 8.ſexti. 9.ſexti. 14.quinti.

Sint ęquales portiones ęqualiũ circulorũ ABC DEF; ſumanturq; circumferẽtiæ ęquales AB DE: & à pũctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipſi EH æqualem eſſe; AG vero ipſi DH.



Iungantur AB DE. & quoniam aequales ſunt circumferentiae AB DE, erunt & reliquae BC EF inter ſe aequales. ergo & aequales anguli, qui in ipſis conſiſtunt. quare angulus BAC eſt aequalis angulo EDF. ſed & recti ſunt anguli, qui ad G H. duo igitur triangula ſunt ABG DEH, quae duos angulos duobus angulis aequales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri DE aequale, quod vni aequalium angulorum ſubtenditur. ergo omnia omnibus ſunt aequalia. aequalis igitur eſt AG ipſi DH, & BG ipſi EH. quod demonſtrare oportebat. 27.tertij. 4.primi.

C

Nam ſi duæ rectæ lineæ parallelę ſint, & in vtraque ipſarum quæuis puncta ſumãtur, quæ dicta puncta coniungit in eodem eſt plano in quo parallelæ] *Ex VII. vndecimi.*

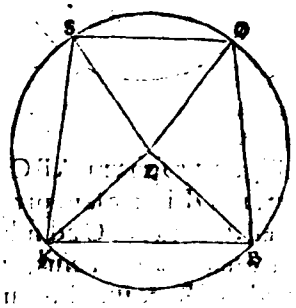
D

Et quoniam KB maior eſt, quam QV] *Eſt enim triangulum AQV triangulo AKB ſimile, cum angulus ad A ſit vtrique communis, angulusq; AQV angulo AKB, & angulus AVQ angulo ABK aequalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita KB ad QV. eſt autem AK maior, quàm AQ. ergo & KB, quàm QV maior erit.* 29.primi. 4.ſexti.

E

Erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ.] *Nam cum rectae lineae KB BO KS aequales ſint, & minor ipſis OS; erunt circumferentiae, quas auferunt KB BO KS inter ſe aequales, & reliqua circumferentia OS maiores. quare & anguli KZS KZB BZO ęquales, & maiores angulo OZS. ſunt autem quattuor anguli quattuor rectis aequales. ergo OZS eſt minor recto, videlicet acutus; & vnuſquiſque reliquorum trium obtuſus; ac propterea quadratum quod fit ex KB maius eſt duobus quadratis, quae ex KZ ZB, hoc eſt maius, quam duplũ quadrati, quod ex BZ. ſunt enim KZ ZB inter ſe aequales, vt demonſtratum eſt. ſed & hoc ſequenti lemmate planius demonſtratur.*

Sit in circulo quadrilaterum KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter ſe ſint ęqualia: ſitq; BO maior, quàm OS; & ſumpto circuli centro Z, iungatur BZ. Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius eſſe, quàm duplum.

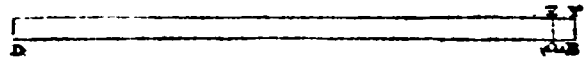


Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ eſt aequalis ZS, & communis ZO; erunt duae BZ ZO duabus SZ ZO aequales alterum alteri, & baſis BO baſi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS eſt maior. & quoniam angulus OZB vnicuique ipſorum BZK KZS eſt ęqualis: in aequalibus namque circumferentijs conſiſtunt OB BK KS; quòd rectae lineę ęquales ſint: erit & vterque angulorum BZK KZS maior angulo OZS. ſed quattuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis ſunt aequales; etenim circa vnum punctum Z conſtituunt. vnuſquiſque igitur angulorum OZB BZK KZS eſt obtuſus. ideoq; obtuſiangulum eſt triangulum BZO. At in obtuſiangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum maius eſt quadratis, quae à lateribus obtuſum angulum continentibus ſiunt. ergo quadratum, quod ex BK maius eſt quadratis, quae ex KZ ZB. ſed quadrata ex KZ ZB dupla ſunt quadrati Coroll. 15. primi.

drati ex EZ; aequalis enim est KZ ipsi ZB. quadratũ igitur ex KB, minus est, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonstrare.

F Et quoniam BD minor est quàm dupla ipsius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente constat: & cum BD dupla sit ipsius DA, erit ipsius DΩ minor, quàm dupla.*

G Atque est vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectāgulum quod DΩ ΩB continetur.] *Describatur ex ΩB quadratum quod sit ΩBΥΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit ut BD ad DΩ, ita rectangulum DΥ ad rectangulum DΞ. ex prima sexti, hoc est ita rectangulum, quod continetur DB BΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*



H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur est æquale quadrato KB.] *Est enim angulus in semicirculo DKB rectus, & ab eo ad basim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octauæ sexti libri KB est proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB: & ob id quadratum quidem ex KB æquale est rectangulo contento DB BΩ; quadratum uero ex KΩ æquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior est AΞ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE descriptum est, non tangens minorem circulum FGH, perpendicularis à puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex ijs, quae in antecedente demonstrata sunt. quare AΩ maior erit, quàm AG; & idcirco AZ longe maior, quàm quae à centro minoris sphęrae ad eius superficiem pertinet.*

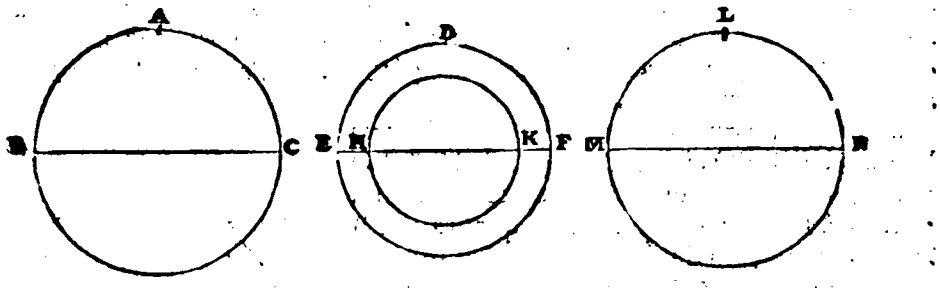
L Et quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim descriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et sunt æquales OB BK KS, & minor OS] *Hęc proxime demonstrata sunt.*

N Et cum æqualis sit AL ipsi AB.] *Sunt enim à centro ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Sphæræ inter se in tripla sunt proportione suarum diametrorũ.



Intelligantur sphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC sphæræ ad sphęram DEF triplam proportionem habere eius, quã habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphęra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrũ, circa quod est sphæra GHK; describaturq; in maiori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangẽs minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphęra DEF descriptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphęra ABC ad solidum polyhedrum, quod in sphęra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet autem ABC sphęra ad sphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC sphęra ad sphęram GHK,

Ex antecedente.

Ex corel an tecedente.

HK, ita ſolidum polyhedrum in ſphęra A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF; & permutando, vt ABC ſphęra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. maior autem eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphærę polyhedro, quod in ſphęra DEF eſt maior. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neque D E F ſphærā ad ſphæram minorem ipſa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphæram ABC neque ad maiorem ſphæram ipſa DEF triplam proportionem habere eius, quā BC ad EF. Si enim fieri poteſt, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur ſphęra LMN ad ABC ſphæram triplam proportionē habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Vt autem ſphæra LMN ad ABC ſphęram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quādam minorem ipſa ABC, vt ante demonſtratum fuit; quoniam ſphæra LMN maior eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphęram minorem ipſa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphęram maiorē ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad E F. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo A B C ſphæra ad ſphęram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonſtrare oportebat.

DVODECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER TERTIVSDECIMVS ET SOLIDORVM TERTIVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.



A

B

I recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens dimidiã totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia fit, quadrati.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in puncto C; & ſit AC maior portio: producaturq; in directum ipſi CA recta linea AD; & ponatur AD ipſius AB dimidia. Dico quadratum ex CD quadrati ex D A quintuplum eſſe. deſcribantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF deſcribatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atque eſt rectãgulum quidem CE quod continetur AB BC: quadratum vero ex AC eſt FH. ergo rectangulum CE quadrato FH eſt a quale. & quoniam BA dupla eſt ipſius A D; æqualis autem BA ipſi AK; & DA ipſi AH: erit & KA ipſius AH dupla. ut autem KA ad AH, ita eſt rectangulum KC ad ipſum CH. duplum igitur eſt KC rectangulum rectanguli CH:

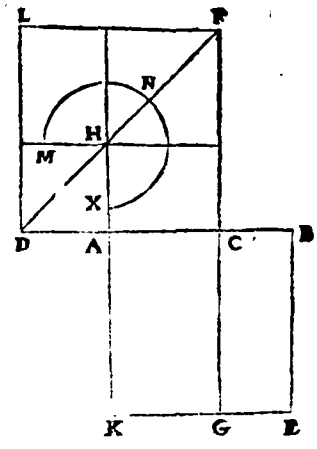
2. ſecti.

C

& ſunt rectangula LH HC ipſius CH dupla. ergo rectangulum KC rectãgulis LH HC eſt æquale. oſtenſum autem autem eſt & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratũ eſt æquale gnomoni MNX. Rurſus quoniam BA

D

dupla eſt ipſius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc eſt quadratum AE quadrati DH. æquale autem eſt quadratum AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomon quadruplus eſt quadrati DH. & ob id totum DF ipſius DH eſt quintuplum. atque eſt D F quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex D A quintuplũ erit. ergo ſi recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens totius dimidiam quintuplum poteſt eius, quòd à dimidia fit quadrati. quod demonſtrare oportebat.



SCHOLIVM.

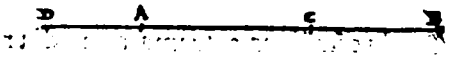
SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quæsiti tãquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod uerum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quę consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam AB extrema ac mędia ratione secetur in C, sitque maior portio AC, & ponatur AD ipsius AB dimidiæ æqualis. Dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplũ esse. Quoniam enim quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur: erunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnà cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis CA AD continetur æquale est rectangulum BAC. est enim BA ipsius AD dupla. quadrato autem ex AC est æquale rectangulum ABC; namque AB extrema, ac media ratione secta est in C. rectangulum igitur BAC vnà cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD. sed rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum est quadrati ex AD. quod quidem ita se habet. est enim BA ipsius AD dupla.



4. secundi.

2. secundi; Cor. 20. sexti

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratũ autem ex AB est rectangulum BAC: vnà cum rectangulo ABC; erit rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidem BAC est æquale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC est æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnà cũ eo, quod bis DA AC continetur quintuplum est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in pũcto C] *Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri, & in 30 sexti.* A

Describantur ex AB BC quadrata AE DF, & in DF describatur figura] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iuncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quae diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum LF DC parallela.* B

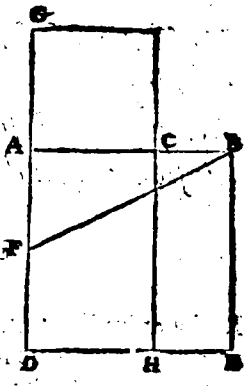
Et sunt rectangula LH HC ipsius HC dupla] *Supplementa enim LH HC inter se sunt aequalia ex 43 primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] *Ex 20 sexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] *Possumus etiam aliter, & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.* E

Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ex AB fiat quadratũ ADEB; ſectaq; AD biſariũ in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipſi FB ſit aequalis, erit AG æqualis AC ex demõſtratis i vndecima ſecũdi libri. quare FG cõſtat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratũ ex FG quin

20. sexti. *tuplũ eſſe quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla eſt ipſius AF, erit quadratũ ex AB quadrati ex AF quadruplũ. ſed quadratum ex FB eſt aequale quadratis ipſarum FA AB, ex 47 primi. quadratũ igitur ex FB, hoc eſt quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplũ erit. quod oportebat demonſtrare. ſed & alia nonnulla demonſtranda ſunt, quae ad hanc ſectionem attinent.*

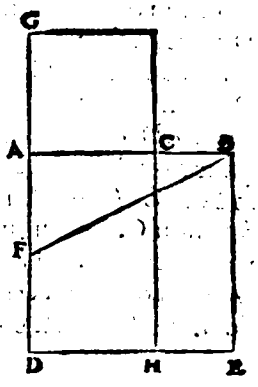


PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione ſecta, & vtra que ipſius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione ſecetur in C. Dico ipſas AC CB datas eſſe. Conſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniam AB eſt 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratũ eſt 25: quadratũ aũt ipſius AB eſt 100. ergo quadratũ ex FB eſt 125, & ipſa FB, hoc eſt FG ℞ 125. ſed FA eſt 5. erit igitur AG, hoc eſt AC ℞ 125 minus. Quòd cũ 5. ſit vt BA ad AC, ita AC ad CB, re

17. sexti. *ctangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC, quadratum autem ex AC, hoc eſt quadratum ℞ 125 minus 5 eſt 150 minus ℞ 12500. ſi igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciẽs CB, erit CB 15 minus ℞ 125. ergo AC CB datae ſunt, vt oportebat.*



Ex quibus manifeſtum eſt ſi recta linea rationalis, expoſitæ rationali longitudine commẽſurabilis extrema ac media ratione ſecta fuerit, maiorem eius portionẽ apotomen eſſe quintam, & minorem eſſe apotomen primam.

Eſt enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex

9. decimi. *BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipſi BA longitudine incommenſurabilis; ac propterea FB plus poteſt, quàm FA quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. eſt autem AF, quae ipſi AG congruit, expoſitae rationali longi*

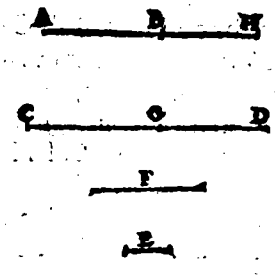
5. diffi. tertiarum. *tudine commenſurabilis. quare AC eſt apotome quinta. At vero CB eſſe apotomen primam, manifeſto conſtat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.*

PROPOSITIO. II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quae extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita vt CD ſit ipſius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis ſit F: & ex CD abſcindatur DG ipſi F aequalis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc eſt ad F, ita AH ad HB. et quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportio-

Cor. 20. sexti *nales ſunt, erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratum ex F. eſt autem CD quintupla ipſius E. quadratũ igitur ex CD quintuplum eſt quadrati ex F. ergo quadratum ex AH quadrati ex HB eſt quintuplũ. eſtq; AB ma-*



ior portiõ

ior portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. quare BH est totius dimidia, & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inueniendam proposuimus.

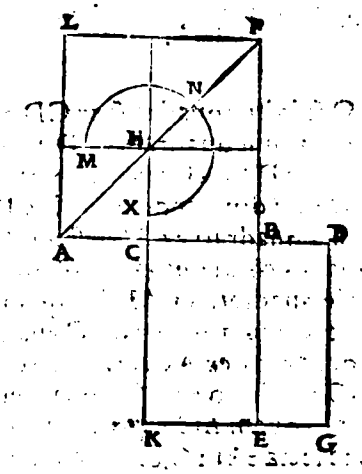
Itaque constat, Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4, siq; CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD ℞ 5, & CG 5 minus ℞ 5. fiat vt 5 minus ℞ 5 ad ℞ 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum ℞ 5 per 4, producetur ℞ 80. deinde multiplicabimus 5 minus ℞ 5 per eam, quae ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus ℞ 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus ℞ 80 fiet ℞ 2000 plus ℞ 400. quare si ad 20 applicabimus ℞ 2000 plus ℞ 400, latitudinem faciet ℞ 5 plus 1, cuius duplum est ℞ 20 plus 2. tota igitur recta linea est ℞ 20 plus 2, & minor portio ℞ 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ.

Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit: & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describatur enim ex vtraque ipsarum AB CD quadrata AF CG: & in AF figura descripta, producatur FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomō ipsius AH quadruplus. & quoniam DC dupla est CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH. ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG est æqualis. Rursus quoniam DC dupla est CA, æqualis autem est DC ipsi CK, & AC ipsi CH; erit KC ipsius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum est parallelogrammi BH. & sunt parallelogramma LH HB ipsius HB dupla. ergo KB æquale est ipsis LH HB. sed & totus MNX gnomō toti CG est æqualis. & reliquum igitur HF æquale est reliquo BG. atque est BG quidem quod CD DB cōtinetur; est enim CD est æqualis DG: ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB est æquale, vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD. maior autem est DC, quàm CB. ergo & CB quàm BD est maior. Itaque recta linea CD extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ. quod demonstrare oportebat.



A 10. secti.

A B 13. secti.

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quàm CB, sic demonstrabitur.

Si enim nō, sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. quadratum igitur ex BC quadruplum est quadrati ex CA; & ob id vtrumque quadratorum, quæ fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum est. sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA æquale est quadratis ex BC CA. quod fieri non potest. non igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demonstrabimus neque minorem BC ipsius CA duplam esse. multo enim magis absurdum sequetur. ergo ipsius AC dupla maior est quàm BC. quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea quædam CD partis ipsius DA quintuplũ posſit,& ipsius DA dupla ponatur AB. Dico AB extrema, ac media ratione ſectam eſſe in puncto C,& maiorem portionem eſſe AC, quæ quidem eſt reſi qua pars eius,quę à principio rectæ lineę. Quoniam enim AB extrema,ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio; erit rectangulum ABC quadrato ex AC ęquale.eſt autem & rectangulum BAC ęquale ei, quod bis DA AC continetur. etenim BA ipſius AD eſt dupla.ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo BAC,quod quidem eſt ipſius AB quadratũ,æquale eſt ei,quod bis DA AC continetur vnà cum quadrato ex AC. quadratum autem ex AB quadruplum eſt quadrati ex AD.ergo quod bis DA AC continetur vnà quadrato ex AC quadruplum eſt eius, quod fit ex AD quadrati.ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC;hoc eſt quadratũ ex CD,quintupla ſunt quadrati ex AD. quod quidem ita ſe habet.

2.ſecundi. 30. ſexti. 4.ſecundi.

Compoſitio.

Qm̃ igitur quadratũ ex CD quintuplũ eſt quadrati ex DA; quadrato aũt ex CD ęqualia ſunt quadrata ex DA AC vnà cũ eo,quod bis DA AC cõtinetur; erũt quadrata ex DA, AC vnà cũ eo,quod bis cõtinetur DA AC quintupla ipſius quadrati ex DA.& diuidendo quod bis DA AC cõtinetur vnà cũ quadrato ex AC quadrupla sũt quadrati ex AD.eſt aũt &quadratũ ex AB quadrati ex AD quadruplũ.ergo quod bis cõtinetur DA AC,quod eſt rectãgulũ BAC vnà cũ quadrato ex AC eſt ęquale quadrato ex AB.ſed quadratũ ex AB eſt rectãgulũ ABC unà cũ rectãgulo BAC.rectãgulũ igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC eſt æquale rectangulo BAC vnà cũ quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC, erit reliquũ rectangulũ ABC quadrato ex AC æquale.eſt igitur vt BA ad AC,ita AC ad CB. maior autem eſt BA, quam AC.ergo & AC quam CB eſt maior.quare AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio.quod demonſtrare oportebat.

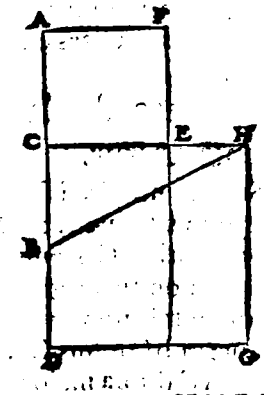
2.ſecundi. 14.ſexti.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipſius AC quintuplum poſsit] *Hoc eſt quadratum rectę lineę AB quintuplum ſit quadrati partis ipſius AC.*

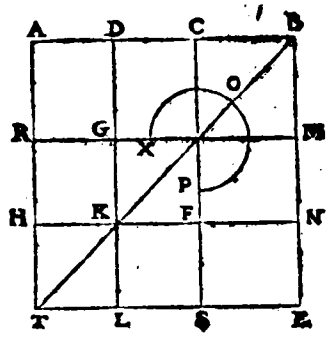
B Maior autem eſt DC,quam CB] *Hoc eſt dupla ipſius AC maior eſt, quam BC, illud uero ipſe mox demonſtrabit.ſed & aliter idẽ demõſtrari poteſt hoc pacto.*

Recta enim linea AB partis ipſius BC quintuplum poſsit, & producatur AB ad D, ita vt DC ipſius CB ſit dupla. Dico ſi CD extrema,ac media ratione ſecetur,maiorem eius portionem eſſe AC. fiãt enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur.itaq; quoniam DG,hoc eſt HC dupla eſt ipſius CB, erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum.ſed quadratum ex BH eſt aequale duobus quadratis,quae ſiunt ex HC CB.quadratum igitur ex BH quintuplum eſt quadrati ex CB; ideoq; BH ipſi BA eſt aequalis.ergo ex iis, quae demonſtrata ſunt in vndecima ſecundi libri recta linea EH extrema,ac media ratione ſecatus in E, & CE eſt maior portio. eſt autem CH ipſi CD aequalis, & CE aequalis ipſi CA.ſi igitur recta linea partis ipſius quintuplum poſsit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

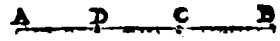
Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor assumens dimidiam maioris portionis quintuplũ potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.



Recta enim linea quædã AB extrema, ac media ratione secetur in C; sitq; AC maior portio, & secetur bifariam in D. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplũ esse. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AC dupla est CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc est quadratum RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur est æquale quadrato ex AC; atque est rectangulum quidem contẽtũ AB BC ipsum CE; quadratum vero ex AC est RS: erit rectangulum CE quadrato RS æquale. quadruplum autem est quadratũ RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum est. rursus quoniam AD. æqualis est DC, erit & HK ip KF æqualis. ideoq; quadratum GF est æquale quadrato HL. æqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare & CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplum GF quadrati. & gnomon igitur XOP ipsius GF est quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplũ est ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ex DC. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum, quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. Quoniam enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo quod AB BC continetur vnà cum quadrato ex DC quintuplũ est quadrati ex DC: & dividendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. Ei vero, quod continetur AB BC est æquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet est enim AC ipsius CD dupla. 4 secundi.

Compositio.

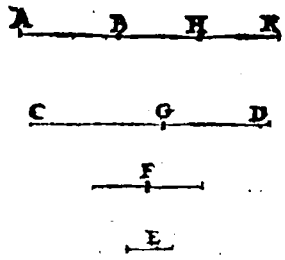
Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratũ ex AC quadrati ex CD quadruplum. sed quadratum ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadrati ex CD. & componendo quod continetur AB BC vnà cum quadrato ex CD, quod quidem est quadratum ex BD, quintuplum est quadrati, quod fit ex DC, atque hoc est, quod demonstrare oportebat.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis & alia conſtare poſſunus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.



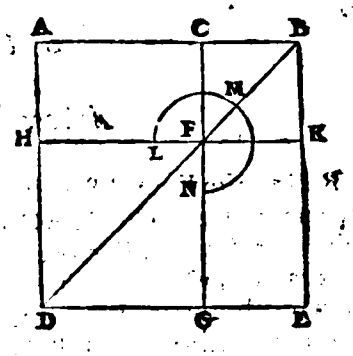
Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E; ſitq; CD ipſius E quintupla: & inter CD E media proportionalis ſumatur F, & alia conſtruantur, quemadmodum ſuperius dictum eſt in propoſitione ſecunda earum, quas nos ad primam huius appoſuimus. ſimiliter demonſtrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum eſſe. atque eſt AB minor portio rectas lineae, quae extrema, ac media ratione ſecatur. ergo BH eſt maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea eſt AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

Patet igitur data minori portione rectæ lineę, quæ extrema ac media ratione ſecatur, & maiorem portionem & totam lineam datam eſſe.

Sit enim minor portio AB 4, & ſit CD 5, & E 1. ſimiliter, vt ſupra eodem in loco, demonſtrauimus, maiorem portionem eſſe B& 20 plus 2 quare tota recta linea erit 6 plus B& 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla ſunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.



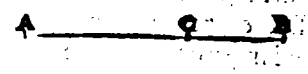
Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla eſſe. Deſcribatur enim ex AB quadratũ ADEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, & maior portio eſt AC; erit rectangulum contentũ AB BC quadrato ex AC æquale. atque eſt rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG eſt quod fit ex A. C. æquale igitur eſt AK ipſi HG. & quoniam rectangulum AF eſt æquale FE, commune apponatur CK, erit totum AK toti CE æquale. ergo rectãgula CE AK ipſius AK ſunt dupla. ſed rectãgula AK CE ſunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla ſunt ipſius AK. rectangulum autem AK oſtenſum eſt æquale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK ipſius HG ſunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla ſunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG ſunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem ſunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH eſt quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC ſunt tripla. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio

portio. Dico quadrata ex AB BC tripla esse quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex AB BC tripla sunt quadrati ex AC; suntque quadrata ex AB BC æqualia rectãgulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cõtinetur AB BC duplũ quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C.



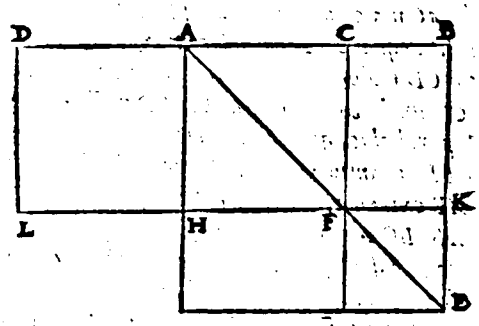
Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atque est AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC æquale. ergo quod bis continetur AB BC duplum est quadrati ex AC: & cõponendo quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciatur que ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC portio maior: ponaturq; ipsi CA æqualis AD. Dico rectam lineam DB extrema, ac media ratione secari in puncto A: & maiorem portionem esse AB, quę à principio posita est. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AB extrema, ac media ratione secta est in C, erit rectangulum quod continetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est æquale. sed CE est æquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit. cõmune apponatur HB. totum igitur DK toti AE est æquale. atque est DK quidem, quod BD DA continnetur; est enim AD æqualis DL: quadratũ aũt AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur est æquale quadrato ex AB. & ob id vt DB ad BA, ita est BA ad AD. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quàm AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demonstrare oportebat.

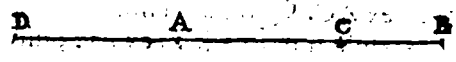


SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta. n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit maior portio AC: pona-

C:ponaturq; AD ipsi AC æqualis.
Dico DB extrema ac media ratione secari in puncto A: & BA maiorem esse portionem. Quoniã enim



DB extrema,ac media ratione secta est in A, & maior portio est AB;erit vt DB ad BA,ita BA ad AD.æqualis autem est DA ipsi AC.vt igitur DB ad BA,ita BA ad AC:& per conuersionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare dividendo ut BA ad AD,ita AC ad CB.æqualis autem est DA ipsi AC. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. quod quidem ita se habet,etenim AB extrema,ac media ratione secatur in C puncto.

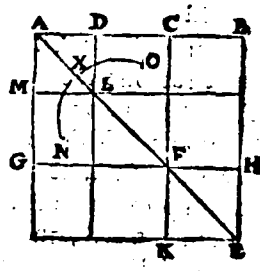
Compositio.

Itaque quoniam AB extrema,ac media ratione secatur in C, erit vt BA ad AC ita AC ad CB.æqualis autem est CA ipsi AD.ergo ut BA ad AD,ita AC ad CB: componendoque vt BD ad DA, ita AB ad BC; & per conuersionem rationis vt DB ad BA,ita BA ad AC.atque est CA æqualis AD, est igitur vt DB ad BA, ita BA ad AD.quare DB extrema,ac media ratione secatur in puncto A,& BA est portio maior.

F. COMMENTARIVS.

Sed non inutile uisum est hoc loco demonstrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto libro,quamquam eius demonstrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema,ac media ratione secetur,abscindaturque à maiori portione linea,quę minori sit æqualis;erit etiam ea extrema,ac media ratione secta,& maior portio erit quæ abscissa est recta linea.



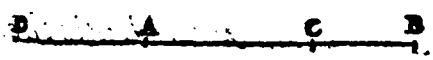
Sit recta linea AB, quae extrema,ac media rõne secetur in C, sitq; AC maior portio:& ab ipsa AC abscindatur CD, quae ipsi CB sit aequalis. Dico AC extrema, & media rõne secari in D:& CD maiorem esse portionẽ.fiat enim ex AB quadratũ AE: & iuncta AE ducantur per CD rectae lineae CFK DL ipsi BE parallelae, quae diametrum AE secent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelae ipsi AB.Itaque quoniam AB extrema,ac media ratione secatur in C; rectangulũ, quod AB BC continetur, hoc est rectangulum CE est aequale quadrato AF.sed ipsi CE aequale est rectangulum GE; etenim supplementa CN GK inter se æqualia sunt:& quadratum FE est commune vtrique.ergo rectangulum GE quadrato AF est aequale.si igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum;& à quadrato AF auferatur quadratum LF,quod quidem est aequale quadrato FE,cum DE CB sint aequales, reliquum GK rectangulum,hoc est rectangulum MF,hoc est ipsum DF gnomoni NXO aequale erit, à quibus sublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum aequale quadrato LF. at rectangulum quidem DG est quod CA AD continetur:quadratum vero LF est quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD,ita CD ad DA.sed AC maior est,quàm CD.ergo & CD quàm DA maior erit. recta igitur linea AC extrema,ac media rõne secta est in D,& maior eius portio est CD quod demõstrare oportebat.

14. sexti.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema,ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est;quæ apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB;& secetur extrema,ac media ratione in C, sitque AC maior portio.Dico vtramque portionem AC CB irrationalẽ



esse,

esse, quæ apotome appellatur. producatur enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quę est ipsius AB dimidia; erit quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD commensurabile est quadrato ex DA. rationale autem est quadratum ex DA; etenim DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD est rationale; ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitudine. quare CD DA rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco AC apotome est. Rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secta est, & maior portio est AC; erit A B C rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. ergo BC est apotome prima. ostensa est autem & A C apotome. si igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ex 1. huius

6. decimi

6. dif. decimi

9. decimi

74. decimi

98. decimi

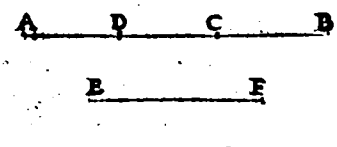
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstrauimus. sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quae eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionē CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam.



Dimidatur enim AC bifariam in D. & quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD, quae est dimidia portionis maioris; quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atque ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum ex DC, quòd ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD rationalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit longitudine. quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque CB apotome est. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex B D superat quadratum ex D C. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi EF longitudine est incommensurabilis. quare BD plus potest, quàm DC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. atque est DC longitudine commensurabilis expositae rationali AC. ergo CB est apotome quinta. rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC aequale quadrato ex AC. quadratū igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. sed quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eā, quę ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipsa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commen-

3. huius.

6. decimi

6. dif. decimi

9. decimi

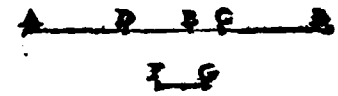
9. decimi

5. dif. tertiarum.

mensurabilis, erit maior portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

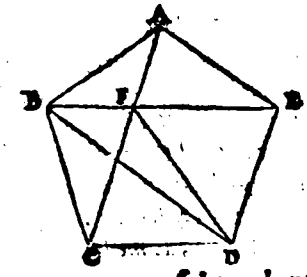
Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione sectę sit rationalis, expositæq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.



Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, expositę q; rationali longitudine commensurabilis. Dico maiorem portionem AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. secetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex ED quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam BD ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi commen
19.quinti *surabile. & quoniam est vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, vt BD ad DC, hoc est ut DE ad EC. ergo cum tres rectae lineae proportio-*
Cor.10.sexti *nales sint BE FD EC; erit BE ad EC, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, ut ED ad DC. quare BE ipsius*
6.dif.decimi *EC quintupla est; & idcirco BC est quadrupla ipsius CE; est q; BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipsi CB longitudine commensurabilis. & quoniam quadratum ex DE commensurabile est*
9.dif.decimi *quadrato ex EC, atque est quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratum ex DE, ipsa q; DE rationalis. quòd cum quadratum ex DE ad quadratum ex EC proportionem non habeat,*
9.decimi *quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit DE ipsi EC incommensurabilis longitudine.*
37.decimi *sunt igitur DE EC rationales, & inter se potentia solum commensurabiles; & ob id DC ex binis nominibus est, cuius maius nomen DE. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex FG, quo*
8.decimi *quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo FG ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaque quoniam DE plus potest quàm EC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; est q; EC expositae rationali CB longitudine commensurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. recta enim linea commensurabilis ei, quae est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit aequale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni æquilateri tres anguli siue continuati, siue non continuati fuerint æquales, æquiangulum erit pentagonum.



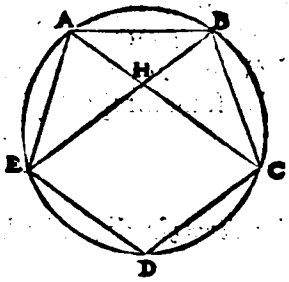
Pentagoni enim æquilateri ABCDE tres anguli primum cõtinuati, qui ad puncta ABC æquales inter se sint. Dico pẽtagonum ABCDE æquiãgulum esse. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duę CB BA duabus BA AE æquales sunt, altera alteri, & angulus CBA est æqualis angulo BAE,
4.primi erit basis AC æqualis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera

subtenduntur.

subtenduntur: angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB. quare & latus AF est æquale lateri BF. ostensa autem est & tota AC toti AE æqualis. ergo & reliqua FC est æqualis reliquæ FE. atque est CD æqualis DE. duæ igitur FC CD duabus FE ED æquales sunt, & basis ipsorum est communis FD. quare angulus FCD angulo FED est æqualis. ostensus autem est & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD æqualis est toti AED. sed angulus BCD positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AB æqualis erit. similiter demonstrabimus & angulum CDE angulis, qui sunt ad AB esse æqualem: æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. sed non sint anguli continuuati sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad puncta ACD. Dico & sic æquiangulum esse ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE æqualis basi BD, & ABE triangulum triangulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus AEB angulo CDB. est autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE est æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE est æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui sunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AC est æqualis. Eadem ratione & angulus ABC æqualis est angulis, qui sunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. quod demonstrare oportebat. 8. primi

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuo secant, & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

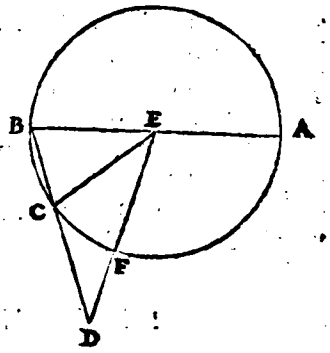


Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABCDE duos continuatos angulos, qui sunt ad puncta AB subtendant rectæ lineæ AC BE, quæ sese in puncto H secent. Dico vtramque ipsarum extrema, ac media ratione secari in puncto H: & maiores earum portiones pentagoni lateri æquales esse. describatur enim circa ABCDE pentagonum circulus ABGDE. & quoniam duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE basi AC æqualis, & ABE triangulum æquale triangulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus anguli BAH est duplus; etenim extra triangulum est ABH. est autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quòd & circumferentia EDC circumferentiæ CB est dupla. ergo HAE angulus æqualis est angulo AHE; & ob id recta linea HE est æqualis ipsi EA, hoc est ipsi AB. et quoniam BA est æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB æqualis. sed angulus ABE ostensus est æqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAH. & communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE, & triangulo ABH est angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB est æqualis. ergo triangulum ABE æquiangulum est triangulo ABH; ideoque vt EB ad BA, ita est AB ad BH: æqualis autem est BA ipsi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maior est quàm EH. ergo & EH quàm HB est maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione secta est in H, & maior portio HE pentagoni lateri est 4. primi 32. primi 33 sexti. 6. primi 21. tertij

æqualis. Similiter demonstrabimus & A C extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri æqualem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.



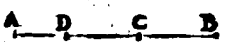
Sit circulus A B C, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus B C, hexagoni vero C D, & in directum sibi ipsis constituantur. Dico totam rectam lineam B D extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse C D. Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; iungantur; E B E C E D, & B E ad A producatur. quoniã igitur decagoni æquilateri latus est B C, erit A C B circumferentia circumferentiæ B C quintupla; & ob id circumferentia A C. qua
Vlt. sexti. drupla est circumferentiæ C B. vt autem circumferentia A C ad ipsam C B, ita A E C angulus ad angulum C E B. angulus igitur A E C anguli C E B quadru-
5. primi. plus est. & quoniã E B C angulus est æqualis angulo E
32. primi. C B, erit angulus A E C. anguli E C B duplus. est autem recta linea E C æqualis ipsi C D; vtraque enim
5. primi. est æqualis lateri hexagoni, quòd in circulo A B C describitur. quare & angulus C E D æqualis est angulo
32. primi. C D E. est igitur angulus E C B anguli E D C duplus. sed & angulus A E C duplus ostensus est anguli E C B. angulus igitur A E C anguli E D C est quadruplus. ostensus autem est & angulus A E C quadruplus anguli B E C. ergo E D C angulus angulo B E C æqualis erit. atque est angulus E B D communis duobus triangulis B E C B E D. &
32. primi. reliquus igitur B E D reliquo E C B est æqualis. ideoq; triangulum E B D triangulo
4. sexti. E B C æquiangulum. ergo vt D B ad B E, ita E B ad B C. æqualis autẽ est E B ipsi C D. vt igitur B D ad D C, ita D C ad C B. atq; est B D maior quàm D C. ergo & D C quã C B est maior; ac propterea recta linea B D extrema, ac media ratione secta est in C, & C D est maior ipsius portio. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hæc.

PROPOSITIO I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.

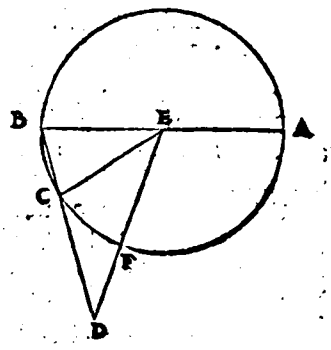


Sit recta linea A B, quæ secetur in C, ita vt A C sit hexagoni latus, & C B latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo
Ex antecedente. *A B extrema, ac media ratione secatur in C: atque est A C maior portio. abscindatur ab A C linea C D ipsi C B æqualis. erit A C quoq; extrema, ac media ratione secta in D: atque erit C D portio maior ex iis, quæ à nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem A C hexagoni latus, & C D latus decagoni. si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta.



Maneant enim eadem, quae supra; & sit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC esse apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB est rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc est CD rationalis. atq; est DC maior portio rectae lineae DB extrema, ac media ratione sectae; & CB minor portio eiusdem. Quando autem maior portio rectę lineę, quae extrema, ac media ratione secatur sit rationalis, minor portio est apotome quinta. quod à nobis supra demonstratum fuit. ergo latus decagoni BC est apotome quinta. quod oportebat demonstrare. ad 6. huius. Propo. 1.

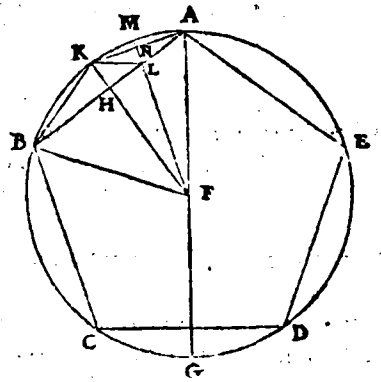
PROPOSITIO. III.

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti, sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Iisdem enim manentibus sit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB esse ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae est rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonstratum est: ipsius autem CD dupla est AB; & quae longitudine commensurabilis est ei, quae ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 6 7 decimi libri. ergo et AB ex binis nominibus est quinta. quod demonstrare oportebat. ad 6. huius. Propo. 2.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.



Sit circulus ABCDE, & in ipso pentagonum æquilaterum ABCDE describatur. Dico pentagoni ABCDE latus posse latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Sumatur enim centrum circuli F, iunctaq; AF ad G producatur, & iũgatur FB; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad K producatur; iunganturque AK KB. & rursus à pũcto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniam igitur circumferentia ABCG est æqualis circumferẽtiæ AEDG, quarum ABC æqualis est ipsi AED, erit reliqua CG reliquæ GD æqualis. Sed CD est pentagoni. ergo CG decagoni erit. quòd cum AF sit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB. quare & circũferẽtia AK circũferẽtiæ KB est æqualis. dupla igitur est circũferẽtia AB circũferẽtię BK; & ob id recta linea AK est decagoni latus. Eadẽ rõne & AK est dupla KM. & quoniã circumferentia AB dupla est circumferentię BK, æqualis autem CD circumferentia circumferentiæ AB, erit circumferentia CD circumferentiæ BK dupla. estque DC dupla ipsius CG. ergo CG est æqualis BK, sed BK ipsius KM est dupla, quoniam & 8 primi. 26. tertij.

AK

AK.& CC igitur ipſius KM dupla erit. eſt autem & CB circumferentia circumferentiæ B K dupla: etenim CB eſt æqualis BA. ergo & tota GB dupla eſt ipſius BM,& angulus GF B anguli BFM duplus. ſed & angulus GFB eſt duplus anguli FAB: quandoquidem FA B angulus æqualis eſt angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB eſt æqualis.communis autem duobus triangulis ABF BFN eſt KBF angulus.reliquus igitur AFB eſt æqualis reliquo BNF, & triãgulum ABF triãgulo BFN æquiangulum.ergo vt AB ad BF, ita FB ad BN.rectangulum igitur ABN eſt æquale quadrato ex FB. Rurſus quoniam AL eſt æqualis LK,communis autem, & ad rectos angulos LN; erit baſis KN æqualis baſi NA.ergo & angulus LKN angulo LAN eſt æqualis.ſed angulus LAN eſt æqualis angulo KBN. & angulus igitur LKN eſt æqualis angulo KBN. angulus autem NAK eſt communis duobus triangulis AKB,& AKN.ergo reliquus AKB reliquo KNA eſt æqualis;& triangulum KAB triangulo KNA æquiangulum.vt igitur BA ad AK,ita KA ad AN; ac propterea rectãgulum BAN eſt æquale quadrato ex AK. oſtẽſum eſt aũt & rectãgulũ ABN quadrato ex BF æquale.rectãgulũ igitur ABN vnà cum rectangulo BAN,quod eſt quadratum ex AB eſt æquale quadraro ex BF vnà cum quadrato ex AK.atque eſt AB quidem pentagoni latus,BF vero latus hexagoni,& AK decagoni.ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum.quod demonſtrare oportebat.

Vltima ſexti & 32. primi,vel ex 20 tertij.

4.ſexti.

17.ſexti.

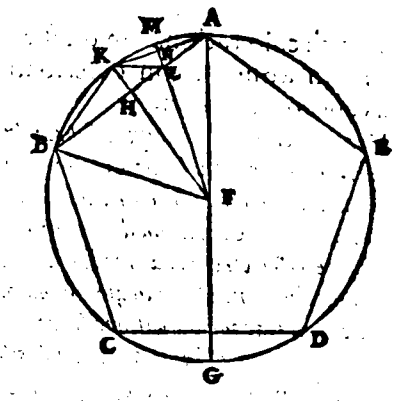
4.primi.

5.primi.

4 ſexti.

27.ſexti.

2. ſecundi.



THEOREMA XI. PROPOSITIO. XL

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur,pentagoni latus eſt linea irrationalis,quæ minor appellatur.

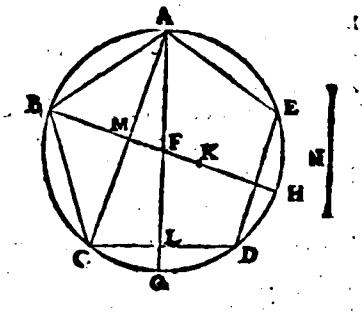
In circulo enim ABCDE rationalẽ diametrũ habẽte pentagonũ æquilaterum deſcribatur ABCDE.Dico pentagoni ABCDE latus irrationalem eſſe lineam, quæ minor appellatur.ſumatur enim circuli centrum F;& iunctæ AF BF ad puncta GH producantur,& iungatur AC;ponaturq́; FK ipſius AF pars quarta.rationalis autem eſt AF.ergo & FK eſt rationalis.ſed & rationalis BF.tota igitur BK rationalis erit. & quoniam circumferentia ACG æqualis eſt circumferentiæ ADG,quarum ABC eſt æqualis ipſi AED,erit reliqua CG reliquæ GD æqualis. quòd ſi iungamus AG,fient anguli ad L recti,& DC dupla ipſius CL.Eadem ratione & anguli ad M recti ſunt,& AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC eſt æqualis angulo AMF, communis autem duobus triangulis ALC, & AMF eſt angulus LAC;reliquus ACL reliquo MFA æqualis erit;ideoq́; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulũ. ergo ut LC ad CA,ita MF ad FA;& antecedentium dupla. quare vt dupla ipſius LC ad CA,ita ipſius MF dupla ad FA.ſed vt ipſius MF dupla ad FA, ita eſt MF ad dimidiã ipſius FA.& vt igitur dupla ipſius LC ad CA, ita MF ad ipſius FA dimidiã: & conſequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipſius CA, ita MF ad quartam partem ipſius FA.atque eſt ipſius quidem LC dupla CD; ipſius vero CA dimidia

6. diff. decimi.

A

4. ſexti.

B



dimidia CM; & ipsius FA quarta pars FK. est igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK: & componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo ut quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM, ita quadratum ex MK ad id, quod fit ex KF quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo pentagoni latera subtendit, vt AC extrema, ac media ratione secta, maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC; & maior portio assumens dimidium totius quintuplum potest eius, quod fit à totius dimidia; atq; est totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. vt autem quadratum ex DCM tanquam ex vna linea ad quadratum ex CM, ita ostendimus esse quadratum ex MK ad quadratum ex KF. quintuplum igitur est quadratum ex MK quadrati ex KF: estque quadratũ ex KF rationale; quippe cum diameter rationalis sit. ergo & rationale est quadratum ex MK; & ipsa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex KF proportionem habet, quam numerus ad numerum. & quoniam BF quadrupla est ipsius FK, erit BK ipsius KF quintupla, & quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum est quadrati ex KF. ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum; ac propterea ad illud proportionẽ non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine. atque est vtraque ipsarum rationalis. ergo BK KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quę apotome appellatur. quare MB est apotome, & ipsi congruẽs MK. Dico & quartam esse. quo enim quadratum ex BK superat quadratum ex KM, illi sit æquale quadratum ex N. ergo BK plus potest, quàm KM quadrato ex N. & quoniam commensurabilis est KF ipsi FB, & componendo KB commensurabilis ipsi BF; sed & BF cõmensurabilis ipsi BH longitudine, erit & KB ipsi BH commensurabilis. quòd cum quadratum ex BK quintuplum sit quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinque ad vnum. Ergo per cõuersionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet, quam quinque ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi N: idcircoq; BK plus potest, quàm KN quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis. itaque quoniam tota BK plus potest, quàm congruens MK, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis, & tota BK commensurabilis est expositæ rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis, quæ minor appellatur. sed AB potest id, quod continetur HB BM, propterea quòd iuncta AH triangulum ABH est æquiangulum triangulo ABM: atque est vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni latus est linea irrationalis, quę minor appellatur. quod oportebat demonstrare.

C D E F G H K L M N O P Q 9. undecimi R S T

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL] *Iunctis enim AC ALG, si etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG est aequalis circumferentiae GD, erit angulus CAG aequalis angulo GAD. duae igitur CA AL duabus DA AL aequales sunt, & angulus CAL est aequalis angulo DAL. ergo & basis CL basi LD est aequalis, & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur ALC est aequalis angulo ALD. & ob id vterque rectus est. & cum CL sit equalis LD, erit DC ipsius CL dupla.*

A 27. tertij. 4. primi. Diff. 10. primi.

Et antecedentium dupla] *Quoniam enim est vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem dupla ipsius LC ad LC, ita dupla ipsius MF ad MF; erit ex aequali vt dupla ipsius LC ad CA, ita dupla ipsius MF ad FA.*

B

Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22. sexti libri.*

C

Maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC] *Ex 6. huius.*

D E

totius

E Et maior portio aſſumens dimidiam totius quintuplum poteſt eius, quod fit à totius dimidia] *Ex 1. huius.*

F Ergo & rationale eſt quadratum ex MK] *Rationali enim commenſurabile, & ipſum rationale eſt ex nona diffinitione decimi libri.*

C Et ipſa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiuſdem libri.*

H Et quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 ſexti libri. eſt enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1. proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadtati ex KM eſt quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF ſit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF ſit vt 5 ad. 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc eſt vt 5 ad 1.*

L Incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, reliqua irrationalis eſt, quę apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*

N Et quoniam commenſurabilis eſt KF ipſi FB] *Intellige commenſurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; poſita eſt enim KF quarta pars ipſius FA, hoc eſt ipſius FB.*

O Et componendo KB commenſurabilis ipſi BF] *Ex 16 decimi.*

P Sed & BF commenſurabilis ipſi BH longitudine] *Eſt enim BF ipſius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipſi BH commenſurabilis] *Ex 12 decimi.*

R Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

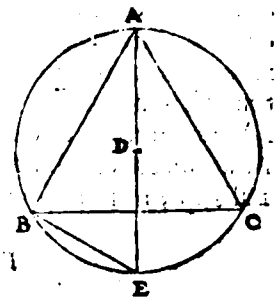
S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irralione eſt & ipſum potens eſt irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*

T Sed AB poteſt id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 ſexti, & 17 eiuſdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, trianguli latus potentia triplum eſt eius, quę ex circuli centro.

Sit circulus ABC, & in ipſo triangulum æquilaterum deſcribatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplũ eſſe eius, quę eſt ex circuli ABC cẽtro. ſumatur enim circuli cẽtrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iũgatur. Itaque quoniam æquilaterum eſt ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE eſt ſexta pars circuli circumferentiæ; ideóq; recta linea BE eſt latus hexagoni, & æqualis ipſi DE, quę eſt ex circuli centro. & quoniam AE eſt dupla ipſius ED, erit quadratũ ex AE quadrati ex ED, hoc eſt quadrati ex EB quadruplũ. quadratũ autem ex AE eſt æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla ſunt quadrati ex BE: & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum: atque eſt BE æqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex DE. ergo trianguli latus eſt potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonſtrare oportebat.



Corol. 15. quarti. 20. ſexti. 47 primi.

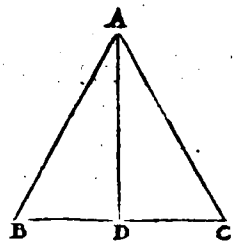
F. C. COMMENTARIVS.

Conſtat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad baſim perdendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulum aequilaterum ABC, cuius baſis EC bifariam ſecetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipſam AC perpendicularis; ſunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD

DC

DC aequalia, & baſis AB eſt aequalis báſi AC: angulus igitur ADB eſt aequalis angulo ADC. & ideo vterque ipſorum rectus, & AD ad BC eſt perpendicularis. Dico quadratum ex BA ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3. Quoniam enim AB dupla eſt ipſius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque eſt quadratum ex AB aequale quadratis ex AD DB. quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quã 4 ad 3. quod oportebat demonſtrare.

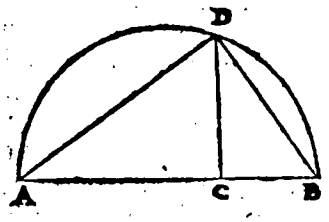


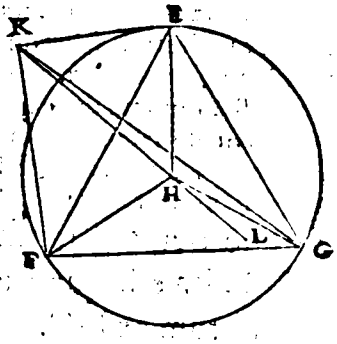
10. ſexti. 47. primi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem conſtituere, & ſphęrę comprehendere data, ac demonſtrare ſphærę diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis.

Exponatur enim datæ ſphærę diameter AB, & ſecetur in C, ita vt AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturque in AB ſemicirculus ADB: & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur. exponatur præterea circulus EFG æqualem habens eam, quæ ex centrò ipſi DC, in quo deſcribatur triangulum æquilaterum EFG: ſumaturque centrum circuli H, & iungantur EH HF HG: atque à puncto H ipſi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita vt HK ipſi AC ſit æqualis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta eſt ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano exiſtentes ipſam cõtingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam vnaquæque linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamque ipſarum HE HF HG eſt perpendicularis. & quoniam AC quidem eſt æqualis HK, CD vero ipſi HE, & rectos angulos continent; erit baſis DA æqualis baſi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipſi DA eſt æqualis. tres igitur KE KF KG inter ſe æquales ſunt. quòd cum AC ſit dupla CB, erit AB ipſius BC tripla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, vt deinceps demonſtrabitur. triplum igitur eſt quadratum ex AD quadrati ex DC. eſt autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum, atque eſt DC æqualis EH. ergo & AD ipſi EF eſt æqualis. ſed AD oſtenſa eſt æqualis vnicuique ipſarum KE KF KG. & vnaquæque igitur ipſarum EF FG GE vnicuique KE KF KG eſt æqualis. & ob id æquilatera ſunt quattuor triangula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cõſtituta eſt ex quattuor triangulis æqualibus & æquilateris, cuius baſis quidem eſt triangulum EFG, uertex autem K punctum. Itaq; oportet ipſam & ſphæra data comprehẽdere, & oſtẽdere ſphęræ diametrum potentia ſeſquialterã eſſe lateris pyramidis. producatur enim recta linea HL in directum ipſi HK; ponaturque HL

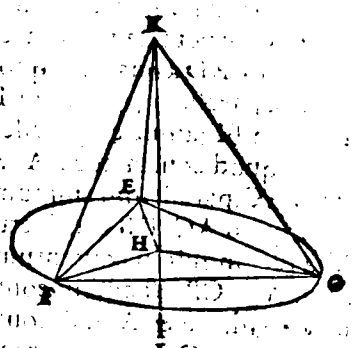




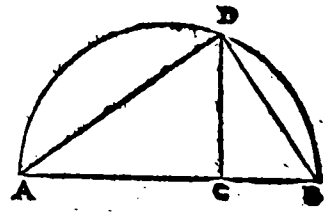
3 diffinitis undecimi.

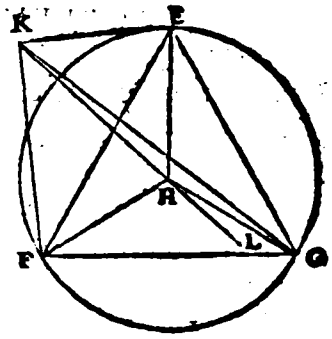
4. primi

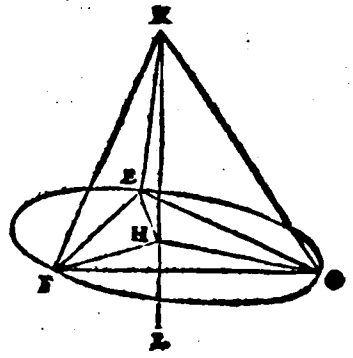
A
B
C



ipſi BC æqualis. & quoniam eſt vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipſi KH, CD vero ipſi HE, & CB ipſi KL: erit vt K
17.sexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL eſt æquale quadrato ex EH. atque eſt rectus vterque angulorum K HE EHL. ergo in KL deſcriptus ſemicirculus & per punctum E tranſibit. nam ſi coniungamus EL, angulus LEK fiet
8. sexti. rectus, cum triangulum ELK æquiangulum ſit vnicuiq; triangulorum ELH EKH. ſi igitur manente KL ſemicirculus conuerſus in eundem rurſus locum reſtituatur, à quo cœpit moueri, etiã per puncta FG tranſibit, iunctis FL LG; & rectis ſimiliter factis ad puncta FG angulis: atque erit pyramis comprehenſa data ſphæra; etenim KL ſphæræ diameter eſt æqualis diametro datæ ſphæræ AB, quoniam ipſi quidem AC ponitur æqualis KH, ipſi vero CB æqualis HL. Dico igitur ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis. Quoniam enim AC dupla eſt ipſius CB, erit AB ipſius BC tripla. ergo per conuerſionem rationis BA ſeſquialtera eſt ipſius AC. vt autem BA ad AC, ita eſt quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iuncta BD, eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC ob
Cor. 8 sexti. Cor. 20. sexti. ſimilitudinem triangulorum DAB DAC, & quòd vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda. ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AD. atque eſt BA quidem datæ ſphæræ diameter, AD vero æqualis lateri pyramidis. ſphæræ igitur diameter ſeſquialtera eſt lateris pyramidis. quod demonſtrare oportebat.

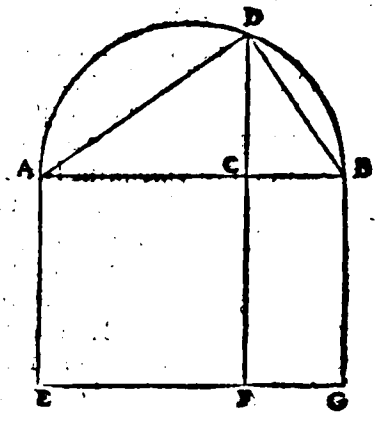






Itaque demonſtrandum eſt vt AB ad BC, ita eſſe quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim ſemicirculi figura; iungaturq; DB: & ex AC deſcribatur quadratum EC, & parallelogrammum FB compleatur. Quoniã
Cor. 8. sexti 17. sexti. 8. sexti. igitur eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC, propterea quòd triãgulum DAB æquiangulum eſt triãgulo DAC; erit rectangulum contentum BAC quadrato ex AD æquale. & quoniam eſt vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrammum BF; atque eſt parallelogrammũ quidem EB, quòd continetur BA AC; eſt enim EA æqualis AC; parallelogrammum uero BF æquale eſt ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad BC, ita rectangulum contentum BA AC ad cõtentum AC CB. eſt autem contentum BA AC
17. sexti. Cor. 8. sexti æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB quadrato ex DC. æquale: perpendicularis enim DC media eſt proportionalis inter baſis portio-



aeq

nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur, hoc modo.* A

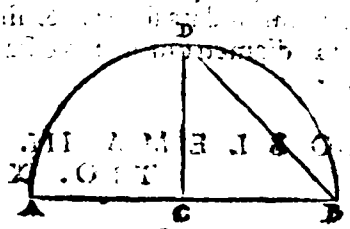
Quoniam enim est vt BA ad AC, ita quadratum ex DA ad quadratum ex AC, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectae lineae BA AD AC deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sexti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.* B

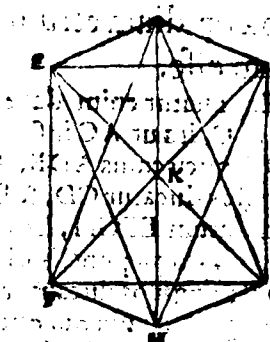
Ergo & DA ipsi EF est æqualis] *Quum enim quadratum ex AD tripli sit quadrati ex DC, et quadratum DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq; quadratum ex DC æquale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit æqualis: erit quadratum ex AD æquale quadrato ex EF: ideoq; AD ipsi EF æqualis.* C

PROBLEMA. II. PROPOSITIO. XIIII.

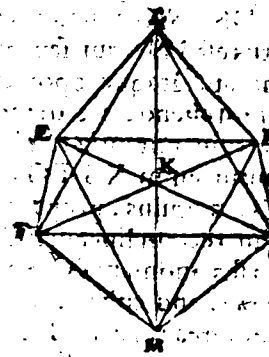
Octaedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & pyramidem: demonstrareq; sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.



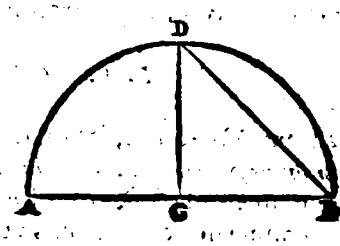
Exponatur datæ sphæræ diameter AB; & in C bifariam secetur; describaturq; in AB semicirculus ADB; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD: & DB iungatur. exponatur preterea quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipsi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL: producaturq; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KE KM vni ipsarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL KM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. ostenditur igitur KE esse æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratum ex HE quadrati ex EK duplum: Rursus quoniam LK est æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostensum est autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH æqualis. Eadem ratione & LH est æqualis HE. æquilaterum igitur est LEH triangulum. similiter ostendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, æquilaterum esse. octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur. Iam oportet ipsum & data sphæra comprehendere. demonstrareq; sphęræ diametrum potentia duplam esse lateris octahedri. quoniam enim tres rectæ lineæ LK KM KE inter se æquales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctum E transibit, & ob eandem causam si manente LM conuertus semicirculus in eundem locum restituatur, à quo cœpit

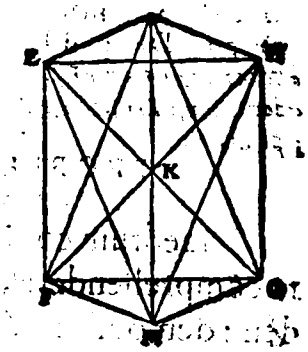


47. primi



moueri, transibit etiam per puncta FGH: atque erit octaedrum sphæra comprehensum. Dico etiam comprehensum esse data sphæra. quoniam enim LK est æqualis KM, communis autem KE, & angulos æquales cõtinent; erit basis LE basi EM æqualis. & quoniam rectus est LEM angulus, in semicirculo
47. primi. enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rursus quoniam AC est æqualis CB,
Cor. 8. & 20 sexti. erit AB dupla ipsius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BD. ostensum est autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque est quadratum ex BD æquale quadrato ex LE; posita est enim EH ipsi DB æqualis. ergo quadratum ex AB est æquale quadrato ex LM; ac propterea ipsa AB est æqualis LM. est autem AB diameter datæ sphæræ. quare LM est æqualis datæ sphæræ diametro. octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris octaedri potentia duplam esse.

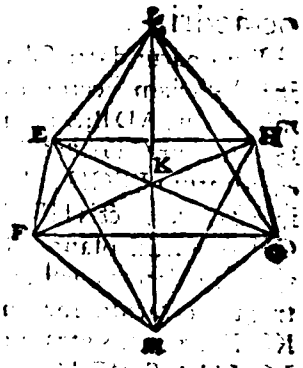


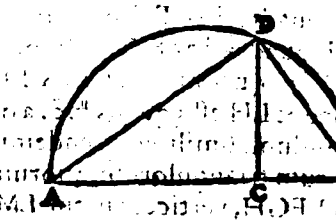


PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.

Cubum constituere, & sphæra comprehendere, qua & priores, demonstrareque sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse.

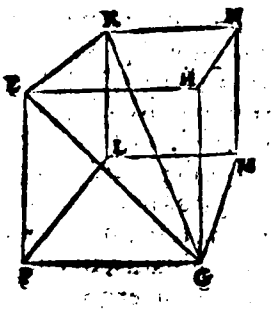
Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB: & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturq; in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iungatur: deinde exponatur quadratum EFGH, habens vnumquodque latus æquale ipsi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad
Im. 11. 12. rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab vnaquaque rectarum linearum EK FL GM HN vni ipsarum EF FG GH HE æqualis vnaquæque EK FL GM HN: & KL LM MN NK iungantur. cubus igitur constitutus est FN, qui sex quadratis æqualibus continetur. Itaque oportet ipsum & sphæra data comprehendere, demonstrareque sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. Iun-
8. diff. unde cimi. gantur enim KG EG. & quoniam rectus est KEG angulus, propterea quod & KE perpendicularis sit ad EG planũ uidelicet, & ad rectam lineam EG: semicirculus in KG descriptus & per punctum E transibit.
4. Vndecimi Rursus quoniam FG perpendicularis ad vtramque ipsarum FL, FE, & ad FK planum est perpendicularis. quare si iungamus FK ipsa FG & ad FK perpendicularis erit; ac propterea rursus in KG descriptus semicirculus transibit & per punctum F. similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur manente KG, conuersus semicirculus in eũdem rursus locum restituatur, à quo cepit moueri, erit cubus sphæ-





ra

ra comprehensus. Dico & data sphæra. Quoniam enim GF est æqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. æqualis autem est EF ipsi EK. quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quoniam AB est ipsius BC tripla: & ut AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostensum est autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & posita est KE ipsi BD æqualis. ergo & KG est æqualis AB. atque est AB datæ sphæræ diameter. quare & KG æqualis erit diametro datæ sphæræ. cubus igitur data sphæra est comprehensus. & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. quod demonstrare oportebat.



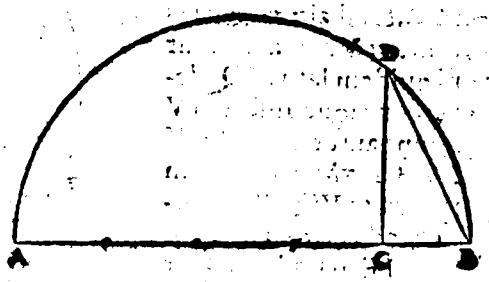
47 primi.

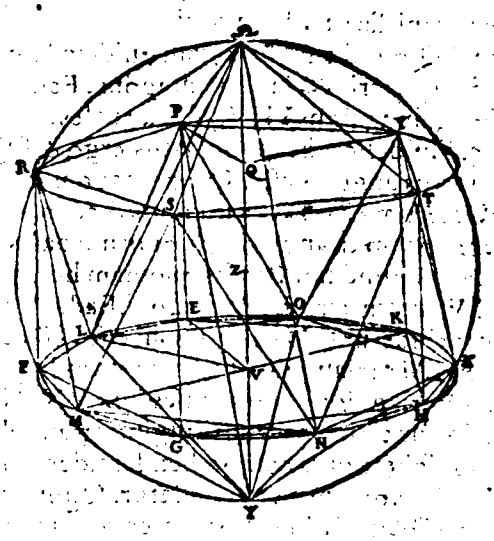
Coroll. 20 unde.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras; demonstrareque icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur.

Exponatur datæ sphæræ diameter AB; secetur que in C, ita ut AC ipsius DB sit quadrupla: & in AB descripto semicirculo ADB, ducatur à puncto C ipsi AB ad rectos angulos recta linea CD. & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ea centro sit æqualis ipsi DB: describaturq; in circulo EFGHK pentagonum æquilaterū & æquiangulum EFGHK. & circumferentiæ EF FG GH HK KE bifariam secentur in LMNXO punctis; & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE. & similiter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur est LMNXO pentagonum; & recta linea EO est decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipsi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP ER GS HT KY æquales existentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK, & iungantur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX KY YO OP. Quoniam igitur utraque ipsarum EP KY eidem plano est ad rectos angulos, erit EP ipsi KY

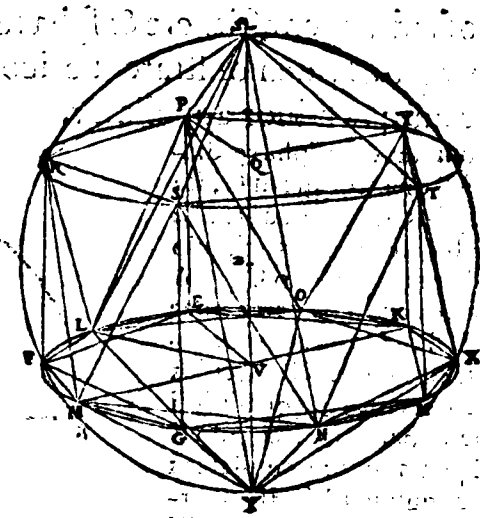




parallela

parallela; atque eſt ipſi æqualis. quę autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes
33. primi. coniungunt rectæ linræ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. ergo PY ipſi EK & æqua-
lis eſt, & parallela. ſed EK eſt latus pentagoni æquilateri. ergo & PY eſt pentagoni
æquilateri latus, in circulo EFGHK deſcripti. Eadem ratione & unaquæque ipſarũ
PR RS ST TY eſt latus pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti. æquilate-
rum igitur eſt PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus eſt PE, de
B goni uero EO, atque eſt rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim la-
tus pentagoni poteſt & hexagoni, &
decagoni latus in eodem circulo de-
ſcriptorum. Eadem ratione & OY
eſt pentagoni latus; eſt autem & PY
latus pentagoni. ergo æquilaterum
eſt triangulum POY. & ob eandem
cauſſam vnumquodque triangulo-
rum PLR RMS SNT TXY eſt æ-
quilaterum. & quoniam pentagoni
oſtenſa eſt vtraque ipſarum PL PO,
atque eſt LO pentagoni; erit PLO
æquilaterum triangulum. Ea-
dem ratione & vnumquoq; triã
gulorum LRM MSN NTX KYO æquilaterum eſt. ſumatur cẽ
trum circuli EFGHK, quod ſit
punctum V; & à puncto V ipſi
circuli plano ad rectos angulos
erigatur VΩ, & ad alteras partes
producatur, ut VΥ: & auferatur
hexagoni quidem latus VQ: de-
cagoni vero vtraque ipſarum V
Υ QΩ; & iungantur PΩ PQ Y
Ω EV LV LΥ ΥM. & quoniam
vtraque ipſarum VQ PE circu-
li plano eſt ad rectos angulos,
6 undecimi erit VQ ipſi PE parallela. ſunt
autem & æquales. ergo EV PQ
& æquales ſũt, & parallelæ: eſtq́;
EV hexagoni latus. hexagoni
igitur & PQ quòd eum hexagoni quidem latus ſit PQ, decagoni vero QΩ, & rectus
10. huius: PQΩ angulus; erit PΩ latus pentagoni. Eadem ratione & YΩ pentagoni eſt latus;
quoniam ſi iungamus VK QY & æquales, & ex oppoſito erunt. atque eſt VK ex cen-
tro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY eſt latus hexagoni. decagoni autẽ
QΩ, & rectus angulus eſt YQΩ. pentagoni igitur eſt YΩ. eſtque PY pentagoni. qua-
re æquilaterum eſt PYΩ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum eſt vnumquod-
que reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt PR RS ST TY rectæ lineæ, uer-
tex autem Ω punctum. Rurſus quoniam hexagoni eſt VL, decagoni vero VΥ, & an-
gulus LVΥ rectus; erit LΥ pentagoni. Eadem ratione ſi iungamus MV, quæ eſt hexa-
goni, concludetur & MΥ pentagoni eſſe. eſt autem & LM pentagoni. æquilaterum
igitur eſt LMΥ triangulũ. ſimiliter oſtendetur & æquilaterum eſſe unumquodque
reliquorũ triãgulorũ quorũ baſes ſunt MN NX XO OL, uertex aũt Υ punctũ. cõſti-
tutum igitur eſt icoſaedrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; opor-
tet ipſum ſphęra data comprehendere, demonſtrareq́ue icoſaedri latus lineam irra-
C tionalem eſſe, quæ minor appellatur. Quoniam enim hexagoni latus eſt VQ, decа-
goni vero QΩ; recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q, & VQ eſt ma-
ior portio. eſt igitur ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ. atque eſt VQ ipſi VL æqualis, &





QΩ

QΩ ipſi V†. quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V†. & ſunt anguli ΩVL LV† recti. ſi igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit †LΩ rectus angulus, ob ſimilitudinem triangulorum †LΩ VLΩ. ergo ſemicirculus in †Ω deſcriptus etiam per L tranſibit. Eadem ratione quoniam eſt ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ; & æqualis eſt ΩV quidem ipſi †Q, VQ uero ipſi QP: erit vt †Q ad QP, ita PQ ad QΩ: ideoque ſi rurſus iungamus P†, erit angulus, qui ad P rectus. ſemicirculus igitur deſcriptus in †Ω tranſibit & per P. Quòd ſi manente †Ω conuerſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur, à quo cœpit moueri, etiam per P, & per reliqua icoſaedri puncta tranſibit: atque erit icoſaedrum ſphæra comprehenſum. Dico & data. ſecetur enim VQ bifariam in Z & quoniam recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q, & ΩQ eſt minor ipſius portio, ipſa ΩQ aſſumens dimidiam maioris portionis, vide licet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis deſcribitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum eſt. & ipſius quidē ZΩ dupla eſt Ω†; ipſius vero AQ dupla QV. ergo quadratum ea Ω† quintuplum eſt quadrati ex VQ. & quoniam AC quadrupla eſt ipſius CB, erit AB ipſius BC quintupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quaratum ex BD. quadratum igitur ex AB quadrati ex BD eſt quintuplum. oſtenſum autem eſt & quadratum ex Ω† quintuplum quadrati ex VQ: atque eſt DB ęqualis VQ: vtraque enim ipſarum eſt æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK. quare & AB eſt ęqualis †Ω, eſtq; AB datę ſphęræ diameter. & †Ω igitur erit diameter datę ſphęrę. ergo icoſaedrum eſt data ſphæra comprehenſum. Dico icoſaedri latus irrationlem eſſe lineam, quæ minor appellatur. Quoniā enim rationalis eſt ſphærę diameter, atque eſt potētia quintupla eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipſius rōnalis erit. ſi aūt in circulo rationalē diametrū habente pentagonū æquilaterū deſcribatur, erit latus pētagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. ſed pentagoni EFGHK latus eſt icoſaedri. ergo icoſaedri latus eſt linea irrationalis, quę minor appellatur. 6. ſexti. E F G H K L

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſphæræ diametrum potentia quintuplā eſſe eius, quæ ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur: & ſphærę diametrum compoſitam eſſe ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quę in eodem circulo deſcribuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur utraq; ipſarum EP KY eidem plano eſt ad angulos rectos, erit EP ipſi KY parallela.] *Ex 6 vndecimi.* A

Erit FO latus pentagoni] *Ex 10 huius.* B

Quoniam enim hexagoni eſt VQ, decagoni uero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q] *Ex 9 huius.* C

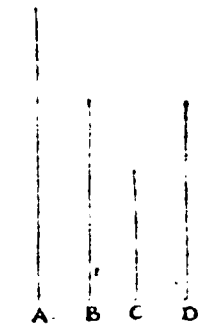
Quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V†: & ſunt anguli ΩVL LV† recti. ſi igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit †LΩ angulus rectus ob ſimilitudinem triangulorum †LΩ VLΩ] *Quoniam enim eſt vt ΩV ad VL, ita LV ad V†, erit vt ΩV ad V†, videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratum primae ΩV ad quadratum VL ſecundae: componendoq;, vt Ω† ad †V, ita quadrata ex ΩV VL, hoc eſt quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV: & per conuerſionem rationis vt †Ω ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV. quare LΩ eſt media proportionalis inter †Ω ΩV, quod deinceps demonſtrabimus. vt igitur †Ω ad ΩL, ita LΩ ad ΩV. atque eſt angulus LΩ† vtrique communis. ergo triangulum †ΩL ſimile eſt triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus eſt aequalis angulo †LΩ. angulus igitur †LΩ rectus erit. At vero LΩ inter †Ω ΩV mediam eſſe proportionalem ex his apparebit.* D

Si ſint tres rectæ lineæ, ſitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectae lineae A B C; ſitq; vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC

ABC deinceps proportionales esse. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratũ ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed vt A ad C, ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale est quadrato ex B; ac propterea D ipsi B est aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum ΥLΩ rectum, esse hoc modo. Quoniã enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad VΥ; suntq; anguli ΩVL LVΥ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVΥ simile, & angulus LΩV aequalis angulo VLΥ. sunt autem anguli VLΩ LΩV aequales vni recto, cum rectus sit LVΩ: ergo & anguli ΩLV VLΥ vni recto sunt aequales: & ob id angulus ΥLΩ est rectus. quod opo rtebat demonstrare.



E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur] *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex ΩΥ quintuplum est quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollario 20 sexti. est enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.*

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit] *Quoniam enim sphęrę diameter est potentia quintupla eius, quae ex centro circuli, habebit qnadratum diametri sphęrę ad quadratum eius, quae ex centro circuli proportionem eam, quã numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphęrę, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quae ex centro circuli, est rationale: idcoq; ea, quae ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quae rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.*

6. decimi.

6. diffi. dec.

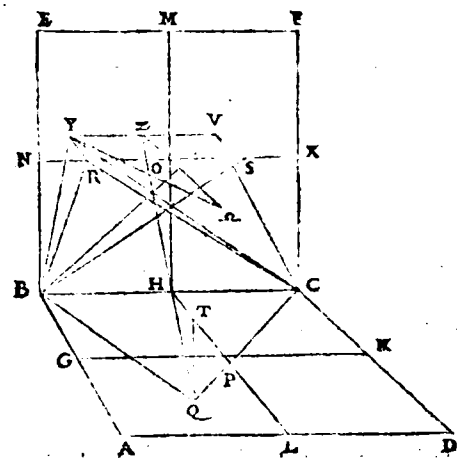
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 11. huius.*

L Sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri] *Illud vero ex ia dictis manifestissime cõstat.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

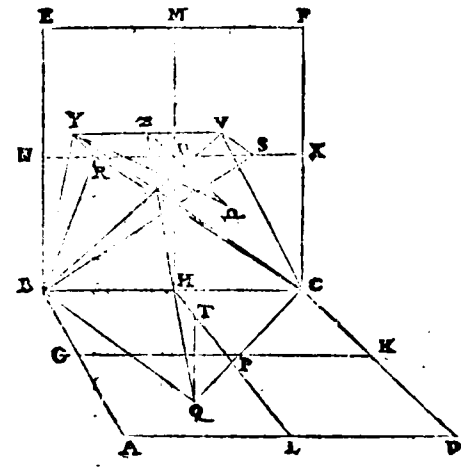
Dodecahedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonstrare quę dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

A Exponãtur prędicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se se AB CD CBEF: & secetur vnumquodq; ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GH KLMNX, & GK HL MH NX iungantur. deinde secentur rectæ lineæ NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorũ maiores portiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis RO OS TP æquales ponantur; iunganturq; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV æquilaterũ es-



se, &

se,& in uno plano,'& præterea æquiã gulum. Iungantur enim RB SB V B.& quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior ipsius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR. æqualis autem est ON ipsi NB,& OR ipsi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY sunt tripla.sed quadratis ex BN NR æquale est quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum est quadrati ex RY:ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY sunt quadrupla, quadratis aũt ex BR RY æquale est quadratũ exBY.ergo quadratũ ex B Y quadruplũ est quadrati ex YR. & ob id BY estdupla ipsius YR.atq;est VY ipsius YR dupla,qm̃ & RS est dupla ipsius RO,hoc est ipsius RY.ergoBY est æqualis YV.similiter demõstrabitur & unaquæq; ipsarũ BQ QC CV utriq;BY YV æqualis.æquilaterũ igitur est BYVCQ pentagonũ. Dico & in vno esse plano. ducatur.n.à puncto O ipsa OZ utriq; ipsarũ RY SV parallela ad exteriores cubi partes:& iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectã lineam esse. nã cum HP extrema,ac media ratione secetur in T, & PT sit maior ipsius portio, erit ut HP ad PT, ita PT ad TH.æqualis autem est HP quidem ipsi HO, PT vero utrique ipsarum TQ OZ.est igitur vt HO ad OZ, ita QT ad TH.atque est HO parallela ipsi TQ utraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos: TH uero est parallela OZ,quòd vtraque ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autẽ duo triangula componantur ad unum angulum,ut ZOH, HTQ, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant,ita ut homologa latera etiam sint parallela,reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in directum ipsi HQ.omnis autem recta linea est in uno plano.In uno igitur plano est YBQCV pentagonum.Dico & æquiangulum.Quoniam enim recta linea NO extrema,ac media ratione secta est in R,& OR est maior portio,erit vt utraque NO OR ad ON,ita NO ad OR.æqualis autem est RO ipsi OS.quare ut SN ad NO,ita NO ad OS.& ob id NS extrema, ac media ratione secta est in O; & maior portio est NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla.æqualis autem est ON ipsi NB,& OS ipsi SV.ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex SN NB est æquale quadratum ex BS.quadrata igitur ex BS SV,hoc est quadratum ex VB, quòd angulus VSB sit rectus, quadruplum est quadrati ex NB: ideoq; ipsa VB ipsius BN est dupla.est autem & BC dupla BN.ergo VB est æqualis BC. & quoniam duæ BY YV duabus BQ QC æquales sunt.& basis VB æqualis basi BC, erit angulus BYV angulo BQC æqualis.similiter ostendemus & YVC angulum æqualem angulo BQC.tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se æquales sunt. si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales,pentagonum æquiangulum erit.æquiangulum igitur est pentagonum BYVCQ. ostensum est autem & æquilaterum. ergo pentagonum BYVCQ æquilaterum est,& æquiangulum.atque est in uno cubi latere BC.si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris,& æquiangulis contenta.Itaque oportet ipsum & data sphæra comprehendere; demonstrareque dodecahedri latus esse irrationalem lineam,quæ apotome appellatur:producatur enim ZO,& sit ZΩ. occurrit igitur ZΩ diametro cubi,& bifariam se mutuo secant.hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω. ergo Ω est centrum



A 47.primi.

20.secũdi.

B

C 32.secũdi.

D

E

47.primi. 20.tertij.

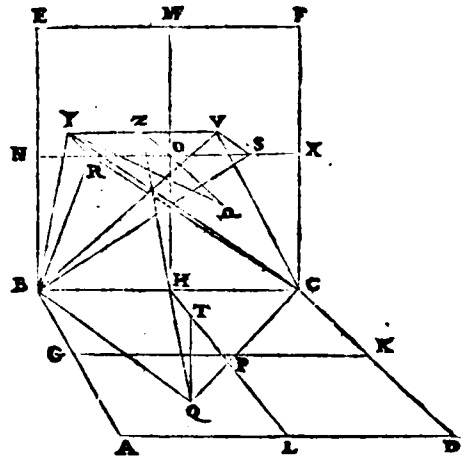
8.primi.

F

ſphæræ, quæ cubum comprehendit, & Oω dimidium lateris cubi. iungatur Yω. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio maior, erũt quadrata ex NS SO, tripla eius quod fit ex NO. ęqualis aũt eſt N S ipſi Zω, quoniam & NO ipſi Oω eſt æqualis, & ZO ipſi OS. ſed & OS eſt æqualis Z

A Y, quoniã & RO. quadrata igitur ex ωZ ZY tripla ſunt quadrati, quod fit ex NO. ſed quadratis ex ωZ ZY æquale eſt quadratum ex Yω. ergo quadratum ex Yω triplum eſt quadrati ex NO. eſt autem quę ex cẽtro ſphæræ cubũ cõprehendentis poten-

G tia tripla dimidij lateris cubi. prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere; demõſtrareq́; ſphęrę diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. ſi autem tota totius, & dimidia dimidiæ. atque eſt NO dimidia lateris cubi. ergo Y ω eſt æqualis ei, quæ ex centro ſphæ ræ cubum comprehendentis; eſtque ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y eſt ad ſphęrę ſuperficiem. ſimiliter demon



ſtrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiẽ ſphæræ. dodecaedrum igitur eſt data ſphęra comprehenſum. Dico dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linęa NO extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt RO; erit tota NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio RS. nam cum ſit ut NO ad OR, ita OR ad RN: & earum duplæ: partes enim eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit vt NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem eſt NX, quàm RS. ergo & RS eſt maior, quàm vtraque NR SX. eſt igitur NX extrema, ac media ratione ſecta; & RS eſt ipſius maior portio. æqualis autem eſt RS ipſi YV. ergo NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt YV. & quoniam rationalis eſt ſphæræ

H diameter, atque eſt potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quę eſt cubi latus.

K ſi autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt latere cubi extrema, ac media ratione ſecto maiorem portionem eſſe dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque eſt HO parallela ipſi TQ: vtraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos] *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt] *Ex 32 ſexti.*

D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior portio, erit vt vtraque NO OR ad ON, ita NO ad OR] *Ex 5. huius. ſi enim recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturq́; ipſi aequalis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quae à principio recta linea. quare vt vtra*

que

que NO OR, hoc eſt ut tota NO ad totam NO, ita eſt NO ad OR; ſit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON ſunt tripla] *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni æquilateri tres anguli ſint æquales pentagonum æquiangulum erit [*Ex 7. huius.* F

Prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere] *In quinta decima huius.* G

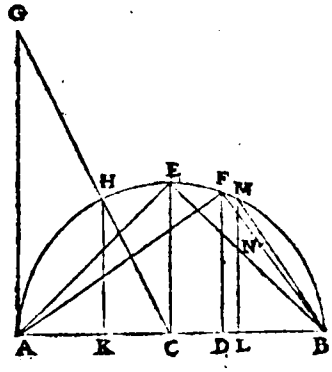
Erit NX rationalis, quę eſt cubi latus] *Nam cum ſphęrae diameter ſit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipſum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipſi commenſurabile erit. quae autem rationali ſunt commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales ſunt, per ſextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur] *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

Exponatur data ſphęrę diameter A B, & ſecetur in C quidem, ita vt AC ſit æqualis CB; in D vero ita, vt A D ipſius D B ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus AEB: & à punctis CD ipſi AD ad rectos angulos ducãtur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaq; quoniam A D dupla eſt ipſius DB, erit AB ipſius BD tripla: & per cõuerſionem rationis B A ſeſquialtera ipſius A D. vt autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A F. eſt enim triangulum A F B triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AF. eſt autem & ſphærę diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis; eſtque A B ſphæræ diameter. ergo A F pyramidis lateri eſt æqualis. Rurſus quoniam AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. Sed ut AB ad BD, ita quadratum ex A B ad quadratum ex FB. quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex BF. eſt autem & ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque eſt AB ſphæræ diameter. ergo BF eſt cubi latus. & quoniam AC eſt æqualis CB, erit AB ipſius BC dupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplum. atque eſt ſphęræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB eſt diameter datę ſphæræ. quare BE eſt octaedri latus. ducatur à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG æqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur AG dupla eſt ipſius AC; etenim GA eſt æqualis AB; ut autem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipſius KC dupla. ergo quadratum ex HK quadruplum eſt quadrati ex KC. quadrata igitur ex HK KC, quod eſt quadratum ex HC quintuplum eſt quadrati ex KC. æqualis autem eſt H C ipſi CB. ergo quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex C K. & quoniam A B eſt dupla ipſius BC, quarum AD dupla eſt DB; erit reliqua B D dupla ipſius D C: idcoque B C ipſius CD eſt tripla. nonuplum igitur eſt quadratum ex BC quadrati ex CD. ſed quadratum ex B C quadrati ex CK eſt quintuplum. ergo quadratum ex K C maius eſt quadrato ex C D. & K C ipſa C D maior. ponatur ipſi K C æqualis C L; & à puncto L ipſi A B ad rectos angulos ducatur L M, & M B iungatur. & quoniam quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex K C; atque eſt ipſius quidem C B dupla B A; ipſius uero C K dupla K L: erit quadratum ex A B quadrati



8 huius.

15. huius.

15. huius

14. huius

4. huius.

20. huius.

19 quinti

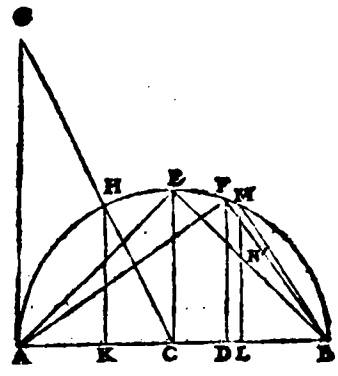
20. huius.

15. quinti

Corol.16.huius. drati ex KL quintuplum. ſed & ſphęrę diameter potentia quintupla eſt eius, quæ ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur. atque eſt AB diameter ſphęræ. ergo Corol.16.huius. KL eſt hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam ſphærę diameter compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo deſcriptorũ; atque eſt AB quidem diameter ſphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK eſt ęqualis LB: erit vtraque ipſarum AK LB latus decagoni deſcripti in eodem circulo, à quo 14.tertij. icoſaedrum deſcribitur. & quoniam decagoni eſt L B, hexagoni vero M L; eſt enim æqualis ipſi KL, quòd & ipſi HK; namque æqualiter à centro diſtant; & eſt vtraque 10.huius. 16.huiut. HK KL dupla ipſius HC: erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idẽ eſt, & icoſaedri. ergo MB eſt icoſaedri latus. & quoniam FB eſt latus cubi, ſecetur extre Ex corol. antecedentis. ma, ac media ratione in N, & BN ſit maior portio; erit NB dodecaedri latus. quòd cum ſphæræ diameter oſtenſa ſit ipſius quidem A F lateris pyramidis potentia ſeſquialtera; ipſius vero BE octaedri potẽtia dupla, & ipſius FB cubi potentia tripla, quarum partium ſphæræ diameter potentia eſt ſex, earum pyramidis quidem latus erit quattuor; octaedri vero trium, & cubi duarũ. ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia eſt ſeſquitertium, cubi vero potentia duplum: & octaedri latus lateris cubi potentia eſt ſeſquialterum. latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter ſe ſunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo, dico autem icoſaedri, & dodecaedri, neque inter ſe, neque ad iam dicta ſunt in rationalibus proportionibus, nempe minor, & apotome.

At vero MB latus icoſaedri maius eſſe dodecaedri latere BN, ita demonſtrabimus.

8.ſexti Quoniam enim triangulum FDB ęquiangulum eſt triangulo FAB, erit vt D B ad B F, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum ſecundę. eſt igitur Cor.20. ſexti. vt DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt A B ad B D, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla autem eſt AB ipſius BD. ergo quadratum ex 20.ſexti. FB quadrati ex BD eſt triplum. atque eſt quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; eſt.n. AD ipſius DB dupla. ergo quadratũ ex AD maius eſt quadrato ex FB; propterea quòd AD quàm FB eſt maior. multo igitur maior eſt



9.huius. AL quàm FB. & ipſa quidem AL extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt LK, quoniam KL eſt hexagoni latus, & KA decagoni. ipſa uero FB extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt BN. maior igitur eſt KL quàm BN, eſt autem KL 19.primi ipſi LM æqualis. ergo L M quàm B N eſt maior. ſed B M eſt maior quàm ML. ergo MB, quę eſt latus icoſaedri maior erit ipſa BN, dodecaedri latere.

ALITER. Quoniam enim AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. ut autem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod triCor.20.ſexti. 8.ſexti. angulum FAB triangulo FBD ęquiangulum eſt. triplum igitur eſt quadratum ex AB quadrati ex BF. Oſtenſum eſt autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplũ. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF ſunt æqualia. ſed tria ex FB maiora ſunt quàm ſex eorum, quæ fiunt ex BN. & quinque igitur ex K L, quàm ſex eorum, quæ ex BN ſunt maiora. ergo & unum ex KL maius eſt vno ex BN; ac propterea KL quàm BN maior: æqualis autem KL ipſi LM. maior igitur eſt LM, quam BN; multo igitur MB quàm BN eſt maior. quod demonſtrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora eſſe, quàm ſex earum, quæ ex BN, hoc modo oſtendemus.

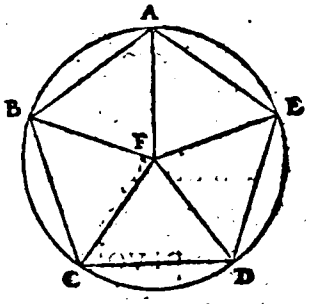
Quoniam

Quoniam enim maior est BN quàm NF, erit rectangulum, quod cõtinetur FB BN maius contento BF FN. quod igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius est, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. sed quod quidem continetur FB BN vnà cum contento BF FN est quadratum ex FB. contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N, & quod extremis continetur est æquale ei, quod fit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quàm duplum quadrari ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora sunt, quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat. 2. secundi. 17. sexti.

Dico præter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis cõstituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiãgulis ad vnum punctum constitutis, non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattor rectis æquales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autẽ æquilateris, & æquiãgulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor contineatur fieri non potest. nam cum pentagoni æquilateri angulus constet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neque uero alijs polygonis figuris constituetur angulus solidus propter absurda, quæ consequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura solida constituitur æquilateris, & æquiangulis contenta. quod oportebat demonstrare. 21. undecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulũ constare ex recto, & recti quinta parte hoc modo ostendemus.



Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturque ipsius centrum, quod sit F; & iungantur F A FB FC FD FE, quæ pẽtagoni ABCDE angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis æquales sunt, & inter se sũt æquales, erit unus ipsorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt unius recti, & quintæ partis. æqualis aũt est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

TERTII DECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVARTVS.

vt quidam arbitrantur.

VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

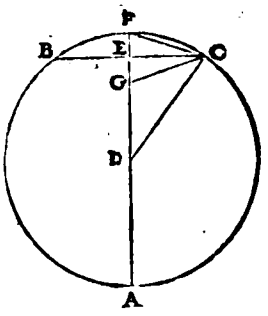
Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.



ASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam veniſſet, patriq́ue noſtro ob mathematicarum diſciplinarum ſocietatem commendatus fuiſſet, ipſo peregrinationis tempore, cum eo diu, multumq́ue uerſatus eſt. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio ſcriptum eſt de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione, quam ſcilicet hęc inter ſe proportionem habeant, arbitrati ſunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ, ac litteris prodiderunt. Ego vero poſtea incidi in aliũ librum ab Apollonio editum, qui propoſitę rei demonſtrationem recte complectebatur; atque ex eius problematis indagatione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ eſt, quilibet facile perſpicere poteſt, cũ in omnium manibus verſetur. quod autem nos poſtea ſummo, quantum conijci licet, ſtudio lucubraſſe videmur, id litteris mandatum tibi dedicandũ cenſuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus diſciplinis mathematicis, & præſertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quę dicturi ſumus: ob eam uero, quę tibi cum patre meo fuit conſuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipſam libenter audias. ſed iam tempus eſt ut proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo describuntur.



Sit circulus ABC, & in eo describatur pentagoni æqui lateri latus BC; sumaturque circuli centrum D: & ad BC ducta DE perpendiculari, producatur in directum ipsi DE recta linea EF. Dico DE dimidiam esse vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipsi EF æqualis: & à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiæ BFC: atque est totius quidem circuli circumferentiæ dimidia ACF, ipsius vero BFC dimidia FC, erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoque, circumferentia AC ipsius CF est quadrupla. vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF. angulus igitur ADC quadruplus est anguli CDF. duplus autem est angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC anguli GDC est duplus. est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC. duplus igitur est angulus EGC anguli GDC: & idcirco DG ipsi GC est æqualis. sed GC æqualis est CF. ergo & DG ipsi CF. est autem & GE æqualis EF. æqualis igitur est DE utrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipsius DE est dupla: atque est DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri decagoni. ergo DE est dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum. A B C D E

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eã, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli. F

F. C. COMMENTARIVS.

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] *Fx 15 quinti.* A

Vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF] *Ex ultima sexti.* B

Duplus autem est angulus ADC anguli EFC] *Ex 20 tertij.* C

Est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC] *Posita enim est FE aequalis EG: & EC est vtrique communis: anguliq; ad E recti: basis igitur FC est aequalis basi CG, & triangulum triangulo aequale; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtendantur ex 4. primi.* D

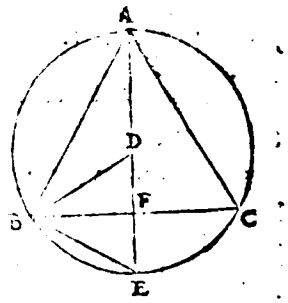
Et idcirco DG ipsi GC est æqualis] *Nam cum angulus EGC exterior sit aequalis duobus interioribus, & oppositis GDC GCD, sitq; duplus ipsius GDC; erit angulus GCD aequalis angulo GDC: & ob id latus DG lateri GC aequale.* E 32. primi. 6. primi.

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli. F

Sit circulus ABC, & in ipso describatur triangulum aequilaterum ABC; sumptoq; circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producatur. Dico DF dimidiam esse ipsius DE. iungantur enim DB BE. & quoniam BE est latus hexagoni, quod ex 12 tertij decimi libri apparet: & ideo aequalis ei, quae ex centro: erunt DB BE inter se aequales, & ipsarum quadra-

ta

47.primi *ta aequalia. ſed quadratum quidem ex DB eſt aequale quadratis ex I F FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE ſunt aequalia; & dempto communi quadrato ex EF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipſi FE eſt æqualis, & DF ipſius DE dimidia. quod demonſtrare oportebat.*



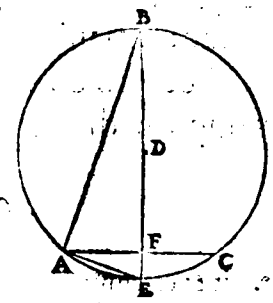
THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadē ſphæra deſcriptorum.

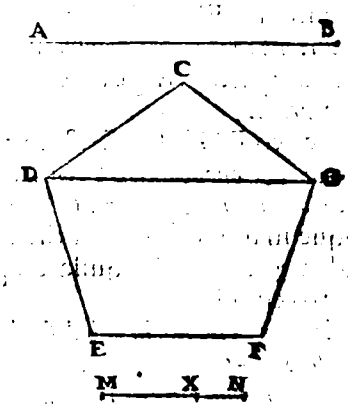
Hoc autem conſcribitur ab Ariſtero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in ſecunda editione comparationis dodecaedri cum icoſaedro, videlicet vt dodecaedri ſuperficies eſt ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe & ipſum dodecaedrum ad icoſaedrum, quòd perpendicularis ducta à centro ſphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem ſit, quæ ad icoſaedri triangulum ducitur. Itaque demōſtrandum eſt eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, hoc præmiſſo.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod fit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quę ex circuli centro.

Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: ſumatur que circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla eſſe. iuncta enim AE eſt decagoni latus. & quoniā BE dupla eſt ipſius ED; 47.primi erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE æqualia ſunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla ſunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA AE & ED ſunt quintupla quadra- A ti ex ED. ſed quadrata ex DE EA æqualia ſunt quadrato ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED ſunt quintupla.

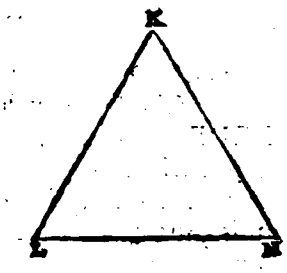


Hoc demonſtrato, demonſtrandum eſt eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.



Exponatur ſphæræ diameter AB, & in ipſa ſphæra deſcribatur dodecaedrum, & icoſaedrū: ſitque unum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icoſaedri uero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur D B G. ergo DG eſt cubi latus. & exponatur recta linea quædam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN ſit quintuplum. eſt autem & ſphæ-

ra diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniam quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplũ quadrati ex DG; erunt tria quadrata ex DG quadratis quinque ex MN æqualia. ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinque quadratis ex MX sunt æqualia. quinque autẽ quadrata ex KL æqualia sũt quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC æqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demõstratum est quadrata ex DG GC quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quę est ex centro circuli descripti circa triangulũ KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quę est ex centro circuli quindecin quadratis eius, quæ est ex centro circuli sunt æqualia; ac propterea diameter diametro est æqualis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.



C D E F G H

F. C. COMMENTARIVS.

A Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] *Ex decima tertij decimi.*

B Ergo DG est cubi latus] *Secta enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior portio erit æqualis lateri pentagoni CD. ex 8 tertijdecim. si aũt latus cubi extrema, ac media rõne secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertijdecimi. sed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duę rectę lineę extrema, ac media ratione secentur, erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.*

C Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus] *Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quae ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, hoc est hexagoni latus. si autem hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior portio latus decagoni. quod nos supra ad nouam tertij decimi demonstrauimus.*

D Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertij decimi libri.*

E Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX] *Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione sectae. & similiter MX maior portio ipsius MN: & vt tota DG ad totam MN, ita est ipsius DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN. quod deinceps demonstrabitur.*

F Quinque autem quadrata ex KL æqualia sunt & quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX] *Ex 10 tertij decimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à quo icosaedrum describitur, & cuius ea, quae ex centro est MN.*

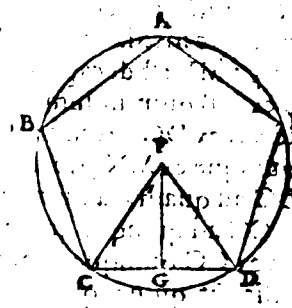
G Antea enim demonstratum est] *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.*

H Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quę ex centro circuli] *In duodecima tertij decimi libri.*

THEORBEMA III. PROPOSITIO. III.

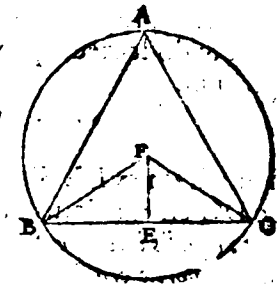
Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus: sumatur autem centrum F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentagonis ABCDE æquale esse. Iungantur enim CF FD. & quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem triangulis æquale. decem autem triangula duo pentagona sunt, & eorum sextupla æqualia. ergo quod tricies CD FG continetur est æquale duodecim pentagonis. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies. ergo quod tricies continetur CD FG superficiei dodecaedri æquale erit.



Similiter demonstrabimus, si fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipsum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BC DE continetur superficiei icosaedri æquale esse.

Quoniam enim rursus quod BC DE continetur duplum est trianguli DBC, erunt duo triangula æqualia ei, quod continetur BC DE, & eorum tripla. sex igitur triangula DBC æqualia sunt tribus, quæ BC DE continentur. at sex triangula vt DBC sunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum decupla. ergo quod tricies BC DE continetur est æquale viginti triangulis ABC, hoc est icosaedri superficiei. erit igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.



COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum descripti, in ipsum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icosaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum descripti in ipsum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icosaedro in eadem sphæra descriptis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD] *Ex 41 primi, ex quo sequitur duo triangula FCD æqualia esse ei, quod CD FG continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona sunt] *Vnumquodque enim pentagonum quinque eiusmodi triangula continet.*

C At sex triangula vt DBC sunt æqualia duobus ABC triangulis] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis DBC constat.*

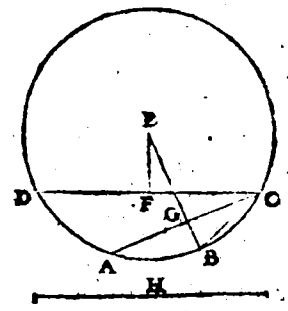
D Erit igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur] *Quoniam enim quod tricies cõtinetur CD FG est æquale superficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE æquale superficiei icosaedri,*

ſaedri, erit vt ſuperficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita ſuperficies icoſaedri ad id, quod tricies continetur BC DE: & permutando vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. ſed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod ſemel continetur CD FG ad id, quod ſemel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Hoc probato demonſtrandum erit, vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus.

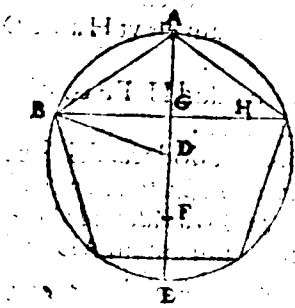
Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: & in ipſo deſcribatur trianguli quidem æquilateri latus CD: pentagoni vero AC: ſumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipſi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe H ad ipſam CD. quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt EB, & eſt vtriuſque quidem dimidia EG, ipſius vero BE dimidia EF: erit & ipſius EG extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF. eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectę maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit. ut igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF; ideoque contentum H FE eſt æquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam eſt vt H ad CD, ita quod cõtinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur eſt æquale. cõtentum CA EG: erit vt H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD.



Aliter demonſtrare ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus, hoc præmiſſo.

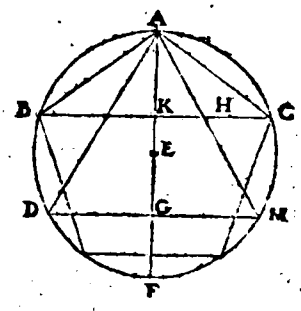
Sit circulus ABC, & in eo deſcribantur æquilateri pentagoni latera AB AC: & iungatur BC; ſumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturq; ipſius AD dimidia DF, & GC ipſius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono æquale eſſe.

Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla eſt ipſius DF, erit FA ipſius AD ſeſquialtera. rurſus quoniam GC tripla eſt ipſius CH, erit GH ipſius HC dupla. ſeſquialtera igitur eſt CG ipſius GH. quare vt FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentũ AF GH eſt æquale ei, quod AD CG cõtinetur: ſed CG eſt æqualis GB. ergo contentum AD BG eſt æquale ei, quod AF GH continetur. contentum autem AD BG eſt duo triangula, ut A B D. quod igitur AF GH continetur & duo triangula A B D. ergo quinque rectangula contenta AF GH decem ſunt triangula. decem autem triangula duo pentagona ſunt. quinque igitur rectangula



contenta AF GH duobus pentagonis ſunt æqualia. & quoniam GH eſt dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC ſunt æqualia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla. decem igitur rectangula contenta AF HC ſunt æqualia quinque, quę AF GH continentur, hoc eſt duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pentagono ſunt æqualia. quinque autem contenta AF HC ſunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH quintupla eſt ipſius HC, & communis altitudo eſt AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono eſt æquale.

Hoc demonſtrato nunc exponatur circulus cõprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphęra deſcriptorum; & in circulo ABC deſcribantur æquilateri pentagoni latera BA AC: & iungatur BC. ſumatur præterea circuli centrum E, & iuncta AE ad F producatur: ſitq; AE quidem dupla ipſius EG; KC vero ipſius CH tripla: & per G ipſi AF ad rectos angulos ducatur DM. ergo DM eſt latus trianguli æquilateri; & æquilaterum eſt ADM triangulum. & quoniam rectangulum quidem contentum AG BH eſt æquale pentagono, contentum vero AGD æquale triangulo ADM; erit vt rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula, hoc eſt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. & duodecim quidē BH ſunt decem BC: etenim BH quintupla eſt ipſius HC; & BC ipſius CH ſextupla: ideoq; duodecim BH ſunt æquales decem BC: viginti autem DG ſunt decem DM; dupla enim eſt DM ipſius DG. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc eſt vt BC ad DM, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque eſt BC quidem cubi latus, DM vero latus icoſaedri. & vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita BC ad DM, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.



F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta maior portio eſt EB] *Ex nona tertijdecimi.*

B Et eſt vtriuſque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipſius vero BE dimidia EF] *Ex ijs, quae nos demonſtrauimus ad finem primae huius.*

D Erit & ipſius EF extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF] *Ex 15 quinti.*

E Eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectæ maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit] *In 17 tertijdecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF.] *Hoc autem ita eſſe ad finem huius libri demonſtrabitur.*

G Ideoque contentum H FE eſt æquale ei, quod CA EG continetur] *Ex 16 ſexti.*

H Et quoniam eſt vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima ſexti.*

K Ei vero quod H EF continetur eſt æquale contentum GA EG] *Quod proxime demonſtratum fuit.*

L Hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonſtratum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur CA EG ad id, quod CD EF continetur.*

M Contentum autem AD BG eſt duo triangula vt ABD] *Hoc eſt contentum AD BG eſt aequale duobus triangulis ABD. eſt enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinque autem contenta AF HC ſunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH eſt quintupla ipſius HC: & communis altitudo eſt AF] *Ex prima ſexti.*

Ergo

Ergo DM eſt latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad trianguli aequilateri latus eſt dimidia eius, quae ex circuli centro, ut nos demonſtrabimus ad finem primae huius.* O

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH eſt æquale pentagono] *Ex iis, quae proxime demonſtrauit.* P

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonſtratis in 42 primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG] *Parallelogramma enim, quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes, ex prima ſexti.* R

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti triangula] *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita eſſe pentagonum ad triangulum.* S

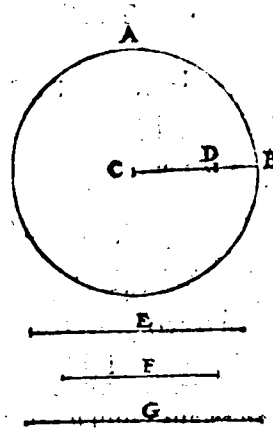
Et duodecim quidem BH ſunt decem BC, etenim BH quintupla eſt ipſius HC, & BC ipſius CH ſextupla] *Quoniam enim BH eſt quintupla ipſius HC, & BC eſt eiuſdem H C ſextupla, habebit HB ad BC peoportionem eam, quam habet quinque ad ſex. ſed quinque multiplicans duodecim producit 60, & ſex multiplicans decem producit ſimiliter 60. ergo duodecim BH ſunt aequales decem BC.* T

Hoc eſt vt BC ad DM] *Ex 15 quinti.* V

Atque eſt BC quidem cubi latus] *Hoc à nobis ſuperius demonſtratū eſt in ſecundā huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Oſtendendum eſt & qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quę poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri.



A
B
G
D

Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadē ſphæra deſcriptorum: ſumaturque circuli centrum C; & & ab eo producatur recta linea vtcumque CB: & ſecetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD ſit maior portio. quare CD eſt latus decagoni in eodē circulo deſcripti. exponatur icoſaedri latus E, dodecaedri F, & cubi G. ergo E eſt trianguli æquilateri latus, F pentagoni in eodem circulo deſcripti: atque eſt F ipſius G maior portio. & quoniam E eſt æqualis lateri trianguli æquilateri: trianguli autem æquilateri latus eſt potentia triplum ipſius BC. ergo quadratum ex E quadrati ex BC eſt triplum: ſuntq; quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutādo. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. ſed vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita eſt quadratum ex G ad quadratum ex F; eſt enim F maior portio ipſius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque. ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex C B BD. quadrato autem ex F æqualia ſunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus pentagoni poteſt & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. ſed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea

E

F

extrema

extrema, ac media ratione ſecta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque eſt G quidem cubi latus, E vero icoſaedri. ſi igitur recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, erit vt potens totam & maiorem portionem ad eam, quæ poteſt totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icoſaeſtri, in eadem ſphæra deſcriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare CD eſt latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione ſecetur maior portio eſt decagoni latus, in eodem circulo deſcripti, vt nos ſupra demonſtrauimus ad nonam tertij decimi.*

B Atque eſt F ipſius G maior portio] *Ex corollario 17 tertij decimi, nimirum ipſa G extrema, ac media ratione ſecta.*

C Trianguli autem æquilateri latus eſt potentia triplum ipſius BC] *Ex duodecimo tertij decimi.*

D Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] *Ex 4. tertij decimi.*

E Etenim latus pẽtagoni pôt & hexagoni & decagoni latus] *Ex decima tertij decimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratũ totius & minoris portionis] *Græcus codex corruptus eſt qui ſic hẽt ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ἢ πρὸς τὸ ἀπὸ ἐ, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ δ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ, οὕτως εὐθεῖας ἧς δίπλασον' ὧν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ μυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅ-λης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν μυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.* corrige *ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ἢ πρὸς τὸ ἀπὸ ἐ, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτως εὐθείας ἧς δίπλασον' τῶν ἀκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.* & ita corrige paulo poſt. etenim hæ uoces *ἡ μυναμένη.* & *τὴν μυναμένην* hoc loco ſupernacaneæ ſunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Oſtendendum nunc eſt vt latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

Quoniam enim æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, & A icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum; in ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant. nam quę à centro ſphæræ ad plana circulorum perB pendiculares ducuntur & æquales ſunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro ſphæræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum æquales ſunt, videlicet perpendiculares ipſæ: & ob id pyramides, quę baſes habent dodecaedri pentagona, & icoſaedri triangula æC que altę ſunt. pyramides autem æque altæ inter ſe ſunt vti baſes. vt igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius baſis eſt dodecaedri pentagonum, & vertex centrum ſphęræ ad pyramidem, cuius baſis eſt icoſaedri triangulum, vertex autem ſphæræ centrum. ergo & vt duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares habent baſes. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies, & uiginti triangula ſuperficies icoſaedri. eſt igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ad viginti pyramides, quę triangulares baſes habent. & duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ſunt dodecaedri ſolidum: uiginti autem pyramides, quę triangulares habẽt baſes ſunt ſolidum icoſaedri. quare & vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita ſolidum dodecaedri ad icoſaedri ſolidum. ut autem dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita oſtenſum eſt eſſe latus cubi ad icoſaedri latus. & vt

igitur

igitur latus cubi ad icoſaedri latus, ita dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

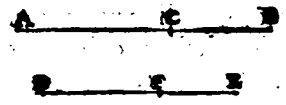
In ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant]*Ex 6. propoſitione primi libri ſphæricorum Theodoſii.* A

Et in reliqua circulorum cadunt]*Ex 9 corollario primae eiuſdē libri ſphæricorū Theodoſii.* B

Pyramides autem æque altæ ſunt inter ſe, vti baſes]*Ex quinta & ſexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas ſi extrema, ac media ratione ſectæ fuerint, in ſubiecta eſſe anologia, ita demonſtrabimus.



Secetur enim AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio ſit AC: & ſimiliter DE extrema, ac media ratione ſecetur in F, vt DF ſit portio maior. Dico vt tota AB ad maiorem portionem AC, ita eſſe totam DE ad DF maiorem portionem. Quoniam enim rectangulum quidem ABC eſt æquale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF; & ut rectāgulum, quod quater cōtinetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratū ex DF componendoque vt quod quater cōtinetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF vnà cū quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & vt quadratum ex vtraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraque DE EF ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraque AB BC ad AC, ita vtraque DE EF ad DF: & componendo vt vtraque AB BC vnà cum AC ad AC, hoc eſt duę AB ad AC, ita utraque DE EF vnà cum DF ad DF, hoc eſt duę DE ad DF. & antecedēntium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF. A B

COROLLARIVM.

Itaque hoc demonſtrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri. atque hoc demonſtrato vt latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. & inſuper hoc cognito vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum, propterea quòd idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icoſahedri triangulū: conſtat, ſi in ipſa ſphęra deſcribatur & dodecaedrum, & icoſaedrum, eandem inter ſe proportionem habere, quam ſi recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, habet potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius, ac minoris portionis. C D E

Quoniam

Quoniam enim eſt vt dodecaedrum ad icoſaedrum, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, hoc eſt latus cubi ad icoſaedri latus. vt autem latus cubi ad icoſaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icoſaedrum, quæ in eadem ſphæra deſcribuntur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eã, quę poteſt quadratũ totius & minoris portionis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratũ ex DF] *Ex 8 ſecundi, eſt enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea. & ſimiliter quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea.*

B Et longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF] *Ex 22 ſexti.*

C Eãdem habere cubi latus ad latus icoſaedri] *Ex 5 huius.*

D Ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum] *Ex quarta huius.*

E Ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum] *Ex 6 huius.*

QVARTIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVINTVSDECIMVS

ET SOLIDORVM QVINTVS,

vt quidam arbitrantur.

VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI

DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

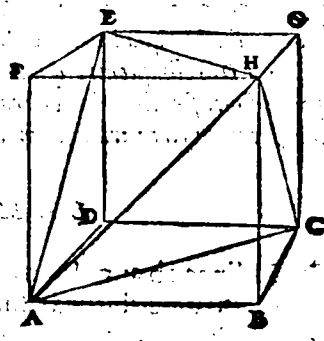
Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.



IN dato cubo pyramidem deſcribere.

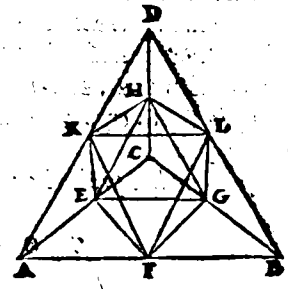
Sit datus cubus ABCDEFGH, in quo oporteat pyramidem deſcribere. iungantur AC AE CE AH EH HC. itaque perſpicuum eſt triangula AEC AHE AHC CHE æquilatera eſſe. quadratorum enim diametri ſunt latera. pyramis igitur eſt AECH, & deſcripta eſt in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum deſcribere.

Sit data pyramis ABCD, cuius latera ſecentur bifariã in pũctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur AB dupla eſt vtriuſque HK FG, erit HK ipſi GF æqualis, & parallela. Similiter & HG æqualis, & parallela ipſi FK. æquilaterum igitur eſt HKFG. Dico & rectangulum eſſe. ſi enim ab ipſa KL perpendiculares ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG HKFG ſimiliter demonſtrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera eſſe.



Quoniam igitur AB dupla eſt vtriuſque HK GF, erit HK ipſi GF æqualis & parallela] *Eſt enim HK ipſi AB parallela; namque vt DH ad HA, ita eſt DK ad KB. & eadem ratione* A 2. ſexti

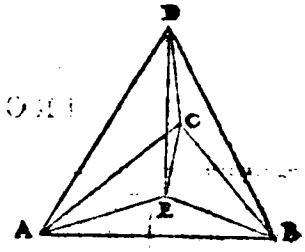
9. undecimi. tione demonſtrabitur GF parallela ipſi AB. quae autem uni, & eidem ſunt parallelę, & inter ſe
parallelae ſunt. ergo HK ipſi GF eſt parallela. triangula autem DAB DHK aequiangula ſunt.
29. primi 4. ſexti. nanque anguluſ quidem DHK eſt aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipſi DBA,
& BAD vtrique communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK, eſtq; AD dupla ipſius DH.
9. quinti. ergo & AB ipſius HK eſt dupla. & conuertendo erit AB dupla ipſius GF. quare HK ipſi GF
32. primi. eſt aequalis, atque eſt parallela, vt demonſtratum ſuit. quae autem aequales & parallelas coniun
gunt & ipſae aequales ſunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela eſt HG ipſi KF. ſunt q;
HK KF inter ſe aequales, cum aequalium ſint diuiſiones. ergo HKFG aequilaterum eſt.

Dico & rectangulum eſſe] *Vt hoc facile demonſtretur duo lemmata premittenda ſunt.*

LEMMA PRIMVM.

Si à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur.

Sit pyramis ABCD, cuius baſis triangulum ABC, & vertex D punctum: ducaturq; à puncto D ad baſim perpendicularis DE. Dico E centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis eſt ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipſam contingunt, quę q; in eodem ſunt plano rectos angulos faciet. recti igitur anguli ſunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex

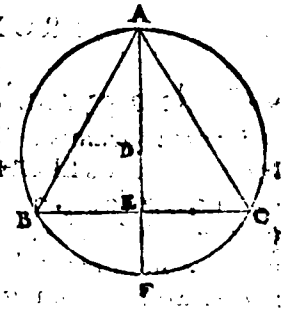


47. primi *AD eſt aequale quadratis ex AE ED. & quadratum ex BD aequale quadratis ex BE ED. ſunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quòd aequales ſint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia ſunt quadratis ex BE ED. & dempto communi quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter ſe aequalia. ideoq; rectae lineae AE EB*
3. tertij. *aequales ſunt. ſimiliter demonſtrabimus CE aequalem eſſe ipſis AE EB. quare punctum E centrum eſt circuli circa triangulum ABC deſcripti. quod demonſtrare oportebat.*

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim bifariam ſecat.

Sit triangulum aequilaterum ABC, & circa ipſum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD ſecet baſim in puncto E. Dico BE ipſi EC aequalem eſſe: producatur enim AE vſque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum tranſit, circuli erit diameter: ideoq; circumferentia ABF circumferentiae ACF eſt aequa-

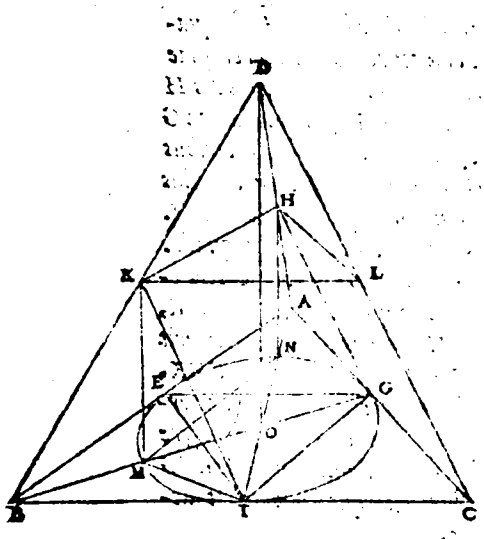


28. tertij. *lis. circumferentia autem AB aequalis eſt circumferentiae AC, quòd recta linea AB ſit aequalis ipſi AC. ergo & reliqua circumferentia BF reliquae circumferentiae FC, & angulus BAE angulo EAC aequalis erit. itaque triangulí ABE duo latera BA AE aequalia ſunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequa-*
4. primi. *lis eſt angulo EAC. ergo & baſis BE baſi EC eſt aequalis. quod oportebat demonſtrare.*

Poteſt etiam hoc probari ex tertia ſexti libri, cum BA ſit æqualis ipſi AC.

COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij conſtat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.



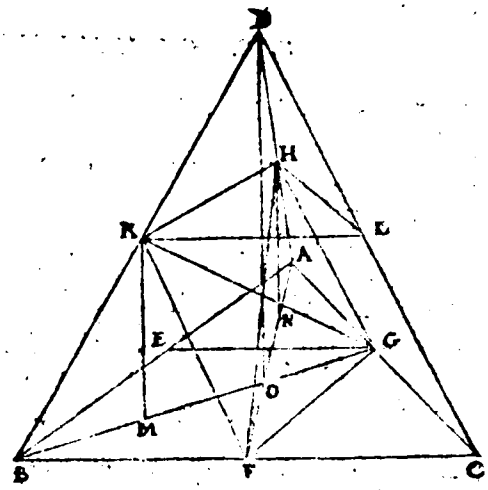
His demonſtratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad baſis planũ perpendicularis, quae ſit DO. erit O centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti, ex primo lemmate eorum, quae nos prçmiſimus. Itaque per latus pyramidis BD, et per DO ducatur planum pyramidem ſecans. erit illud rectum ad planum baſis ABC, atque erit eius, & trianguli ABC communis ſectio BO, quae vlterius protracta cadet in G ex ſecũdo lemmate prçmiſſorum; & erit ad ipſam AC perpendicularis. Eadem ratione ſi per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planum, ad baſim rectum erit, & communis ipſorum ſectio erit recta linea AOF ad ipſam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC perpendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum ſectiones ex 38 vndecimi, hoc eſt K M cadet in BO, & HN in ipſam AO: & BO AO in punctis MN bifariam diuidentur. Quoniam enim DO KM perpendiculares ſunt ad idem planum inter ſe parallelę erunt. quare vt BK ad KD, ita eſt BM ad MO. ſed BK eſt aequalis KD. ergo & BM ipſi MO aequalis erit. Eadem ratione demonſtrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus trianguli aequilateri dimidia eſt eius, quae ex centro circuli, vt ad primam quar tidecimi libri demonſtrauimus; erit OF dimidia ipſius OA, & OG dimidia ipſius OB. & cum FO OG ſint aequales, quoniã et ipſae AO OB quę ex circuli cẽtro; omnes AN NO OF BM MO OG inter ſe ęquales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipſarum FO OG circulus deſcriptus etiam per puncta MN tranſibit. deſcribatur, & NM MF iungantur. quòd cum triangula BDO BKM ſint aequiangula, propterea quòd linea KM parallela eſt ipſi DO; erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: eſtq; DB dupla ipſius BK. ergo & DO ipſius KM dupla erit. & ita demonſtrabitur DO dupla ipſius HN. quare KM HN inter ſe aequales ſunt. & ſunt parallelae, quippe quòd ad idem planum ſint perpendicnlares. quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipſae aequales, & parallelae ſunt. aequalis igitur eſt & parallela MN ipſi KH. ſed FG demonſtrata eſt aequalis, & parallela eidem KH. ergo MN FG aequales ſunt, & parallelae. angulus autem NMK eſt rectus: & ſimiliter rectus NMF, quòd in ſemicirculo. quare cũ NM duabus rectis lineis KM MF ſe inuicẽ ſecantibus in cõi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, ẽt ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. ergo NM perpẽdicularis eſt ad planũ trianguli KMF. ſed demonſtrata eſt FG parallela ipſi MN. quare & FG ad idem planũ perpendicularis erit. ideoq; angulus GFK eſt rectus. ſunt autem anguli GFK FG H duobus rectis aequales. ergo & rectus eſt FGH: & ſimiliter recti, qui ipſis opponũtur. ex quibus ſequitur HK FG & aequilaterum eſſe, & rectangulum. quod oportebat demonſtrare.

12. vndecimi

6. vndecimi. 2. ſexti.

4. ſexti.

9. quinti. 6. vndecimi. 13. primi.



4. vndecimi

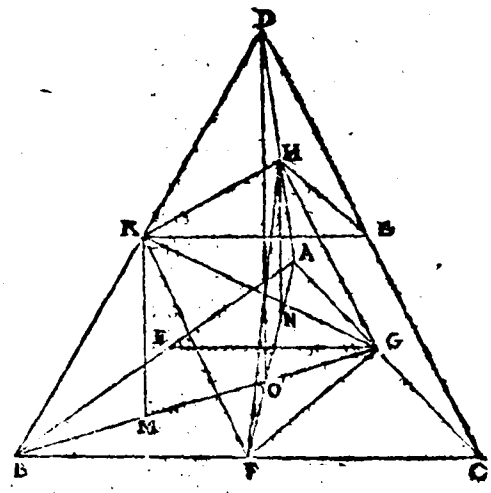
8. vndecimi

29. primi.

34. primi.

ALITER. Ductis KM HN perpendicularibus, ut in antecedẽti figura, iungantur HF KG. & quoniam perpendicularis BG eſt aequalis ipſi AF; eſt enim AB ad vtramq; ipſarũ, vt 4 ad 3, quod nos demonſtrauimus ad 12

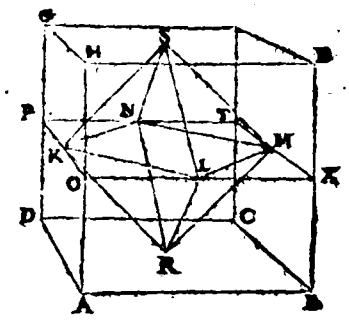
tertijdecimi libri. ſed & BM eſt æqualis AN: erit & reliqua MG reliquæ NF æqualis: atque eſt KM æqualis HN. trianguli igitur KMG duo latera GM MK æqualia ſunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus eſt æqualis recto FNH. ergo et baſis KG baſi FH eſt æqualis. rurſus. quoniam duo latera FK KH æqualia ſunt duobus lateribus GH HK, & baſis FH eſt æqualis baſi GK; erit angulus FKH æqualis angulo GHK. & ſunt duobus rectis æquales. vterque igitur ipſorum eſt rectus, itemq; recti, qui ipſis opponuntur. ergo HKFG rectangulum eſt. quod oportebat demonſtrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO. III.

In dato cubo octaedrum deſcribere.

A Sit datus cubus ABCDEFGH: & ſumantur centra inſiſtentium quadratorum KLMN. Dico
B KLMN quadratum eſſe. ducantur per KLMN
C parallelæ PO QX XT TP. Quoniam igitur PO quidem dupla eſt ipſius OK, XO autem du-
D pla ipſius OL, ſuntq́ue æquales PO OX; erunt
E & KO OL inter ſe æquales. quadratum igitur ex KL duplum eſt quadrati ex OL. eadem ratione & quadratum ex ML duplum eſt quadrati
F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM eſt æquale. æquilaterum igitur eſt KLMN, & cõ-
H ſtat rectangulum eſſe. ſumantur duo quadrata BD EG; ipſorũq́ue centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
K perſpicuum eſt triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera eſſe. quod eadem ratione demonſtrabimus.



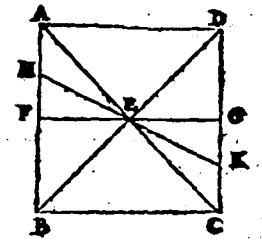
F. C. COMMENTARIVS.

A Et ſumãtur centra inſiſtentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata deſcribuntur.*

B Ducãtur per KLMN parallelę PO OX XT TP] *Hoc eſt ducatur PO parallela alteri utri ipſarum DA GH: & OX parallela alteruri ipſarum AB HE, & ſic in alijs.*

C Quoniam igitur PO quidem dupla eſt ipſius OK, XO autem dupla ipſius OL.] *Centrum enim eas biſariam ſecat, vt monſtrabitur.*

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E: perq́; E ducatur FG alterutri ipſarum AD BC parallela. Dico FE ipſi EG æqualem eſſe.



29. primi 15. primi. *Angulus enim FAE eſt æqualis angulo GCE, et angulus AEF angulo CEG: ad verticem enim ſunt. reliquus igitur reliquo æqualis, & triangulum triangulo ſimile. quare vt AE ad EF, ita eſt CE, ad EG: & permutando vt AE ad EC, ita FE ad EG.*

æque eſt AE æqualis EC, quòd AE ſit circuli diameter, & E centrum eiuſdem. ergo FE ipſi EG æqualis erit. centrum autem non ſolum ipſam FG bifariam ſecat, ſed & alias omnes, quæ in quadrato per ipſum ducuntur. quod eodem modo demonſtrabimus.

Suntq; æquales PO OX] *Eſt enim PO æqualis DA, & OX æqualis AB ex 34 primi.* D *quare PO ad OX eſt vt DA ad AB: & ſunt DA AB inter ſe æquales. ergo & PO OX æquales erunt.*

Quadratum igitur ex KL duplum eſt quadrati ex OL] *Eſt enim quadratum ex KL æquale quadratis ex KO OL ex 47 primi.* E

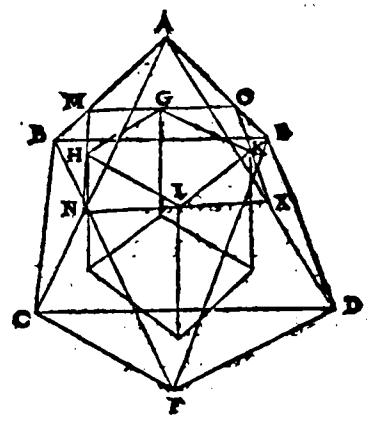
Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM eſt æquale] *Ex quo ſequitur & rectam lineã KL ipſi LM æqualem eſſe. ſed & aliter demonſtrare poſſumus. Quoniam enim duo latera KO OL ſunt æqualia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus eſt æqualis recto ad X; erit & baſis KL baſi LM æqualis ex 4 primi. et eodem modo demonſtrabitur LM æqualis MN, et OK æqualis KN. quare omnes inter ſe æquales ſint neceſſe eſt.* F

Et conſtat rectangulum eſſe] *Quoniam enim KO eſt æqualis OL, & angulus KOL eſt rectus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem cauſſam angulus MLX eſt dimidius recti. reliquus igitur K L M rectus eſt. ſunt enim tres anguli duobus rectis æquales. Eadem ratione & vnuſquiſque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonſtrabitur.* G

Perſpicuum eſt triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera eſſe. quod eadem ratione demonſtrabimus] *Iiſdem enim argumentis probabimus. KSMR NSLR æquilatera eſſe, & latera eorum ipſis KLMN æqualia.* H

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

In dato octaedro cubum deſcribere.



A B C D E F

Sumantur centra circulorum, quæ ſunt circa triangula ABE ABC ACD ADE, quæ ſint G HKL, & GH GK LK LH iungantur. Dico GH KL quadratum eſſe. ducantur per GHKL ipſis EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO. quoniam igitur æquilaterum eſt ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti bifariam ſecat trianguli angulum, qui eſt ad A. æqualis igitur eſt MH ipſi HN. Eadem ratione & MG eſt æqualis GO. quoniam autem MN eſt æqualis MO, & MO ipſi OX; erit & HM æqualis MG, & GO ipſi OK; ſuntq; anguli HMG GOK recti. ergo HG ipſi GK eſt æqualis. Eadem ratione & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum ſit GHKL in uno erit plano. & cũ vterque angulorum MGH OGK ſit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit. ſimiliter & reliqui. quadratum igitur eſt GHKL. poſſumus autem à principio ſumentes centra GHKL, ducenteſq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, & dicere GHKL quadratum eſſe. quòd ſi ſumentes reliquorum triangulorum centra, ipſa iungamus, oſtendentur & reliqua quadrata eſſe, habebimusq; in dato octaedro deſcriptum cubum, quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur æquilaterum eſt ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti bifariam ſecat trianguli angulum, qui eſt ad A. æqualis igitur eſt MH ipſi HN] *Superius enim demonſtratũ eſt rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur* A

describitur basim bifariam secare. sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quòd si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH aequalem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit aequalis, fiunt enim triangula BAC MAN inter se similia.

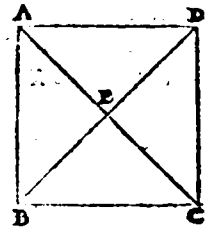
B Quoniam autem NM est æqualis MO, & MO ipsi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK] *Cum enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA, ita est NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali vt CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est aequalis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est aequalis. & eadem ratione MO ipsi OX aequalis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG aequalem esse, & ita GO aequalem ipsi OK.*

C Suntq; anguli HMG GOK recti] *Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae sunt ipsis CB BE, atque est angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 vndecimi.*

D Ergo HG ipsi GK est æqualis [*Ex 4 primi.*

E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano] Omne enim parallelogrammum est in vno plano.

Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae se se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2 vndecimi. itemq; in vno plano triangulum ACD. sed et triangulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogramum ABCD in vno plano erit. quod oportebat demonstrare.



F Et cum vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit] *Sunt enim triangula HMG GOK aequicrura, et anguli ad M, et O recti; ut demonstratum iam est.*

Ex iam demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur.

Si enim in dato octaedro cubum, et rursus in cubo pyramidem describamus, et pyramis in dato octaedro descripta erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

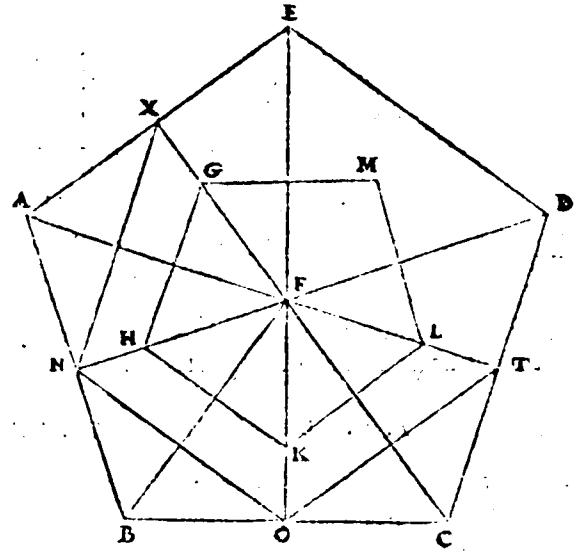
In dato icosaedro dodecaedrum describere.

A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorũ, qui sunt circa triãgula AFE AFB BFC CFD DFE, uidelicet GHKLM, iungantur; GH HK KL LM MG. & rursus iũctæ FG FH FK producãtur ad pũcta XNO, quæ rectas lineas EA AB BC in XNO punctis bifariam secabũt: atq; erit vt XN ad NO, ita GH

B ad HK. æqualis igitur

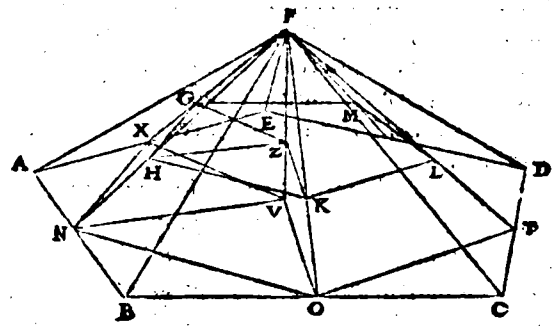
C est & HN ipsi KO. similiter autem & reli-

D



qua

qua pentagoni GHKLM latera æqualia oſtendentur. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent, & reliqua manifeſta ſunt. Intelligatur à puncto F ad planum pẽtagoni ABCDE ducta perpẽdicularis, quæ cadet in centrũ circuli circa pẽtagonũ deſcripti. ſi igitur à púcto N ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineã ducamus, & per H ducamus ipſi parallelam, perſpicuum eſt eam perpendiculari occurrere, & cum ipſa rectum angulum continere. Rurſus ſi à punctis XO ad cẽtrum circuli circa pentagonum deſcripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurit ad G K rectas lineas ducamus, manifeſtũ eſt ipſas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perſpicue cõſtat pentagonum GHKLM in vno eſſe plano.



E F G H K

F. C. COMMENTARIVS.

Exponatur pentagonum icoſaedri ABCDE] *Hoc eſt pentagonum deſcriptum in circulo, à quo icoſaedrum ortum habet, vt in 16 tertij decimi.* A

Quę rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam ſecabunt] *Ex ijs, quae nos in antecedente demonſtrauimus.* B

Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniam enim triangula AFE AFB BFC aequilatera ſunt, & aequalia; erunt perpendiculares, quae ab angulo F ad baſim ducuntur, videlicet FX FN FO inter ſe aequales. latus enim trianguli aequilateri ad perpendicularem, quae ab angulo ad baſim ducitur, eam proportioaem habet, quam 4 ad 3, vt nos demonſtrauimus ad 12 tertij decimi. Rurſus quoniam GHK ſunt centra circulorum, qui circa triangula deſcribuntur, erũt & ipſae, quae ex centris FG FH FK aequales. ergo & reliquae aequales ſunt, nempe GX HN KO. ſunt autem aequales EA AB BC: & earum dimidiae EX XA AN NB BO OC. cũ igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN aequalia ſint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB ſint aequales, ponitur enim pentagonum ABCDE aequilaterum, & aequiangulum: erit & baſis XN baſi NO aequalis. ſed vt FG ad GX, ita eſt FH ad HN: eſt enim vtraque vtriuſque dupla, vt ad primam quartidecimi demonſtratum eſt. ergo GH parallela eſt ipſi XN. & eadem ratione HK ipſi NO eſt parallela. triangulum igitur FGH ſimile eſt triangulo FXN, & triangulum FHK ſimile ipſi FNO: ideoq́, vt NX ad HG, ita eſt NF ad FH. vt autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando vt XN ad NO, ita GH ad HK. ſunt autem aequales XN NO. ergo & GH, HK aequales ſint neceſſe eſt.* C

Aequalis igitur eſt & HN ipſi KO] *Vide ne potius legendum ſit aequalis igitur eſt & GH ipſi HK propter ea, quae ſequuntur.* D

Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent: & reliqua manifeſta ſunt] *Nam cum duae XN NO ſeſe contingentes duabus GH HK ſeſe contingentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. ergo angulus GHK eſt aequalis angulo XNO. & ſimiliter bifariam ſecta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL aequalis angulo NOT. ſed anguli XNO NOT ſunt aequales, vt monſtrabitur. ergo & GHK HKL anguli aequales erunt. & ſimiliter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO aequicrura ſunt ſimilia, & aequalia, erũt anguli AXN ANX BNO BON COT inter ſe aequales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO eſt aequalis reliquo NOT: itemq́, reliqui aequales oſtendentur.* E

to. undecimi

Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonũ deſcripti] *Cadat enim in punctum V,* F

& inteligatur iunctae AV BV CV. Quoniã igitur FV perpẽdicularis est ad planũ pentagoni, erunt anguli AVF BVF CVF recti; & ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex AV VF: & quadratum ex BF ęquale duobus ex BV VF. sed quadratum ex AF est aequale quadrato ex BF, quòd AF ipsi FB sit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF sunt aequalia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum quadratum ex AV aequale reliquo ex VB, & recta linea AV ipsi VB aequalis. Eadem ratione & recta linea CV aequalis ostendetur ipsis AV VB. ergo V est centrum circuli circa pentagonum descripti. quod demonstrare oportebat.

3. dif. undecimi. 47. primi. 9. tertij.

G Perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere] Nam cum triangulum FNV sit in vno plano, si recta linea à puncto H ducta non occurreret perpendiculari, parallela non esset ipsi NV, quod non ponitur. sunt enim parallelę in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurrat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus NVF sit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.

2. undecimi.

H Manifestum est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] Quoniam n. HZ est parallela ipsi NV, erit vt FZ ad ZV, ita FH ad HN. sed vt FH ad HN, ita FG ad GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FG ad GX. quare GZ est parallela ipsi XV; angulus GZF est rectus, nempe ipsi recto XVF aequalis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit. inclinatę LZ MZ similiter demonstrabitur angulos LZF MZF esse rectos.

2. sexti. 11. quinti.

K Ex quo perspicue constat pentagonum GHKLM in vno esse plano] Ex quinta undecimi. nã recta linea FZ tribus rectis lineis se se tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos insistit. Si igitur reliquis icosaedri angulis eodem modo pentagona subtendemus in dato icosaedro dodecaedrum descriptum erit.

De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem scire, si quis interroget nos, quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. Patet icosaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodque triangulum ex tribus rectis lineis constare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient sexaginta, cuius dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt sexaginta, cuius rursus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quòd singula latera siue sit triangulum, siue pentagonum, siue quadratum, vt in cubo, bis sumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. si vero singularum quinque figurarum anguli inueniendi sint, rursus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum solidi angulum continent; vt quoniam icosaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De

De inclinatione planorum, quæ ſingulas quinque figuras continent.

Quęſitum eſt quo modo in vnaquaque ſolidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipſam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Iſidorus magnus præceptor noſter, hoc modo ſe habet. In cubo quidem plana, quæ ipſum continent, ad rectos inter ſe angulos inclinari manifeſtum eſt. In pyramide vero expoſito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quę à vertice trianguli ad baſim perpendicularis ducitur, circumferentiæ deſcriptæ ſe mutuo ſecent; & à ſectione ad centra iunctę rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quę pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli deſcripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, inreruallo autem ſimiliter perpendiculari, quæ à uertice trianguli ad baſim ducitur; deſcribantur circumferentiæ; & rurſus rectæ lineę à communi ſectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icoſaedro autem à latere trianguli deſcripto pentagono, iungatur recta linea, quę duobus lateribus ſubtenditur: & centris quidē terminis eius, interualloq; perpendiculari ipſius trianguli deſcriptis circumferentijs rectæ lineę à communi ſectione ad centra iunctę continebunt ſimiliter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipſius icoſaedri. Denique in dodecaedro expoſito vno pentagono, & iuncta ſimiliter recta linea, quę duobus lateribus ſubtenditur, centris quidem terminis ipſius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita ſectione ad latus pē tagoni ipſi parallelum ducitur; deſcribantur citcumferentiæ; & à puncto, in quo conuenient ad centra ſimiliter iunctæ rectæ lineę continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

Pyramidis.

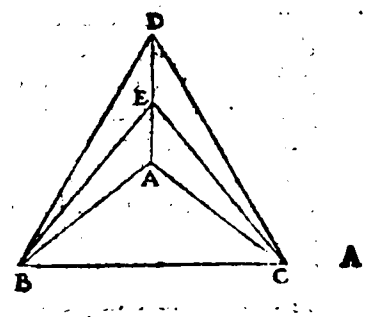
Octaedri planorum inclinatio.

Icoſaedri planorum inclinatio.

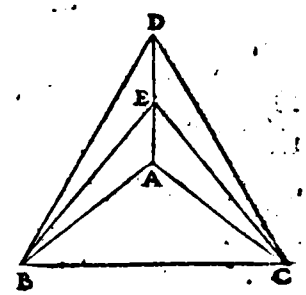
Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem vir ille clariſsimus de prędictis ſermonem habuit, cum demonſtratio eorum ſibi manifeſta videretur. ſed vt contemplatio demonſtratiua perſpicue appareat, ſermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.

Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius baſis ABC, & vertex D punctum. ſecto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera ſunt ADB ADC triangula, & bifariam ſecta eſt AD, erunt BE EC ad ipſam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum eſſe.

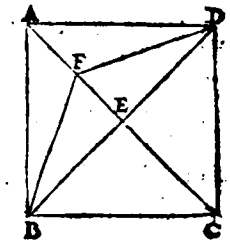


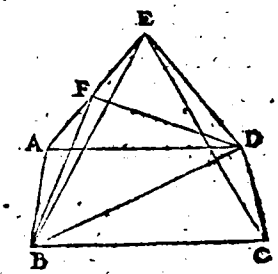
Quoniam enim AC dupla est ipsius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadra-
47. primi. tum ex AC æquale est quadratis ex AE EC, quorum
B quadratum ex AC ad quadratū ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque est CE ipsi EB æqualis: quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC; ideoque angulus BEC est acutus. quòd cum duorum planorum ABD ADC communis sectio sit AD, & communi sectioni ad rectos angulos occurrant in vtroque planorum rectę lineæ BE EC, quæ acutum angu-
D lum continent. erit angulus BEC planorum inclinatio, atque est data; datur enim BC latus existens trian-



E guli, & utraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri. centris igitur BC, hoc est terminis vnius lateris, & interuallo trianguli perpendiculari de scriptę circumferentiæ se inuicem secent in puncto E: & ab eo ad BC iunctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem est, quod dicebatur. atque illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari descripti circuli se mutuo secent,) manifestum est. vtraque enim BE EC maior est, quàm dimidia ipsius BC: & centris BC, & interuallo ipsius BC dimidia descripti circuli se se tangunt. si autem minor sit, neque se tangunt, neque secant: quòd si maior omnino secant; & ita de pyramide sermo & manifestus, & demonstrationibus congruens apparet.

Intelligatur rursus in quadrato ABCD pyramis verticem habens punctum E, & continentia ipsam præter basim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. secerur latus vnius trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. sunt igitur BF FD & æquales inter se, & ad ipsam AE perpendiculares. Dico angulum BFD obtusum esse. iungatur enim BD; & quoniam quadratum est AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrari ex DA duplum. quadratum autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proxime dictum est, quam 4 ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportiouem ha-
F bebit, quam 8 ad 3. est autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD est obtusus. & quoniam duorum planorum ABE ADE se inuicem secantium communis sectio est AE, & ipsi ad rectos angulos in vtroque plano ductæ sunt BF FD, angulum obtusum continentes; erit an-
G gulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum ABE ADE. si igitur angulus BFD datus sit, & dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam triangulū octae-
H dri datum est, & unum eius latus est AD, à quo quadratum AC describitur; datur & BD diameter existens quadrati. sed & BF FD trianguli perpendiculares datæ sunt. ergo & angulus BFE dabitur. descripto igitur quadrato à latere trianguli, ut AC, & iuncta diametro BD, si centris quidem BD; interuallo autem perpendiculari trianguli circulos describamus, se mutuo secabunt in F: & rectę lineæ à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationem BFD, quæ quidem est reliqua ex duobus rectis, vt dictum est, inclinationis planorum. & hoc loco patet vtramque ipsarum BF FD maiorem esse, quàm ipsius BD dimidiam. ideoque in constructione organica necesse est circulos se mutuo secare. constat etiam ex demonstratione ipsam BD ad DF potentia proportionem habere. quam habet 8 ad 3, & dimidiæ eius potentia esse quadruplam. ergo utraque ipsarum BF FD ma-

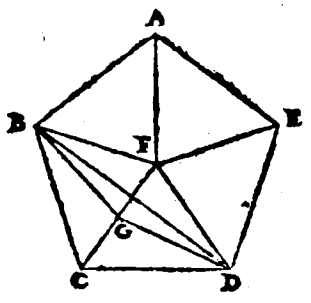


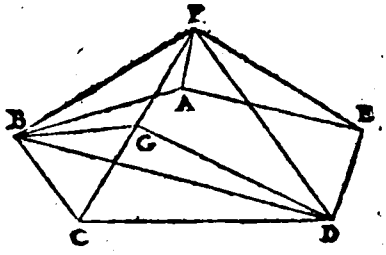


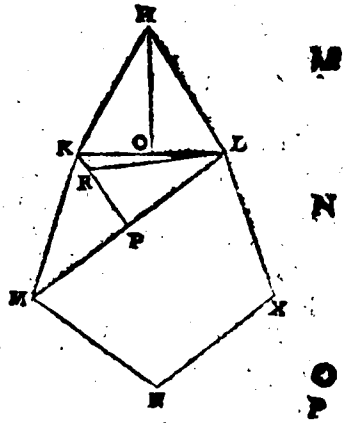
ior

ior eſt quàm dimidia ipſius BD. & hęc quidem de octaedro dicta ſint.

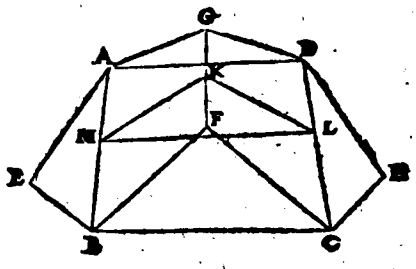
In icoſaedro autem intelligatur pentagonum ęquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis uerticẽ habens punctum F, ita vt continentia ipſam triangula ſint ęquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icoſaedri pars. ſecetur latus unius trianguli FC biſariam in G, & BG GD iungantur. erunt utique & æquales, & ad ipſam FC perpendiculares. Dico angulum BGD obtuſum eſſe, quod per ſe ſe manifeſto conſtat. Iuncta enim BD obtuſum angulum BCD pentagoni ſubtẽdit: hoc autem maior eſt angulus BGD: nam BG GD ipſis BC CD ſunt minores. ſimiliter ijs, quę proxime dicta ſunt, patet angulum BGD eſſe eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis BFC CFD triangulorum. hoc autem dato, dabitur & planorum icoſaedri inclinatio. à latere enim trianguli icoſaedri deſcripto pentagono, & recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, vt in figura eſt BD data: & ſimiliter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam ſi centris quidem terminis ipſius BD, quę duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, interuallo autem perpendiculari trianguli circuli deſcribantur, ſe inuicem ſecabunt, vt in G: & rectæ lineę à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifeſtum eſt vtramque BG GD maiorem eſſe, quàm dimidiam ipſius BD. quamquam ita eſſe ex conſtructione organica demonſtrari poteſt. intelligatur enim ſeorſum triangulum ęquilaterum HKL, & ab ipſa KL pentagonum deſcribatur KMNXL: iunctaque ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem eſſe dimidia ipſius ML, quæ inclinationẽ planorum ſubtendit. ducta enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniã angulus KLP maior eſt tertia parte recti, hoc eſt maior angulo KHO; conſtituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL eſt perpendicularis æquilateri trianguli, cuius latus eſt RL; ac propterea quadratum ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quam 4 ad 3. ſed maior eſt KL quàm LR. ergo quadratum ex KL ad quadratũ ex LP maiorem habet proportionem, quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quam 4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quã ad HO. maior igitur eſt HO quàm LP.



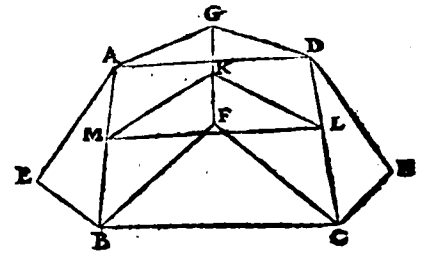




In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum deſcribitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GDHCF. Dico & ſic datam eſſe duorum pẽtagonorum inclinationem. ſecetur FG biſariam in K; & à puncto K ipſi FG ad rectos angulos ducantur in vtroque planorum KL KM: & ML iungatur. Itaque primum dico angulum MKL obtuſum eſſe. oſtenſum enim eſt in tertiodecimo libro elementorum, & in conſtitutione do-



decaedri, rectam lineam, quæ à puncto K ad quadratum ABCD perpendicularis ducitur, dimidiam esse lateris pentagoni. quare minor est quàm dimidia ipsius ML. ideoque angulus MKL est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidē ex KL æquale esse & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij lateris pentagoni, ita vt KL, & KM inter se æquales maiores sint, quàm dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datū est pentagonum; erit & ML data. data autem est & vtraque ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi paralleinm, ut ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictū est, inclinationis eius, quā inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis: & centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quę à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura sunt KL KM, describere circumferentias, atque à pūcto, in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quę continent angulum reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at uero perpendicularem KM maiorem esse dimidia ipsius ML iam dictum est, vt in elemētis simul est demonstratū.



F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erūt BE EC ad ipsam AD perpendiculares] *Ex ijs, quae nos ad 12 tertijdecimi libri demonstrauimus.*

B Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam 4 ad 3] *Ex demonstratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE EC, vt 4 ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri] *Dato autem latere trianguli aequilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum. est enim latus trianguli aequilateri ad perpendicularem, vt 4 ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD] *Est enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8 ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis reliquetur acutus angulus, qui est inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum detur necesse est ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter existens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtendit] *Angulus namque pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autem maior est angulus BGD, nam BG GD ipsis BC CD sunt minores] *Ex 21 primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.*

M Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL continet rectum, & recti quintam, vt dictum est. ergo anguli KML KLM sunt quattuor quin-*

tae

tae recti, & ipſe KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior eſt KL quàm LR] *Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex* N
21 *primi. ergo & dimidia KL quàm dimidia LR maior erit.*

Maior igitur eſt HO quàm LP] *Ex 10 quinti.* O

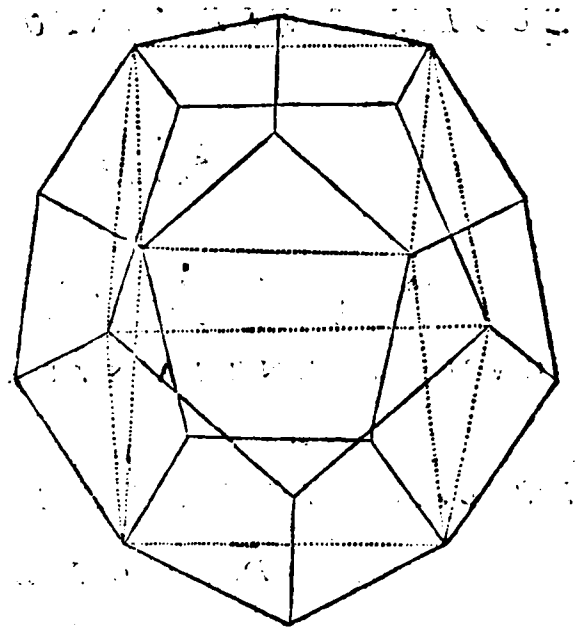
Intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum deſcribitur] *Ad conſtitu* P
tionem enim dodecaedri vtitur ipſius cubi quadratis, vt in 17 tertijdecimi apparet.

Ex ijs aũt quæ proxime tradita ſunt, & ex demonſtratis in 17 tertjdecimi libri cõſtat, quomodo in dato dodecaedro cubus deſcribatur.

Quoniam enim in dodecaedri conſtitutione cubi planis vtimur, & ad ſingula eius latera ſingula pentagona dodecaedri deſcribimus, ſi in dodecaedro iam facto appoſite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiuſque pentagoni lateribus ſubtendantur, cubus ipſe conſtitutus erit, vt in ſequenti figura apparere poteſt.

Ex quibus iam perſpicuum eſt quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipſa, tum octaedrum deſcribatur.

Nam ſi in dodecaedro cubum, & rurſus in cubo pyramidem vel octaedrum deſcribamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro deſcripta ſint neceſſe eſt.

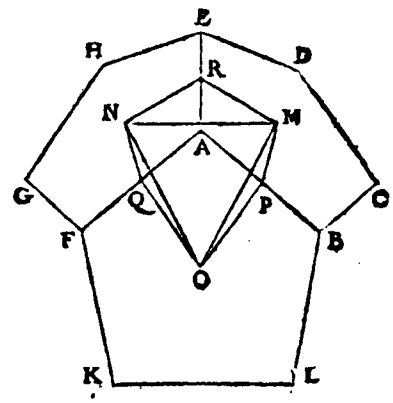


In dato icoſaedro cubum deſcribere.

Primum in icoſahedro dodecaedrum deſcribemus, vt in 5 huius dictum eſt; deinde in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icoſaedro deſcriptus erit.

In dato icoſaedro pyramidem deſcribere.

Si enim deſcribamus ex antecedenti in icoſaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icoſaedro deſcripta.



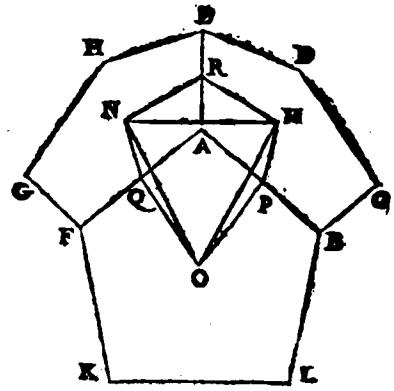
In dato dodecaedro icoſaedrum deſcribere.

Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: ſumanturq; centra circulorum, qui circa pentagona deſcribuntur MNO, & ab ipſis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonſtratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipſius dodecaedri, & idcirco inter ſe aequales:

item

itemq; aequales perpendiculares ipſae. quare trianguli MOP duo latera MP PO aequalia ſunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO eſt aequalis angulo MRN. baſis igitur OM eſt aequalis baſi MN. & ita demonſtrabitur baſis ON ipſi NM aequalis. ex quibus conſtat triangulum MNO aequiangulum eſſe. ergo ſi reliquis dodecaedri angulis triangula aequilatera eodem modo ſubtendantur, deſcriptum erit icoſaedrum. ſunt enim omnes anguli ipſius dodecaedri numero viginti, quot ſunt icoſaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icoſaedrum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

4. primi.



EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.

PISAVRI

CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMILLVM FRANCISCHINVM.

M. D. LXXII.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON 1894