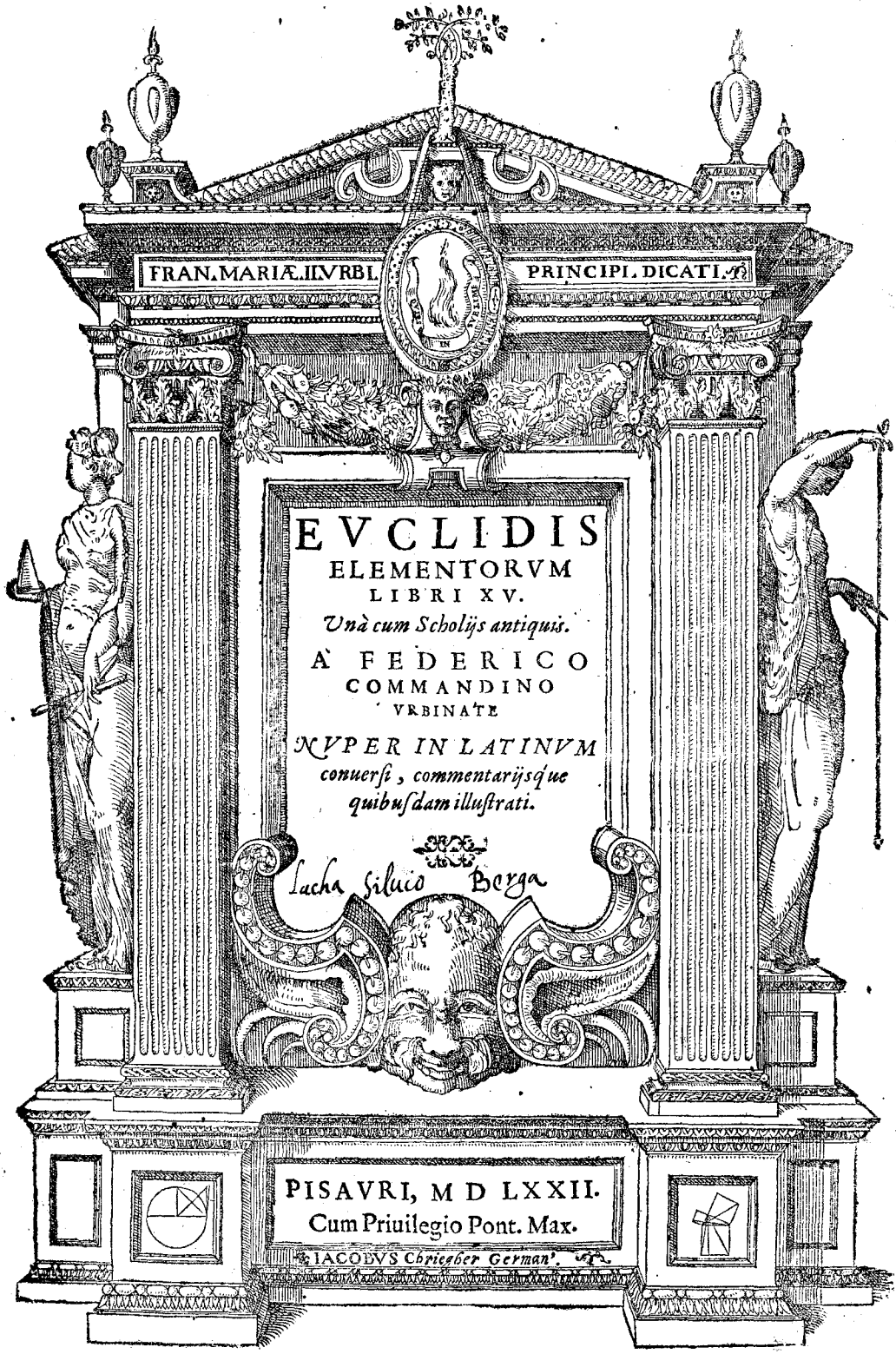
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Bibliothèque électronique suisse



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

Vnà cum Scholijs antiquis.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE

NVPER IN LATINVM
conuersi, commentarijsque
quibusdam illustrati.

Lucha Siluio Berga

PISAVRI, M D LXXII.
Cum Priuilegio Pont. Max.

IACOBVS Chriegher German'.

GREGORII XIII. PONT. MAX. PRIVILEGIVM.

OTV PROPRIO &c. Cum, ſicut accepimus, dilectus filius Federicus Commandinus Laicus Vrbinatenſis nonnulla noua opera hactenus non impreſſa, videlicet Euclidis elementorum libros quindecim è greco nuper conuerſos, & Ariſtarchi librum de magnitudinibus & diſtantijs Solis & Lunæ, necnon Pappi Alexandrini mathematicarum collectionũ libros ſex. Heronis Alexandrini ſpiritalium librum. Euclidis opera reliqua. Theodoſii de habitationibus librum, eiuſdem de diebus & noctibus libros duos. Autolyci de ortu & occaſu libros duos. eiuſdem de ſphæra, quæ mouetur, librum, & Archimedis opera omnia, ad publicam & communem omnium ſtudioſorum vtilitatem imprimere ſeu imprimi facere intendat, dubitetque ne eiuſmodi opera poſtmodum ab alijs ſine eius licentia imprimantur, quod in maximum ſuum tenderet præiudicium, Nos propterea eius indemnitati conſulere uolentes, eidem Federico, ne prędicta opera omnia & ſingula uel quolibet ipſorum per ipſum Federicum, ſeu de eius ordine poſtquam per ordinarios locorum, & Inquiſitores hereticę prauitatis partium illarum examinata fuerint, imprimenda, per decem annos, poſt eorundem operum uel cuiuſlibet ipſorum impreſſionem, à quocunque vel quibuſcunque ſine ipſius Federici licentia imprimi, aut ab ipſis uel alijs uendi, ſeu in eorum apothecis uel aliàs uenalia, præter quàm à dicto Federico, uel de eius ordine impreſſa, aut imprimenda teneri poſſint, concedimus & indulgemus. Inhibentes omnibus & ſingulis Chriſti fidelibus tam in Italia, quàm extra eam exiſtentibus, præſertim bibliopolis & librorum impreſſoribus, ſub excommunicationis latæ ſententiæ, in terris uerò Sanctę Ro. Eccleſiæ mediate, uel immediate ſubiectis, etiam quingentorum ducatorum auri Cameræ Apoſtolicę applicandorum, & inſuper ammiſſionis librorum pœnis toties ipſo facto, & abſque alia declaratione incurrendis, quoties contrauentum fuerit. ne intra decem annos prædictos ab impreſſione dictorum, uel cuiuſlibet ipſorum reſpectiue computandos dicta opera, uel quodlibet ipſorum ſine eiuſdem Federici expreſſa licentia dictis decem annis durantibus

imprimere, ſeu ab ipſis, uel alijs præter, quàm à dicto Federico impreſſa & imprimenda uendere; ſeu uenalia habere, uel proponere, uel ea, ut ſupra, habere audeant. Mandantes uniuerſis uenerabilibus fratribus noſtris Epiſcopis, Archiepiſcopis, eorumq; ue Vicarijs in ſpiritualibus generalibus & in ſtatu temporali Sanctæ Ro. Eccleſiæ etiam Legatis et Vicelegatis Sedis Apoſtolicæ, aut ipſius ſtatus Gubernatoribus, ut quoties pro ipſius Federici parte fuerint requiſiti, vel eorum aliquis fuerit requiſitus, eidem Federico efficacis defenſionis preſidio adſiſtentes, præmiſſa ad omnem dicti Federici requiſitionẽ contra inobedientes & rebelles per cenſuras Eccleſiaſticas, etiam ſæpius aggrauando, & per alia iuris remedia, auctoritate Apoſtolica exequantur, inuocato etiam ad hoc, ſi opus fuerit, auxilio brachij ſecularis. Et inſuper quia difficile admodum eſſet præſentes ad quodlibet forum deferri, uolumus & Apoſtolica auctoritate decernimus ipſarum tranſumptis uel exemplis in ipſis operibus impreſſis plenam & eandem prorſus fidem ubique tam in iudicio, quàm extra haberi, quæ præſenti originali haberetur. Et cum abſolutione à cenſuris ad effectum preſentium. et quod ſola ſignatura ſufficiat, præmiſſis omnibus conſtitutionibus & ordinationibus Apoſtolicis, ceteriſque in contrarium facientibus non obſtantibus quibuſcunque.

Placet V.

Datum Romæ apud Sanctum Marcum Non. Septembr. Anno primo.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.

VM mihi in mentem venit Illustrissime Princeps quanta mathematicę facultatis olim apud veteres illos felicioris certe seculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit, non possum non vehementer dolere temporũ nostrorũ conditionem, qua nobilis disciplinę cultus, & splendor squalore immenso, ac tenebris penitus contabescit, dum vnusquisque detestanda auri cupiditate quicquid certam in se lucri non habet occasionem, statim insolenter abijcit, temereque aspernatur. Exulat iam, publicisque ferè exclusum est gymnasijs nobile hoc, & pulcherrimum matheseos studium, quò nihil iucundius, ac magis domesticum vniuersa quandam habuit grecia. Non est sanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragonisque, aut circulis depictas porticus intueri, aut de huiusmodi rebus loquentes audire cogaris. Iacet omnino, iacet hoc disciplinæ genus, et quod in delitijs olim habebatur, nunc quasi rude, & obscurũ passim reijcitur, vsq; adeo auaritia, cæcaq; diuitiarum libido apud nostræ ætatis homines increbuit, minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magnæ doctrinæ viris has artes amanter excitatas, scio diligentissime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hęc studia benigne complecti, liberaliterq; fouere uideo: uerum enim illud esse quouis tempore homines sunt experti, qualia fuerint eorum, qui summæ rerum præsunt, eadem & reliquorũ fore studia. quam ob rem si non ad pristinum dignitatis fastigium, ad honestiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime desphero. idq; eapræsertim ratione, quòd te Princeps Illustrissime, eximia mentis probitate, singulariq; ornatum prudentia, præclaros omnes animi tui conatus ad compensanda literarum incommoda iam diu conuertisse lætus intueor. neque id iniuria profecto. nam vt illustria, & nunquam interituræ memorię exempla tuæ gentis omittam, Patrem habes incomparabilis iustitiæ, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & præmijs ornat. huic te similẽ, ac parem vt præstes necesse est. Age vero quanti est illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam hanc voluntatem, quòd non solum

literas diligis, verum etiam quo semper fuisti mentis acumine, tantos in illis progressus facis, ut omnes qui te noscunt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Vt enim de me dicam, quoties summam ingenij tui præstantiam, atque solertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate sum admiratus? Hoc tu honestissimo, nec vnquam satis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandique Euclidis onus mihi iniunxisti, quod geometrarum omnium facile principem, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuersum, nec scite figuris ornatum fuisse. præterea vero typographorum ita corruptum negligentia, vt non sine maxima studiosorum offensione legi, nedum intelligi posset. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo suscepi, tum vt optime tuæ voluntatis manduto, quod semper obnixe studui, obtemperarem; tum etiam, vt pro veteri meo instituto amatores huius disciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicinæ, cui me totum dederam, salutem plurimam dixi, vt his me tantum oblectarem studijs, & in eorum cognitione parum de alijs solicitus, conquiescerem; veterumque præstantissima in hoc genere scripta, pro ingenij tenuitate à situ, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conspectum non sine aliqua studiosorum gratia proferrem. quod partim iam sumus assecuti, partim summis uigilijs diu, noctuque contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonij, Sereniique excellentium virorum opera nonnulla superioribus annis conuersa à nobis, & explicata quàm accuratissime emisimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentiæ in Pappo, Herone, Theodosio, Autolyco, Aristarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iussu his depositis studium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phinæus haud obscuri nominis auctor priores tantum sex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadē re labor eo etiā minus probatur, quòd Cāpani editionem ex arabica conuersam lingua, magis, quàm græcam sequi uouerit. Alij autem peracuti sanè ingenij homines ἀναλύσεις geometricas in priores sex libros conscripserunt, cetera tamen non sunt prosecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione insignis, licet omnes Elementorum libros, qui postulari à latinis uidebātur, latinos fecerit, locupletaueritque, parum tamen (vt audio) eo nomine commenda-

tur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonſtrationes, quę in græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas ſuis appoſitis reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, noſtra opera præſtiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare poſſumus, nullam à nobis nec impẽſę, nec laboris, nec ualetũdinis habitam fuiſſe rationem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non ſolum expurgatum à mẽdis, & figuris eleganter excultum haberent ſtudioſi, uerum etiam ſumma fide conuerſum, & ſcholijs antiquis, commentarijſq; ue quibuſdam noſtris illuſtratũ. Hoc igitur qualecumq; ue eſt meę induſtriæ teſtimoniũ, nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, dono, dicoq; ue, ut quibus poſſum officijs meam in te fidem, perpetuamque obſeruantiam, non modo noſtrę ætatis hominibus declarem, ſed ipſi etiã poſteritati teſtatam literarum monumentis relinquam. & quod ſemper uehementiſſime conatus ſum, uere perſuadeam, neminem te habere, qui præſtantem animi tui uirtutem, egregiamq; ue doctrinam memoria ſempiterna apud omnes propagare magis ſtuduerit, ac ſemper ſit ueneratus. Vale, & nos, liberalesq; ue diſciplinas, quod facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.

QVOD plerique interpretum, atque eorum præsertim, qui maxime laudantur, facere solent, vt antequàm reuoluendi clarorum virorum monumenta, ac scripta, quę sibi pro reipublicæ literariæ commodo explicanda, exornandaq; sumpsere, initium faciant, quædam primo loco differant: idem & mihi huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuersa à principio admonitus, minori postea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnumquodque intelligendum. Primum igitur non nulla summatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus, qua nam subiecta illis materia sit, tum generatim, tum particulatim; quis ordo, ac dignitatis gradus, quae sit earumdem diffinitio, quis ortus. Deinde vero mirum in modum vsui opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsius demonstrationibus, deq; eorum, quæ in his libris complexus est, dispositione, & methodo quedam minime inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ συγγραφῆς eo consilio adiungemus, vt non solum facilius quicquid de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum custodiatur. Itaque philosophiam omnem, qua in contemplatione versatur, præclarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ea ducti ratione tradiderunt, quod rerum aliæ prorsus materiei quasi labe, ac cœno carentes solæ per se subsistunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materiæ immiscentur, vt nullo pacto absque illa possint consistere: aliæ denique medium inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent; tum quòd omni vacant materia, si accuratiori studio veram illarum conditionem inspexeris, tum quòd materia præditæ quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbecillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt nomine, ita & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit; Naturale, quod tertium est, ac postremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam solum vere disci, ac sciri potest, ob summam rei subiectæ constantiam, & certam demonstrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid enim tam eximium, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præstat, atque superius est; quæ materiæ funditus immersa, variam, & mutabilem eius sequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum est hominibus, qui ante orbis terrarum eluuiem cum feliciori fruerentur & cælo, & ingenio, sapientiam rerum cœlestium, admirabilemq; mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerat, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum prædictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheseos studium incultum iacuit. Hoc post terrarum eluuionem apud chaldæos summo præsertim Abrahami diuini propè hominis studio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam cœli serenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus scientiæ nati à Chaldæis acceptum summopere excoluerunt. Ab Aegyptijs ad græcos, quibus nec ingenij acumine, nec sciendi cupiditate quemquè merito antepositi fueris, translatum est, Thaletis Milesij, Pytagoræ Samij, aliorumq; excellentium hominum industria, quos scientiæ amor & vasta maria trãsire, & longinquas peragrare regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, si græcis credimus, natæ & altè sunt mathematicæ disciplinæ. quas postea & exercitatione, & scriptis illustrarunt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antipho, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Architas, Euclides, Aristarcus, Archimedes, alijq; innumerabiles, qui hac eximia, præstantiq; matheseos disciplina mortales propè cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim historiam hic contexere propositum est. sed hæc pauca attigimus, vt antiquam huius studij nobilitatem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis partibus

tibus, illarumq; ordine breuiter dicatur. Mathematicę omnes circa quantitatem versantur, atque illius præsidio quicquid moliuntur efficiunt. hinc facile est cognoscere, quot, & quæ sint huius disciplinę partes. Quis enim ignorat quantitatem aliam esse continuam, aliam vero discretam? & harum vtramque bifariam diuidi, quòd continua sit mutabilis, et immutabilis. discreta vero per se & ad aliquid, ita ut quadruplex quoque sit matheseos genus. scientia igitur, quæ magnitudines, et figuras continuas, non mobiles contemplatur, Geometrię sibi nomen vindicat. & est scientia quantitatis continuæ, atque immobilis positione. quæ vero mobilem, & continuam contemplatur quantitatem Astronomia dicitur. & est cognitio quantitatis continuæ semper mobilis, & eorum, quæ illius motu accidũt. Eodem modo quantitatem discretam Arithmetica obtinet, quæ numerum aut parem, aut imparem non ad alium comparando, sed per se considerat. est q; scientia discretę quantitatis, ac per se cognitæ. Musica circa mutuam sonorum uersatur habitudinem, ex quibus harmonia efficitur, ob discretam quidem, sed tamen alia ratione coniunctam quantitatem: & est discretæ quantitatis inuicem comparatæ atque ad aliquid cognitio. sed antequã ceteras matheseos species enumeremus, explicanda nobis est ratio, & modus aperiendus, quo mathematicis quantitatem & continuam, & discretam pro subiecto, eruditorum auctoritate substerni dicimus: neque enim de quoto, quod in sensilibus ipsis est, nec de quanto, quod circa corpora excogitatur, est absolute intelligendum; physici enim potius, quàm mathematici finibus continetur hęc contemplatio. Eorum igitur quæ naturali corpori insunt, nec ab eo separãtur, alia quidem nec re, nec cogitatione remoueri queunt, ut calor frigus, siccitas, quòd illa qua naturale est corpus, obtineat, alia vero etiam si re ipsa disiungi minime queant, animi tamen cogitatione fingimus abesse, eò quòd per accidens, non aũt per se, nec quatenus natura præditum est corpus, hęc habeat, qualia sunt rectũ, curuũ, inflexũ, ceteraq; id genus. Mathematicus igitur hoc pacto ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως circa quantitatem, formasq; à materia separabiles uersatur: & earum diffinitiones tradit, materiam non attingens. Quid est linea? μῆκος ἀπλατὲς, longitudo latitudinis expers. quid est triangulum? figura, quæ tribus rectis lineis continetur. & circulus figura, quæ ab vna comprehenditur linea. nulla hic materiæ mentio est, nullum eius vestigium ob allatam modo rationem. nemo tamen suspicetur mathematicas aliquo errore labi, quòd ita infirmo, ac debilis nitantur subiecto, quòd sola cogitatione conceptum possidetur. nam imaginatione quidem Geometra tamquam abaco vtitur, magnitudines diuidendo, internalla dimetiendo, & lineas describendo. hęc tamen omnia, non vt figmenta quędam, sed vti res quasdam, quę non nullam habent cum natura connexionem, nec mera somnia dici possunt; nec illarum imaginatione aliquo contaminantur mendacio mathematicæ disciplinæ. quæ vt subiectę materiei conditione à Diuinis distant, sic illas constanti, certaq; rationum demonstratione longe antecellunt. Sed recensemus iam reliquas mathematicæ species. Altera igitur facta diuisione dicimus mathematicam facultatẽ, aut in intellectilibus dũtaxat aut in sensilibus versari; intellectilia vtrique appellantes, quascumque inspectiones anima ipsa per se ipsam excitat, à materialibus sese vindicans formis. atque huius sanè generis duas principes, longeq; præstantes ponimus species, Arithmeticam & Geometriam. Eius vero generis, quod in sensilibus officium, atque opus exercet suum, sex fieri solent partes. Mechanica, Astrologia, Optica, Geodesia, Canonica, vel Musica, & supputatrix. Geometria rursus diuiditur in planorum, & solidorum contemplationem, quæ, stereometria appellatur. si quidem circa puncta, & lineas peculiaris quædam non est tractatio, quoniam neq; figura in his vlla sine planis, vel solidis fieri posset. Geometria enim nihil aliud vbique agit, nisi vt plana, & solida vel constituat, vel iam constituta inter se comparet, aut diuidat. Arithmetica similiter diuiditur in numerorum linearium, & planorum, & solidorum contemplationem; etenim species numeri per se considerat ab vnitate procedentes, ortusq; planorum numerorum, tum similium, tum dissimilium: & ad tertiam vsque auctionem progressus. Geodesia, & supputatrix congruenter his non de intellectilibus numeris, vel figuris, sed de sensilibus tractant. non enim ad Geodesiam attinet cylindrum, vel conum metiri, sed aceruos, vt conos metitur, & puteos vt cylindros, neque id rectis lineis intellectilibus, sed sensilibus efficit, interdum quidem certioribus quodammodo, vt radijs solaribus, interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. neque supputator ipsas per se se numerorum passiones considerat, sed vt sunt in sensilibus inuoluti. Rursus Optica, & Canonica à Geometria, & Arithmetica ortum habent. nam Optica quidem radijs visorijs tamquam lineis vtitur & angulis, qui ex his constant. diuiditur autem in tres partes,

in

in Opticam, quę generis nomen obtinuit, catoptricam, & scenographicam. Optica reddit causas eorum, quæ aliter quam sint, sese nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum visarum situs, ac distantias. Catoptrica circa varias, multiplicesq; versatur reflexiones, & coniecturali cognitioni implicatur. Scenographrica ostendit, quo pacto ea, quæ apparent in imaginibus, non inconcinna videantur, vel deformia, iuxta distantias, atque altitudines eorum, quæ designantur. non igitur veram æqualitatem, & concinnitatem imitandam præcipit, sed eam, quæ aspectum nostrum concinne, & apposite feriat, ita vt cum circuli representandi sint, interdum non circuli, sed ellipses describantur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Musica apparentes harmoniarum considerat proportiones, regularũ sectiones adinueniẽs, et sensus vbique vtens admiculo. Mechanica circa res sensiles, ac materiæ coniũctas versatur, dum aut bellica parat instrumenta, qualia Archimedes excogitauit, cum Marcellus Syracusas graui premeret obsidione: aut admirabilia quædam summo cum artificio constituit spiritu, ponderibus, & spartis, qualia Ctesibius, Hero, & Archimedes non sine maximo stupore suorum temporum hominibus spectanda proposuerunt. Quis enim non admiretur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem? atque vel hac vna re mathematicas facultates, quæ talia præstare possunt, non summopere veneretur? Percurrit propriũ mentitus signifer annum, Et simulata nouo cynthia mense redit. ita ut eleganter exclamet Iuppiter apud Claudianum. Huccine mortalis progressa potentia curæ. Iam meus in fragili luditur arte labor. Quid quod aiũt Architam hac in re tantum potuisse, ut columbam ligneam in aere uolantẽ, quasi anima præditam, ac sese sustentantẽ fecerit. Astrologia de mundanis edifferit motibus, de cœlestium corporum magnitudine figura, atque illuminandi ui, nec non de eorundem à nobis distantia. Huius partes sunt Gnomonica, Meteoroscopica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimensionem per gnomonum positiones uersatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inscribitur, diffuse pertractat. Meteoroscopica eleuationum differentias, & distantias syderum exquirit, atque alia multa, & uaria, quę ad Astrologiam attinent theoremata docet. Dioptrica distantias solis, & lunæ, aliorumq; astrorum, per eiusmodi instrumenta inuestigat. Ceterum de his bacchius summatim dixisse satis sit. Sed quoniam plerique his præsertim temporibus sola utilitate ad optimarum artium studia excitantur, liberalesq; colunt disciplinas, uideamus obsecro, an mathematicæ nullius sint commodi ad iuuandos humanæ uitæ usus, iuti cęca quorundam turpissimi lucri cupiditas falsa iam prædicatione diuulgauit, ita ut qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitis, uel alio studio occupatis hominibus palàm derideantur, tamquam in re inutili, atque uana oleum, & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aiunt, Minerua, quando nobis negocium est cum ijs, qui sola quæstus ratione persuaderi possunt, & inuramus hanc notam ingenuæ, ac nobili disciplinæ, ut lucrum, & diuitias pollicendo huiusmodi hominum sibi studia, & gratiam comparet. Negent isti primum, si possunt, mathematicas artes popularem utilitatem nullam habere, si mercatura cuius exercitatione tam multi distinentur ob magnam quæstus occasionem, sine arithmetica tractari potest. Experiantur deinde siquid dimetiri queunt absque Geodesiæ adiumento. fulcent maria, & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo astrologiæ nauticæ fulti præsidio. Quid medicus? quantum uel unus Hipocratis iudicio debet Astronomiæ, cuius ductu syderum cursus & lunæ præsertim cognoscit. Vnde uniuersa dierum, quos criticos uocant, dependet ratio, quam diligenter cauendum est, ne grauiori aliqua curatione uexet ęgrotantem, dum luna, idq; præcipue morbi initio, à combustione, ut nunc loquuntur, ad oppositionis gradum proficiscitur? Quantum denique commodi, atque utilitatis affert Geometria, Arithmetica, & reliquę omnes in publicos, & priuatos usus? cum nulla uel infimarum artium, ut finem consequatur, matheseos ope non egeat. quod singulas accuratius intuenti facile patet; & à nobis nullo negocio probaretur, nisi longam de re certa uitaremus disputationem. colore, umbra, situ, raritate, ac densitate mediorum, & refractione, quâ uarios ornatus, admirabilesq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum uoluptate spectando decipimur? sed erramus, sola enim utilitate cum illis agendum est. quare omissis opticis, & pictoribus mera afferantur commoda. Quo nam pacto igitur differi possunt, quin mathematicæ ad uniuersam ciuitatum utilitatum mirabiliter ualeant, tum actionum tempora dimetiendo, tum uarias uniuersi reuolutiones demonstrãdo? Ars uero militaris, quę politices dextra manus est, qua ratione uolens, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra, acies? e ad figuram circuli; ubi uero copias ostentare cupit, ad figuram quadranguli format, nisi imus Geometria auxilio? Quomodo aut hostiũ urbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, nisi

ipsius

ipsius Mechanices adiumento, quæ admirabiles ad oppugnandum, aut resistendum fabricatur machinas, vti Archimedes aduersus Marcellum, qui (nam Ctesibios, Architas, Priscos, Eudoxos, Dionenetos missos facio) cum hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem prædicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, vt tantæ fiduciæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in siccum eductam, grauiusq; oneratam solus machinis suis ad se pertraxit, non secus ac si in mari remis, ac uelis agitaretur. contra postea Alexandriam regis eiusdem nauim è littore in Mare deduxit, quod omnes siciliæ vires non potuerunt. Hac igitur arte qui instructi sint, vrbis mœnia tueri, & hostium oppugnationes eludere queunt. & habuisset tanto impetu res cœpta fortunam (ait Liuius, cum de Marcello Syracusas oppugnante loquitur) nisi vnus homo Syracusis ea tempestate fuisset. Archimedes is erat, vnicus spectator cœli, Syderumq;, mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq;, è quibus ea quæ hostes ingenti mole agerent, ipse perleui momento ludificaret. libuit tam insigne illustris historici de Archimede testimonium afferre, vt huius exemplo, quantum vtilitatis, ac commodi sibi ac patriæ homines comparare possint, intelligant, si nobilem Matheseos facultatem diligenti cura, studioq; excoluerint. ceterum dissimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philosophorũ, (vt sibi videntur) impudenti audacia (Cur enim grauius non ferã mathematicas ab ijs calumniari, quorũ esset munus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarũ cupiditas arctissimis deuinctos laqueis tenet) Sed aduersus hoc philosophorum genus nihil aliud dicã nũc, quòd sciã Aristippos istos, & Epicureos, vt vere, & eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multę eruditionis, potius dolore quodã, studioq; suam tegendi ignorantiam talia dicere, quàm quòd reuera putẽt matheseos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adiumenti afferre ad omnes liberalium artium disciplinas, præsertimq; ad Platonis Aristotelisq; monumenta, quos hoc doctrinæ genere plurimũ delectatos fuisse plane constat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie necessaria imprimis, scituq; pulcherrima apud hos inueniant, quę quoniam mathematico more tradita sunt, quasi scopulos quosdam euitare coguntur. Hinc Timæum non attingunt tãquã fabulosum, & nullius pretij libru. Hinc septimum physicæ auscultationis librum, multaq; alia Aristotelea suis discipulis, quòd, vt aiũt, inutilia sint, explanare grauantur. sed plura fortasse dicta sunt de hac re, quàm oportuit. nam vera matheseos vtilitas, eximij fructus, incredibilesq; voluptates in sola veritatis cognitione, ad quam nati sumus, positæ sunt. hac vna nos vere homines, uereq; diuini luminis participes ostendimus. cetera terrenam & fragilem præseferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram nostrum spectant. Et primum de ipso Euclide; deinde de inscriptione, et scopo dicamus. postremo de illius demonstrationibus, quemadmodum à principio promiseramus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo persuasi credunt Euclidem nostrum eundem esse & philosophum megarensem, & geometram, totamq; hanc rem breuiter explanemus. Fuit senior Euclides ex Megaris oppido, quod isthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis studiosus, ac megaricæ sectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes Socratici, triginta tyrannorum metu cõfugerũt. Hic dialogos sex conscripsit, quos enumerat Laertius. vsus est probationibus non ijs, quę per assumptiones, sed quę per conclusiones fiunt, ac magis dialecticę sunt. successorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui ΣΟΡΙΣΤΗΣ ac geometra, dictus est, tempore Primi Ptolemæi floruit, academiam diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis discipulorum consuetudine egregie eruditus, Mathesim, quæ in Academia præceptoris instituto tunc maxime vigebat, ita præclaro animi impetu est aggressus, vt progressus admirabiles, ac sempiterna sui memoria dignissimos in ea fecerit; constantiq; omnium doctorum testimonio principem locum sibi vendicarit. nemo autem mihi ignotum esse arbitretur, Valerium Maximum scribere Platonem sacræ aræ conductores ad Euclidem, tamquam ad primarium mathematicum reiecisse. sed nos Heronem, & Proclum matheseos studio insignes sequimur, vel potius Eudemum ac Theophrastum ex peripateticis post præceptorem nobilissimos. hi namque hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris, quos de historia geometrica conscriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo periisse non ignoramus. Euclides igitur noster post Hippocratem, Leontem, Teudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius post alii conscripserant, opus hoc vere aureũ, summo cum labore, præstantiq; mentis iudicio contexuit. Multa quidẽ inuenerant superiores illi hominẽs excellenti quodã, ac propè diuino ingenij acumine, non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone versati sunt. Itaque Euclides

dispersa

dispersa collegit, collecta disposuit, & quæ pinguius, nec ligentiusq; demonstrata fuerant, ipse ad absolutas, ἀνελεκτους ἀ, demonstrationes redegit. magna profecto laus superiorũ, multo tamen maior Euclidis, qui indigesta eo composuit ordine, vt vel hac vna re perpetuam sibi apud sanę mentes laudem compararit. incboata ita absoluit, incerta ita firmissimis rationibus certissima effecit, vt nihil amplius propè in eo desideretur. Iam duo ferè annorum millia abierunt, ex quo Euclides inter viuos cõnumeratus est. multos habuit aduersarios, qui inuidiæ potius morbo, quàm veritatis amore illius scripta omni studio labefactare sunt conati; nullam tamẽ adhuc in illis φευδολογεκφίαν, nullum errorem, nullum paralogismum seueri inquisitores deprehendere potuerunt. Cetera vero præstantissimi huius viri monumenta hęc habentur. Optica, Catoptrica, Musica, Data, phænomena, scripsit etiam librum de diuisionibus, conicorum libros quattuor, porismatum tres, vt ex Proclo, Pappoq; constat, qui quidem ad manus nostras non peruenerunt. Atque hæc sunt, quæ inuenire potuimus de Euclide nostro, cuius immortali beneficio Mathesis, quæ græcũ mare ex Aegypto transgressa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, suam dignitatem, suosq; honores non sine deorum voluntate est consecuta. Nunc quæ studiosorum mentes haud leuiter perturbat opinio de elementorum demonstrationibus, paucis referatur. quamuis enim hæc disceptatio nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maxime tamen solicitos habet, nescio quo pacto huius disciplinæ amatores; quippe quòd scire percupiant, cuinam tantum beneficij, atque adeo singulare munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re disputarunt, Ioannes Buteo, & Petrus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorsus abiere sententias. hic enim in suo Matheseos proœmio non solum demonstrationes Theoni (quod etiam alij dixerunt) ascribendas putat, verum etiã ipsa elementa, tum quia στοιχειώτης vltimus fuerit, nullusq; propositionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipse suas editiones in elementa nominatim laudarit in primo commentario super Ptolemæi magnam constructionem, ita vt elementa sibi eo iure vindicare possit Theon, quo antea Euclides. Idipsum ea quoq; probat ratione, quòd Euclidis demonstrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in suis annotationibus in Euclidem hoc disertè negat; veteremq; præclarissimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos numquam sine demonstratione theoremata proferãtur; vt quæ nullã, si nuda fuerint, habeant vtilitatẽ, ac dignitatẽ; quodq; vero simile sit, verba illa ἐκ τῶν θεωνος συνουσιῶν, ex quibus omnis effluxit disputãdi occasio, ita possint intelligi, vt dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in elementa, sed illos temporum calamitate perisse, quemadmodum & quæ in eundem Pappus Alexandrinus scripserat, conseruato tamen titulo, qui postea Euclidi ipsi negligentur adiectus est. Nos autem medium secuti credimus libros de elementis suis ornatos demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos. qui enim de hoc dubitare possumus, cum Proclus in commentarijs in X. propositionem, post recitatam Apollonij pergæi demonstrationem hęc verba subiungat? πολλῶ δὴ οὖν κρεῖττων ἡ τοῦ σοι χειωτοῦ ἀπόδειξις: hoc est lõge igitur melior est stichiote (ita enim Euclidem appellat) demonstratio, & simplicior, magisq; ex principijs. vt autem hoc vere asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonstrationes fusius, planiusq; explicatas in lucẽ protulisse: quod apud Proclum obseruari potest. Sic data nõ eo prorsus habentur modo, quo apud Pappum in septimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoprica, quæ nos vidimus Romę in vaticana bibliotheca. Quamobrem si hæc omnium consensu Euclidi concedimus, etiam elementa concedenda sunt, præsertim cum verbis potius, quàm re ipsa Theon ab eo discrepet in demonstrandi ratione. sunt igitur illę quidem demonstrationes Euclidis, sed eo modo conscripta, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicauit. Non inutile autem, nec inucundum illud legentibus fore crediderim, si Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis nostri insignes huic disputationi sententias, tamquam coronidem addidero. poterunt enim Geometriæ candidatis esse loco orationis copiosæ, atque elegantis. Plato igitur vt necessariam prorsus facultatis huius cognitionem futuro philosopho palam ostenderet, verba hęc pro foribus gymnasij posuit. οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. nemo rudis Geometrię huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui post præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematum, ac Geometrię ignaro gymnasium ingredienti, Abi, inquit, λαβὲς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας. ansas enim philosophiæ non habes. Quid vero de nostro Geometra habemus dicere? Hic Ptolemæo Regi primo interroganti,

an dia

ea alia facilior, atque commodior esset, discenda Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla, inquit, ò Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quàm constantem igitur animi diligentiam, alacremq́ discendi voluntatem iuuenes ad hæc studia afferre oporteat, non solum Geometriæ, quæ per se nobilissima est, sed & totius philosophiæ caussa, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus iã de operis inscriptione, simulq́ de Auctoris proposito. Nã quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnius, & alterum fermè cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Ευκλείδου στοιχείωσις. *qui vero ex Theonis sententia hoc opus nobis exortum reliquit.* Ευκλείδου στοιχείων βιβ. ιε. *Idem tamen vtraque significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicũque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborum illorum* ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν *permotus testimonio. nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem commentarios ipse composuit, se ex Hamonij Hermeæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenue prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorẽ, cum nomẽ suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industriæ fructum Theoni dũtaxat acceptum referre. At enim quæret fortasse aliquis, nec iniuria profectò, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, solum protulerit: cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, aliisq́ dici soleat, adiungendum erat omnino, cuiusnam rei illa essent elementa, elementorum ve institutio; vt à latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omissum diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis de puncti notione cognoscitur, aut Hamonium secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmaremus hanc inscriptionem* κατ' ἐξοχὴν, *ac quandam Geometriæ excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. sic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, quæ in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literatæ sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, oratioq́ ex his constat, sic & totius Geometriæ sunt quædam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ sequuntur, perq́ omnia peruadentia, & multorum accidentium præbentia demonstrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcumque ad plura pertinent & simplicẽ quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum; propterea quòd eorum contemplatio non sit communis omni scientiæ. Quæcumque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hæc extra elementarium vim cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundi apud Euclidem, & quartũ quinti; sic & alia multa inter sese elementa esse dicentur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quòd extrinseci rectilineorum anguli quattuor rectis sint æquales, intrinsecorum recto æqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur. estq́ huiusmodi elementum lemmati assimile. Aliter præterea dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicetur, sed quæ principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum sunt elumenta. iuxta hoc elementi significatum & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometriæ, quę circa plana versatur; alia vero eius, quæ circa solida. sic & in Arithmeticis, & in Astronomicis elementa res institutiones multi conscripserũt. Propositũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuersã Geometriã necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq́, ac primis principijs maxime affinia theoremata, sine quibus reliquæ huius scietiæ partes cõprehẽdi nõ pũt. Euclides. n. ipse in aliis libris Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus, et reliqui ad eorum demonstrationes his tamquam notissimis vbique vtuntur. Quod vero ad dispositionẽ, ac methodum Geometricorũ sermonũ attinet, sciendum est (vt inquit*

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias scientias certa quædam, & definita principia habere, ex quibus ea, quæ sequuntur, demonstrat. quare necesse est seorsum quidem de principijs, seorsum vero de ijs, quæ à principijs fluunt pertractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia consequuntur, rationibus confirmare. nulla enim scientia sua demonstrat principia, verum circa ea per sese sibi fidem facit, cum magis euidentia sint, quàm quæ ex ipsis deriuatur: & illa quidem per sese, hæc vero deinceps per illa cognoscit. Ita & naturalis philosophus à determinato principio rationes producit, motum esse ponens; ita & medicus, & aliarum scientiarum, atq; artium peritus. Quòd si quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem commisceat, is totam perturbat cognitionem: eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter se conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quæ consequuntur, sunt distinguenda. quod sanè Euclides in vnoquoque suorum librorum obseruauit; quippe qui ante omnem tractationem communia huius scientiæ principia exponit: et ipsa in suppositiones, seu diffinitiones, postulata, et axiomata diuidit. differūt nāque hæc omnia inter se, nec idem est axioma, & postulatum, & suppositio, vt Aristoteles asserit. Cum enim is, qui audit propositionem aliquam, statim sine doctore vt veram admittit, eique certissimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter se æqualia sunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per se se fidem faciat; verum tamen supponit, & eo vtenti assentitur, ea suppositio est, verbi gratia, circulum eiusmodi esse figuram, communi quadam notione non percepimus, sed audientes absque vlla demonstratione approbamus. Cum autem rursus & ignotum sit addiscenti, quod dicitur, & tamen eo assentiente assumatur, tunc id postulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales esse. Quæ autē à principijs enascūtur, ea sunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud est, in quo quippiam, cum primum non sit proponitur inueniendum, ac construendum. Theorema autē in quo quippiam in constituta iam figura ita esse, vel non esse demonstratur. In hac igitur elementari institutione Euclidem quis non summopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa distribuit, theorematū, atque problematū? non enim oīa assumpsit, quæ poterat dicere, sed ea duntaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios syllogismorū modos vsurpauit, alios quidem à causis fidem accipientes, alios vero à signis profectos, omnes necessarios & certos, atque ad scientiam accōmodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diffinientem in essentialibus rationibus; demonstrātem vero in progressibus, qui à principijs ad quæsita fiunt. denique resoluentem in ijs, qui à quæsitis ad principia fiunt regressibus. Quin etiam varias conuersionum species tum simplicium, tum compositarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis conuerti possint, quæ ve tota partibus, & contra, & quę vt partes partibus. Postremo admirabilem omnium dispositionem, antecedentiūq; & consequentiū ordinē, ac coherentiā, vt nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipsa inter se se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumq; ortum declarat, & symptomata, quę in ipsis sunt, demonstrat. postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem ostendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de ijs, quę in triāgulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à subtendente rectum angulum describitur ad ea, quæ comprehendentibus ipsum fiunt.

In secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. postea de quadratis, quæ à lateribus obtusiangulorum, & acutiangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à subtendentibus obtusum & acutum angulum fiunt ad ea, quę à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias constituntur.

In quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus & circumscriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In

In sexto de proportionibus figurarum inter sese, de figuris similibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quę vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione secetur, de proportionibus circumferentiarum & angulorum, itemq; sectorū in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur. de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcumque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & solidis. de similibus planis, & similibus solidis.

In nono item de similibus planis, de cubis, & solidis, & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itēq; de rationalibus & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad stereometriam spectant, hoc est ad solidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad solida corpora referūtur, vt delicet quando sint in vno plano, quando rectæ, seu perpendiculares ad planum, quando parallelę, quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis simul desertis, tū de solidis angulis, postremo de solidis parallelepipedis, & nonulla de prismatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et prismatibus; postea de conis et cylindris; demum de sphęris.

In terciodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellāt; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icosaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphęra descriptorum comparatione.

In quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundē lateribus, & angulis.

FINIS.

INDEX EORVM, QVAE IN HIS LIBRIS demonstrantur præter ea, quę Euclidis sunt.

IN PRIMO LIBRO.

IRCVLI diameter bifariam circulum secat. 3.b

In data recta linea triangulum æquicrure, & scalenum constituere. 8

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineę non ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt. 14.b

Si alteram parallelarum secuerit recta quędam linea, reliquam quoque secabit. 19.b

Rectæ lineæ, quę à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitũ producuntur, inter se conueniunt. 20

Omnis rectilinea figura, angulos, qui extra cõstituuntur, quatuor rectis æquales habet. 21

Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, & angulos æqualia habet, parallelogrãmũ est. 22

Omne quadrilaterum, quod ab vtriusque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est. 24

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut æquales habuerint, & fuerint ad easdem partes: in eisdem etiam parallelis erunt. 25

Si trianguli par allelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; basi, aut in æqualibus erunt. 25

Quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo. 26.b

Quadrata ab æqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se æqualia sunt. 27

Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis descripta sunt. 27

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, & in dato angulo rectilineo parallelogrãmum constituere. 27.b

IN SECVDO LIBRO.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, quæ secentur in quotcumque partes, rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale rectangulis, quæ vnaquæque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. 29.b

Si fuerint duæ rectę lineæ, quæ vtcumque secentur, rectangulum totis contẽtum vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipsarum est æquale rectangulis, quæ continentur totis, & dictis partibus vnà cum eo, quod reliquis partibus continetur.

Arithmeticę analogę demonstratio. Theorema autem est.

Quadratũ, qđ fit ab excessu vnà cũ eo, quod extremis cõtinetur, quadrato medij æquale esse. 31.b

Si recta linea in partes inæquales secetur, earũ partiũ quadrata æqualia sunt rectãgulo, quod bis dictis partibus continetur, vnà cum quadrato eius lineę, qua maior pars superat minorem. 32

Propositio IX aliter demonstratur. 33

Propositio X aliter demonstratur. 33.b

Cuiuslibet trianguli obtusum angulum habentis, aream dimetiri. 34

Propositionis XIII conuersa. 35

Cuiuslibet trianguli, siue acutianguli, siue rectanguli, siue obtusianguli, quod nota latera habeat, aream inuenire. 35.b

IN TERTIO LIBRO.

COnuersum diffinitionis circuli. si in ambitũ figura ab aliquo puncto eorum, quę sunt intra, incidant æquales rectę lineę, ea circulus est. 37.b.38

Propositionis VII conuersa. 39.b

Si in circumferentia circuli aliquod punctum sumatur, ab eoq; in circulũ ducãtur rectę lineę; quæ per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum vero quæ trãseũti per cẽtrũ propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores, duæ aũt tantum æquales sunt ad vtrasque partes maximę. 40

Propositionis XIX. conuersa 43.b

Spacium

Spacium quod est ad centrum duplum est anguli, qui ad circumferentiã, quando circumferentiã eãdem pro basi habuerint. 44
Propositio XXI aliter demonstratur
In eadem recta linea neutra ex parte similes & inæquales circulorum portiones constitui possunt. 44.b
In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt. 45
Si æquales rectæ lineæ æquales, & similes circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorum illæ sunt circumferentiæ. 46.b.47
In circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ dissimiles circumferentias auferunt. 47
In circulis inæqualibus similes circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.
Similes & inæquales circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.
Si à puncto extra circulum sumpto ducantur in circulum quotcunque rectæ lineæ ipsum secantes, rectangula, quæ totis, & earum portionibus extrinsecis continentur, inter se æqualia sunt. 50
A puncto extra circulum sumpto ductæ duæ rectæ lineæ circulum contingentes, inter se æquales sunt.

IN QVARTO LIBRO.

IN dato circulo rectam lineam rectæ lineæ datæ, quæ diametro maior non sit, æqualem, & alteri date parallelam aptare.

IN QVINTO LIBRO.

SI prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem, ad quartam minorem proportionem habeat quam quinta ad sextam, & prima ad secundam minorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam. 64.b
Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quam tertia ad quartã, tertia autẽ ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam, & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam. 64.b
Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam sitq; prima maior quàm secunda; & tertia quàm quarta maior erit; et si æqualis, æqualis, & si minor, minor. 65.b
Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt. 68.b
Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, & conuertendo secunda ad primam minorem proportionem habebit, quam quarta ad tertiam. 69
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam. 69
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, etiam componendo prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia, & quarta ad quartam. 69.b
Si prima, & secunda ad secundam maiorem habeat proportionẽ, quàm tertia, & quarta ad quartam, & dividendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartã.
Si prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam, per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam. 70
Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiã prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam & quartam.
Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquã maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.
Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatq; prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundã, secunda vero priorũ ad tertiã maiorem proportionẽ habeat, quã secunda posteriorum ad tertiam; etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam. 70.b

IN SEXTO LIBRO.

Triangula & parallelogramma in æqualibus baſibus conſtituta, eãdem inter ſe proportionem habent, quam eorum altitudines. 72. b
Propoſitio VI. aliter demonſtratur. 74. b
Datam rectam lineam in datam proportionem ſecare. 75. b
In dato triangulo quadratum deſcribere. 76
Tribus datis rectis lineis AB. BC. & D. Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipſam D. 76. b
Si rectilinea æqualia, & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqualia erunt. 81
Triangula, quę vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compoſitam. 81. b
Quomodo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur.
Proportio data ex data proportione maiori quo pacto auferatur.
Quomodo in numeris proportiones & componantur, & auferantur.
Triangula, quorum vnus angulus vni angulo eſt æqualis inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.
Parallelogramma æquiangula inter ſe proportionem habere eandem, quam rectangula, quę ipſorum lateribus continentur. 82
Triangula, & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſiũ, & proportione altitudinum.
Propoſitio XXVII aliter explicatur. 84
Duorum rectilineorum inæqualium exceſſum, quo maius ſuperat minus inuenire. 84. b
Theorema Pappi, quod multo vniuerſalius eſt, quàm XXXI Euclidis.

IN SEPTIMO LIBRO.

Expoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, non ceſſabit huiuſmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit. 90
Expoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, ſi de maiori ſemper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vſque non perueniet.
Duobus numeris expoſitis, comperire an inter ſe primi ſint, an compoſiti.
Si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri. 91
Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; & vterque vtriuſque æque multiplex erit, atque vnus vnius. 91. b
Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine ſingulis ſingulorum æque multiplices; quotuplex eſt vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium.
Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referãtur, ſintq; ſinguli ſingulorum, vel eadem pars, vel eadem partes; quæ pars, vel partes eſt vnus vnius, eadem pars, vel eędem partes erunt & omnes omnium. 92
Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati; & reliquus reliqui æque multiplex erit, atque totus totius.
Quę eidem eadem ſunt numerorum proportiones, & inter ſe eędem erunt. 93. b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt. 94. b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & componendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & diuidendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & per conuerſionem rationis proportionales erunt.
Si primus ad ſecundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem & quintus ad ſecundum proportionem eandem, quam ſextus ad quartum: & compoſitus primus, & quintus ad ſecundum eandem proportionem habebit, quã tertius & ſextus ad quartũ.
Si numerus aliquis plures numeros multiplicans fecerit totidem alios, factì eandem, quam multiplicati proportionem habebunt. 95. b

Si

Si plures numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti eandem, quam multiplicantes proportionem habebunt. 95.b
Numeris quotcunque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsi proportionem habeant. 99.b

IN OCTAVO LIBRO.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt. 109
Solidi numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt. 109.b

IN NONO LIBRO.

Sicubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus non erit cubus. 111
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum, & multiplicatus non erit cubus.
Si duobus numeris propositis, eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis, æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt. 114
Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte inter se compositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.
Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit, æqualis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. 115
Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis est quadratis, qui à partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.
Si par numerus bifariã diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus, vnà cum quadrato numeri interiecti, æqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.
Si par numerus bifariam diuidatur, adijciatur q; ipsi numerus aliquis; qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est æqualis quadrato eius, qui ex dimidio & adiecto conflat. 115.b
Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, et dicta parte vnà cũ reliquæ partis quadrato. 116
Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, et vna parte fit numerus planus vnà cũ quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, et dicta parte tamquam ab vno efficitur. 116
Si par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeri fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri interiecti.
Si par numerus bifariam diuidatur, adijciatur q; ipsi alter numerus, qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati, dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati qui ex dimidio et adiecto tamquam ex vno efficitur. 116.b
Illud autem, quod vndecimæ secundi libri respondet, nempe numerum ita dividere, vt qui ex toto & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

IN DECIMO LIBRO.

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam inter se proportionem habeant in numeris inuenire. 126.b
Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum ita quadratum rectæ lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum. 130.b
Duos numeros planos dissimiles inuenire. 131
Magnitudines, quæ incõmensurabilibus sunt cõmẽsurabiles, & inter se incõmensurabiles erũt. 132

Datis

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quam minor. 132
Datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest, quo pacto inueniatur.
Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis & reliquæ incommensurabilis erit. 133
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectãgulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 133.*b*
Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minori fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.
Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod partibus continetur sit æquale dato rectilineo. oportet autem datũ rectilineum minus esse quadrato, quod à dimidia describitur. 134.*b*
Datum numerum in duas partes ita diuidere, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis esse debet, quadrato dimidij minorem esse.
Rationales magnitudines commensurabiles esse: 135.*b*
Inuenire duas rationales potentia commensurabiles.
Rationali commensurabile & ipsum rationale esse. 136
Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datum erit. 136
Si ad datã rectã lineã rationalem applicetur spaciũ datũ, & latitudo quã facit, data erit. 136.*b*
Quæ ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit. 137.*b*
Duarum datarum rationalium, quę inæquales sint, & longitudine commensurabiles differentia data erit. 138
Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles. 138.*b*
Recta linea, quæ potest irrationale spacium, irrationalis est. 138.*b*
Media est irrationalis, quæ potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. 139
Mediam, quæ vna est irrationalium in geometrica analogia considerari.
Si sint duæ rectę lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur. 136.*b*
Spacium medio spacio commensurabile medium est. 140.*b*
Quod datis duabus mediis, vel media, & rationali continetur rectangulum datum erit. 141
Si ad datam mediam applicetur spacium datum, latitudo quam facit, data erit.
Quæ ex duabus datis mediis longitudine. cõmensurabilibus cõponitur recta linea data erit. 141.*b*
Duarũ datarũ mediarũ, quę inæquales sint, & longitudine cõmẽsurabiles differẽtia data erit. 142
Rationale non superat rationale nisi rationali. 143.*b*
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis componitur, etiam quadratus sit 144.*b*
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipsorum excessus sit quadratus. 144.*b*
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipsorum excessus non sit quadratus.
Si sint duæ rectæ lineę in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulũ duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris. 146
Si fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum contẽtum prima, & media ad id, quod media & tertia continetur. 146.*b*
Ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis, totum fieri rationale. 148
Data recta linea, quę sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit. 148.*b*
Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constant & rectangulum ipsius contentum datum erit. 149
Datæ apotomes quadratum datum erit.
Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum quod ipsis continetur, datum erit.
Data recta linea, quę sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectangulum, quod ipsis

sis continetur datum erit. 149.b
Si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.
Spacium ex medijs compositum irrationale est. 155.b
Binomialis spacij latus quadratum, vel radicem inuenire. 160
Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectãgulo, quod bis dictis partibus continetur. 162.b
Sint quattuor magnitudines AB C EF G & AB excedat ipsam C eodem excessu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem excessu excedere ipsam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur. 171

IN VNDECIMO LIBRO.

CONuersa X. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodẽ plano nõ existentibus, & earum vna parallela sit vni continentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit. 195
Conuersa XIIII. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit. 196
Conuersa XVIII. Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, rectam planæ ad rectos fuerint angulos; & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit. 197.b
Conuersa XIX. Quorum planorum sese mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos; & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorum vno reliqui sint maiores, quomodocunque sumpti; continent autem ipsos rectæ lineæ æquales. Dico & rectarum linearum angulos subtendẽtium, vna reliquas maiores esse quomodocunque sumptas, hoc est fieri posse, vt exijs, quæ rectas lineas coniungunt, multorum laterum figura constituatur. 200.b
Si in aliquod planũ à quodam sublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circumferentia: & quæ à dicto puncto ad centrũ circuli ducitur, ad circulũ perpendicularis erit. 201
Omnis anguli solidi, qui æquicruribus planis continetur, basim ipsam in circulo describi. 201.b
Ex planis quotlibet datis angulis quorum vno reliqui sint maiores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere, oportet autem datos angulos quattuor rectis esse minores.
Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana & æqualia esse, & similia. 202.b
Si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo, erit solidum ad solidum, vt altitudo ad altitudinem. 203
Solida parallelepipeda in eadem basi, vel in æqualibus basibus constituta, eam inter se proportionem habere, quam altitudines. 205.b
Prismata triangulares bases habentia, quæ vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur, & eadem altitudine, inter se æqualia esse. Et insuper quæ eandem habent altitudinem inter se esse, vt bases. Et quæ vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse, vt altitudines.
Æqualium prismatum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Et quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent ea inter se sunt æqualia. 207.b
Propositio XXXVIII aliter demonstratur. 209.b

IN DVODECIMO LIBRO.

IN dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere. 212.b
Prismata omnia, quæ eadem sunt altitudine inter se esse, vt bases. 215.b
Prismata omnia, & pyramides, quæ in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur eam inter se proportionem habent, quam altitudines.
Prismata omnia, & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & proportione altitudinum. 216
Pyramides similes, quæ multiangulas bases habent, diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales, & homologas totis. 216.b

Prismata

Prismata similia, quæ triangulares bases habent in pyramides similes, numeroq; æquales diuidun tur: & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217

Prismata similia, quæ multiangulas habent bases in similia prismata, triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217.b

Æqualium pyramidum & multiangulas bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum multiangulas bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt æquales. 218.b

Prismatum omnium æqualium bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & quorum prismatum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea esse æqualia. 219

Omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti, siue scaleni, qui eandem basim habet, & eandem altitudinem. 220

Similes coni & cylindri omnes inter se in tripla sunt proportione diametrorum, quæ sunt in basibus. 222

Si cylindrus scalenus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 223.b

Si quilibet cylindrus secetur plano basibus parallelo, vt cylindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

Conorum omnium & cylindrorum æqualium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales. 224

Cylindri omnes, & coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, et proportione altitudinum. 224.b

IN TERTIODECIMO LIBRO.

Propositio prima aliter demonstratur. 229.b

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & vtraque ipsius portio data erit.

Si recta linea rationalis, expositæ rationali longitudine commensurabilis, extrema ac media ratione secta fuerit, maiorē eius portionē apotomen esse quintam, & minorē esse apotomen primā.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Data maiori portione rectæ lineę, quæ extrema, ac media ratione secetur, & minorem portionem & totam lineam datam esse. 230

Propositio secunda aliter demonstratur. 230.b

Data minori portione totam rectā lineā, quę extrema, ac media ratione secta sit, inuenire. 231.b

Data minori portione rectæ lineę quæ extrema, ac media ratione secatur, & maiorem portionē, & totam lineam datam esse.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, abscindaturq; à maiori portione linea, quæ minori sit æqualis, erit etiam ea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit quę abscissa est recta linea. 232.b

Si maior portio rectę lineę extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæ rationali longitudine commensurabilis; erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. 233

Si minor portio rectę lineæ extrema; ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. 233.b

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. 234.b

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta. 235

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta. 235

Latus

Latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad baſim perpendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere quam 4 ad 3. 236.b

Si ſint tres rectæ lineæ, ſitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales. 240

IN QVARTODECIMO LIBRO.

EAm, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli: 244

IN QVINTODECIMO LIBRO.

SI à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur. 249.b

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim bifariam ſecat:

Rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.

Propoſitio ſecunda planius demonſtratur. 250

Omne parallelogrammum eſt in vno plano. 251.b

In dato dodecaedro cubum deſcribere. 255

In dato dodecaedro pyramidem, & octaedrum deſcribere.

In dato Icoſaedro cubum deſcribere.

In dato Icoſaedro pyramidem deſcribere.

In dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

FINIS.

IN QUARTO DECIMO LIBRO.

IN QUINTODECIMO LIBRO.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

DIFFINITIONES.

I.

PVNCTVM EST, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium significauit nobis punctum, quod est principium totius propositę contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum sunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam ostendant; non immerito negantes sermones principijs ipsis conuenire comperti sunt: quod etiam asserit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & translationem quandam, punctum diffinierunt esse vnitatem positionem habentem: punctum enim positionem habet, vnitas non habet. Aristoteles in quarto diuinę philosophię libro. vbique, inquit, ipsum vnum aut forma, aut quantitate indiuisibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas est, diuidi non possunt, id quidem, quod penitus est tale, & sine positione, dicitur vnitas; quod vero penitus est tale, positionemq; habet, dicitur punctū; & id quod vno modo diuidi potest, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, superficies: quod vero omni ex parte, & trinam dimensionē habet, dicitur corpus.

Punctum secundum Pythagoricos est unitas positionem habens.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Post punctum linea secundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad superficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipsum, vt magnitudinum omnium principium per solam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem significauit cum dixit, longitudinem esse latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημείου ῥύσιν hoc est puncti fluxum dixerunt; alij ut Aristoteles τὸ μέγεθος μονοχῆ διαιρετὸν ἢ ἐφ' ἓν διαιρετὸν hoc est magnitudinem, quae vno modo diuidi potest, nempe secundum longitudinem. lineae autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & crassitudinem adiungimus, sed vnicam duntaxat dimensionem consideramus; quemadmodum & cum agros metimur, superficiem respicimus; cum autem puteos, solidum: omnes enim dimensiones simul colligentes dicimus tantum esse spacium putei secundum longitudinem, latitudinem, & crassitudinem. sensum vero ipsius lineae habebimus, si diasumptiones locorum illuminatorum ab vmbrosis inspexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimensionem non habet, sed iuxta longitudinem, quae vnà cum lumine, & vmbra producitur,

Punctū magnitudinum omniū principium.

Lineæ notio.

Superficiei notio.

Solidi.

Lineæ sensus unde habeatur.

Lineæ simplices. Mixtæ.

ducitur, linearum aliae simplices, aliae mixtae. simplices sunt recta, & circularis, quamquam recta simplicior sit, reliquae vero omnes mixtae, quales sunt coniectiones, helices, conchoides, cissoides, & aliae.

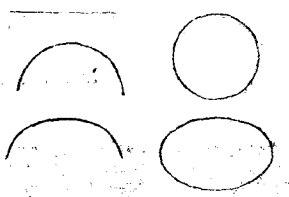
III.

Lineæ fines sunt puncta.

F. C. COMMENTARIVS.

Linea tribus modis vtitur Euclides

Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quae vtrinque finita est, sermo habetur; cuius fines dicit esse duo puncta. Circularis autem linea per se nullos habet fines; sed si aliquod in ea punctum accipiatur, idem erit & principium, & finis, diuersa tamen ratione. quod diximus de circulari linea, idem & de ellipsi dici potest, quae ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus: si autem sumatur portio circularis lineae, seu ellipsis, eius non aliter, quàm rectae lineae fines erunt duo puncta. Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum est.



Circularis linea per se nullos habet fines.

Ellipsis.

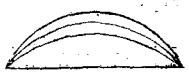
IIII.

Recta linea est, quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc est recta linea est, quae aequalem continet distantiam, eam scilicet, quae inter sua interijcitur puncta. quantum enim alterum punctorum ab altero distat, tanta est magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae. atque hoc est ex aequali suis interijci punctis. si autem in circumferentia circuli, aut alia quauis linea duo puncta sumantur; eius portio, quae interijcitur, longe maior erit, quàm sit dictorum punctorum distantia. ad hunc quidem modū rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus. Plato autem rectam lineā diffinit esse eam ἣ τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, hoc est cuius media extremis obsistunt. illud n. ijs, quę in recta linea sunt, necessario contingit; ijs vero, quae in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde & astrologi dicunt solem deficere, cum in eadem recta linea constituitur ipse, luna q, et oculus noster: obsistit enim ei tunc luna media existens. At Archimedes, vt Proclus auctor est, dixit rectam lineam esse breuissimam omnium, quae eosdem habent fines. quae quidem diffinitio recepta est in Campani editione. linea, inquit, recta est ab vno puncto ad alium breuissima extensio in extremitates suas eos recipiens.

Plato q. recta lineam diffiniat.



Archimedis diffinitio rectæ lineæ.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei variæ diffinitiones.

Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd crassitudinis expers sit. alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt; alij magnitudinem binis distantem interuallis. superficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum termi nos iuxta longitudinem, ac latitudinem distinguimus. sensum vero quendam capere, quando vmbras aspicimus, cum enim ipsae crassitudinis sint expertes, quòd partes terrae interiores penetrare non possunt; latitudinem, & longitudinem tantum habent. superficierum aliae simplices sunt,

Superficiei cognitio & sensus.

aliae

alię mixte. ſi implices ſunt plana, & ſphęrica, reliquę vero mixtę, vt Cylindrica, conica, & quę à coni ſectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & ſphęroidum figurarum, & alię.

Superficies ſimplices & Mixtæ.

VI.

Superficiei fines ſunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineae fines ſunt puncta, ita non omnis ſuperficiei fines ſunt lineae; ſuperficies enim ſphęrae, vel ſphęroidis per ſe nullos habet huiuſmodi fines, niſi planis abſcindatur, nam tunc fines habet lineas ipſas, quę ex ſectione oriuntur. ſuperficiei autem circuli, & eius, quę ellipſi continetur, finis eſt linea vna, videlicet circumferentia, & ellipſis. quòd ſi ſecentur tunc pro finibus lineas habebunt.

Superficies Sphæræ, & Sphæroidis. Superficies circuli, & ellipſi cõtẽta.

VII.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æqua li ſuis interijcitur lineis.

F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philoſophi (vt teſtatur Proclus,) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc eſt ſuperficiem, & planum pro vno, eodemq; accipiebant. At Euclides, & qui eum ſecuti ſunt, genus quidem ſuperficiem faciunt, eius vero ſpeciem planum, vel planam ſuperficiem, quemadmodum lineę ſpeciem rectam lineam. & idcir co planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. vt enim recta linea eſt, qua ex æquali ſuis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obſtant, vel breuiſſima omnium, quę eoſdem habent fines, ita planam ſuperficiem dixerunt eſſe eam, quę ex æquali ſuis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obſtant, vel breuiſſimam omnium ſuperficierum eoſdem fines habentium, & omnino quęcunque ſunt rectę lineę diffinitiones, omnes ad planam ſuperficiem commodiſſime transferri poſſunt. Quòd cum multę ſint ſuperficierum ſpecies, Euclides planam tantum diffiniuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.

Superficiē, & planū Antiqui pro eodem accipiebant.

Planæ superficiei uariæ diffinitiones

Euclides superficiē planam tãtum diffiniuit.

VIII.

Planus angulus eſt duabus lineis in plano ſe ſe contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

Quando autem quę angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

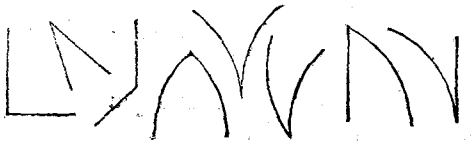
F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prędicamento eorum quę ſunt ad aliquid ponentes, inclinationem eſſe dixerunt, vel linearum, vel planorum, quę ad ſe inuicem inclinata ſunt. alij in qualitate ipſum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt eſſe ſuperficiei, vel ſolidi. alij autem ad quantitatem referentes vel ſuperficiem, vel ſolidum eſſe aſſeuerarunt. diuiditur, inquiunt, is, qui in ſuperficie eſt angulus linea; qui in ſolidis ſuperficie. quod

autem his diuiditur nihil aliud est, nisi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. quare relinquitur, vt sit superficies, vel solidum. Quid igitur in tanta controuersia dicendum? aut quid eorum dicemus esse angulum? Respondet Proclus angulum nihil esse eorum per se se, sed ex concursu omnium constitui. contingere autem hoc non solum angulo, sed & ipsi triangulo, quod quidem particeps est quantitatis; & idcirco ęquale dicitur, & inęquale, vt potematerię rationem habens. particeps quoque est qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam & similia dicuntur triangula, & inęqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & existentię figuram. indiget denique & determinantium ipsum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. atque ex his omnibus angulus constat. non tamen est vnum aliquod eorum. & est quidem diuisibilis, & ęqualitatem, & inęqualitatem suscipere potest, iuxta eam, quę in ipso est, quantitatem.

Angulorũ diuisio.

Angulorum alij quidem in superficiebus, alij vero in solidis consistunt: & eorum qui in superficiebus alij in simplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis sunt alij simplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtrisque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.



X.

Cum vero recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque ęqualium angulorum: et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui maior est recto.

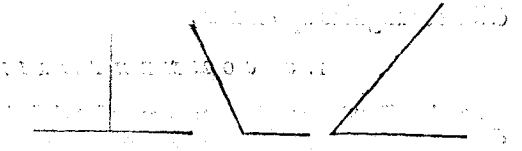
XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

F. C. COMMENTARIVS.

In diffinitione anguli obtusi, & acuti genus subintelligi oportet, est enim vterque ipsorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non simpliciter quicumque minor est recto, is est acutus; neque quicumque maior recto est obtusus. nam qui græce κερατοειδὴς dicitur, hoc est cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia ipsa, non tantum recto, sed etiam omni acuto est minor, acutus autem non est. & semicirculi angulus omni recto est minor, sed tamen non est acutus. quorum quidem causa est, quod sunt mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi recto maiores apparent, non tamen sunt obtusi. Cum igitur rectum angulum diffinire proposuisset Euclides rectã assumpsit lineam super aliam rectam insistentem; & angulos, qui ex vtraque parte sunt, quos angulos deinceps appellat, inter se aequales facientem. Obtusum autem, & acutum diffiniens non item assumpsit rectam lineam ad alterutram partem

Angulus cornicularis. Semicirculi angulus.



Anguli deinceps qui sĩt.

partem inclinatam, ſed per comparationem ad rectum explicauit. ipſe enim etiam non rectorum menſura eſt, quemadmodum & inæqualium æqualitas. lineę vero ad alterutram partem inclinatę infinitę ſunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminiſſe oportet Euclidem hoc loco de ijs ſermonem habere, quę in eodem plano conſiſtunt. quare neque perpendicularem omnem diffiniuit, neque omnem angulum. ſolida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, ſed ad omnes, quę ipſam tangunt, in ſubiecto exiſtentes plano, de qua in vndecimo libro agetur.

Angulus rectus eſt non rectarū mẽſura, quemadmodum inæqualium æqualitas.

XIII.

Terminus eſt, qui alicuius eſt finis.

F. C. COMMENTARIVS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt ſcribit Proclus, lineę namque terminus eſt, & finis, ſed ad ſpacia, quę ſunt in ſuperficiebus, & ad ſolida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui ſpacium vnumquodque determinat; & huiuſmodi terminum, finem eſſe dicit, non vt punctum dicitur lineę finis, ſed vt includit, & ſeiungit ab ijs, quę circumpoſita ſunt. eſt autem hoc nomen priſcę illi geometrię proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos diſtinctos ſeruabant, ex qua huius ſcientię cognitionem aſſecuti ſunt. huiuſmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipſum finem determinauit ſpaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum præfinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus eſt, & finis; ipſum vero planum aliquod ſpacium eſt, & ſimiliter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini ſunt, & fines; ſpacium vero, quod his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

XIIII.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Figurarum aliae planae, aliae ſolidę. planarum figurarum circulus quidem, & ellipſis, ſolidarum ſphæra, & ſphæroides vnico termino, alię pluribus terminis continentur.

Figuratum aliæ planæ, aliæ ſolidæ.

XV.

Circulus eſt figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertinentes ſunt æquales.

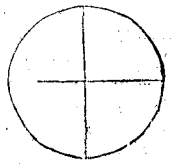
XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Circulus planarum figurarum prima eſt, ſimplicitate quidem ſolidis præſtans; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis.* Plana] *ad differentiam figurarum ſolidarum.* Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, quę pluribus lateribus continentur.* quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipſi, quę & ipſa vna linea continetur, ſed eam ellipſim vocant. liceat enim mihi nunc ſpacium ellipſi contentum etiam ellipſim appellare.* Ad quam] *ab ellipſis autem centro non plures, quam quattuor rectę lineę æquales ad ambitum duci poſſunt.* ab vno puncto] *ex infinitis punctis, quę intra figuram ſunt, vnum dumtaxat hoc præſtare poteſt.* intra figuram exiſtente] *eſt etiam punctum extra figurę planum, à quo omnes rectę lineę ad circumferentiam ductę ſunt æquales, quod non centrum, ſed circuli polus in ſphæricis appellatur.*



Ellipſis.

Circuli polus.

Diameter

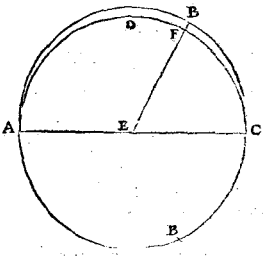
XVII.

Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorum.

Diameter circuli] *sunt enim parallelogrammorum quoque diametri, sed hę interdum* διάγωνιοι *hoc est diagonij appellantur. sunt & diametri ellipsis, quarum duę axes dicuntur. præterea etiam sphęræ diametri sunt, quę axes nuncupantur. circuli igitur propria est diameter.* recta quædam linea per centrum ducta] *possunt namque in circulo duci infinitae rectae lineę, quę per centrum non transeunt.* & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata.] *rectę lineę etiam per centrum ductę, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminantur, diametri non sunt.* quæ & bifariam circulum secat.] *sit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: et stante diametro intelligatur circumferętia A B C eleuari, ac superponi circumferentię A D C. Dico circumferentiam A B C ipsi A D C congruere. si enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. cadat primum extra si fieri potest: & ex centro circuli, quod sit E, ducatur E B secans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectę lineę à centro ad circumferentiam ductę inter se sunt æquales, erit recta linea E B æqualis ipsi E F, hoc est totum parti quod fieri non potest. quare circumferentia A B C extra ipsam A D C non cadet. similiter demonstrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. in ipsam igitur cadat necesse est: & circumferentia A B C congruet ipsi A D C. Quod si circumferentia circumferentię congruit, & superficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet superficiei, quę eadem A C, & circumferentia A D C continetur. ex quibus sequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentię, & superficiem superficiei æqualem esse. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam secat. quod oportebat demonstrare.*



XVIII.

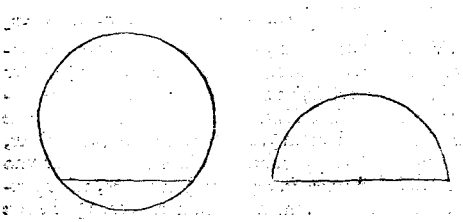
Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Portio circuli est figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo sunt differentem; à centro autem diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quę intra circulum describuntur, seiunxit. nunc autem à diametro quid nam sit semicirculus tradit, cum dicat ipsum contineri duobus terminis, ijsq; semper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia; & rectam



& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum, si quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quae tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. omnes autem huiusmodi figurae biformes sunt, & ex dissimilibus constant. figurae enim contentae duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictae, vel duabus lineis mixtis, vt si duae ellipses se inuicem secent, figuram continebunt, quae inter ipsas intericitur, vel mixta & recta, vt ellipsis dimidium. itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad biformes accessit, quoniam duae rectae lineae spacium concludere nunquam possunt; recta autem linea & circumferentia possunt, & duae circumferentiae similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium interijcitur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum se inuicem non secent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At vero centrum semicirculi idem esse, quod & circuli centrum, manifestè constat. diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola.

Centrũ tres habet locos.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

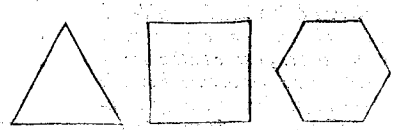
Quadrilateræ, quæ quattuor.

XXIIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

F. C. COMMENTARIVS.

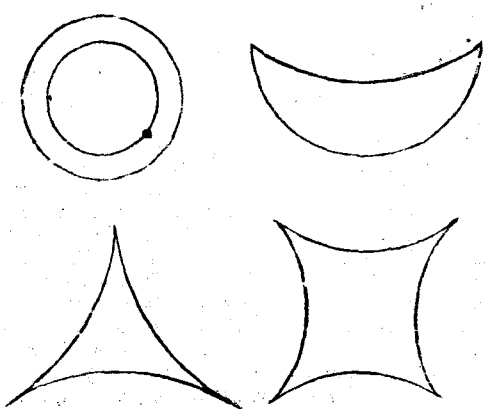
Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quae quidē ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duae rectae lineae spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum dumtaxat figurarum, vtpote quae magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae simplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtrisque. & earū, quae simplicibus, aliae quidem similibus specie continentur, vt rectilinea, aliae specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. earum insuper, quae specie similibus, aliae circulari comprehenduntur linea, aliae recta. At earū quae circulari, aliae duabus, aliae pluribus continentur & vna quidem circulus ipse, quae vero duabus, aliae angulorum expertes.



Figurarum planarum diuisio.

sunt,

Corona. *sunt, vt corona, quae concentricis circulis terminatur, alię angulares ut menisius. earum quae pluribus, quàm duabus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps sunt circumferentijs quędam figurae comprehendũtur. si enim tres circuli se se contingant, spacium concludũt trilaterum, quod tribus circumferẽtijs terminatur, si vero quattuor, quattuor circumferentijs, & deinceps similiter. postremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.*



XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, siue æquicrure, quod duo tantũ æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

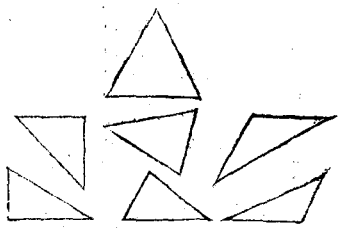
Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

F. C. COMMENTARIVS.

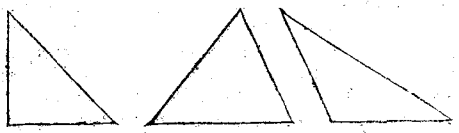
Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & precedit ea, quae à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus solis rectilineis figuris conueniunt: aequalitas verò laterum, & inęqualitas inuenitur etiam in ijs, quae rectilineae non sunt. dicit igitur triangulorũ alia esse aequilatera, alia aequicruria, alia scalena, vel enim omnia latera aequalia sunt, vel omnia inęqualia, vel duo tantũ aequalia.



Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod vnum

habet

habet obtusum, fieri enim non potest, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat; acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est vnicum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. ex his diuisionibus colligitur septem tantum esse triangulorum rectilineorum species, & neque plures, neque pauciores. aequilaterum enim acutiangulum tantum est; reliquorum vero vnumquodque est triplex; nam aequicrure vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.



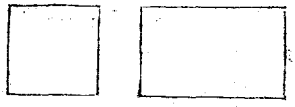
Septem triãgulorum rectilineorum species.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.

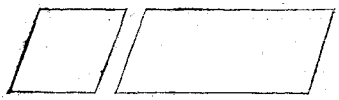


XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

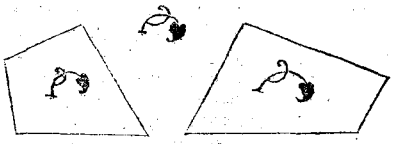


XXXIIII.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarũ aliae aequilaterae sunt, aliae non aequilaterae. rursus aliae rectangulae; aliae non rectangulae. quae igitur aequilaterae, & rectangulae sunt quadrata appellantur. quae vero rectangulae & non aequilaterae, altera parte longiores: & quae aequilaterae, & non rectangulae, rhombi. & postremo quae neque aequilaterae, neque rectangulae latera habent, & angulos, qui è regione sunt inter se aequales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliae parallelogramma sunt, quae latera



Quadrilaterarum figurarum diuisio.

Quadrati.

Altera parte longius.

Rhombi. Rhomboides.

Quadrata. τετράγωνα

Rhomboidea.

Rhombus.

Trapezia.

Trapezoidea.

Trapezia aequicruria, & Scalena.

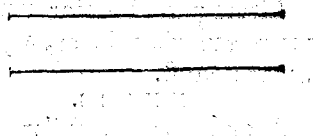
tera ex oppoſito parellela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non habent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera ſunt vt quadrata, quae à graecis τετράγωνα appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, vt rhombo idea, quae figuram rhombo ſimilem habent. alia rectangula quidem, ſed non aequilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus. non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorſus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, haec vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero inaequalia. & illa aequicruria trapezia, haec ſcalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur figura ſeptem modis conſtituitur. nam prima quidem quadratum eſt, ſecunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta aequicrure trapexium, ſexta ſcalenum trapezium, ſeptima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non parallelogramma diuidere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogrāmo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellauit trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum ineſt proprietas, nempe ex oppoſito latera & angulos habere aequales; quod ipſe in rhomboide tantum poſuit, ne ſolis

In quibus propriis rōnibus caremus, cōmunibus vtendum.

negationibus ipſum diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus enim propriis caremus rationibus, communibus vti neceſſarium eſt. videtur autem rhombus dimotum eſſe quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quòd iuxta latera quidem hec ab illis non differunt, ſed iuxta angulorum duntaxat obtuſitates, & acumina, cum illa rectangula ſint.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineę ſunt, quę cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producātur, in neutram partem inter ſe conueniunt.



F. C. COMMENTARIVS.

Quae nam ſint parallelarum, ſeu aequidiſtantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoſcantur, poſtea diſcemus. nunc quae ſint parellelae his verbis diffinit. Quae cum in eodem ſint plano] *ſi enim altera quidem ſit in ſubiecto plano, altera autem in ſublimi iuxta quamuis poſitionem, inter ſe non conuenīūt, non tamē propterea parallelae ſunt.* Et ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conueniunt] *nam rectae lineae non parallelae, ſi aliquatenus producantur, non conuenient; in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas deſignat, neque hoc ſimpliciter, ſed ex vtraque parte, in infinitum produci, & non conuenire. fieri namque poteſt, vt non parallelae etiam ex vna quidē parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. annuentes enim in hac parte, in altera plurimum diſtant. cauſſa autem hec eſt, quoniam duae rectae lineae ſpacium aliquod comprehēdere non poſſunt, quòd ſi ex vtraque parte annuant hoc non continget. & Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Poſſidonius vero parallelae, inquit, ſunt, quae neque annuūt, neque abnuunt in vno plano, ſed aequales habent omnes perpendiculares, quae à punctis alterius ad alteram ducuntur; quęcunque verō minores faciunt perpendiculares inter ſe conueniunt. perpendicularis enim, & ſpaciorum altitudines, & linearum interualla determinare poteſt. quamobrem cum perpendiculares ſint aequales, & rectarum linearum interualla aequalia erunt: cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter ſe ad eas partes, in quibus perpendiculares ſunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus ijs, quae ſcripſit Euclides, eas aptiſſime exemplo declarauit. dixit enim rectas lineas parallelas eſſe, quales in parietibus, vel pauimento columnarum vmbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum ſit vide apud Serenum*

Poſſidonius parallelas aliter diffinit.

Perpendicularis ſpaciorum altitudines et linearū interualla determinat.

renum in fine libri de sectione Cylindri. Post diffinitiones sequuntur postulata, deinde eximata, seu communes notiones. postulata autem & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino il, lud habent commune, vt non indigeant demonstratione aliqua, aut geometrica fide, sed sumatur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae sequuntur. at differunt axiomata à postulatis eodem prorsus modo, quo theoremata à problematibus. vt enim in theorematibus quidem id, quod subiecta consequitur, perspicere & cognoscere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur; ita & in axiomatibus ea sumuntur, per quae sese manifesta sunt, nostrisq; insitis notionibus sunt in promptu; in postulatis vero ea sumere quærimus, quae facilia, parabiliaq; sunt, & in quibus sumendis cogitatio non defatigatur, quæq; nulla neque varietate, neque constructione indigent.

Axiomata a postulatis differunt eodē modo, quo theoremata a problematibus.

POSTVLATA.

I

Postuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

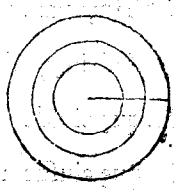
II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum describere.

F. C. COMMENTARIVS.



Tria hæc & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in postulatis necessario collocanda sunt, ex Gemini sententia. nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, sequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam esse puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non decliuem fluxum. si igitur intelligamus punctum aequabili, & breuissimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum postulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis. si vero recta linea puncto terminata, similiter intelligamus eius terminum breuissimo, & aequabili motu ferri, secundum postulatum facili, simpliciq; aggressione comparatum erit. Quod si rursus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet postulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum a centro ad omnes circumferentiae partes.

IIII.

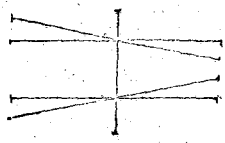
Omnes angulos rectos inter se æquales esse.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifestum, & nulla indigens demonstratione à nobis concedatur, postulatum tamen non est ex sententia Gemini, sed axioma. accidens enim quoddam per se rectis angulis dicit, nihil simplici notione facere iubens. si cui vero non satis constet rectos angulos omnes inter se aequales esse, is petat demonstrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduertit huius conuersum non etiam verum esse, nempe angulum recto aequalem omnino esse rectum, nisi rectilineus sit; potest enim curuilineus quoque angulus recto aequalis ostendi.

V.

Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidēs interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter ſe conuenire ex ea parte, in qua ſũt anguli duobus rectis minores.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à poſtulatis penitus reijciendum cenſet Proclus, cum theorema ſit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemæus in quodam libro ſoluere ſibi propoſuit. multis vero & diffinitionibus, & theorematibus in demonſtratione indiget, cuius conuerſum Euclides etiam tanquam theorema oſtendit. ſed de hoc inferius ſuo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem æqualia, et inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adijciantur tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IIII.

Et ſi inæqualibus æqualia adijciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferãtur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

A Et quę eiuſdem dupla, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quę eiuſdem dimidia inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

B Et quę ſibi ipſis congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſua parte maius

X.

C Duę rectæ lineæ ſpacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis ſcientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis ſcientijs communia ſunt: neque ſolum in magnitudinibus, ſed & in numeris, & motibus, & temporibus vera eſſe deprehenduntur. æquale enim & inæquale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & diſcretis communia ſunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines verſatur, his omnibus tanquam manifeſtis indiget. communibus autem exiſtentibus vnuſquiſque vtitur ſecundum propriam materiam, quoad ipſa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius vero ut in temporibus ipſis vtitur, & hoc modo propriae in vnaquaque ſcientia concluſiones fiunt, licet axiomata communia ſint.

Et

E quæ eiúſdem dupla inter ſe ſunt æqualia. A

Hoc ex illo ſequitur, Si æqualibus æqualia adjiciantur tota æqualia eſſe, nam quæ dimidio ſunt æqualia, cum ipſum dimidium aſſumpſerint eiuſdem dupla ſunt, & inter ſe æqualia ob æquale additamentum: & hac ratione non ſolum dupla, ſed & tripla & eiuſdem etiam multiplicia omnia æqualia apparebunt.

Et quæ ſibi ipſis congruunt inter ſe ſunt æqualia] *hoc geometriæ proprium eſt.* B

Duæ rectæ lineę ſpacium non comprehendunt] *Hoc non admodum manifeſtum videtur, quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adjicienda cenſuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autẽ omnis ſcientia duplex ſit, alia quidem circa immediatas propoſitiones verſatur, alia vero circa ea quę ex illis demonſtrantur, comparanturq́, & omnino circa ea, quae principia conſequuntur, ſuam perficit tractationem. hęc rurſus in geometricis rationibus ſe ipſam in problematum perfectionem, & in theorematum inuentionem diſpertiunt; problemata quidem appellans ea, in quibus, quae non ſunt quodammodo comparare proponit, in apertumq́ proferre; & machinari; theoremata vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoſcereq́, ac demonſtrare inſtituit, & illa quidem ortus, & poſitiones, & applicationes, & deſcriptiones, & circumſcriptiones, & bipartitiones, atque alia huiuſmodi conſtituere iubent; hęc vero ſymptomata, & quae ſubiectis geometriae per ſe inſunt, perſuadere, demonſtrationibuſq́ firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́ ſuis partibus, hęc omnia in ſe ipſo habere debet, Propoſitionem, Expoſitionem, Determinationem, Conſtructionem, Demonſtrationem, & Concluſionem. harum autem Propoſitio dicit quo dato quid quęſitum ſit, perfecta enim propoſitio ex vtriſque conſtat. Expoſitio ipſum per ſe datum aſſumens præparat quæſtioni. Determinatio ſeorſum quæſitum quodnam ſit explicat. Conſtructio ea, quae dato deſunt ad quæſiti uenationem adjicit. Demonſtratio perite ex conceſſis quod propoſitum eſt colligit. Concluſio rurſus ad propoſitionem regreditur confirmans id, quod oſtenſum eſt. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot ſunt. maxime autem neceſſariae, & quae in omnibus inſunt Propoſitio, Demonſtratio, & Concluſio: oportet enim ante cognoſcere quæſitum, perq́ media oſtendere. & quod oſtenſum eſt concludere. Harum autem trium, vt aliqua deſit, fieri non poteſt. at reliquae ſæpe aſſumuntur, ſæpe vero, cum nullam afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expoſitio non ſunt in illo problemate. Aequicrure triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui. Conſtructio autem in compluribus theorematibus non eſt, cum ſatis ſit expoſitio abſque alia additione, vt ex datis propoſitum oſtendatur. Quando igitur deficere expoſitionem dicimus? cum in propoſitione nullum fuerit datum. quamquam enim propoſitio dividatur in datum & quæſitum, non tamen hoc ſemper fit, ſed aliquando ſolum dicit quæſitum, quod cognoſcere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat aequicrure triangulum conſtituere, habens vtrumque aequalium angulorum duplum reliqui, ſed tantum quod oportet illud comparare. & ſit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propoſiti ſumptio. etenim quid aequicrure, & quid aequale, vel duplum ſit cognoſcimus, hoc autem omni dianoeticae diſciplinae proprium eſſe dicit Ariſtoteles. nihil tamen nobis ſubjicitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare. hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipſam bifariam diuidere. ſeorſum igitur ponitur datum, & ſeorſum quæſitum. Cum autem propoſitio vtrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expoſitio; ſed cum deficit datum, & hae deficiant neceſſe eſt. expoſitio etenim eſt dati, & determinatio, quae propoſitioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, n.ſi quod aequicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propoſitio. ſi igitur propoſitio non habeat datum, & quæſitum, expoſitio quidem tacetur, quòd non ſit datum; determinatio vero prętermittitur, ne eadem fiat, quae propoſitio. multa autem alia inuenias huiuſmodi problemata, præſertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenire duas rectas lineas potentia commenſurabiles, quae medium comprehendant, & omnia, quae eiuſmodi ſunt. Animaduertendum tamen Archimedem quidem ſæpe, vt in libro de quadratura parabolae, Pappum vero ferè ſemper propoſitionem ipſam omittere, contentos ex poſitione, ac determinatione, loco propoſitionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel poſitione, vel proportione, vel magnitudine, vel ſpecie. punctum enim duntaxat poſitione datur, linea vero, & alia

Omne problema, & omne theorema perfectũ ſex habet partes.

Propoſitio, demonſtratio & cõcluſio maxime neceſſariæ.

Cõſtructio deeſt, cum expoſitio ſatis ſit.

Archimedes & Pappus aliquãdo pro poſitionem omittunt.

Specie, alia omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quae data est, significamus, nempe rectilineam, vt ne quæramus eisdem methodis etiam curuilineum angulum bifariam secare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inæqualibus à maiori æqualē minori abscindere, magnitudine datae sunt. maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales

Magnitudine

Proportione sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus. Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, punctum positione datur. quare cum positio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsius termi

Cum positio uaria sit, & constructio uariabitur. nos. itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur. demonstratio vero interdum quidem quae demonstrationis propria sunt habere inuenietur, ex diffinitionibus medijs quæsitum ostendens; hęc enim demonstrationis perfectio est interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet, ubique enim geometricae rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non ubique

Demonstratio perfecta. uero demonstrantibus methodis perficiuntur. denique conclusio duplex esse solet, particularis, & uniuersalis. nam cum in dato conclusionem fecerimus, ne uideamur particularia proposuisse, ad uniuersalem transimus conclusionem. Verum cum hęc ita determinata sint, de ijs quae ipsis adnectuntur, breuiter differemus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid

Geometricæ rationes necessitatē habent ob subiectam materiam.

Cōclusio duplex. instantia, quid deductio. lemma uel sumptio proprie in geometricis est propositio fide indigens. cū enim uel in constructione, uel in demonstratione aliquod sumimus eorum, quae ostensa non sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, veluti per se ambiguum inquisitione dignum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axiomate differens quatenus demonstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur. Ca

Lemma.

Casus. sus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpositis punctis, uel lineis, uel planis, uel solidis, & omnino ipsius uarietas circa descriptionem

Corollarium. uersatur; ac propterea dicitur casus, quòd sit constructionis transpositio. Corollarium uero dicitur quidem & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta sed proprie dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propo

Instantia. situm non est; & corollarium ob id uocant, quòd sit tanquam lucrum quoddam accedens preter demonstrationis propositum. Instantia uero totum orationis impedit cursum, uel constructioni, uel demonstrationi occurens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, sed remouere, &

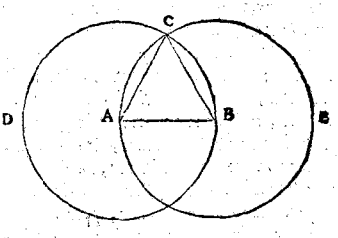
Deductio. ostendere falsam esse. Deductio autem est transitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud,

Cubi duplicatio. quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propositum est, apparet, ut cum quæreretur cubi duplicatio transtulerunt quæsitum in aliud, quod hoc consequitur, uidelicet in duarum mediarum inuentionem. & deinceps quæsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duae mediae proportionales inueniantur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū constituere.

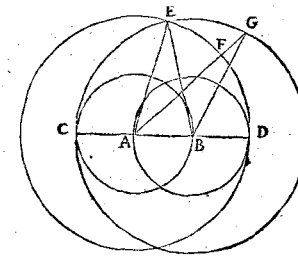
Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. centro quidem A interuallo autem A B circulus describatur B C D. & rursus centro B, interualloq; B A describatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi A B æqualis. rursus quoniā B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A. ostensa est autem et C A æqualis A B. vtraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. quæ autem eidē sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter



ter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est in data recta linea terminata A B, quod faciſſe oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quæ ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema esse manifesto apparet: imponit enim nobis trianguli æquilateri ortum machinari. & propositio ex dato; & quæsito constat. datur enim recta linea terminata, quæritur autem quo pacto in ipsa triangulum æquilaterum constituatur. & præcedit quidem datum, sequitur autem quæsitum, vt coniunctum etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest vt in ipsa constituatur triangulum æquilaterum. neque enim non recta existente triangulum constituetur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad vnum punctum, infinitae autem extremum punctum non est. post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata A B] *& vides expositionem datum solum explicare, non etiam quæsitum adiungere, post quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulum æquilaterũ constituere] *determinatio autem quoddammodo attentionis est causa, attentiores enim ad demonstrationem nos reddit quæsitum pronunciando, quemadmodum expositio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. post determinationem constructio sequitur* [centro quidem altero rectæ lineæ termino; interuallo autem reliquo circulus describatur, rursusq; centro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius centrum erat, describatur circulus, et à communi sectionis circulorum puncto ad lineæ terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad constructionem vti postulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, & quouis centro & interuallo circulum describere. vniuerse enim postulata constructionibus, axiomata vero demonstrationibus vtilitatem afferunt. deinde sequitur demonstratio, quae ex circuli diffinitione, & illo axiomate. Quae eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, concludit tres rectas lineas C A A B B C inter se esse æquales. vnde colligitur triangulum A B C æquilaterum esse, atque hæc est prima conclusio, quae expositionem consequitur; post hanc est ipsa vniuersalis.* [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum constitutum est.] *siue enim duplam eius, quae nunc exposita est, feceris datam, siue triplam, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; eadem constructiones, & demonstrationes congruent. his apposuit particulam* [quod faciſſe oportebat] *ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit* [quod ostendisse oportebat] *namq; illa factionem alicuius, hæc demonstrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare voluimus, ac perspicua facere. oportet autem illos, qui hæc legent, in reliquis eadem quærere, & quæ nam eorum assumantur, quenamue omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur; & ex quibus principijs vel constructiones, vel demonstrationes pendeant: horum enim perspicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. sed fortasse non inutile erit reliqua etiam triangula constituere. & primum æquicrure. Sit igitur A B, in qua oportet æquicrure triangulum constituere. & describantur circuli, vt in æquilatero, producaturq; A B ex vtraque parte ad C D puncta. æqualis igitur est C B ipsi A D, quare centro quidem B, interuallo autem C B circulus C E describatur. & rursus centro A, & interuallo D A describatur circulus D E, & à puncto E, in quo se se circuli secant ad A B puncta ducantur E A E B. quoniam igitur E A æqualis est ipsi A D, & E B ipsi B C; æqualis autem A D ipsi B C; erit & E A ipsi E B æqualis. sed & maiores sunt quàm A B. æquicrure igitur triangulum est A B E, quod faciſſe oportebat. At propositum sit scaleno constituere triangulum in data recta linea A B, & describantur circuli centris, interuallisq;, vt in superioribus, & sumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F, & ductæ A F producatur ad G, & G B iungatur. quoniam*



Propositio, quæ ex dato & quæsito constat.

Expositio.

Determinatio.

Constructio.

Postulata cõstructionib⁹ utilia.

Demonstratio.

Conclusio prima, & particularis.

Cõclusio uniuersalis.

Quod faciſſe oportebat.

Quod ostendisse oportebat.

Æquicruris trianguli cõstitutio.

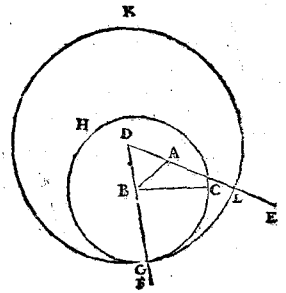
Scaleni triãguli constitutio.

quoniam igitur A cẽtrum est circuli D E, erit A F ipsi A D aequalis. maior igitur est A G quàm A D, hoc est quàm G B. centrum enim est ipsum B circuli C E. ergo G B est aequalis B C, ac propterea G E quàm B A maior. at G A maior quàm G B. tres igitur C B B A A G inęquales sunt. quare scalenum triangulum est. tria igitur triangula sunt constituta. sed hęc diuulgata sunt. Aequilaterũ triangulum unico modo cõstituitur. *Illud vero in his pulchrum inuenitur. Triangulum scilicet aequilaterum vndequaque aequale existens vnico modo constitui,* Aequicrure dupliciter. *Aequicrure autem in duobus tantum lateribus aequalitatem habens, constitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus aequalibus minor est, vt nos posuimus, vel maior:* Scalenum tripliciter. *scalenum vero vndique inęquale existens tripliciter constitui. vel enim data recta linea maxima est, vel minima trium, vel alter a quidem maior, altera vero minor. & licet in vna quaque harum positionum vel protendenti, vel contrahenti se exercere. nobis autem quae sunt exposita sufficiant. At si vniuerse contemplabimur dicemus,* Problemata ordinata. Media. Inordinata. *problematum alia quidem simpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite constitui, & ea, quae simpliciter constituuntur (vt inquit amphinomus) ordinata appellantur, & quae constituuntur multipliciter, media, quae vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortasse enim hęc satis superq;.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

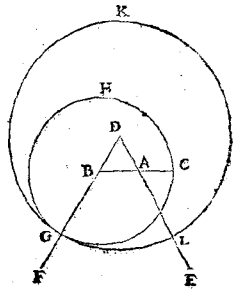
Ad datum punctũ datæ rectæ lineę ęqualẽ rectam lineã ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam po-
Postul. 1. nere. ducatur à puncto A ad B recta linea
Prima huius A B: et in ipsa constituatur triangulum ęqui-
Postul. 2. laterum D A B, producanturq; in directum
3. ipsis D A D B rectæ lineæ A E B F. et centro quidem B, interuallo autem B C circulus C G H describatur. rursusq; centro D, et interuallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B cẽtrum est C
Diffin.15. G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis. &
rursus quoniam D centrum est circuli G K
L, erit D L æqualis D G: quarum D A est
Com.no.3. æqualis D B. reliqua igitur A L reliquę B G
est æqualis. ostensa autẽ est B C æqualis B G.
Com.no.1. quare vtraque ipsarum A L B C est æqualis ipsi B G. quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. ergo & A L est æqualis B C. ad datum igitur punctũ A datæ rectę lineę B C ęqualis posita est A L. quod facere oportebat.



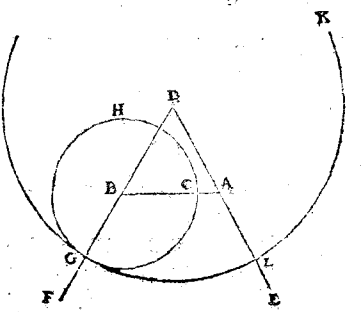
F. C. COMMENTARIVS.

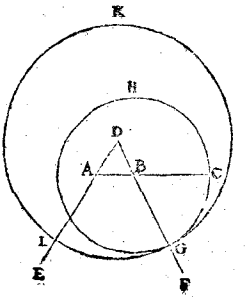
Problematum, & theorematum alia sine casu sunt, alia vero multos habent casus. *quicunque igitur eandem vim habent per plures descriptiones peruadentem, & positiones permutantia eandem demonstrationis rationem seruant, hęc casum habere dicuntur. quicunque vero iuxta vnam duntaxat positionem, vnamq; constructionem procedunt, ea sunt sine casu. simpliciter enim casus circa constructionem tum theorematum, tum problematum consideratur.* Secundũ problema multos habet casus. *secundum igitur problema multos habet casus. datur autem in ipso punctum quidem positione, eo enim tantum modo dari potest; linea vero specie, & magnitudine datur, quæritur autem rectae lineae aequalem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque situm fuerit. & constat omnino punctum illud in eo-*



dem

dem esse plano, in quo & recta linea, non autem in sublimi. omnibus si quidem planorum problematibus, & theorematibus vnum subijci planum existimare oportet. at vero huius problematis casus fieri iuxta puncti dati differentem positionem manifestum est. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipsa. & siquidem in ipsa, vel in altero eius termino, vel intra terminos. si vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectae lineae ducta angulum faciat; vel in directum ipsi siue à fronte, siue à tergo, ita vt producta linea ad dictum punctum pertineat. Euclides autem punctum datum extra rectam lineam sumpsit, atque à lateribus. si enim in ipsa, frustra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quae iam ducta esset. at si in recta linea B C punctum sumatur inter B C, vel in directum ipsi, producta nimirum B C ad A, similiter in ipsa B A constituetur triangulum aequilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonstratio eadem erit. Quòd si loco trianguli aequilateri, aequicruri vti libeat, nihilo minus eadem sequentur. denique si punctum datum fuerit in altero rectae lineae termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, sed sola descriptio vnius circuli satis erit. centro enim dicto termino, in quo est punctum datum, interuallo autem reliquo, si circulus describatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae linae ductae fuerint, problema efficient.



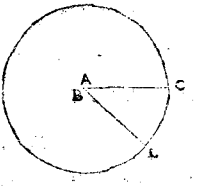


Aequicruri triángulo pro æquilatero uti licet.

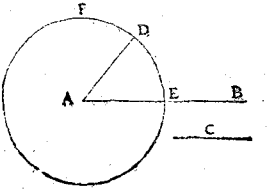
PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abscindere.



Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C; quarum maior sit A B. oportet à maiori A B minori C æqualem rectam lineam abscindere, ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D; & centro quidem A, interuallo autem A D circulus describatur D E F, et quoniam A centrũ est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. sed & C est æqualis A D. vtraque igitur ipsarum A E C ipsi A D æqualis erit. Quare & A E ipsi C est æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B C à maiori A B minori C æqualis Abscissa est A E. quod fecisse oportebat.



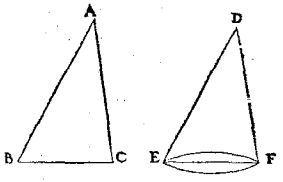
Ex antecedente.

post. 3.

Com. no. 1.

THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico & basim B C basi E F æqualem esse, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angu-

B lum A B C angulo D E F: et angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet; quòd A B ipsi D E sit æqualis. congruente autem A B ipsi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. quare et C congruet ipsi F: est enim rursus recta linea A C æqualis rectæ D F. sed et punctum B congruebat puncto E. ergo et basis B C basi E F congruet. nã si puncto quidẽ B congruẽte ipsi E, C vero ipsi F;

Com. no. 10 basis B C basi E F non congruit; duæ rectæ lineæ spacium comprehendent: quòd fieri non potest. congruet igitur B C basis basi E F, & ipsi æqualis erit. quare et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales erunt. videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulũ angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur: quod oſtẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri] *in hac propositione duo sunt, quę dantur, videlicet duorum laterum æqualitas, & æqualitas eorum angulorum, qui æqualibus lateribus continentur. quae quidem proportione dari manifestum est. quęruntur autem tria, aequalitas basium, aequalitas triangulorum, & aequalitas reliquorum angulorum. sed quoniam fieri potest vt duo quidem latera duobus lateribus sint aequalia, theorema autem verum non sit, quòd non alterum alteri est aequale, sed vtraque simul: propterea addidit, aequalia esse latera non simpliciter, sed alterum alteri.*

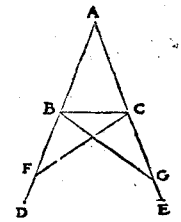
B Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet, quòd A B ipsi D E sit æqualis, et reliqua.

Demonstratio per superpositionẽ figurarũ mathematicis usitata. *Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem figurarum prę terquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui mathematicis. Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus, & sphęroidibus.*

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur indirectum ipſis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B; angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. ſumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iungantúrq; F C, G B. Quoniam igitur A F quidem eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis; et triangulum A F C æquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit et reliqua B F reliquæ C G æqualis. oſtenſa eſt autem F C æqualis G B. duæ igitur B F, F C duabus C G G B æquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtq; baſis ipſorum B C communis. ergo et triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B: et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli: oſtenſus autem eſt & F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. æquicrurium igitur triangulorum, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt. quod oſtendiſſe oportebat.

3. Huius.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum alia ſimplicia ſunt, alia compoſita. dico autem ſimplicia quæcunque iuxta poſitiones, & concluſiones individua ſunt, vnum habentia datum, et vnum quæſitum. vt ſi Euclides ita dixiſſet. omne triangulum æquicrure æquales habet, qui ad baſim ſunt, angulos. compoſita verò ſunt, quae ex pluribus conſtantia, vel poſitiones habẽt compoſitas, vel concluſiones, vel etiam vtraſque. compoſitorum autem alia ſunt complexa, alia incomplexa. incomplexa ſunt quæcunque in ſimplicia theoremata diuidi non poſſunt, cuiuſmodi eſt quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quæſitum, ſed datum in ſimplicia diuidi minime poteſt, vt plura fiant theoremata: non enim ſi triangula æquales habeant angulos, vel eum duntaxat, qui eſt ad verticem, reliqua contingunt. complexa verò ſunt quæcunque in ſimplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes. fieri enim poteſt, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes; & in parallelogrammis ſimiliter. Omnium autem compoſitorum alia quidem iuxta concluſionem componuntur, ab eadem poſitione ortum habentia; alia verò iuxta poſitiones, & eandem omnibus concluſionem inferunt; & alia iuxta concluſiones, & poſitiones componuntur. Itaque iuxta concluſionem compoſitio eſt in quarto theoremate. in eo enim tria ſunt quae concluduntur, videlicet baſes æquales eſſe, & triangula æqualia, & reliquos angulos reliquis angulis æquales; quibus æqualia latera ſubtenduntur: iuxta poſitiones compoſitio inuenitur in theoremate, quod triangulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune eſt. iuxta vtraſque autem in illo.

Theoremata ſimplicia.

Theoremata cõpoſita.

Compoſit. Theo. alia, cõplexa, alia incomplexa.

Complexa theoremata.

Theorema compoſitũ iuxta concluſionem.

Theo. cõpo. iuxta poſitiones.

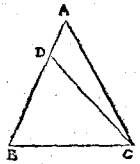
Complexorum Theorematũ alia, uniuerſalia, alia ex particularibus uniuerſale cõcludunt.

in illo. Diametri circulorum & ellipſium tum ſpacia, tum lineas ſpacia continentes bifariam diuidunt. Rurſus complexorum theorematum alia vniuerſalia ſunt, alia ex particularibus vniuerſale concludunt. omnino autem has compoſitiones geometrae ob breuitatem, ac reſolutiones excogitarunt. multa enim cum incompoſita ſint, non reſoluuntur: compoſita vero ſolum commoditates prębent ad reſolutionem, quae in principia tendit. his igitur conſideratis apparet quintum theorema compoſitum eſſe, tum iuxta datum, tum iuxta queſitum, & vtrumque eorum, quae componuntur perfectum eſt ac verum. quamobrem reſolutio quoque vera eſt in vtroque. ſiue enim qui ad baſim anguli, ſiue productis aequalibus rectis lineis anguli ſub baſi aequales ſint, aequicrure triangulum erit. Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus. is enim primus dicitur animaduertiſſe omnis aequicruris angulos qui ad baſim eſſe aequales, ac more antiquorum aequales ſimiles appellaſſe.

Thales quinti Theorematis inuẽtor.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.



Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe; ſi enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt maior. ſit maior A B; atque à maiori A B minori A C æqualis auferatur D B; et D C iungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A E; communis autem B C: erunt duæ D B B C duabus A C C B æquales, altera alteri; et angulus D B C æqualis angulo A C B. baſis igitur D C baſi A B eſt æqualis; et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus maiori; quod eſt abſurdum. non igitur inæqualis eſt A B ipſi A C. ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod demonſtraſſe oportuit.

3. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema præcedẽti cõuertitur

Præſens theorema duo hęc in primis oſtendit, theorematum ſcilicet conuerſionem, & deductionem ad id, quod fieri non poteſt. conuertitur enim precedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, demonſtratur. conuerſio autem apud Geometras proprie dicitur, quando concluſiones, & poſitiones viciſſim in theorematibus tranſmutantur, & quod prioris eſt concluſio, in poſteriori poſitio fit: & contra poſitio tanquam concluſio infertur. vt in illo, Aequicrurium triangulorum, qui ad baſim anguli ęquales ſunt. poſitio quidem eſt aequicrure triangulum: concluſio autem triangulorum, qui ad baſim ſunt, aequalitas. Et quorum anguli qui ad baſim aequales; ea aequicruria ſunt, vt in hoc theoremate, in quo poſitio quidem eſt, angulorum, qui ab baſim, aequalitas; concluſio autem aequalitas laterum, quae aequalibus angulis ſubtenduntur. eſt etiam alia conuerſio iuxta quandam dumtaxat compoſitorum tranſmutationẽ. Si enim ſit theorema compoſitum à pluribus poſitionibus incipiens, & in concluſionem deſinens, ſumentes concluſionem, & vnam ex poſitionibus, vel etiam plures; concluſionem faciunt aliquã reliquarum poſitionum. & hoc modo quarto theorematis octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera aequalia; & angulus angulo aequalis, qui aequalibus lateribus continetur: cõcluditur aũt baſim baſi aequalẽ eſſe. At in octauo ponuntur duo latera aequalia; baſis baſi aequalis: & concluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, aequalem eſſe. Cum igitur duae ſint conuerſiones, ea quae proprie ſic dicitur, vniformis eſt, & determinata; altera vero varia, & non in vno, ſed in multis conuertens ob multitudinem poſitionum, quae in compoſitis theorematibus ſunt. Theorematum vero, quae conuertuntur, alia precedentia vocare conſueuerunt; alia conuerſa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipſo ſymptoma demõſtrãt, hoc precedens appellatur: & cum è contrario poſitionem quidem faciunt ſymptoma; concluſionẽ vero genus, cui illud accidit, conuerſum vocatur. vt omne triangulum aequicrure angulos qui ad

Conuerſio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Conuerſio alia.

Quarto octauum conuertitur.

Theorematũ, q̃ cõuertũtur, alia precedentia ſũt alia cõuerſa.

ad baſim ſunt, æquales habet. hoc præcedens eſt. Omne triangulum duos angulos æquales habẽs, latera quoque æquales angulos ſubtendentia habet æqualia, & eſt æquicrure. hoc cõuerſum eſt. & hæc de cõuerſionibus geometricis dicta ſufficiant. deductiones vero id, quod fieri non põt, in eui dens abſurdum deſinunt, & cuius oppoſitã omnes fatentur. accidit autem ipſarũ alias deſinere in ea, quæ cõmunibus notionibus, vel poſtulatis, vel poſitionibus opponũtur; alias in ea, quæ prius demonſtratis contradicunt. Nam ſextum hoc theorema, quod accidit fieri non poſſe oſtendit, cum deſtruat communem notionem illam: Omne totum eſt maius ſua parte. octauum vero deſinit quidem in id, quod fieri non poteſt; non tamen deſtruit communem notionem, ſed id quod per ſeptimum theorema oſtenſum eſt. quod enim ſeptimum fieri poſſe negauit, hoc illud affirmans conſe qui oſtendit ijs, qui queſitum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non poteſt, ſu mens quod cum queſito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti abſurdo occurat, perq; illud poſitionem deſtruens, cõfirmat id quod à principio querebatur. omnino enim ſcire oportet ma thematicas probationes omnes vel à principijs eſſe, vel ad principia: vt etiã inquit Porphyrius. & quæ à principijs ſunt, itidem duplices eſſe. aut enim ex cõmunibus notionibus, & ſola euiden tia per ſe fidem faciente emanant; aut ex ijs, quæ ante oſtenſa fuere. Quæ vero ad principia aut principia ponunt, aut deſtruunt. quæ principia ponunt reſolutiones vocantur; atque his opponun tur compoſitiones. fieri enim poteſt, vt à principijs illis ad queſitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud eſt, niſi compoſitio. quæ vero principia deſtruunt, deductiones ad id, quod fieri non po teſt nuncupantur. aliquid eũm eorum, quæ conceſſa, manifeſtaq; ſunt deſtruere huius ipſius viæ munus eſt: atque eſt hac ſyllogiſmus quidam, ſed non idem, qui in reſolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non poteſt iuxta ſecundum hypotheticarum rationcinationum modum comple xio eſt. vt ſi triangulorum æquales angulos habentium latera æquales illos angulos ſubtenden tia æqualia non ſint; totum parti eſt æquale. atqui hoc fieri non poteſt. triangulorum igitur duos angulos æquales habentium latera quoque æquales angulos ſubtendentia æqualia erunt. Vtitur autem Euclides conuerſione quidem in propoſitione ipſa; vtpote qui concluſionem quinti theore tis, vt datum accipiens, poſitionem illius adiunxit, vt queſitum; deductione autem ad id, quod fie ri non poteſt in conſtructione, & demonſtratione vtitur. hæc ex Proclo.

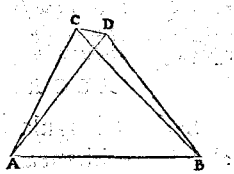
Deductiones ad id, qđ fieri non poteſt in eui dens abſurdũ deſinunt.

Mathematicæ probationes uel a prĩcipijs ſũt uel ad principia. Reſolutiões. Compoſitiones.

Deductiones ad id, q̃ fieri non poteſt.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. VII.

In eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea A B duabus eiſdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D, D B æquales, altera alteri conſtituantur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad eaſdem partes vt ad C D, eoſdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita vt C A quidem ſit æqualis D A, eundem, quem ipſa terminum, habens A; C B vero ſit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D iungatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis A D; erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur eſt A D C angulus angulo D C B. quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rurſus quoniam C B eſt æqualis D B; et an ℊulus C D B æqualis erit angulo D C B; oſtenſus autem eſt ipſo multo maior; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.

5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propoſitionibus, quæ ſcientiam pariunt

Propositiones theorematum geometricorũ, arithmeticorũq; ut plurimũ affirmationes sunt.

pariunt euenire consueuit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipsarum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Caussa autem est (vt inquit Aristoteles) quod vniuersale affirmans scientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. at vniuersale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientiae plurima affirmantia ostendunt: raro autem negantibus conclusionibus utuntur. hęc Proclus. Theo-

Theorematis uarij casus.

rema uero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipsis. & siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B secat alteram ipsarum A D D B, aut neutra neutram secat. cadat primum extra, secetq; A D ipsam C B, ut apparet in prima figura, & iungatur C D. cui quidem constructioni Euclidis demonstratio conguit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam A C est aequalis ipsi A D,

5. huius.

erit angulus A C D angulo A D C aequalis. angulus autem A C D

9 com. not.

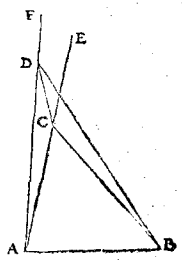
maior est angulo D C B; quippe quòd totum maius sit sua parte. angulus igitur A D C angulo D C B est maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior est angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior sit necesse est. Rursus quoniam B C est aequalis B D; erit & angulus C D B aequalis angulo D C B. atqui ostensus est multo maior; quod fieri non potest. similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea B D secet ipsam A C. cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neutra neutram secet; &

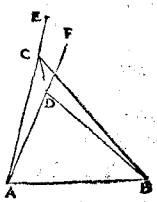
5. huius.

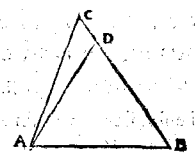
producantur rectae linae A C A D in puncta E F. Quoniam igitur A C est aequalis A D, angulus A C D ad basim angulo A D C aequalis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C sub basi aequalis angulo D C E. Rursus cum B C sit aequalis ipsi B D, angulus B C D angulo B D C est aequalis. sed F D C angulus maior est angulo C D B. quare & D C E ipso D C B est maior, pars scilicet toto; quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse manifesto constat. totum enim parti esset aequale. Videtur autem hoc, ut inquit Proclus,

Theorema hoc sequentis lemma esse uidetur.

lemma esse octaui Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit vtilitatem. rarissimum igitur ipsius vsum apud geometram inueniemus.



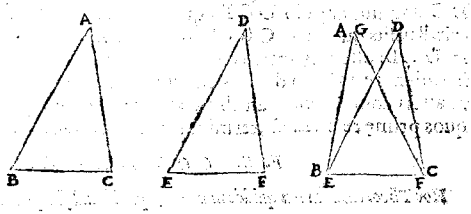




THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterũ alteri; habeant autem, et basim basi æqualẽ: angulũ quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualẽ habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; vt sit A B quidẽ æquale D E; A C uero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F æqua-



lem. Dico

lem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F æqualem esse. Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F triangulo; et puncto quidem B posito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, et C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est æqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent et B A A C ipsis E D D F. si enim basis quidem B C basi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, sed permutantur; vt E G G F: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; vt demonstratum est. non igitur, si basis B C congruit basi E F, non congruent et B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

In antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Octauum Theorema quarti conuersum est, vt supra diximus, non tamen iuxta propriam conuersionem, non enim totam illius positionem, conclusionem, totamq; conclusionem positionem facit. Sed aliquam quidem ex positionibus, aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematis contexens, vnum quid eorum, quae in illo data fuerunt, ostendit.

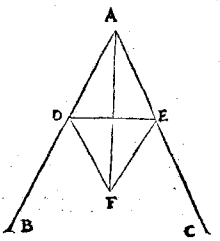
Octauum Theorema quarti conuersum est.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

A

Sit datus angulus rectilineus B A C. Itaque oportet ipsum bifariā secare. Sumatur in linea A B quod vis punctum D; & à linea A C ipsi A D æqualis auferatur A E; iunctaq; D E constituatur in ea triangulum æquilaterum D E F; & A F iungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales sunt, altera alteri; & basis D F æqualis basi E F. angulus igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam sectus est: quod facere oportebat.



3. huius.
B
1. huius.
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

A

Datum angulum rectilineum bifariam secare] *Angulus hoc loco specie datur, quippe qui rectilineus sit, & non quilibet. namque angulum omnē bifariam secare ex elementari institutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam est, num omnis angulus bifariam secari possit. Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit: in quamlibet enim proportionem secare præsentem constructionem trāsgreditur. verbi gratia in tres, vel quatuor, vel quinque partes aequales. nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus, paucis eorum, quae posterius tradentur, vtentes: acutū vero minime, nisi ad alias lineas, quae mixtae sunt, transcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus. alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirū ijs, quae à græcis τετραγωνίζουσαι dicūtur, nos quadrātes appellare possumus. alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum. alij denique ex lineis spiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum secuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles sint, præsertim ijs, qui instituuntur, in præsentia omittemus.*

Omnem angulum bifariam secare ex elementari institutione non licet. Rectum angulum trifariam secare possumus, acutū uero minime, nisi ad lineas mixtas transcendamus.

Iunctaq; D E constituetur in ea triangulum æquilaterum D E F.

B

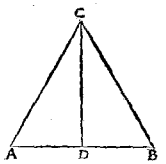
Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure constituti potest.

Idem etiam sequetur si loco aequilateri tum in hoc, tum in sequentibus aequicrure triangulum constituamus, & demonstratio eadem erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.



1.huius. Ex antecedente.

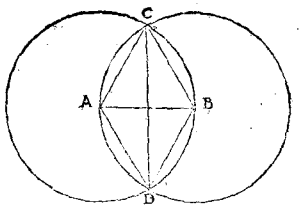
Sit data recta linea terminata A B, oportet ipsam A B bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum A B C; & secetur A C B angulus bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt; altera alteri: et angulus A C D æqualis angulo B C D. basis igitur A D basi B D est æqualis. et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

4.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

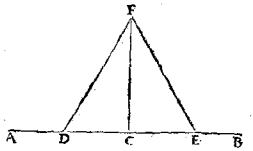
Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, vbicunque punctum accipiatur, in partes inæquales fit sectio. etenim quae in eisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existente necessario est maior. relinquitur igitur, vt ex vtraque parte finita accipiatur, quae bifariam secari debet. Apollonius vero Pergæus rectam lineam terminatam bifariam secat in hunc modum. Sit, inquit, recta linea terminata A B, quam bifariam secare debemus. & centro quidem A, interuallo autem A B circulus describatur: & rursus centro B, & interuallo B A describatur alius circulus; & ducatur C D communes circulorum sectiones coniungens, quae rectam lineam A B bifariam secabit. Iungantur enim A C C B, quae inter se aequales sunt, cum vtraque ipsi A B sit aequalis. communis autem C D; & D A est aequalis D B ob eandem causam. angulus igitur A C D est aequalis angulo B C D. quare A B per quartum bifariam secta est.

Rectã lineã terminatam quo Apollonius bifariã secat.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

Datæ rectæ lineę à pũcto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.



2.huius. 1.

Sit data recta linea A B, et datum in ipsa pũctum C. oportet à puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quoduis punctum D: ipsiq; C D æqualis ponatur C E, et in D E constituatur triangulũ æquilaterum F D E, et E F iungatur. Dico datæ rectę lineę A B à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri: et basis D F est æqualis basi F E. angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis: et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus est vterque æqualium angulorum. ergo vterque ipsorum D C F F C E est

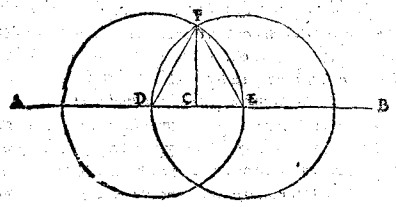
8.huius.

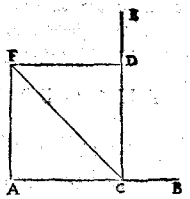
Diffi.10.

est rectus. datæ igitur rectæ lineę A B à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est F C recta linea. quod fecisse oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

Datæ rectæ lineę à puncto in ipsa dato.] *linea specie datur; punctum vero positione: quod vel in medio erit rectae linae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae linae sumpsit. Quòd si in extremitate altera sumatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo constituemus; vel aliter propositum assequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C, & in linea A C sumpto quouis puncto D, ab ipsa C B auferatur C E aequalis ipsi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus describatur. Rursusq́, centro E, & interuallo E D alius circulus describatur: & à puncto F, in quo circuli se inuicem secant, ducatur F C. Dico eam ad rectos angulos esse. si enim iungãtur F D, F E aequales inter se erunt. sed & D C C E aequales; & cõmunis F C. Quare ex octauo anguli qui ad C etiam inter se aequales sint necesse est. Si vero punctum in extremitate rectae lineae sumatur, ita faciendum censet Proclus. Sit recta linea A B, datumq́ punctum A, & sumatur in A B quod vis punctum C, à quo ipsi A B, quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipsi A C aequalis abscindatur C D. angulus vero qui est ad C per rectam lineam C F bifariam secetur: atque à puncto D ipsi E C ad rectos angulos ducta occurat rectae lineae C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim D C est aequalis C A, communis autem C F, & angulos aequales continent, quòd angulus ad C bifariam sectus est: erit & D F ipsi F A aequalis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis est angulo ad D. angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat.*





Problematis casus.

Quõ Apollonius rectã lineam ad rectos angulos ducit.

3. huius.

Postul. 3.

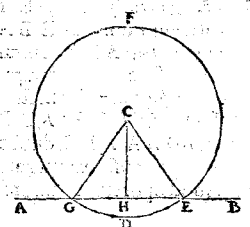
Quãdo pũctum in extremitate lineæ sumitur quo faciẽdum sit. 3. huius. 9. huius.

4. huius.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato pũcto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineę quod vis punctum D: et centro quidem C, interuallo autem C D circulus describatur E F G: et E G in H bifariam secetur: iunganturq́; C G, C H, C E. Dico super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duę G H H C, duabus E H H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est æqualis basi C E.



Postul. 3. 10. huius.

D angulus

8.huius. angulus igitur CHG angulo EHC est æqualis; & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus est vterque æqualium angulorum; et quę insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super datam rectam lineam infinitam AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. quod facere oportebat.

Diffi.10.

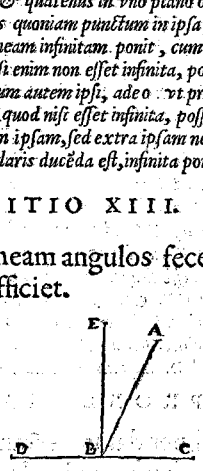
F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit. Perpendiculare antiqui gnomonen appellarunt. Perpendicularis plana, & solida.

Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indagauit, vtile ipsum ad astrologiam existimans. perpendicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos est. quae autem ad angulos rectos, eadem est perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum subiecto eadem sit, quemadmodum et gnomon. Rursus perpendicularis duplex est, alia plana, alia solida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in subiecto plano sit, plana appellatur: quando autem punctum sit sublime, atque extra subiectum planum, solida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, solida vero ad planum. Quare necessarium est illam non ad vnam rectam lineam angulos rectos facere, sed ad omnes, quae in subiecto existentes plano ipsam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia consistant, sermo procedat. At in linea quae est ad angulos rectos quoniam punctum in ipsa sumptum est, nulla erit infinitatis necessitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipsam statuatur. si enim non esset infinita, poterat ita punctum sumi, vt extra quidem rectam lineam esset, indirectum autem ipsi, adeo vt protracta recta linea in ipsum incideret, & non fieret problema. Adde, quod nisi esset infinita, possemus etiam punctum ita sumere, vt si duceretur perpendicularis, non in ipsam, sed extra ipsam necessario caderet. His igitur de caussis recta linea, ad quam perpendicularis ducēda est, infinita ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

✻ Cum recta linea super rectam cōsistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.



Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. si enim CBA est æqualis ipsi ABD, duo recti sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD. ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt æquales. Rursus quoniam DBA angulus est æqualis duobus DBE EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eisdem tribus æquales esse: quę vero eidem sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo et anguli CBE EBD ipsis DBA ABC sunt æquales. suntq; CBE EBD duo recti. anguli igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

diffi.10.

Axioma.1.

F. C. COMMENTARIVS.

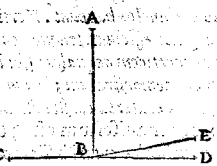
✻ Cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit.] *Animaduertendum est, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propositione maximam diligentiam adhibuisse. non enim*

enim simpliciter dixit. Omnis recta linea super rectā lineā consistēs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, sed si angulos fecerit, quid enim si in rectae lineae extremitate cōsistens vnum efficit angulum? accidit ne quandoque hunc duobus rectis aequalem esse? hoc certe fieri non potest. Omnis si quidem rectilineus angulus duobus rectis est minor, quemadmodum omnis solidus minor est quattuor rectis. Quod si angulum, qui maxime obtusus esse videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorum mensuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam sic consistere, vt angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duobus rectis est minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineæ non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsę rectæ lineæ indirectum sibi inuicem erunt.



Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in ea B, duę rectę lineę B C B D non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, A B C A B D duobus rectis æquales faciant. Dico B D ipsi C B indirectū esse. si enim B D non est in directū ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E. Quoniā igitur recta linea A B super rectam C B E consistit, anguli A B C A B E duobus rectis sunt æquales. Sed et anguli A B C A B D sunt æquales duobus rectis. anguli igitur C B A A B E ipsis C B A A B D æquales erunt. cōis auferatur A B C. ergo reliquus A B E reliquo A B D est æqualis, minor maiori, quod fieri non pōt. non igitur B E est indirectū ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter B D. ergo C B ipsi B D indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineę non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsę rectę lineę indirectum sibi inuicem erunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

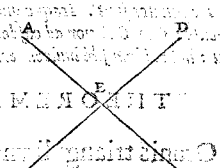
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema precedentis conuersum est, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, ostenditur. sic enim conuersa theorematum ostendi debent, vt inquit Proclus.

Conuersa theoremata per deductionē ad id, qđ fieri nō pōt, ostendūtur.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duę rectę lineæ se inuicem secuerint, angulos qui ad uerticē sunt, inter se æquales efficient.



Duæ enim rectæ lineæ A B C D se inuicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectā C D consistens angulos facit C E A A E D; erunt hi duobus rectis æquales. Rursus quoniam recta linea D C super rectam A B cōsistens facit angulos A E D D E B; erunt A E D D E B anguli æquales duobus rectis. Ostensum autē est angulos quoque C E A A E D duobus rectis esse æquales. anguli igitur C E A A E D angulis A E D D E B æquales sunt. communis auferatur A E D. ergo reliquus C E A reliquo B E D est æqualis.

13. huius.

3. com. no

æqualis. Simili ratione, & anguli C E B D E A æquales ostendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ se inuicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

* Ex hoc manifeste constat rectas lineas quot quot se inuicem secant, facere angulos ad sectionem quattuor rectis æquales.

F. C. COMMENTARIVS.

Anguli deinceps.

Anguli ad verticem.

Anguli qui deinceps sunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum sectione fit; illorũ uero ex altera tãtũ ab altera secta. Nã si recta linea ipsa insecta manẽs, alteramq; suo extremo secãs, duos angulos fecerit; hos deinceps angulos vocamus. Si uero duae rectae linae, se inuicẽ secuerint, anguli ad uerticẽ efficiuntur, sic dicti, quòd vertices in eodẽ puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipsorum sunt puncta, ad quae plana dum contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema ostendit duabus rectis lineis se inuicem secantibus, angulos ad verticem aequales esse: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonstratum; in quo deest constructio, vtpote minus necessaria: demonstratio enim expositione contenta constructione aliqua non indiget.

Angulorum uertices.

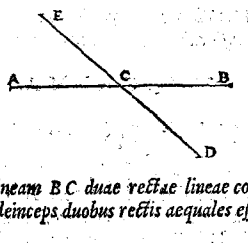
Theorema a Thalete inuentũ.

* Corollaria quæ nã sint in elementari institutione.

Ex hoc manifestum est.] *Corollarium est quod ex precedenti demõstratione apparet. corollaria enim in elementari institutione sunt, vt inquit Proclus, quae simul cum aliorum demonstrationibus apparent, ipsa vero non precipue querantur: veluti id quod in presentia propositum est, nam querebatur quidem si duabus rectis lineis se inuicem secantibus, anguli ad verticem equales essent. dum autem hoc ostenditur, simul etiam ostẽsum est, quattuor, qui sunt, angulos, quattuor rectis aequales esse. Corollarium igitur est theorema, quod ex alterius problematis, uel theorematis demonstratione ex improuiso emergit. nam ueluti casu quodam in corollaria incidere uidemur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam querentibus obuiam se se offerunt. Corollariorum uero alia geometrica sunt, alia arithmetica, & rursus alia problematibus consequentia sunt, alia theorematibus; & alia directis ostensionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non potest, ostẽduntur. Huius autem theorematis conuersum à Proclo ita demonstratur.*

Corollaria geometrica, et arithmet. Huius theorematis conuersũ a Proclo demonstratur.

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ indirectũ sibi inuicem erunt.



Sit enim recta linea quædam A B, & in ipsa quod vis punctum C; & ad C duae rectae lineae C D C E non ad easdẽ partes sumptae, quae angulos A C D B C E aequales faciant. Dico ipsas C D C E in directum sibi ipsis esse. Quoniam enim recta linea C D super rectam lineã A B insistit, duos angulos duobus rectis efficit aequales; videlicet D C A D C B. Sed angulus D C A angulo B C E est aequalis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis aequales sunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam B C duae rectae lineae consequenter C D C E non ad easdem partes sumptae, angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt: indirectum sibi inuicem erunt.

13. huius.

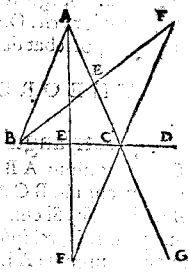
14. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & opposito est maior.

Sit

Sit triangulum A B C, et vnum ipsius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D vtroque interiore, et opposito, videlicet C B A et B A C maiorem esse. Secetur enim A C bifariam in E, et iuncta B E producatur ad F; ponaturq; ipsi B E æqualis E F. iungatur præterea F C, et ducta A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est æqualis E C, B E vero ipsi E F, duæ A E E B duabus C E E F æquales sunt, altera alteri: et angulus A E B angulo F E C est æqualis, ad verticem enim sunt. basis igitur A B æqualis est basi F C; et A B E triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus B A E est æqualis angulo E C F. Sed E C D angulus maior est ipso E C F. maior igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam secta, ostendetur etiã B C G angulus, hoc est A C D angulo A B C maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore et opposito maior est. quod oportebat demonstrare.

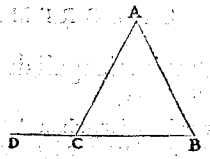


4.h uius.

THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. producatur enim B C ad D. et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D maior est interiore, et opposito A B C: cõmunis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B angulis A B C B C A maiores sunt. Sed A C D A C B sunt æquales duobus rectis. ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demõstrabimus angulos quoque B A C A C B, itemq; C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.



13.huius.

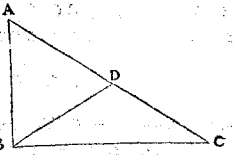
F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, indeterminate ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipsius anguli duobus rectis aequales sunt. quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quantus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B maius. Dico et A B C angulum angulo B C A maiorem esse. Quoniam enim A C maior est, quàm A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; et B D iungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is maior interiore, et oppo-



16.huius.

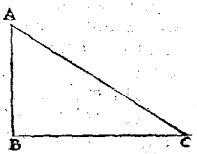
posito

5.huius. posito D C B. Sed A D B æqualis est ipsi A B D, quòd et latus A B lateri A D sit æquale. maior igitur est et A B D angulus angulo A C B. quare A B C ipso A C B multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIX.

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

Sit triangulum A B C maiorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B maius esse. Si enim non est maius, vel A C est æquale ipsi A B, vel ipso minus. æquale igitur non est, nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset. non est autem. non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus. esset enim et angulus A B C angulo A C B minor. atqui non est. non igitur A C minus est ipso A B. ostensum autem est neque æquale esse. ergo A C ipso A B est maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.



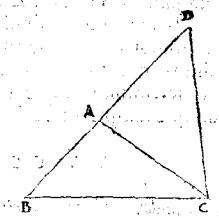
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc precedentis theorematis conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duo latera reliquo maiora esse, quomodocũque sumpta: videlicet latera quidem B A A C maiora latere B C; latera vero A B B C maiora latere A C: et latera B C C A maiora ipso A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturq; ipsi C A æqualis A D; et D C iungatur. Quoniam igitur D A est
5.huius. æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis. Sed B C D angulus maior est angulo A C D. angulus igitur B C D angulo A D C est maior. Et quoniam triangulum est D C B, habens B C D angu-
Ex antecedente. lum maiorem angulo B D C: maiorem autem angulum maius latus subtendit: erit latus D B latere B C maius. Sed D B est æquale ipsis B A A C. quare latera B A A C ipso B C maiora sũt. Similiter ostendemus et latera quidem A B B C maiora esse latere C A: latera vero B C C A ipso A B maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. quòd ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema Epicurei impugnarũt tanquam. Asino manifestum.

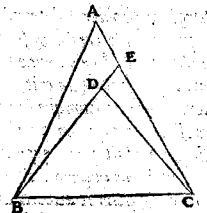
Præsens theorema, vt scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum Asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. Asino autem manifestum esse, ostendunt ex eo, quòd herba in altero laterũ extremo posita, Asinus pabulũ expetens, vnũ latus peragrat, & non duo. Aduersus hec dicendum. Theorema sensu quidem manifestum esse, non autem & scientiam gignente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque sensui indubitatum

dubitatum est, sed quo nam pacto calefaciat, conuincere scientiae officium est. Sic igitur duo trianguli latera reliquo esse maiora, sensui manifestum, quo aut hoc fiat dicere ad scientiã pertinet. Alij aliter hoc theorema demonstrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclũ.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duę rectæ lineæ intra consti tuantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim A B C in vno latere B C à terminis B C duæ rectæ lineæ intra constituantur B D D C. Dico B D D C reliquis duobus trianguli lateribus B A A C minores quidem esse, maiorem vero continere angulum B D C angulo B A C. producatur enim B D ad E. Et quoniam omnis triãguli duo latera reliquo sunt maiora, erunt trianguli A B E duo latera B A A E maiora latere B E. communis apponatur E C. ergo B A A C ipsis B E E C maiora sunt. Rursus quoniam C E D triãguli duo latera C E E D sunt maiora latere C D, communis apponatur D B. quare C E E B ipsis C D D B sunt maiora. Sed ostensum est B A A C maiora esse B E E C. multo igitur B A A C ipsis B D D C maiora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore, et oppositò est maior: erit trianguli C D E exterior angulus B D C maior ipso C E D. Eadem ratione et trianguli A B E exterior angulus C E B ipso B A C est maior. Sed angulus B D C ostensus est maior angulo C E B. multo igitur B D C angulus angulo B A C maior erit. Quare si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectę lineæ intra constituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.



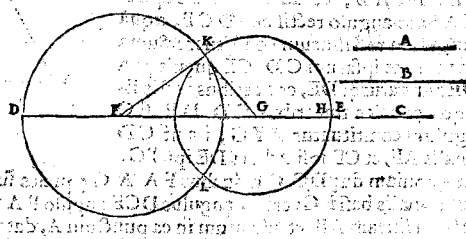
Ex antecedente.

16. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quę tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.

Sint tres datæ rectę lineæ A B C, quarum duæ reliqua maiores sint, quomodocũque sumptæ, vt scilicet A B quidem sint maiores quàm C, A C verò maiores quàm B, et præterea B C maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A B C triãgulũ cõstituere. exponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi quidem A æqualis D F, ipsi vero B æqualis F G, et ipsi C æqualis G H: et centro



3. postul. centro F, interuallo autem F D circulus describatur D K L. Rursusq; centro G, et interuallo G H alius circulus K L H describatur, et iungantur K F K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum K F G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L circuli; erit F D æqualis F K. Sed F D est æqualis A. ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, erit G H æqualis G K. Sed G K est æqualis C. ergo et G H ipsi C æqualis erit. est autem et F G æqualis B. tres igitur rectæ lineæ K F F G G K tribus A B C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis K F F G G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est K F G. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematũ alia indeterminata, alia terminata.

Determinatio duplex.

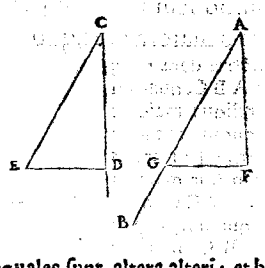
Præsens problema determinatum est. problematum enim quemadmodum & theorematum alia quidem indeterminata sunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo simpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quæ tribus datis rectis lineis æquales sint, triangulum constituere. problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duæ reliqua sint maiores, quomodocumque sumptæ, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim duplex est, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quæ post expositionem ponitur, significans quid sit illud, quod quæritur; altera uero, quæ propositionem vniuersalem esse prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit, vt hoc loco, [oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta] *& in sexto libro*] Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrãmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo, quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.] *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falsum diuisio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest. Proclus in commentariis citat Euclidis verba, quæ à verbis huiusce demonstrationis discrepant, vt luce clarius sit Euclidis demonstrationes aliquibus in locis à Theone immutatas esse, & eas, quas nunc habemus Theonis esse, non Euclidis.*

Theorematum diuisio iuxta uerum & falsum.

Problematũ diuisio iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.



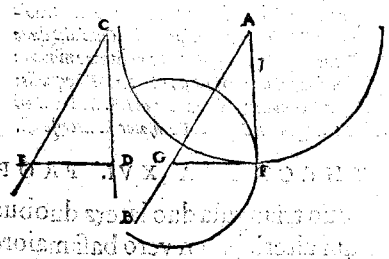
Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsa punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumãtur in vtraque ipsarum C D C E quęuis puncta D E, iungaturq; D E, et ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus C D D E E C triangulum constituatur A F G, ita ut C D sit æqualis A F, et C E ipsi A G, et D E ipsi F G. Itaque quoniam duę D C C E duabus F A A G æquales sunt, altera alteri; et basis D E est æqualis basi F G: erit et angulus D C E angulo F A G æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. quod facere oportebat.

8. huius.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Et ex tribus rectis lineis, quę æquales sint tribus CD DE EC triangulum constituatur AFG.] *A recta linea AB abscindatur AG æqualis ipsi CE: & centro quidem A, interuallo autem ipsi CD æquali describatur circulus: & rursus centro G & interuallo æquali ipsi ED alius circulus describatur, vt circuli sese inuicem in puncto F faciant: & iungantur AF, FG. Dico iam factum esse, quod proponebatur, & demonstratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inuentum esse tradit Eudemus.*



✻ 3. Huius.

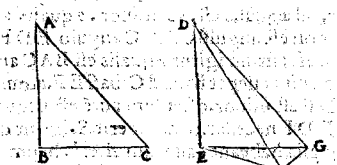
3. Postul.

Hoc theorema ab Oenopide inuentum est.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE, latus vero AC æquale DF: & angulus BAC angulo EDF sit maior. Dico et basim BC basi EF maiorem esse. Quoniam enim angulus BAC maior est angulo EDF, constituatur ad rectam lineam DE, et ad punctũ in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG, ponaturq; alterutri ipsarum AC DF æqualis DG, et GE FG iungantur. Itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; et angulus BAC est æqualis angulo EDG. ergo basis BC basi EG est æqualis. Rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; et angulus DFG angulo DGF. erit DFG angulus angulo EGF maior. multo igitur maior est EFG angulus ipso EGF. Et quoniam triangulum est EFG, angulum EFG maiorem habens angulo EGF; maiori autem angulo maius latus subtenditur; erit et latus EG latere EF maius. Sed EG latus est æquale lateri BC. ergo et BC ipso EF maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi maiorem habebunt. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente.

✻ 4. huius.

5. huius.

19. huius.

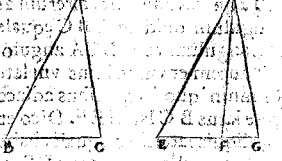
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema quarto oppositum est, illud enim angulos qui sunt ad vertices triangulorũ æquales ponit, hoc inæquales; illud bases æquales, hoc inæquales esse demonstrat.

Hoc theorema quarto oppositum.

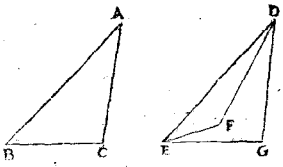
✻

Et GE FG iungantur] *rectalinea EG, vel cadit supra EF, vel in ipsam, vel infra ipsam. Euclides vt supra cadentẽ accepit. Quòd si in ipsam cadat, vt in secunda figura, idẽ ostendetur. Sunt enim duę BA AC duabus ED DG æquales: & cũ æquales contineant angulos, & basis BC basi EG æqualis erit. Sed EG*



4. Huius.

est maior, quàm E F, vt totum est maius, quàm ipsius pars. ergo & B C quàm E F est maior. Cadat postremo infra ipsam. ut in tertia figura. Similiter demonstrabimus basim B C basi E G aequalem esse. Cum aut duae 21. huius. *E F F D intra triangulum E D G constitutae minores sint, quàm duae E G G D; sitq; D G ipsi D F aequalis; erit reliqua E G maior, quàm reliqua E F. Sed B C est aequalis E G. ergo et B C quàm E F maior sit necesse est.*

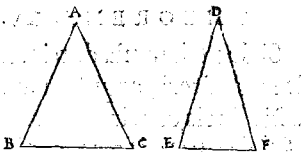


THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F: basis autem B C basi E F sit maior. Dico et angulum B A C angulo E D F maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis est, vel minor. æqualis autē non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F æqualis. 4. huius. non est aūt. nō igitur æqualis est B A C angulus angulo E D F. sed neque minor. minor enim esset et basis B C basi E F. atqui nō est. non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. ostensum autē est, neque esse æqualem. ergo angulus B A C angulo E D F necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedenti.



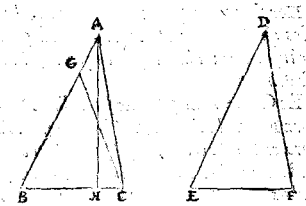
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema octauo oppositum est, præcedentis vero conuersum, quod alij aliter demonstrarunt, vt tradit Proclus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeāt, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis D E F E F D æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem A B C æqualem angulo D E F; angulum vero B C A angulo E F D. habeant autem et vnum latus vni lateri æquale, et primum quod æqualibus adiacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterū alteri, latus scilicet A B lateri D E; et latus A C



ipsi

ipsi DF, et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, vna ipsarum maior est. Sit maior AB, ponaturq; GB æqualis DE; et GC iungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: et angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est æqualis: et GBC triangulũ triãgulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtẽdũtur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare et BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor maiori, quod fieri nõ pot. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem et BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, et angulus ABC æqualis angulo DEF. basis igitur AC basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, vt AB ipsi DE. Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, vna ipsarum maior est. Sit maior BC, si fieri potest; ponaturq; BH æqualis EF, et AH iungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo basis AH basi DF est æqualis: et ABH triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis igitur est angulus BHA angulo EFD. Sed EFD est æqualis angulo BCA. ergo et BHA angulus angulo BCA est æqualis. Trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori; et opposito BCA, quod fieri non potest. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem et AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: angulosq; æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, et ABC triangulum æquale triangulo DEF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonstrare.

4. huius.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & aequalitate, vel inæqualitate quæcunque in elementari institutione dici poterant, ex superioribus didicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; præcipue vero de parallelogrammis: simul cum horum contemplatione de trapezijs differens. diuiditur enim quadrilaterum, vt superius dictum est in parallelogrammum, & trapezium: rursusq; parallelogrammum in alias species: & trapezium similiter. Verum quoniam parallelogrammon quidem ob æqualitatis participationem ordinatum est: trapezium vero neque eundem, neque similem seruat ordinem: non immerito præcipue quidem de parallelogrammis sermonem habet; simul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim sectione ortus trapeziorum apparebit, vt prosedentibus nobis fiet manifestum. Sed quoniam rursus fieri non potest, vt de parallelogrammorum, vel constructione, vel aequalitate aliquid dicatur absque parallelarum consideratione; vt enim ex ipso quoque nomine apparet parallelogrammum est, quod à parallelis rectis lineis è regione positis describitur: necessario à parallelis doctrinæ initium facit. paulum vero progressus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vsus theoremate medio inter harum, illorumq; institutionem elementarem, quod quidem videtur symptoma quoddam, quod parallelis inest, contemplaris primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim est. [Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt. *Nam in hoc considerato quidem symptoma quoddam aequalibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera aequalia, et parallela è regione posita habet. Parallelarum*

Hoc theorema ad Thaletem refertur.

Parallelogrãmum ordinatum est, trapezium vero minime.

Parallelogrãmum est a parallelis describitur.

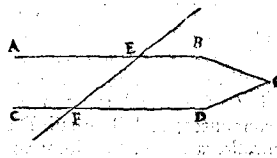
Parallelogrãmorum ortus.

Parallelia tria per se insunt.

igitur sermonem necessario præassumptum esse, ex his constat. Tria autem assumere oportet, quæ parallelis per se insint, ipsasq; explicant: & cum ipsis cõuertuntur. neque solum tria simul, sed & vnum quodque seorsum ab alijs sumptum. quorum vnum hoc est. recta linea parallelas secante, alternos angulos inter se æquales esse: aliud, recta linea parallelas secante angulos interiores duobus rectis esse æquales. reliquum vero, recta linea parallelas secante, angulum exteriorem interiori; & opposito æqualem esse. horum autem symptomatum vnumquodque demonstratum parallelas esse rectas lineas affirmare potest. Hoc modo & alij mathematici de lineis differere consueuerunt, vniuscuiusque speciei symptoma tradentes. Apollonius de conicis lineis aget. *Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid symptoma sit ostendit:* Nicomedes de cõchoid. *& Nicomedes in conchoidibus,* Hippias de quadrãtibus. *& Hippias in quadrantibus.* Perseus in spiricis. *& Perseus in spiricis. nam post earum ortum, quod ipsis per se, & quatenus ipsum inest, assumptum, constitutam nobis formam ab omnibus alijs distinguit. Eadem igitur modo, & elementorum institutor parallelarum symptomata primum inuestigat. Hæc ex Proclo.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

❧ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.



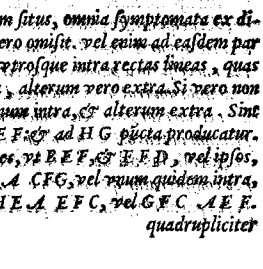
In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C. producantur, conueniantq; ad partes B D in pũcto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus A E F maior est interiore et opposito E F G. Sed et æqualis. quod fieri nõ põt. non igitur A B C D productæ ad partes B D conuenient. Similiter demonstrabitur neque conuenire ad partes A C. quæ vero in neutras partes conueniunt, parallelæ inter se sunt. parallela igitur est A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ. quod ostendere oportebat.

16. huius.

diffi. 35.

F. C. COMMENTARIVS.

❧ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos] *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad easdem partes, neque deinceps sunt, sed ab incidente linea distinguuntur, cum vtrique intra parallelas existant. differunt autem quòd alter sursum alter deorsum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis A B, & C D existentibus, incidentéq; in ipsas recta linea E F, angulos A E F D F E; itemq; angulos C F E B E F alternos esse dicit. vt pote alterno, commutatóue ordine iuxta positionem se habentes. Illud autem sciendum est, cum talis sit rectarum linearum situs, omnia symptomata ex diuisione sex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omisit. vel enim ad easdem partes angulos sinemus, vel non ad easdem: & si ad easdem, vel vtrosque intra rectas lineas, quas parallelas ostendit, vel vtrosque extra, vel vnum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad easdem partes, similiter vel vtrosque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rursus rectæ lineæ A B C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G pũcta producatur. Si igitur ad easdẽ partes angulos accipias, vel vtrosq; intra ponas, vt B E F, & E F D, vel ipsos, A E F, & E F C, vel vtrosq; extra, vt H E B D F G, vel H E A C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt H E B E F D, vel G F D F E B; vel H E A E F C, vel G F C A E F.*



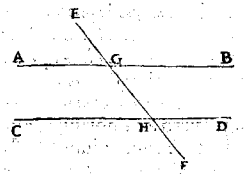
quadrupliciter

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad eaſdem partes, vel vtroſque intra, vt AEF EFD, vel CFE FEB: vel vtroſque extra, vt AEH DFG, vel HEB CFG, vel vnum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rurſus quadrupliciter, vel enim AEH EFD, vel HEB EFD, vel GFC FEB, vel GFD FEA. Cum igitur anguli ſex modis ſumatur, Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, vnam quidem ex ijs angulis, qui non ad eaſdem ſint partes, et qui intra tantum ſumũtur; quos alternos appellauit; duas vero ex ijs, qui ad eaſdem partes vel vtrique intra ſumuntur, quos duobus rectis aequales eſſe dicit: vel vnus quidem extra, alter vero intra ſumitur, quos dicit inter ſe aequales eſſe. Tres vero reliquas omiſit, vt pote quos eadem omnino conſequãtur. Sint enim ad eaſdem partes vtrique extra anguli HEB DFG. Dico hos duobus rectis aequales eſſe. angulus enim DFE angulo HEB, & angulus BEF angulo DFG eſt aequalis. Si autem anguli BEF EFD duobus rectis ſunt aequales, anguli etiam DFG HEB duobus rectis aequales erunt. Sint rurſus non ad eaſdem partes anguli AEH EFD, quorum alter ſit extra, alter intra; ipſi quoque duobus rectis ſunt aequales. Quoniam enim angulus AEH aequalis eſt angulo BEF, anguli vero BEF EFD duobus rectis aequales ſunt; erunt & anguli AEH EFD duobus rectis aequales. Sint poſtremo non ad eaſdem partes vtrique extra anguli AEH DFG. Dico eos etiam inter ſe aequales eſſe. Nam cum angulus AEH aequalis ſit angulo BEF, & angulus DFG angulo EFC, ſintq́; anguli BEF EFC alterni inter ſe aequales: anguli etiam AEH DFG inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.

Cum anguli ſex modis ſumantur. Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, reliquas omiſit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulũ interiori, et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erũt inter ſe rectæ lineæ.



In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori et oppoſito GHD æqualem faciat; vel interiores, et ad eaſdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam eſſe. Quoniam enim EGB angulus æqualis eſt angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH, erit et angulus AGH angulo GHD æqualis: et ſunt alterni. parallela igitur eſt AB ipſi CD. Rurſus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis ſunt æquales, et ſunt AGH BGH æquales duobus rectis: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales, communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH eſt æqualis reliquo GHD: et ſunt alterni. ergo AB ipſi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. quod demonſtrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente. 13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema à Ptolemæo aliter demonſtratur, vt tradit Proclus.

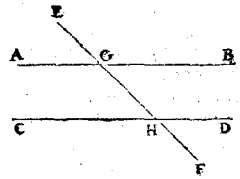
Theorema a Ptolemæo aliter demõſtratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito, et ad

eaſdem

eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.



In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, et exteriorē EGB interiori et oppoſito, et ad eaſdē partes GHD æqualē: et interiores et ad eaſdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi GHD, vnus ipſorum maior eſt. Sit maior AGH. et quoniam AGH angulus maior eſt angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD maiores ſunt. Sed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis. ergo BGH GHD anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineæ inter ſe conueniunt. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ conuenient inter ſe. atqui non conueniunt, cum parallelę ponantur. non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD. quare neceſſario eſt ęqualis. angulus autem AGH ęqualis eſt angulo EGB. ergo et EGB ipſi GHD ęqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH ſunt ęquales angulis BGH GHD. Sed EGB BGH ęquales ſunt duobus rectis. ergo et BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorē interiori et oppoſito; et ad eaſdem partes æqualem; et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonſtrare.

13. huius.

Poſt. 5.

15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtriſque precedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum eſt queſitum, poſitionem facit; & quae in illis data ſunt, demonſtrare proponit. atque hęc conuerſorū differentia ſilentio pretereunda non eſt. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto ſextum, aut pluribus vnum, vt precedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo poſt manifeſtum erit.

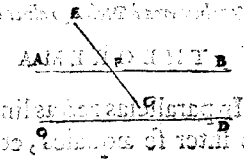
Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineę inter ſe conueniunt] *Poſtulatum quintum eſt, quod tamen cum euidens non ſit, & demonſtratione indigere videatur, Proclus ita demonſtrandum cenſuit, duobus premiſſis, nimirum axiomate quopiam, quo etiam Ariſtoteles vſus eſt, & lemmate.*

AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit.

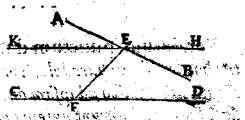
LEMMA.

Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædam linea; reliquam quoque ſecabit.



Sint parallelae AB CD; ſecetq; ipſam AB recta linea EFG. Dico EFG reliquam quoque CD ſecare. Quoniam enim duae rectae lineae ſunt, quae ab vno puncto F in infinitum producuntur, BF, FG, omni finita magnitudine maiorem habebunt diſtantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quae tanta eſt, quantum eſt interuallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum linearum diſtantia maior fuerit, quàm diſtantia parallelarum, recta linea FG ſecabit ipſam CD. Quare ſi alteram parallelarum ſecerit

cuerit quædam recta linea, reliquam quoque secabit.

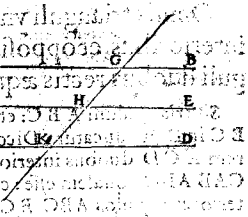


Hoc ante demonstrato consequenter propositum demonstrabitur. Sint enim duæ rectæ lineæ A B C D, & in ipsas incidat recta linea E F, angulos B E F D F E duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter se conuenire ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli B E F D F E duobus rectis minores sint, sit excessui duorum rectorum æqualis H E B angulus, & H E ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas H K C D recta linea E F incidit, interiores ad eadem angulos H E F D F E duobus rectis efficit æquales; rectæ lineæ H K C D parallelæ erunt. & A B secat ipsam H K. erga reliquam quoque C D secabit per antecedens lemma. conuenient igitur inter se rectæ lineæ A B C D ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. ✲

Sit vtraque ipsarum A B C D ipsi E F parallela. Dico et A B ipsi C D parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B E F, recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas E F C D, recta linea incidit G K, æqualis est G H F angulus angulo G K D. ostensus autem est & angulus A G K angulo G H F æqualis. ergo et A G K ipsi G K D æqualis erit. sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt, quod oportebat demonstrare.



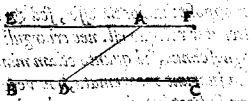
F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, et inter se parallelæ erunt.] *Contingit autem hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus respectibus verum esse. non enim quæ eiusdem dupla, & inter se dupla sunt, nec quæ eiusdem sesquialtera, inter se sunt sesquialtera, sed in illis solis locum habere videtur, quæcunque vnitate conuertuntur, vt in æqualitate, in similitudine, in identitate, & in parallela positione. Quæ enim parallelae parallelæ, & ipsa parallela est, quemadmodum, & quod æquali æquale, & ipsum est æquale; & quod simili simile, & ipsum simile. parallelarum enim ad se se respectus similitudo positionis est.* ✲

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. ✲

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet per A punctum ipsi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quod uis punctum D, & iungatur A D: constituatur; ad rectam lineam D A, & ad punctum in ipsa A, angulo A D C æqualis angulus D A E. & in directum ipsi E A recta linea A F producatur. Quoniã igitur in duas rectas lineas B C E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D A D C inter se æquales efficit, E F ipsi B C parallela erit. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C parallela ducta est recta linea E A F. quod facere oportebat.



23. Huius.

27. Huius.

F. C.

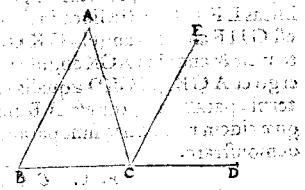
F. C. COMMENTARIVS.

* Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.] *Videtur hoc problema parallelarũ ortũ tradere. At datum punctũ extra rectam lineam sumere oportet, ita ut à puncto ad ipsam ducta recta linea angulum faciat, alioqui nulla alia præter iam dictã, duci poterit. differunt autem per datum punctum, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium est; ab ipso fit deductio, vt in illo problemate,* [*super datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere*] *Quando autem punctum in recta linea est, per ipsum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.* [*per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelã rectam lineam ducere;*] *& quemadmodum non licet ab eodem puncto super datam rectam lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae linae duas, uel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter se conuenirent. quod est absurdum.*

Per datum punctum, & a dato pũcto lineã ducere.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



Sit triangulum A B C: et vnum ipsius latu[s] B C in D producatur: Dico angulum exterio rem A C D duobus interioribus et oppositis CAB ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC B C A C A B duobus rectis esse æquales. Ducatur enim per punctũ C ipsi A B rectæ lineæ parallela C E. Et quoniam A B ipsi C E parallela est, et in ipsas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter se æquales sunt. Rursus quoniã A B parallela est C E, et in ipsas incidit recta linea B D, exterior angulus E C D interiori et opposito A B C est æqualis. Ostensus autem est angulus A C E æqualis angulo B A C. Quare totus A C D exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis B A C A B C. communis apponatur A C B, anguli igitur A C D A C B tribus A B C B C A C A B æquales sunt. Sed anguli A C D A C B sunt æquales duobus rectis. Ergo et A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

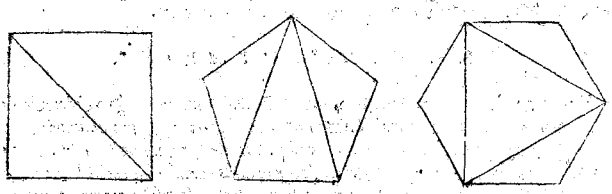
25. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in sextodecimo, & septimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. non solum enim ex hoc discimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore & oppositio maiorem esse, sed & quanto maiorem. nam cum vtrisque sit aequalis, maior quàm alteruter reliquo est. nec trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse solum ex hoc cognoscimus, sed quanto etiam minores: reliquo enim trium. illæ igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero scientiae terminum vtrisque attulit. eius theorematis, triangulum scilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inuẽtionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipsi aliter demonstrarunt, vt Proclus tradit. quã etiam huius theorematis duo ostendit conuersa, ex quibus apparere potest, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc constet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis esse aequales, aperta est nobis via, per quã ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis aequales sint. vt puta

la quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae sequuntur. Itaque primo sciendum est omnem rectilineam figuram in triangula resolui; omnium si quidem constitutionis principium est trian gulum. vnaquaque autem in triangula binario pauciora, quam sint propria latera, resoluitur, vt si

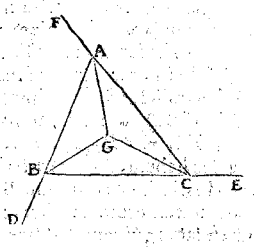
Omnis recti linea figura in triangula binario pauciora quam sit propria latera resoluitur.



quattuor latera habeat, in duo resoluitur triangula; si quinque in tria, si sex in quattuor, & simi liter reliquae. Quod cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis sint aequales, numerus triangulorum, ex quibus vnaqueque figura constat, duplicatus multitudinem prebebit rectorum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triangulis constans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos aequales sex rectis, & deinceps eodem modo. Sed & illud sciendum est, [omnem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus semel producto, angulos qui extra constituũ tur, quattuor rectis æquales habere] *quod nos hoc modo demonstrabimus.*

Omnis recti linea figura angulos qui extra constitutitur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum A B C, et producantur latera A B B C C A ad puncta D E F. Dico angulos C B D B A E A C E, qui extra constituuntur, quattuor rectis æquales esse.



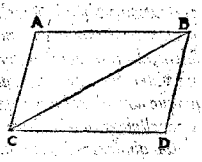
Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum G, & iungãtur G A G B G C. erunt triangulorum A G B B G C C G A omnes anguli sex rectis aequales; sed & anguli C B A C B D B A C B A F A C B A C E sunt aequales sex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis C B A C B D B A C B A F A C B A C E aequales sunt. communes auferantur C B A B A C A C B. reliqui igitur, qui fiunt ad G sunt aequales angulis extra figuram constitutis. anguli autem ad G quattuor rectis sunt aequales. ergo & anguli, qui extra figuram constituuntur, vi delicet C B D B A F A C E quattuor rectis aequales erunt. quod demonstrare oportebat. eodẽ modo demonstrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipsas constituuntur, quattuor rectis esse aequales.

Corol. 15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quę æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt rectę lineę, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.

Sint æquales et parallelę A B C D: et ipsas cõiungant ad easdem partes rectę lineę A C B D. Dico A C B D æquales, et parallelas esse. iungatur enim B C, et quoniam A B parallela est C D: in ipsas incidit B C, alterni anguli A B C B C D æquales sunt. Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autẽ B C, duæ A B B C duabus B C C D sunt æquales, et angulus A B C æqualis angulo B C D. basis igitur A C basi B D est æqualis: triangulumq; A B C trian



29. huius.

4. huius.

gulo B C D:et reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt,alter alteri,quibus æqua lia latera ſubtenduntur.ergo angulus A C B angulo C B D eſt æqualis.Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens,alternos angulos A C B C B D æquales inter ſe efficit,parallela eſt A C ipſi B D. oſtenſa autem eſt et ipſi æqua lis.Quæ igitur æquales et parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectæ lineæ,et ip ſæ æquales et parallelæ ſunt.quod oportebat demonſtrare.

27.huius.

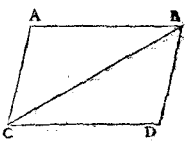
F. C. COMMENTARIVS.

Parallelogrãmum quomodo fiat.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum,parallelogrammorumq́, conſiderationis eſſe dicebamus.aequalium namque & parallelarum rectarum linearum ſymptoma quoddam dicere videtur,parallelogrammorumq́, ortum latenter tradit. parallelogrammum enim fit ex aequalibus, & parallelis, quae initio ductae ſint, & ex ijs,quae ipſas coniungunt rectis lineis: quae etiam aequales & parallelae oſtenduntur. Qua propter quod ſtatim ſequitur, veluti conſtituto iam parallelogrammo, quae per ſe inſunt eiuſmodi ſpacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propoſitione adhibita ſit,accurate & diligenter notauit Proclus.

THEOREMA XXIIII. PROPO. XXXIIII.

Parallelogrammorum ſpaciorum latera, quæ ex oppoſito,et anguli,inter ſe æqualia ſunt; et diameter ea bifariam ſecat.



Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex oppoſito,et angulos inter ſe æqualia eſſe; et diametrum B C ipſum bifariam ſecare. Quoniam enim parallela eſt A B ipſi C D, et in ipſas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter ſe æquales ſunt. Rurſus quoniam A C ipſi B D parallela eſt, et in ipſas incidit B C; alterni angu li A C B C B D æquales ſunt inter ſe. duo igitur triangu la ſunt A B C C B D, quę duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent,alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale,quod eſt ad æqua les angulos,vtrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqua lia habebunt,alterum alteri,et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur eſt latus quidem A B lateri C D: latus vero A C ipſi B D; et angulus B A C angulo B D C æqualis. Et quoniam angulus A B C eſt æqualis angulo B C D; et an gulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. oſtenſus autem eſt,et angulus B A C angulo B D C æqualis. parallelogrammorũ igitur ſpa ciorum latera, quę ex oppoſito,et anguli, inter ſe æqualia ſunt. Dico etiam diame trum ea bifariam ſecare. Quoniam enim æqualis eſt A B ipſi C D,communis autem B C,duæ A B B C duabus D C C B æquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis eſt angulo B C D. baſis igitur A C baſi D B æquàlis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit. ergo diameter B C parallelogramum A C D B bifariam ſecat. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum alia uniuerſalia, alia non uniuerſalia.

Vniuerſale duobus modis appellari conſueuit.

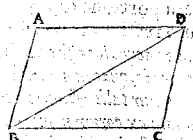
Theorematum,vt inquit Proclus,alia vniuerſalia ſunt, alia non vniuerſalia. quomodo autem vtrumque horum dicamus,commemorabimus,cum queſitum partiemur,quod vnam partem habet vniuerſalem,alteram vero non vniuerſalem. quamuis enim omne theorema vniuerſale quidem eſſe fortaſſe videretur, & omne,quod ab Euclide oſtenditur huiuſmodi eſſe (quemadmodum in preſentia quoque non ſolum latera,quae ex oppoſito ſunt, & angulos aequales habere vniuerſe de omnibus parallelogrammis dici videtur,verum etiam diametrum vnumquodque bifariam ſecare) attamen alia quidem vniuerſe oſtendi dicimus, alia uero non vniuerſe. aliter enim vniuerſale appellari conſueuit,quod de omnibus verum dicit,de quibus prędicatur; aliter autem quod omnia comprehendit,

comprehendit, quibus idem symptoma inest. vniuersale siquidem est, & quod omne aequicrure tres angulos duobus rectis aequales habet, quoniam de omnibus aequicruribus verum est; vniuersale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis aequales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per se inest. Quocirca primum quoque hoc de triangulo ostendi dicimus, tres angulos duobus rectis aequales habere. Itaque iuxta hanc significationem alia quidem vniuersalia theorematum dicentes, alia vero non vniuersalia, presens theorema dicimus vnum quidem quesitorum vniuersale habere: alterum vero non vniuersale. nam hoc quidem latera, quae ex opposito sunt, & angulos aequales habere vniuersale est. solis enim parallelogrammis inest. hoc vero, diametrum bifariam spacium secare, non vniuersale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus symptoma hoc inspicitur. etenim circulis, & ellipsibus hoc etiam inest. & videntur primae quidem rerum huiuscemodi notiones esse magis particulares, progressae autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuissent, diametrum bifariam secare circulum, ellipsim, & parallelogrammum, commune in his postea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Aristoteles, quidā nō vniuersale tamquā vniuersale ostendens, eō quod commune est innominatū, cui primum symptoma inest. nam quid commune sit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & sonis, quibus omnibus inest permutata proportio, dicere non licet. quid preterea cōmune sit circulo, ellipsi, & parallelogrammo, difficile est exprimere, nā vna quidem figura rectilinea est, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuersale eū ostēdere opinamur, qui demonstrat, omne parallelogrāmū à diametro bifariā secari, eo quòd commune simul nō cernimus, propter quod hoc verum est. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiuscemodi vniuersale non est propter iam dictam causſam. illud vero est, omne parallelogrammum latera, quae ex opposito sunt & angulos habere aequalia. Etenim si aliqua figura posita fuerit, quae ex opposito sint latera, & angulos aequalia habere, parallelogrammum hec esse ostenderur. hec Proclus. Huius autem theorematis conuersum, quatenus ad primam partem attinet, tale est.

Tres angulos duobus rectis aequales habere primū de triangulo ostenditur.

Diametrum bifariam secare spaciū, inest non solum parallelogrāmo sed circulis, et ellipsibus.

Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum est.



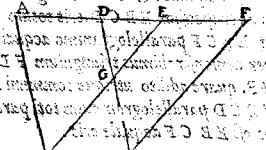
Sit quadrilaterum A B C D, habens latus quidem A B aequale lateri D C; latus vero A D lateri B C; angulum quoq; A B C angulo A D C aequalem; & angulum B A D angulo B C D. Dico quadrilaterum A B C D parallelogrammum esse. Ducatur diameter B D. Et quoniam A B est aequalis D C, & A D ipsi B C, duae D A A B duabus B C C D aequales sunt, angulosq; aequales cōtinēt, & basis B D vtrique cōis. triangulū igitur A B D triāgulo C D B aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, videlicet angulus A B D angulo C D B, & angulus A D B angulo C B D, qui sunt alterni. ergo A B parallela est ipsi D C & A D ipsi B C; ideoq; A B C D parallelogrammum est. quod demonstrare oportebat. 17. huius.

Conuersum vero vt ad secundam partem huiusmodi erit omne quadrilaterum, *quod ab vtrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est. quod nos Paulo post demonstrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem basi, et in eisdem paralellis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma A B C D E B C F in eadem basi B C, et in eisdem parallelis A F, B C constituta. Dico A B C D parallelogrammum parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniā enim parallelogrammum est A B C D, æqualis est A D ipsi B C. Eadem quoque ratione, et E F est æqualis B C. Quare et A D ipsi E F æqualis erit: et communis D E. tota igitur A E toti D F est æqualis. est autem et A B æqualis D C. ergo duę E A A B duabus F D D C æquales sunt, altera alteri, et angulus F D C æqualis angulo E A B, exterior interiori. basis igitur E B basi F C est æqualis, et E A B 4. huius.



triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur D'G E. reliquum igitur trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est æquale. commune apponatur G B C triangulum. ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F æquale erit. parallelogramma igitur in eadem basi; et in eisdem parallelis cõstituta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata localia.

Locus lineæ, uel superficiei situs, qui idẽ symptoma efficit..

Linearum aliæ planæ aliæ solidæ.

Localium theorematũ alia planum habent locũ, alia solidũ. localia theoremata, quæ solida appellantur.

Hyperbole solida linea.

Localia plana in rectis lineis.

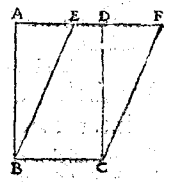
Localia plana in circumferentijs.

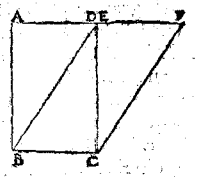
Theoremata quæ in mathematicis admirabilia dicuntur.

Angulorum æqualitas, et inæqualitas maximam uim habent ad augenda minuendaq; spacia.

Theorematis casus. 4. huius.

Quemadmodum theorematum, vt inquit Proclus, alia quidem vniuersalia, alia vero particularia esse dicebamus, & quemadmodum hęc diuidentes subiungebamus, alia esse simplicia, alia composita, & quid vnumquodque horum esset ostendebamus, ita sanè iuxta aliã distinctionem, alia quidem localia esse dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuscumque idem symptoma in toto quodam loco accidit. locum uero lineae, vel superficiei situm, qui vnum, idemq; symptoma efficiat. localium enim alia in lineis constituuntur, alia in superficiebus. Et quoniam linearum aliae sunt planae, aliae solidae. & planae quidem, quarum simplex est in plano intelligentia, vt ipsius rectae: solidae uero quarum ortus ex quadam solidae figurae sectione apparet. vt Cylindricae helicis, canonicarumque linearum, dicerem utique eorum etiam, quae in lineis constituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia uero solidum. Præsens igitur theorema & locale est, & in lineis locale, & planum. totum enim spacium, quod inter parallelas interijcitur, locus est parallelogrammorum, quae in eadem basi constituuntur. quae sanè aequalia quoque inter se Euclides ostendit. eorum uero localium theorematum, quae solida uocantur, tale sit exemplum, [parallelogramma, quæ in asymptotis, et hyperbola describuntur æqualia sunt.] *nam hyperbolen solidam esse lineam, manifestum est, quòd sit una ex coni sectionibus. Cum autem in præsentia de rectilineis sermo sit, localia plana in rectis lineis tradit; in tertio autem libro, cũ de circulis, eorumq; symptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs constituuntur locum simul, & planorum theorematum docebit, tale siquidem in illis est, quod ait* [Qui in eadem portione sunt anguli inter se sunt æquales] *nec non illud.* [Anguli qui in semicirculo recti sunt] *nam si infiniti quidè anguli in circũferentia constituti fuerint, eadẽ existẽte basi, omnes aequales esse ostenduntur. & illa quidem proportione respondent triangulis, & parallelogrammis, quae in eadem basi, & in eisdem sunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox sequuntur talis est, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt præterea hęc theoremata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis disciplinis appellantur. Stupet enim uulgus statim si longitudo multiplicata spaciorum aequalitatem non destruit, eadem existẽte basi. quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur. Sciendum autem est angulorum aequalitatem, & inæqualitatem maximam uim habere ad augenda minuendaq; spacia. quo enim magis angulos inæquales efficimus, eò spacium magis diminuimus, si longitudo latitudoq; eadem sit. Hoc theorema plures habet casus, uel igitur latus BE secat CD, uel non secat. & si non secat, uel E cadit inter AD uel in D. Euclides autem difficiliorem casum elegit, cum scilicet latus BE ipsum CD secat. si uero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quoniam enim AD est aequalis EF, quòd utraque ipsi BC sit aequalis, communi ablata ED, erit reliqua AE aequalis reliquae DF. est autem DC aequalis AB. Itaque duae FD DC duabus EA AB aequales sunt, & angulos aequales continent. basis igitur FC basi EB est aequalis. & FDC triangulum triangulo EAB. addatur cõmune trapezium EBCD. erit totum ABCD parallelogrammum toti EBCF parallelogrammo aequale. Quòd si E cadat in D, similiter demonstrabimus triangulum FDC aequale triangulo DAB. quare addito utrique communi DBC triangulo, totum ABCD parallelogrammum toti parallelogrammo DBCF, hoc est EBCF aequale erit.*



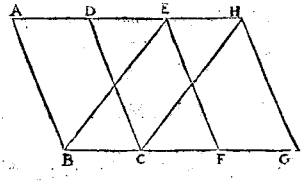


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma in æqualibus basibus,

et

et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ęqualia ſunt.

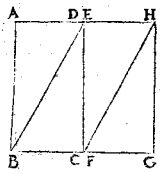


Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus baſibus B C F G, et in eiſdē parallelis AH BG conſtituta. Dico paral lelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale eſſe. coniungantur enim BE C H. Et quoniam æqualis eſt BC ipſi FG, & FG ipſi EH; erit et BC ipſi EH æqualis. ſuntq; parallelæ, et ipſas cō iungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ ſunt. Ergo E B, C H et æquales ſunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum eſt, et æquale parallelogrammo ABCD; baſim enim eandem habet B C, et in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur, ſimili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt ęquale. ergo paral lelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH ęquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.

33.huius.

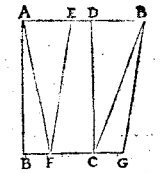
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.



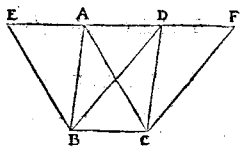
Parallelogrāma in eiſdē parallelis, quæ ſint. Theoremātis caſus.

Præcedens theorema eaſdem baſes accipiebat, hoc vero æquales. commune autem vtriſque eſt in eiſdem eſſe parallelis. oportet igitur ipſa neque intra ſubiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eiſdem dicuntur eſſe parallelis, cum baſes ipſorum, & quæ his ex oppoſito ſunt, latera eiſdem parallelis aptantur. Caſus huius theorematis plures ſunt. Nam vel baſes omnino ſeiunctæ ſunt, vel ſe ſe contingunt, uel aliquam partem habent communem, vtcunque ſe habeant latera, quæ baſibus opponuntur. & quamquam Proclus dicat Euclidem cum baſim ſeiunctam accepiſſet, theorema demonſtraſſe, attamen demonſtratio, quam habemus omnibus caſibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi poſſit de monſtrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas eſſe.



THEOREMA XXVII.
PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



Sint triangula ABC DBC in eadem baſi BC, et in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo D B C ęquale eſſe. producatur AD ex utraque parte in E F pūcta: et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE, per C vero ipſi BD parallela CF. parallelogram mū igitur eſt vtrūque ipſorū EBCA DBCF, et parallelogrammum E B C A eſt ęquale paralle logrammo D B CF, etenim in eadem ſunt baſi BC, et eiſdem parallelis BC EF, eſtq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero DBCF dimidium triangulum DBC; diameter enim DC ipſum bifariā ſecat. Quæ autem æqualium dimidia, inter ſe ęqualia ſunt. ergo triangulum A B C triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur in eadem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ęqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

31.huius.

35.huius.

34.huius.

7.com.no.

F. C.

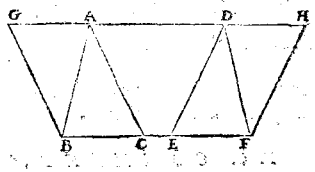
F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata de triangulis localia, & in lineis localia & plana

Sunt etiam hęc theoremata de triangulis, quae in eadem baſi, vel in aequalibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituuntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eiſdem eſſe parallelis, quae cum baſes habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figũt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in baſibus, ęqualibus et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt ęqualia.



Sint triangula ABC DEF in æqualibus baſibus, B C E F, et in eiſdem parallelis BF AD conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo D E F æquale eſſe. producatur enim AD ex vtraq; parte in GH puncta: et per B quidem ipſi CA parallela ducatur B G: per F vero ducatur FH parallela ipſi DE. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA DEFH. atque eſt parallelogrammum GB CA ęquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim ſunt baſibus BC EF, et in eiſdem BF GH parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat. et parallelogrammi DEFH dimidium eſt triangulum DEF, diameter enim D F ipſum ſecat bifariam. quę autem ęqualiũ dimidia, inter ſe æqualia ſunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF eſt ęquale. triangula igitur in ęqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.

31. huius.

35. huius.

34. huius.

7 com. not.

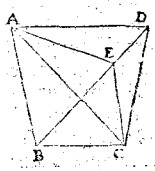
F. C. COMMENTARIVS.

Caſus in hoc theoremate tot ſunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus oſtendit, vno illo theoremate comprehendiſſe, in principio ſexti libri. [triangula, et parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, ut baſes.] *eadem enim altitudo nihil aliud eſt, niſi in eiſdem eſſe parallelis. nã figurae oēs quę in eiſdē ſunt parallelis, eandē altitudinē habent, & contrà, altitudo ſiquidem eſt perpendicularis, quae ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. illic igitur per proportionem oſtenſum eſt, ita ſe ſe habere triangula, et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, hoc eſt quae in eiſdē ſunt parallelis, vt baſes: & æqualibus exiſtentibus baſibus aequalia eſſe ſpacia, & dupla duplis, & aliam proportionē habentibus, eandem habere & ſpatia inter ſe proportionem: in præſentia uero, quoniam non decebat proportione uti, qui nondũ de ipſa docuerat, contentus fuit aequalitate ſola, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

A

Triangula æqualia in eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.



Sint æqualia triangula A B C D B C in eaſdem baſi B C conſtituta, et ad eaſdem partes. Dico et in eiſdem parallelis eſſe. Iungatur enim A D. Dico A D parallelam eſſe ipſi B C. Si enim non eſt parallela, ducatur per A punctum ipſi B C parallela recta linea A E, et E C iungatur. æquale igitur eſt A B C triangulum triangulo E B C, in eadem enim eſt baſi BC, et in eiſdem BC, AE parallelis. Sed A BC triangulũ triangulo D B C eſt ęquale. ergo et triangulum

DBC

D B C æquale est ipsi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D. ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. quod oportebat demonstrare.

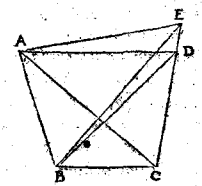
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema vigesimi septimi conuersum est, & quod sequitur est conuersum vigesimi octaui. nam, vt inquit Proclus, cum triplex sit theorematum conuersio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium secundo; aut pars parti, vt quintum primo. non enim totum in altero datum, quæsitum in altero est, nec quæsitum, datum, sed pars: talia videntur esse hæc quoque theoremata in triangulis. erat siquidem quæsitum in precedentibus, triangula æqualia esse. hoc autem non solum in his datum est, quippe cum partem insuper sumpserit eius, quæ in illis erat, positionis: hoc enim, in eadem basi esse, & in æqualibus basibus tum in his, tum in illis datum est, præterquam quòd in hisce positionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quæsitum, nec datum in illis erat. particula enim illa, ad easdem partes, extrinsecus insuper fuit assumpta. conuersa vero vigesimi quinti, & vigesimi sexti in parallelogrammis consulto omisit, quod eadem sit in vtrisque demonstratio.

Theorematũ conuersio triplex.

Et ad easdem partes.] *Quæ his respondent, videlicet καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη in aliquibus græcis exẽplaribus, tum in hoc theoremate, tum in sequenti nõ legũtur, sed necessario addita sunt. fieri enim potest vt in eadem basi æqualia triangula sumantur, vnum quidẽ ad partes superiores, aliud vero ad inferiores, quæ tamen non sunt in eisdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.* A

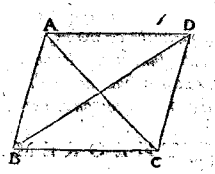
Maius minori quod fieri non pot.] *Idẽ absurdũ sequetur, si recta linea A E sumatur extra ipsam A D, vt notat Proclus. Ex his, quæ hoc loco demonstrata sunt, patebit cõuersũ se cũdę partis vigesimi quarti theorematis, quod erat huiusmodi.*



B

Omne quadrilaterum, quod ab utriusque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est.

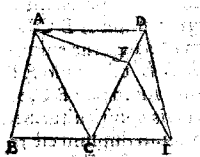
Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C B D ipsum bifariam secent. Dico A B C D parallelogrammum esse. Quoniam enim triangula A B C D B C eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt: & eandem habent basim B C. quare in eisdem sunt parallelis. parallela igitur est A D ipsi B C. similiter enim triangulum A B C æquale sit triangulo A B D, & sint in eadem basi A B, demonstrabitur rectam lineam D C ipsi A B parallelam esse. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus basibus B C C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. cõiungatur enim A D. Dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale, cum in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis B E A F constituantur. Sed triangulũ A B C æquale est triangulo D C E.



38. huius.

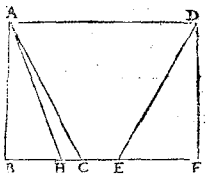
ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, maius minori, quod fieri nõ potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in aequalibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper contexentes, vnum vero relinquentes varie conuertemus. aut enim bases easdem, vel aequales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel aequeles, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quae sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quae in triangulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpserimus, & in eisdẽ parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in æqualibus; alterum autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cũ decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboret, cum eadem sit demõstratio. ostẽdetur enim in triangulis hoc modo.

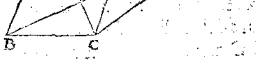
Triangula æqualia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.



Sint aequalia triangula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in aequalibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inæquales, & sit B C maior, abscindaturq; B H aequalis ipsi E F; & 38. huius. *A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus sunt basibus B H E F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triangula posita sunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H est aequale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inæquales sunt triangulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suae parti aequale esse: non in merito ab Euclide prætermissum fuit. hæc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triãgulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Iũgatur enim A C. triangulum igitur A B D triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E parallelis constituitur. Sed A B C D parallelo- 37. huius. 34. huius. grammum duplum est trianguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triangulum

gulum eandem basim habeant, et in eisdem sint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis duo sunt casus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtrisque demonstratio eadem est. Quòd si bases aequales sint, eodem modo ostendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in basibus aequalibus constituta inter se aequalia sint, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed dico eius conuersa similiter demonstrabuntur, quorum vnum est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut æquales habuerint, et fuerint ad eadem partes: in eisdem etiam parallelis erunt.

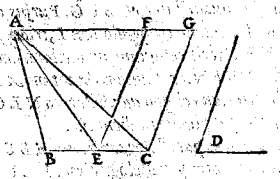
Si enim non ita sit, totũ parti erit aequale, eademq; ratio vigebit. necesse enim est, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtrò autem modo se se habuerit, idem sequetur absurdum, parallela ipsi basi per trianguli verticem ducta. alterum vero est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis, aut in vna eademq; basi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in basibus inaequalibus sint, cum aequales sumpserimus, totum parti aequale erit. In hoc igitur commune absurdum omnia hęc theoremata desinunt. Quare elementorum institutor nobis reliquit eam, quæ in his est, veritatem inuestigare, cum in simplicioribus ipse, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrãmum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pũctum in ea E, constituatur angulus C E F æqualis ipsi D: et per A quidẽ ipsi E C parallela ducatur A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur est F E C G. Et quoniam B E est æqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C æquale; in æqualibus enim sunt basibus B E E C, et in eisdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. est autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdẽ est parallelis. æquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius.

31. huius.

38. huius.

34 huius.

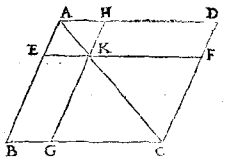
THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spacij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipsam A C parallelogramma quidem sint E H F G, quæ vero supplementa dicuntur B K K D. Dico B K suplementum supplemento K D æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D, et eius diameter A C, æquale est A B C triangulum triangulo A D C.

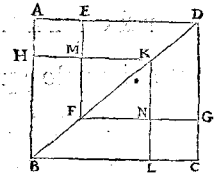
34. huius.

A D C. Rursus quoniam E K H A parallelogram mum est, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C est æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K æquale sit triangulo A H K: triangulum vero K G C ipsi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C æquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. est autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E. reliquum igitur B G supplementum reliquo supplemento K D est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spacii eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrãmorum supplemẽta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

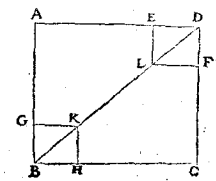
Huius theorematis tres sunt casus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiungũtur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quae se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa B K K D quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogromma sint E F G D H B L K, quae se se in punctis M N secent. Dico quadrilatera A H M E N L C G inter se aequalia esse. Quoniam enim triangulum quidem 34. huius. *A B D est aequale triangulo D B C; triangulum vero E F D triãgulo D F G; erit reliquum quadrilaterum A B F E ęquale reliquo quadrilatero C B F G. Rursus quoniam triangulũ H B K est aequale triangulo K B L, triangulumq; M F K triãgulo K F N; erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G. reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale sit necesse est; & hęc quidem quadrilatera sunt, quae supplementa dicuntur.*

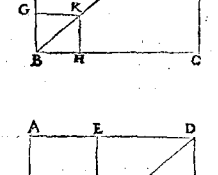


Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D est aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia sunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplementorum à re ipsa sumptũ est, quatenus hęc quo-

Supplementorũ nomen a re ipsa sũptum.

que prȩter duo parallelogramma, quae sint circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum sunt, quęcumque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi secat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo A B C D diameter B D secat E F latus ipsius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non est circa eandem diametrum.



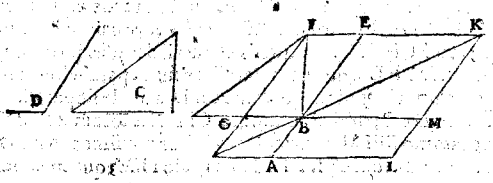


THEO-

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. constituatur triangulo C æquale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est æqualis D, et ponatur B E in directum ipsi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iungatur. Quoniã igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales sunt. quare BHG GFE duobus rectis sunt minores. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cõueniunt inter se. Ergo H B F E producta conuenient. producantur, et cõueniant in K: perq; K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quæ supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B E est æquale. Sed et B F æquale est triangulo C. quare et L B triangulo C æquale erit. Et quoniã G B E angulus æqualis est angulo A B M, sed et æqualis angulo D; erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æquaiis angulo D. quod facere oportebat.



42. huius.
31. huius.
29. huius.
1. postul.
31. huius.
Ex antecedente.
15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hæc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. cum enim propositæ rectæ linea, datum spacium toti rectæ lineæ coaptauêris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectæ linæ pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in præsentia vero applicatione indiget ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare uolens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo æqualis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

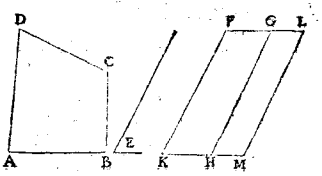
Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. coniungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH, in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est vtrique ipsorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42. huius.
Ex antecedente.

29.huius. KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positę angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG recta linea H G incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et æqualis est, et parallela; sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela: ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL, ergo et KM FL æquales et parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato, quod facere oportebat.

14 huius.
29.huius.
34.huius.
30.huius.
33.huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est, siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus. resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum aequale parallelogrammum constituentes, reliquis uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelogramma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hęc Proclus.

COROLLARIVM.

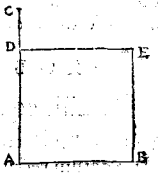
Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratũ describere. Ducatur rectę lineę AB à pũcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et AB quidem est æqualis DE, AD vero ipsi BE. Sed et BA ipsi AD est æqualis, quattuor igitur BA, AD DE EB inter se æquales sunt, ideoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectãgulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BAD. ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spaciorum, quæ ex oppositio sunt latera, et anguli inter se æqualia sunt. rectus igitur est vterque oppositorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum est ADEB. ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur fit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.

29.huius.
34.huius.



F. C.

E. COMMENTARIVS.

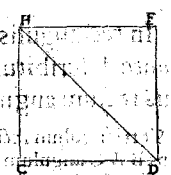
Hoc problemate indigemus potissimum in sequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse, nimirum trianguli æquilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & precipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex æquilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat; quibus mathematici tanquam demonstratis passim vtuntur, nempe hęc.

Quadrata ab æqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se æqualia sunt.

Sint enim æquales rectæ lineæ AB CD, & ab ipsa quidem AB describatur AB E G quadratum; ab ipsa vero CD quadratum C D F H. Dico hęc quadrata inter se æqualia esse. Quoniam enim rectæ linæ AB CD æquales sunt, erunt & ipsæ AG CH æquales, angulosq; æquales continent, ergo & basis GB est æqualis basi HD, & triangulum ABG æquale triangulo CDH, & ipsorum dupla sunt æqualia. quadratum igitur AB E G quadrato C D F H æquale erit. Sed & huius ipsius conuersum.

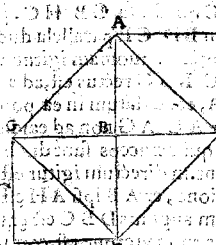
4.huius.

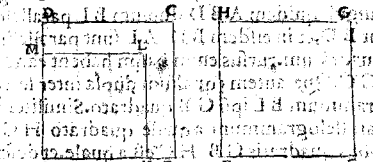
Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis descripta sũt.

Sint enim quadrata æqualia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB sit in directum ipsi BC. Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectæ BG in directum erit. iungantur F C, CG, G A, A F. rectæ linæ. Et quoniam AF quadratum est æquale quadrato CG, & AFB triangulum dimidium erit trianguli CGB. communiter apponatur B C F triangulum: totum igitur triangulum AGF toti GFG est æquale; ideoq; parallela est AG ipsi FC. Rursus quoniam angulus AFG est æqualis angulo CGB, cum vterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela, æqualis igitur est recta linea AF rectæ linæ CG, parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt. Itaque quoniam duo sunt triangula AB F BC G, quæ alternos angulos æquales habent, quippe quod AF CG parallelæ sint, & latus vnum AF est æquale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG æquale. Ostensum igitur est latera etiam a quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se æqualia esse, cum illa æqualia sint, possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum. Sint æqualia quadrata AB CD EF GH. Dico rectas lineas AB EF a quibus ea describuntur inter se æquales esse. Si enim AB EF æquales non sint, altera earum est maior. sit maior AB, & abscindatur AK, quæ ipsi EF sit æqualis, & ex AK quadratum AKLM describatur. Quoniam igitur AK est æqualis EF, erit ex quadratis AKLM, ex ante demonstratis, æquale quadrato EF GH: sed ex quadratum AB CD æquale erit eidem EFGH quadrato, ergo quadratum AB CD quadrato AKLM est æquale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur æqualibus existentibus quadratis AB CD, EF GH rectæ lineæ AB EF, quibus ea describuntur, inæquales sunt. ergo inter se æquales sunt necesse est.

39.huius.

28.huius.

34.huius.



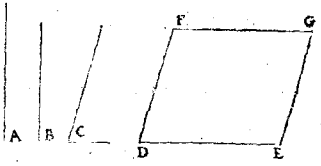


Non

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

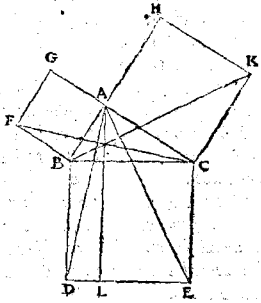
Sint datae quidem rectae lineae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipsis A B aequales sint, & in angulo ipsi C aequali, parallelogrammum constituere. exponatur recta linea D E,
23. huius. *quae ipsi A sit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus constituatur F D E: ita vt F D sit aequalis ipsi B rectae linae datae. postea per F ducatur F G parallela ipsi D E, & per E ducatur parallela ipsi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur est F D E G, ex rectis lineis D E D F constitutum, quae datis rectis lineis A B sunt aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.*



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum à recta B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A A C describuntur. Describatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipsarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungãtur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt.
14. huius. in directum igitur est C A ipsi A G. eadem ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est æqualis angulo F B A, rectus enim vterque est, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C est æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus F B B C æquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit
4. huius. 41. huius. et basis A D basi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C æquale. estq; trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D A L sunt parallelis: trianguli vero F B C duplum est G B quadratum. rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B G C. Quæ autem æqualium dupla inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C est æquale. et describitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipsis B A A C. quadratum igitur B E, à latere B C descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum



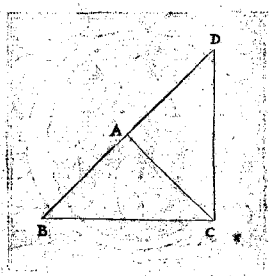
gulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq; eum cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo vniuersalius est. ostendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum subtendente aequalem esse figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positae, describuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C describuntur. Dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturq; A D ipsi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit & quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato quod ex A B. commune apponatur quadratum quod ex A C, ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia sunt quadratis, quæ ex B A A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale est, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est D A C; quadratis vero, quæ ex B A A C æquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex D C æquale est ei, quod ex B C quadrato. ergo & latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; et basis D C est æqualis basi C B. angulus igitur D A C angulo B A C est æqualis. rectus autem est D A C. ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonstrare.

11. huius.

8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema precedenti, & totum toti conuertitur. si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus describuntur. & si quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quod eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SECVNDVS

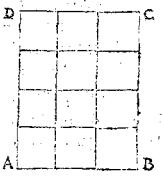
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

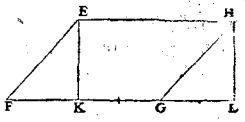
DIFFINITIO. I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non sunt. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D: & sit, exempligratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius basis F G sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K sit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L sit ipsi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogrammata E F G H E K L H cum aequales habeant bases F G K L, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt: sed parallelogrammi E K L H area est pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum sit necesse est. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum sunt, in presentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit. Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in cõmentarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.





DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi spacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Sciendum est gnomonem breuitatis caussa à geometris inuentum fuisse. uomen vero ex accidente impositum est; ab ipso enim forma cognoscitur, vel totius spacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoscopijs eius officium dumtaxat est præsentes horas notas efficere. supplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non sint, sed vt non similia toti, complentia vero totius ad ipsum similitudinem.

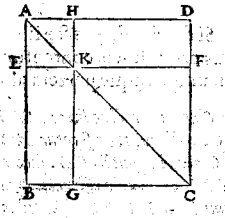
Gnomon a Geometris breuitatis caussa inuentus.

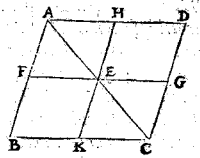
Gnomonis officium in horoscopiis.

Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.

Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum consistere, superius dictum est, ut quae se inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum sint AEKH, KGCF: & supplementa BK KD. Itaque duo supplementa, vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae sunt circa diametrum, gnomon appellatur. & si parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrammum AC simile ipsi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BFH reliquũ est parallelogrammũ EH simile toti. Quamobrẽ ab Aristotele dictum est, quadratũ circũposito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum est. Illud autem, quod in scholio additur supplementa non esse similia toti, non omnino verum est. fieri enim potest vt quandoque etiam sint similia. Sit parallelogrammum AECD circa diametrum AC, & secetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipsarum AB DC. erunt supplementa BE ED similia quidem toti, ipsis vero FH KG parallelogrammis, & similia & aequalia, quod ex ijs, quae in sequentibus tradentur, facile demonstrare possumus.

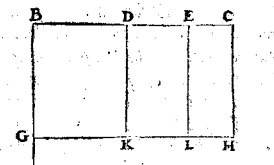




THEOREMA I. PROPO. I.

Si sint duæ rectæ lineę, altera autem ipsarum secta fuerit in quot cumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, et singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A B C; et secta sit B C vt cumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A B C contentum æquale esse rectangulo;, quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi B C ad rectos angulos B F: atque ipsi A ponatur æqualis B G: et per G quidem ipsi B C parallela ducatur G H; per D E C vero ducantur D K E L C H parallelæ ipsi B G. rectangulum igitur B H est æquale rectangulis B K DL, E H: atque est B H quidem, quod A B C continetur; etenim continetur G B B C: et B G ipsi A est æqualis; rectangulum



15. primi.

3. primi.

31. primi.

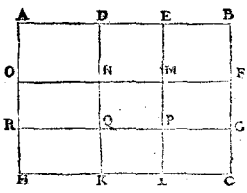
autẽ B K eſt quod continetur ipſis A BD; continetur enim GB BD, quarũ GB eſt æqualis A:et rectangulum D L eſt quod continetur A DE,quoniam D K,hoc eſt B G ipſi A eſt æqualis:et ſimiliter rectangulum E H eſt quod A E C continetur.ergo rectangulum contentum A B C eſt æquale rectangulo; contento A BD, et contento A DE,et adhuc contento A E C. Si igitur ſint duę rectæ lineę,altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes ; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale eis,quę recta linea inſecta,et ſingulis partibus continentur.quod oportebat demonſtrare.

F. Ç. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his ſimilia demonſtrare libuit,quae tum ad alia , tum ad ea,quae in decimo libro traduntur , vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

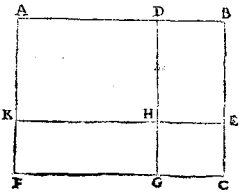
Si fuerint duę rectæ lineæ,quæ ſecentur in quotcumque partes;rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis , quæ vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.



Sint duae rectae linae A B B C rectum angulum A B C continentes,& ſecetur A B quidem in punctis DE, B C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale eſſe rectangulis , quae ſingulis ipſarum A D D E E B ad ſingulas B F F G G C applicatis continentur . completo enim parallelogrammo A B CH, ducantur per D E puncta rectae linae D K EL, al
31. primi. *terutri ipſarum A H B C parallelae;& per F G ducãtur F M N O G P Q R parallelae alterutri ipſarum A B H C. erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F O Q N P M G R K Q L P C: & ſunt parallelogramma A N D M E F, quae continentur ipſa B F , & ſingulis partibus rectae linae A B, videlicet A D D E E B: parallelogramma vero O Q N P M G ſunt, quae continentur F G, & ſingulis partibus A D D E E B:& denique parallelogramma R K Q L P C,quae continẽtur G C, & ſingulis partibus eiuſdem rectae linae A E. Si igitur fuerint duae rectae linae , quae ſecentur in quotcunque partes;rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt aequale rectangulis , quae vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque ſecentur; rectangulum totis contentũ vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt æquale rectangulis, quæ continentur totis,et dictis partibus vnà cum eo,quod reliquis partibus continetur.



Sint duae rectae linae A B B C,rectum angulum A B C continentes: & ſecetur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipſarum,videlicet D B E C aequale eſſe & rectangulo contento tota A B, & dicta parte rectae linae B C,videlicet E C,& contento tota B C,& dicta parte D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur.compleatur enim parallelogrãmum A B C F, & à puncto D alterutri ipſarum B C A
31. primi. *F parallela ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallela alterutri ipſarum A B F C. itaque conſtat rectangulum A B C aequale eſſe rectangulis A E K C.addatur vtrinque commune rectangulum H C , quod continetur duabus partibus*

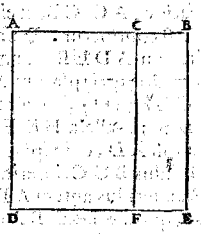
D B

D B E C. Rectangulum igitur A B C vnà cum rectangulo H C est aequale tribus rectangulis A E K C, & H C. quorum rectangulum quidem K C est quod continetur tota A B, hoc est K E, & parte E C. rectangulum vero D E vnà cum rectangulo B C est quod continetur tota B C, & parte D B: & reliquum A H est quod continetur reliquis partibus A D B E, hoc est A D D H. ergo rectangulum A B C vnà cum rectangulo H C est aequale & rectangulo contento tota A B, & E C, & contento totâ B C, & D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. Si igitur duae rectae lineae vtcumque secentur et reliqua, quod oportebat demonstrare. Eodem modo demonstrabitur & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit vtcumque; rectangula quæ tota, et singulis partibus cõtinẽtur æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato.

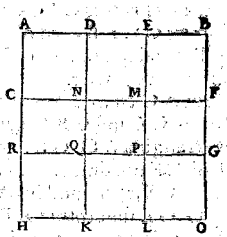
Recta enim linea A B secta sit vtcumque in pũcto C. Dico rectangulum, quod A B B C continetur, vnà cum contento B A A C æquale esse quadrato, quod fit ex A D. Describatur enim ex A B quadratũ A D E B, et per C ducatur alterutri ipsarum A D B E parallela C F. æquale igitur est A E rectãgulis A F C E. atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum cõtentum B A A C; etenim D A A C continetur, quarum A D ipsi A B est æqualis: et rectangulum C E continetur A B B C, cum B E sit æqualis A B. ergo rectangulum B A A C vnà cum rectangulo A B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit, rectangula, quę tota, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonstrare oportebat.



46. primi.
31. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

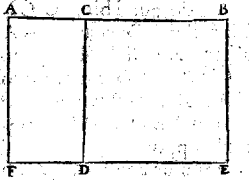
Similiter vt superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quotcumque partes, quadratum totius lineae aequale esse rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur.



THEOREMA III. PROPOSITO. III.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale est et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit vtcumque in puncto C. Dico A B C rectangulum æquale esse rectangulo A C B vnà cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur enim ex B C quadratũ C D E B, producaturq; E D in F; et per A alterutri ipsarum C D B E parallela ducatur A F. æquale vtique erit rectangulũ A E ipsis A D C E. et est A E quidem rectãgulum contentum A B B C; etenim A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C. rectangulum vero A D est quod continetur A C C B, cum D C ipsi

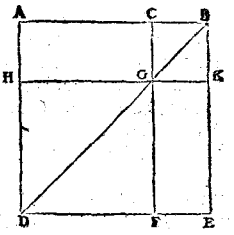


46. primi.
31. primi.

ipſi C B ſit ęqualis:et D B eſt quadratum,quod fit ex B C.ergo rectangulum A B C eſt ęquale rectangulo A C B vnà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale eſt rectangulo,quod partibus continetur,et ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea ſecta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota ęquale erit,et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei,quod bis partibus continetur rectangulo.



Recta enim linea A B ſecta ſit vtcumque in C. Dico quadratum, quod fit ex A B æquale eſſe, et quadratis ex A C C B, et ei rectangulo quod bis A C C B continetur. Deſcribatur enim ex A B quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C quidem alterutri ipſarum A D B E parallela ducatur C G F;per G vero alterutri ipſarum A B D E ducatur parallela H K. Et quoniam C F eſt parallela ipſi A D, et in ipſas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori et oppoſito A D B æqualis:angulus autem A D B eſt ęqualis angulo A B D, quòd et latus B A æquale eſt lateri A D. quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis: ac propterea latus B C lateri C G æquale.Sed et latus C B æquale eſt lateri G K, et C G ipſi B K.ergo et G K eſt æquale K B,et C G K B æquilaterum eſt. dico inſuper etiam rectangulum eſſe.quoniam enim C H eſt parallela ipſi B K, et in ipſas incidit C B;anguli K B C G C B duobus rectis ſunt æquales.rectus autem eſt K B C angulus.Ergo et rectus G C B,et anguli oppoſiti C G K G K B recti erunt. rectangulũ igitur eſt C G K B. Sed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt C G K B,quod quidem fit ex B C.eadem ratione et H F eſt quadratum, quod fit ex H G.hoc eſt ex A C.ergo H F C K ex ipſis A C C B quadrata ſunt.et quoniam rectãgulum A G eſt æquale rectangulo G E, atque eſt A G quod A C C B continetur, eſt enim G C ipſi C B æqualis:erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B.quare rectangula A G G E ęqualia ſunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis ex A C C B,et ei quod bis A C C B continetur rectangulo ſunt æqualia.Sed H F C K A G G E ſunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B.quadratum igitur ex A B æquale eſt,et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo.quare ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei rectangulo, quod bis partibus continetur,atque illud eſt,quod demonſtrare oportebat.

46.primi. 31.primi. 29.primi. 5.primi. 6.primi. 34.primi. 29.primi. 34.primi. 45.primi.

ALITER. Dico quadratum ex A B æquale eſſe,& quadratis ex A C C B. et ei rectangulo,quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis eſt B A ipſi A D; et angulus A B D angulo A D B æqualis erit:et cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus B A D.ergo reliqui A B D A D B ſunt vni recto æquales, et ſunt ęquales inter ſe ſe. vterque igitur ipſorum A B D A D B eſt recti dimidius. Sed rectus eſt B C G,æqualis namque eſt angulo oppoſito, qui ad A. reliquus igitur CGB dimidius eſt recti:ac propterea C G B angulus angulo C B G eſt ęqualis; et latus BC æquale lateri C G.Sed C B eſt æqualis G K,et C G ipſi B K.æquilaterum igitur eſt C K; et cum habeat rectum angulum C B K,etiam eſt quadratum;quod quidem fit ex C B.eadem ratione et H F quadratum

5.primi. 32.primi 29.primi. 6.primi.

quadratum est, et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur sunt C K H F, et quadratis ex A C C B æqualia. Rursus quoniam rectangulum A G est æquale ipsi G E, atque est A G id quod A C C B continetur, est enim C G ipsi C B æqualis: erit et G E æquale contento A C C B. quare A G G E æqualia sunt ei; quod bis A C C B continetur. Sunt autem et C K H F æqualia quadratis ex A C C B. ergo C K H F A G G E æqualia sunt et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B cõtinetur. Sed C K H F et A G, G E sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B æquale est, quadratis quæ; ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod ostendere oportebat. 34. primi. 43. primi.

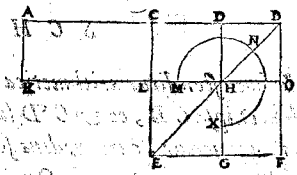
COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spacijs parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum A D D B vnà cum quadrato quod fit ex C D æquale esse ei quod ex C B quadrato. Describatur enim ex B C quadratum C E F B: iungatur B E; et per D quidem alterutri ipsarũ C E, B F parallela ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela alterutri ipsarum C B, E F: et rursus per A ducatur alterutri C L, B O parallela A K. Et quoniã C H supplementum æquale est supplemento H F, commune apponatur D O. totum igitur C O toti D F est æquale; sed C O est æquale A L, quoniam et A C ipsi C B. ergo et A L æquale est D F. commune apponatur C H. totum igitur A H ipsis F D, D L æquale erit. Sed A H quidẽ est quod A D D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis: F D, D L vero, est gnomon M N X. gnomon igitur M N X æqualis est ei quod A D D B continetur. commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato quod ex C D. ergo M N X gnomon, et L G æqualia sunt rectangulo, quod continetur A D D B, et ei, quod fit ex C D quadrato. Sed M N X gnomon, et L G sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato quod ex C D æquale est ei, quod ex C B quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contẽtum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interiicitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat.



46. primi. 31. primi. 43. primi. 36. primi.

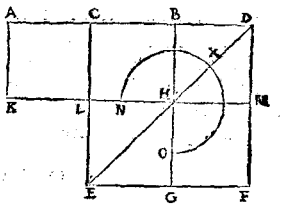
THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta cõtentũ, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea, quæ

quę ex dimidia, et adiecta cõstat tãquã ab vna linea describitur.

Recta enim linea quędam A B secetur bifariam in puncto C, adiiciaturq; ipsi in rectum B D. Dico rectangulum A D B vnà cũ quadrato ex B C æquale esse ei, quod fit ex C D quadrato. Describatur enim ex C D quadratum C E F D, et iungatur D E; perq; B alterutri ipsarum C E D F paralle la ducatur B H G: et per H ducatur K L M parallela alterutri ipsarum A D E F: et adhuc per A alterutri C L D M parallela A K. Itaque quoniã A C est æqualis C B, erit et rectangulum A L rectangulo C H æquale. sed C H æquale est H F. ergo et A L ipsi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur A M gnomoni N X O est æquale: atq; est A M, quod A D D B cõtinetur, etenim D M est æqualis D B. ergo et gnomon N X O æqualis est rectãgulo A D B. rursus commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato, quod ex C B. rectangulum igitur A D B vnà cum quadrato quod ex B C æquale est gnomoni N X O, et ipsi L G. Sed gnomon N X O, et L G totum sunt C E F D quadratum; quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato ex B C æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adiiciaturq; ipsi in rectum quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum vnà cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta constat, tamquàm ab vna linea describitur. quod oportebat demonstrare.

46. primi.
31 primi.
36. primi.
43. primi.



SCHOLIVM.

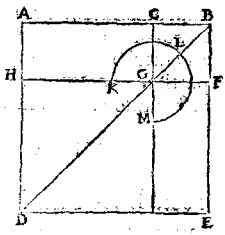
In hoc ostenditur arithmetica analogia. quo enim A D superat D C, videlicet ipsa C B, eo & C D superat D B. quod per numeros manifestius cognoscitur, cum medius semper æqualiter & excedatur, & excedat. Theorema autem est. Quadratum quod fit ab excessu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale esse.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt, et rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quòd à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit vtcumque in pũcto C. Dico quadrata ex A B B C æqualia esse et rectangulo, quod bis A B B C continetur, et ei quod fit ex A C quadrato. Describatur enim ex A B quadratum A D E B, et figura constituatur. itaque quoniam A G rectangulũ æquale est rectangulo G E. commune apponatur C F. quare totum A F toti C E est æquale. rectangula igitur A F C E dupla sunt rectanguli A F. Sed A F C E sunt K L M gnomon, et quadratum C F. ergo K L M gnomon, et quadratũ C F dupla erũt rectanguli A F. est autem id quod bis A B B C continetur duplum ipsius A F; etenim B F est

46. primi.
43. primi.



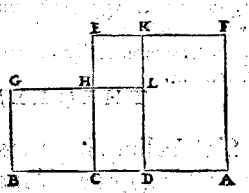
æqualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum sunt AD EB, et CF; quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectângulo, quod bis AB BC cõtinetur vnà cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt rectangulo q̃; quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

FED. COMMENTARIVS.

Non alienum esse videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergei conica demonstrauimus: eo enim ad sequentia vtemur.

Si recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.



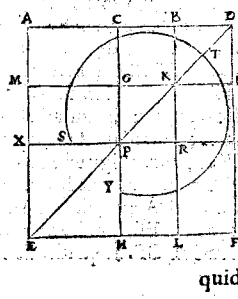
46. primi.
31. primi.
34. primi.

Secetur recta linea AB in partes inæquales in C ita vt AC maior sit quàm CB; & ipsi CB æqualis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB æqualia esse rectangulo, quod bis AC B continetur vnà cum quadrato rectæ lineæ DC, qua scilicet AC ipsam CB superat. constituantur enim ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D ducta linea DK, ipsi CE parallela, producatur GH, vt secet DK in L. Itaque quoniam AD est æqualis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipsi AC æqualis. Sed GL est æqualis BD, & CE æqualis AC. ergo & GL ipsi CE æqualis erit. est autem & CH æqualis HG. reliqua igitur EH reliqua HL est æqualis: ideoq; KH est quadratum, quod à linea KE, hoc est DC describitur. rectangula vero AK DG sunt quæ continentur lineis AC CB; etenim AD est æqualis BC, & DB ipsi AC. quadrata igitur ex AC CB æqualia sunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipsius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquę partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB BC contẽtum vnà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC, tamquam ex vna linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; et ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturq; ex AD quadratum AEFD; et dupla figura constituatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis; BD vero ipsi KN: erit et GK æqualis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est æqualis. et quoniam CB est æqualis BD, et GK ipsi KN; erit rectangulum



34. primi.
36. primi.

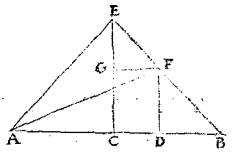
quidem

43.primi. quidem CK rectangulo KD; rectãgulũ vero GR ipsi RN æquale. Sed CK est æquale RN, supplemẽta enim sunt parallelogrãmi CO. ergo et KD æquale est GR, et quattuor rectãgula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoq; quadrupla sunt rectãguli C K. Rursus quoniã C B est æqualis BD, et BD quidẽ ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit et CG æqualis GP. est autem et PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipsi RF æquale erit.

43.primi. Sed MP est æquale PL; supplementa enim sunt ML parallelogrammi. quare et AG ipsi RF est æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est et quattuor CK KD GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod AB BC continetur; etenim BK est æqualis B C; erit contentum quater AB BC ipsius A K quadruplum. At demonstratus est gnomon S T Y quadruplus AK. quod igitur quater AB B C continetur æquale est gnomoni S T Y. commune apponatur X H, quod quidem quadrato ex A C est æquale. ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tamquam ex vna linea describitur, quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur. quod ostendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati linea eius, quæ inter sectiones interijcitur.



Recta enim linea quædam AB secta sit in partes æquales ad C, et in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex A D D B, quadratorum ex A C

11.primi. C D dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi A B ad rectos angulos C E, et vtrique ipsarum AC CB æqualis ponatur, iungaturq; EA EB.

31.primi. ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur DF; per F vero ipsi A B paralle la F G, et A F iungatur. itaque quoniam A C est æqualis C E; erit et

5.primi. 32.primi. angulus EAC angulo AEC æqualis. Et cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC, EA C vni recto æquales erunt. et sunt æquales inter sese. vterque igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidius

29.primi. 6.primi. est recti, rectus autem EGF; æqualis enim est interiori, et oppositio ECB; erit et reliquus EFG recti dimidius: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare et latus EG lateri GF est æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori, et oppositio ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis est angulo D F B; ideoq; latus D F lateri D B æquale. et quoniam AC est æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis autem ex

41.primi. AC CE æquale est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF; et quadratũ ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale est quod ex EF quadratum. Ergo

quadratum

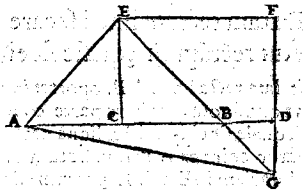
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit, æqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorũ ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum, quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interiicitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Possumus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Iisdem enim positis quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipsam CD superat. Ergo ex iis, quæ demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex AC CD æqualia sunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipsius DB quadrato: ideoq; quadrata ex AC CD una cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipsius DB, dupla sunt quadratorũ ex AC CD. Sed quadratum ex AD est æquale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. quod oportebat demonstrare. 4. huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur.



Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in rectum adiiciatur quædam recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. ducatur enim à punctο C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB æqualis ponatur; iungantur q; AE EB: et per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipsi CE. et quoniã in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur, conueniunt inter se sc. Ergo EB FD productæ ad partes BD conuenient; producantur, et conueniant in punctο G, et AG iungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, et angulus AEC angulo EAC æqualis erit: atque est rectus qui ad C. vterque igitur ipsorum EAC AEC est recti dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidius recti; erit et recti dimidius DBG; cum sit aduerticem. Sed et BDG rectus est; erenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidius est recti, et ob id ipsi DBG æqualis. ergo et latus BD æquale lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est

11. primi.

31. primi.

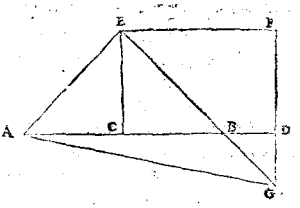
29. primi.

Ex demonstratis ad. 29. primi.

5. primi.

15. primi.

29. primi.



enim angulo oppoſito qui ad C ęqualis; erit et reliquus FEG recti dimidius, et æqualis ipſi E GF. quare et latus GF lateri EF eſt ęquale. et cũ EC ſit ęqualis CA; et quadratũ ex EC ęquale eſt ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla ſũt quadrati ex C A. quadratis aũt ex EC CA ęquale eſt quadratũ ex E A. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniã GF eſt ęqualis F E, æquale eſt et ex G F quadratũ quadrato ex F E. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF ſũt dupla. at quadratis ex GF FE æquale eſt, quod ex EG quadratũ. ergo quadratũ ex E G duplum eſt quadrati ex E F. æqualis aũt eſt EF ipſi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed oſtenſum eſt quadratũ ex E A duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC C D ſũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale eſt quod ex A G quadratum. quadratum igitur ex A G duplũ eſt quadratorũ ex AC CD. at quadrato ex A G æqualia ſunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D DG ſunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed D G eſt æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorũ ex A C C D ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, et ipſi in rectũ quædam recta linea adiiciatur; quę à tota cũ adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla ſunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta conſtat tamquam ab vna linea deſcribitur. quod oſtendere oportebat.

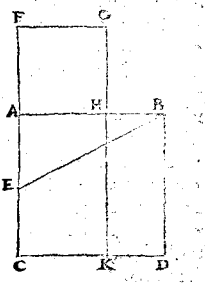
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quoque aliter demonſtrabimus.

Quoniam enim recta linea A B ſecatur bifariam in C, & ipſi adijcitur B D, erit B D linea, quæ DC ipſam C A ſuperat quare ex demõſtratis ad ſeptimã huius quadrata ex A C C D aequalia ſunt rectangulo, quod bis continetur A C C D, & quadrato ipſius B D. ergo quadrata ex A C C D vnà cum rectangulo, quod bis A C C D cõtinetur, & ipſius B D quadrato dupla ſunt quadratorum ex A C C D. at quadratum ex A D eſt aequale quadratis ex A C C D, & rectangulo bis A C C D contento. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla erunt: quod demonſtrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineã ſecare, ita vt quod tota, et altera parte cõtinetur rectãgulũ ęquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.



Sit data recta linea A B. oportet ipſam A B ita ſecare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Deſcribatur enim ex A B quadratum A B C D: ſeceturq; A C bifariam in E, et B E iungatur: deinde producta C A in F, ponatur ipſi B E ęqualis E F: deſcribaturq; ex A E quadratum F G H A: et G H ad K producatur. Dico A B ſectam eſſe in H, ita vt A B H rectangulum æquale ſit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam ſecatur in E, adiiciturq; ipſi in rectum A F; rectãgulum C F A vnà cum quadrato ex A E ęquale erit quadrato ex E F. Sed E F eſt æqualis E B. rectangulum igitur C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia ſunt quadrata ex B A A E etenim angulus ad A rectus eſt. ergo rectangulum C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt quadratis ex B A A E. commune auferatur, quod ex A E quadratum. reliquum igitur rectangulum

5. huius.
47 primi.

lum CFA æquale est quadrato ex AB. est autem CFA quidem rectangulum FK. siquidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum ABH, cum AB sit æqualis BD, et FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. quare data recta linea AB secta est in H, ita vt ABH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. quod facere oportebat.

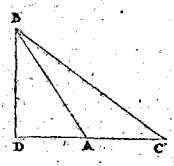
SCHOLIVM.

Ex hoc constat geometricam esse analogiam. quoniam enim AB secta est in H, & quod AB BH continetur quadrato AH est æquale. hoc autem soli geometricæ accidit medietati. Hanc in sequentibus extrema, ac media ratione secari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum est, non dicit extrema, ac media ratione secari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractũ perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusiangulum triangulum ABC. obtusum angulum habens BAC: et ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. Dico quadratum ex BC maius esse, quàm quadrata ex BA AC, rectãgulo, quod bis CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est vtcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, et quadratis ex CA AD, et ei quod bis CA AD continetur rectangulo. cõmune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt et quadratis ex CA AD DB, et rectangulo, quod bis CA AD continetur. Sed quadratis ex CD DB æquale est quadratum ex CB. rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æquale est quadratum ex AB. quadratum igitur ex CB æquale est et quadratis ex CA AB, et rectangulo bis CA AD contento. Ergo quadratum ex CB maius est, quàm quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis CA AD continetur. In obtusiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. quod demonstrare oportebat.



12. primi.

4. huius.

47. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

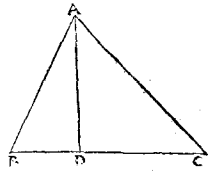
Ex iis, quæ in hoc theoremate demõstrata sunt possumus cuiuslibet trianguli obtusum angulum habentis aream dimetiri.

Sit triangulum obtusiangulum A B C, habens angulum A C B obtusum; sitq; latus A B exempli gratia pedum viginti, B C octo, & C A sex decim: & à puncto A ad B C protractam ducatur perpendicularis A D. Primum igitur quanta sit linea C D, quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq; laterum A C C B, quae sunt circa obtusum angulum simul sumpta à quadrato lateris A B, quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus; & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris B C. ex hac enim diuisione prouenit linea, quam quærimus. est autem quadratum lateris A C 256, & quadratum ipsius B C 64, quae simul sumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris A B, relinquuntur 80, atque his diuisis per 16, videlicet per duplum ipsius B C prodibunt 5, & tot pedum erit

47. primi. *linea C D. Itaque quoniam triangulum A C D rectangulum est, quadratum lateris A C aequale erit quadratis, quae fiunt ex C D D A. quare dempto quadrato lineae C D, quod est 25 à quadrato ipsius A C 256, reliquum erit quadratum perpendicularis A D, quod est 231, cuius latus A D est 15 $\frac{1}{31}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inueniatur, docuimus in nostris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimensione. Vt igitur trianguli A B C aream habeamus, secetur B D bifariam in puncto E, & ab eo ducatur E F ipsi D A parallela; rursusq; à puncto A ducatur parallela ipsi D B, & conueniens cum E F in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum A D E F aequale triangulo A B D: vtrumque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est B D, & altitudo eadem A D. Ergo ducta E D, quae est 6 $\frac{1}{2}$ in A D 15 $\frac{1}{31}$ proueniet area rectanguli A D E F, & ob id etiam A B D trianguli 98 $\frac{4}{31}$ pedum quadratorum. Eadem ratione inuenietur area trianguli A C D esse eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à 98 $\frac{4}{31}$ relinquentur 60 $\frac{4}{31}$ proximè, pro area trianguli A B C, quam nobis inquirendam proposuimus.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum sub tendente fit quadratum minus est, quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpẽdicularis cadit, et linea à perpẽdiculari intus assumpta ad angulũ acutũ.



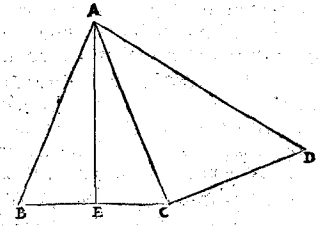
Sit acutiangulum triangulum A B C acutum habens angulum ad B: et ducatur à puncto A ad B C
12. primi. perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C minus esse, quàm quadrata, quę ex C B B A, rectangulo, quod bis C B B D continetur. Quoniam
7. huius. enim recta linea C B secta est vtcumque in D, erũt quadrata ex C B C D æqualia, et rectangulo quod bis C B B D continetur, et quadrato ex D C. commune apponatur quod ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, et rectangulo bis C B B D contento.
47. primi. et quadratis ex A D D C. Sed quadratis ex B D D A æquale est quod ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale est quadratum ex A C. quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei quod bis C B B D continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quàm quadrata ex C B B A rectangulo, quod bis C B B D continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtẽdẽte fit, minus est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continenti bus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutũ. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM

SCHOLIVM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quæ sequuntur. Itaque si rectangulũ sit triangulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematis est hoc.

Sit quadratũ ex AB minus quàm quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõtinetur, et reliqua deinceps; atque à pũcto C ipsi C A ad rectos angulos ducatur C D, quæ ipsi C B sit æqualis. ergo quadrata ex BC C A æqualia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC C A minus est quadratum ex A B. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autem ex DC CA æquale est quadratum ex D A. quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, et ipsa DA maior, quàm A B. Itaque quoniam duæ D C C A duabus B C C A æquales sunt, et basis D A maior basi A B, erit et angulus D C A angulo A C B maior. rectus autem est D C A. ergo A C B acutus erit. quod oportebat demonstrare.



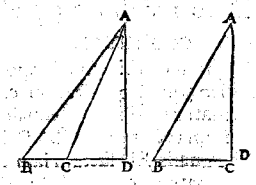
47. primi.

25. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quę duos angulos necessario habent acutos. Quare dicemus presens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari A D, punctum D cadit inter B C, vel extra, vel in ipsam C, ita vt A D sit eadem, quae A C. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quae acutiangula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur. At si cadat in alterum latus eorum, quae acutis angulis subtenduntur, nihilominus idem sequetur, vt demonstrabimus.

Sit obtusiangulum triangulum A B C, obtusum habens A C B angulum, et ducatur à puncto A ad B C protractam perpendicularis A D. Dico quàdratum, quod fit ex A C, acutum angulum A B C subtendente minus esse. quàm quadrata, quæ ex A B B C fiunt, rectangulo, quod bis C B B D continetur.

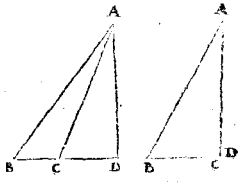


Quoniam enim A B D triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB aequale est quadratis, quę ex BD D A. commune addatur quadratũ ex BC. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt quadratis ex BD D A BC. Sed quadrato ex BD aequalia

æqualia sunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod vbis BC CD continetur. quadratis autem ex CD D.A quadratum ex AC est aequale. Quadrata igitur ex AB BC aequalia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. Sed quadrato ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur aequale est rectangulum CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD aequale est rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus est, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

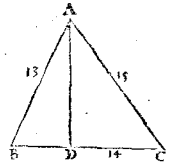
7. huius.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC subtendit minus esse, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



Quoniam enim triangulum rectangulum est, erit perpendicularis AD eadem, quae latus trianguli AC, & punctum D idem, quod C, quadratum vero, quod fit ex AB aequale quadratis ex BC CA. cõmune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC equalia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc est rectangulo, quod bis cõtinetur CB B D. Quadratũ igitur ex A C minus est quàm quadrata ex AB B C rectangulo, quod bis C B BD continetur. quod demonstrare oportebat.

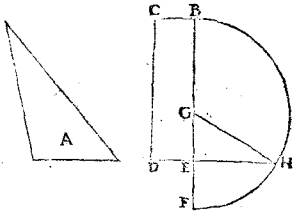
Ex proxime demonstratis licebit cuiusque trianguli, sine acutianguli, siue rectanguli, siue obtusiangulí quod nota latera habeat, aream inuenire.



Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quae inter BC necessario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B subtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC simul iunctis auferemus, & quod reliquitur, dividemus per duplum lateris B C, in quod perpendicularis cadit; & proueniet recta linea BD, quae à perpendiculari intus assumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod subtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipsius BD, et eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC est 225. quadratum vero ipsius AB 169, & quadratum BC 196, quae duo simul iuncta faciunt 365. ergo sublatis 225 à 365 relinquentur 140: atque his per 28 diuisis proueniet 5: ac propterea BD erit pedum quinque. Rursus si à quadrato lateris AB, hoc est à 169 auferatur quadratum BD, quod est 25, relinquẽtur 144, cuius quadrati latus est 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in basis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area trianguli ABC, quam à principio quærebamus.

PROBLEMA II.
PROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.



Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. constituatur rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. Si igitur BE est æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum cõstitutum est BD: sin minus, vna ipsarum BE ED maior est. sit BE maior; et producatur ad F, ponaturq; ipsi ED æqualis EF. deinde secta FB bifariã in G, centro

45. primi.

centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturq; DE in H, et GH iungatur. quoniã igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, et inæquales ad E; erit rectangulum BEF vnà cum quadrato, quod fit ex EG, æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur BEF vnà cum quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum BEF vnà cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum BEF est æquale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammũ quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. quod facere oportebat. 5. huius.

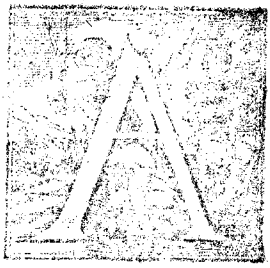
LEC. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuersalius est, quod in sexto libro demonstratur nempe. Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

LIBRI SECVNDI FINIS.

DEFINITIONES.

I.



II.

III.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

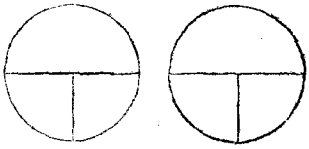
SCHOLIVM.

Propoſitum Euclidi eſt hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES.

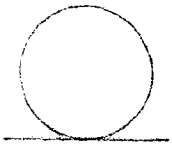
I.

EQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.



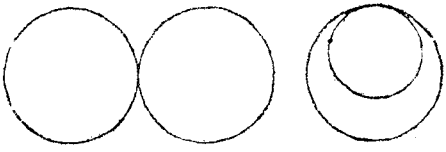
II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, et producta ipſum non ſecat.



III.

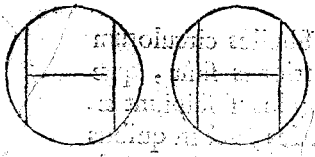
Circuli contingere ſe ſe dicũtur, qui contingentes ſe ipſos non ſecant.



Incirculo

IIII.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpẽdiculares ductę sũt æquales.



V.

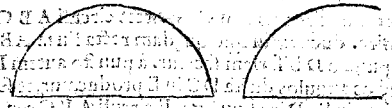
Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

VI.

Portio circuli est figura, quę recta linea, et circuli circumferẽtia continetur.

VII.

Portionis autẽ angulus est, qui recta linea, et circuli circũferentia cõprehẽditur.

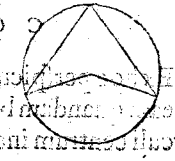


VIII.

In portione angulus est, quando in circũferentia portionis sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectę lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis sit cõtentus.

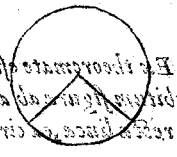
VIIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.



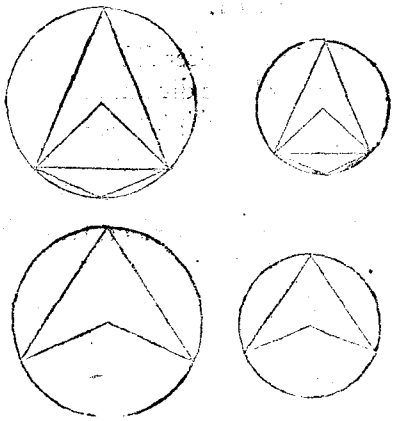
X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum cõstiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentia ab ipsis assumpta.



XI.

Similes circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſtituunt.



XII.

A FED. COMMAN.

ADDITA.

Similes circumferentiæ circulorum ſunt, in quibus anguli conſiſtunt æquales.

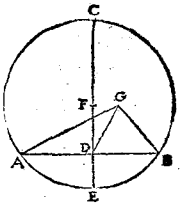
PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipſo quędam recta linea AB vtcũque, et in puncto D bifariam ſecetur. à puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducta DC in E producatur, et ſecetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit G, et GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD eſt æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB ęquales, altera alteri: et baſis G A ęqualis eſt baſi G B. ſunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB eſt ęqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB eſt rectus. Sed et rectus F D B. ęqualis igitur eſt angulus FDB angulo G D B, maior minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. *Similiter oſtendemus* neque aliud eſſe, *præter ipſum* F. ergo F centrum eſt circuli ABC. quod facere oportebat.

10. primi. 11. primi.

Diffi. 15 pri. 8. primi. diffi. 10. pri.



COROLLARIVM.

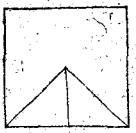
Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo quędam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos ſecet, in ſecante circuli centrum ineſſe.

SCHOLIVM.

Conuerſum diffinitionis circuli.

Ex theoremate oſtenditur conuerſum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus eſt.

Non enim, sed si fieri potest, sit rectilineum, et sit aliquod ipsius latus, in quod incidant duæ rectæ lineę ipsum determinantes. erit igitur æquicrure triangulum: atque eius basi bifariam secta, si ducatur recta linea rectos angulos faciet, et vtroque latere trianguli minor erit. quod est absurdum, ponūtur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidūt, æquales esse.



ALIVD.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico, eam, quæ maxime elementaris est, triangulum videlicet æquilaterum in factionē initio proposuit, ob constructiones earum, quæ deinceps sunt, demonstrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit. hoc enim circuli ipsius ortus causſa est.

Triangulum æquilaterum figura maxime elementaris est.
Cētrum, circuli ipsius ortus causſa est.

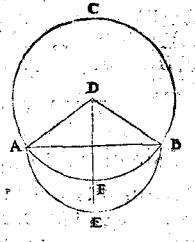
ALIVD.

Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, sed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factis iam circulis, etiam centra manifesta sunt, at in his cum quæratur substantia, centrum etiam quæritur: quod quidem substantiam circuli complet. hoc autem primum, vt inquiunt, inter problemata, et theoremata medium est. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus vero non in factionem, sed in inuentionem, ob id proponit contemplari. Itaque mihi videtur formatam habens propositionem theorema esse, vt si de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera æqualia sunt, & anguli, inuenire si bases sint æquales. quemadmodum enim illic symptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ ineſt, ita & hoc loco, quod ineſt naturæ circuli. At si problematis proprium, & contrarium propositioni suscipit, multo magis quod propositum est problematis denominationem effugiet.

Cētrum substantiam circuli cōplet.
Inter problemata, ac theorematа medium.

THEOREMA. I. PROPOSITIO. II.

Si in circumferentia circuli, duo quęuis puncta sumantur, quæ ipsa coniungit recta linea intra circulum cadet.

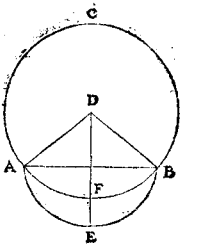


Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quęuis puncta AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat extra, vt AEB, et sumpto circuli ABC centro, quod sit D, iungantur DA DB, et producatur DF in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB, erit et angulus DAE angulo DBE æqualis. et quoniam trianguli DAE vnū

Ex antecedente.

5. primi.

16 primi. latus AEB protẽditur, angulus DEB angulo DAE ma
ior erit. angulus autem DAE ęqualis eſt angulo DBE.
18. primi. ergo DEB angulus angulo DBE eſt maior. Sed maio-
ri angulo maius latus ſubtẽditur. maior igitur eſt DB
ipſa DE. eſt aũt DB æqualis DF. Ergo DF eſt maior D
E, minor maiore, quod fieri nõ poteſt. non igitur à pũ-
✻ cto A ad B ducta recta linea extra circulũ cadet. Simili
ter oſtẽdemus neque in ipſam cadere circũferentiã. Er
go extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circũferentiã cir
culi duo quęuis pũcta ſumãtur, quæ ipſa cõiũgit recta
linea intra circulũ cadet. quod oportebat demõſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

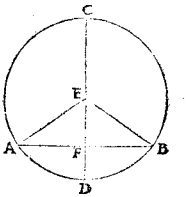
✻ Similiter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam.

16. primi. 18. primi. *Si enim in ipſam circumferentiam caderet, eadem ratione ſequeretur angulum DFB maiorem eſſe angulo DAF, hoc eſt angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius eſſet. ſed & aequale, quod fieri non poteſt, non igitur in ipſam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quan
dam non ductã per cẽtrũ bifariã ſecet, et ad angulos rectos ipſam
ſecabit. quòd ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, et bifariam ſeca bit.

Sit circulus ABC, et in ipſo recta linea per centrum du
cta CD rectam lineam quandam AB non ductam per cen-
trum bifariam ſecet in puncto F. Dico et ad angulos rectos
1. huius. ipſam ſecare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod ſit
E, et EA EB iungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB,
communis autem FE, duæ duabus æquales ſunt, et baſis EA
baſi EB eſt ęqualis. ergo et angulus AFE angulo BFE æqua-
Diffi. 10. pri mi. lis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angu-
los, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vter
que æqualium angulorum. vterque igitur AFE BFE eſt re-
ctus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineã
AB non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit.
Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi
FB ęqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ ex centro eſt ęqualis E
5 primi. B, et angulus EAF angulo EBF æqualis erit. eſt autem et AFE rectus æqualis recto
BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habẽt,
vnumq; latus vni lateri æquale EF, commune ſcilicet vtriſque, quod vni angulorũ
26. primi, æqualium ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebunt.
atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta re-
ctam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos re-
ctos ipſam ſecabit. quòd ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, et bifariam ſecabit. quod
oportebat demonſtrare.



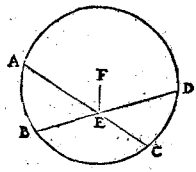
THEOREMA. III. PROPOSITO. IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent non ductę per
centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe inuicem ſecent in pun-
cto E, non ductę per centrum. Dico eas ſe ſe bifariam nõ ſecare. Si enim fieri poteſt,

ſecent

secent se se bifariam, ita vt AE sit æqualis EC, et BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, quod sit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrũ ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniã recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per cẽtrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secent, nõn ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.



1. huius.

Ex antecedente.

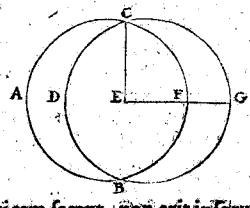
SCHOLIVM.

Si rectæ lineæ per centrum transirent, quærendum vtique non esset, an bifariam se inuicem secent. ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter & si altera per centrum transeunte, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum tranſit bifariam non secatur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrũ.

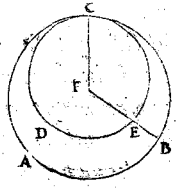
Duo enim circuli se inuicem secent ABC CDG in punctis BC. Dico ipsorum idem cẽtrum nõ esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; iungaturq; EC, et EFG vtcunque ducatur. Et quoniam E cẽtrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrum. quod ostendendum fuit.



THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

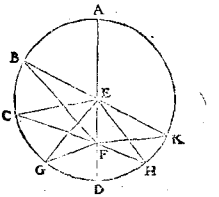
Duo enim circuli ABC CDE contingat se se intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F, iungaturq; FC, et FEB vtcunque ducatur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo et FE ipsi FB est æqualis, minor maiori; quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idẽ centrum non erit. quod demonstrare oportebat.



THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quędam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum tranſit, ſemper remotiore maior eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtraſque partes minimę.



Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: et in ipſa AD ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et à puncto F in circulum ABCD cadant quędam rectę lineę FB FC FG. Dico FA maximam eſſe, et FD minimam: aliarum vero FB quidē maiorem quàm FC, et FC maiorem quàm FG. Iungātur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora; erunt BE EF maiores quàm BF. eſt aũt AE æqualis EB. Ergo BE EF ipſi AF ſũt æquales. maior igitur eſt AF quàm FB. rurſus quoniā BE eſt æqualis EC, communis autem FE, duę BE EF duabus CE EF æquales ſunt. Sed BEF angulus maior eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt maior. eadem ratione et CF maior eſt quàm FG. rurſus quoniam GF FE maiores ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF FE maiores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF maior eſt quàm reliqua FD. maxima igitur eſt FA, et FD minima: maior vero BF quàm FC, et CF quàm FG maior. dico et à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtraſque partes minimæ FD. conſtituatur enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quoniā igitur GE eſt æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales ſunt: et angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat FK. et quoniam FK eſt æqualis FG, eſtq; ipſi FG æqualis FH; erit et FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Vel hoc modo. iungatur EK. et quoniam GE ipſi EK eſt æqualis, communis autem FE, et baſis GF æqualis baſi FK; erit et angulus GEF æqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF eſt æqualis. angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipſi GF. ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diamtero aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, et reliquæ quę ſequuntur. quod demonſtrare oportebat.

20. primi.

24. primi.

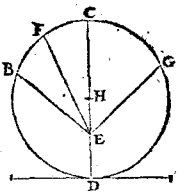
23. primi.

4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si intra circulum punctum ſumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima ſit, vna vero minima, & reliquarum aliæ ſint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem ſunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter diſtant.

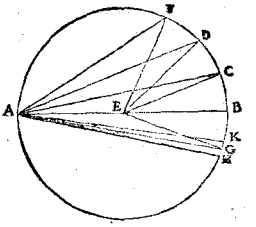
Per



Per punctum enim E,quod est intra circulum maxima quidem sit EC,minima vero ED;et FE quàm EB maior.Dico CE per centrum transire, et DE ipsi esse in directum;EF vero centro propinquiorem esse, quàm EB. Si enim CE non transit per centrum,sed alia quædam à pũcto E in circulum cadẽs,illa maxima erit per septimum theorema.est autem et EC maxima, quod fieri non potest.diameter igitur est CE,et ipsi in directum ED.Dico EF centro H propinquiorem esse,quàm EB.Si enim non est propinquior,vel remotior est,vel æqualiter distat: et siquidem remotior,maior erit BE,quàm EF,quod fieri non potest.non enim ponitur ita esse. Quòd si æqualiter distant, æquales sunt. sed neque hoc ponitur.propinquior igitur est FE ipsi H, quàm EB,et GE ipsi EB est æqualis.Ergo à centro H æqualiter distant, inæqualiter enim distantes inæquales sunt, per septimum theorema.quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud quoque verum est, quod nos demonstrauimus in commentario in propositionem octauam libri Archimedis de lineis spiralibus.



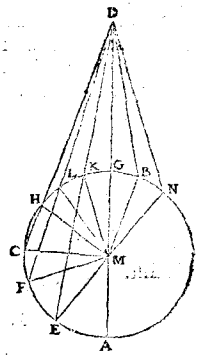
Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineę; quæ per centrum transit, omnium erit maxima,aliarum verò quæ transeunti per cẽtrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores; duę autem tantum æquales sunt ad vtrasque partes maximæ.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectę lineæ, quarum vna per centrum transeat, alię vero vtcumque: earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt,maxima est, quę per centrum transit;aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, semper remotiore maior est.at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt minima est, quæ inter punctum, et diametrum interijcitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC,et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quędam DA DE DF DC:sitq; DA per cẽtrum. Dico earum quidem quæ in concauam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit;et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG:maiorem autem DE quàm DF, et DF maiorẽ quàm DC: earum vero,quæ in curuam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG semper remotiore esse minorem,hoc est DK minorem,quàm DL,et DL minorem quàm DH.Sumatur enim centrum circuli ABC,quod sit M,et iungantur ME MF MC MK ML MH. et quoniam AM est æqualis ME,communis

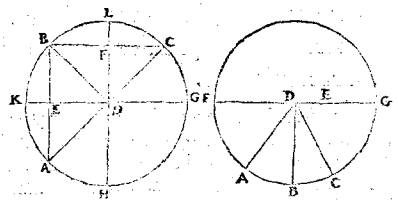
nis apponatur MD. Ergo AD eſt æqualis ipſis EM MD.
20. primi. Sed EM MD ſunt maiores quàm ED. Ergo et AD quàm ED eſt maior. rurſus quoniam æqualis eſt ME ipſi MF, cõ munis apponatur MD. erũt EM MD ipſis MF MD æqua les; et angulus EMD maior eſt angulo FMD. baſis igitur
24 primi. ED baſi FD maior erit. *Similiter demonſtrabimus* et FD maiorẽ eſſe quàm CD. ergo maxima eſt DA; maior aũt DE quàm DF, et DF quàm DC maior. prẽterea quoniam MK KD sũt maiores quã MD, et MG eſt ęqualis MK; erit reliqua KD quàm reliqua GD maior. quare GD minor quàm KD, *et idcirco* GD *minima* eſt. et quoniam trianguli MLD in vno latere MD, duæ rectę lineæ MK KD in-
21. primi. tra conſtituuntur, erunt MK KD minores *ipſis* ML LD, quarum MK eſt æqualis ML. reliqua igitur DK minor eſt quàm reliqua DL. Similiter oſtendemus et DL quam DK *minorẽ eſſe*. Ergo DG minima eſt. minor vero DK quàm DL, et DL minor quàm DH. dico ẽt duas tantum æquales à puncto D *in circulum* cadere ad vtraſque minimæ
34. primi. partes. conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M angulo K MD ęqualis angulus DMB, et DB iungatur. itaque quoniam MK eſt æqualis MB, cõ
2. primi. munis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales ſunt, altera alteri. et angulus KMD æqualis augulo BMD. baſis igitur DK baſi DB eſt ęqualis. dico à puncto D nullam *aliam ipſi* DB æqualem in circulum cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat DN. et quoniam DK eſt æqualis DN, et DK ipſi DB eſt ęqualis; erit et DB æqualis DN, propinquior ſcilicet minimæ ęqualis remotiori, *quod fieri non poſſe oſtenſum* eſt, vel et aliter. iungatur MN. et quoniam æqualis eſt KM ipſi MN, communis autẽ MD; et baſis DK baſi DN ęqualis erit, et propterea angulus KMD ęqualis angulo D MN. Sed KMD angulus eſt æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NM D æqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. quare, non plures quàm duæ re ctæ lineæ à puncto D *in circulum* ABC ad vtraſque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, et reliqua deinceps. quod oſtendere oportebat.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales; punctũ quod ſumitur, circuli centrum erit.

Sit circulus ABC, et intra ipſum ſumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quàm duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC. Dico punctum D circuli ABC centrum eſſe. Iungantur enim AB BC, ſecenturq; bifariam in punctis EF: et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur. quoniam igitur AE eſt



ęqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE ED duabus BE ED ęquales; et baſis DA eſt æqualis baſi DB. angulus igitur AED angulo BED ęqualis erit, et idcir-
8. primi. co vterque angulorũ AED BED eſt rectus. Ergo GK bifariam ſecans AB, et ad an-
13 primi. gulos rectos ſecat. et quoniam ſi *in circulo* quædã recta linea, rectam lineam quandam

quàm bifariā, et ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum; erit in GK centrum circuli ABC. Eadē ratione et in HL centrum est ABC circuli, et nullum aliud commune habent rectæ lineę GH HL, nisi punctum D. Ergo D circuli ABC est centrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit. Corol. 1. huius.

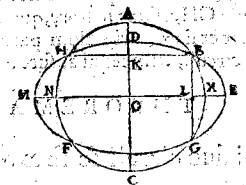
ALITER.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales D A D B D C. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. non enim, sed si fieri potest, sit E, et iūcta DE in FG producatur. ergo FG diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit D G, maior autem D C quàm D B, et D B quàm D A maior. Sed et æquales, quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli A B C. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli ABC centrum erit. quod oportebat demonstrare. 7. huius.

THEOREMA IX. PROPO. X.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

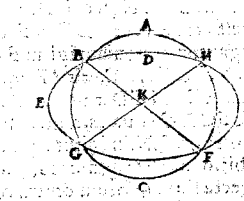
Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in B G H F. et iunctæ BG BH bifariam secentur in KL. atque à punctis KL ipsis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniā igitur in circulo ABC quædam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos secat, in ipsa AC circuli ABC erit centrum. rursus quoniam in eōdē circulo ABC quædam recta linea NX rectam lineam quādam BG bifariam secat, et ad rectos angulos; in ipsa NX centrum erit circuli. ostensum autem est et in ipsa A C centrum esse, et in nullo alio puncto conueniunt inter se rectæ lineę A C NX, præterquàm in O. ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus punctum O centrum esse circuli DEF. ergo duorum circulorum se se secantium A B C DEF. idem erit centrum O. quod fieri non potest. non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus.



Corol. 1. huius. 5. huius.

ALITER.

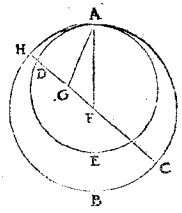
Circulus enim ABC rursus circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B G F H, et circuli A B C centrum sumatur, quod sit K, et KB KG KF iungātur. quū igitur intrà circulū DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF, erit punctum K circuli D E F centrum. est autem et circuli ABC centrum K. duorū igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, quod oportebat demonstrare.



THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

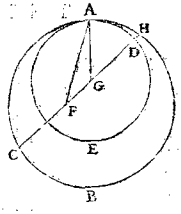
Si duo circuli se se intus contingant, et sumantur centra ipso-

rum; recta linea ipsorum centra coniungens, et producta in circulorum contactum cadet.



Duo enim circuli ABC ADE se se intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC cẽtrum, quod sit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur in punctum A cadere. Non enim, sed si fieri potest, cadat vt F G D H. et
20. primi. AF AG iungantur. Itaque quoniã AG GF maiores sunt, quàm F A, hoc est quàm F H, communis auferatur F G. reliqua igitur AG maior est, quàm reliqua GH. Sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est maior, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cõtactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant; recta linea ipsorum centra coniungens, si producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonstrare.

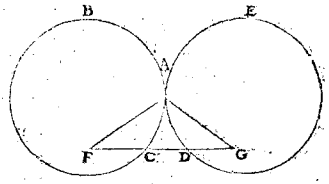
A L I T E R.



Sed cadat vt GFC, et producatur in directum CF G ad pũctum H: iunganturq; AG AF. Quoniam igi
20. primi. tur AG GF maiores sunt quàm AF, et AF est æqualis FC, hoc est ipsi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH est maior: hoc est DG maior ipsa GH, minor maiore, quod fieri non potest. Similiter et si extra circulum paruum sit centrum maioris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorũ centra coniungens per contactum transibit.



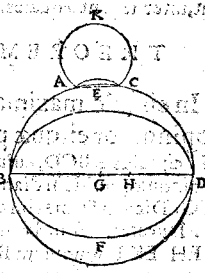
Duo enim circuli ABC ADE se se extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F: circuli vero ADE cẽtrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim sed si fieri potest, cadat, vt FCDG: et FA A G iungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem et AF æqualis FC. sunt igitur FA A
20. primi. G ipsis FC DG æquales. ergo tota FG maior est, quàm FA AG. Sed et minor, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A nõ transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra cõtingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus pũctis, quàm vno, siue intus, siue extra contingat.

Si

Si enim fieri potest, circulus ABDC circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et sumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli verò EBFD centrum H. ergo recta linea, quę à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. et quoniam G centrum est circuli ABDE, erit BG ipsi GD æqualis. maior igitur est BG, quàm HD. et BH quàm HD multo maior. Rursus quoniam H centrum est EBFD circuli, æqualis est BH ipsi HD. atqui ostensa est ipsa multo maior, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABDC extra cōtingat in pluribus pūctis, quàm vno, videlicet in AC, et AG iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK sumpta sunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quę ipsa coniungit intra vtrumque ipsorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod est absurdum. non igitur circulus circulū extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulū non contingit in pluribus punctis, quàm vno, siue intus, siue extra contingat. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, et quę æqualiter à centro distant; inter se sunt æquales.

Sit circulus ABDC, et in ipso æquales rectę lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod sit E, et ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quędam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AF est æqualis FB, ideoq; AB ipsius AF dupla. Eadem ratione et CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipsi CG. Et quoniam AE est æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG est æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectę lineę dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed AB CD æqualiter distent à centro, hoc est æqualis sit FE ipsi EG. Dico AB ipsi CD æqualem esse. Iisdem enim cōstructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, et CD duplā ipsius CG. Et quoniā æqualis est AE ipsi EC, erit et ex AE quadratū quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē ex AE æqualia sunt quadrata ex EF FA. quadrato aūt ex EC æqualia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt, quorum quadratū ex EG æquale est quadrato ex EF; est enim EG ipsi EF æqualis reliquum igitur ex AF quadratū æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis, atque est AB ipsius AF dupla, et CD dupla ipsius CG. quare AB ipsi CD æqualis erit. In circulo

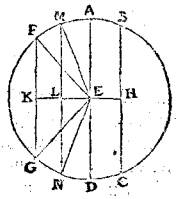
3. huius.

47. primi.

igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, et quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.



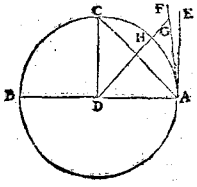
Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E, et propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, et BC maiorem quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares EH EK. Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, et iungantur E M EN EF EG. Quoniam igitur EH est æqualis EL, erit et BC ipsi MN æqualis. Rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, et DE ipsi EN, erit et AD ipsis ME EN æqualis. Sed M E EN maiores sunt, quàm MN. ergo et AD maior est quàm MN. at MN est æqualis BC. est igitur AD quàm BC maior. Quòd cũ duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG, et basis MN basi FG maior erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo et BC quàm FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, et BC maior, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

24. primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat intus, vt AC, et DC iungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD æqualis. rectus autem est DAC. ergo et ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt. quod fieri non potest. Non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat vt AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et circumferentiam CHA interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat vt FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quoniã rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit AD quàm DG maior. æqualis autem est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interiicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea

5. primi.

17. primi.

19. primi.

linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lincam AE interiicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

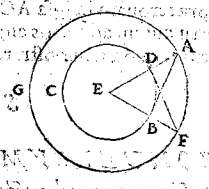
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere: et rectam lineam contingere circulum in vno tantum puncto, quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipsũ cadit, vt ostensum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, interuallo autem EA circulus AFG describatur: et à puncto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF: iungantur q; EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est æqualis: triangulum q; DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis æquales igitur est angulus EBA angulo EDF. et EDF rectus est. quare et rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circulum BCD contingit: quod facere oportebat.



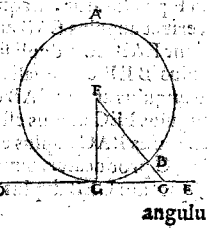
4. primi.

Ex antecedente.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrũ sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiorem autem



12. primi.

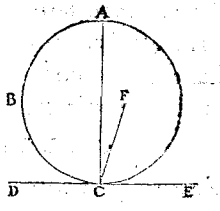
19. primi.

angulum

angulum maius latus subtendit. maior igitur est FC, quàm FG, æqualis autem FC ipsi FB. ergo FB ipsa FC est maior, minor maiore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.



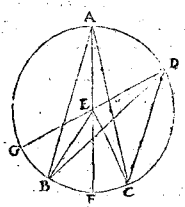
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrũ esse. Non enim, sed si fieri potest, sit F centrum; et iungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC cõtingit quædam recta linea DE, et à centro ad contactum ducta est FC, erit FC ad ipsam DE perpendicularis. rectus igitur angulus est FCE. est autẽ et ACE rectus. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur; producta ad eas partes, in quibus est circulus in circuli cẽtrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

In circulo angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferẽtiam eandem pro basi habeãt.



Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandẽ circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE et ad F producatur. Itaque quoniam EA est æqualis EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. Sed angulus BEF est æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus anguli EAB est duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus BDC, iũctaq; DE ad G producatur. Similiter ostendemus angulum GEC anguli EDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus

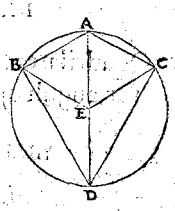
5. primi.

32. primi.

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius; qui ad circumferẽtiam, quãdo circumferentiã eandẽ pro basi habeant. quod oportebat demõstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

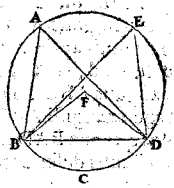
Illud quoque verum est, spacium quod est ad cẽtrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habuerint.



Sit enim circulus ABC, cuius centrum E. Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli BAC. iuncta enim AE, & ad D producta, iunctisq; BD DC, similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, et angulus CED duplus anguli CAE, totum igitur spacium BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiã duplum erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.

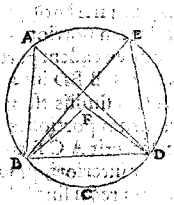


Sit circulus ABCDE, & in eadem portione BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F; iungantur BF FD. & quoniam angulus quidẽ BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentia, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. In circulo igitur qui in eadẽ portione sunt anguli inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

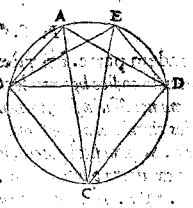
F. C. COMMENTARIVS.

Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcunque ad cẽtrum pro angulo accipiatur, ex iis quę nos proxime demonstrauimus. possumus autem & hoc modo demonstrare.

Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter se æquales esse. Sit enim primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura, sumaturq; circuli centrum quod sit F; & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED æqualis erit. Sit deinde BAED portio minor: & iungantur BC AC EC DC. Itaque quoniam ex iis, quæ proxime demonstrauimus, angulus BAC est æqualis angulo BEC, itemq; angulus CAD angulo CED; erit et totus angulus BAD toti BED æqualis.



Ex antecedente.

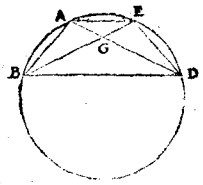


ALITER.

Iungatur AE. erit angulus ABE æqualis angulo ADE, angulus autem ACB ad verticem angulo EGD est æqualis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED æqualis erit. In circulo igitur

Ex demonstratis. 15. primi.

igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod demonstrare oportebat.

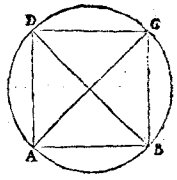


THEOREMA XX. PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quę in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis equales sunt.

Sit circulus ABCD, et in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Iungantur AC BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB est equalis angulo B D C, in eadem enim sunt portione BADC, et angulus ACB æqualis ipsi ADB, quòd sint in eadem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB est æqualis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui sunt ad A et C, et seorsum vni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC æquales. Sed ABC BAC ACB sunt æquales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis equales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quę in circulis describũtur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

32. primi.

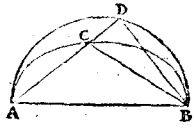


THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes et inæquales ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones similes, et inequales constituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaque quoniam portio A C B similis est portioni A D B, similes autem circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales; erit A C B angulus equalis angulo A D B, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea, duę circulorum portiones similes, et inæquales ex eadem parte constituentur. quod demonstrare oportebat.

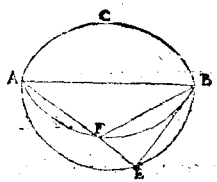
Diffi. 11.



F. C. COMMENTARIVS.

* Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

In uetusto codice hęc non leguntur, quamquam ad demonstrationem necessaria sint, tamen neutra ex parte similes, & inęquales circulorum portiones constitui possint in eadem recta linea. Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB constituatur ex altera parte portio A E B similis, & inęqualis portioni A C B. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB similis & aequalis ipsi ACB; & ducta AFE, iunctisq; FB BE, similiter demonstrabitur angulus AFB aequalis an-

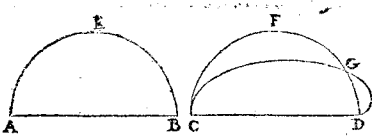


gulo

gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes & inæquales circulorum portiones constituentur. quod demonstrandum fuerat.

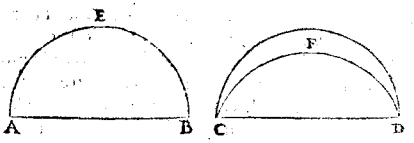
THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.



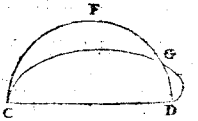
Sint enim in æqualibus rectis lineis AB CD similes circulorum portiones AEB CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem esse. congruente enim AEB portione portioni CFD, et posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet et B punctum puncto D, propterea quòd AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet et AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipsi CD, portio autē AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus pūctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectę CD, non congruet et ACB portio portioni CFD. quare congruet et ipsi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis similes circulorū portiones inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.



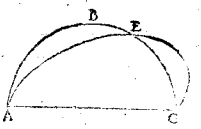
Si enim AB congruet ipsi CD; portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, etreliqua.

Si enim AB recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circūferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circulorum portiones similes & inæquales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedēte demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. quod itidem fieri nō potest, ex decima huius. Euclides autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.



Sed & cuiusque prędictorum cōuersum etiam verum est, quod ita demonstrari potest.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt.

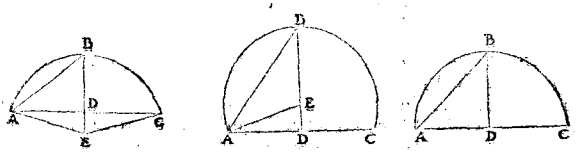


Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC aequales, sed tamen dissimiles: necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiae ABC, alioqui & aequales essent & similes: neque extra, vel intra ipsam cadere. aequales enim non essent. quare relinquitur vt partim intra, partim ex-

vna cadat, quòd si ita sit, circulus circulum in plur.bus, quàm duobus punctis secabit. quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis constitui posse aequales & dissimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; vt superius dictum est. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorũ portiones similes sunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.



Sit data circuli portio ABC, itaque oportet portionis ABC describere circulũ, cuius est portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur, vel igitur angulus ABD maior est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis angulo ABD; et DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis angulo BAE, erit et BE recta linea ipsi EA æqualis. et quoniam AD est æqualis DC, communis autẽ DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus.n. vterque est. ergo et basis AE basi EC est æqualis. Sed ostensa est AE æqualis EB. quare et BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt, centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus; cuius ea portio est. Sed et illud constat, portionem ABC semicirculo minorem esse; propterea quòd centrum ipsius extra cadit. Similiter et si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, et portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD, constituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipsa DB, atque erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius portio est. quod facere oportebat.

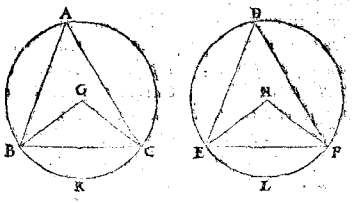
23. primi.

6. primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circũferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. Iungantur enim BC EF. Et quoniã æquales sunt ABC DEF circuli, erũt et quæ ex cẽtris æquales. duæ igitur



BC

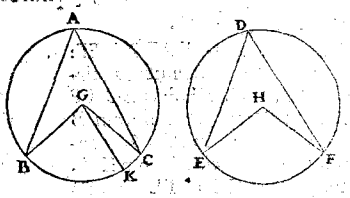
BG GC duabus FH,HF æquales sunt:& angulus ad G æqualis angulo ad H . Ergo et basis BC basi EF est æqualis.Rursus quoniã æqualis est angulus ad A angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF.et sunt in æqualibus rectis lineis BC E F. quę autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones inter se æquales sunt.portio igitur BAC portioni EDF est æqualis.Sed et totus ABC circulus æqualis est toti DEF.ergo et reliqua circumferentia BKC reliquę ELF æqualis erit.In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentiis, siue ad centra siue ad circumferentias insistãt.quod oportebat demonstrare. 4.primi. Diffi.11. 24.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.
In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis,siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.



In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF.Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem esse, Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF,manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem.Sin minus,vnus ipsorum est maior.sit maior BGC,et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G angulo EHF æqualis angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint.Ergo circumferentia BK æqualis est circumferentię EF.Sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC.ergo et BK ipsi BC est æqualis,minor maiori, quod fieri non pot. Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF. ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis.In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.quod oportebat demonstrare. 23.primi. Ex antecedente.

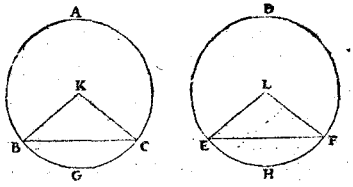
F. C. COMMENTARIVS.

Eadem demonstratio erit, si anguli aequalibus circumferentijs eiusdem circuli insistant, vt propositio magis vniuersalis fiat,hoc pacto.
In eisdem vel æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt,siue ad centra,siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectę lineę circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; et in ipsis æquales rectę lineę BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC maiorem maiori circumferentiæ EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem

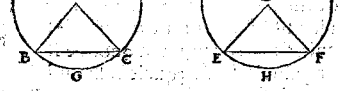


1.huius. esse. Sumãtur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quo-
Diffi.1. niam circuli æquales sunt, erunt et quæ ex centris æquales. duæ igitur BK KC sunt
8.primi. æquales duabus EL LF: et basis BC æqualis est basi EF. Ergo angulus BKC angulo
16.huius. ELF est æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare cirumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliqua EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipsis æquales assumantur circũferentiæ BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam B C rectæ EF æqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quo-



1 huius.

16.huius. niam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit et angulus BKC angulo ELF æqualis. Et quo-
Diffi.1. niam circuli ABC DEF sunt æquales, et quæ ex centris æquales erunt. duę igitur B
4.primi. K KC sunt æquales duabus EL LF; et æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineę subtendunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonstrationes eędem sint, propositiones magis vniuersales fieri poterunt, in hunc modum.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt.

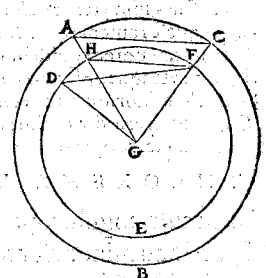
Sed & harum quoddammodo conuersas, atque alias his non dissimiles demonstrare hoc loco non inutile arbitrati sumus.

PROPOSITIO I.

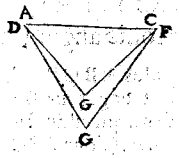
Si æquales rectæ lineæ æquales, et similes circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorum illæ sunt circumferentiæ.

Si enim

Si enim fieri potest, sint circuli inæquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G æqualis minori describatur DEF: & iungãtur AG GC DG GF, ita vt punctum F cadat in rectã lineã GC: & AG secet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectæ lineæ AC DF æquales sunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps demonstrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF similis est circumferentiæ AC, ex 12 diffinitione huius. in ipsis enim idem angulus AGC consistit. ergo circumferentia DF circumferentiæ AC non est similis. atqui similis ponebatur. quod est absurdum. non igitur circuli inæquales sunt. ergo æquales esse necessarium est. At vero angulum AGC minorem esse angulo DGF, ita demonstrabimus.



Intelligatur triangulum AGC seorsum, & triangulo DGF punctum D in A statuatur; & punctum F in C. sunt enim AC DF inter se æquales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor est angulo DGF. quod demonstrare oportebat.



PROPOSITIO. II.

In circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ dissimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex ijs, quae nos proxime demonstrauimus perspicue apparet. æquales enim rectæ lineæ AC DF dissimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inæqualibus similes circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendũt.

Et hoc similiter apparet ex ante demonstratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF æqualia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit basis DF basi HF maior. Sed recta linea AC est æqualis ipsi DF. ergo AC HF inæquales sunt, & similes circumferentias subtendũt. quod oportebat demonstrare.

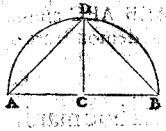
PROPOSITIO IIII.

Similes et inæquales circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.

Si enim rectæ lineæ æquales sint, & circuli item æquales, erunt circumferentiæ, quas subtendunt, & æquales & similes. Si vero circuli sint inæquales, circumferentiæ dissimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur & inæquales circumferentias, inæquales rectæ lineæ subtendunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

Datam circumferentiam bifariam secare.

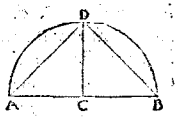


Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Iungatur AB, & in C bifariam secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus

10. primi.

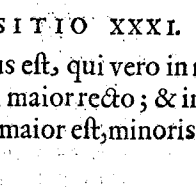
BC,

BC CD æquales ſunt: et angulus ACD æqualis angulo
4.primi. BCD, rectus enim vterque eſt: ergo baſis AD baſi DB eſt
28.huius. æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. et eſt vtraque ipſarum AD DB circumferentiarum ſemicirculo minor. quare circumferentia AD circumferentiæ D B æqualis erit. data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. quod facere oportebat.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, & qui in minori maior recto; & inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt, minoris vero portionis angulus recto minor.



Sit circulus A B C D cuius diameter B C, centrum autem E; et iungantur B A AC AD DC. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo BAC rectum eſſe; qui vero in portione ABC maiore ſemicirculo, videlicet angulum ABC minorem eſſe recto, et qui in portione ADC minore ſemicirculo, hoc eſt angulũ ADC recto maiorem. iungatur A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam BE eſt æqualis EA, erit et angulus EAB, angulo EBA æqualis. Rurſus quoniam AE
5.primi. eſt æqualis EC, et angulus ACE angulo CAE æqualis erit. totus igitur angulus BAC eſt æqualis duobus ABC ACB angulis. eſt autem et
32 primi. angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis. angulus igitur
13.primi. BAC eſt æqualis angulo FAC. ac propterea vterque ipſorum rectus. Quare in ſemi-
17.primi. circulo BAC angulus BAC rectus eſt. et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in portione ABC maiore ſemicirculo. Quòd cum in circulo quadri-
22.huius. laterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero, qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis. et angulus ABC minor eſt recto. reliquus igitur A D C recto maior erit, atque eſt in portione ADC minore ſemicirculo. Dico præterea maioris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentia et recta linea A C recto maiorem eſſe; angulũ vero minoris portionis contentum circumferentia A D C, et recta linea A C recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit et contentus A B C circumferentia, et recta linea AC recto maior. Rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea C A, et A D C circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, et qui in minori maior recto. et inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt: minoris vero recto minor. quod demonſtrare oportebat.

ALITER demõſtrabitur angulũ BAC rectũ eſſe. Quoniã enim angulus AEC duplus eſt anguli BAE, etenim duobus interioribus, et oppoſitis eſt æqualis: eſt autem et AEB duplus ipſius EAC: anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed et AEB AEC anguli duobus rectis ſunt æquales. ergo angulus BAC rectus eſt. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi triãguli vnus angulus ſit æqualis duobus

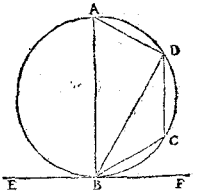
bus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, ijsdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt.

SCHOLIVM.

Si semicirculi omnes ob similitudinem æquales angulos suscipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores; perspicuum est cum similes sint æquales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum angulū diminuunt: similiter et minores semicirculis rectum proportione augent. Ergo similes portiones æquales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quòd heterogenei sint, respectu rectilineorum, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioritate tantum, vt sic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quæ in contraria transmutantur, per media transire consueuerunt. Sed et in alijs inuenire licet hoc modo oppositæ absque medio. etenim quæ circulum comprehendit linea, cum conuexa sit, et caua, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta lineã, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, et à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum vtcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD esse æqualem angulo, qui cõstituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD æqualem: angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: et in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; iungantur q; AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: et à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdē circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto æquales sunt. Sed et ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, et anguli eius oppositi æquales

11. primi.

19. huius.

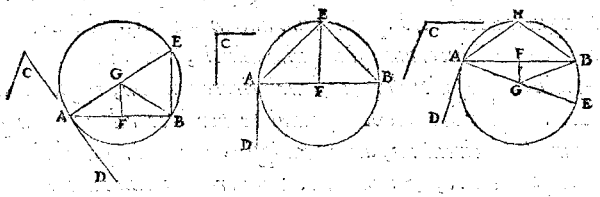
Ex antecedente.

32. primi.

22.huius. si æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet in data recta linea AB describere portionē circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, vt in prima figura, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea
23.primi. datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur an-
11.primi. gulus est BAD, et à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autē
10.primi. AB bifariam in F; atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB: et GB iungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duę AF FG duabus BF FG æquales sunt: et angulus AFG æqualis angulo GFB. ergo basis AG basi
4.primi. GB est æqualis. Itaque centro G, interuallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur et sit ABE, iungaturq; EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, et à puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum continget. et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et
Corol.16.huius. à contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB: erit angulus DA
Ex antecedente. B æqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C
23.primi. rectus. et oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quę suscipiat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C æqualis angulus BAD, vt in secūda figura, secenturq; AB bifariā in F,
Corol.16.huius. et centro F, interuallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB, ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea quòd rectus est qui ad A angulus, et angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim et ipse est, in semicirculo consistēs. sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo et qui in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C æqualem. Denique sit angulus ad C obtusus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum A constituatur ipsi æqualis angulus BAD, vt hēt in tertia figura, et ipsi AD rectę lineae ad rectos angulos ducatur AE: secenturq; rursus AB bifariam in F. ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, et GB iungatur. Et quoniam AF est æqualis FB, communis autem FG. duę AF FG duabus BF FG æquales sunt, et angulus AFG angulo BFG æqua-

lis.

lis. basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, interuallo autem AG circulus descriptus etiam per B transibit. transeat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget: et à contactu, qui ad A ducta est AB. quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB cõstituitur est æqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualẽ ei, qui est ad C. quod facere oportebat. 4. primi. Corol. 16. huius. 32. primi.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

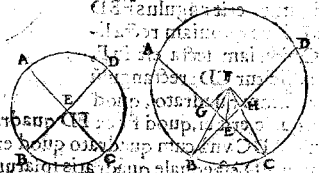
A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus, qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quę suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens, et ad rectam lineam BF, et ad punctum in ea B cõstituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à cõtactu B ducta est BC, erit angulus FBC æqualis ei, qui in alterna circuli portione cõstituitur. Sed EBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo et angulus, qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. quod facere oportebat. 17. huius. 23. primi.

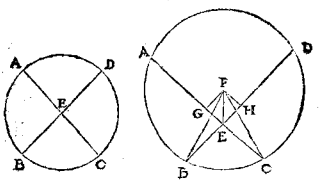
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent rectangulum portionibus vnius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

In circulo enim ABCD duæ rectę lineæ AC BD se se mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum transeant, ita vt E sit centrum ABCD circuli, manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, et rectangulum contentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Sin autem AC DB non transeant per centrum, et sumatur centrum circuli ABCD quod sit F. et à F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH iungaturq; FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E, erit rectangulum AE EC contentum vnà cum ipsius EG quadrato, æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GE quadratum. ergo rectangulum AEC vnà cum iis, quæ ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG GF 3. huius. 5. secundi.



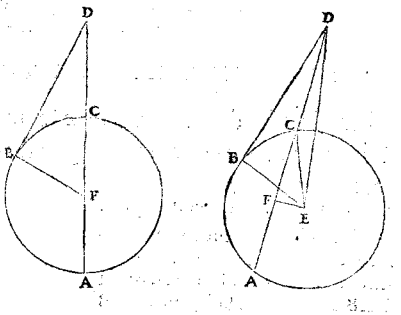
47.primi. GF æquale eſt quadratũ ex FE:quadratis vero ex CG GF æquale quod ex FC quadratum. rectangulum igitur AEC vnà cũ quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FC. eſt autem CF æqualis F B. Ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex EF æquale eſt ei,quod ex FB quadrato. Eadẽ ratione et rectangulum DEB vnà cũ quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FB. oſtenſum autẽ eſt et rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale eſt rectangulo DEB vnà cum quadrato ex FE.commune auferatur quod ex FE quadratum.reliquum igitur rectãgulum AEC reliquo DEB rectãgulo æquale erit. Quare ſi in circulo duę rectę lineę ſe ſe mutuo ſecẽt,rectangulũ portionibus vnius cõtentũ ęquale eſt ei,quod alterius portionibus continetur,id quod demõſtrare oportebat.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota ſecante, et exterius aſſumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei,quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadãt duæ rectę lineæ DCA DB: et DCA quidem circulum ABC ſecet;DB vero contingat. Dico rectãgulum ADC quadrato,quod fit ex DB æquale eſſe. Vel igitur DCA per centrum tranſit, vel non.tranſeat primum per centrum circuli ABC,quod ſit F: et
18.huius. FB iungatur. erit angulus FBD rectus.Itaque quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, et ipſi adiicitur CD; rectangulũ ADC vnà cum quadrato, quod
6.ſecundi. ex FC æquale erit ei,quod fit ex FD quadrato.æqualis autem eſt CF ipſi FB.ergo rectangulũ ADC vnà cum quadrato quod ex FB æquale eſt quadrato ex FD. Sed quadrarum ex FD eſt ęquale quadratis ipſarum FB BD; rectus enim angulus eſt FBD. rectãgulum igitur ADC vnà cum quadrato ex FB ęquale eſt ipſarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratũ,quod ex FB.ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB ęquale erit. Sed DCA non tranſeat per centrum ABC circuli: ſumaturq; centrũ E,et ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF:et iungantur EB EC ED.rectus igitur eſt EFD angulus.Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta,rectam lineam quandam AC non ductam per
3.huius. centrum ad rectos angulos ſecat,et bifariam ipſam ſecabit. quare AF ipſi FC eſt æqualis. Rurſus quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adiicitur
6.ſecundi. CD,erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC æquale quadrato, quod ex FD.commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà cum



cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est, quod ex DE quadratu; etenim rectus est angulus EFD. quadratis vero ex CE FE æquale est quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato, quod ex CE est æquale quadrato ex ED. æqualis autem est CE ipsi EB. rectangulum igitur ADC vnà cum quadrato ex EB æquale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD; si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato ex EB æquale est eis, quæ ex EB BD quadratis. communi auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur AD C rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et quę deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

PORISMA. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, vt et adnotauit Campanus. nempe hęc.

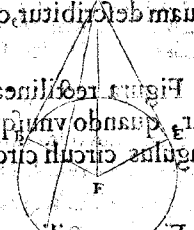
Si à pũcto extra circulum sumpto ducãtur in circulum quotcumque rectę lineę, ipsum secantes; rectangula quæ totis, et earum portionibus extrinsecis cõtinentur, inter se æqualia sunt; quod singula quadrato lineæ contingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductę duæ rectæ lineæ circulum contingentes inter se æquales sunt. etenim vtriusque ipsarum quadrata sunt æqualia rectangulo, quod recta linea ab eodem puncto ducta, quę circulum secet, et eius portione extrinseca continetur. ergo et ipsæ linę æquales sunt necesse est. neque vero plures quam duæ esse possunt, quod ex demonstratis in octauo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; fiat autem quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB, et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat, fiatq; rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, et sumatur circuli ABC centrum quod sit F, iungantur FE FB FD. ergo angulus FED rectus est. Et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ADC æquale erit quadrato quod ex DE. Sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato, quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. habemus et FE æqualis FB. duę igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt; et basis ipsarum communis FD. angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF. rectus autem DEF. ergo et DBF est rectus; atque est FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur, et si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonstrare oportebat.



18. huius.

8. primi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVARTVS

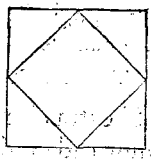
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quãdo vnus quisque figuræ descriptæ angulus vnũquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

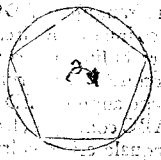


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnumquodque latus descriptę vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

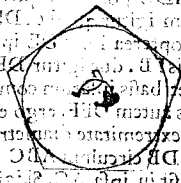
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IIII.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptę circuli circumferentiã cõtingit.



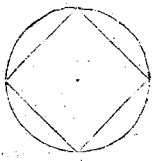
V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

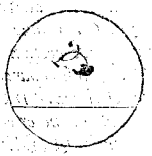
VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.



VII.

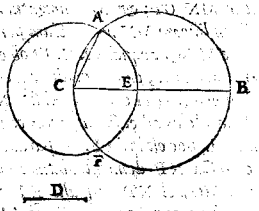
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.



PROBLEMA I.
PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectę lineæ, quæ diametro eius maior nō sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non maior circuli diametro D, oportet in circulo A B C rectę lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. Si quidem igitur B C sit æqualis ipsi D, factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata est A C rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, maior est B C quàm D, ponaturq; ipsi D æqualis C E: et centro quidem C internallo autem C E circulus describatur A E F: et C A iungatur.



Itaque quoniam punctum C centrum est A E F circuli; erit C A ipsi C E æqualis. Sed D est æqualis C E. ergo et D ipsi A C æqualis erit. In dato igitur circulo A B C datæ rectę lineæ D, non maiori circuli diametro, æqualis aptata est A C. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Cum varia sit circumscriptionum, et inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est. nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astronomicam scientiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est, pentagoni constitutioni inseruiens: & quæcumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam simpliciorem habet constructionem, quàm trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendum autem si quidem data recta linea diametro sit æqualis, uno tantum modo, uel etiam absque ulla experientia fieri problema; si uero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto in C ad A E ductæ rectæ lineæ inter se æquales sunt.

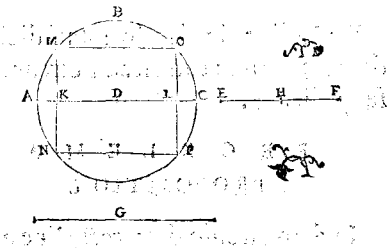
Problema

Problema hoc est ex eorum numero, quae determinata appellantur. posset enim & hoc modo explicari.

In dato circulo datæ rectę lineæ æqualem rectam lineam aptare. oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non esse maiorem.

Licet etiam problema aliud ab oluere huiusmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineæ datę, quę diametro maior non sit, æqualem, et alteri datæ parallelam aptare.



Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea sit, in qua G. Itaque oportet in circulo ABC aptare rectam lineam aequalem ipsi EF, & ipsi G parallelam. Ducatur per D recta linea AD C parallela ipsi G, quae circuli diameter erit. & si quidem AC sit æqualis EF, factū iā erit quod proponebatur: si vero AC sit maior, quam EF, secetur EF bifariam in H: & ipsi HE aequalis abscindatur à semidiametro circuli DA, quae sit DK. ipsi vero HF aequalis fiat DL; perq; puncta KL ipsi AC ad rectos angulos ducantur MN OP; & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quędam AC per centrum ducta rectam lineam MN non ductam per centrum ad rectos angulos secat; & bifariam ipsam secabit. quare MK est aequalis KN. Et ob eandem causſam OL est aequalis LP. sunt autem MN OP inter se aequales, cum aequaliter à centro distēt: & sunt parallelae, anguli enim MKL OLK recti sunt. quare et earum dimidiae KM LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequales, & parallelas ad easdem partes coniungunt, & ipsae aequales, et parallelae sunt. ergo MO est aequalis KL, hoc est ipsi EF, & parallela ipsi G; sunt enim vtreque ipsi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonstrabitur aequalis eidē EF, & parallela ipsi G. In circulo igitur ABC aptata est MO vel NP aequalis EF, & ipsi G parallela. quod facere oportebat.

5 1.primi.

11.primi.

3.tertij.

14.tertij.
28.primi.

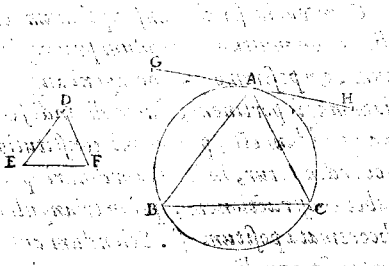
33.primi.

30 primi.

Ex quibus constat si quidem AC sit æqualis rectæ lineæ datę, vno dumtaxat modo problema absolui; si vero sit maior, duobus modis, vt in antecedēti dictum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.



Sit datus circulus ABC, datum autem triangulū DEF. oportet in ABC circulo describere triangulū triangulo DEF æquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens circulum ABC in puncto A: et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A angulo DEF æqualis angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG, et ad punctum in ipsa A angulo DFE æqualis cōstituatur angulus GAB; et BC iungatur.

17.tertii.

23.primi.

Quoniā igitur circulū ABC contingit quædā recta HAG; à contactu aūt in circulū ducta est AC: erit HAC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione cōsistit, videlicet ipsi ABC. Sed HAC angulus æqualis est angulo DEF. ergo et angulus ABC

32 primi.

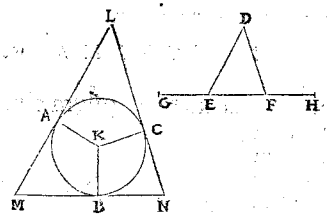
angulo

angulo DEF eſt æqualis. Eadem ratione et angulus ACB eſt æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis erit. Ergo triangulum ABC triangulo DEF eſt æquiangulum. et deſcriptum eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulũ triangulũ deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABC: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC deſcribere triãgulum triãgulo DEF æquiangulum. protrahatur ex vtraque parte EF ad puncta HG: et ſumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB vt cumque ducatur: conſtituatur; ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; angulo aũt DFH æqualis angulus BKC. et per ABC puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN NCL circulum ABC, contingentes. Quoniam igitur circulũ ABC contingunt LM MN NL, in punctis ABC, à centro autem K ad ABC puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta ABC recti. Et quoniam quadrilateri AMBK anguli quattuor quattuor rectis æquales ſunt; etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales ſunt; quorum AKB ipſi DEG eſt æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. Similiter demonſtrabitur angulus LNB ipſi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN eſt æqualis reliquo EDF. æquiangulum igitur eſt LMN triangulum triangulo DEF, et deſcriptum eſt circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



23.primi.

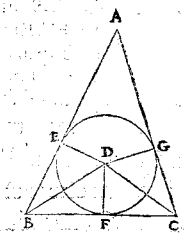
17.tertij.

18.tertij.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum deſcribere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum deſcribere. ſecentur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD, quæ conueniant inter ſe in D puncto; et à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus ABD eſt æqualis angulo CBD: eſt autem et rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri æquale, et vtrique commune BD, quod ſcilicet vni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE æqualis DF. et eadem ratione DG æqualis DF. ergo et DE ipſi DG eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter ſe æquales ſunt; quare centro D interuallo autem vna ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cõtinget; propterea quòd recti ſunt ad EFG anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri



9.primi.

12.primi.

16.primi.

16.tertij. metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulũ cadet. quòd est absurdũ. nõ igi tur cẽtro D, interuallo aũt vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit re ctas lineas AB BC CA. quare ipsas cõtinget; atque erit circulus descriptus in triãgulo ABC. *In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. quod facere oportebat.*

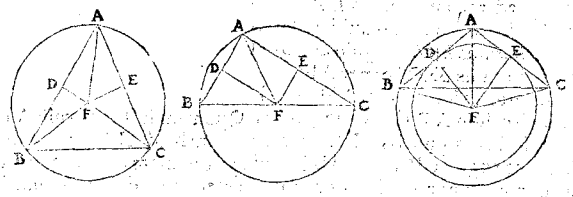
F. C. COMMENTARIVS.

Quæsitum est à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum describi possit, quamquam fortasse improprie in eo dicatur describi. Fuerunt qui in triangulo aequilatero tantum peoblema absoluerunt. Nos autem vniuersè in omnibus absoluere aggrediemur, postea quàm nonnulla in quinto, ac sexto libro demonstrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datũ triangulum ABC. oportet circa datum triangulũ ABC circulũ de-



10.primi. scribere. secentur AB AC bifariã

11.primi. in D E punctis: et à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF; quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angu-

4. primi. los DF; erit basis AF basi FB æqualis. Similiter ostendetur et CF æqualis FA. ergo et BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. et describatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in secunda figura, & AF iungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus et CF ipsi FA æqualem esse. quare et BF est æqualis FC. Rursus igitur centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. et describatur vt ABC. *Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.*

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC existentem in portione semicirculo maiore minorem esse recto. quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quod sit in semicirculo, rectum esse. & quãdo extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse maiorem. Quare et quando datus angulus minor fit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quãdo autem rectus in ipsa BC,

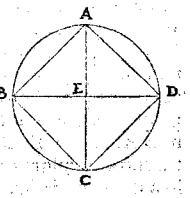
et

& quando maior recto, extra BC. quod ostendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: et AB BC CD DA iungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis basi AD. Et eadem ratione vtraque ipsarum BC CD vtrique BA AD æqualis. æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus est. et eadem ratione vnusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, et æquilaterum. esse. ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. quod facere oportebat.

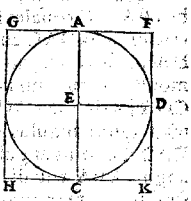


31. tertij.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulū quadratū describere. ducantur circuli ABCD duę diametri AC BD ad rectos inter se angulos, et per pūcta A BCD ducātur circulū ABCD cōtingentes FG GH HK KF. Quoniā igitur FG contingit circulū ABCD, à centro aūt E ad cōtactū qui est ad A ducitur EA, erūt anguli ad A recti. Eadem ratione et anguli ad puncta B C D recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela. Eadē ratione et AC parallela est FK. Similiter demonstrabimus et vtram quę ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare et GF est parallela HK. parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem est æqualis HK, GH vero ipsi FK. Et quoniam AC æqualis est BD: Sed AC quidem vtrique ipsarum GH FK est æqualis; BD vero æqualis vtrique GF HK. et vtraque GH FK vtrique GF HK æqualis erit. Aequilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, et ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiā qui ad puncta HKF rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK; demonstratum autem est et æquilaterum. Ergo quadratum sit necesse est. et descriptū est circa circulū ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. quod facere oportebat.

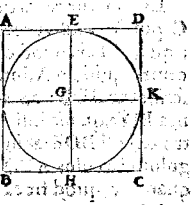


17. tertij.
18. tertij.
28. primi.
34. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITO VIII.

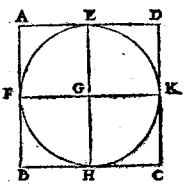
In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulū describere. Secetur vtraque ipsarū AB AD bifariam in punctis F E. et per E quidem alterutri ipsarum AB CD parallela ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC. parallelogrammum



10. primi.
31. primi.

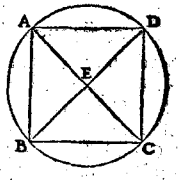
igitur est vnũquodque ipsorum AK KB AH HD A
34. primi. G GC BG GD : et latera ipsorum quę ex opposito sunt ęqualia. Et quoniam DA est æqualis AB; et ipsius quidẽ AD dimidia est AE; ipsius vero AB dimidia AF; erit AE ipsi AF ęqualis. quare et oppositalatera ęqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. Similiter demonstrabimus et vtramque ipsarum GH HK vtrique FG GE æqualem esse. quattuor igitur GE GF GH GK inter se sunt ęquales. Itaque centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CD DA continget, propterea quòd anguli ad E F H K recti sunt. Si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos duci
16. tertij. tur intra circulum cadet. quod est absurdum. non igitur centro quidem G, interuallo autem vnà ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget: atque erit descriptus in quadrato AB CD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. quod facere oportebat.



PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

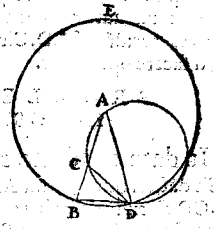
Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Iungãtur enim AC B D, quę se inuicem in puncto E secent. Et quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC ęquales sunt; et basis DC æqualis basi CB; erit angulus DAC angulo BAC æqualis. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. Similiter demonstrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC D B bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli vero ABC dimidius EBA; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare et latus EA lateri EB est ęquale. Similiter demonstrabimus, et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem esse. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit. atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur vt AB CD. circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. quod facere oportebat.



PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum cõstituere, habens vtrumque angulorum, qui sunt ad basim duplum reliqui.

Exponatur recta quędam linea AB, et secetur in
11. secundi. C puncto, ita vt rectangulum contentum AB BC æquale sit ci, quod ex CA describitur quadrato: et centro quidem A, interuallo autem AB circulus de
1. huius. scribatur BDE: apteturq; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipsi AC, quæ non sit maior diametro circuli BDE: et iunctis DA DC, circa ADC triãgulum circulus ACD describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod fit ex AC; æqualis autem est AC; ipsi BD, erit ABC rectangulum quadrato



quadrato quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt aliquod punctum B: et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem ſecat, altera vero incidit, atque eſt rectangulũ ABC æquale quadrato, quod ex BD; recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igitur BD contingit, et à contactu, qui ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione conſtituitur, videlicet angulo DAC. Quòd cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BDA eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipſis CDA DAC exterior angulus BCD eſt æqualis. ergo et BDA æqualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus eſt æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB eſt æquale. ergo et DBA ipſi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales ſunt. Et quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, et latus BD lateri DC eſt æquale. Sed BD ponitur æqualis ipſi CA. ergo et AC eſt æqualis CD. quare et angulus CDA æqualis eſt angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipſius anguli DAC dupli ſunt. eſt autẽ et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis. ergo et BCD duplus eſt ipſius DAC. Sed BCD eſt æqualis vtrique ipſorũ BDA DBA. quare et vterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplus. Aequicrure igitur triãgulum conſtitutum eſt ADB, habens vtrumque eorum angulorum, qui ſunt ad baſim, duplum reliqui. quod facere oportebat.

Vlt. tertij.

32. tertij.

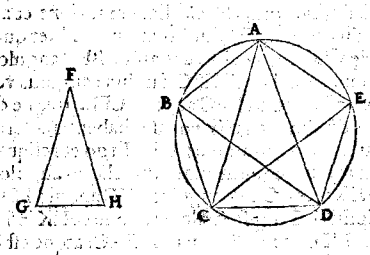
32. primi.

6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonũ æquilaterum, et æquiãgulum deſcribere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens vtrumque eorũ qui ſunt ad G H angulorum duplũ anguli qui eſt ad F: et deſcribatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita vt angulo quidem, qui eſt ad F æqualis ſit angulus CAD: vtrique vero ipſorum, qui ad GH ſit æquales vterque ACD CDA. et vterque igitur ACD CDA anguli CAD eſt duplus. Secetur vterque ipſorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC CD DE EA iungatur. Quoniã igitur vterque ipſorũ ACD CDA duplus eſt ipſius CAD, et ſecti ſunt bifariã rectis lineis CE DB; quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter ſe ſunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferentiis inſiſtunt. quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA æquales ſunt inter ſe. Sed æquales circũferẽtias æquales rectę lineę ſubtendunt. ergo et quinque rectę lineę AB BC CD DE EA inter ſe æquales ſunt. æquilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB æqualis eſt circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE circumferentia toti circumferentię EDCB eſt æqualis, et in circumferentia quidẽ ABCD inſiſtit angulus AED, in circũferẽtia vero EDCB inſiſtit BAE. Ergo et BAE angulus eſt æqualis angulo AED. Eadẽm ratione, et vnuſquiſque angulorum ABC BCD CDE vnicuique ipſorum BAE AED eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonũ: oſtenſum autem eſt et æquilaterũ eſſe. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, et æquiangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



Ex antecedente.

2. huius.

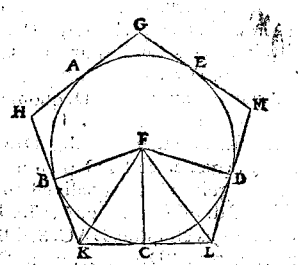
9. primi.

26. tertij.

29. tertij.

PROBELMA XII. PROPOSITIO. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et æquiangulum describere.



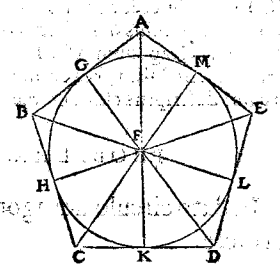
Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et
Ex antecedente. æquiangulum describere. intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circũferentiæ AB BC CD DE
17. tertij. EA sint æquales; et per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG. et sumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto
18. tertij. C, et à centro F ad contactum, qui est ad C ducta est FC: erit FC ad ipsam KL perpendicularis. rectus igitur est vterque angulorum qui sunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum quod fit ex FK æquale est quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem causſam quadratis ex FB, BK æquale est quod ex FK quadratũ. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. Ergo reliquũ quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur est BK ipsi CK. Et quoniã FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt: et
8. primi. basis BK est æqualis basi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumfe-
27. tertij. rentiæ CD est æqualis, et angulus BFC angulo CFD æqualis erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula sũt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, et vnum latus vni lateri æqua-
26. primi. le, quod ipsis commune est FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniã KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC: atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. Similiter et vnaqueque ipsarum GH HM ML ostendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC: et ostensus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL; ipsius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione ostendetur et vnusquisque ipsorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. ergo æquiangulum est GHKLM pentagonũ. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: et describptum est circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et æquiangulum sit, circulum describere.

Sit

Sit datum pentagonum æquilaterum, et æquiangulum ABCDE. oportet in A B C D E pentagono circulum describere. secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conueniunt inter se CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ B C CF duabus D C CF æquales sunt, et angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est æqualis, et BFC triangulum æquale triãgulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, et angulus quidem CDE anguli ABC, angulus vero CDF anguli CBF æqualis, erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariã sectus est recta linea BF. Similiter demonstrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri æquale, commune scilicet vtrisque FC, quod vni æqualium angulorum subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. Similiter ostẽdetur et vnaquæque ipsarum FL FM FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FG FH FK FL FM circulus descriptus, etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cõtinget, propterea quòd anguli ad G H K L M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdũ esse ostensum est. non igitur centro F, et interuallo vno ipsorum punctorum G H K L M circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas cõtingat necesse est. describatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, et æquiangulum, circulus descriptus est. quod facere oportebat.



9. primi.

4. primi.

26. primi.

16. tertij.

PROBLEMA. XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, et æquiangulum sit, circulum describere.

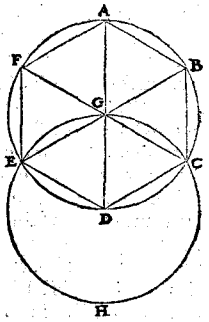
Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere, secetur vterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonstrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam sectum esse. Et quoniam angulus BCD anguli CDE est æqualis: atque est anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF, erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD est æquale. Similiter demõstrabitur et vna quæque ipsarum FB FA FE æqualis vnicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD

FC FD FE inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, et interuallo vna ipſarũ FA FB F C FD FE circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pẽtagonum ABCDE, quod æquilaterum eſt, et æquiangulum. deſcribatur, et ſit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et ęquiangulum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, et æquiangulum deſcribere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturq; centrum circuli G; et centro qui dem D, interuallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, iunctæq; EG CG ad puncta B F producãtur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. Rurſus quoniam D cẽtrum eſt circuli EGCH, erit DE ęqualis DG. Sed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo G E ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD



5. primi. triãgulum, ideoq; tres ipſius anguli EGD GDE D EG inter ſe æquales ſunt, quoniam ęquicruriũ trian

32. primi. gulorum anguli ad baſim inter ſe ſunt æquales: et ſunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum re-

13. primi. ctorum tertia pars eſt. Similiter oſtendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens angulos qui deinceps ſunt EG C CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt ęquales. ergo et qui ipſis ad vertice ſunt anguli BGA AGF FGE æquales ſunt angulis EGD DGC CGB. qua

26. tertij. re ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æqua

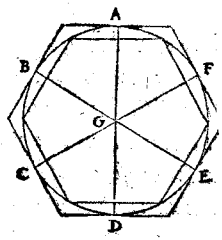
29. tertij. les anguli ęqualibus circumferentiis inſiſtunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt ęquales. æquales autem circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo et ſex rectæ lineę inter ſe æquales ſunt neceſſe eſt, ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF circumferentię ED eſt ęqualis, communis apponatur circumferentia ABCD. tota igitur FABCD circumferentia ęqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo D EF eſt æqualis. Similiter oſtẽdẽtur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales vtrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonũ. oſtenſum autem eſt et æquilaterum eſſe: et deſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et ęquiangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus ei, quę eſt ex centro circuli æquale eſſe. Et ſi per puncta ABCDEF contingentes circulum

ducamus

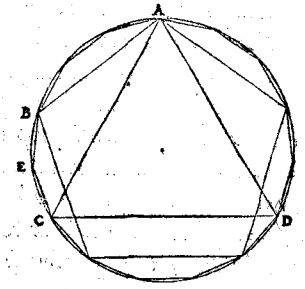
ducamus, circa circulū describetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum cō sequenter ijs, quæ in pentagono dicta sunt, & præterea similiter in dato hexagono circulum describemus, et circum scribemus. quod facere oportebat.



PROBLEMA XVI.
PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD trianguli quidē æquilateri in ipso descripti latus AC; pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarū igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli; erit triū. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariā in puncto E. quare vtraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum descriptum erit. quod facere oportebat.



Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli diuisiones contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum. Et insuper in dato quindecagono æquilatero, et æquiangulo circulum describemus, et circumscribemus.

QVARTI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

In quinto libro propositum est de analogijs tractare; hic enim liber communis est geometriæ, arithmeticæ, musicæ, & omni simpliciter mathematicæ disciplinæ: nam quæ in ipso demonstrantur non solum geometricis theorematibus congruunt, sed & omnibus, quæ ad mathematicas, vt dictum est, disciplinas referuntur. propositum igitur huiusmodi est. librum autem dicunt esse Eudoxi cuiusdam, qui Platonis magister fuit.

Analogia.

Itaque quoniam propositum est de analogijs tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; necesse est prius cognoscere, quæ nam sint hæ proportiones. simplicium enim cognitio cognitionem compositorum præcedere debet. si igitur quædam inter se comparetur, verbi gratia duæ magnitudines, ipsæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram transitus, distantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta similitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim vt magnitudo comparatur, sed vt proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; vt si sint duæ rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine sunt dupla potentia quadrupla sunt. quadratorum igitur proportio cum sit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem sub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æstimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æstimatione nulla species est, quæ ad præsentem contemplationem vtilis sit; eius vero, quæ in quantitate species sunt quinque, alia enim est multiplex vt sex. trium, alia superparticularis vt quattuor trium, & alia superpartiens, vt quinque trium, & hæ quidem simplices sunt, quarum adhuc simplicior est multiplex, aliæ uero duæ ex harum compositione nascuntur, videlicet multiplex superparticularis, vt est septem triũ, & multiplex superpartiens, vt octo trium. sub proportionales vero sunt minores maiorum, vt sub multiplex, subparticularis, & similiter reliqua. sciendum autem est hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars simpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. secunda vero vniuerse de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omni re, vt dictum est, simplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aũt liber ipse, ita & diffinitiones diuiduntur; primę enim sunt de partibus, et multiplicibus, deinde sequuntur vniuersaliores de oĩbus proportionibus.

Simplicium cognitio cognitione cõpositorũ præcedere debet Termini.

Comparatio est habitudo, quã antiqui proportionem appellarunt.

Analogia.

Proportio proportionis

Proportionis in quantitate species sũt quinque.

Quintus liber in duas partes diuidi tur.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVINTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo, quod est eiusdē speciei, vt 3 est pars 5. apud geometram vero est, quæ metitur maius, quando reliquum æquale sit ei, quod metitur: quando autem non sit æquale, non est pars, vt 3. 5; reliquuntur enim 2, quæ non sunt æqualia 3. quare 3 non sunt pars 5, sed partes, videlicet tres quintę $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quae simpliciter minor est maiore eiusdem speciei, vt cum dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipsum multiplex, quae alio nomine sub multiplex, & a nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem *dicit, vt significet habitudinem.* duarum magnitu-

dinum] *vt ſeparet ab alijs ſpeciebus quantitatis.* eiuſdem generis] *vt nequis lineam cum ſuperficie comparet. hæc enim inter ſe proportionem nullam habent.* quatenus ad quantitatem pertinet] *vt ſeparet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua eſt terminus continui nõ infiniti, & quantitas diſcreta eſt diſcreti non infiniti. ſed diſcretum nõ eſt magnitudo, multitudo enim eſt.* quædã habitudo] *quòd quinque ſint habitudinum ſpecies, vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] *vide ne hoc potius dictum ſit, vt intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aeſtimatione conſiſtit.*

IIII.

Portionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare poſſunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem eſt quædam proportio, quæ numero exprimi non poteſt; ſunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoſcitur exceſſus, quo alterũ ſuperat alterũ; quantitas aũt exceſſus cognoſci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe exceſſus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc eſt rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum appoſuit, quatenus ad quãtitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem diſcretam, & rationalem. vniuerſalius igitur diffiniens, quæ nam ſint proportionem habentia dixit,* quæ multiplicatę ſe inuicem ſuperare poſſunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in exceſſu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & poteſt latus multiplicatum aliquando diametrum ſuperare.*

F. C. COMMENTARIVS.

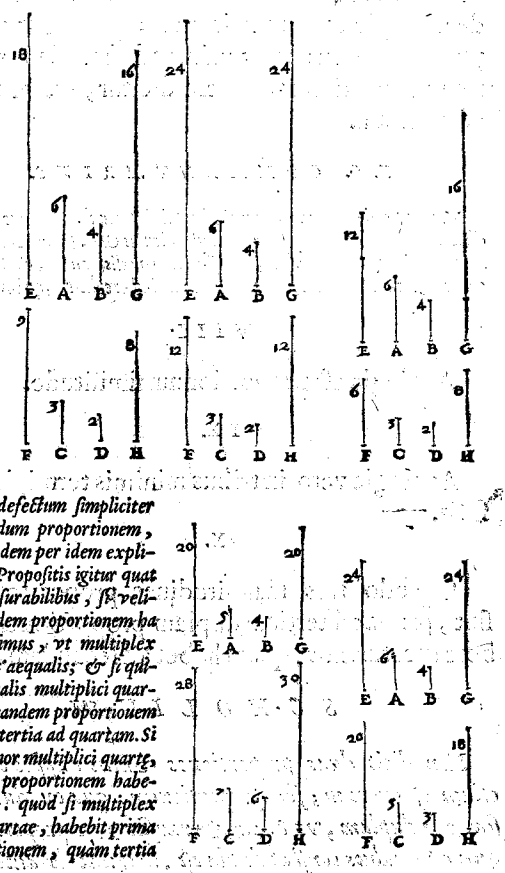
Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitae magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quamtumlibet multiplicata tantum abeſt, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne aequare quidem poſſit vnquam.

V.

In eadem proportione magnitudines eſſe dicuntur prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

tiplices, ſecundæ, et quartę æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà ſuperant, vel vnà æquales ſunt, vel vnà deficiunt inter ſe comparatæ.

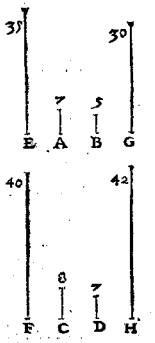
F. C. COMMENTARIVS.

Sit prima magnitudo A, ſecunda B, tertia C, & quarta D: ſumanturq; primae, ac tertiae, videlicet ipſarum A C aeque multiplices E F, vt ſit E aeque multiplex A, atque F ipſius C. rurſus ſumantur ipſarum B D, ſecundae ſcilicet, & quartae aeque multiplices GH; & ſiquidem maiori exiſtente E quàm G, etiam F ſit maior quàm H, vel ſi E aequali exiſtente ipſi G, ſit F aequalis H. vel ſi minori exiſtente, ſit minor iuxta quamuis multiplicationẽ, tunc dicetur A ad B eandem habere proportionem, quam C ad D. exceſſum autem, ac defectum ſimpliciter intelligere oportet, non ſecundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod eſt abſurdum. Propoſitis igitur quatuor magnitudinibus commenſurabilibus, ſi velimus ſtatim dignoſcere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primae multiplici ſecundae fiat aequalis; & ſi quidem multiplex tertiae ſit aequalis multiplici quartae, tunc prima ad ſecundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiae ſit minor multiplici quartę, prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. quòd ſi multiplex tertiae ſit maior multiplici quartae, habebit prima ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ superauerit multiplicem secundę, multiplex vero tertiæ non superauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

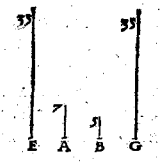


F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quae supra: & sumptis ipsarum AC aeque multiplicibus EF; itemq; ipsarum BD aeque multiplicibus GH, si quidem E superet G, F vero non superet H, vel si E sit aequalis ipsi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionẽ habere dicitur, quàm C ad D.

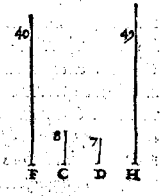
VIII.

Analogia est proportionum similitudo.



IX.

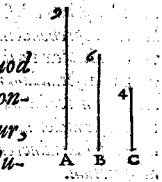
Analogia vero in tribus minimis terminis consistit.



X.

Quando tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam.

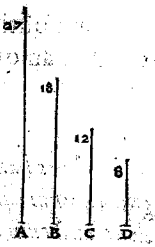
SCHOLIVM.



Non dicit duas proportiones vnius duplas esse, quod etiam est verum; sed proportionem, quae ex duabus constat, esse duplam, vt 8. 4. 2, & rursus 9 3 1. proportio igitur, quae ex duabus constat dupla est. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla est, in triplis vero nonupla, & in quadruplis sex decupla. demonstrabitur enim deinceps quae longitudine sunt dupla, potentia quadrupla esse. & quę longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla sit, dupla est proportionis laterum, quę est dupla, etenim dupli duplus quadruplus est.

XI.

Quando autem quattuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps vna plus, quo ad analogia processerit.



F. C. COMMENTARIVS.

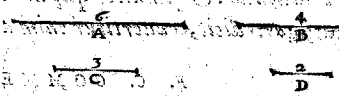
Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt necessario inæquales, & primum ipsorum maiorem: nam si æquales sint eadem est primi ad secundum, & ad tertium proportio. Si vero primus sit minor, non potest primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad secundum, cum primi ad secundum maior sit proportio, quàm ad tertium ex 8. huius.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

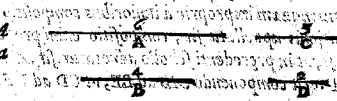
XIII.

Permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.



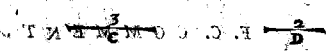
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita esse demonstratur in 16 propositione huius libri.



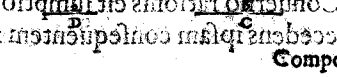
XIIII.

Conuersa ratio est sumptio consequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad consequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rursus A ad B, vt C ad D. erit conuertendo B ad A, vt D ad C. quod demonstratur in corollario quartæ huius.



Compositio

XV.

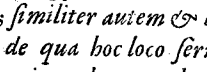
Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis vnà cum conſequente tamquàm vnius ad ipſam conſequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem appoſuerunt. neque enim compoſitio magnitudinum eadem eſt, quę compoſitio proportionum. hic autem antecedens vnà cum conſequente ſumptum totam magnitudinem efficit, quę ex magnitudinibus componitur: atque hęc eſt magnitudinum compoſitio. compoſitio enim proportionum aliam proportionẽ efficit, vt ipſe deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter ſe multiplicatę aliquam efficiunt proportionem. ipſe autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compoſitionem hanc συνθέντι, *hoc eſt componenti, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dicit, quàm componendo; ſimiliter autem & diuiſio, vna enim proportio diuiditur. at diuiſio de qua hoc loco ſermo fit, magnitudinum eſt, exceſſus namque antecedentium ab antecedentibus diſſecatur. ipſe vero etiam in hoc dicit* διελόντι, *videlicet diuidenti, vel diuidendo. & ſimiliter quę hoc loco appellatur conuerſio rationis ipſe* ἀναστρέφοντι *dicit, conuertitur enim ad antecedentia.*

F. C. COMMEMTARIVS.

Compoſitio rationis eſt proportio, quae oritur ex compoſitione terminorum ipſius proportionis, videlicet ex compoſitione antecedentis cum conſequente, cum totum conſequenti comparatur, quamquam improprie à iunioribus compoſitio proportionis, vel rationis appellata ſit; compoſitio enim proportionis longe alia eſt, vt in precedenti ſcholio adnotatur. ſit AE ad EB, vt CF ad FD. erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18 huius demonſtratur.

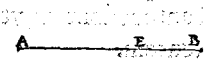


XVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17 huius demonſtrabitur.



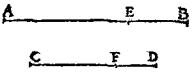
XVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

Sit

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuersionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF. hoc autem constat ex corollario 19 huius.



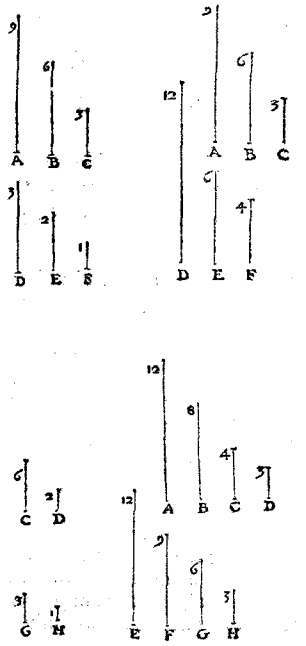
XVIII.

Aequa ratio, siue ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secũdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC, & aliae ipsis numero aequales DEF, sitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita D ad F. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. quod demonstrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC, itemq; aliae tres DEF, & sit vt A ad B, ita E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. hoc autem in 23 huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quàm tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero aequales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, sit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita sit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. & similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.



XIX.

Ordinata analogia est quã do fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliã quãpiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus

gnitudinibus, & alij ipſis numero æqualibus; fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem. vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam; ita in ſecundis alia quępiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla ſuperius poſita ſunt, ſed prętęr diffinitiones ſunt etiam communes quędam notiones, quae in hoc libro ſumuntur nempe hae.

I.

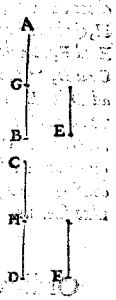
Eiuſdem ſiue ęqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.



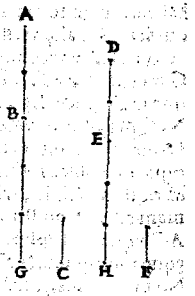
Sint quotcumque magnitudines AB CD quotcumque magnitudinum EF æqualium numero, ſingulæ ſingularum ęque multiplices. Dico quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices eſſe & AB CD ipſarum EF. Quoniam enim AB ęque multiplex eſt ipſius E, et CD ipſius F, quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi E, tot erũt et in CD æquales ipſi F. diuidatur AB quidem in partes ipſi E ęquales, quæ ſint AG GB: CD vero diuidatur in partes ęquales ipſi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipſarum AG GB. et quoniam AG eſt æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipſis E F. eadem ratione quoniam GB eſt æqualis E, et HD ipſi F, erũt et GB HD æquales ipſis EF. quot igitur ſunt in AB æquales ipſi E, tot ſunt et in AB CD æquales ipſis E F. ergo quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices erunt et AB CD ipſarum E F. ſi igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum ęque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius; totuplices erunt et omnes omnium. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta ſecundæ ęque multiplex, ac ſexta quartæ: erit etiam compoſita prima, et quinta ſecundę æque multiplex, ac tertia, et ſexta quartæ.

Prima

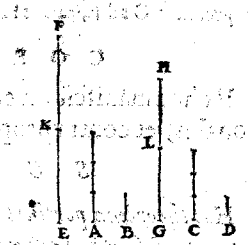
Prima enim AB ſecundæ C æque multiplex ſit, ac tertia DE quartæ F. ſit autem et quinta BG ſecundæ C æque multiplex, ac ſexta EH quartę F. Dico et compoſitam primam, et quintam AG ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam et ſextã DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex eſt C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales C, tot erunt et in DE æquales F. eadem ratione et quot ſunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur ſunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex eſt AG ipſius C, totuplex eſt et DH ipſius F. et compoſita igitur prima et quinta AG ſecundæ C æque multiplex erit, ac tertia et ſexta DH quartæ F: quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem et quinta ſecundę æque multiplex, ac ſexta quartę: erit compoſita quoque prima et quinta æque multiplex ſecundæ, ac tertia, et ſexta quartę. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima ſecundę æque multiplex fuerit, ac tertia quartę; ſumantur aũt æque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A ſecundæ B æque multiplex ſit, ac tertia C quartę D: et ſumantur ipſarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniã enim EF æque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipſi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipſarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipſarum GL LH. et quoniam æque multiplex eſt A ipſius B, ac C ipſius D; æqualis autem EK ipſi A, et GL ipſi C; erit EK æque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipſius B, et LH ipſius D. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL quartæ D; eſt autem et quinta KF ſecundæ B æque multiplex, ac ſexta LH quartę D: erit et compoſita prima et quinta EF ſecundæ B æque multiplex, ac tertia, et ſexta GH quartæ D. Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; ſumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod oſtendiſſe oportuit. Ex antece-dente.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si prima ad ſecundã eandem hẽt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primę, & tertię ad æque multiplices ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatę.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: et ſumantur ipſarũ quidem AC alię vtcumque æque multiplices E F; ipſarũ vero BD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Dico E ad G ita eſſe, vt F ad H. ſumantur enim rurſus ipſarum EF æque multiplices KL, et ipſarum GH æque multiplices M N. Qm igitur E æque multiplex eſt ipſius A, atq; F ipſius C; ſumuntur aũt ipſarum EF æque multiplices KL: erit K æque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. Eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. et quoniam eſt vt A ad B. ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarũ AC æque multiplices KL; et ipſarum BD alię vtcumque æque multiplices MN: ſi K ſuperat M, ſuperabit et L ipſam N; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. ſuntq; KL quidem ipſarum EF æque multiplices; MN vero ipſarum G H aliæ vtcumque æque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices ſecundę, ac quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter ſe comparatæ, quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Per conuerſam quintæ diffinitionis.

5. diffinit.

Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, et L ipſam N ſuperare; et ſi æqualis, æqualem eſſe, et ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, et N ſuperare ipſam L; et ſi æqualis, æqualem eſſe; et ſi minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita eſſe H ad F.

5. diffinit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi quattuor magnitudines ſint proportionales, et contra proportionales eſſe.

SCHOLIVM.

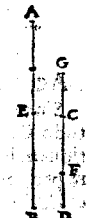
Hoc theorema pertinet ad demonſtrationem diffinitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, vt eſt quando æque multiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque multiplices ſecundæ, & quartæ, hoc eſt conſequentium, vel vnà ſuperant, vel vnà æquales ſunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonſtrat & ipſas eandem inter ſe proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione eſſe, quorum multiplicia ſunt in eadem proportione, quando nos idipſum quæreremus, quænam eſſent in eadem proportione. cum igitur dixiſſet in principio eas ſimul ſuperare, vel ſimul æquales eſſe, vel ſimul deficere; hic oſtendit & in eadem eſſe proportione, ſi inter ſe comparentur, vt appareat diffinitio earum, quæ ſunt in eadẽ proportione, quando ſcilicet æque multiplices primæ, & tertię ad ſecũdæ, & quartę æque multiplices eandẽ proportionem habeant. oſtendit aũt ipſas in eadẽ proportione per hoc, & per cõuerſionẽ,

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatę; et reliqua reliquę æque multiplex erit, atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD æque multiplex sit, atque ablata AE ablatę CF. Dico et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse, atque totam AB totius CD. quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat et EB ipsius CG. et quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE æque multiplex CF, et AB ipsius GF. ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, et AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB vtriusque GF CD; ac propterea GF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquę D F. Itaque quoniam AE æque multiplex est CF, et EB ipsius CG, estq; CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, et EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, et A B ipsius C D. ergo E B est æque multiplex FD, et A B ipsius C D. et reliqua igitur E B reliquę F D æque multiplex est, atq; tota A B totius CD. quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquę æque erit multiplex, atque tota totius. quod oportebat demonstrare.



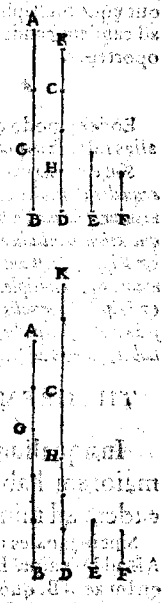
1. huius.

2. Com. not.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablatæ quędam sint earumdem æque multiplices; erunt et reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF æque multiplices sint, et ablatæ A G C H earumdem sint æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipsis EF æquales esse, vel ipsarum æque multiplices. sit enim primum GB æqualis E. Dico et HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK. et quoniam AG æque multiplex est E, et GH ipsius F; estq; GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F: erit AB æque multiplex E, et KH ipsius F. æque autem multiplex ponitur A B ipsius E, et CD ipsius F. ergo KH æque multiplex est F, et C D ipsius F. quoniam igitur vtraque ipsarum KH CD est æque multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur C H. ergo reliqua KC reliquę HD est æqualis. Sed KC est æqualis F. et HD igitur ipsi F est æqualis; ideoq; GB ipsi E, et HD ipsi F æquales erit. Similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, et H D ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablatę quædam sint earumdem æque multiplices, erunt et reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. quod demonstrare oportebat.



1. huius.

2. Com. not.

SCHOLIVM.

Non propositum est ostendere si à multiplici multiplex auferatur reli-

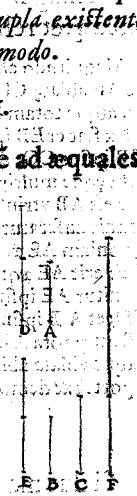
quum, vel æquale esse, vel multiplex; hoc enim manifestum est: sed duæ magnitudines ad duas magnitudines ita se habentibus, vt dictum est, si reliqua prioris sit multiplex, & reliquam alterius multiplicem esse; & si æqualis sit, esse æqualem, veluti si quadrupla existente tripla auferatur, reliqua æqualis erit, & in altera eodem modo.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Æquales ad eãdẽ, eãdẽ habẽt proportionẽ, & eadẽ ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: et C ad vtramque A B similiter eandem habere proportionem. sumantur enim ipsarum A B æque multiplices DE, et ipsius C alia vtcumque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, et E ipsius B, estq; A ipsi B æqualis; erit et D æqualis E. alia autem vtcumque est F. ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. et sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices: F vero alia vtcumque multiplex ipsius C. erit igitur vt A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad vtramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam F. si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. atque est F quidẽ ipsius C multiplex; DE vero aliæ vtcũque æque multiplices ipsarum A B. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, et eadem ad æquales. quod ostendere oportebat.

1. Com. not.
5. diffi.
5. diffi.

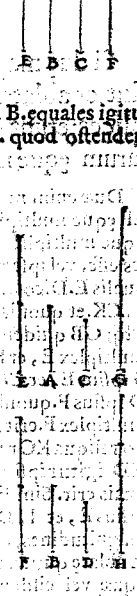


F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabimus, et æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines æquales A B; sintq; aliæ magnitudines inter se æquales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. sumantur ipsarum A B æque multiplices E F; & ipsarum C D aliæ vtcumque æque multiplices GH. Itaq; quoniam æque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B; est autem A æqualis B: erit & E ipsi F æqualis. rursus quoniam æque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D; estq; C ipsi D æqualis; & G ipsi H æqualis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; et si æqualis, æqualis; & si minor, minor. ergo A ad C eandem proportionẽ habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.

1. Com. not.
5. diffi.



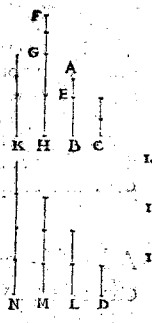
THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ.

Sint inæquales magnitudines AB C: et sit AB maior; alia vero vtcumque D. dico AB ad D maiorẽ habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere, quàm ad AB. quoniam enim AB maior est, quàm C, ponatur ipsi C æqualis BE. Itaque minor ipsarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit primum

4. diffin.

mum AE minor, quàm EB: et multiplicetur AE, quo ad fiat maior, quàm D: ſitq; ipſius multiplex FG, quæ ipſa D ſit maior: quotuplex autem eſt FG ipſius AE, totuplex fiat et GH ipſius EB, et K ipſius C. ſumaturq; ipſius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ ſumitur, multiplex fiat ipſius D, et primo maior, quàm K. ſumatur, ſitq; N ipſius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor eſt, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum æque multiplex ſit FG ipſius AE, et GH ipſius EB; erit et FG æque multiplex AE, et FH ipſius AB. æque autem multiplex eſt FG ipſius AE, et K ipſius C. ergo FH æque multiplex eſt AB, et K ipſius C; ac propterea FH K ipſarũ AB C æque multiplices erũt. rurſus quoniã GH æque multiplex eſt EB, et K ipſius C; eſtq; EB æqualis C: erit et GH ipſi K æqualis. Sed K non eſt minor, quàm M. non igitur GH minor eſt, quàm M. maior autem FG quàm D. ergo tota FH vtriſque DM maior erit. Sed vtræque DM ſunt æquales N; eſt enim M tripla ipſius D, et vtreque M D ipſius D quadruplæ. eſt autem et N quadrupla D. vtreque igitur M D ipſi N æquales ſunt. ſed FH maior eſt, quàm MD. quare FH ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat. et ſunt FH K æque multiplices ipſarum AB C: et N ipſius D alia vtcũque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. dico præterea et D ad C maiorem habere proportionẽ, quàm D ad AB. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare: atque eſt N multiplex ipſius D; et FH K aliæ vtcumque ipſarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionẽ habet, quàm D ad AB. Sed ſit AE maior, quàm EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et ſit GH multiplex quidem ipſius EB, maior vero, quã D. et quotuplex eſt GH ipſius EB, totuplex fiat et FG ipſius AE, et K ipſius C. ſimili rõne oſtendemus FH K ipſarũ AB C æq; multiplices eſſe. ſumatur deinde N multiplex D, primo aũt maior, quàm FG. ergo rurſus FG nõ eſt minor, quàm M; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH ſuperat DM, hoc eſt N; et K ipſam N non ſuperat: quoniam FG maior exiſtens, quàm GH, hoc eſt quàm K, non ſuperat N. et ſimiliter vt in iis, quæ ſuperius dicta ſũt, demõſtrationẽ abſoluemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionẽ, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ. quod oſtẽdere oportebat.

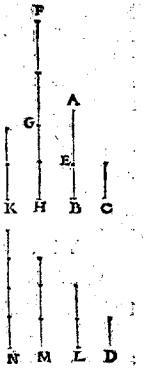


1. huius.

1. huius.

1. com. not.

7. diffin. ✲



SCHOLIVM.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. ✲ *quattuor ſunt magnitudines, prima quidem AB, ſecunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim ſumitur D, & vt ſecunda & vt quarta. atque eſt primae quidem AB multiplex FH: ſecundae vero D multiplex N, & tertiae C multiplex K. eſt igitur FH maior, quàm N; quae quidem N multiplex eſt ſecundae D: K vero multiplex tertiae C, minor eſt, quàm N, quae eſt multiplex quartae D. Itaque quoniã multiplex primae maior eſt multiplici ſecundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quae dicit, quando aeque multiplicium multiplex quidem primae ſuperauerit multiplicem ſecundae, multiplex autem tertiae non ſuperauerit multiplicem quartae, tunc prima ad ſecundam maiorem proportionem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

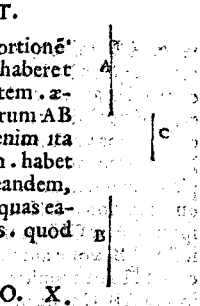
Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ habent, inter ſe æquales ſunt; et ad quas eadẽ, eã dẽ hẽt proportionẽ, ipſæ inter ſe ſunt æquales.

Habeat

Habeat enim vtraque ipſarum A B ad C eandem proportionẽ. Dico A ipſi B æqualem eſſe. nam ſi non eſſet æqualis, non haberet vtraque ipſarum A B ad C eãdem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad vtramque ipſarum A B eandem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita ſit, non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: et ad quas eadem eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.



THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eãdẽ ꝓportionẽ habẽtiũ quę maiorẽ ꝓportionẽ hẽt, illa maior eſt; ad quã vero eadẽ maiorẽ habet proportionem, illa minor eſt.

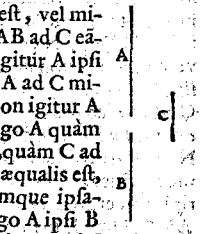
Habeat enim A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C. Dico A, quàm B maiorem eſſe. ſi enim non eſt maior, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B, vtraque enim ipſarum A B ad C eãdem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipſi B eſt æqualis. Sed neque minor eſt A quàm B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quàm B. atqui non habet minorem. non igitur A minor eſt, quàm B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualẽ. ergo A quàm B maior erit. Habeat rurſus C ad B maiorem proportionem, quàm C ad A. Dico B minorem eſſe, quàm A. ſi enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel maior. æqualis vtique non eſt B ipſi A; etenim C ad vtramque ipſarũ A B eandẽ proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed neque maior eſt B, quàm A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quàm A eſt maior. Oſtẽſum aũt eſt neque æqualẽ eſſe. ergo B minor erit, quàm A. Ad eandem igitur proportionẽ habẽtiũ quæ maiorẽ proportionẽ hẽt, illa maior eſt: et ad quam eadem maiorẽ habet proportionem, illa minor eſt. quod oportebat demonſtrare.

7. huius.

8. huius.

7. huius.

8. huius.



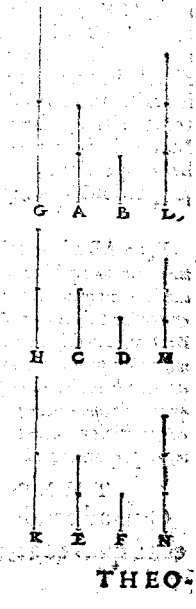
THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eędem ſunt proportiones, et inter ſe eędem ſunt.

Sit enim vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipſarum vero B D F alię vtcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita C ad D, et ſumptæ ſunt ipſarum A C æque multiplices G H, et ipſarum B D aliæ vtcumque æque multiplices L M; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt vt C ad D, ita E ad F, et ſumptę ſunt ipſarũ C E æque multiplices H K; ipſarũ vero D F aliæ vtcũque æque multiplices M N, ſi H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, et G ſuperabit L; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quare ſi G ſuperat L, et K ipſã N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. et ſunt G K quidem ipſarum A E æque multiplices; L N vero ipſarum B F aliæ vtcumque æque multiplices. ergo vt A ad B, ita erit E ad F. quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, et inter ſe eædem ſunt. quod oſtendiſſe oportuit.

Ex cõuerſa 5. diffi.

5. diffin.

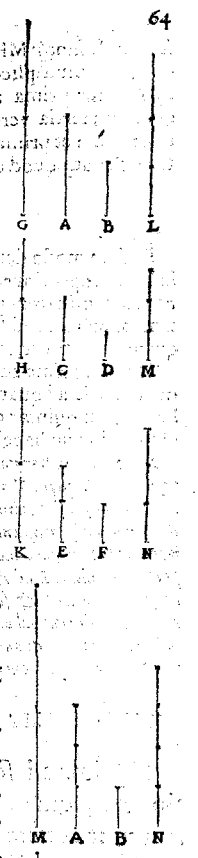


THEO-

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedẽtiũ ad vnã cõsequẽtiũ, ita erũt antecedẽtes oẽs ad omnes cõsequẽtes.

Sint quotcũque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B. ita esse ACE ad BDF. sumantur enim ipsarum A C E eque multiplices GHK, et ipsarũ BDF aliæ vtcũque æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita est C ad D, et E ad F: et sumptę sunt ipsarum quidem ACE æque multices GHK, ipsarum vero BDF aliæ vtcumque eque multiplices LMN; si G superat L, et H ipsam M superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare et si G superat L, superabunt et GHK ipsas LMN; et si equalis, equales; et si minor, minores. suntq; G, et GHK ipsarũ A, et A CE æque multiplices: quoniã si fuerint quotcũque magnitudines quotcũque magnitudinũ æqualiũ numero, singulæ singularũ æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erũt et oẽs omniũ. eadẽ ratione et L et LM N ipsarum B, et BDF sunt æque multiplices. est igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentiũ ad vnã consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. quod demonstrare oportebat.



Per conuersam 5. diffi.

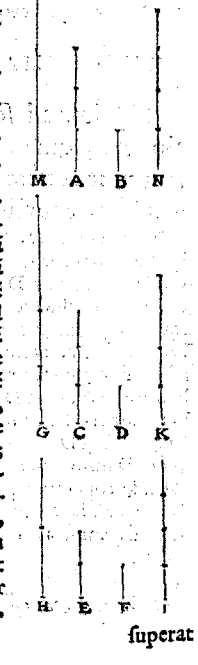
1. huius.

5. diffi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quàm quinta ad sextã: et prima ad secundã maiorẽ habebit proportionẽ, quàm quinta ad sextã.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quàm quinta E ad sextã F. Dico et primam A ad secundam B maiorem proportionẽ habere, quàm quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quàm E ad F, sunt quædã ipsarum CE æque multiplices, et ipsarum D F aliæ vtcumque æque multiplices: et multiplex quidem C superat multiplicẽ D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur, et sint ipsarum CE æquemultiplices GH, et ipsarum DF aliæ vtcumque æquemultiplices KL, ita vt G quidem superet K; H vero ipsam L non superet: et quotuplex est G ipsius C, totũplex sit et M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit et N ipsius B. et quoniam est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum AC æquemultiplices MG, et ipsarum BD aliæ vtcumque æque multiplices NK: si M superat N, et G ipsam K superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non



Per conuersam 7. diffi.

Per cõuersã 5. diffi.

superat

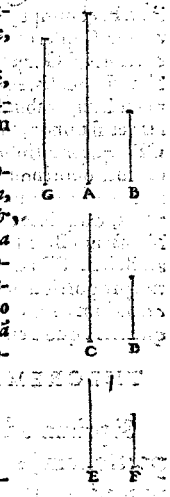
superat L. suntq; MH ipsarum AE æque multiplices; et NL ipsarum B F alias vtcum
7.diffi. que æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionē habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabitur si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad sextam: et primam ad secundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad sextam.

Quòd si prima ad secundam maiorem habeat proportionē, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam.

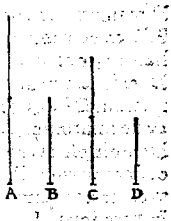
Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem,
8.huius *quàm E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quàm A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D, & C ad D maiorem habet proportionem, quam E ad F: habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. & similiter demonstrabitur si prima ad secundam minorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartā habeat minorem, quàm quinta ad sextam: & primam ad secundam minorem habere proportionem, quàm quintam ad sextam.*



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: maior autem sit A quàm
8.huius. C. dico et B quàm D maiorem esse. quoniam enim A maior est quā C, et alia vtcūque magnitudo B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad
Ex antece- dente. D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C
10.huius. ad B. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. quare D est minor, quàm B: ac propterea B quā
A D maior erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C; et B ipsi D esse æqualem: et si A sit minor, quàm C; et B
B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda, quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

Hoc lemma est sextidecimi theorematis, quemadmodum vigesimum

mum est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertij.

F. C. COMMENTARIVS.

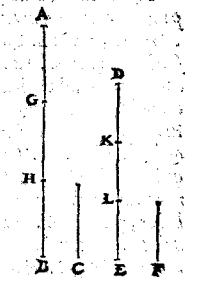
Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem.] *Quoniam enim A est aequalis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem habet proportionem ipsae aequales sunt. ergo B ipsi C est aequalis.* A 11. huius. 9. huius.

Et si A sit minor, quàm C, et B quàm D minorem esse,] *nam cum A minor sit, quàm C; habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecedente & C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quàm D minor erit.* 8. huius. B 10. huius.

TEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se cõparatę eandem habent proportionem.

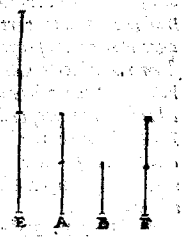
Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipsius F. Dico vt C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, et DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB. et DE diuidatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE. erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. et quoniam æquales sunt AG GH HB, suntq; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F. ergo vt C ad F, ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem. quod ostendendum fuit.



✲ 1. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] *Ex ea, quam nos ad septimam huius, addidimus.*

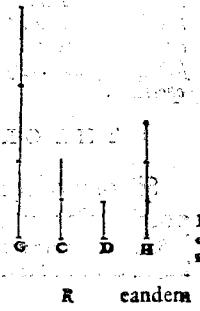


✲

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur enim ipsarũ quidem AB æque multiplices EF; ipsarum vero CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. et quoniam æque multiplex est E ipsius A, et F ipsius B; partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eãdem habent proportionem: erit vt A ad B, ita E ad F: vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rursus quoniam GH sunt ipsarum CD æque multiplices; partes autem eodem modo multiplicium



Ex antecedente. 11. huius.

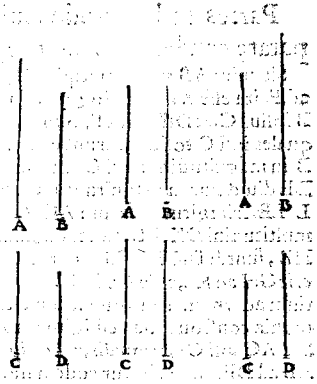
R eandem

eandem proportionem habent inter se comparatæ, erit vt C ad D, ita G ad H. sed
14.huius. vt C ad D, ita E ad F. ergo et vt E ad F, ita G ad H. Quod si quattuor magnitudines proportionales sint, prima autem maior sit, quàm tertia; et secunda quàm quarta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat G, et F ipsam H superabit, et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntq; EF ipsarũ AB æque mul
5.diffi. tiplices, et CH ipsarũ CD alię vtcunque æque multiplices. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatę proportionales erunt. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae demonstrata sunt, illud quoque demonstrabitur.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; sitq; prima maior, quàm secunda; et tertia, quàm quarta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.



Prima enim A ad secundam B eandem habeat proportionem, quàm tertia C ad quartam D: & sit A maior, quàm B. Dico & C quàm D maiorem esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quam B ad D. Rursus quoniam A maior est quam B, alia vero vtcũque est C; habebit A ad C maiorem proportionem,
8.huius. *quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita est B ad D, quod demonstratum est. ergo B ad D maiorem proportionem*
10.huius. *habet, quàm ad C. Ad quam vero eadem maiorem habet proportionẽ, illa minor est. quare D minor est, quàm C; ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A aequalis ipsi B. dico & C ipsi D aequalem esse. nam cum A*
7.huius. *& B sint aequales. habebit A ad C proportionem eãdem, quam B ad C. vt autem A ad C, ita B ad D. ergo B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad*
9.huius. *quas vero eadem proportionem eãdem habet, illae aequales sunt. ergo C ipsi D est aequalis. Sit postremo A minor, quàm B. Dico & C, quàm D minorem esse. quoniam enim A minor est quam B,*
8.huius. *habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad C maiorem proportionem habebit, quàm ad*
10.huius. *D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor est. ergo C quàm D minor erit. si igitur prima ad secundam eandem proportioaem habeat, quam tertia ad quartam: sitq; prima maior, quàm secunda, & tertia, quàm quarta maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.*

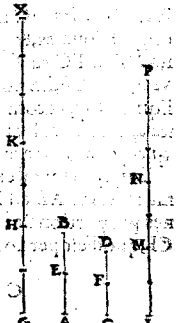
ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: sitq; A maior, quàm B. Dico & C, quã D maiorẽ esse. Quoniã enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D. sed A maior est quàm B. ergo ex 14 huius & C, quàm D maior erit. Eodem modo demonstrabimus si A sit aequalis B, & C ipsi D esse aequalem. & si A sit minor, quàm B, & C quàm D minorem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XVII.

Si compositę magnitudines sint proportionales, et diuisæ proportionales erunt.

Sint compositę magnitudines proportionales AB BE CD DF. sitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuisas proportionales esse, videlicet vt AE ad EB, ita

ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. et quoniã æque multiplex est GH ipsius AE, et HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque multiplex, et GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, et LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, et LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, et MN ipsius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipsius CD. Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB. æq; igitur multiplex est GK ipsius AB, et LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, et MN ipsius FD; est autem et KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD: & composita HX ipsius EB æque multiplex est, et MP ipsius FD. quòd cùm sit vt AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN; ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices HX MP; si GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communiq; ablata HK, et GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN ipsam MP, communiq; MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. Similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt. quod demonstrare oportebat.

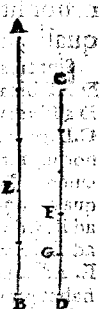


1. huius.
11. huius.
2. huius.
11. huius.
2. huius.
ex conuers. 5. diffi.
5. diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisę magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam cõpositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm DF, vel ad maiorẽ. sit primũ ad minorẽ, nempe ad DG. & quoniam est vt AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales. ergo et diuisæ proportionales erunt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur aũt & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quã tertia CF. ergo & secũda DG, quàm quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad maiorem, quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.



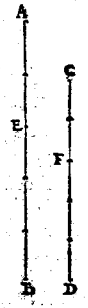
Ex antecedente. 11. huius. 14. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquã

EB ad reliquam FD ita esse, vt totam AB ad totam CD. quoniã enim
16.huius. est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & permutando erit vt EB
AB ad AE, ita DC ad CF. et quoniam compositæ magnitudines sunt
17.huius. proportionales, & diuisæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA,
ita DF ad FC, rursusq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. sed
21.huius. vt AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad re
liquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare si fuerit vt tota ad totã,
ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam, erit vt tota ad totam.
quod demonstrare oportebat.



Et quoniam ostensum est vt AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit per
mutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudi-
nes proportionales sunt. ostẽsum autem est vt BA ad AE, ita DC ad
CF, quod est per conuersionem rationis.

COROLLARIVM.

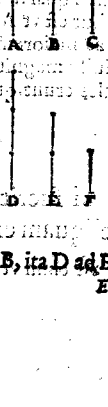
Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales; & per cõuersionem rationis proportionales esse.

Factę autem sunt proportiones et in æque multiplicibus, et in analogijs. nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartę; erit et vt prima ad secundã, ita tertia ad quartam. sed non item ex contrario cõuertitur. Si enim sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam, nõ omnino erit prima quidem secundę æque multiplex, tertia vero quartæ, velut in sesquialteris, vel in sesquitertijs proportionibus, vel alijs eiusmodi. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. XX. PROPOSITIO. XX.

Si sint tres magnitudines, et alię ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales
D E F binæ sumptę, et in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita
D ad E; et vt B ad C, ita E ad F; ex æquali autem maior sit A, quã
C. Dico et D quàm F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si mi
nor, minorem. Quoniam enim A maior est, quàm C, alia vero vt-
8.huius. cumque B, et maior ad eandem maiorem habet proportionem,
A quàm minor: habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C
ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F
ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad
10.huius. E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem
B habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quàm F. si
militer ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse;
et si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ
ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

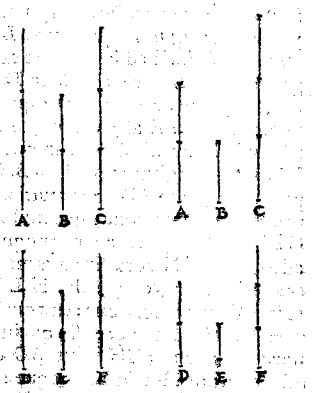
A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita D ad E]

Ex

Ex his sequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quàm C ad E. vt autem C ad E; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad E.

Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse, et si minor, minorem.

Si enim A sit aequalis C, habebit A ad E proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quæ vero ad eandē, eandem habent proportionem, inter se aequales sunt. ergo D ipsi F est aequalis. Quòd si A ponatur minor quàm C, habebit A ad B proportionem minorem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quàm C ad B. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorē proportionē, quàm F ad E; ac propterea D quàm F, minor erit.

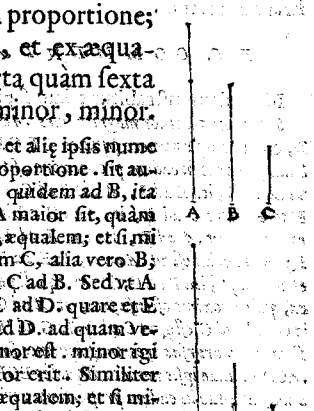


7.huius.
11.huius.
9.huius.
8.huius.
13.huius.
10.huius.

THEOREMA XXI.
PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quę binę sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior sit quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A B C, et aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ, et in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidem ad B, ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A maior sit, quàm C. Dico et D quàm F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim maior est A, quàm C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, et conuertendo vt C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quàm E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. minor igitur est F, quàm D; ac propterea D quàm F maior erit. Similiter ostendemus et si à sit æqualis C, et D ipsi F esse æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earū analogia, et ex æquali prima maior sit, quàm tertia, et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

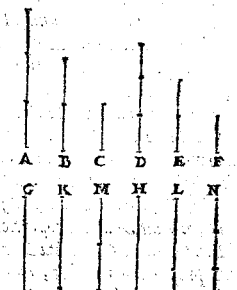


8.huius.
10.huius.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt.

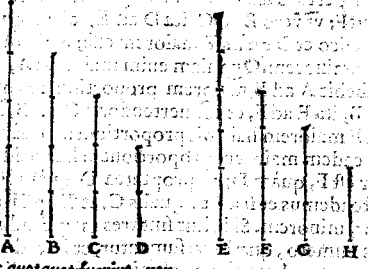
Sint quotcumque magnitudines A B C, et aliæ ipſis numero æquales DEF binę ſumptæ in eadem proportione, ſitq́; ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eadem proportione eſſe vt A ad C, ita D ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A D æque multiplices G H; ipſarum vero BE alię vtcumque æque multiplices KL, et ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices MN. Quoniã igitur eſt vt A ad B, ita D ad E, et ſumptę ſunt ipſarum AD æque multiplices G H, et ipſa-
4. huius. rum BE alię vtcumque æque multiplices K L; erit vt G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit vt K ad M, ita L ad N. et cũ ſint tres magnitudines GKM, et aliæ ipſis numero æquales H L N, binæ ſumptæ,
2o. huius. et in eadem proportione; ex æquali ſi G ſuperat M, et H ipſã N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq́; GH ipſarũ AD æq; multiplices, et MN ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices.
5. diffi. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare ſi ſint quotcumque magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binę ſumantur, in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem demonſtrabitur etiam ſi plures ſint, quàm tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABC D, & aliae ipſis numero æquales EFGH binae ſumptae in eadem proportione, ſitq́; vt A ad B, ita E ad F, ut aũt B ad C, ita F ad G, et vt C ad D, ita G ad H. Dico ex aequali ut A ad D, ita eſſe E ad H. Quoniam enim eſt vt A ad B, ita E ad F, et vt B ad C, ita F ad G; & ex aequali per ea, quae proxime oſtẽnſa ſunt, vt A ad C, ita erit F ad G, eſtq́; vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rurſus tres magnitudines ſint ACD, et aliae ipſis numero aequales EGH binae ſumptae in eadem proportione; erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. quod demonſtrare oportebat. & eodẽ modo demonſtrabitur in alijs eiuſmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non ſolum in ordinata analogia, ſed et in perturbata. ſemper enim ad tres magnitudines eiuſdem ordinis ſimiliter reducentur.

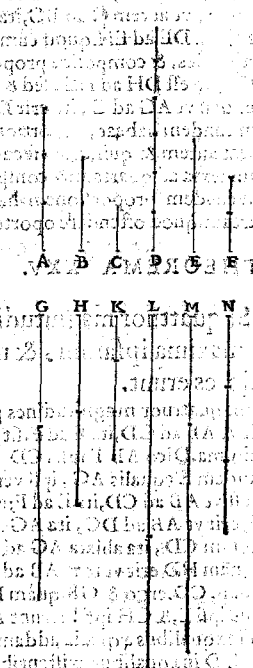


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eadem proportione erunt

Sint

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipſis numero æquales binæ ſumptæ in eadem proportione D E F; ſit autem perturbata earum analogia, et ſit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E. Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F. ſumantur ipſarum quidem A B D æque multiplices GHK; ipſarum vero CEF aliæ vtcumque æque multiplices L M N. & quoniam GH æque multiplices ſunt ipſarum A B; partes autem eodem modo multiplicium eadem habent proportionem; erit vt A ad B, ita G ad H. & ſimili ratione vt E ad F, ita M ad N. atque eſt vt A ad B, ita E ad F. vt igitur G ad H, ita M ad N. rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum B D æque multiplices H K; ipſarum vero C E aliæ vtcumque æque multiplices L M; erit vt H ad L, ita K ad M. oſtenſum autem eſt et vt G ad H, ita eſſe M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales ſunt G H L, & aliæ ipſis numero æquales K M N binæ ſumptæ in eadem proportione, eſtq; ipſarum pertubata analogia; ex æquali ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſunt autem GK ipſarum A D æque multiplices; & LN æque multiplices ipſarum CE, vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit aũt perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt. quod demonſtrare oportebat.



A 15.huius. 11.huius. B 4.huius. 21.huius. 5.diff.

F. C. COMMENTARIVS.

Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F] *in græco codice impreſſo hæc deſiderantur.* Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ζ

A

Erit vt H ad L, ita K ad M, oſtenſum autem eſt vt G ad H, ita eſſe M ad N] *hoc loco in græco codice impeſſo, & in Zamberti verſione multa inſeruntur ſuperuacanea, quæ à nobis conſulto omiſſa ſunt.*

B

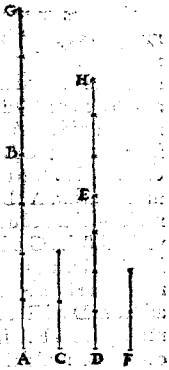
THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & ſexta ad quartam.

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem & quinta BG ad ſecundam C proportionem eandem, quam ſexta EH ad quartam F. dico & compoſitam primam, & quintam AG ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam DH ad quar

tam

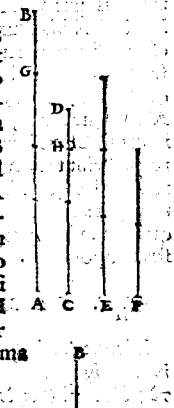
tam F. quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est
11.huius. DE ad F, vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex æquali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quòd cum diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. vt igitur AG
A ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secũdam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia & sexta ad quartam. quod ostendere oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F; & sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. Dico AB F ipsis CD E maiores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; estq; AG æqualis E, & CH æqualis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB
19.huius. ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem est AB, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsis CH E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si ipsi quidem GB addantur AG F, ipsi vero HD addantur CH E, fient AB F ipsis CD E necessario maiores. Si igitur quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima
A duabus reliquis maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

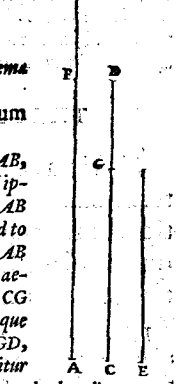


F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonstrata sunt, possumus etiam illud theorema demonstrare.

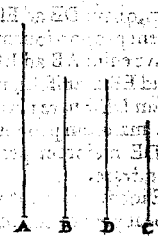
Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

Sint tres magnitudines propartionales AB CD E, quarum maxima AB, sitq; vt AB ad CD, ita CD ad E. Dico AB E maiores esse, quàm duplam ipsius CD. ponatur AF aequalis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad to
19.huius. *tam, & ablata ad ablatam. quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB ad CD. sed AB ponitur maior, quàm CD. ergo & FB, quàm GD est maior. aequalis autem est AF ipsi CD, & CG ipsi E. Sunt igitur AF E ipsis CD CG aequales. quòd si inequalibus aequalia addantur, tota inaequalia erunt. itaque additis AF E ipsi FB, quę maior est, quàm GD, & additis CD CG ipsis GD, fient AB E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarum & minima, quàm dupla reliquae maiores erunt. quod demonstrare oportebat.*



Aliter.

Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC, & ipsi B ponatur æqualis D. Itaque quoniam est vt A ad B, ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. Sunt igitur quattuor magnitudines proportionales ABDC. quare ex iam demonstratis AC maiores erunt, quàm B D, hoc est quàm ipsius AB dupla.

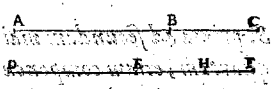


Hæc Euclides de proportionibus scripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apollonius, & alij posteriores nonnullis theorematibus, quæ ad huiusmodi tractationem pertinent, tanquam demonstratis vtuntur; optimum fore iudicauimus, si ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibusdam additis, datractisue, prout res ipsa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; & conuertendo secunda ad primam minorem proportionem habebit, quàm quarta ad tertiam.

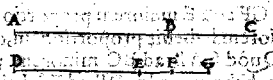
Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita sit DE ad aliam aliquã, vt ad G. ergo DE ad G maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. ac propterea G minor erit, quàm EF. ponatur ipsi G æqualis EH. Quoniam igitur est vt AB ad BC, ita DE ad EH, erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. sed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED. quod demonstrare oportebat.



5. huius.

5. huius.

Similiter autem & si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, demonstrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. sed vt AB ad BC, ita sit DE ad aliam, vt ad EG, quæ maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED.



5. huius.

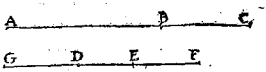
COROLLARIUM.

Ex his constat, si AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad BA. & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

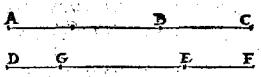
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE



8.huius. sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse, 8.huius. quàm DE. quare permutãdo vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.

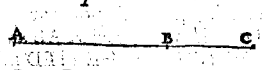
Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quedam GE ad EF, quę minor sit, quam DE. Sed AB ad DE minorẽ habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem, proportionem, quàm BC ad EF.



THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

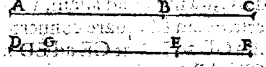
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorẽ proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE. vt enim AB ad BC, ita sit alia quędam



8.huius. GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniã 18.huius. igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componẽdo vt AC ad CB, ita GF ad FE. 8.huius. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB 19 huius. maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonstrare oportebat.

Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componẽdo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rursus enim quoniam

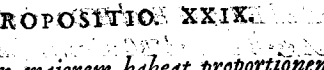


8.huius. AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF ad FE, ita sit alia quę-

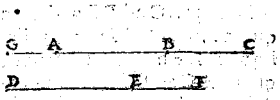


8.huius. dam GC ad CB. erit vtique GC minor,

quàm

quàm AC: & diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17.huius. 13.huius.

Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. si enim rursus sit vt DF ad FE, ita alia quædam GC ad CB; erit GC quàm AC maior: atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF.

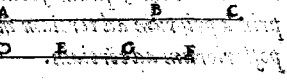


8.huius. 17.huius.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

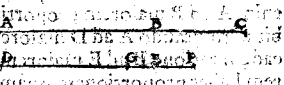
Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. sit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quãdam; erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. sed FD ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE.



Corol.19.huius.

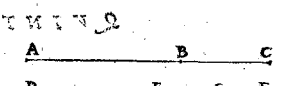
Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE, habebit per conuersionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam & quartam.

Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportionẽ habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est; vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & si minor sit proportio partis, totius maior erit.



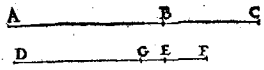
21.huius. 8.huius.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam

tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Habeat AC ad DF maiorem proportionẽ, quàm AB ad DE Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG. ergo et reliqua BC ad reliquam GF est vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.



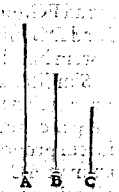
19.huius.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo supra, modo ostendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatque prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniã enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habebit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. et rursus permutando A ad C maiorẽ habebit, quàm D ad F. quod oportebat demõstrare.



27.huius.

Ex demonstratis ad 13.huius.

27.huius.

Quòd si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secũda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm secũda posteriorum ad tertiam: similiter demõstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam posteriorum ad tertiam.

QVINTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS

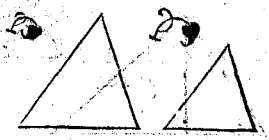
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

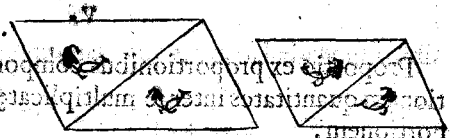
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

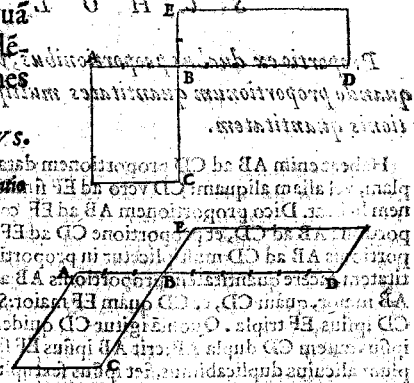
IMILES figurę rectilineæ sunt, quę et singulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.





II.

Reciprocę figuræ sunt, quãdo in vtraque figura antecedentes, et consequentes rationes fuerint.



F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & consequentes rationes intellige antecedentes, & consequentes proportionis terminos: vt si sint duo rectangula ABC, DBE, sitq; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hae figurae reciprocae, scil. ex contraria parte sibi ipsis respondentes: quoniã in altera quidem est terminus antecedens primae proportionis, videlicet AB, et consequens secundae BC; in altera vero est consequens primae BD, & antecedens secundae EB. sunt autem dictae figurae etiam inter se aequales, ut deinceps ostendetur.

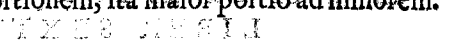
Extrema

III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

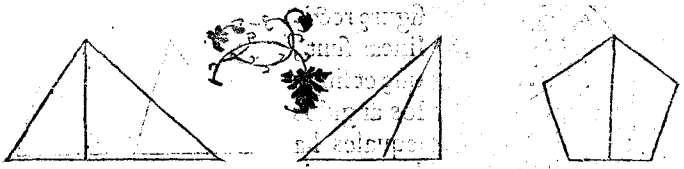
F. C. COMMENTARIVS.

Extrema ac media ratione secari recta linea idcirco dicitur, quòd secetur in duas partes, quæ proportionis termini sunt, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita diuisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et BC extremus.



IIII.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



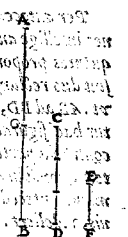
V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

SCHOLIVM.

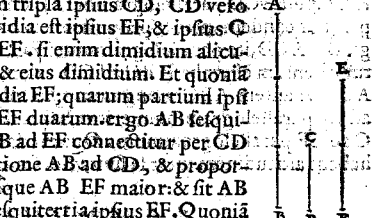
Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

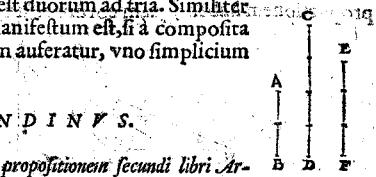
Habeat enim AB ad CD proportionem datam, vt duplam, vel tri
plam, vel aliam aliquam: CD verò ad EF similiter datam proportio
nem habeat. Dico proportionem AB ad EF compositam esse ex pro
portione AB ad CD, et proportione CD ad EF; vel si quantitas pro-
portionis AB ad CD multiplicetur in proportionis CD ad EF quan
titatem, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primũ
AB maior, quàm CD, et CD quàm EF maior: Sitq; AB dupla CD, et
CD ipsius EF tripla. Quoniã igitur CD quidem ipsius EF tripla est,
ipsius autem CD dupla AB; erit AB ipsius EF sextupla: quoniã si tri-
plum alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc enim proprie
est compositio. vel hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est dupla, di-
uidatur AB in partes æquales ipsi CD, quæ sint A G, G B. et quo-
niam CD est tripla EF, æqualis autẽ A G ipsi C D, erit A G ipsius EF



tripla.

tripla. ideoq; tota AB ipsius EF sextupla est. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminũ CD; composita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Similiter autem & si CD sit vtrisque AB EF minor, idẽ concludetur. Sit enim rursus AB quidem tripla ipsius CD, CD vero ipsius EF dimidia. & quoniam CD dimidia est ipsius EF, & ipsius CD tripla AB; erit AB sesquialtera ipsius EF. si enim dimidium alicuius triplicabimus, habebit ipsum semel, & eius dimidium. Et quoniã AB ipsius CD est tripla, CD vero dimidia EF; quarum partium ipsi CD æqualium AB est trium, earum est EF duarum. ergo AB sesquialtera est ipsius EF. proportio igitur AB ad EF cõnectitur per CD medium terminum, cõposita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rursus sit CD vtrisque AB EF maior: & sit AB quidem ipsius CD dimidia, CD vero sesquitertia ipsius EF. Quoniã igitur quarum partium est AB duarum, earum CD est quattuor: quarum autem CD est quattuor, earum EF est trium: & quarum AB duarum, earumdem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rursus connectitur per CD medium terminum; quę est duorum ad tria. Similiter et in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, si à composita proportione vnus quiuis componentium auferatur, vno simplicium electo, reliquos componentium assumi.





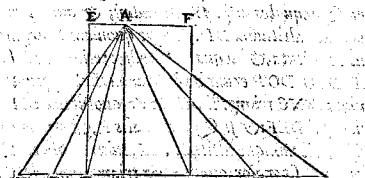
FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphæra & Cylindro, & in commentarijs in vndecimam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem, inter se sunt, vt bases.

Sint triangula quidẽ ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico vt basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur enim BD ex vtraque parte ad puncta H L, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponãtur quotcũq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iungãtur. 38. huius.



Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triãgula AHG AGB ABC inter se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: et si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. Quattuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æquemultiplicia, basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet basis HC, & AHC triãguli: basis vero CD, & trianguli ACD, alia vtcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum: atque oftensum

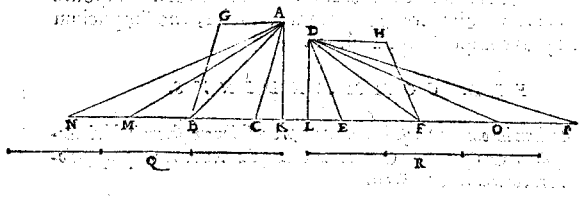
sum est si HC basis basim CL superat, & triangulū AHC superare triangulū AL C; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur vt BC basis ad basim CD, ita triangulū ABC ad ACD triāgulū. Et qm triāguli ABC duplū est parallelogrāmū EC, & triāguli ACD parallelogrammū FC duplum; partes autem eodem modo multiplicium eandem inter se proportionem habent: erit vt ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, vt basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum: erit vt BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases. quod demonstrare oportebat.

5. diffi. quinti.
41. primi.
15. quinti.
11 quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum est, quod demonstrare hoc loco non putasti esse alienum.

Triangula & parallelogramma in æqualibus basibus constituta, eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines.



Sint duo triangula ABC, DEF, & duo parallelogramma CG EH, quæ æquales bases habeāt BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo sit AK: & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita esse & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF, & ponantur basi BC æquales quotcunque BM MN: & basi EF æquales quotcunque FO OP, iungantur AM AN DO DP: quot vero magnitudines sunt in CN æquales basi CB, tota sumantur in linea Q æquales ipsi AK altitudini; & quot sunt in EP æquales basi EF, tot sumantur in linea R æquales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC sunt in æqualibus basibus constituta, & æquali altitudine; etiam inter se æqualia erunt. & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter se æqualia. Quotuplex igitur est linea Q ipsius AK, totuplex est triāgulum ANC trianguli ABC: & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE trianguli DEF: & si Q sit æqualis R, & triangulum ANC triangulo DPE æquale erit, ex præmissa; erit namque altitudo AK, cuius tripla est Q æqualis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla. si vero Q sit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE; et si minor, minus. triangulorum enim æquales bases habentium, quæ maiori sunt altitudine, etiam maiora sunt, alioquin sequeretur totum parti æquale esse. Cum igitur quattuor sint magnitudines, videlicet duæ altitudines AK DL, & duo triangula ABC DEF: & sumpta sint æque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & trianguli DEF; alia vtcunque multiplicia: & ostensum sit si linea Q superat R, & triangulum ANC superare triangulum DPE, & si æqualis, æquale; & si minor, minus: erit vt altitudo HA ad altitudinē DL, ita triangulū ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplum est CG parallelogrammum, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem: erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF. Sed ostensum est vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita esse triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita est parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in æqualibus basibus constituta eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines. quod demonstrare oportebat.

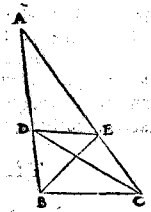
Ex antecedente.

5. dif. quinti.
41. primi.
15. quinti.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.



Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habẽt proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triãgulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vti bases. & ob eandem causam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sunt, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. ijsdem enim constructis, quoniam est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autẽ BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulũ ADE; et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. Quòd cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem, erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiã in eisdem sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triãguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniũgit recta linea reliquo triãguli lateri parallela erit. quod oportebat demonstrare.

37. primi.
7. quinti.
Ex antecedente.
11. quinti.
11. quinti.
9. quinti.
40. primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

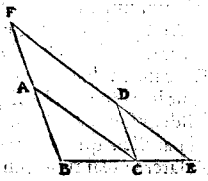
Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. Dico vt BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur enim per C ipsi DA parallela CE, & producta BA conueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædã AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea BA E incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC. ostensus aũt est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC

9. primi.
31. primi.
29. primi.

6.primi. Ex antecedente. 7.quinti. Ex antecedente. 9.quinti. 29.primi. æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. Et quoniam vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita BA ad AE: æqualis aũt est AE ipsi AC. est igitur vt BD ad DC, ita BA ad AC. Sed sit vt BD ad DC, ita BA ad AC: & AD iungatur. Dico angulũ BAC bifariã sectũ esse recta linea AD. ijsdem enim constructis quoniam est vt BD ad DC, ita BA ad AC; Sed & vt BD ad DC, ita BA ad AE, etenim vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD: erit & vt BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est æqualis AE, ac propterea & angulus AEC angulo ECA æqualis. Sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eãdem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Aequiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt: et homologa siue eiusdẽ rationis sunt latera, quę æqualibus angulis subtenduntur.



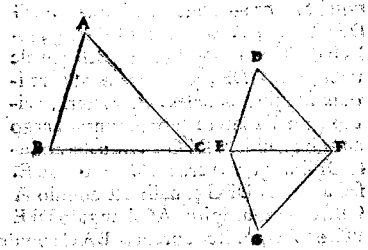
Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulũ quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant: et præterea angulũ BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos, et homologa, siue eiusdem rationis latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus 17.primi. rectis minores sunt: æqualis aũt est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conuenient. producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus 28.primi. DCE est æqualis angulo ABC; erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur 34.primi. 2.huius. est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est æqualis. Et quoniam vni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit 7.quinti. vt BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. Vt igitur BA ad CD, ita BC ad CE: et permutando vt AB ad BC, ita DC ad CE. Rursus quoniam CD 2.huius. parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita FD ad DE. Sed DF est æqualis AC. ergo vt BC ad CE, ita AC ad ED. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam ostensum est, vt AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos: et homologa, siue eiusdem rationis latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitq; ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; vt autem BC ad CA, ita EF ad FD; et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. constituatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC



æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est æqualis. Ideoq; æquiangulum est triangulum A B C triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, et homologa latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt A B ad B C, ita D E ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quòd cum vtraque ipsarum D E EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione et D F æqualis F G. Itaque quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF, duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, et basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF, et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED est æqualis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis est angulo DFE: et adhuc anguli ad A angulo ad D: ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebũt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod oportebat demonstrare.

23. primi.

Ex antecedente.

11. quinti.

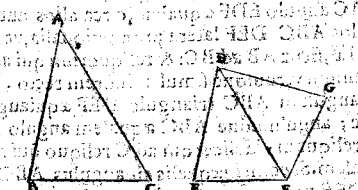
9. quinti.

8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æquale habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, sitq; ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo D EF; angulum uero ACB angulo DFE. constituatur enim ad rectã lineam DF, et ad puncta in ipsa DE, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus F D G. angulo autem A C B æqualis DFG, reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G est æqualis, ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea vt BA ad AC, ita est GD ad DF, ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF, quare ED æqualis est ipsi DG; & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF



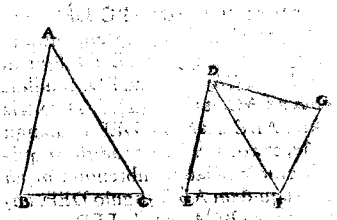
32. primi.

4. huius.

11. quinti.

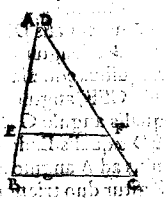
9. quinti.

æquales ſunt: & angulus EDF angulo G
4.primi. DF eſt æqualis. baſis igitur EF eſt æqua-
lis baſi FG: triangulumq; DEF æquale
triangulo GDF, & reliqui anguli reli-
quis angulis æquales, alter alteri, qui-
bus æqualia latera ſubtenduntur. ergo
angulus quidem DFG eſt æqualis angu-
lo DFE, angulus vero ad G angulo ad E.
ſed angulus DFG æqualis eſt angulo A
CB. & angulus igitur ACB angulo DFE
eſt æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reliquus
qui ad B æqualis reliquo qui ad E. æquiangulum igitur eſt triangulum ABC trian-
gulo DEF. Quare ſi duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant,
circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, &
æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur, quod oſtendere
oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

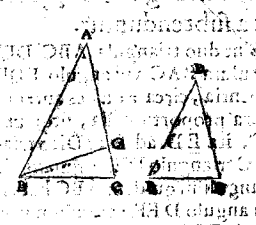
Sunt qui hoc etiam aliter demonſtrẽt. Nam impoſito latere DE la-
teri AB, cadet D F in AC, quoniam angulus ad punctum D angu-
lo ad A eſt aequalis. Vel igitur D F eſt aequale ipſi AC, vel inæ-
4.primi. *quale. & ſi quidem aequale, erit & BF aequale AC. ergo & baſis*
EF baſi BC, & reliqui anguli reliquis angulis aequales. Si vero DF ſit
inæquale ipſi AC, ſit vtrumuis ipſorum maius; verbi cauſſa AC, tunc
2.huius. *erit B A ad AC, ſic ED ad DF. ergo permutando vt BA ad AE; ſic C*
29.primi. *A ad AF: & dividendo vt BE ad EA, ſic CF ad FA. quare latus EF*
parallelum eſt lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, & an-
gulus AFE angulo ACB eſt aequalis. quod oſtendiſſe oportuit.



THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proporrionalia, & reliquorum vtrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, vnum angulũ
vni angulo æqualem habentia, videlicet angulũ
BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem an-
gulos ABC DEF latera proportionalia, vt ſit DE
ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum qui ad CF
primum vtrumque ſimul minorem recto. Dico
triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum
eſſe; angulumque ABC æqualem angulo DEF,
& reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æ-
qualem. Si enim inæqualis eſt angulus ABC angu-
23.primi. lo DEF, vnus ipſorum maior erit. Sit maior ABC: & conſtituatur ad rectam lineam
AB, & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG. Et quoniam an-
gulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus
4.huius AGB reliquo DFE æqualis. æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DE
F. quare vt AB ad BG, ſic DE ad EF: vtq; DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC. & vt
igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. Quod cum AB ad vtramque BC BG eandem ha-
beat

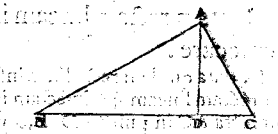


beat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC. minor autē recto ponitur angulus, qui ad C. ergo & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F. angulus igitur qui ad F recto maior est. atqui ponitur minor recto, quod est absurdū. nō igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autē & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur vterque angulorum, qui ad C F non minor recto. Dico rursus & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. ijsdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem. sed angulus qui ad C non est minor recto. nō minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores. quod fieri nō potest. nō igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF. ergo æqualis necessario erit. est autē & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis. ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. quod oportebat demonstrare.

9.quinti. 5.primi. 15.primi. 17.primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim vterque est: et angulus qui ad B communis duobus triangulis ABC ABD: erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare vt BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulū æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: et adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis, ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est, et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare vtrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed et BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo vt BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur: quæ ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se, similia sunt. quod oportebat demonstrare.

4.huius. 1.diffi.huius

COROL-

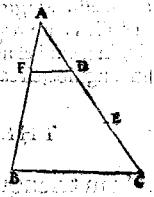
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam basis partium mediam proportionalem esse: et adhuc basis et vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia: et ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturq; in AC quod vis punctum D, et ipsi AD equales ponantur DE, EC. deinde iungatur BC, et per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniã vni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est FD; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est GD ipsius DA: ergo et BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. quod facere oportebat.

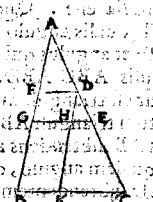


2. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC, oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D, E, & ponantur ita, vt angulũ quem vis contineant, iunctaq; BC, per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducantur DF, EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est vtrumque ipsorum FH, HB: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE, erit vt CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est vt CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF. & vt ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. quod facere oportebat.



iuiud.

34 primi.

2. huius.

iuiud.

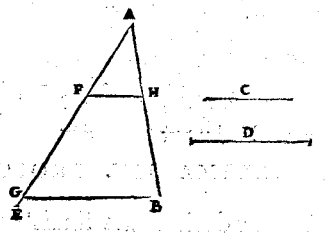
F. C. COMMENTARIVS.

Huic non dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

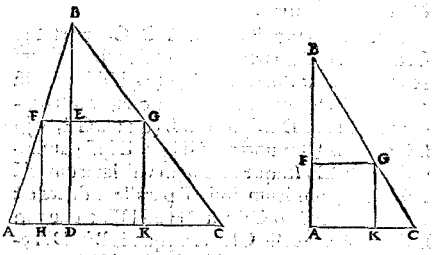
Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE, & ipsi quidem C æqualis abscindatur AF, ipsi vero D æqualis FG: & iuncta

iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita est AF ad FG: est aũt AF equalis C, & FG ipsi D: erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secta est ad punctum H in proportionem C ad D. quod facere oportebat. 2.huius.



Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sunt, licebit problema absoluere, quod ad quartam propositionẽ quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triãgulo quadratũ describere.



Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datũ triangulum acutiangulum est, vel rectangulum, vel obtusiangulum. Sit primũ acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD: & ex premissa diuidatur BD in puncto E, ita vt DE ad EB eandẽ proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH, GK parallelæ ipsi BD. Quoniam igitur in triangulo ABD ducta est FE ipsi AD parallela. erit angulus BEF angulo BDA æqualis; & angulus BFE æqualis 29.primi.
angulo BAD: atque est angulus FBE vtrique communis. ergo FBE triangulum triangulo ABD æquiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum EBG æquiangulum ipsi DBC. Vt igitur AD ad DB, ita est FE ad EB, & vt BD ad DC, ita BE ad EG. quare ex æquali vt AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo vt AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendo, vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC ita est BE ad EG. ergo ex æquali, vt BD ad AC, ita BE ad FG. Itaque cũ sit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex æquali vt AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est æqualis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se æquales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: est & angulus BDA rectus; & ipse KHF rectus erit. eadem ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus rectus. 29.primi.
Ergo & ipsis oppositi FGK GKH recti sunt. quare est quadratum igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtusiangulo quadratum describemus, ab angulo recto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quòd si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur, vt in subiecta figura, vtemur altera perpendiculari; quæ est trianguli latus, vt delicet BA, & similiter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quã CA ad AB; ducaturq; FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC æquiangulum esse. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG. est autem vt CA ad AB, ita AF ad FB. ex æquali igitur, vt CA ad se ipsam, ita AF ad FG; ideoq; AF FG inter se æquales sunt. Et ex ijs, quæ proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC; atque illud est, quod fecisse oportuit. 34.primi. 2.huius. 4.huius.

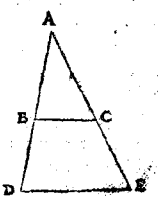
PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, vt angulum quem uis contineant. oportet ipsarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur

enim

enim AB AC ad punctа DE:ponaturq; ipsi AC æqualis BD & iuncta BC,ducatur per D ipsi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE,uidelicet ipsi DE parallela ducta est BC,erit vt AB ad BD,ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC. vt igitur BA ad AC, ita est AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuenta est CE.quod facere oportebat.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

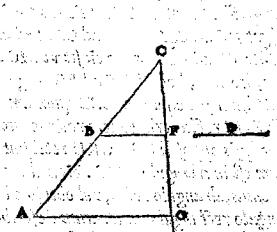
Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsarum A B C quartam proportionalem inuenire. Exponãtur duæ rectæ lineę DE DF angulũ quemuis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG,ipsi uero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH:iunctaq; GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaque quoniam uni laterum triãguli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est GH,erit vt DC ad GE,ita DH ad HF. est autem DG ipsi A aequalis;GE vero æqualis B:& DH æqualis C. Vt igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inuẽta est HF. quod facere oportebat.

2.huius.

FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

Tribus datis rectis lineis AB BC & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipsam D.

Rursus inclinetur recta linea CH in quouis angulo & abscindatur CF aequalis D :iunctaque BF,ipsi parallela ducãtur AG. ergo rursus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC,hoc est ad D. Inuẽta igitur est FG. quod facere oportebat.



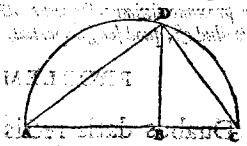
PROBLEMA V. PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC,oportet ipsarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum,& in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD,& AD DC iungãtur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est.&quoniam in triangulo rectangulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB,erit DB basis partium AB BC media proportionalis.Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta est DB.quod facere oportebat.

31.tertij.

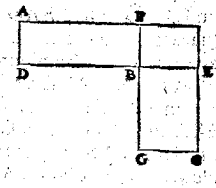
Cor.8.huius



THEO-

THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIIII.

Aequalium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia.



Sint æqualia parallelogrãma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB B E. ergo et indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ ſunt circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere: hoc eſt ut D B ad B E, ita eſſe G B ad B F. compleatur enim parallelogrammum FE. et qm̃ parallelogrãmũ A B æquale eſt parallelogrãmo B C, aliud autem aliquod eſt FE parallelogrammum; erit vt AB ad FE, ita BC ad F E. Sed vt AB quidem ad F E, ita eſt DB ad BE; vt autem BC ad FE, ita GB ad BF. et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circũ ęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera, quæ circũ æquales angulos: ſitq; vt D B ad BE, ita G B ad BF. Dico parallelogrãmum AB parallelogrãmo BC æquale eſſe. Qm̃ enim eſt vt DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad B E, ita A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E: et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit et vt AB ad F E, ita BC ad F E. ęquale igitur eſt A B parallelogrammum parallelogrammo BC. ergo ęqualium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrãmorũ latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.

7.quinti.
1.huius.
11.quinti.
1.huius.
11.quinti.
9.quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FBE aequales duobus rectis; ſed angulus EBG ponitur aequalis angulo FBD. anguli igitur FBE, EBG duobus rectis ſunt ęquales, ac propterea rectæ lineę FB BG in directum ſibi ipſis erunt.*

14.primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

Aequalium, et vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia.

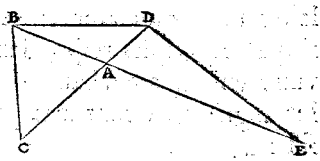
Sint triangula ABC ADE vnum angulum vni angulo ęqualem habentia, angu-

lum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est vt CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita vt in di-

14. primi. rectum sit CA ipsi AD. ergo et EA ipsi AB in directum erit; et iungatur BD. Quoniã igitur triangulum ABC æquale est trian-

7. quinti. gulo ADE, aliud autẽ est ABD; erit vt CAB triangulum ad triangulum BAD, ita trian gulum ADE ad triangulum BAD. Sed vt

1. huius. triangulum quidem CAB ad BAD trian-



11. quinti. gulum, ita CA ad AD: ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita EA ad AB. et ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera triã gulorum ABC ADE: et sit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. Iuncta enim rursus BD, quoniam vt CA ad AD, ita

1. huius. est EA ad AB; ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD;

11. quinti. et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum: erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triãgulum. Vtrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionẽ;

9. quinti. ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur et vnũ vni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnũ vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

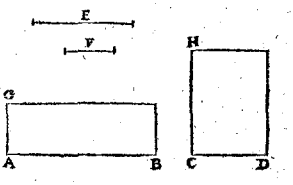
SCHOLIVM.

Aequiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera habere; non etiam latera ex contraria parte sibi ipsis proportione respondentia. Aequalibus autem, et æquiangulis latera quoque ex cõtraria parte respondentia habere contingit; æqualia enim sunt & latera: æqualitatis autem proportio ad se ipsam conuertitur, hoc est ex antecedente sumpto & consequente eadem est, & differens. At æqualibus quidem, & vnum angulum æqualem habentibus contingit solum latera habere ex cõtraria parte respondentia, non tamen omnia, sed quæ circum æquales angulos consistunt. Quare alia quidem solum proportionalia habent latera, alia vero & proportionalia, & ex contraria parte respondentia. & sunt prima quidem æquiangula & non æqualia: secunda vero æqualia, & vnum angulum habentia æqualem, non tamen æquiangula: reliqua autem & æqualia, & æquiangula sunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectę lineæ proportionales erũt.

Sint



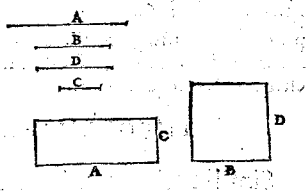
Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH: & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit vt AC ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur; est enim AG æqualis F: parallelogramū vero DH quod cōtinetur ipsis CD E; cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis C D E continetur. Sed rectangulum contentum AB F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales esse, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. ijsdem enim constructis quoniam rectangulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur: atque est contentum quidem AB F rectangulum B G; etenim AG est æqualis F: contentum vero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH: & sunt æquiangula. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad A G: æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulū extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

14. huius.

14. huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectę lineæ proportionales erunt.

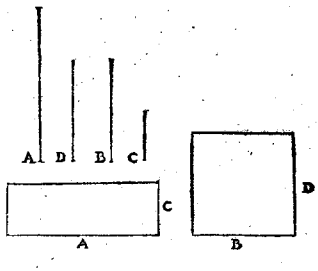


7. quinti. Ex antecedente.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectā gulum cōtentū A C æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit vt A ad B, ita D ad C. Si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint rectangulum extremis cōtentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum AC contentum est æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum A C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico vt A ad B, ita esse B ad C. ijsdem enim constructis

quoniam rectangulum contentum AC. æquale eſt quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B eſt rectangulum, quod ipſis BD continetur, eſt enim B æqualis ipſi D: erit rectangulum contentum AC æquale ei, quod BD continetur. Si autem rectãgulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. eſt igitur vt A ad B, ita C ad D. æqualis autem B ipſi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum eſt æquale ei, quod à media fit, quadrato: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

Ex antecedente.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

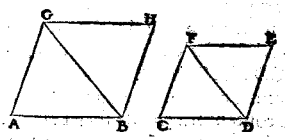
Sit data recta linea AB; datum autem rectilineũ CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitũ rectilineũ deſcribere. Iungatur DF, & ad rectam lineã AB, & ad pũcta in ipſa AB, angulo quidẽ C æqualis angulus conſtituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB eſt æqualis. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rurſus cõſtituatur ad rectã lineam BG, & ad puncta in ipſa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis GBH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. oſtenſum autem eſt & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH: & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſi angulos habẽt proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE ſimile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

23. primi.

4. huius.

4 huius. 11. quinti.

Diffi. 1. huius.

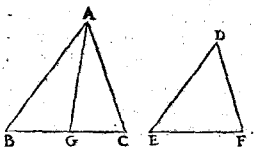


THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualẽ angulo ad E. & ſit vt AB ad BC, ita DE ad EF; ita vt latus BC homologũ ſit lateri EF. Dico ABC triãgulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad EF.

EF. Sumatur enim ipsarum BC EF tertia proportionalis BG, vt sit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG: & iungatur GA. Quoniã igitur vt AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se æqualia sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam est vt BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ab secundam: habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in dupla sunt proportione laterum homologorum. quod ostendere oportebat.



11. huius.
11. quinti.
15. huius.
Diffinit. 10. quinti.
1 huius.

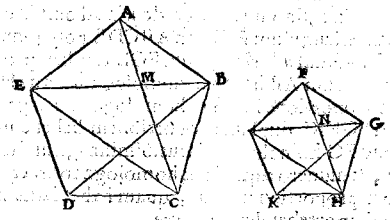
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à secunda simile, & similiter descriptum: quoniam ostensum est vt CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulũ ABG, hoc est ad triangulũ DEF. quod ostendere oportebat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XX.

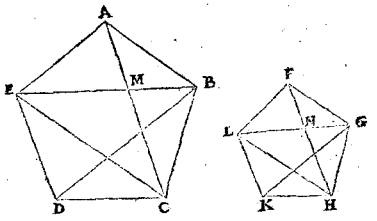
Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EC GL LH. & quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est vt BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiãgulum. ergo & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus



6. huius.

gulus æqualis toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter similitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia. æquiangulum igitur est EBC triangulũ triangulo LGH. quare & simile. Eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triãgula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc est vt proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem esse ABE EBC ECD, consequentia aũt ipsorum FGL LGH LHK & ABCDE polygonũ ad polygonũ FGHKL duplã proportionẽ habere eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. Iungantur enim AC FH. Et quoniam propter similitudinem polygonorum angulus ABC est æqualis angulo FGH; atque est vt AB ad BC, ita FG ad GH: erit triangulum ABC triangulo FGH æquiangulum. æqualis igitur est angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. præterea qm̃ æqualis est BAM angulus angulo GFN, ostensus autem est & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG æqualis. ergo æquiangulum est ABM triangulum triangulo FGN. Similiter ostendemus & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum esse. Vt igitur AM ad MB, ita est FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex æquali vt AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triãgulũ ad triãgulũ MBC, & triãgulũ AME ad ipsũ EMC, inter se enim sunt vt bases. & vt vnũ antecedẽtiũ ad vnũ consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequẽtia. Vt igitur AMB triãgulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipsum CBE. Sed vt AMB ad BMC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triãgulũ ad triangulũ EBC. Eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triãgulũ ad triãgulũ GLH. atq; est vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triãgulũ ABE ad triãgulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triãgulum EBC ad triangulum GHL. Similiter ostendemus iunctis BD GK, & vt BEC triangulum ad triangulum LGH, ita esse triangulum ECD ad triangulum LHK. Et qm̃ est vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH, & ad huc triangulum ECD ad ipsum LHK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG; similia enim triangula in duplã sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.



6. huius.

1. huius.

22. quinti.

1. huius.

12. quinti.

Ex antecedente.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in dupla proportione laterum homologorum. ostensum autem est & in triangulis.

COROLLARIVM PRIMVM.

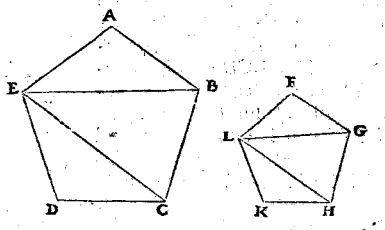
Ergo vniuersæ similes rectilineæ figuræ inter se sunt in dupla propor-

proportione homologorum laterum. & ſi ipſarum A B FG tertiam proportionalem ſumamus, quę ſit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.

COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe figuram, quæ ſit à prima ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam. quod oſtendere oportebat.

Oſtēdemus etiam aliter & expeditius homologa eſſe triāgula.



Exponātur enim rurſus polygona ABCDE FGHKL, & iūgātur BE EC GL LH. Dico vt ABE triāgulū ad triāgulū FGL, ita eſſe triāgulū EBC ad triāgulū LGH; & triāgulū CDE ad ipſum HKL. Qm̄ enim ſimile eſt ABE triāgulū triāgulo FGL; habebit ABE triangulū ad triangulū FGL duplā proportionē eius, quam habet BE ad GL. Eadē ratione & triāgulū BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL. eſt igitur vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulū. Rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. eſt igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, & reliqua vt in priori demonſtratione. quod ipſum demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

11. quinti.

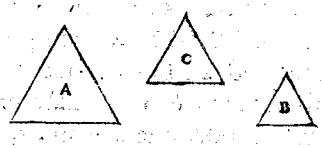
12. quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

Sit enim vtrumque rectilineorum A B ſimile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe. Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo C, & ipſi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rurſus quoniam ſimile eſt rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipſi erit, & circum

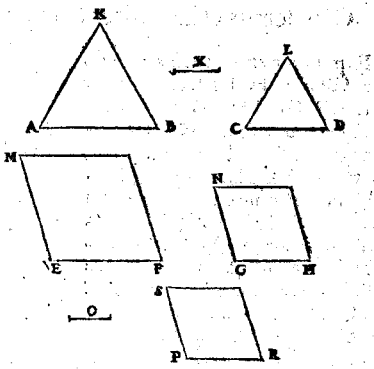
cum æquales angulos latera proportionalia habebit. Vtrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH; & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH. de
18.huius. scribanturq; ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis verò EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineū MF ad ipsum NH rectilineū.
11.huius. Sumatur enim ipsarum quidē AB CD tertia proportionalis X; ipsarum verò EF GH tertia, proportionalis O. Et quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem C D ad X, ita GH ad O; erit exequali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt
Coro.10.huius. AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum: vt autem EF ad O,
11.quinti. ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum. Sed sit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineū MF ad rectilineū NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF
12.huius. ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR. & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR: & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis verò EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum. ponitur autem & vt rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo vt rectilineū MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quòd cum rectilineum MF ad vtrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale.
9. quinti. est autem ipsi simile, & similiter positum. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea, quæ ab ipsis

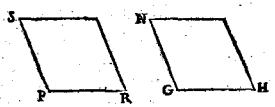


ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

LEMMA.

At vero si rectilinea æqualia & similia sint, homologa ipsorũ latera inter se ęqualia esse, hoc modo demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: & sit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipsi HG esse ęqualem. Si enim inæquales sint, vna ipsarum maior erit. Sit RP maior, quàm HG. Et quoniam est vt RP ad PS, ita HG ad GN; & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN: maior autem est PR, quàm HG. ergo & PS quàm GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN est maius. Sed & æquale, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est PR ipsi GH. ergo æqualis sit necesse est. quod oportebat demonstrare.

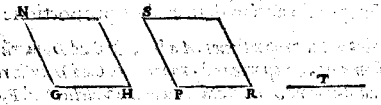


F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH est æqualis PR] *Demonstrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non potest. Sed tamen licet etiam recta demonstratione vti, in hunc modum.* *

LEMMA.

Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: sitq; latus GH homologum ipsi PR: Dico GH ipsi PR æquale esse.



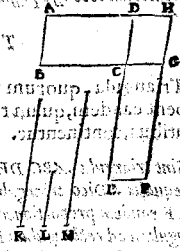
Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliã quae sit T, erit GH ad T, vt rectil. neũ N H ad rectilineũ SR. ergo GH est aequalis ipsi T. Sed cũ tres rectae linae GH PR T sint proportionales, erit rectangulũ contentum GH T, hoc est quadratum GH aequale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipsi PR est aequalis. quod oportebat demonstrare.

11 huius. Corol. 20 huius. 17 huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXIII.

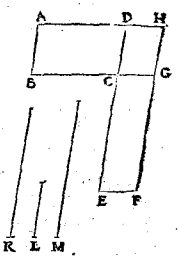
Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrãmum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE. ponatur enim vt BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq; recta linea quędã K: & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L, vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L: & L ad M eędem sunt, quę proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. Et quoniam est vt BC ad CG, ita



14 primi. 22 huius. 1 huius.

11.quinti. AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed vt BC ad CG, ita K ad L: erit & vt K ad L, ita parallelogrãmum AC ad CH parallelogrammum. Rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad paralel logrammum CF; vt autem DC ad CE, ita L ad M, & vt
11.quinti. L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrãmũ. Itaque cũ ostensum sit, vt K quidẽ ad L, ita AC parallelogrãmũ ad parallelogrãmũ CH: vt aũt L ad M, ita parallelogrammũ CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. quod oportebat demonstrare.



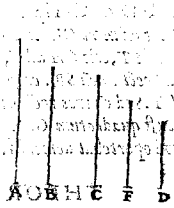
F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demõstratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam; sunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio composita est K ad M. Quòd si ex tribus componenda sit proportio, rursus ex ea, quę ex duabus constat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quę quidem ex tribus composita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.

Sint datae proportiones A ad B, & C ad D, quarũ proportio C ad
12. huius. *D sit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionem A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quae inter C & D media statuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatã esse à proportione C ad D, & proportionem, quę relinquitur esse eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, si auferatur vna dictarum proportionum, videlicet C ad F, quae est A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud est, quod facere oportebat.*

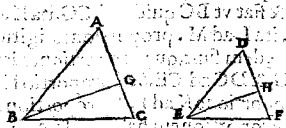


Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur & auferantur ex iam dictis facile constare potest, & ex ijs, quae nuper Turbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnae constructionis Ptolemęi propositione XXIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quae ab his non multum abhorrent: & elementorum loco esse possunt.

THEOREMA. I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis, inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus, continentur.

Sint triangula ABC DEF, sit q; angulus A angulo
D aequalis. Dico triangulum ABC ad triangulum
DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo
EDH simile; est enim angulus ad A aequalis angulo
ad D,



ad D, & angulus BGA rectus aequalis recto EHD. ergo & reliquus reliquo aequalis. Vt igitur GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod fit ex BG & AC ad rectangulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC. & similiter vt HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igitur ex BG & AC ad rectangulum BAC est vt rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF; & permutando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF, vt BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Sed rectanguli ex BG & AC dimidium est ABC triangulum ex 41 primi; habent enim eandem basim AC, & altitudinem eandem BG: & rectaanguli ex EH & DF dimidium triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habet, quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF. Quare triangula quorum vnus angulus vni angulo est aequalis inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. quod demonstrare oportebat.

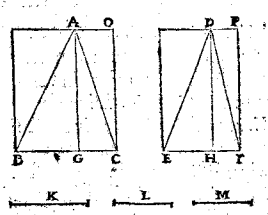
4.huius. 1.huius. 11.quinti. 15.quinti.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur parallelogramma etiam equiangula inter se proportionem habere eandem, quam rectangula, quae ipsorum lateribus continentur, cum sint eiusmodi triangulorum dupla. 15.quinti.

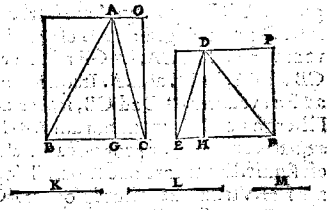
THEOREMA II.

Triangula et parallelogramma inter se proportionem habent compositã ex proportione basium, et proportione altitudinum.

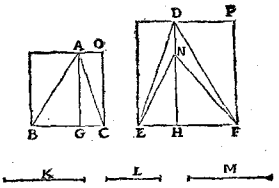


Sint triangula ABC DEF: & ducantur perpendiculares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habere compositam ex proportione basis BC ad basim EF; & ex proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est aequalis DH, vel inaequalis, & rursus vel BC est aequalis EF vel inaequalis. Sit primum AG aequalis DH, & BC inaequalis ipsi EF, fiatq; vt BC ad EF, ita recta linea quedam K ad L: & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad triangulum DEF est, vt basis BC ad EF basim ex prima huius, hoc est vt K ad L. & cum DH sit aequalis AG, erit M ipsi L aequalis: triangulumq; ABC ad ipsum DEF, vt K ad M: proportio autem K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demonstrabitur, si basis BC sit aequalis basi EF, cum inaequales sint altitudines AG DH: erunt enim KL inter se aequales, & ex ijs, quae demonstrauimus ad primam huius, triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M, hoc est quam K ad M, triangulum igitur ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L, hoc est basis BC ad basim EF. & ex proportione L ad M, hoc est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quod si bases BC EF aequales sint, itemq; altitudines aequales AG DH, nihilominus idem sequetur, nam K L M inter se aequales erunt, & trianguli ad triangulu proportionem habebit compositam ex proportione K ad L, & L ad M, hoc est ex proportione basium & proportione altitudinu. Deniq; si bases BC EF inaequales sint, & similiter inequales altitudines AG DH. Ponatur AG minor, quam

19.huius. 7.quinti.



DH. & ab ipsa D H abscindatur H N aequalis AG: iungantur q, EN NF; & rursus fiat vt basis B C ad basim E F, ita K ad L: vt autem N H ad HD, hoc est vt AG ad H D, ita L ad M. Quo



tius. *niam igitur triangula ABC NEF eandem habent altitudinem, inter se erunt vt bases. quare triangulum A B C ad triangulum N E F est vt B C ad EF, hoc est vt K ad L. Sed triangulum N E F ad*

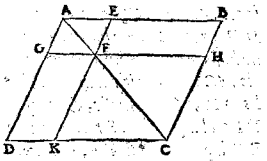
Ex demonstratis 1. huius. *triangulum DEF est vt altitudo NH, vel A G ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex aequali igitur triangulum A B C ad triangulum D E F, est vt K ad M. habet aut K ad M proportionē compositā ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulū ABC ad triangulū DEF proportionē habet compositā ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinē DH. Sed cum trianguli ABC duplū sit parallelogrāmū B O, & triangu-*

15. quinti. *li DEF duplum parallelogrammum E P; habebit parallelogrammum B O ad parallelogrammum EP proportionem compositam ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. triangula igitur & parallelogramma inter se proportionem habent cōpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, et toti et inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cuius diame ter AC: circa diametrum vero A C parallelogrā ma sint E G HK. Dico parallelogramma E G HK, et toti ABCD, et inter se similia esse. Quo-



niam enim vni laterum trianguli A B C, videli-

2. huius. cet ipsi BC parallela ducta est E F, erit vt B E ad EA, ita CF ad FA. Rursus quoniam vni laterum

11. quinti. trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. Sed vt C F ad F A; ita ostensa est et B E ad E A. ergo et vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendo; vt BA ad AE, ita DA ad AG, et permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD EG late-

29. primi. ra, quę circa communem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est æqualis angulo A D C; angulus uero GFA æqualis angulo DCA; et angulus DAC est communis duobus triāgulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione et triāgulum A C B æquiangulum est triangulo A F E. totum igitur parallelogrammum

4. huius. ABCD parallelogrāmo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad D C, ita AG ad GF: vt autem DC ad CA, ita GF ad FA: et vt A C ad C B, ita A F ad F E: et præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam ostensum est vt D C ad C A, ita esse G F ad FA: vt autem AC ad CB, ita AF ad F E; erit ex æquali vt D C ad C B, ita G F ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos; ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. Eadem ratione & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. Vtrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum parallelogram-

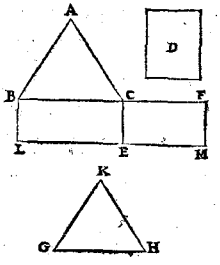
21. huius. mo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti & inter se sunt similia. quod ostendere oportebat.

PRO-

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. Sumatur ipsarum BC CF media proportionalis GH. & ab ipsa GH describatur triangulum KGH simile & similiter positum triangulo ABC. Et quoniam est vt BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita est figura, quæ fit à prima, ad eam, quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit vt BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed & vt BC ad CF, ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum. & vt igitur triangulum ABC ad triangulum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare permutando vt ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum. est autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH triangulũ parallelogrãmo EF. Sed EF parallelogrãmũ æquale est rectilineo D. ergo & triangulum KGH ipsi D est æquale. est autem KGH simile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato æquale idem constitutum est KGH. quod facere oportebat.



44. primi.

14. primi.
13 huius.
18. huius.

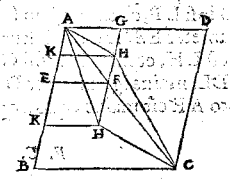
Cor. 20. huius.

11. quinti.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum, communemq; ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABDD circa eãdem esse diametrum parallelogrammo AF. non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC & producatur GF vsque ad H; ducaturq; per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG, & erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile. ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. et vt igitur GA ad AE, ita GA ad AK. Quod cum GA ad vtramque ipsarum AK AE eandem proportionem habeat, erit AE ipsi AK æqualis, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, et similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. quod demonstrare oportebat.

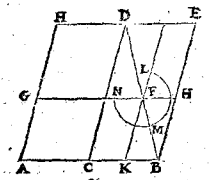


24. huius.
1. diff. huius.
11. quinti.
9. quinti.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei quæ à dimidia describitur; maximũ est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

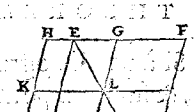


A Sit recta linea A B; secturq́; bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammũ A D deficiens figura parallelogramma D B, simili & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsius A B descripta est, hoc est à C B. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Applicetur enim ad re

B ctam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili et similiter posita ipsi DB. Dico AD parallelogrãmum parallelogrammo A F maius esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eãdem diametrum sunt. Ducatur eorum diameter DB, et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE est æquale. Sed C H est æquale C G, quoniam et recta linea AC ipsi CB. ergo et GC ipsi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius. omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrãmis similibus, et similiter positis ei, quæ à dimidia describitur; maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente. 43. primi. 36. primi.

C ALITER. Sit enim rursus AB recta bifariã in pũcto C, et applicatum sit A L. deficiens figura L B. et rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrãmum AE deficiens figura E B simili, et similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiã est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi L B, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter EB, et describatur figura. Et quoniã LF æquale est L H, etenim FG ipsi GH est æqualis: erit LF ipso EK maius. est aũt L F æquale DL. maius igitur est et D L ipso E K. commune apponatur K D. ergo totum A L toto A E est maius. quod oportebat demonstrare.



36. primi. 43. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]

Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcumque libuerit D B, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum A D deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quae à dimidia ipsius A B descripta est.

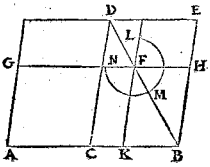
Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum A F deficiens figura

B parallelogrammia FB, simili et similiter posita ipsi DB.

Sumatur in recta linea A B inter C B quoduis punctum K, & ab ipsa KB describatur parallelogrammum simile & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit K B H F, et HF ad G producatur

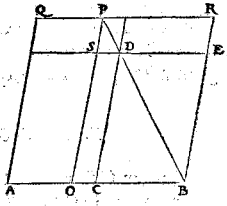
producatur. erit rursus ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB.

C



Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C. Nō videtur hec alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hunc modū aptius, et manifestius explicabitur.

Sit recta linea AB, secetuŕ, bifariam in C, et ab ipsa CB describatur parallelogrammum vtcumque DB, et totum parallelogrammum AB E compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD, deficiens figura parallelogramma DB simili & similiter posita ei, quę descripta est à dimidia ipsius AB, hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris similibus et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Iungatur enim DB parallelogrammi DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda sunt, vel maior quàm dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior, & sit AK; atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur KF, quae diametro DB in F occurrat; & per F ducatur GFH parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB; quippe quae circa eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quàm AF. Quoniam enim suplementum CF est aequale ipsi FE; communi apposito FB, erit totum CH toti KE aequale. at CH est aequale GC, quoniam & AC ipsi CB, ergo & GC aequale est KE. apponatur vtrique commune CF. totum igitur AF gnomoni LMN est aequale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quàm AF. 43. primi.

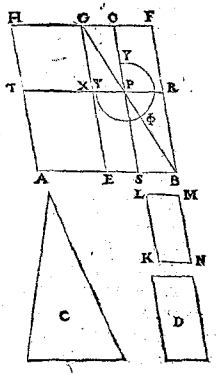


Sumatur deinde AO minor, quàm dimidia AC, & per O ipsi BE parallela ducatur OP, quae cum diametro BD producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB, & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum AP deficiēs figura parallelogramma PB ipsi DB simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam enim parallelogrāmum DR est aequale parallelogrammo DQ, erit DR maius quàm SQ. Sed OD est aequale DR. ergo et OD ipso SQ est maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum AP maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quae sequuntur. quod oportebat demonstrare. 36. primi. 43. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

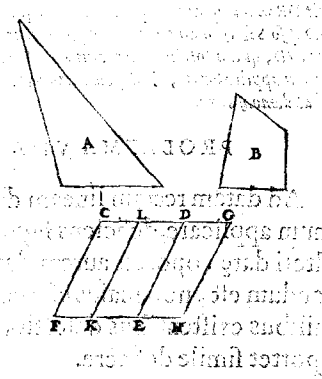
Ad datam rectam lineam dato rectilineo equale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existētibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C equale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel equale est ipsi 18. huius.



est ipsi C, vel eo maius, ob determinationem. & si quidem AG sit æquale C, factum iam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit H E maius quàm C; atque est H E æquale G B. ergo & G B quàm C est maius. quo autem G B superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum
25. huius. idem constituatur KLMN. Sed D est simile GB. quare & K M ipsi G B simile erit. Sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniã æquale est GB ipsis C KM, erit GB ipso KM maius. maior igitur est recta linea G E ipsa K L; et GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & G O æqualis LM, & compleatur X G O P parallelogrammum. æquale igitur est & simile GP ipsi KM. Sed KM simile est GB. ergo & GP ipsi GB est simile. circa eandẽ
21. huius. 26. huius. igitur est diametrũ GP ipsi GB. Sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. Itaque qm̃ GB est æquale ipsis C KM, quorũ GP est
43. primi. æquale KM, erit reliquus γφτ gnomon æqualis reliquo C. Et qm̃ OR est æquale XS,
36. primi. commune apponatur PB. totum igitur OB toti XB est æquale. Sed XB est æquale T E, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. cõmune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni γφτ. At γφτ gnomon ipsi C ostensus est æqualis. & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogrãma PB ipsi D simili, quoniã & PB simile est ipsi GP. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



Quo autem GB superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur] *Vt autem excessus, quo alterum rectilineum alterum superat, facile inueniatur libuit, sequens problema apponere.*

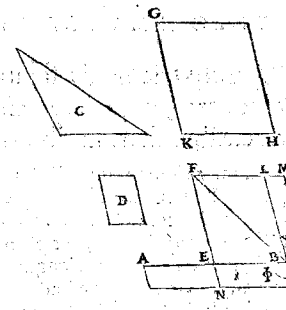
Duorum rectilineorũ inæqualiũ excessum, quo maius superat minus, inuenire.

Sint duo rectilinea inæqualia A B, quorum maius sit A. oportet inuenire excessum, quo rectilineum A ipsum B superat. Dato enim rectilineo A in quouis angulo æquale parallelogrãmum constituatur CDEF: & ad rectam lineam
54. primi. *DE in angulo æquali ipsi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE æquale rectilineo B.*
14. primi. *erit recta linea DG in directum ipsi CD, & EH in directum FE. est igitur vt parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc est vt rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH. atq; est rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur est recta linea FE ipsa EH. Itaq; à recta linea FE abscindatur EK ipsi EH æqualis, & à puncto K alterutri ipsarum FC, ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammo DH æquale, & ob id parallelogrammum FL est excessus, quo parallelogrammum FD superat parallelogrammum DH, hoc est quo rectilineum A ipsum B rectilineum superat. Duorum igitur rectilineorum inæqualium A B excessus inuentus est. quod fecisse oportuit.*

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę.

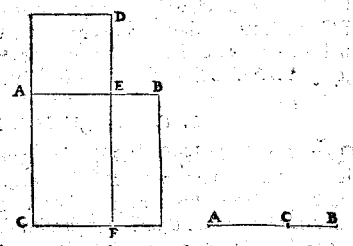


Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. Itaq; oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF. & vtrisque quidem BF, C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH. Simile igitur est GH ipsi FB. sitq; KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta linea KH maior quàm FL, & KG maior quàm FE. producantur FL, FE: & ipsi quidē KH æqualis sit FLM; ipsi vero KG æqualis FEN: & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL. & MN igitur ipsi EL simile erit; ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur ϒΧΦ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, æquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦϒΥ. Sed ΦϒΥ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelograma PO ipsi D simili; quoniā & ipsi EL simile est OP. quod fecisse oportebat.

13. huius.
25. huius.
21. huius.
26. huius.
24. huius.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.



Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describatur enim ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC. ergo & AD, quadratum erit. Et quoniā BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æquiangulū. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. vt igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est autem FE æqualis AC, hoc est ipsi AB. & ED ipsi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB: Sed AB maior

46. primi. Ex antecedente.
14. huius.
34. primi.

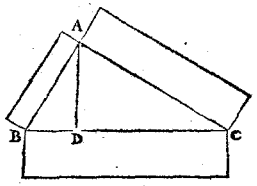
14. quinti. est quàm AE. ergo AE quàm EB est maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E, & maior ipsius portio est AE. quod facere oportebat.

ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipsâ AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC æquale fit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC,

11. secundi. 17. huius. erit vt BA ad AC, ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quę fit ex BC æqualem esse eis, quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectãgulo ABC ab angulo recto, qui est ad A ad BC

8. huius. basim perpendicularis ducta est AD; erunt triãgula ABD ADC, quæ sunt ad perpendicularẽ similia toti ABC, & inter se se. Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. Quòd cũ

Coro. 20. huius. tres rectæ lineę proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quę ex secunda, similem, & similiter descriptam. Vt igitur CB ad BD, ita figura, quę fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, et similiter descriptam. Eadem

A ratione et vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex CA. quare et vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem BC ipsis BD DC. ergo figura, quę fit ex BC æqualis est eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulnm subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostendere oportebat.

ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportione laterum homo-

20. huius. logorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad BA. habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex

11. quinti. BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura, quæ ex BC ad eam, quę ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione & vt figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum. & vt igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ita quod

47. primi. ex BC quadratum ad quadrata, quę ex BA AC. quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA AC quadratis. ergo & figura, quæ fit ex BC est æqualis eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare & vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quę ex fit BC ad eas, quæ ex BA AC similes, & similiter descriptas.] *Quoniã enim est vt CB ad BD, ita figura, quae fit à CB ad eam, quae à BA similem, & similiter descriptam; erit & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quae fit à BA ad eam, quae à BC similem & similiter descriptam. præterea cum sit vt BC ad CD, ita figura, quae fit à BC ad eam, quae à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quae fit ab AC ad eam, quae à CB. Sit igitur figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC magnitudo secunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quae fit ab*

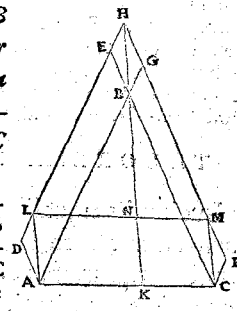
AC

AC magnitudo quinta & recta linea DC sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam; quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesimaquarta quinti libri composita prima & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figuræ quæ fiunt à BA AC ad eam, quæ à BC erunt vt rectæ lineæ BD DC ad rectam BC & rursus conuertendo figura, quæ fit à BC ad eas, quæ à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quę à BC ad eas, quę à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. B

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura, quæ fit à BA magnitudo prima; figura, quæ à BC secunda; quadratum ex BA tertia; & quadratum ex BC quarta; figura vero, quæ fit ab AC quinta; & quadratum ex AC sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

Si sit triangulum ABC, & ab ipsis AB BC describantur quæuis parallelogramma AB ED BCFG; & lineæ DE FG producantur ad H, iungatur que HB: fient parallelogramma ABED BCFG æqualia parallelogrammo cõtento AC HB, in angulo, qui vtrisque BAC DHB sit æqualis.

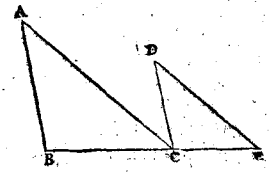


Producatur enim HB ad K, & per A C ipsi KH parallelæ ducantur AL CM; & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est ALHB, erunt AL BH æquales, & parallelæ. Similiter æquales & parallelę MC HB. ergo & LA MC æquales & parallelæ sint necesse est; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur est ALMC in angulo LAC, hoc est in angulo æquali vtrisque BAC DHB. est enim angulus DHB ipsi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammum æquale est parallelogrammo LABH, etenim in eadem basi AB, & in eisdem parallelis AB DH consistit: parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN est æquale, cum sit in eadem basi LA, & in eisdem parallelis LA HK: erit parallelogrammũ ADEB æquale parallelogrammo LAKN. et ob eãdem caussam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogramma igitur DABE BGFC parallelogrammo LACM æqualia sunt, hoc est ei, quod AC HB continetur, in angulo L AC, qui est æqualis vtrisque BAC BHL. Atque hoc multo vniuersalius est, quàm quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonstratur.

34.primi. 30.primi. 33 primi. 34.primi. 35.primi.

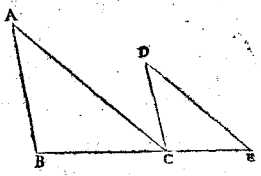
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.



Sint duo triangula ABC DCE, quę duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directũ esse. Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea AC; erunt anguli 29.primi.

alterni BAC ACD æquales inter se se. Eadē ratione et angulus CDE æqualis est angulo ACD. Quare et BAC ipsi CDE est æqualis. Et quoniam duo triāgula sunt ABC DCE, vnū angulū, qui ad A, vni anguło qui ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quòd sit vt BA ad AC,



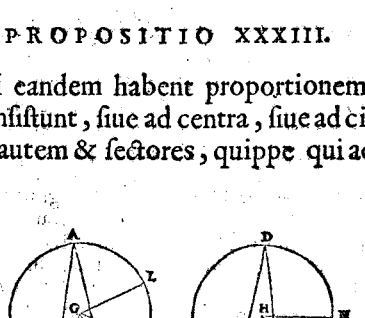
6. huius. ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est et angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt æquales. et anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ angulos, qui

4. primi. deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; et ad centra quidem ipsorum GH sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico vt circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF: et adhuc sectorē BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentię quidem BC æquales quotcumque deinceps CK KL; circumferentię vero EF, rursus æquales quotcumque FM MN: et iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circumferentiæ

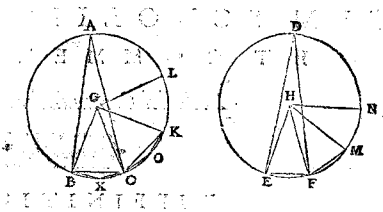


27. tertij. BC CK KL inter se sunt æquales, et anguli BGC CGK KGL inter se æquales erūt. quotuplex igitur est circumferētia BL circumferentiæ BC, totuplex est et BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione et quotuplex est circūferentia NE circūferentię EF, totuplex et EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN, et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et si circumferentia BL maior est circumferentia EN, maior erit et BGL angulus angulo EHN: et si minor, minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circūferentijs BC EF: et duobus angulis BGC EHF, sumpta sunt circumferentiæ quidem BC, et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, et BGL angulus; circumferentiæ vero EF, et EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferētia EN, et angulus EHN. atque ostensum est si circumferētia BL superat circumferentiam EN, et BGL angulū superare angulum EHN, et si æqualis, æqualem, et

Diffi. 5 quinti. si minor, minorem esse. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita

angulus

angulus BGC ad angulum EHF. Sed vt BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriusque est duplus. et vt igitur B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus B A C ad E D F angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistūt, siue ad centra, siue ad circumferentiam insistant. Dico insuper, et vt B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita esse sectorem G B C ad H F E sectorem. Iungantur enim BC CK, et sumptis in circumferentijs BC CK: punctis X O, iungantur et B X X C C O O K. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, et angulos æquales continēt; erit et basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est et GBC triangulum triangulo G C K. Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ C K est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare et angulus B X C angulo C O K est æqualis. similis igitur est B X C portio portioni C O K. et sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quę autem in æqualibus rectis lineis similes circulorū portiones, et inter se æquales sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur sector BGC toti sectori C G K. æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector vtrique ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est et GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circūferentiæ EF, totuplex est et HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentię EN est æqualis, et sector BGL æqualis est sectori EHN. et si circumferentiæ BL superat circumferentiā EN, superat et BGL sector sectorem EHN, et si minor minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC E F circumferentijs, duobus uero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC et GBC sectoris circumferentia BL et GBL sector. circumferentię vero E F, et sectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN sector. atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam E N, et sectorem B G L superare sectorem E H N. et si æqualis æqualem esse; et si minor, minorem. est igitur vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. quod ostendere oportebat.



15. quinti.
20. tertij.
4. primi.
27. tertij.
11. dif. tertij.
24. tertij.
5. diffi. quinti.

COROLLARIVM

Perspicuum etiam est, et vt sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum. 11. quinti.

SEXTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SEPTIMVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

NITAS est, qua vnumquodque eorũ, quæ sunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, si ter dicetur tertia, si quater quarta. & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrũque ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; si vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicentur tres quartae. Quòd si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura minorem metitur, numerantem, uel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; si ter, triplus; si quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

SCHOLIVM.

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagoreorum pariter parem, qui ad vnitatem vsque bifariam diuiditur; vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim sex sunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. At περισσάκις, hoc est impariter par est duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerū metiri alium numerum. Itaque sciendum est περισσάκις, hoc est impariter parem à pythagoreis sic dictum, plures diuisiones suscipere, quæ in partes æquales fiunt, nō tamē ad vnitatē vsq; diuisionē procedere. Nouit autem hunc & in ipsē Euclides, cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina imposita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.

IX.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS

Ex diffinitione octaua, & nona, & ex ijs, quae in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numerũ appellare eũ, quẽ par numerus per numerum parem metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non: & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur, siue dimidium habeat imparem, siue parem. numeros enim à binario duplatos ipse pariter pares tantum appellat, & eos, quidimidium imparem habent vocat pariter impares tantum. eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque dimidium habent imparem, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq; paris numeri species tres sunt; Vnà quae dicitur pariter par, alia quae pariter impar, & tertia, quae impariter par. Pariter par numerus est, qui põt in duo paria diuidi, eiusq; pars in alia duo paria & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad vnitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes aequales, eiusq; pars rursus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi possunt; sed diuisio ad vnitatem vsque non perducitur. Qui igitur bis est pariter par, Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero bis pariter impar est, Euclides pariter imparem tantum. & qui bis impariter par Euclides & pariter parem, & impariter parem appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sumit Euclides, neque pariter parem esse tantum, neque pariter imparem tantum.

X.

Impariter vero impar numerus est, quẽ impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus, præterquàm quòd ipse se ipsum metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

XIIII.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

XV.

Numerus numerũ multiplicare dicitur, quando quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

Quando

XVI.

Quando duo numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt planus appellatur: latera vero ipſius ſunt numeri ſe ſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius ſe ſe multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter eſt æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter eſt æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecũdi, & tertius quarti ęque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes.

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus eſt maior ſecundo, vel minor. & ſi quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur. & ſi metitur erit primus ſecundi æque multiplex, atque tertius quarti: ſi vero non metitur, quae partes eſt ſecundus primi, eædem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo ſi primus eſt maior ſecundo, quae pars, vel partes eſt ſecundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. ſed ſi primus ſit minor, quae pars, vel quae partes eſt primus ſecundi, eadem pars, vel eædem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem eſſe, vel partes, quod poſtea in quarto theoremate huius demonſtratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt ęqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui ſuis ipſius partibus minor eſt abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus. ſed & petitiones quaſdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris vti uiſus eſt.

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in alijs.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet sumi posse æquales, vel multiplices.*
2 *Quolibet numero sumi posse maiorem.*
3 *Numerus infinite augetur, sed non infinite diminuitur.*

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiusdem, vel æqualium æque multiplices fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*
2 *Quorum idem numerus æque multiplex fuerit, vel quorũ eque multiplices fuerint æquales, & ipsi inter se æquales sunt.*
3 *Quicumque eiusdem numeri, vel æqualium eadem pars, vel eadem partes fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*
4 *Quorum idem, vel æquales numeri eadem pars, vel eędem partes fuerint, inter se sunt æquales.*
5 *Omnis numeri pars est vnitas ab eo denominata, binarij enim numeri vnitas pars est ab ipso binario denominata, quæ dimidia dicitur, ternarij vero vnitas est pars, quæ à ternario denominata tertia dicitur, quaternarij quarta, & ita in alijs.*
6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quę in ipso sunt.*
7 *Omnis numerus se ipsum metitur.*
8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę sunt in metiente, vnitates.*
9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipsum producit.*
10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates, quæ sunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quæ sunt in multiplicante.*
11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eũ, qui ex illis componitur.*
12 *Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.*
13 *Quicũque numerus metitur totũ & ablatum, etiã reliquũ metietur.*

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad assumpta fuerit vnitas; numeri à principio positi primi inter se erũt.

Duobus enim inæqualibus numeris expositis AB CD, detracto semper minore de maiore reliquus minime metiatur præcedentẽ, quoad assumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter se primos esse, hoc est ipsos AB CD vnitate solã metiri. Si enim AB CD nõ sint primi inter se, mẽtietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; E: & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorẽ FA, AF vero metiens DC relinquat se ipso minorem GC, & GC metiẽs FH vnitatẽ HA relinquat. quoniam igitur numerus E ipsum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipsum BF metitur; metitur aũt & totũ BA. ergo & reliquũ AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipsum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipsum FH metietur. sed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus existens. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.

Per 12. cõem notionem. 13. com. not

F. C. COMMENTARIVS.

Huius conuersam hoc modo demonstrabimus.

Expositis duobus numeris inter se primis; si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.

Sint enim numeri inter se primi AB CD; & si fieri potest iisdem manentibus, & detracto sẽper minore de maiore deuentũ sit ad numerũ HA, qui præcedẽtẽ GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipsũ FH metietur. metitur aũt & se ipsũ, ergo & FA metietur; ac propterea ipsũ DG. sed & metietur GC, quare & totũ DC metietur, atq; ob id ipsum BF metitur. metitur aũt & FA, vt ostensum est. ergo & totũ BA metietur. Itaque quoniã HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter se compositi. Sed & inter se primi ponuntur. quod fieri non potest. nõ igitur expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, cessabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit. quod oportebat demonstrare. Sed & illud constat.

12. com. not. 11. com. not. Diffi. 14.

Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vsque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter se primi, sed & compositi. quod est absurdum. 1. huius.

Ex iam demonstratis problema quoque illud perspicue apparere potest.

Duobus numeris expositis comperire an inter se primi sint, an compositi.

Facta namque detractione, vt dictum est, si deueniet ad vnitatem vsque, dicemus eos inter se primos esse, sin minus, compositos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

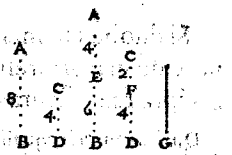
Sint dati duo numeri non primi inter se AB CD; quorũ minor sit CD. oportet ipsorum AB CD maximam communem mensuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam se ipsum metiatur, erit CD ipsorum AB CD communis mensura. & perspicuum est eam maximam esse: nullus enim maior CD ipsum CD metietur:

si vero CD non metiatur AB, ipsorum AB CD detracto semper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur precedentem. vnitas quidem non relinquetur; essent enim AB CD primi inter se. quod nō ponitur. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem AE: AE vero metiens CD relinquat se ipsa minorem CF: & CF ipsum AE metiatur. Itaque quoniā CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF; & CF ipsum DF metietur. sed & metitur se ipsum. & totū igitur metietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF metitur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est cōmunis mēsura. dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur; CD vero ipsum BE. & G ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autem & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipso CF. ergo CF ipsorum AB CD maxima erit communis mensura. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenta est. quod facere oportebat.

Ex antecedente.

12. com. not.

13. com. not.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AB CD communis mensura C F: & sit numerus aliquis G, qui ipsos A B C D metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mensuram CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD vero metitur BE: et G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum A E metietur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum D C. Quare & reliquum C F, maximam scilicet eorum communem mensuram metietur. quod demonstrare oportebat.

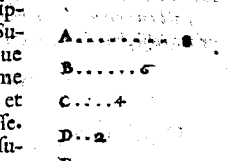
12. com. not.

13. com. not.

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorū cōmunem mensuram inuenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ipsorum ABC maximam communem mensuram inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cōmunis mēsura D. itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primū. metitur autem et ipsos A B. ergo D numeros A B C metitur: et ob id ipsorum est communis mensura. dico et maximam esse. si enim D non est ipsorum A B C maxima communis mensura, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, et sit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipsos AB metietur, et ipsorū AB maximam communē mēsuram, quæ est D. ergo E ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non pōt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsorum ABC maxima est cōis mensura.



Non

Non metiatur autē D ipſum C. Dico primum numeros D C non eſſe primos inter ſe. Quoniam enim ABC non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipſos ABC, & ipſos AB metietur, et ipſorum AB maximam communem menſurā, videlicet D, metitur autem et ipſum C. ergo ipſos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non ſunt inter ſe primi. Sumatur ipſorum maxima communis menſura E. et quoniam E ipſum D metitur, et D metitur ipſos AB; et E ipſos AB metitur. metitur autē et C. ergo et ipſos ABC metietur; eritq; E ipſorum ABC communis menſura. Dico et maximam eſſe. ſi enim E non eſt ipſorum ABC maxima communis menſura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E. metiatur, ſitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipſos AB, et ipſorum AB maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum D. ergo F ipſum D metitur. metitur autem et ipſum C. quare F et ipſos DC, et ipſorum DC maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum E. ergo F ipſum E metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E metietur. ergo ipſorum ABC maxima eſt communis meſura. Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inuēta eſt. quod facere oportebat.

A.....18
B.....12
C....4
D.....6
E..2
F—

Ex corol. antecedent.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri. A

Eodem modo et pluribus numeris datis maximā communem menſuram inueniemus. B

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifeſtum eſt &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonſtrauimus.* A

Eodem modo &c.] *Sed & illud conſtat, ſi numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars eſt, vel partes.

Sint duo numeri A BC, quorum BC ſit minor. Dico BC ipſius A vel partem eſſe, vel partes. Numeri enim A BC vel primi ſunt inter ſe, vel non. ſint prius inter ſe primi, & diuiſo B C in vnitates, quæ in ipſo ſunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in B C, pars aliqua ipſius A. ergo B C ipſius A partes eſt. ſed non ſint A BC inter ſe primi. Itaque B C vel ipſum A metitur, vel non. et ſiquidem metitur, erit BC pars ipſius A: ſin minus, ſumatur ipſorum A BC maxima communis menſura D; et diuidatur BC in numeros ipſi D æquales BE EF FC. Quoniā igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. æqualis autem eſt D vnicuique ipſorum BE EF FC. ergo et vnuſquiſque ipſorum BE EF FC pars eſt ipſius A: ac propterea B C ipſius A partes eſt.

A.....8
B.....5C
A.....8
B....4C
A.....8
B..2E..2F..2C
D..2

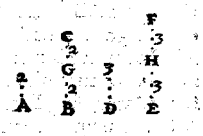
Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Numerus A numeri BC pars sit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ est A ipsius BC. Dico et vtrumque AD vtriusque BC EF eãdem partem esse, quæ est A ipsius BC. Quoniam enim quæ pars est A ipsius BC, eadem est et D ipsius EF; quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erũt et in EF numeri æquales ipsi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF. erit vtique æqualis multitudo numerorũ BG GC multitudini ipsorum EH HF. & quoniam æqualis est BG ipsi A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsis A D æquales. Et eadem ratione cum GC sit æqualis ipsi A, & HF ipsi D; & GC HF ipsis A D æquales erunt. quot igitur numeri sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt & in BC EF æquales ipsis A D. ergo quotuplex est BC ipsius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriusque A D. quę igitur pars est A ipsius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstrare oportebat.

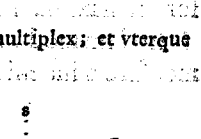


F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriusque æque multiplex erit, atque vnus vnius.

Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aeque multiplex. Dico vtrumque AC vtriusque BD aeque multiplicem esse, atque A ipsius E. quoniam enim A ipsius B multiplex est, & C ipsius D aeque multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita sunt & vterque BD vtriusque AC eadem pars erit, quae est B ipsius A. Vterque igitur AC vtriusque BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. quod demonstrare oportebat.

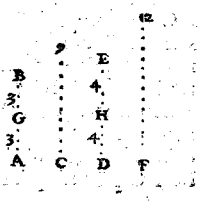


Sed quod de duobus dicitur, possumus etiam ad quotcumque numeros amplificare. vt Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, singuli singulorum æque multiplices, quotuplex est vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium [*quod eodem modo demonstrabimus. Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriusque eædem partes erit, quę vnus vnius.

Numerus enim AB numeri C partes sit, & alter D alterius F eędem partes, quæ AB ipsius C. Dico & vtrumque AB DE vtriusque C F easdẽ partes esse, quæ AB ipsius C. quoniam enim quę partes est AB ipsius C, eædem est DE ipsius F; quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE



partes

partes ipſius F. Diuidatur AB quidem in partes ipſius C, videlicet AG GB; DE vero diuidatur in partes ipſius F, hoc eſt DH HE. erit ipſorum AG GB multitudo æqualis multitudini ipſorũ DH HE. & quæ pars eſt AG ipſius C, eadem eſt pars & DH ipſius F: quę pars eſt AG ipſius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtriuſque C F. Simili ratione & quæ pars eſt GB ipſius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriuſque C F. Quę igitur partes eſt AB ipſius C, eędem partes eſt & vterque AB DE vtriuſque C F. quod demonſtrare oportebat.

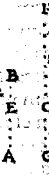
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc, & antecedentem poſſimus ad quotcumque numeros transferre; ut Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, ſintq; ſinguli ſingulorum vel eadem pars, vel eædem partes; quę pars, vel partes eſt vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars ſit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem eſſe, quę eſt totus AB totius CD. quæ enim pars eſt AE ipſius CF, eadem pars ſit & EB ipſius CG. ergo quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem pars eſt & AB ipſius GF. quæ autẽ pars eſt AE ipſius CF, eadem pars ponitur & AB ipſius CD. quæ igitur pars eſt AB ipſius GF, eadem eſt & AB ipſius CD. quare AB vtriuſque GF CD eadem eſt pars. æqualis igitur eſt GF ipſi CD. communis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD eſt æqualis. & quoniam quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem eſt & EB ipſius GC. æqualis autem eſt GC ipſi FD: quę pars eſt AE ipſius CF, eadem erit & EB ipſius FD. ſed quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem eſt & AB ipſius CD. ergo quæ pars eſt EB ipſius FD, eadem eſt & AB ipſius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonſtrare oportebat.



5. huius.

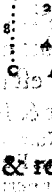
4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonſtrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui æque multiplex erit, atque totus totius.

Iiſdem enim, quae ſupra, manentibus. ſit numerus CD aeque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem eſſe, atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipſius AB aeque multiplex eſt, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipſius CD eadem pars, quae eſt AE ipſius CF. ergo ex iam demonſtratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars eſt, quae totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB. quod demonſtrandum fuerat.



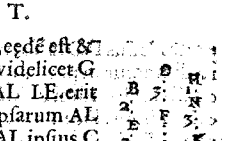
THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quę totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes ſit, quę ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eaſdem partes eſſe, quæ totus AB totius CD. ponatur enim

ipſi AB æqualis GH, quæ igitur partes eſt GH ipſius CD, eædē eſt & AE ipſius CF. Diuidatur GH quidē in partes ipſius CD, videlicet GK KH: AE vero diuidatur in partes ipſius CF, videlicet AL LE. erit igitur ipſarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipſarum AL LE. Et quoniā quæ pars eſt GK ipſius GD, eadem eſt & AL ipſius CF: maior aūt CD, quā CF. ergo & GK, quā AL eſt maior. ponatur ipſi AL æqualis GM. quę igitur pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt et GM ipſius CF. quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars eſt, quę totus GK totius CD. Rurſus quoniā quæ pars KH ipſius CD, eadē eſt et EL ipſius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipſi EL æqualis KN. quę igitur pars eſt KH ipſius CD, eadē eſt & KN ipſius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars eſt, quæ totus KH totius CD. oſtēſum autem eſt & reliquum MK reliqui FD eandem partem eſſe; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipſius DF eædem partes eſt, quę totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipſi EB; HG vero ipſi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes eſt, quæ totus AB totius CD. quod demonſtrare oportebat.

7. huius.

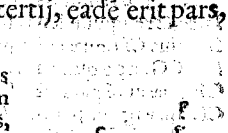


THEOREMA. VII. PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars eſt, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & ſecundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars ſit, & alter D alterius EF eadem pars, quę A ipſius BC. minor autem ſit A, quàm D. Dico & permutādo quę pars eſt A ipſius D, vel partes, eādem partem eſſe & BC ipſius EF, vel eaſdem partes. Quoniam enim quę pars eſt A ipſius BC, eadem eſt & D ipſius EF; quot numeri ſunt in BC æquales ipſi A, tot ſunt et in EF æquales ipſi D. diuidatur BC quidem in numeros ipſi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales, EH HF. erit ipſorū BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter ſe ſunt æquales; ſunt autem et æquales EH HF; atque eſt ipſorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF. quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipſius HF, vel eædem partes. ergo quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit et vterque BC vtriuſque EF, vel eædem partes. æqualis autem eſt BG ipſi A, et EH ipſi D. quæ igitur pars eſt A ipſius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipſius EF, vel eædm partes. quod demonſtrare oportebat.

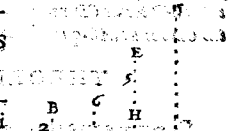
5. huius.
6. huius.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes eſt primus tertij, vel pars, eędem partes erit & ſecundus quarti, vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri C partes ſit, et alter DE alterius F eędem partes: ſit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes eſt AB ipſius DE, vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F, vel eandem partem. quoniam enim quæ partes eſt AB ipſius C, eædem partes eſt et DE ipſius F; quot ſunt in AB partes ipſius C, tot erunt et



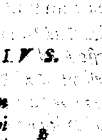
in

in DE partes ipsius F. diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eędē partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quę pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eædem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

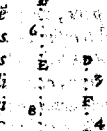
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et rēliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadē pars erit et AE ipsius CF, vel eædem partes. ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipsius CD. est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.



Diffi. 20.
7.8. huius.
Per cõuers.
Diffi. 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Præcedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quam CD. sed si AB maior sit, quàm CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel non metitur. & si quidē metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quae nos demōstr auimus ad septimā huius; & reliquus EB reliqui FB reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius GD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quae partes est CD ipsius AB, eędem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes est, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

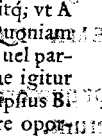


Diffi. 20.
Per cõuers.
Diffi. 20.
D. ffi. 20.
huius.
Per cõuers.
Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B, ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.



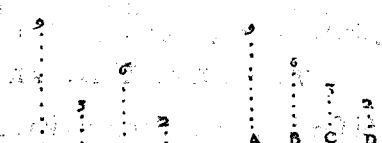
Diffi. 20.
5.6. huius.
Per conuers.
Diffi. 20.

SCHOLIVM.

Hoc quinto, & sexto vniuersalius est. quæ enim illic seorsum in partes, & partibus, eadem hoc loco vnà demonstrantur.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hęc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quòd si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur. si metitur, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quae demonstrauimus ad quintam huius, & vterque A C vtriusq;



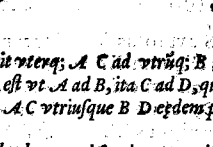
Conuer. 20. diffi. 5. huius. *BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrumq; B D.*

Quòd si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur. quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae partes est B ipsius A, eędem partes erit D ipsius C. ergo & uterq; A C vtriusque B D eędem partes est, quae A ipsius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.

Conuer. 20. diffi. *Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc, quod sequitur, premisso.*

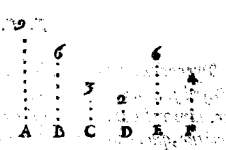
Quæ eidem eædem sunt numerorum proportiones, et inter se eædem erunt.

Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam vt C ad D, ita est E ad F, quae pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quae igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F



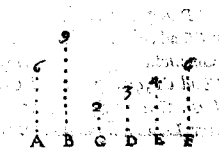
Conuer. 20. diffi. *ipsius E. ergo vt A ad B, ita est E ad F.*

Si vero A sit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita est C ad D, quae pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quae pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel par-



Conuer. 20. diffi. *tes E ipsius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonstrandum proposuimus.*

Hoc demõstrato sint numeri proportionales A B C, D E F; sitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadem ratione demonstrabimus vt A ad D, ita esse A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõstrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter ostendemus vt A B ad D E, ita esse A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erit A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 12 quinti vniuersè de magnitudinibus demonstratur.

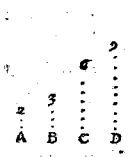


THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-

et permutãdo proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quoniã enim est vt A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, vel partes, eadẽ pars erit et C ipsius D, vel eædem partes. permutãdo igitur quæ pars est A ipsius C, vel partes, eadẽ pars est & B ipsius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat.

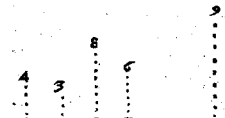


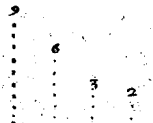
Diffi. 20.

9. 10. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sint consequentibus, sitq; A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D.



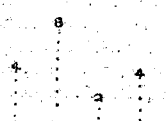


Diffi. 20.

9. 10. huius.

Cõu. dif. 20.

Quòd si A sit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumẽtabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est D ipsius C, eadẽ pars, vel partes erit B ipsius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique si A sit minor, quàm B, & maior, quàm C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutando igitur quae pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars, vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D.



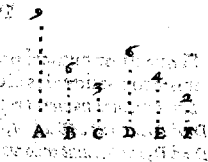
9. 10. huius.

Cõu. dif. 20.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione DEF, sitq; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E, erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare.

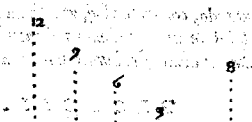


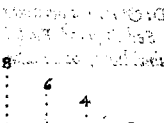
Ex antecedentis.

Ex demonstratis ad 12 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri proportionales fuerint ABCD EFGH; sitq; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad G, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: similiter demonstrabimus ut A ad C, ita esse E ad G. et quoniã est vt C ad





A ad B, ita

D, ita G ad H, rursus demonstrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.

Sed quoniam Euclides conuersam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq; rationis in numeris omisit; nos eas, ne quid desideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

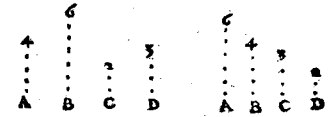
Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; ut A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita esse D ad C. Si enim A sit minor, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel partes est A ipsius B, eadē pars, vel eędē partes erit C ipsius D. ergo ut B ad A, ita est D ad C.

Diff. 10.

Cõu. dif. 10.

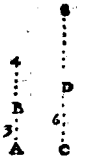
Si uero A sit maior, quàm B, rursus quoniam vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars, uel partes erit D ipsius C. Vt igitur B ad A, ita est D ad C.



PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & sit vt A ad B, ita C ad D. Dico ut A B ad B, ita esse C D ad D. nam cum sit ut A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita est B ad D. Rursus igitur permutando ut AB ad B, ità CD ad D.



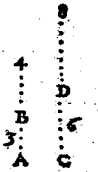
PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt numerus AB, qui ex duobus numeris constat ad numerum B, ita C D ex duobus C D constans ad ipsum D. Dico vt A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est vt AB ad B, ita CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. si autem fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. ergo A ad C est vt AB ad CD. sed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rursus permutando ut A ad B, ita C ad D.

17. huius.

11. huius.



PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales sint, et per conuersionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt AB ad B, ita CD ad D. Dico ut AB ad A, ita esse CD ad C. Quoniam enim est ut AB ad B, ita CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum sit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt AB ad CD: & rursus permutando, conuertendoq; ut AB ad A, ita CD ad C.

13. huius.

11. huius.

Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

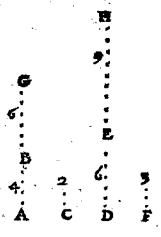
PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad secundum proportionem eandem, quam sextus ad quartum; et compositus primus et quintus ad secundum eandem proportionem

nem

nem habebit, quam tertius et ſextus ad quartum.

Primus enim numerus A B ad ſecundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq; quintus B G ad ſecundum C eandem proportionem, quam ſextus E H ad quartum F. Dico primum & quintum A G ad ſecundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & ſextus DH ad quartum F. Quoniam enim eſt vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad E H. et quoniam vt A B ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad H E. Sed vt G B ad C, ita eſt EH ad F. rurſus igitur ex aequali vt AG ad C, ita eſt DH ad F.



1. Additarũ.

14. huius.

2. Additarũ.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque ſecundus quartum.

Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot vnitates ſunt in BC, tot ſunt et in EF numeri æquales ipſi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales EK KL LF. erit igitur ipſorum BG GH HC multitudo æqualis multitudini ipſorum EK KL LF. & quoniã BG GH HC vnitates inter ſe æquales ſunt: ſuntq; numeri EK KL LF inter ſe æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum; & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cõſequentes. eſt igitur vt BG ad numerum E K, ita BC ad EF. æqualis autem eſt BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita eſt BC ad EF. æqualiter igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipſum EF. quod demonſtrare oportebat.

A.

B. G. H. C.

D..

E..K..L..F

12. huius.

Diffi. 6.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis inter ſe æquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipſum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipſi D æquale eſſe. Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit C, metietur B ipſum C per vnitates, quæ ſunt in A. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipſo ſunt. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipſum C. quare permutando vnitas E numerum B æqualiter metitur, atq; A ipſum C. Rurſus quoniam B ipſum A multiplicans fecit D; A metietur ipſum D per vnitates, quæ ſunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipſo ſunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipſum D. ſed E unitas numerũ B æqualiter

E. 1

A.. 2

B... 3

C..... 6

D..... 6

ex. com. not.

6. com. not.

Ex antecedente.

B æqualiter metitur, atque A ipſum C. Cum igitur A vtrũque ipſorum C D æqua
4 com. not. liter metiatur, erit C ipſi D æqualis. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipſos
D E. Dico ut B ad C, ita eſſe D ad E. quoniam enim A ipſum B mul
15. com. not. tiplicans fecit D, metietur B ipſum D per unitates, quæ ſunt in A.
6. com. not. metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipſo
ſunt. æqualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipſum
Conuerſ. 20. Diff. D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita eſt B ad D. eadem ratione
et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C
ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demõſtrare opor
tebat.

F 1
A 2
B 3
C 4
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

Idem ſequetur etiam ſi numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipſos EFG. Dico vt B ad C, ita eſſe E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt ſupra, demonſtrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita eſſe B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam eſt vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rurſus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita eſt E ad F. & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonſtrare.

H 1
A 2
B 3
C 4
D 5
E 6
F 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fa-
ciant ipſos D E. Dico vt A ad B, ita eſſe D ad E. Quoniam enim A
16. huius. ipſum C multiplicans fecit D; & C multiplicans A ipſum D fecit. Ea
dem ratione & C ipſum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C
Ex ante- cedente. duos numeros A B multiplicans ipſos D E fecit. eſt igitur ut A ad
B, ita D ad E. quod demonſtrare oportebat.

A 3
B 4
C 2
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

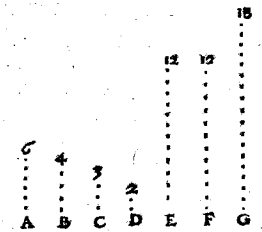
Quòd ſi plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti ſimiliter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonſtrabimus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, &
quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipsum D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F æqualem esse. multiplicās enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidem C multiplicans fecit G, ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicās fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E æqualis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. ijsdem enim constructis quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.



17. huius.

Ex antecedente. A

17. huius. B C

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quam E, vel F; erit vterque ipsorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipsius G: si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F. quare E F inter se aequales sint necesse est.* 3. 4. co. not. A

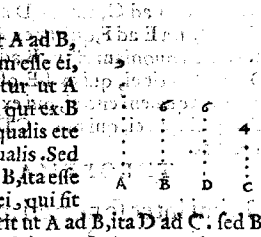
Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsorum E F eadem pars, vel eędem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.* B

Vt autem G ad F, ita A ad B.] *Nam enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.* C

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC. æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex B D. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis sit ei, qui ex B D. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit æqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est æqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipsum A, atque EF ipsum B. numerus enim CD ipsius A non est partes. Si enim fieri potest, sit CD partes ipsius A. ergo EF ipsius B eædem partes erit, quæ CD ipsius A, quot igitur in CD partes sunt ipsius A, tot erunt & in EF partes ipsius B. Diuidatur CD quidem in ipsius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipsius B, EH HF. erit igitur ipsarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipsarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter se sunt; sunt autem & EH HF inter se æquales, atque est ipsarum CG GD multitudo multitudini ipsarum EH HF æqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. quare ut CG ad EH, ita est CD ad EF; ac propterea CG EH in eadē sunt proportione, in qua CD EF, minores ipsis existentes. quod fieri non potest: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium. non igitur CD ipsius A partes est. ergo est pars. et EF ipsius B pars eadem est quę CD ipsius A. æqualiter igitur CD ipsum A, atque EF ipsum B metitur. quod oportebat demonstrare.

C. G. D
E. H. F
A 3
B 6

20. diffi.

12. huius.

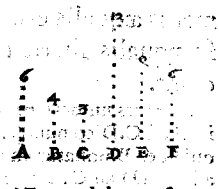
F. C. COMMENTARIVS.

✲ Erit vt CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam cum CG GD inter se aequales sint, itemq; aequales inter se EH HF, si CG sit minor, quàm EH, quae pars, uel partes est CG ipsius EH, eadem pars, vel partes erit GD ipsius HF. si vero sit maior, quae pars, vel partes EH ipsius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipsius GD. ergo vt CG ad EH, ita GD ad HF.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione, sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres numeri A B C, et alij ipsis multitudine æquales qui bini sumantur, et in eadem proportione D E F; sitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita sit E ad F; vt autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est ut A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD æqualis erit ei, qui ex BE. ostensum autem est et qui fit ex AF æqualem esse ei, qui ex B E. ergo et qui fit ex A F æqualis est ei, qui fit ex C D. vt igitur A ad C, ita D ad F. quod demonstrare oportebat.



19. huius.

19. huius.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum, qui eādem, quam ipsi proportionem habent.

Sunt

Sint primi inter se numeri A B. Dico eos minimos esse eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent. si enim non ita sit, erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandē, quam A B proportionem habebunt. sint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens cō sequentem; numerus C ipsum A æqualiter metietur, atque D ipsum B. quoties autem C metitur ipsum A, tot vnitates sint in E. ergo et D ipsum B metitur per vnitates, quę sunt in E. et quoniam C metitur ipsum A per vnitates quę sunt in E, numerus E ipsum A per vnitates, quæ sunt in C, metietur. et eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ sunt in D. ergo E ipsos A B metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis AB, qui eandē habeant proportionem. ergo AB minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. quod oportebat demonstrare.

A 5
B 4
E ——
C ——
D ——

21. huius.

8. com. not.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipsi proportionē habent A B. Dico A B primos inter se esse. si enim nō sunt A B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; C. et quoties C ipsum quidem A metitur, tot vnitates sint in D. quoties vero C metitur ipsum B, tot vnitates sint in E. et quoniam C ipsum A metitur per vnitates, quę sunt in D, multiplicans C ipsum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans E ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo DE in eadem sunt proportione, in qua AB, minores ipsis existentes. quod fieri non potest. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.

A 6
B 5
C ——
D ——
E ——

9. com. not.

17. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A B, et aliquis numerus C ipsum A metiatur. Dico et B C inter se primos esse. Si enim B C nō sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A, et D ipsum A metietur. metitur autem et ipsum B. ergo D numeros AB metitur primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur B C numeros numerus aliquis metietur. ideoq; B C inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

A 6
B 5
C .. 3
D —

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui fit ex ipsis ad eum primus erit.

Duo enim numeri A B ad aliquem numerũ C primi sint: et A ipsum B multiplicaus faciat D. Dico C D inter se primos esse. si enim C D non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur; sitq; E. et quoniã C A primi inter se sunt, et ipsum C metitur aliquis numerus E; erunt E A inter se primi. quoties autem E ipsum D metitur, tot vnitates sint in F. quare et F metitur ipsum D per vnitates, quæ sunt in E. ergo E ipsum F multiplicans fecit D. sed et A multiplicas B ipsum D fecit. qui igitur fit ex E F est æqualis ei, qui ex A B. si uero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. est igitur ut E ad A, ita B ad F. sunt autem A E inter se primi, et qui primi etiam minimi sunt. minimi vero eãdẽ, quam ipsi, proportionem habentium, eos, qui eandem habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo E ipsum B metitur. metitur autẽ et ipsum C. quare E ipsos B C metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

A..2 B ...3
C.....5
D.....6
E.....
F.....

Ex antecedente.
8. com. not.
9. com. not.
19. huius.
23. huius.
21. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab vno ipsorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter se primi AB; & A se ipsum multiplicans faciat C. Dico B C inter se primos esse. ponatur enim ipsi A æqualis D & quoniam AB sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D; & DB inter se primi erunt. vterque igitur ipsorum A D ad B primus est. ergo & qui ex AD fit primus erit ad B. sed qui fit ex AD est numerus C. quare C B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

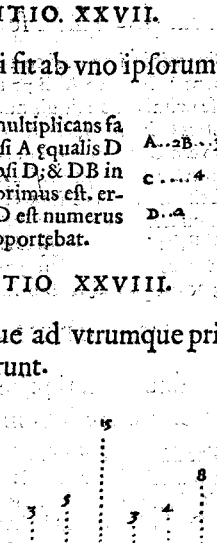
A..2B..3
C....4
D..6

Ex antecedente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Duo enim numeri A B ad duos numeros C D vterque ad vtrumque primi sint: & A quidem ipsum B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D faciat F. Dico EF inter se primos esse. Quoniam enim vterque ipsorum A B ad C primus est, & qui fit ex A B ad C primus erit. qui autem fit ex A B est E. ergo E C primi inter se sunt. Eadẽ ratione & E D primi sunt inter se. vterque igitur ipsorum C D ad E primus est: ac propterea qui fit ex C D primus erit ad E. qui uero ex CD fit est numerus F. ergo E F primi inter se erunt. quod demonstrare oportebat.



26. huius.

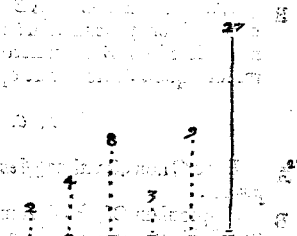
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque seipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se. & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos

faciant

faciant, & ipſi inter ſe primi erunt: & ſemper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter ſe primi A B: & A ſe ipſum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E. & B ſe ipſũ multiplicãs D faciat; multiplicans autem D faciat ipſum F. Dico C D, & E F inter ſe primos eſſe. Quoniam enim A B primi inter ſe ſunt; & A ſe ipſum multiplicans fecit C; erunt C B primi inter ſe. & quoniam C B inter ſe primi ſunt, & B ſe ipſum multiplicans fecit D; erũt C D inter ſe primi. Rurſus quoniam A B primi ſunt inter ſe, & B ſe ipſum multiplicans D fecit; A D inter ſe primi erunt. Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D vterque ad vtrumque primi ſint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit. ſed qui fit ex AC eſt numerus E, qui vero ex BD fit eſt F. ergo E F primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.



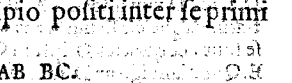
27. huius.

Ex antecedente.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & vterque ſimul ad vtrũque ipſorum primus erit. quod ſi vterque ſimul ad vnum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri à principio poſiti inter ſe primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter ſe primi AB BC. Dico & vtrumque ſimul, vi delicet A C ad vtrumque ipſorum AB BC primum eſſe. Si enim non ſint CA AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & ſit D. Quoniam igitur D metitur ipſos CA AB; & reliquum BC metietur. metitur autem & BA. ergo D ipſos AB BC metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB AC inter ſe primi ſunt. ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus. Sint rurſus CA AB primi inter ſe. Dico & ipſos AB BC inter ſe primos eſſe. Si enim AB BC non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; D. & quoniam D metitur vtrumque ipſorum AB BC, & totum CA metietur; metitur autem & AB. ergo D ipſos CA AB metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB BC numeros numerus aliquis metietur. ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.



13. com. not.

A

11. com. not.

B

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus] *eodem enim modo demonſtrabitur & A C CB inter ſe primos eſſe.* A

Ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt] *idem etiam ſequetur ſi CA CB inter ſe primi ſint. quod eodem modo demonſtrabimus.* B

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

Sit primus numerus A, qui numerum B non metiatur. Dico B A inter ſe primos

esse,si enim non sint B A inter se primi,metietur eos aliquis nu-
A merus.metiatur,et sit C.ergo C non est vnitas. et quoniam C ip
sum B metitur, A vero non metitur ipsum B ; non erit C idem
B qui A.et quoniam C ipsos B A metitur,et metietur ipsum A pri
mum existentem,cum non sit idem,qui A.quod fieri non potest.
non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metietur. quare A B inter se primi sunt.quod demonstrare oportebat.

A — B — C

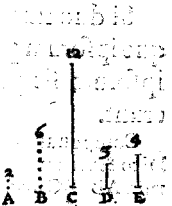
F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non est vnitas] *si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se. quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipsos B A metitur,et metietur ipsum A primum existentem,cum
7. com.not. non sit idem,qui A.quod fieri non potest] *omnis enim numerus se ipsum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

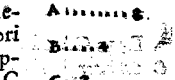
Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciãt, eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum,qui à principio positi sunt,metietur.



Duo enim numeri A B se inuicem multiplicantes faciãt C, ipsum uero C metiatur aliquis numerus primus, qui sit D.Dico D vnũ ipsorum A B metiri. ipsum enim A non me
Ex ante- tiatur;atque est D numerus primus. ergo A D primi inter cedente. se sunt. et quoties D ipsum C metitur, tot unitates sint in E.Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas, quæ sunt in
Com.not.9. E unitates; numerus D ipsum E multiplicans fecit C. sed et A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex D E,æqua-
19.huius. lis est ei, qui ex A B.est igitur ut D ad A, ita B ad E. et sunt
23.huius. A D primi inter se,primi vero et minimi. sed minimi eos,
21.huius. qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem,hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem.ergo D ipsum B metitur.similiter demonstrabimus,si D non metiatur B ipsum A metiri.quare D metitur vnum ipsorum A B.quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.



Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum
Diffi. 13: ipsum A metiri. Quoniam enim compositus numerus est A, metietur ipsum aliquis numerus.metiatur; et sit B. & si quidem primus est B,manifestum est,quod quæritur.si vero compositus, ipsum aliquis numerus metietur.metiatur; sitq; C. Et quoniam C
12.co.not: metitur ipsum B, B uero ipsum A;& C ipsum A metitur.& si quidem primus est C, manifestum est quod quæritur.Si vero compositus eum aliquis numerus metitur.& hac consideratione facta, relinquetur tandem aliquis numerus primus, qui præcedentem & ipsum A metietur.si enim nõ relinquitur primus,
3.postul: metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor.quod in numeris fieri non potest.ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A.omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

ALITER

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus. & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. erit C minor, quàm B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdū. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandū fuit.

A.....9
B...3
C.

THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quæritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

A...3
A.....6 Ex antecedente
...3

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcūque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi A B C, proportionem habeāt. vel igitur A B C primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, et minimi erunt eandem, quā ipsi proportionem habentium. si verò non primi, sumatur ipsorum A B C maxima communis mensura D, et quoties D vnumquemque ipsorum A B C metitur, tot vnitates sint in vnoquoque horum E F G. et vnusquisque igitur ipsorum E F G vnumquemque ipsorum A B C metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo E F G ipsos A B C æqualiter metiuntur, ac propterea E F G in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B C. Dico eos etiā minimos esse. si enim E F G non sint minimi, eandem, quam ipsi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis E F G minores in eadem proportione, in qua A B C. sint H K L, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterque ipsorum K L vtrūque B C metitur. quoties autem H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. et vterque igitur K L vtrumque B C metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. et quoniā H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, et M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipsorū B C metietur per vnitates, quę sunt in utroque K L. ergo M ipsos A B C metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex H M est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem est E, quàm H. ergo et M quàm D est maior, et ipsos A B C metitur. quod fieri nō potest. ponitur enim D ipsorum A B C maxima communis mensura. non igitur erunt ali qui numeri minores ipsis E F G, in eadem proportione, in qua A B C. ergo E F G minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi A B C proportionē habent. quod oportebat demostrare.

A.....6
B.....8
C.....10 23. huius.
D..2 2. huius.
E...3
F.....4
G.....5 18. huius.
H
K
L
M 21. huius.

8. com. not.

9. com. not.

19. huius.

F. C.

Quoniam ſæpe vſu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi ſint, libuit hoc loco ſequens problema adnectere.

Numeris quotcũque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habeant.

Sint dati quotcumque numeri deinceps proportionales ABC. oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipſi A B C proportionem habeant. Itaque vel A B primi ſunt inter ſe, vel non primi: et ſi quidem pri
23.huius. *mi, & minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent: ſin minus, ſu-*
2.huius. *matur ipſorum AB maxima communis menſura D: & quoties D metitur A, tot vnitates ſint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates ſint in F.*
18.huius. *ergo & E F ipſos A B aequaliter metiuntur: ideoq; E F in eadem ſunt proportione, in qua ipſi A B. Dico E F etiam minimos eſſe. ſi enim non ſint minimi, erunt aliqui numeri minores ipſis E F, qui eandem, quam A B proportionem habeant. ſint GH. ergo G aequaliter metitur A, atque H ipſum B. &*
21.huius. *quoties G metitur A, tot vnitates ſint in K. quare & H metietur B per eas, quae ſunt in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quae ſunt in G, metieturq; B per vnitates, quae ſunt in H. ergo K ipſos A B metitur. & quo*
8. com. not. *niam G ipſum A metitur per eas, quae ſunt in K vnitates, G multiplicans K fecit A. Rurſus quoniam E metitur A per vnitates, quae ſint in D; & E mul*
19.huius. *tiplicans D fecit A. qui igitur fit ex E D eſt aequalis ei, qui ex GK; ac propterea vt E ad G, ita erit K ad D. eſt autem E maior, quàm G. ergo & K maior quàm D, & ipſos A B metitur. quod fieri non poteſt. erat enim D ipſorum AB maxima communis menſura. non igitur ſunt aliqui numeri minores ipſis E F, qui eandem, quam ipſi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B, ita eſt B ad C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur ſunt minimi numeri E F, qui eandem, quam ipſi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.*

A....4
B.....6
C.....9
D..2
E..2
F...3
G——
H——
K——

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B. oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel primi inter ſe ſunt, vel non. ſint primum A B inter ſe
16.huius. primi: & A ipſum B multiplicãs faciat C. ergo & B multiplicans A ipſum C fecit. ac propterea numeri A B ipſum C metiuntur. Dico etiam C minimum eſſe. ſi enim non ita ſit, metientur A B numerum aliquem minorẽ, quàm C. metiantur ipſum D. & quoties A ipſum D metitur, tot vnitates ſint in E; quoties autem B metitur D, tot unitates ſint in F. ergo A quidem ipſum E multiplicans fecit D; B uero multiplicans F ipſum D fecit. qua-
19.huius. re numerus, qui ex AE fit eſt æqualis ei, qui fit ex BF. vt igitur A ad B, ita eſt F ad E.
23 huius. & ſunt A B primi. primi autem & minimi. ſed minimi eos, qui eandem habent pro-
21.huius. portionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipſum E metitur, & conſequens conſequentem. & quoniam A numeros B E multiplicans fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipſum E. ergo & C ipſum
18.huius. D metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur A B metiuntur aliquem numerum minorem ipſo C, quando A B primi inter ſe ſuerint. ergo A B ipſum C minimum exiſtentem metiuntur. Sed non ſint A B primi inter ſe. & ſumãtur
19.huius. minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui ſint F E. æqualis igitur eſt, qui ex A E fit ei, qui ex BF. & A ipſum E multiplicãs faciat C. ergo & B multi-

A...3 B....4
C.....12
D——
F——
F——

multiplicans F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiũtur.
Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties autem B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsũ D fecit. qui igitur ex A G fit est æqualis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt F ad E, ita H ad G: & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipsos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum G. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri nõ potest. non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. ergo A B ipsum C minimum existentem metientur. quod demonstrare oportebat.

F . 2 A 4
E . . . 3 B 6
C 12
D
G
H

9. com. not.
19. huius.
21. huius.
18. huius.

SCHOLIVM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15. eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum C D metiri. si enim E non metitur C D E, metiens F D relinquat se ipso minorem CF. & quoniam A B ipsum E metiuntur, E vero ipsum DF: & A B metientur D F. sed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C F minorem ipso E metientur. quod fieri non potest. non igitur E ipsum CD non metitur. quare ipsum metiatur necesse est. quod demonstrare oportebat.

A . . 2
B . . . 3
E 6
C ——— F ——— D

12. com. not.
13. com. not.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.

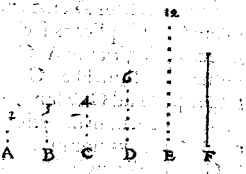
Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. sumatur enim D, quem minimum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non metitur. metiatur primum. sed & A B metiuntur ipsum D. ergo A B C ipsum D metientur. Dico & minimum. si enim non, metientur A B C quendam numerum minorem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipsum E, & A B ipsum E metiuntur. ergo & minimus, quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autem, quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. ergo A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipsum D: & sumatur minimus

3 4 6 12
A B C D E

Ex antecedente.

36. huius.

nimus numerus E, quē C D metiuntur. Itaque qm A B metiuntur ipſum D, D verò
12.co.not. ipſum E; & A B ipſũ E; metientur. metitur aũt & C ipſum E. ergo A B C ipſum E metiuntur. Dico & minimum. ſi enim non, metien
tur A B C numerum minorem ipſo E. metiantur
Ex ante- F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipſum
cedente, F metientur. ergo & minimus, quem A B metiun
tur, metietur ipſum F: minimus autem, quem A
B metiuntur, eſt D. quare D ipſum F metitur, &
metitur C ipſum F. ergo D C ipſum F metientur;
ac propterea minimus, quem metiuntur D C, me
tietur & F. ſed minimus, quem metiuntur D C, eſt
E ergo E ipſum F metitur, maior minorē. quod fie
ri non poteſt. non igitur A B C metiuntur aliquē
numerum minorem ipſo E. ergo numerum E minimum exiſtentem ipſi A B C metiuntur. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, menſus partem habebit à metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur. Dico A partem habere ab ipſo B denominatam. quoties enim B ipſum A metitur, tot vnitates ſint in C. Quoniam igitur B metitur ipſum A per eas, quę ſunt in C, vnitates; metitur autem & D unitas ipſorum C per vnitates, quæ in ipſo ſunt: & D vnitas ipſum C numerum æqualiter metie
15.huius. tur, atque B ipſum A. quare permutando unitas D ipſum B numerum æqualiter metietur, atque C ipſum A. quæ igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem eſt pars
5. com. not. & C ipſius A. ſed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata. ergo & C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. quare A partem habet C ab ipſo B denominatam. quod oſtendere oportebat.

A 12
B . . . 3
C 4
D . 1

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B; & ab ipſo B denominatus ſit numerus C. Dico C ipſum A metiri. Quoniam enim B ipſius
5. com. not. A pars eſt denominata ab ipſo C. eſt autem & D vnitas ipſius C numeri pars ab eo denominata. quæ igitur pars eſt vnitas D ipſius C numeri, eadem pars eſt & B ipſius A. ergo vnitas D æqualiter metitur ipſum B numerum, atque B ipſum
15.huius. A. & permutando unitas D ipſum B numerum æqualiter metitur, atque C ipſum A. ergo C ipſum A metitur. quod oportebat demonſtrare.

A 12
B . . 2
C 6
D . 1

PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus exiſtens datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus sit, habeat partes A B C. sint ab ipsis A B C partibus denominati numeri D E F. & sumatur minimus numerus G, quem ipsi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipsum G, habebit G partes ab ipsis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipsis D E F sunt A B C. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum esse. si enim G non existens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. sit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, eum metientur numeri ab ipsis A B C partibus denominati; sunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipsum H metiētur; atque est H minor ipso G. quod fieri non potest. non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonstrare.

A $\frac{1}{2}$ D..2
B $\frac{1}{3}$ E...3
C $\frac{1}{4}$ F....4
G.....12
H——

32. huius.
39. huius.

SEPTIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER OCTAVVS

CVM COMMENTARIIS,

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

SI sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, quorũ extremi A D primi inter se sint. Dico A B C D minimos esse omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis A B C D numeri E F G H, & in eadem proportione. Et quoniam A B C D sunt in eadem proportione, in qua E F G H; atque est ipsorũ A B C D multitudo æqualis
14. septimi. multitudini ipsorum E F G H: erit ex æquali ut A ad D, ita E ad H: et sunt A D
21. septimi. primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur E F G H minores ipsis A B C D existentes in eadẽ sunt, in qua ipsi, proportione; ac propterea A B C D minimi sunt omnium, qui eandẽ, quam ipsi proportionem habent. quod demonstrare oportebat.

A 8
B 12
C 18
D 27
E
F
G
H

PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B. imperentur quattuor: et A se ipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D, et B se ipsum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans C D E ipsos F G H faciat, B vero multiplicans E faciat K. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit C, multiplicãs vero B ipsum D fecit; numerus A duos numeros A B multiplicans fecit C D. est igitur ut A ad B, ita C ad D. rursus quo-
17. septimi. niam

niam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsũ multiplicans fecit E; vterque ipsorum A B multiplicans B vtrumque ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros CD multiplicans ipsos F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad C. rursus quoniam A numeros D E multiplicans fecit GH, erit vt D ad E, ita G ad H. sed vt D ad E, ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipsum E multiplicantes faciant H K; erit vt A ad B, ita H ad K. ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales sunt in proportione, quã habet A ad B. Dico ẽt minimos esse. Quoniam enim A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi vero, & primi sunt inter se: erunt ipsi A B inter se primi. et vterque quidem ipsorum A B seipsum multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter se sunt. si autem sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo C D E, & F G H K minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionẽ habẽt. quod oportebat demonstrare.

A..2
B..3
C....4
D.....6
E.....9
F.....8
G.....12
H.....13
K.....27

18. septimi.
18. septimi.
23. septimi.
29. septimi.
Ex antecedente.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium; extremos eorũ quadratos esse: si vero quattuor esse cubos.

A.....8
B.....12
C.....18
D.....27

THEOREMA II.
PROPOSITIO. III.

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, minimi omniũ, qui eãdem, quam ipsi, proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quã ipsi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumãtur enim duo numeri minimi in proportione ipsorum ABCD, qui sint E F, tres vero GHK, & semper deinceps vno plures, quo ad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum ABCD. sumantur, & sint LMMX. extremi igitur ipsorum LX primi inter se

E..2
F..3
G....4
H.....6
K.....9
L.....8
M.....12
N.....18
O.....27

Ex antecedente.
29. septimi.

ter ſe ſunt. Quoniam enim EF primi ſunt, & vterque ipſorum ſe ipſum multiplicãs vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK, & LX primi. & quoniam ABCD minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent; ſunt autem & LMNX minimi in eadẽ proportione, in qua ABCD; eſtq; ipſorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipſorum LMNX: erit vnuſquiſque ipſorum ABCD vnicuique ipſorum LMNX æqualis. Ergo A quidem eſt æqualis L, B vero ipſi M, C ipſi N, & D ipſi X. quòd cum LX primi ſint inter ſe, & L ipſi A æqualis, & X ipſi D; & AD inter ſe primi erũt. quod oportebat demõſtrare.

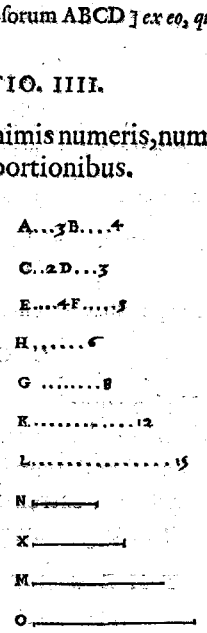
F. C. COMMENTARIVS.

25 Sumãtur enim duo minimi numeri in proportione ipſorum ABCD] *ex eo, quod ad* 35 *huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

Sint datæ proporriones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B, & in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F. Sumatur enim minimus numerus,
36. ſeptimi. quem BC metiuntur; ſitq; G. & quoties B metitur G, toties A ipſum H metiatur; quoties vero C ipſum G metitur, toties & D metiatur K, itaque E ipſum K vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K, toties F ipſum L metiatur. & quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipſum G; erit vt A ad B, ita H ad
17. ſeptimi. G. Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K; & adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales ſunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F. Dico etiam minimos eſſe. Si enim non ſint HGKL deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis HGKL deinceps minimi in eiſdem proportionibus. ſint N X M O. & quoniam eſt vt A ad B, ita N ad X; & ſunt A B minimi; minimi autem eos, qui
21. ſeptimi. eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedẽtem, & conſequẽs conſequentem: metietur B ipſum X. Eadem ratione & C ipſum X metietur. quare
A
37. ſeptimi. B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipſum X metietur. minimus autem, quem metiuntur B C, eſt G. ergo G metietur X, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis H G K L deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipſum K; & ſumatur minimus numerus, quem ipſi E K metiuntur;
36. ſeptimi. ſitq; M. quoties autem K metitur M, toties & vterque ipſorum HG vtrumque N X metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipſũ
7. ſeptimi. N æqualiter metitur, atque G ipſum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rurſus quoniã E ipſum M æqualiter metitur, atque F ipſum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps proportionales ſunt in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. Dico minimos quoque eſſe. Si enim non ſint NXMO deinceps minimi



in

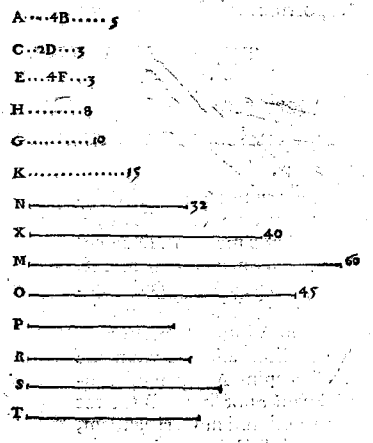
in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erũt aliqui numeri minores ipſis NX MO deinceps minimi in eiſdem proportionibus. ſint PRST. & cum ſit vt P ad R, ita A ad B; ſintq; AB minimi; minimi vero eos, qui eãdẽ habẽt proportionẽ, æqualiter metiũtur, antecedẽs antecedẽtẽ, & cõſequẽs cõſequẽtẽ: numerus B ipſũ R metietur. 21. ſeptimi.

Eadem ratione & C metietur ipſũ R. ergo B C ipſum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiũtur B C, ipſum R metietur. minimus aũt, quẽ metiũtur B C, eſt G. ergo G metitur ipſum R. atque eſt vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipſum S metitur: metitur autem & E ipſum S; ideoq; E K ipſum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipſum S. Sed minimus, quem metiũtur E K, eſt M. ergo M ipſum S metietur, maior minorem. quòd fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi ſunt in eiſdem proportionibus. quod demonſtrare oportebat.

B

37. ſeptimi.

C



F. C. COMMENTARIVS.

Eadem ratione & C ipſum X metitur.] *Quoniam enim eſt vt C ad D, ita X ad M; & ſunt C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur: numerus C ipſum X metietur.* A

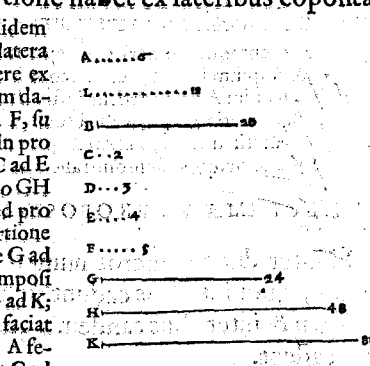
Eadem ratione & C metietur ipſum R] *eſt enim vt C ad D, ita R ad S: ſintq; C D minimi. ergo ob iam dictam cauſſam C ipſum R metietur.* B

Atque vt G ad R, ita K ad S] *eſt enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.* C

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter ſe proportionẽ habẽt ex lateribus cõpoſitã.

Sint plani numeri A B, et ipſius quidem A latera ſint C D numeri; ipſius vero B latera ſint E F. Dico A ad B proportionẽ habere ex lateribus cõpoſitã. proportionibus enim datis, videlicet quã habẽt C ad E, & quã D ad F, ſumãtur numeri deinceps minimi G H K in proportionibus C ad E, & D ad F, ſitq; vt C ad E ita G ad H: vt aũt D ad F, ita H ad K. ergo G H K inter ſe proportiones habẽt lateriũ. Sed proportio G ad K compoſita eſt ex proportione G ad H, et proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compoſitam. Dico igitur vt A ad B, ita eſſe G ad K; numerus enim D ipſum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipſum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad



Ex antecedente.

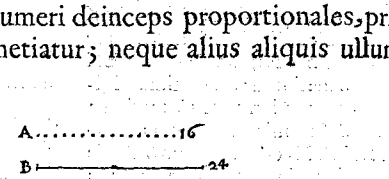
E, ita

E, ita A ad L. ut autem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L. quare ex æquali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

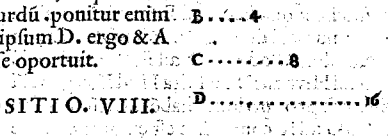
Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps esse nō metiri, perspicuum est; neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipsum C. nam quot sunt A B C, tot sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentes. & sint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem sunt proportione, in qua A B C, atque est ipsorum A B C multitudo æqualis multitudini ipsorum F G H; erit ex æquali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam est vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt F H primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neq; igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D; & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoque B metiri. si enim A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod est absurdū. ponitur enim A ipsum D metiri. metitur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. quod demonstrasse oportuit.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alius eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter duos enim numeros A B cadant numeri C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter E F deinceps proportionales cadere. quot enim numeri sunt A C D B, totidem sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A C D B proportionem habentium G H K L. ergo extremi ipsorum G L primi inter se sunt. & quoniam A C D B ad ipsos G H K L in eadem sunt proportione; atque est ipsorum A C D B multitudo æqualis multitudini ipsorum G H K L; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & sunt G L primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G æqualiter metitur ipsum E, atque L ipsum F. quoties autem G metitur ipsum E, toties & vterque ipsorum H K vtrumque M N metiatur. numeri igitur G H K L ipsos E M N F æqualiter metiuntur. ideoque G H K L in eadem sunt proportione, in qua ipsi E M N F. at G H K L similiter in eadem sunt proportione, in qua A C D B. ergo A C D B in eadem proportione erunt, in qua E M N F. Sed A C D B sunt deinceps proportionales. ergo & E M N F deinceps proportionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem deinceps proportionales & inter E F cadent. quod demonstrare oportebat.

A . . 2
C 4
D 8
B . . . . . 16 — 35. septimi.
G . 1
H . . 2 — 3. huius.
K 4
L . . . . . 8 — 14. septimi.
E . . . 3
M . . . . . 6 — 23. septimi.
N . . . . . 12 — 21. septimi.
F 24

18. septimi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

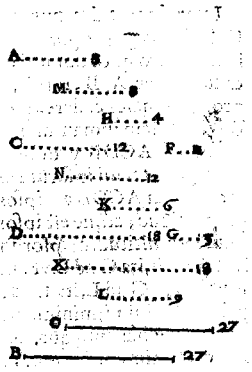
Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A B: & inter ipsos deinceps proportionales cadant C D; exponaturq; vnitas E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A B, totidem & inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. sumantur enim duo quidem numeri minimi F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B; tres vero H K L, & semper deinceps vno plures, quo ad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B. sumantur, & sint M N X O. itaque manifestum est F se ipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse M: & G se ipsum quidem multiplicantem fecisse L; multiplicantem vero L fecisse O. & quoniam M N X O minimi sunt qui eadem, quam ipsi F G proportionem habent; sunt autem & A C D B minimi eandem, quam F G proportionem habentium; atque est ipsorum M N X O multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B: erit vnusquisque ipsorum M N X O vnicuique ipsorum A C D B æqualis. æqualis igitur est M ipsi A, & O ipsi B. & quoniã F se ipsum multiplicans fecit H, metitur F ipsum H per vnitates, quæ sunt in F. metitur

A 8
M 8
B . . . . 4 — A
C . . . . . 12 F . . 2
N . . . . . 12 — 2. huius.
K 6
D . . . . . 18 G . . 3
X 18
L 9
O —— 27
B —— 27

10. com. not.

6.com. not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque E ipsum H. Conuers. 20 diff. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quæ sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipsum M. ergo Conuer. 20 diff. vt E unitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & ut E unitas ad numerum F, ita esse F ad H. & ut igitur E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est æqualis ipsi A. quare vt B E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & ut E unitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod oportebat demonstrare.



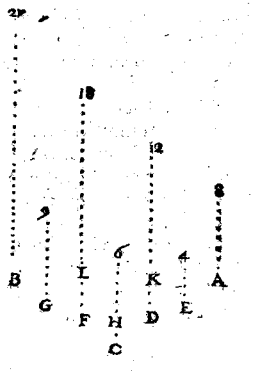
F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B] *ex problemate, quod nos ad 35 septimi conscripsimus.*

B Eadem ratione, & vt E unitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] *quoniam enim G se ipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quae sunt in ipso G: metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. ergo E vnitas aequaliter metitur numerum G, atque G ipsum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans I fecit O, numerus L ipsum O metietur per vnitates, quae sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. aequaliter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est aequalis. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri, deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.



Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadant D E, & FG. Dico quot inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H: vterque autem ipsorum D F ipsum H multiplicans faciat vtrumque 20. diff. K L. & quoniam est ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipsum D numerum

rum æqualiter metietur, atque D ipsum E. Sed unitas C numerum D metitur per vnitates, quæ sunt in D: ergo & numerus D ipsum E per vnitates, quæ sunt in D metitur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt vnitas C ad D numerum, ita est E ad A; vnitas C ipsum D numerum æqualiter metitur, atque E ipsum A. sed vnitas C ipsum D numerum metitur per vnitates, quæ sunt in D. quare et E ipsum A per unitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsum E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero G ipsum B fecit. et quoniam D se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem causam ut D ad F, ita H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniam D vtrumque ipsorum E H multiplicans fecit vtrumque A K, erit ut E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D ad F. & ut igitur D ad F, ita A ad K. Rursus quoniam vterque D F ipsum H multiplicans vtrumque K L fecit, vt D ad F, ita est K ad L. vt autem D ad F, ita erat A ad K. & ut igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H G multiplicans vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed vt H ad G, ita D ab F. ergo & vt D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & vt D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demonstrare oportebat.

6. com. not. 9. com. not. 10. diffi. 9. com. not. 17. septimi. 17. septimi. 18. septimi. 17. septimi.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionẽ habet eius, quam latus habet latus.

Sint quadrati numeri A B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. et quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione et D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C utrumque ipsorum C D multiplicans vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, et D se ipsum multiplicans fecit B; duo numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipsos E B fecerunt. est igitur vt C ad D, ita E ad B. sed ut C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quã habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

A....4
C....2
E....6
D....3
B....9

18. diffin. 17. septimi. 18. septimi. Diffi. 23.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A B; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere; et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, multiplicans vero D ipsum F faciat, et D se ipsum multiplicans faciat

eiat G: et vterq; ipsorum C D multiplicãs F vtrumque H K faciat. Quoniam igitur cubus est A, & eius latus C, numerus C se ipsum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipsum A fecit. similiter & D se ipsum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipsum B. & quoniam C vtrũque ipsorum C D multiplicans vtrumque E F fecit, vt C ad D, ita est E ad F. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rursus quoniam C vtrumque ipsorum E F multiplicans fecit vtrumque A H, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rursus quoniam vterque ipsorum C D multiplicans F vtrumque H K fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rursus quoniam D vtrumque F G multiplicans fecit vtrumque K B, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. ostensum autem est vt C ad D, ita esse A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipsos A B duo H K medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quã habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonstrare oportebat.

17. septimi.

18. septimi.

21. diffin.

A.....8
H.....12
K.....18
B.....27
C..2
D...3
E...4
F.....6
G.....9

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt. et si positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipsi proportionales erunt. et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; sitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipsi A B C se ipsos multiplicantes faciant D E F: ipsos vero D E F multidlicantes faciant G H K. Dico numeros D E F & G H K deinceps proportionales esse. numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; vterque autem ipsorum A B multiplicans L faciat vtrumque M N. et rursus B quidem multiplicans C ipsum X faciat; vterque vero ipsorum B C multiplicans X faciat vtrumque O P. A similiter ijs, quę dicta sunt, ostendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales esse in proportione, quæ est A ad B: & adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & D L E in eadem sunt proportione, in qua E X F: & præterea G M N H in eadem proportione, in qua H O P K. estq; ipsorum quidem D L E multitudo

A..2B...4C.....8
D....4
L.....8
E.....16
X.....32
F.....64
G.....8
M.....16
N.....32
H.....64
O.....128
P.....256
R.....512

multitudo multitudini ipsorum in EXF æqualis. multitudo autem ipsorum GMNH æqualis multitudini ipsorum HOPK. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. vt autem G ad H, ita H ad K. quod demonstrare oportebat. 14. septimi.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta sunt, ostendemus D L E, & GMNH deinceps proportionales esse in proportione, quæ est A ad B] *quoniam enim A duos numeros A B multiplicas fecit D L, erit vt A ad B, ita D ad L. rursus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipsos L E fecit; vt A ad B, ita erit L ad E. sed vt A ad B, ita est D ad L. vt igitur A ad B, ita est D ad L, & L ad E. quare sequitur D L E deinceps proportionales esse in eadem proportione, in qua est A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipsos G M, erit vt D ad L, hoc est vt A ad B, ita G ad M. rursus quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipsos M N fecerunt, vt A ad B, ita erit M ad N. Præterea cũ B duos numeros L E multiplicans faciat NH, erit vt L ad E, videlicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat & G ad M, & M ad N. vt igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo G M N H deinceps proportionales sunt in eadẽ proportione, in qua est A ad B.* A 17. septimi. 18. septimi.

Et adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo supra, modo ostendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipsos N X, & numerus C duos numeros BC multiplicans ipsos XF fecit. ergo vt B ad C, ita est & E ad X, & X ad F. Præterea B duos numeros EX multiplicans fecit H O, & duo numeri BC multiplicantes X fecerunt ipsos O P. rursus C duos numeros XF multiplicans ipsos P K fecit. quare vt E ad X, hoc est vt C ad B, ita H ad O. & rursus vt C ad B, ita O ad P. præterea vt X ad F, hoc est vt B ad C, ita est P ad K. vt igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus constat. E X F, & H O P K deinceps proportionales esse in ea proportione, in qua est B ad C.* B C

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D, & A ipsum B metiatur. Dico & latus C ipsum D metiri. numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales sunt in proportione, quæ est C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps sunt proportionales, metiturq; A ipsum B; & A ipsum E metietur. atque est vt A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipsum D. sed C metiatur ipsum D. Dico & A ipsum B metiri. Ijsdem enim constructis similiter ostendemus A E B deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniam est vt C ad D, ita A ad E. metitur autem C ipsum D. & A ipsum E metietur. & sunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipsum B, si igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonstrare.

A 4
E 8
B 16
C ..2
D ... 4

Ex demonstratis in huius. 7. huius. ❋

F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur & A ipsum B] *quoniam enim A E B deinceps proportionales sunt; metiturq; A ipsum E; & E ipsum B metietur. quare A ipsum B metiatur necesse est ex duodecima communi notione.* ❋ 10 diff.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur

tietur: & ſi latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur: & ipſius quidem A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico C ipſum D metiri. numerus enim C ſe ipſum multiplicans faciat E, & multiplicãs D faciat F; D veroſe ipſum multiplicãs faciat G, & vterque ipſorum C D multiplicans F vtrumque HK faciat. manifeſtum A eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione, quę eſt C ad D. & quoniã A H K B deinceps proportionales ſunt, metiturq; A ipſum B; & A ipſum H metietur. eſt aũt vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipſũ D metietur. ſed C metiatur D. Dico & A ipſum B metiri. ijſdẽ enim cõſtructis ſimiliter oſtẽdemus A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniã C ipſum D metitur, eſtq; vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

7. huius.

A 8
H 16
K 32
B 64
E 2
D 4
F 8
C 16

B

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifeſtum eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ eſt C ad D] *hoc ſimiliter vt in 13 demonſtrabimus.*

B Et A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur] *quoniam enim eſt vt A ad H, ita H ad K; metiturq; A ipſum H; & H metietur ipſum K. quare & A ipſum K metietur. rurſus quoniam vt A ad H, ita eſt K ad B, & K ipſum B metietur. ergo & A ipſum B metiatur neceſſe eſt.*

20. diffi. 12. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D. & A non metiatur ipſum B. Dico neque C ipſum D metiri. ſi enim metitur C ipſum D, & A ipſum B metietur. nõ metitur autem A ipſum B. non igitur C ipſum D metietur. ſed C non metiatur D. Dico neque A ipſum B metiri. Si enim A metitur ipſum B, & C ipſum D metietur: atqui C nõ metitur D; neque igitur A ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

14. huius.

A 9
B 16
C ... 3
D 4

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipſius quidẽ A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico C ipſum D nõ metiri.

A 8
B 27
C .. 2
D ... 3

ſi enim

si enim C metitur ipsum D, & A ipsum B metietur. atqui non metitur A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. Sed non metiatur C ipsum D. Dico neque A ipsum B meriri. si enim A ipsum B metitur, & C metietur ipsum D. non metitur autem C ipsum D. neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos similes planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A B; & ipsius quidem A latera sint C D; ipsius vero B latera E F. & quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia; erit vt C ad D, ita E ad F. Dico inter ipsos A B vnum *medium proportionalem* cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim est vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F. & quoniam planus numerus est A, cuius latera CD, numerus *D ipsum C multiplicans* fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipsum B fecit. numerus autem D ipsum E multiplicans faciat G. & cum D ipsum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. sed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rursus quoniam E ipsum *D multiplicans fecit G*, multiplicas vero F ipsum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. ostensum est autem & vt D ad F, ita esse A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales sunt; ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales sunt, A ad B duplam proportionem habebit eius, quam habet ad G. atque est vt A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demonstrare.

A 6
G 12
B 24
C ..2
D ..3
E ..4
F ..6

21. diffi.

17. septimi.

Diffi. 3.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medij proportionales cadunt; & solidus ad solidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes A B, & ipsius quidem A latera sint C D E; ipsius vero B latera F G H, & quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia, erit vt C ad D, ita F ad G. vt autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipsum D multiplicans faciat K, F vero multiplicans G ipsum L faciat. & quoniam C D in eadem sunt proportione, in qua F G: & ex ipsis C D

A 8
N 12
X 18
B 27
C ..2
D ..2
E ..2
F ..3
G ..3
H ..3
K ..4
M ..6
L ..9

21. diffi.

fit

fit K; ex ipsis vero F C fit L, erunt K L similes plani numeri. quare inter ipsos vnus medius proportionalis cadit. sit is numerus M. ergo M fit ex D F, vt in precedenti theoremate. est igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipsum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit vt C ad F, ita K ad M. sed vt K ad M, ita M ad L. ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F. & quoniã vt C ad D, ita F ad G, erit permutando vt C ad F, ita D ad G. rursus quoniam vt D ad E, ita G ad H, & permutãdo erit vt D ad G, ita E ad H. ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F, & D ad G, & E ad H. vterque autem ipsorum E H multiplicans M faciat vtrumq; N X & quoniam solidus est A, latera autem ipsius C D E, numerus E eum, qui fit ex C D multiplicans fecit A: qui vero fit ex C D est K. ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eadem ratione & H multiplicans L, qui fit ex F G, fecit ipsum B. & quoniam E ipsum K multiplicans fecit A. sed & multiplicans M fecit N; erit vt K ad M, ita A ad N. vt autem K ad M, ita C ad F, & D ad G, & adhuc E ad H. ergo vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita A ad N. rursus quoniam vterque ipsorum E H multiplicans M fecit vtrumque N X, erit vt E ad H, ita N ad X. sed vt E ad H, ita C ad F, & D ad G. est igitur vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita & A ad N, & N ad X. rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X; sed & multiplicans L fecit B: erit vt M ad L, ita X ad B. sed vt M ad L, ita C ad F, & D ad G, & E ad H. & vt igitur C ad F, & D ad G, & E ad H, ita non solum X ad B, sed & A ad N, & N ad X. ergo A N X B deinceps proportionales sunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam habet numerus C ad F, vel D ad G, & E ad H. Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt A N X B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N. sed vt A ad N, ita ostensus est & C ad F, & D ad G, & E ad H. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quã C habet ad F, & D ad G, & E ad H. quod demonstrare opotebat.

Ex antecedente.

17. septimi.

A

B

Diffi. 14.

A 8
N 12
X 18
B 27
C 12
D 18
E 27
F 18
G 27
H 18
K 24
M 36
L 27

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A] *est enim K, qui fit ex C D, & E multiplicans eum, qui fit ex C D ipsum A fecit.*

B Rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X, sed & multiplicans L fecit B] *est enim L, qui fit ex F G, & H eum, qui fit ex F G multiplicans ipsum B fecit.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri similes plani erũt.

Inter duos enim numeros A B vnus medius proportionalis cadat C. Dico numeros A B similes planos esse. Sumantur enim minimi numeri D E, eandem, quam ipsi A C B proportionem habentium. est igitur vt D ad E, ita A ad C. vt autem A ad C, ita C ad B. ergo & vt D ad E ita C ad B. qualiter igitur D ipsum A metitur, atque E ipsum C. ergo quoties D metitur A, tot vnitates sint in

A

20. diffi.

A 8
C 12
B 18
D 4
E 6
F 9
G 13

F pro-

E; propterea q; F multiplicans D ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare A planus numerus est, cuius latera D F. rursus q̃m D E minimi numeri sunt, eandē quā C B proportionē habētiū; æqualiter D ipsum C metitur, & E ipsum B. quoties aūt E ipsū B metitur, tot vnitates sint in G. ergo E ipsū B metitur per eas, quæ sunt in G vnitates. quare G ipsum E multiplicās fecit B: ideoq; B numerus planus est, cuius latera E G. ergo numeri A B sunt plani. Dico & similes esse. Quoniam enim uterque ipsorum F G multiplicans E vtrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut aūt C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare A B similes plani sunt; cum ipsorum latera sint proportionalia. id quod demonstrare oportebat. 9. com: not. 21. septimi. 9. com: not. 18. septimi. B

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim minimi numeri DE, eandem, quam ipsi A C B proportionem habentium] *ex eo, quod additum est ad 35 septimi.* A

Quare A B similes plani sunt, cum ipsorum latera sint proportionalia] *quoniam enim est vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & sunt D F latera ipsius A, & E G latera ipsius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, similes inter se erunt.* B

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri similes solidi erunt.

Inter duos enim numeros A D duo medij proportionales cadant C D. Dico ipsos A B similes solidos esse. sumantur enim minimi numeri tres, eandem quā A C D B proportionē habentiū, qui sint E F G. extremi igitur ipsorum E G primi inter se sunt. & quoniam inter E G unus medius proportionalis cecidit F, erunt numeri E G similes plani. sint ipsius quidem E latera H K; ipsius uero G latera L M. manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M. & quoniam E F G minimi sunt, eandem, quam A C D proportionem habentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: & sunt E G primi, sed primi & minimi. minimi uero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorē, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N. ergo N ipsum E multiplicās fecit A. sed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui fit ex H K multiplicās ipsum A fecit. solidus igitur est A, cuius latera H K N. Rursus quoniam E F G minimi sunt, eandem quam ipsi C D B proportionem habentium, E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. & quoties G metitur B, tot unitates sint in X. ergo G ipsum B metitur per eas, quę sunt in X unitatis; ideoq; X multiplicans G ipsum B fecit. at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipsum C fecit. solidus igitur est B, & eius latera L M X. quare A B solidi sunt. Dico etiam similes esse. quoniam enim N X multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C, hoc est E ad F. sed vt E ad F, ita H ad L, & K ad M. & vt igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. sunt autem C

A 8
C 12
D 18
B 27
E 4
F 6
G 9
H .. 2
K .. 2
N .. 2
L ... 3
M ... 3
X ... 3

A
3. huius:
Ex antecedenti.
B
23 septimi.
21. septimi.
9. com. not.

HKN

HKN latera ipsius A, & L M X latera ipsius B. ergó A B similes solidi erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium] *inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam A C D B proportionem habentium ex ijs, quae nos ad 35 septimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 septimi sumantur tres minimi numeri eandem, quam ACD proportionem habentium.*

B Manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M] *quoniam enim E G similes plani sunt, ipsorum latera eandem habent proportionem. est igitur vt H ad K, ita L ad M: & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaque quoniam K ipsum H multiplicans fecit E; multiplicans* 17. septimi. *vero L ipsum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, vt K ad M, ita est F ad G. ostensum est autem vt H ad L, ita esse K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea E F G deinceps proportionales sunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.*

C Quoniam enim N X multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C] *etenim E ipsum C aequaliter metitur, atque G ipsum B, vt ostensum est. quoties autem G metitur B, tot vnitates sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; sitq; primus A quadratus. Dico & tertium C quadratum esse. Quoniã enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erũt A C similes plani. sed A est quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

20. huius.

A 4
B 6
C 9

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A sit cubus. Dico & D cubum esse. Quoniam enim inter A D duo medij proportionales cadunt B C, erunt A D similes solidi. est autem A cubus; ergo et D cubus erit. quod demonstrare oportebat.

21. huius.

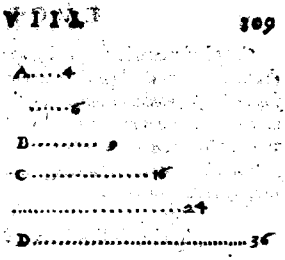
A 8
B 12
C 18
D 27

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D: sitq; A quadratus. Dico & B quadratum esse. quoniam

quoniam enim CD quadrati sunt, erunt C D similes plani; ideoq; inter ipsos CD vnus medius proportionalis cadit: est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. estq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.

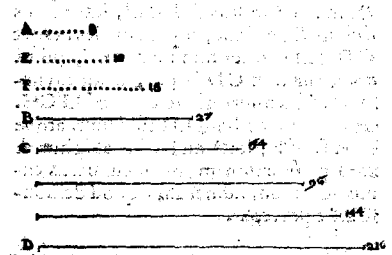


18. huius.
8. huius.
22. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam cubus numerus C ad numerū cubum D; sitq; A cubus. Dico & B cubum esse. Quoniam enim CD cubi sunt, erunt CD similes solidi. idcircoq; inter ipsos duo medij proportionales cadent: quot autem inter C D cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. ergo inter A B duo medij cadent proportionales. cadant E F. quoniam igitur quattuor numeri A E F B deinceps proportionales sunt, estq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

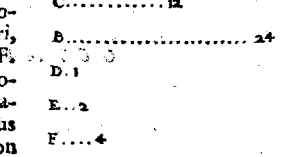


19. huius.
8 huius.
23. huius.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim A B similes plani sunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, sitq; C: & sumantur minimi numeri, eandem, quam A B C proportionē habentiū D E F. ergo ipsorum extremi D F quadrati sunt. & quoniam est vt D ad F, ita A ad B; et sunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod demonstrare oportebat.



19 huius.
35. septimi.
Cor. 2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & huius conuersum verum est. quod hoc modo demonstrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt.

Sint plani numeri A B, qui proportionem habeant, quã quadratus numerus C ad quadratum numerum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniam enim CD quadrati sunt, erunt similes plani. quare inter eos cadit vnus medius proportionalis: atque est vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipsos A B vnus medius proportionalis cadit. numeri igitur AB similes plani sunt. quod demonstrare oportebat.

18. huius. 8. huius. 20. huius

A..... 6
B.....24
C. 4
D....4

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quoniã enim A B similes solidi sunt, inter ipsos duo medij cadent proportionales. cadãt C D; & sumantur minimi numeri, qui eãdem, quam A C D B proportionem habeant, ipsis multitudine æquales EFGH. ergo eorum extremi EH cubi sunt. atque est vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. quod demonstrare oportebat.

19. huius. 35. septimi. Corol. 2. huius.

A.....16
C.....24
D.....36
B.....54
E.....8
F.....12
G.....18
H.....27

F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuersum verum est. quod ita demonstratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt.

Sint solidi numeri A B proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniã enim C D cubi sunt, erũt similes solidi; ac propterea inter eos cadũt duo medij proportionales. est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter ipsos A B duo medij proportionales cadent. similes igitur solidi sunt numeri A B. quod demonstrare oportebat

19. huius. 8. huius. 21 huius.

A 16
B.....54
C.....8
D.....27

OCTAVI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER NONVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

I DVO ſimiles plani numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo ſimiles plani numeri A B, & A ipſum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. Et quoniam A B ſimiles plani ſunt, inter ipſos vnus medius proportionalis cadet. ſi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales cecidérint, quot inter ipſos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque eſt D quadratus. ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonſtrare.

17. ſeptimi. 18. octaui.

A....4
E.....6 8. octaui.
B.....9
D.....16
F——————24 21. octaui.
C——————56

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri ſe multiplicantes quadratum numerum efficiant, ſimiles plani erunt.

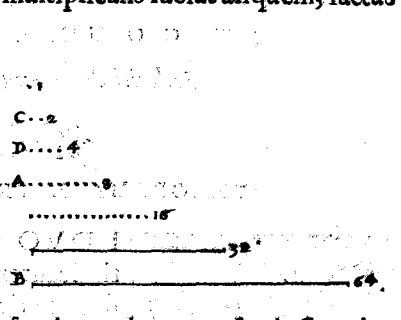
Duo enim numeri A B ſe ſe multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B ſimiles planos eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus eſt, ſed & C; erũt D C ſimiles plani. quare

A...5
.....6
B.....10
D.....9
——————18 17. ſeptimi
C——————56 18. octaui.

8.octaui. inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. atque eſt vt D ad C, ita A ad B. ergo
20. octaui. & inter A B cadet vnus medius proportionalis. ſi autem inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat. erunt ſimiles plani. ergo A B ſimiles plani ſunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

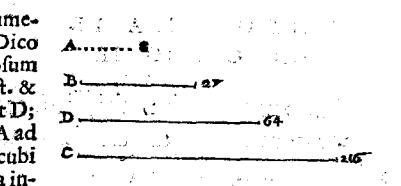
Si cubus numerus ſe ipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.



Cubus enim numerus A ſe ipſum multiplicans faciat B. Dico B cubum eſſe. ſumatur enim ipſius A latus C, & C ſe ipſum multiplicans faciat D. manifeſtū eſt C multiplicantem D facere ipſum A. & quoniam C ſe ipſum multiplicans fecit
10. com. not. D, metitur C ipſum D per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ſed & vnitas
6. com. not. metitur C per eas, quę in ipſo ſunt
Conuer. 20. diffi. vnitates. eſt igitur vt vnitas ad C, ita C ad D. rurſus quoniam C multiplicans D ipſum A fecit, metitur D ipſum A per vnitates, quæ ſunt in C. metitur autem & vnitas ipſum C per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ergo vt vnitas ad C, ita D ad A. ſed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq; inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rurſus quoniā A ſe ipſum multiplicans fecit B & A ipſum B metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt. metitur autem & vnitas ipſum A per vnitates, quæ ſunt in ipſo. eſt igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. ſed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportio
8. octaui. nales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd ſi inter duos nu
23. octaui. meros cadant duo medij proportionales, primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit. atque eſt A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicās faciat aliquē, factus cubus erit.



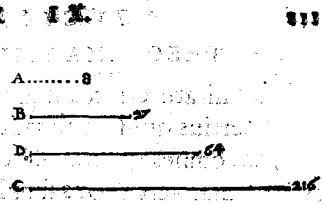
Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipſum C faciat. Dico C cubum eſſe. numerus enim A ſe ipſum
Ex ante cedente. multiplicans faciat D. ergo D cubus eſt. & quoniam A ſe ipſum multiplicans fecit D;
17. ſeptimi. multiplicans vero B ipſum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi ſunt, erunt ſimiles ſolidi; ac propterea in
8. octaui. ter ipſos cadent duo medij proportionales. qua re & inter D C duo medij propor
23. octaui. tionales cadent. eſtq; D cubus. ergo & C cubus erit.

THEOREMA. V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerū aliquem B multiplicans faciat cubum C. Dico B cubum esse. numerus enim A se ipsum multiplicās faciat D, ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos cadunt duo medij proportionales: atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent estq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente. 17. septimi. 8. octaui. 23. octaui.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus precedentibus & illa sequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nō erit cubus.

Si enim factus sit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

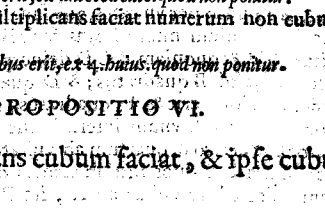
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicās cubum B faciat. Dico & A cubum esse. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipsum C fecit, erit C cubus. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit B; multiplicās uero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C. quòd cum B C cubi sint, similes solidi erit: ideoq; inter ipsos cadent duo medij proportionales. & est ut B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunta. tque est B cubus, ergo & A cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonstrare.

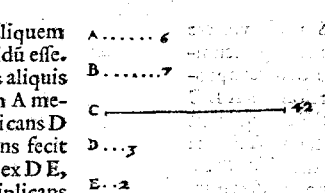


Diffi. 19. 17. septimi. 19. octaui. 23. octaui.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicās, quempiam faciat, factus solidus erit.

Cōpositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat. Dico C solidū esse. Quoniā enim A cōpositus est, eū numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipsum A metitur, tot unitates sint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipsum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum, qui fit ex D E, ipsum C fecit. ac propterea C solidus est, cuius latera DE. quod oportebat demonstrare.



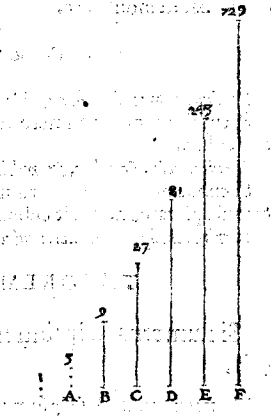
13. diff. 9. com. not. 16. septimi Diffi. 17.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus aũt est cubus, & duos intermittẽtes omnes: septimus vero cubus simũl, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E F. Dico tertium quidẽ ab vnitate B quadratum esse, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum, & duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes.



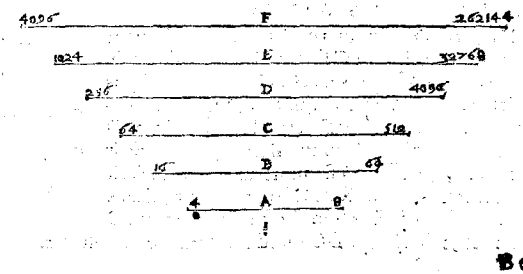
Diffin. 20. 6. com. not. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipsum B. sed vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipso sunt. Ergo & A ipsum B per vnitates, quę sunt in A metitur. quare A se ipsum multiplicans fecit B. quadratus igitur est B, & quoniam B C D deinceps proportionales sunt; estq; B quadratus; & D quadratus erit. Eadem ratione erit & F quadratus. similiter demonstrabimus & vnum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab vnitate videlicet C esse cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita B ad C; vnitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum C. sed vnitas numerum A metitur per vnitates, quę in A sunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quę sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B; multiplicans vero B fecit C; erit C cubus. quòd cum C D E F deinceps proportionales sint; sitq; C cubus; & F cubus erit. oportẽ aũt est & quadratũ esse. septimus igitur ab vnitate F, & cubus est, & quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos esse. quod demonstrare oportebat.

22. octaui. 20. diffin. 6. com. not. 9. com. not. 19. diffi. 23. octaui.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post vnitatem sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate numeri quotcumque deinceps proportionales A B C D E F, & qui post vnitatem A sit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse: tertiũ quidem ab vnitate



B esse

B esse quadratum,& vnum intermittentes omnes,demonstratum iam est.sed & reli qui omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus quoniam B C D deinceps propor- A
tionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit.similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse.sit autem A cubus.Dico & reliquos cubos esse.quar tum quidem ab vnitate C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demon stratum est.sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita A ad B,vnitas numerum A æqualiter metitur,atque A ipsum B. sed vnitas metitur 20.diffin.
numerum A per vnitates,quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vni tates,quæ in ipso sunt.ergo A seipsum multiplicans fecit B,atque est A cubus.si au tem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem,factus cubus erit. Ergo 2 huius.
B est cubus.& quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales sunt, estq; A cubus;& D cubus erit. Eadem ratione & E est cubus,& similiter reliqui om B
nes cubi sunt.quod demonstrare oportebat.

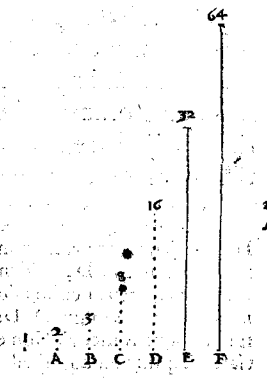
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam BCD deinceps proportionales sunt,est autem B quadratus; et A
D quadratus erit] *videntur hæc superuacanea esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitate quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.*

Eadem ratione & E est cubus] *quattuor enim numeri B C D E deinceps proportionales* A
sunt; atque est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est. 23.octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate,& unum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit,præter quartum ab vnitate,& duos intermittentes oēs.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri A B C D E F, & qui post vnitatem A non sit quadra tus. Dico neque alium vllum quadratum esse,præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit C quadratus;est autem & qua dratus B. ergo B C inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerū: atque est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B in ter se proportionem eam,quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoq; AB similes plani 26.octaui.
sunt. & est B quadratus. ergo & A quadratus est. A
quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. si militer ostendemus neque alium ullum quadratum esse,præter tertium ab vnitate, & vnum intermitten tes omnes. sed non sit A cubus. Dico neque alium vllum cubum esse, præter quartū ab vnitate, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cu bus.est autem & cubus C; quartus enim est ab vnita te. & vt C ad D, ita est B ad C.ergo & B ad C proportionem habet,quam cubus ad cubum; ac propterea B C similes solidi sunt, atque est C cubus. ergo & B cubus 27.octaui
erit. & quoniam est vt unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autem numerum B
A metitur per unitates,quæ sunt in ipso: & A metietur B per vnitates, quæ in ipso sunt.

ſunt. quare A ſe ipſum multiplicans cubum B fecit. ſi autẽ numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit. cubus igitur eſt A. quod non ponitur. ergo neque D eſt cubus. ſimiliter demonſtrabimus neque alium vllũ cubũ eſſe, præter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. quod demõſtrare oportebat.

6.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ideoq; A B ſimiles plani ſunt. & eſt B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quoniam enim A B ſimiles plani ſunt, inter eos unus medius proportionalis cadit. ſunt igitur tres numeri deinceps proportionales; eſtq; primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*

18 octaui.
22 octaui.

B Ac propterea B C ſimiles ſolidi ſunt; atque eſt C cubus; ergo & B cubus erit] *quoniam enim ſimiles ſolidi ſunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quòd cum primus ſit cubus, & quartus cubus ſit neceſſe eſt.*

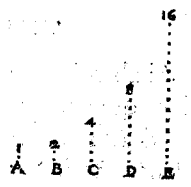
19 octaui.
23 octaui.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipſorum C D. Qm̃ enim eſt vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numerũ B æqualiter metitur, atque D ipſum E. quare permutãdo A vnitas numerum æqualiter D metitur, atque B ipſum E. ſed A vnitas metitur D per eas, quę ſunt in ipſo D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ ſunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorũ, qui ſunt in numeris proportionalibus. quod demonſtrare oportebat.

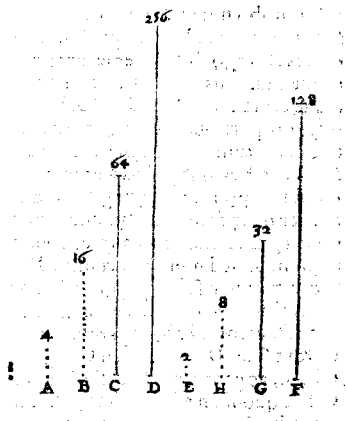
15. ſeptimi.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales, quicumque primorum numerorum metiuntur vltimum, ijdẽ & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eoſdem & ipſũ A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipſum D. Dico E ipſum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipſum A, atq; E eſt primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem nõ metitur, primus eſt. ergo E A numeri inter ſe primi ſunt. et quoniam E metitur ipſum D, metiatur per vnitates, quę



ſunt

sunt in F. ergo E multiplicans F ipsũ D fecit. Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates, A multiplicans C ipsum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur fit ex A C ei, qui fit ex E F est æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. suntq; AE primi: primi aũt, & minimi; minimi vero eos, qui eandẽ habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur E ipsum C, metiatur per G. ergo E ipsum G multiplicans fecit C. sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit. qui igitur fit ex A B æqualis est ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & sunt A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. quare & E ipsum B metitur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipsum H fecit B. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. ergo qui fit ex H E est æqualis ei, qui fit ab ipso A. est igitur vt E ad A, ita A ad H. suntq; A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiũtur eos, quĩ eandem, quam ipsi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur. quod fieri non potest. non igitur A E sunt inter se primi. ergo compositi erunt. compositos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipsos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur: primum autem non metitur alius numerus præter se ipsum, metitur igitur E ipsos A E: ideoq; E ipsum A metitur. metitur autem & ipsum D. ergo E ipsos A D metietur. similiter demonstrabimus quicumque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem & ipsum A metiri. quod demonstrare oportebat.

19. com. not. A
19. septimi. 23. septimi. 21. septimi. B
19. septimi. 23. septimi. 21. septimi.
20. septimi.
14. diff.

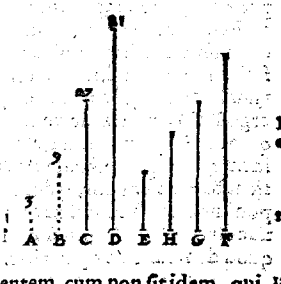
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates] *hoc enim in antecedente demonstratum fuit.* A

Sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit] *quoniam enim, vt in antecedente demonstratum est, A metitur ipsum C per B; & A multiplicans B fecit C.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

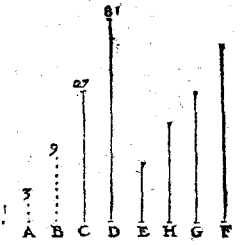
Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit: maximum nullus alius metietur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.



Sint quotcũque numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D, & qui post vnitatem, videlicet A sit primus. Dico maximum D nullum alium numerum metiri, præter ipsos A B C. si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, & non sit E idem, qui aliquis ipsorum A B C; manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, & metiatur D, ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur E primus est. ergo compositus: omnem autem compositum numerum primus aliquis numerus metitur. Dico nullum alium primum metiri ipsum E præterquam A. si enim alius metitur E, & E metitur D, & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum E metitur. & quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. non erit F idem, qui aliquis ipsorum A B C. si enim est idem, metiatur; ipsum D per E; & vnus ipsorũ A B C ipsum D per E metietur; sed vnus ipso

Ex antecedente. 23. diff. 12. com. not. Ex antecedente. 11 huius.

rum A B C metitur D per aliquem ipsorũ A B C. quare & E idem erit, qui vnus ipsorũ A B C. quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum A B C. similiter ostendemus A metiri ipsum F, rursus ostendentes non esse F primum numerũ. si enim est primus, & metitur ipsum D, ipsum quoque A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo cõpositus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipsum F præterquàm A. si enim alius metitur F, & F metitur D; & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex A C est æqualis ei, qui ex EF. ergo vt A ad E, ita est F ad C. sed A metitur E. quare & F ipsum C metietur, metiatur per G. similiter demonstrabimus G non esse eundem, qui vnus ipsorum A B, & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicãs F ipsum G fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex A B ei, qui ex F G est æqualis. vt igitur A ad F, ita est G ad B. metitur autem A ipsum F. ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundẽ, qui A. & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex A. ergo ut H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipsum G. quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A B C. quod demonstrandum fuerat.



Ex antecedenti.

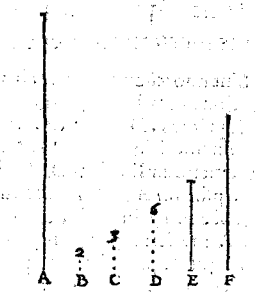
19. septimi.

20. septimi.

THEOREMA. XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B C D metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipsum A, præter ipsos B C D. si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum B C D. & quoniã E metitur A, ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B C D. si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; & vnum eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo B C D metientur vnum ipsorum E F. ipsum quidem E non metientur; etenim E primus est; & nõ idem qui aliquis ipsorum B C D. ergo ipsum F metientur, qui est minor, quàm A. quod fieri nõ potest. ponitur enim A minimus eorum, quos B C D metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B C D. quod demonstrare oportebat.



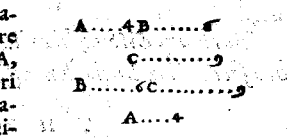
32. septimi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ qui

qui eandem, quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet cõ positi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum, qui eãdem, quam ipsi proportionem habent A B C. Dico duos quoslibet compositos ad reliquũ primos esse, videlicet A B ad C, & B C ad A, & A C ad B. sumantur enim duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant D E E F. manifestum est D E se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero E F facere B; & E F se ipsum multiplicantem facere C. & quoniam D E E F minimi sunt, primi erũt inter se. si autem duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque primus erit. ergo D F ad vtrumque ipsorum D E E F primus est. Sed & D E ad E F est primus. quare D F D E ad E F primi sunt: ac propterea qui fit ex F D D E primus est ad E F. si autem duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquum primus erit. ergo qui fit ex F D, D E ad eum, qui fit ex E F est primus. sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F. qui igitur ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F primus est ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B, & qui ex E F est C. ergo A B compositi ad ipsum C primi sunt. similiter ostendemus & B C ad A esse primos. Dico & A C ad B primos esse. Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit. Sed ei, qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F, & rursus diuidendo qui fiunt ex D E, & E F ad eum, qui fit ex D E E F primi sunt. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B; & qui ex E F est C. ergo A C cõpositi ad ipsum B primi erunt. quod demonstrare oportebat.



A 2. octaui. 24. septimi. 30. septimi. 26. septimi. 27. septimi. B C D E F

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentium] *ex ijs, quae demonstrauimus ad 35 septimi.*

B Sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F] *Hoc in lineis demonstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non solum hoc ex illis demonstrauit, sed & quæcumque in secundo libro tradita sunt, quae nos vtpote non aliena hoc loco apponenda censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.*

C Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit] *nam cum D F ad vtrumque ipsorum D E E F sit primus, erit D F primus ad eum, qui ex D E E F ex 26 septimi. quare ex 27 eiusdem & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F est primus.*

D Sed ei, qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F] *hoc in lineis demonstratur in secundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.*

E Ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.] *si enim non sunt primi, compositi erunt. quare eos alius numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrumque & compositum ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. sed & metitur eum, qui fit ex D E E F. ergo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F non sunt primi ad eum, qui ex D E E F. atqui primi sunt. quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.* 11. com. not.

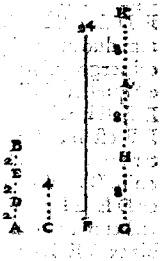
Et rursus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi sunt.] *Si enim non sint primi, eodem, quo supra, modo ostendemus eos, qui fiunt ex D E, & E F vna cum eo, qui fit ex DE EF non esse primos ad eum, qui ex DE EF, quod est absurdum: sunt enim primi, vt demonstratum iam fuit. ergo qui fiunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi sint necesse est.*

Barlaam Monachi arithmetica demonstratio eorum, quę Euclides libro secundo in lineis demonstrauit.

THEOREMA I.

Si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt.

Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui fiunt ex C AD, & C DE, & C EB aequalem esse. sit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipsum F fecit, C 1a.com.not. *metitur F per eas, quae sunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur G H per vnitates, quae sunt in A D: & metitur H I per vnitates, quae in D E: & I K per vnitates, quae in E B. ergo C metitur totum G K per vnitates, quae sunt in AB. metiebatur autem & ipsum F per eas, quae sunt in AB vnitates. vterque igitur ipsorum F GK aeque multiplex est* 1. com. not. *numeri C. qui vero eiusdem sunt aeque multiplices, inter se aequales sunt. ergo F ipsi GK est aequalis: atque est F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compositus ex numeris planis, qui fiunt ex C, & singulis ipsorum AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus aequalis est planis numeris, qui ex C, & singulis ipsorum AD DE EB fiunt. quare si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis aequalis erit numeris, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt. quod oportebat demonstrare.*



THEOREMA II.

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte, inter se cõpositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

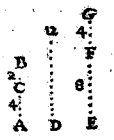
Numerus enim A B diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui fiunt ex B A AC, & AB BC inter se compositos, quadrato, qui fit ex AB, aequales esse. numerus enim AB se ipsum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem A B multiplicans faciat FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipsum EF fecit, A B metitur 1a.com.not. *EF per eas, quae sunt in AC vnitates. Rursus quoniam CB ipsum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per vnitates, quae sunt in C B. metiebatur autem & E F per vnitates, quae in A C. ergo A B totum E G per vnitates, quae in se ipso sunt metitur. rursus quoniam A B se ipsum multiplicans fecit D, metitur A B ipsum quoque D per vnitates, quae in seipso sunt. ergo A B vtrumque ipsorum D, E G metitur per eas, quae in seipso sunt vni-*
1. com. no. *tates. quotuplex igitur est D ipsius A B, totuplex erit & E G ipsius A B. qui vero eiusdem numeri sunt aeque multiplices inter se aequales sunt. ergo D ipsi E G est aequalis. atque est D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compositus ex duobus planis; qui fiunt ex AB BC, & B A AC. quadratus igitur numerus ex AB est aequalis numero composito ex duobus planis, qui ex AB BC, & B A AC fiunt. quare si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte inter se compositi aequales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atque illud est, quod oportebat demonstrare.*

THEO-

THEOREMA III.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui fit à CB æqualem esse. numerus enim AB multiplicans BC ipsum D faciat. AC vero multiplicans CB faciat EF: & CB se ipsum multiplicans faciat FG. itaq; quoniam AB ipsum BC multiplicans fecit D, metitur BC ipsum D per vnitates, quae sunt in AB. rursus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quae sunt in AC vnitates. rursus quoniam CB seipsum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quae in se ipso sunt: metiebatur autem & EF per vnitates, quae sunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quae sunt in AB vnitates: metiebatur autem & ipsum D per vnitates, quae in AB. ergo CB vtrumque D, EG aequaliter metitur. ij vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter se aequales sunt. quare D est aequalis ipsi FG. atque est D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC: EG vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC est aequalis ei, qui ex AC CB, & quadrato, qui à CB. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit aequalis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. quod oportebat demonstrare.



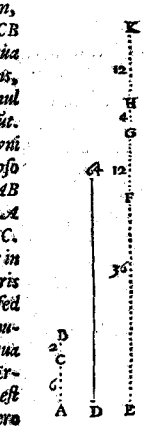
10.com.not.

4.com. not.

THEOREMA IIII.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis est quadratis, qui à partibus fiũt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem esse. sit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex AC, & GH quadratus, qui ex CB: numerus autem planus, qui fit ex AC CB uterque ipsorum FG HK. quoniam igitur AC se ipsum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quae in se ipso sũt. rursus quoniam BC multiplicans CA fecit FG, metitur CA ipsum FG per vnitates, quae sunt in BC. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in ipso sunt. ergo AC totum EG per vnitates, quae sunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipsum EG fecit: ideoq; EG est numerus planus, qui fit ex BA AC. similiter ostendemus & GK numerum planum esse, qui fit ex AB BC. atque est D numerus quadratus, qui ex AB efficitur. si autem numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus aequalis est duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipsi EK est aequalis. sed EK constat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano. atque est D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB est aequalis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit, numero plano. Ergo si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus aequalis est quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonstrare oportebat.



10.com.not.

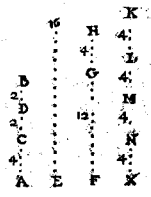
9.com.inoct.

Ex 2.huius.

THEOREMA V.

Si par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales, qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti æqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Sit par numerus AB: & bifariam in AC CB diuidatur: diuidatur autem & in partes inæquales AD DB. Dico quadratum ex CB numero plano, qui



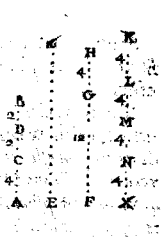
fit ex

fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex C D aequalem esse. sit enim E quadratus ex CE: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus sit GH. itaq; quoniam numerus B C diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex B C, hoc est E aequalis quadratis ex BD DC vnà cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. sit igitur ex B D quidem quadratus K L, ex D C vero quadratus N X: & planus ex BD DC uterque ipsorum LM MN: totus igitur KX ipsi E est aequalis. et quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, metitur ED ipsum KL per vnitates, quae in se ipso sunt. rursus quoniam C D ipsum D B multiplicãs fecit L M; D B metitur L M per vnitates, quae sunt in CD. metiebatur autem KL per eas, quae in se ipso sunt vnitates. ergo D B totum K M metitur per vnitates, quę sunt in C B. aequalis autem est C B ipsi C A. quare D B metitur K M per vnitates, quae sunt in C A. rursus quoniam CD multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae sunt in CD vnitates. metiebatur autem & KM per vnitates, quae sunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quae sunt in AD, metitur. sed & DB metitur FG per vnitates, quae sunt in AD: ponitur enim E G, qui fit ex AD DB. aequalis igitur est F G ipsi KN. qui enim sunt eiusdem aeque multiplices inter se aequales sunt. est autem et GH aequalis NX, cum vterque quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH est aequalis; estq; ipsi E aequalis KX. Ergo FH ipsi E aequalis erit. atque est F H quidem numerus planus ex AD D B vnà cum quadrato, qui fit ex D C. E vero est qui fit ex C B quadratus. numerus igitur planus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex DC aequalis est ei, qui fit ex CB quadrato. ergo si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inequales; qui ex inequalibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente,

10. com. not.

1. cõm not.



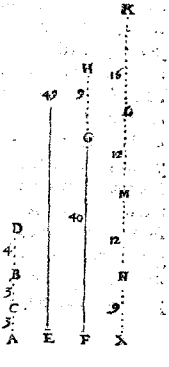
THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est æqualis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros A C C B: & ipsi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CB aequalem esse ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus, qui fit ex AD DB sit FG: & ex CB quadratus GH. & quoniam quadratus ex CD est aequalis quadratis ex DB EC vnà cũ eo, qui bis fit ex DB BC; sit quadratus qui dem ex BD numerus KL: planus vero numerus ex DB BC sit vterque ipsorum LM MN: & ex BC quadratus NX. totus igitur KX est aequalis quadrato ex CD: est aũt E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipsi E est aequalis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit K L, B D metitur KL per vnitates, quae in se ipso sunt. metitur autem & LM per vnitates, quę sunt in CB. ergo DB metitur totum KM per eas, quae sunt in CD vnitates. est autem CB ipsi C A aequalis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quae sunt in AD. sed DB metitur quoque ipsum F G per vnitates, quae sunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipsi KN est aequalis. est autem & HG aequalis NX. vterque enim est quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH est aequalis toti KX. sed KX ostensus est aequalis ipsi E. ergo & FH ipsi E est aequalis. atque est FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB; E vero est quadratus, qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB est aequalis ei, qui fit ex C D quadrato. Ergo si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat. quod oportebat demonstrare.

4. antecedentium.

10. com. not.



THEO-

THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato.

Numerus enim AB diuidatur in numeros AC CB. Dico quadratos, qui fiunt ex BA AC aequales esse numero plano, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius BC quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex AB, est aequalis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC est aequalis duobus quadratis, qui ex AC, & quadrato ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui semel fit ex BA AC est aequalis ei, qui semel fit ex BC CA vnà cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC aequalis erit ei, qui bis fit ex BC CA vnà cum duobus quadratis ipsius CA. commmis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA aequales sunt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC aequalis est ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum quadrato reliquae partis CB. ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis aequalis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquae partis quadrato. quod oportebat demonstrare.

B
3 C — 4. antecedentium.
5 A

3. antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico numerum planũ, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipsius AC aequalẽ esse ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipsi BC aequalis BD. & quoniam quadratus ex AD aequalis est quadratis, qui ex AB BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano, atque est BD aequalis BC. ergo qui fit ex AD quadratus aequalis est quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC aequales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex AC. atque est quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitur: etenim BD ipsi BC est aequalis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis aequalis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D
2 B
2 C — Ex antecedente.
6 A

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus AB bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inæquales AD DB. Dico quadratos, qui fiunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC CD duplos esse. Quoniam enim par numerus AB in numeros aequales diuiditur AC CB: & in numeros inaequales AD DB: qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CD aequalis est ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex AD DB vnà cùm duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC. si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupli est duplus,

B
2
D — 5. antecedentium.
3 C
5 A

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vnà cũ duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor est, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. rursus quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum numero composito ex quadratis AD DB aequalis est ei, qui fit ex AB quadrato: erit compositus ex AD DB quadratis maior, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atque est quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compositus igitur ex quadratis AD DB maior est, quàm duplus quadrati ex AC, duplo quadrati ex DC. ergo duplus est quadratorum, qui ex AC CD fiunt. si igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti. quod demonstrare oportebat.

4. antecedentium.

B 2 D 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio obscuriuscula est, quare apertius hoc modo explicabitur. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, aequalis quadratis ex AC CD vnà cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB sit aequalis ipsi AC, quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB. quadrati igitur ex AD DB aequales sunt quadratis ex BC CD DB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. sed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium sunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD vnà cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duplis quadratorum ex BC CD, hoc est duplis quadratorum ex AC CD: ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonstrare oportebat.

D 2 B 3 C 5 A

THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos esse. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB BD, erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB vnà cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB est aequalis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC CB; est enim AC ipsi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB sũt aequales ei qui bis fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CB est aequalis quadrato ex CD: erit qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CB quadratis aequalis duobus quadratis, qui ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur sunt quadratorũ ex AC CD. atque est quadratus quidẽ ex AD, qui fit ex toto cũ adiecto; quadratus uero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cũ adiecto vnà cũ eo, qui ex adiecto, duplus est quadrati, qui fit ex dimidio vnà cũ quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto cõstat. quare si par numerus bifariã diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

7. antecedentium.

6. antecedentium.

D 2 B 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem, quod vndecimę secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

Si enim fieri possit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB, vt qui ex AB BC fit numerus

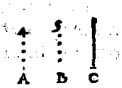
rus planus aequalis sit quadrato ex AC. qui igitur quater fit ex AB BC quadrati ex AC quadruplus est. ergo qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC quintuplus est ipsius quadrati ex AC. sed qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC numerus quadratus est;

etenim aequalis est quadrato, qui à toto AB, et à parte BC tamquam ab vno efficitur ex octauo premissorum. est autem & qui fit AC quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad vnum. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte fit numerus planus aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit, quadrato. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit vt primus ad secũdum, ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. Dico non esse ut A ad B, ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita B ad C. & sunt AB primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B, vt antecedens antecedentem. sed & ipse se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existentes. quod est absurdum. non igitur est vt A ad B, ita B ad C. quod oportebat demonstrare.

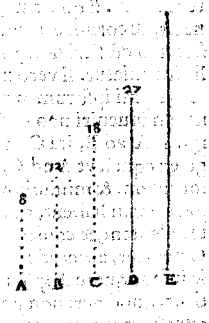


23. septimi.
21. septimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, extremi autem ipsorum A D primi sint inter se. Dico non esse vt A ad B, ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & sunt A D primi; sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipsum C; & ob id A quoque ipsum C metitur. & quoniam est vt B ad C, ita C ad D, metitur autem B ipsum C, & C: ipsum D metietur. Sed A metitur C. quare & ipsum D. metitur autem & se ipsum. Ergo A ipsos A D primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. non igitur erit vt A ad B, ita D ad alium vllum, quod demonstrare oportebat.

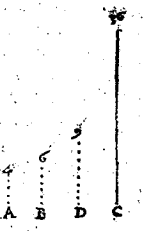


23. septimi.
21. septimi.
8. octau. huius.

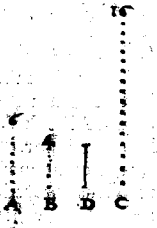
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat considerare an possit tertius ipsis proportionalis inueniri. Itaque A B vel primi inter se sunt, vel non primi. si quidem primi, iam ostensum est, fieri non posse, vt tertius ipsis proportionalis inueniatur. Sed non sint A B inter se primi, & B se ipsum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipsum C fecit. sed & B se ipsum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D est equalis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipsis A B tertius proportionalis D inuentus est.



Sed non metiatur A ipsum C. Dico fieri non posse, vt ipsis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri potest, inuentus sit D. ergo qui fit ex A D aequalis est ei, qui fit ex B. sed qui fit ex B est C. qui igitur fit ex A D ipsi C est equalis. ergo A ipsum D multiplicans fecit C. & ob id A ipsum C per D metitur. sed & non metiri positum est, quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipsum C non metitur. quod demonstrare oportebat.



PROBLEMA XI. PROPOSITIO XIX.

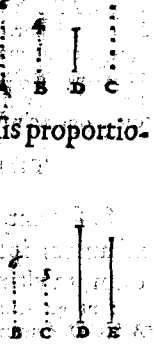
Tribus numeris datis considerare an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

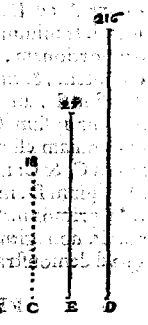
Sint dati tres numeri A B C, & oporteat considerare an possit ipsis quartus proportionalis inueniri. ergo ipsi A B C vel deinceps sunt proportionales, & eorum extremi primi inter se sunt, vel non deinceps proportionales, & eorum extremi sunt primi inter se, vel proportionales quidem deinceps, non autem extremi ipsorum inter se primi, vel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter se sunt. si quidem igitur A B C deinceps sunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter se, iam demonstratum est fieri non posse, vt quartus ipsis proportionalis inueniatur. si vero non sunt deinceps proportionales, & extremi ipsorum sunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non posse. si enim inueniri potest sit D. vt igitur A ad B, ita C ad D; & vt B ad C, ita sit D ad E. ergo ex equali vt A ad C, ita C ad E. sed sunt A C primi; primi autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & se ipsum: quare A ipsos A C primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. ipsis igitur A B C non potest quartus proportionalis inueniri.

17 huius.

23. septimi.

21. septimi.





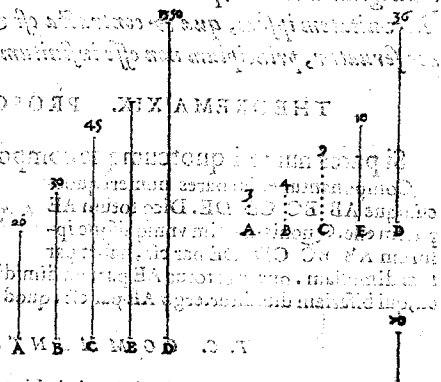
Rursus A B C proportionales quidem sint deinceps, non autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri posse. multiplicans enim B ipsum C, faciat D. itaque vel A metitur ipsum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D. sed & B multiplicãs C ipsum D fecit. qui igitur fit est A E est æqualis ei, qui ex B C; propterea q; vt A. ad B, ita est C ad E. ipsis igitur A B C quartus proportionalis E inuentus est.

9. com. not.

19. septimi.

Sed

Sed non metiatur A ipsum D. Dico fieri non posse, vt ipsis ABC inueniatur quartus proportionalis. si enim inueniri potest, inueniatur, sitq; E. ergo qui fit ex A E est æqualis ei, qui ex BC. sed qui fit ex BC est D. quare qui fit ex A E ipsi D est æqualis: & ob id A ipsum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipsum D per E. quare A ipsum D metitur. sed & nō metitur. quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis A B C inueniatur quartus proportionalis, quando A ipsum D non metitur.



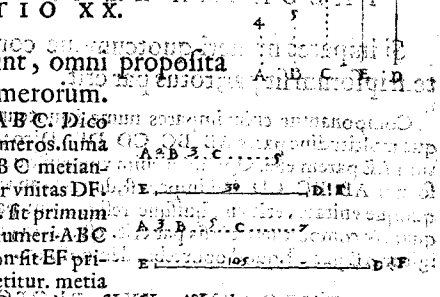
19. septimi.

Sed non sint neque deinceps proportionales A B C, neque A C inter se primi; & B ipsum C multiplicans faciat D. similiter demonstrabimus, si A ipsum D metiatur, inueniri posse quartum proportionalem. sin minus, inueniri nō posse. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A B C. Dico ipsis A B C plures esse primos numeros. sumatur enim minimus, quem ipsi A B C metiantur; sitq; DE. & ipsi DE apponatur vnitas DF. ergo E F vel primus est, vel non. sit primum primus. Inuenti igitur sunt primi numeri A B C EF plures, quàm ipsi ABC. sed non sit EF primus. ergo eum primus aliquis metitur. metiatur G. Dico G nulli ipsorum A B C eundem esse. si enim G idem sit, qui vnus ipsorum A B C; ipsi autem A B C metiantur DE; & G ipsum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF vnitatem metietur numerus existens, quod est absurdum. ergo G non est idem, qui unus ipsorum A B C, & ponitur primus. Inuenti igitur sunt primi numeri A B C G plures propositis multitudine primorum numerorum A B C. quod oportebat demonstrare.



23. com. not.

SCHOLIVM.

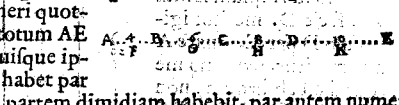
In hoc theoremate vult ostendere infinitos esse numeros primos; si enim omni propositæ numerorum multitudine primi plures sint, infinitos esse primos manifestum est. si autem hoc, videtur obsistere philosophorum dogmati, qui asserunt prima determinata esse, & numero minora.

quid igitur dicemus? primos numeros non esse principium numerorum, sed vnitatem ipsam, quæ & contracta est & sola. quare & in numeris hoc seruatur, principium non esse infinitum, sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE par est, habet partem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.



✻ 6. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

✻ Quare & totus AE partem dimidiam habebit.] *Quoniam enim vnusquisque eorum habet dimidium, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimidiam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. sed AF dimidia est ipsius AB. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.*

12. septimi.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

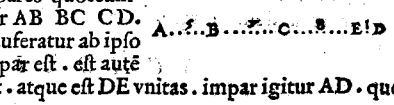
Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorum par. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componatur, & multitudo ipsorum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcumque, quorum multitudo sit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquus igitur AE par est. est autē & AC par. ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.



21. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

7. diffi. Atque est DE vnitas, impar igitur est AD] *impar enim numerus est, qui à pari vnitate differt.*

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & BC. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. quod oportebat demonstrare.

*

F. C. COMMENTARIVS.

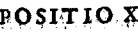
Quare & reliquus AC partem habet dimidiam.] *Sit ipsius AB dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE, & dividendo AC ad CB, vt DE ad EB. rursus permutando AC ad DE, vt CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & DE ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC parte habeat dimidiam bifariam diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandum proponebatur.*

*

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD est par. atque est CD vnitas. ergo CA impar est. quod demonstrare oportebat.

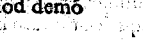


Ex antecedente.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & CD est par. quare & reliquus AC par est. quod oportebat demonstrare.

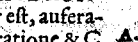


24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est DA vnitas. ergo CA impar est. quod oportebat demonstrare.

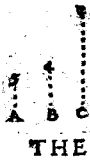


24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit. ergo C est par. quod demonstrare oportebat.



21. huius.

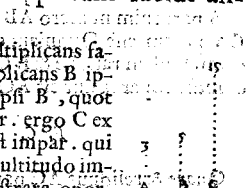
THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A vnitates. atque est vterque ipsorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, & ipse impar erit. ergo C est impar. quod demonstrare oportebat.

23. huius.

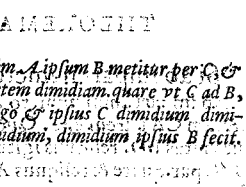


THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium eius metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C. Dico C non esse imparem. si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar; ac propterea impar est. quod est absurdum. par enim ponitur. non igitur C est impar. ergo par. quare A ipsum B pariter metietur. & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonstrare.

9. com. not.



Et ob id eius quoque dimidium metitur.] *quoniam enim A ipsum B metitur per C, & C ipsum B per A metietur. habet autem vterque ipsorum eB partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium dimidium ipsius B per A metietur. ideo, A multiplicans ipsius C dimidium, dimidium ipsius B fecit. quare A ipsius B dimidium per dimidium ipsius C metitur.*

9. com. not.

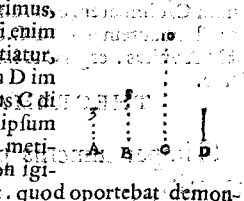
10. com. not.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primum esse. si enim non sint AC primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; D. & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsum A. quare D ipsos AB metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo AC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.



SCHOLIVM.

Et est A impar. impar igitur est & D.] *quoniam enim A impar est, metitur autem ipsum numerus D, vt positum est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares esse tantum. at vero vnumquemuis ipsorum BCD pariter parem esse, manifestò constat. à binario namque duplatus est. Dico & tantum, exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales sunt, & post vnitatem A primus est, maximum ipsorum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur praeter ipsos ABC. atque est vnusquisque ipsorum ABC par. ergo D pariter par est. tãtum. similiter demonstrabimus & vnumquemque ipsorũ ABC pariter parẽ esse tãtũ. quod demõstrare oportebat.

15. huius.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem esse tantum, at vero pariter imparem esse A 10
perspicuum est. dimidius enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico & tantum. nam si A sit etiam pariter par, dimidius ipsius par erit; atque eum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipsius par numerus metitur, impar existens. quod est absurdum, quare A pariter impar est tantum.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si par numerus neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est, & pariter impar.

Numerus enim A neque sit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem esse. at vero A pariter esse parem, manifestum est; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem esse. nam si A bifariã secemus, & dimidium ipsius bifariam, & hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. si enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar est. ostensum autem est & pariter esse parem. est igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonstrare oportebat.

A 24

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à secundo, & ultimo æquales primo; erit vt secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipso BC; & ab EF æqualis ipsi A, videlicet GC FH. Dico vt BG ad A, ita esse EH ad A BC D; ponatur enim ipsi quidem B C æqualis F K; ipsi vero D æqualis FL. Quoniam igitur FK est æqualis ipsi BC, quorum FH est æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB æqualis. & quoniam est vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A; æqualis autem est D ipsi FL, & BC ipsi FK, & A ipsi FH: erit vt EF ad FL ita LF ad FK, & KF ad FH: quare diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. est igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atque est K H quidem æqualis BG, FH vero ipsi A, & LF KF HF æquales ipsis D BC A. ergo vt BG ad A, ita est EH ad D BC A. est igitur vt secundi excessus ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes. quod oportebat demonstrare.

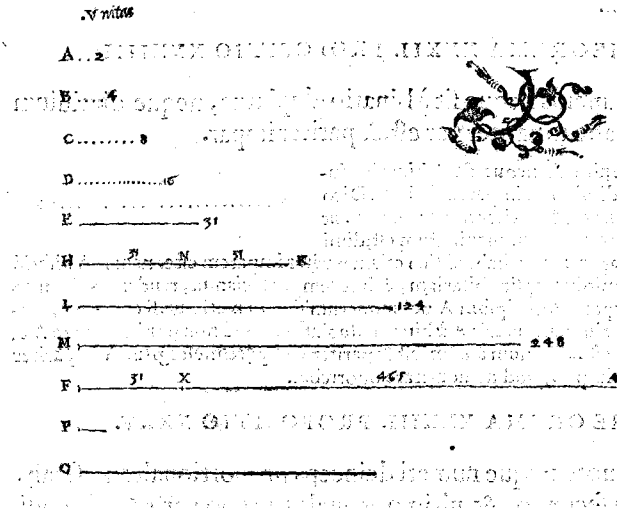
A..2
B..G..C
D.....8
F....E....L..4..K A H A F

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare diuidendo vt EL ad LF] *ex ijs, quae nos ad 14 septimi demonstrauimus.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponãtur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat; & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.



Ab vnitate enim exponantur quotcumque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat A B C D: & toti æqualis sit E: & E ipsum D multiplicans faciat FG. Dico FG perfectum esse. quot enim sunt A B, CD mul-

CD multitudine, tot ſumantur ab ipſo E in dupla analogia, qui ſint E HK L M. ergo ex æquali vt A ad D, ita erit E ad M: ac propterea qui fit ex E D eſt æqualis ei, qui ex A M. eſt autem qui ex E D ipſe FG. quare FG eſt, qui fit ex A M. multiplicãs igitur A ipſum M fecit FG. ergo M metitur F G per vnitates, quæ ſunt in A. atque eſt A binarius. duplus igitur eſt FG ipſius M. ſunt autem & M L HK E deinceps dupli inter ſe. ergo E HK L M FG deinceps proportionales ſunt in dupla analogia. auferatur à ſecundo HK, & ab vltimo FG ipſi primo E æqualis vterque HN, FX. eſt igitur vt ſecundi numeri exceſſus ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes. quare vt NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque eſt NK ipſi E æqualis. ergo & XG eſt æqualis ipſis M L HK E. eſt aũt & FX æqualis ipſi E; atque E ipſis A B C D, & vnitati æqualis. totus igitur FG æqualis eſt & ipſis E HK L M, & ipſis A B C D, & vnitati; omnesq; ipſum FG metiuntur. Dico FG nullum alium metiri præter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatem. ſi enim fieri poteſt, metiatur aliquis numerus ipſũ FG, qui ſit O: ſitq; O nulli ipſorũ A B C D E HK L M idẽ. & quoties O ipſum FG metitur, tot vnitates ſint in P. ergo P ipſum O multiplicans fecit FG. ſed & E multiplicans D ipſum FG fecit. eſt igitur vt E ad P, ita O ad D. & quoniam ab vnitate deinceps proportionales ſunt A B C D, et poſt vnitatem A primus eſt, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipſos A B C: & ponitur O nulli ipſorum A B C idem. non igitur O ipſum D metietur. vt autem O ad D, ita E ad P. ergo neque E metietur ipſum P. atque eſt E primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt. quare E P primi inter ſe ſunt. ſed primi & minimi; minimi vero eos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentẽ. atque eſt vt E ad P, ita O ad D. ergo E æqualiter metitur ipſum O, atque P ipſum D. ſed D nullus alius metitur præter ipſos A B C. quare P idẽ eſt, qui vnus ipſorum A B C. ſit idẽ, qui B. & quot ſunt B C D multitudine, tot ab ipſo E ſumantur E HK L: ſuntq; E HK L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur vt B ad D, ita eſt E ad L. ergo qui fit ex B L eſt æqualis ei, qui ex D E. ſed qui fit ex D E eſt æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare vt P ad B, ita eſt L ad O. eſtq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O. quod fieri non poteſt. etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur. non igitur ipſum FG metitur aliquis numerus præter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatẽ. atque oſtenſus eſt FG æqualis ipſis A B C D E HK L M, et vnitati. perfectus autem numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat demonſtrare.

19. ſeptimi. 10. com. not. 9. cõis. not. 19. ſeptimi. 13. huius. 31. ſeptimi. 23. ſeptimi. 21. ſeptimi. 19. ſeptimi. 19. ſeptimi.

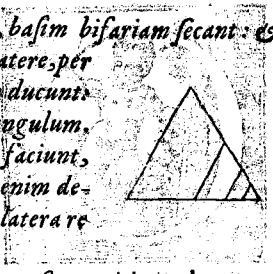
NONI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

Propositum est Euclidi in decimo libro tractare de commensurabilibus & incommensurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem sunt incommensurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura sunt; irrationalia vero & rationalia positione. si enim quadrati diametrum natura incommansurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, sed ex illius rationibus, quæ in ipsa sunt. quare neque irrationale est eorum, quæ natura sunt incommensurabilia, sed incommensurabile. etenim natura ipsa hoc facit iuxta omnem mensuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commensurabilibus, & incommensurabilibus tractat, eorum naturã exquirens: postea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obsistentes ipsa reprehendunt: sed de maxime simplicibus speciebus, quibus compositis infinitæ irrationales gignũtur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad scientiam autem attinet, causas, principia, & simplicia considerare, non singularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium simplices species tredecim, quæ tribus modis inuentę sunt, his enim aliæ simplices non inuenientur. Horum modorum vnus est iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam speciem eorũ. alius iuxta compositionẽ, per quẽ sex species; tertius iuxta diuisionẽ, per quem reliquas sex inuenit. Venerũt autem initio ad inquisitionem symmetriæ, hoc est commensurabilitatis Pythagoræi primi, ipsam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas sit omnium numerorum communis mensura, & in magnitudinibus communis mensura inueniri non possit. Huius caussa est, quòd omnis numerus, iuxta quaslibet sectiones diuisus relinquit particulam aliquam minimã, & quę sectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitũ diuisa non relinquit particulam, quæ propterea quòd minima sit, secari non possit. sed & illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarũ singulę in infinitum secabuntur. & simpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps est principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini est particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps est infiniti. Itaque quoniam oportet mensuras minores esse ijs, quæ mensurantur; mensuratur autem omnis numerus, necesse est omnium minimam esse mensuram. quare & magnitudinum, si omnes mensura communi mensurantur, necesse est eam minimam esse. Sed in numeris quidem est communis mensura, terminatur enim, quemadmodum dictum est: in magnitudinibus vero

non

non item. non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagorei, vt fieri potuit, in magnitudinibus mensuram inuenerunt. omnes enim, quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellarunt: eas uero, quas non metitur eadē mensura, incōmensurabiles. & harum rursus, quascumque alia quapiam cōmunis mensura metitur inter se cōmensurabiles: quascumque vero non metitur illis incōmensurabiles. & ita sumptis mensuris, omnes possunt esse commensurabiles: rationales aūt omnes, & omnes irrationales esse possunt, vt ad aliquid: propterea quod commensurabile quidem & incommensurabile natura illis inest: rationale autem, & irrationale positione. Inueniuntur autē commensurabiles & incōmensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ, superficies, & solida, vt Theon demonstrauit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse, hoc theoremate ostenderunt.



Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant: & omni portioni æqualem abscindentes in altero latere, per punctum diuisionis ad basis partes parallelam ducunt: & rursus æquilaterum constitutum est triangulum, cuius basim eodem modo secantes similiter faciunt, & nūquam desinunt ad trianguli verticē. si enim desinerent, sequeretur æquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia esse, quod est absurdum.

Quod autem horum vtilis, nec superuacanea sit cognitio, vel ex veteri pythagoreorū sermone colligi potest. fabulantur enim eū, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto protulerit ausus, naufragio periisse. idq; ea factum de caussa, quòd omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt præterea, si quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore statim, vt in generationis, hoc est profundi locum deferatur, perpetuisq; illic obruatur fluctibus, tanta veneratione hi viri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER DECIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectę lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffiniuit, quòd in prima diffinitione magnitudinum commensurabilium comprehendantur; sunt enim rectę lineę longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IIII.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumque rectę lineæ propositę rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Et

VI.

Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea propoſita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineæ, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, quę ipſis æqualia quadrata deſcribunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quędam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hę.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quælibet magnitudo multiplicata poteſt omnem propoſitam magnitudinem eiuſdem generis ſuperare.*

2 *Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quã illa ipſa metitur.*

3 *Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

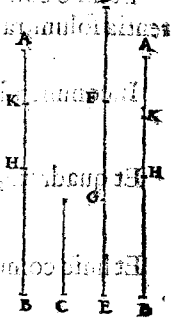
4 *Quęcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quę ex ipſis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt rurſus auferatur maius, quam dimidium; & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſita minor erit.

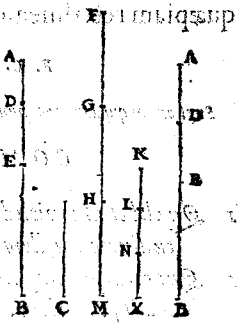
Sint

Sint duæ magnitudines inæquales ABVC, quarum maior AB. Dico si ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem
5. com. not. quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, maior autem, quàm AB, diuidaturq; DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus maius, quàm dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiant diuisionibus, quę in DE: sint igitur diuisiones AK KH HB diuisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior est DE, quàm AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus, quàm dimidium EG, ab ipsa vero AB maius, quàm dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA maius. rursus quoniam maior est GD, quàm HA, & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF, ab ipsa vero HA maius, quàm dimidium HK; reliquum FD reliquo AK maius erit. estq; FD æqualis ipsi C. ergo C quã AK est maior. minor igitur est AK, quàm C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK expositæ minori magnitudine C minor. quod demonstrare oportebat.



* similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint.

ALITER. Exponatur duæ magnitudines inæquales AB C, sitq; C minor. & quoniam minor est C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat vt FM, diuidaturq; in partes ipsi C æquales M H HG GF. & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BE, & ab E A maius, quàm dimidium ED: atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quę sunt in FM, æquales fiant diuisionibus, quę in AB. fiant igitur vt BE ED DA. & ipsi DA vnaquæque ipsarum KL LN NX sit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuisiones KX æquales sint diuisionibus ipsius FM. & quoniam BE maior est, quàm dimidium ipsius AB, erit BE maior, quàm EA. multo igitur maior est BE, quàm DA. sed ipsi DA æqualis est XN. ergo BE maior est, quàm XN. rursus quoniam ED maior est quàm dimidium EA, erit ED maior, quàm DA. sed ipsi DA est æqualis NL. quare ED, quàm NL est maior. tota igitur DB maior est, quàm XL. ipsi vero DA æqualis est LK.



quare tota AB, quàm tota XK maior erit. sed & MF maior est, quam BA. multo igitur MF, quàm XK est maior. & quoniam XN NL LK inter se æquales sunt; sunt autem & MH HG GF inter se æquales: atque est multitudo earum, quæ sunt in MF æqualis multitudini ipsarum, quæ in XK: erit vt KL ad FG, ita KX ad FM. maior autem est FM, quàm XK. ergo & GF quàm LK est maior. atque est F G ipsi C æqualis; & KL æqualis ipsi AD. ergo C quàm AD maior erit. quod oportebat demonstrare.
12. quinti.
14. quinti.

SCHOLIVM.

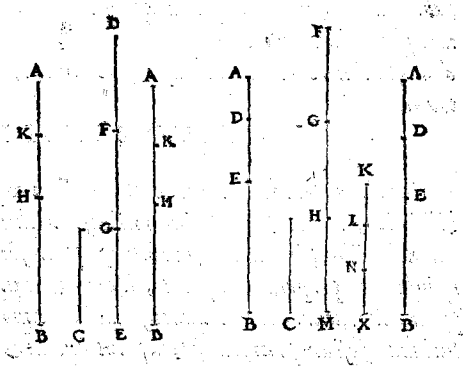
In magnitudinibus asymetriam inesse. *Ex hoc theoremate perspicuum fit in magnitudinibus asymetriam, hoc est incommensurabilitatem inesse. si enim exposita magnitudine minorem assumere licet, & rursus hac minorem, & semper minorem,*

magnitu-

magnitudines in infinitum secantur; & non in minimam mensuram determinatam, vt in numeris est vnitas. si igitur non est determinata magnitudo minima, erunt quædam magnitudines incommensurabiles, quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata sit, non metietur.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipsa AB dimidium BH: & ab ipsa AH dimidium HK: idq; semper fiat. quo ad diuisiones AB æquales sint diuisionibus ipsius DE: & quoniam DE maior est quàm AB, & ab ipsa quidem DE ablatum est minus quàm dimidium: ab ipsa vero AB ablatum est dimidium; erit reliquum GD maius reliquo HA. rursus quoniam GD maior est quàm HA: & ab ipsa GD ablatum est dimidium GF; ab ipsa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit. quæ deinceps sunt similiter demonstrabuntur.*

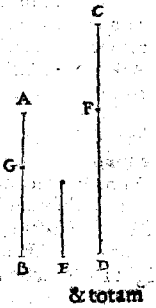


Sed in alia demonstratione. auferatur ab ipsa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED: atque hoc fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in FM æquales sint diuisionibus, quæ in AB: sint autem BE ED DA. & ipsi DA æqualis sit vnaquæque ipsarum KL LN NX. & quoniam BE est æqualis ipsi EA, & EA maior quàm AD, erit BE quàm DA maior. sed ipsi DA est æqualis XN. ergo EE maior est quàm XN. rursus quoniam ED DA sunt æquales ipsis NL LK, tota AB quæ tota XK maior erit. reliqua vero similiter demonstrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expositis AB C D, quarum minor sit AB, & detracta semper minore de maiore, reliqua minime metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB CD incommensurabiles esse. si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, si fieri potest, sitq; E: & AB quidem metiens DF relinquat se ipsa minorem CF: CF vero metiens BG relinquat se ipsa minorem AG; & hoc semper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipsa E minor. Quoniã igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipsam DF metitur. sed & metitur totã CD. ergo & reliquam CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipsam BG metitur. metitur autem



& totam

& totam AB. & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non pôt, non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommensurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæquali bus expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Magnitudines quasdam longitudine esse incommensurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commensurabiles esse perspicue apparet. magnitudinum autem commensurabilium maximam communem mensuram inuenire, non cuius vis est, sed hominis eruditi: cuius quidem maximæ communis mensuræ inuentionem in sequenti theoremate tradit.

ALIVD SCHOLIVM.

Cum in antecedenti theoremate caussam explicauerit incommensurabilitatis, in hoc signum incommensurabilium magnitudinum affert, quando scilicet incommensurabiles sunt. in sextodecimo autem theoremate ipsarum proprium exponit, ita vt & caussa, & signum, & proprium habeatur. At in commensurabilibus magnitudinibus caussam veluti manifestam prætermisit; exponit autem & signum, & proprium.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædã magnitudo, quæ sit minor ipsa E.] *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit se ipsa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit se ipsa minorem AG: erit AG minor, quàm BG. ergo ex AB ablatum est maius, quàm dimidium ipsius, videl. tèt BG. & ita semper fiet. quòd cum ex AB semper auferatur maius, quàm dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quae ipsa E minor erit.*

Ex antecedente.

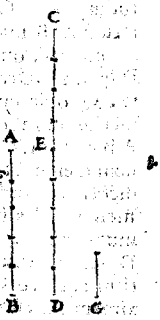
PROBLEMA I. PROPOSITIO. III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB CD, quarum minor AB. oportet ipsarum AB CD maximam communem mensuram inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & si quidem AB metitur CD, metitur autem & se ipsam; erit AB ipsarum AB CD communis mensura. & perspicuũ est maximam esse; magnitudo enim maior magnitudine AB ipsam AB non metietur. si vero AB non metitur CD; detracta semper minore de maiore, relinquetur tandẽ quædam magnitudo, quę præcedentem metietur; propterea quòd AB CD non sint incommensurabiles. & AB quidem metiens ED relinquat se ipsa minorem EC: EC vero metiens FB relinquat se ipsa minorem AF; & AF ipsam CE metiatur. Quũ igitur AF metitur CE, sed CE metitur FB: & AF ipsam FB metitur: metitur autem & se ipsam. & totam igitur AB metietur. sed AB metitur DE. ergo AF ipsam DE metitur. metitur autem

2. com. not.
3. com. not.

tem & CE. & totã igitur CD metietur. ergo AF ipſas AB CD metitur; ac propterea ipſarum eſt communis menſura. Dico & maximam eſſe. niſi enim ita ſit, erit aliqua magnitudo maior ipſa AF, quę ipſas AB CD metietur. Itaque metiatur, & ſit G. & quoniam G metitur AB, AB vero metitur ED; & G ipſam ED metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam CE metietur. ſed CE metitur FB. quare G ipſam FB metitur. metitur autem & totam AB. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non poteſt. non igitur magnitudo quædam maior ipſa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipſarum AB CD maxima erit communis menſura. Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis AB CD maxima ipſarum communis menſura inuenta eſt AF. quod facere oportebat.



§. com. 201.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri. ❧

SCHOLIVM.

Tamquam manifeſtum ſit, eſſe magnitudines commenſurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius oſtendit, quemadmodum in ijs, quæ in commenſurabiles ſunt. conſtat enim magnitudines omnes ali cuius multiplices, ſi comparentur cum ea, cuius ſunt multiplices, commenſurabiles eſſe.

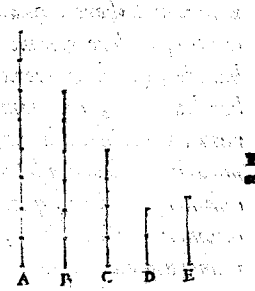
F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri] *ſequitur illud ex vltima parte demonſtrationis, vt ad ſecundam propoſitionem ſeptimi libri in numeris explicauimus.* ❧

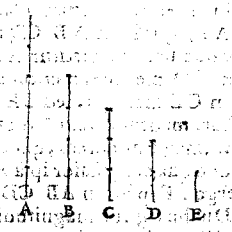
PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram inuenire.

Sint datæ tres magnitudines commenſurabiles A B C. oportet ipſarum A B C maximam communẽ menſuram inuenire. ſumatur enim duarum A B maxima cõis menſura, quę ſit D. itaque D ipſam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & qm̃ D ipſam C metitur, metitur autem & AB; & ipſas A B C metietur. Quare D ipſarum A B C communis eſt menſura: & manifeſtum eſt maximam eſſe. magnitudo enim maior magnitudine D ipſas A B C non metietur. nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitu-



Ex antecedente.

do maior ipsa D, quæ sit E. Quoniã igitur E magnitudines A B C metitur, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communẽ mensuram D, maior minorẽ, quod fieri nõ potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primũ C D commensurabiles esse. Quoniã enim commensurabiles sunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quę scilicet & ipsas A B metitur. ergo & ipsarum A B maximã cõmunem mensurã D. metitur autem & ipsam C. quare dicta magnitudo ipsas C D metitur. ideoq; C D cõmensurabiles sunt. sumatur ipsarum maxima cõmunis mẽsura; & sit E. Quoniã igitur E metitur D, D vero metitur A B, & E ipsas A B metietur. metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C communis est mensura. Dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communem mensuram, quæ est D. ergo F metietur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur, & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

SCHOLIVM.

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuersum: vult ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quonam modo commensurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticorum libro fecit. postquam enim ostendit quinam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quòd non omnino in commensurabiles sunt, vt magnitudines; ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem superparticularem

particularem, vel multiplicem superpartientem, quos ipse breuitatis causa ex minori nominauit, vel partem, vel partes. per partem intelligens submultiplicem, vel subsuperparticularē, vel submultiplicem superparticularem. per partes vero subsuperpartientem, vel submultiplicem superpartientem. hoc igitur volens ostendere eo indigebat, quo modo commensurabilium maxima cōmunis mensura inueniatur. quod etiam hoc loco obseruauit. Postea in quinto theoremate ostēdet cōmēsurabiles magnitudines inter se proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commensurabilem magnitudinem omnis commensurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem esse, vel partes: hoc enim est proportionem habere, quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus. quamobrem eo vsus est. Sciendum autem & ipsas demonstrationes, quæ ex arithmeticis petuntur, incommutabiles esse.

ALIVD.

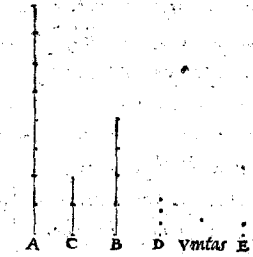
Postquam docuit, quæ sint magnitudines incommensurabiles, deinceps quid ipsas consequatur ostendet; & insuper quid consequatur commensurabiles in quinto, & sexto theoremate. & quoniam indigebat cō muni mensura earum, quæ sunt in symmetria, videlicet commensurabilium, hoc assumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inueniendæ sint commensurabilium communes mensuræ. septimum autem theorema inquirit; quę consequantur incommensurabiles magnitudines non simpliciter, sed secundum speciem, vt incommensurabiles longitudine, vel potentia; nam de incommensurabilibus secundum priuationem nihil dixit; vt pote, quæ non sint ipsis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quę longitudine, & potentia commensurabiles sunt, & incommensurabiles: his enim indiget in nono theoremaoe, & sequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compositionem, & diuisionem commensurabilitas, & incommensurabilitas inquiritur vsque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commensurabiles magnitudines inter se proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. metiatur, & sit C. & quoties C ipsam A metitur, tot vnitates sint in D: quoties autem C metitur B, tot vnitates sint in E.

quoniam igitur C ipſam A metitur per vnitates, quę ſunt in D: metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipſo ſunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. ergo vt C ad A, ita eſt vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatem. Rurſus quoniam C ipſam B metitur per vnitates, quæ ſunt in E; metiturq; vnitas numerum E per vnitates, quę in ipſo ſunt; vnitas numerum E æqualiter metietur, atque C ipſam B. eſt igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatem. quare ex æquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commẽſurabiles igitur magnitudines A B inter ſe proportionem habent, quam D numerus ad numerũ E. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

Hoc proprium eſt commenſurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars eſt, vel partes. ſi quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam vnitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; ſi vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim ſubmultiplicem facit proportionem: partes vero vnam reliquarum ſubproportionalium. ſi igitur rectæ lineæ ſint, & plana, quæ ab ipſis fiunt, & ſolida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. ſi vero plana, & quæ ab ipſis ſolida, non item rectæ lineæ, niſi proportio numerorũ ſit quadrati ad quadratum. & ſi ſolida nõ omnino quę ipſa præcedunt, niſi proportio ſit cubi ad cubum. quòd ſi ſolida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ lineæ habebunt: non enim ſunt commenſurabiles. In hoc autem theoremate & ſequenti de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus ſimpliciter diſſerit; at in ſeptimo de incommenſurabilibus longitudine. ex quo manifeſtum eſt & de potentia incommenſurabilibus. In octauo denique ortum tradit commenſurabilium, & incommenſurabilium longitudine & potentia.

F. C. COMMENTARIVS.

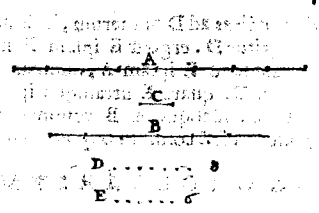
Ex iam demonſtratis poſſumus illud quoque problema abſoluere.

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam inter ſe proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propoſitae magnitudines commenſurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis menſura, quæ ſit C. & quoties C metitur A, tot vnitates ſint in D; quoties autem metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. habebit igitur A ad B proportionẽ eã, quã habet numerus D ad E numerum. itaque ſi A B rectae lineae ſint, & earum quadrata erunt cõmenſurabilia, & inter ſe proportionem habebunt, quam

numerus

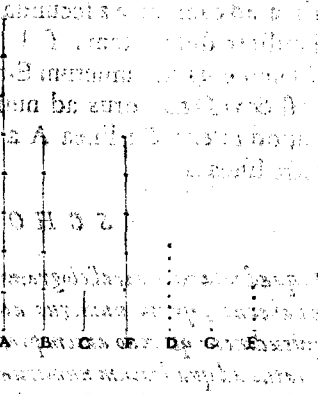
numerus quadratus ad quadratum numerum. ſi vero ſint ſuperficies, vel numeri D E ſunt quadrati, vel non quadrati; & ſi non ſunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & ſi quidem ſunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae linae, quae ipſas ſuperficies, vel ſuperficies ipſis aequales poſſunt, erunt longitudine commenſurabiles. ſi vero numeri non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommenſurabiles, quamquam potentia commenſurabiles ſint. quae omnia in nona propoſitione huius libri demonſtrabuntur.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles magnitudines erunt.

Duæ enim magnitudines A B inter ſe proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines commẽſurabiles eſſe. quot enim vnitates ſunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipſarum æqualis ſit C: quot autem vnitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi C cõponatur magnitudo F. Quoniam igitur quot ſunt in D vnitates, tot magnitudines ſunt in A, ipſi C æquales; quæ pars eſt vnitas ipſius D, eadem pars erit & C ipſius A. vt igitur C ad A, ita eſt vnitas ad D. metitur autem vnitas ipſum D numerum. ergo & C ipſam A metietur. & quoniam eſt vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C, ita D numerus ad vnitatem. rurſus quoniam quot vnitates ſunt in E, tot ſunt & in F magnitudines ipſi C æquales: vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatem. ergo ex æquali vt A ad F, ita eſt D ad E. ſed vt D ad E, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita A ad F. quod cum A ad utramque ipſarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipſi F æqualis. metitur autem C ipſam F. ergo & ipſam B metietur. ſed & metitur A. quare C ipſas A B metitur. commenſurabilis igitur eſt A ipſi B. Quare ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles magnitudines erunt, quod oportebat demonſtrare.



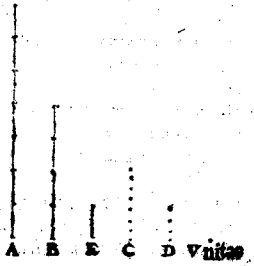
9. quinti.

ALITER.

Duæ enim magnitudines A B inter ſe proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commenſurabiles eſſe. quot enim unitates ſunt in C, in tot partes æquales A diuidatur, & uni ipſarum æqualis ſit E. eſt igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. eſt autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex

æquali

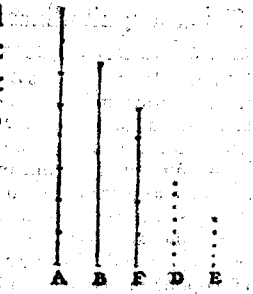
æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. sed unitas metitur D. ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipsarum A B metietur; ideoque A B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri, vt D. E, & recta linea vt A, fieri posse, vt D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem ipsarum A F media proportionalis sumatur, vt B, erit vt A ad F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc est vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda similem, & similiter descriptam. sed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur est & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

Cor. 20. sexti



SCHOLIVM.

Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque spacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipsæ commensurabiles sunt; & rectæ lineæ, quæ ipsas possunt, longitudine sunt commensurabiles. vel quando rectæ lineæ inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipsæ commensurabiles sunt longitudine, & quæ ab ipsis fiunt quadrata, vel spacia quadratis ipsarum æqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur se extendunt potentia commensurabiles, quàm commensurabiles longitudine; & continentiores sunt, vt ex sequentibus theorematibus fiet manifestum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VIII.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint

Sint incommensurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quàm numerus ad numerum. si enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum, commensurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. nō igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeāt, quā numerus ad numerū, incōmensurabiles erūt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem non habeāt quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A B magnitudines. ergo si duę magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod oportebat demonstrare.

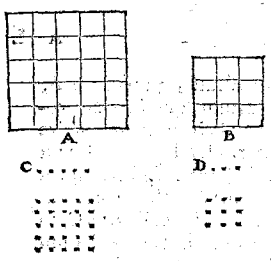
THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem non habentia, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

A

B

Sint rectæ lineæ A B longitudine cōmensurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat eam, quam numerus C ad numerū D. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes enim figuræ in dupla sunt proportione homologorum laterum: proportionis vero, quā habet numerus G ad numerum D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratum; etenim duorū numerorū quadratorum vnus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod



5. huius.

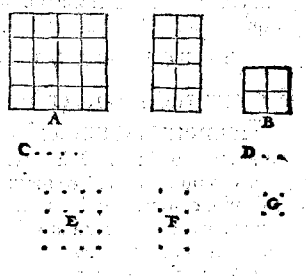
Coroll. 20. sexti.

11. octaui.

quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

ALITER.

Quoniam enim cõmenſurabilis eſt A ipſi B longitudine, proportionẽ hẽt quã numerus ad numerũ. habeat quã C ad D. & C ſe ipſum quidẽ multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D ſe ipſum multiplicans faciat G. itaque quoniã C ſe ipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicãs vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc eſt



5. ſexti. vt A ad B, ita E ad F. ſed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectãgulum, quod fit ex A B. eſt igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulũ, quod ex A B, ita E ad F. rurſus quoniam D ſe ipſum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc eſt vt A ad B, ita erit F

1. ſexti. ad G. vt autem A ad B, ita rectangulũ, quod fit ex A B ad quadratũ, quod fit ex B. ergo vt rectangulum, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. ſed vt quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex æquali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. eſt autem vterque ipſorum E G quadratus. & E quidem eſt à numero C; G uero ab ipſo D. quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed ſit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratũ, quod ex B, ita quadratus numerus, qui eſt à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. Dico A ipſi B longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam enim eſt vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui eſt à numero C ad quadtatum numerum, qui à numero D. ſed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla eſt proportionis, quã

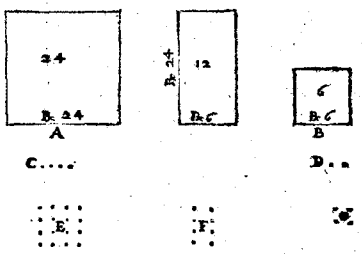
Cotoll. 20. ſexti. hẽt A ad B: proportio vero quadrati numeri, qui eſt à numero C ad quadratũ numerũ, qui à numero D itidẽ dupla eſt proportionis, quã hẽt C numerus ad numerum

11. octaui. D. eſt igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam numerus C ad D numerum: ac propterea A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis.

6. huius. quod oportebat demonſtrare.

ALITER.

Sed quadratũ, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G. Dico A ipſi B longitudinem commẽſurabilem eſſe. fit enim ipſius quidem E latus C, ipſius vero G latus D; & C ipſum



17. ſeptimi. D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales ſũt in proportione, quæ eſt C ad D. & quoniam quadratorum, quæ

17. ſeptimi. fiunt ex A B, medium proportionale eſt rectangulum, quod ex A B: numerorum vero quadratorum E G medium proportionale eſt F, erit vt quadratum

dratum, quod fit ex A, ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: sed vt quadratum ex A ad rectangulũ ex A B, ita A ad B. ergo A B commensurabiles sunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: 17. septimi.
nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem D ipsum F fecit. est igitur vt C ad D, ita E ad F.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B lõgitudine. Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem nõ habere, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. si enim quadratũ ex A ad quadratũ ex B proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quę deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

Et manifestum est ex iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quę vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectę lineę commensurabiles longitudine, non solum longitudine, sed & potentia commensurabiles. C 6. huius.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: quęcunq; quadrata proportionẽ nõ habẽt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, sed simpliciter quã aliquis alius numerus ad aliũ numerũ, cõmẽsurabilia sunt, hoc est rectę lineæ à quibus ipsa describũtur, cõmẽsurabiles sunt potẽtia, nõ aũt & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, nisi earum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommensurabiles non omnino & potentia incõmensurabiles esse. Qm̃ potentia cõmensurabiles possunt proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ideoq; cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. ergo nõ quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia: sed longitudine incommensurabiles existentes pos- D E F

sunt potentia & incommensurabiles, & commẽsurabiles esse. potentia vero in commensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in cõmensurabiles. quod est absurdum. potentia igitur in commensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIVM.

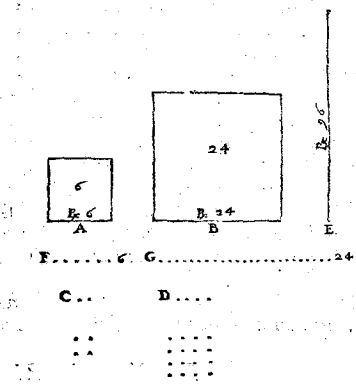
Hoc theorema Theæteti est inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theæteto, sed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuerse. namq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neque enim omnia commensurabilia spacia, quorum & latera commensurabilia sunt, comprehendit, si quidem quadratorum spaciorum commensurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur, quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, sed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent, commensurabilia habere latera oporteret, non habent autem, est enim maioris latus ad latus minoris, vt quadrati diameter ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset, quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset, non comprehendens ea, quę cum latera commensurabilia habeant, à quadratis numeris non mensurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appositum est, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, comprehenduntur enim omnia spacia, quæ & si à quadratis numeris non mensurantur, tamen cum sint commensurabilia, latera quoque commensurabilia habent. nam 18 & 8 commensurabilibus existentibus, propterea quòd à lateribus commensurabilibus describuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque sumentes latera ipsorum 9 & 4, æqualiter secabimus propositorum quadratorum latera: & habebimus commensurabilitatẽ. namque vt quadrata ad quadrata, ita sunt latera ad latera.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæ à rectis lineis longitudc commenſurabilibus fuerint quadrata] *intellige rectas lineas longitudine commenſurabiles inter ſe ſe, non expoſitae rationali: hoc enim non ſolum rationalibus contingit, ſed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.* A

Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commenſurabilia] *Per quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non ſolum intelligenda ſunt ea, quae totidem quadratas menſuras continent, quot vnitates ſunt in numeris quadratis; ſed & quae inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ſint enim duo numeri plani ſimiles F G, & recta linea A. ſitq; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario ſextę propoſitionis huius, vt F ad G, ita A ad aliam lineam, quae ſit E. & inter A E ſumpta media proportionali B, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum, quod ex ſecunda, hoc eſt ita quadratum, quod ex A ad quadratum, quod ex B. ſed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G. vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq; quadratum ex A continebit totidem menſuras quadratas, vt exempli gratia totidem pedes quadratos, quot vnitates ſunt in F, videlicet ſex, & quadratum ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates ſunt in G, hoc eſt 24. & quoniam numeri plani ſimiles F G inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; habebit etiam quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. ſimiliter demonſtrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non poſſint, tamen inter ſe longitudine commenſurabilia eſſe. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iuniores eiuſmodi latera radices quadratas, vel radices ſimpliciter appellãt; dicetur enim A radix 6, & B radix 24. atque eſt ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum ſit quadrati ex A, erit B ipſius A dupla. ſimiles enim rectilineę figurae in dupla ſunt proportione homologorum laterum.* B



Coroll. 20. ſexti.

Coroll. 20. ſexti.

16. octaui.

Quoniam enim quadrata, quae fiunt à rectis lineis longitudine commenſurabilibus] *Oſtendit quomodo prima corollarij pars ſequatur ex prima parte theorematis.* C

Rurſus quoniam quæcunque quadrata inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rurſus oſtendit quomodo idem ex ſecunda parte theorematis ſequatur.* D

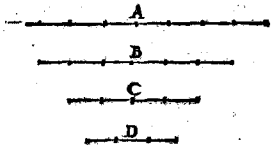
Quęcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed ſimpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum] *Hoc ad ſecundam partẽ Corollarij attinet, & ſequitur ex vltima parte theorematis.* E

Dico & longitudine incommenſurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.* F

Potentia vero incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt] *Hęc eſt vltima corollarij pars, quae per deductionem ad id, quod fieri non poteſt ex prima parte theorematis demonſtratur.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartę commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundę fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, ſitq; vt A ad B, ita C ad D, & ſit A ipſi B commenſurabilis. Dico & C ipſi D commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum: atque eſt vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. commenſurabilis igitur eſt C ipſi D. ſed A ipſi B ſit incommenſurabilis. dico & C ipſi D incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A ipſi B, non habebit A ad B proportionẽ, quam numerus ad numerum. eſt aũt vt A ad B, ita C ad D. ergo neque C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. ſi enim C ad D proportionem habeat, quã numerus ad numerum; & A ad B eam, quã numerus ad numerũ proportionẽ habebit; atq; erit A ipſi B cõmẽſurabilis. quod eſt abſurdũ; in cõmẽſurabilis enim ponitur. ergo C ad D proportionẽ nõ hẽt, quã numerus ad numerum; ideoq; C ipſi D eſt incommenſurabilis. Si igitur quattuor magnitudides proportionales fuerint; prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis, & tertia quartæ commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

5. huius.
6. huius.
7. huius.
8. huius.

LEMMA. I.

Oſtenſum eſt in arithmeticis numeros planos ſimiles inter ſe proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & ſi duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe proportionalia proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ſi enim haberent, ſimiles plani eſſent. quod non ponitur. ergo diſſimiles plani inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

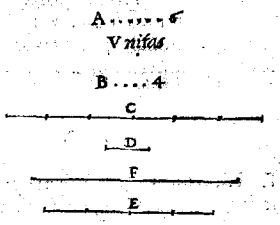
Ex 8. octaui. A

LEMMA. II.

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri A B; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad ſecundum numerum. quot enim vnitates ſunt in A, in tot partes æquales diuidatur C recta linea, & uni

vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus cõponatur recta linea E. est igitur vt vnitas ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearũ C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nãque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F sunt rectæ lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta est.

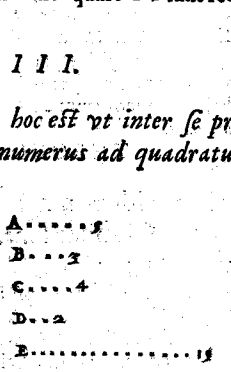


Coroll. 20. sexti.

LEMMA III.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

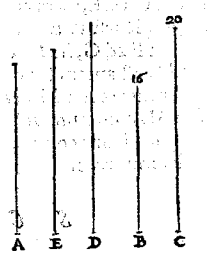
Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.



PROBLEMA III.
PROPOSITIO. XI.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum est. ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, neque quadratum ex A ad quadratũ ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarum A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit, incommensurabilis



9. huius. Coroll. 20. sexti.

D

rabilis igitur est A ipsi E potentia. ergo propositæ rectæ lineæ rationali, à qua dicebamus mensuras sumi, vt ipsi A potentia quidem commensurabilis inuenta est D, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E. irrationales enim vniuersè appellantur, quæ rationali & longitudine, & potentia incommensurabiles sunt.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse] *Hoc ab Euclide non demonstratur in arithmeticis, sed nos ad vigesimam sextam octaui libri demonstrauimus.*

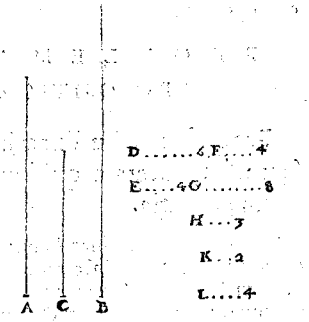
B Exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani] *Hoc in promptu est, sed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur.*

C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditũ est] *In corollario scilicet sexti theorematis. & quamquam hoc ex illo perspicue appareat, tamen secundum lemma, quod in græcis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.



Vtraque enim ipsarum A B ipsi C sit commensurabilis. dico & A ipsi B commensurabilem esse. Quoniam enim A commensurabilis
5.huius. est ipsi C, habebit A ad C proportionem, quã numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipsum E. Rursus quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, & quam
4.octaui. habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus H K L; sitq; vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita
11.quinti. K ad L. Quoniam igitur est vt A ad C, ita D ad E; sed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K. Rursus quoniam est vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L; erit & vt B ad C, ita K ad L. est autem & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet. quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis. Quæ igitur eidẽ
6.huius. magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

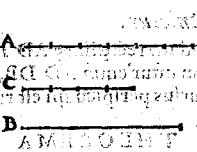
Hoc ab identitate non conuertitur. non enim quę inter se sunt commensurabiles, & eidem commensurabiles sunt; quemadmodum neque æquales inter se eidem sunt æquales, sed contra. nam contingit & incõ

mensurabiles

mensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

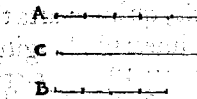


Sint enim duæ magnitudines A B, alia autem sit C: & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico & A ipsi B incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & C commensurabilis ipsi A; erit & C ipsi B cõmensurabilis. quod non ponitur.

Ex antecedente.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIIII.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.



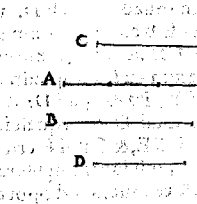
Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A, alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est B ipsi C, est autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines cõmensurabiles sint, altera aũt ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

12. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonstrata sunt, licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.



Sint duae magnitudines incommẽsurabiles A B: sitq; C ipsi A commensurabilis: & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis; & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursus quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

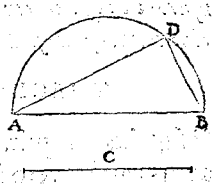
Ex antecedente.

LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

Sint

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior sit AB. oportet inuenire id, quo AB plus poteſt, quàm C. Deſcribatur in recta linea AB ſemicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipſi C æqualis, & D B iungatur. perſpicuum eſt angulum ADB rectum eſſe, & ipſam AB plus poſſe, quàm AD, hoc eſt quàm C, quãtum eſt rectæ lineæ DB quadratum.



1. quarti.
31. tertij.
47. primi.

Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt, hoc modo inuenietur.

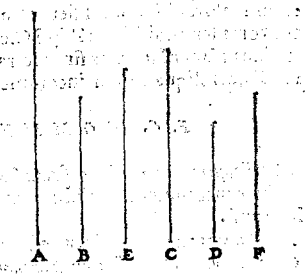
Sint duæ datæ rectę lineę AD DB, & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipſas poſsit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulum contineant ADB. & AB iungatur. rurſus perſpicuum eſt rectam lineam AB ipſas AD DB poſſe.

47. primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint; prima vero tãto plus poſsit, quàm ſecunda, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine: & tertia tãto plus poterit, quàm quarta, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quòd ſi prima tanto plus poſsit, quàm ſecunda, quãtum eſt quadratum rectę lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tãto plus poterit, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales A B C D, ſitq; ut A ad B, ita C ad D; & A quidẽ plus poſsit, quàm B, quadrato, quod fit ex E: C vero plus poſsit, quàm D, quadrato ex F. Dico ſi A ipſi E ſit commenſurabilis, & C ipſi F cõmenſurabilem eſſe. ſi uero A ipſi E ſit incommenſurabilis, & C ipſi F incommenſurabilem eſſe. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum, ſed quadrato quidem, quod fit ex A æqualia ſũt quadrata, quæ ex ipſis E B; quadrato autem ex C æqualia ſunt quadrata ex F D. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ ex F D ad quadratum ex D: & diuidendo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratũ ex D. quare vt E ad B, ita eſt F ad D: & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. eſt autem & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita eſt C ad F. ergo ſi A eſt commenſurabilis ipſi E, & C ipſi F erit commenſurabilis; ſi vero incommenſurabilis eſt A ipſi E, & C ipſi F incommenſurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



22. ſexti.
10. huius.

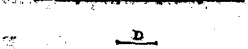
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota

magnitudo

magnitudo vtrique ipſarum cõmenſurabilis erit. quòd ſi tota magnitudo vni ipſarum ſit commenſurabilis, & quę à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commenſurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipſarum A B B C commenſurabilem eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt A B B C, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D. & quoniam D metitur ipſas A B B C, & totam A C metietur. metitur autem & A B B C. Ergo D magnitudines A B, B C, & ipſam A C metitur. commenſurabilis igitur eſt A C vtrique ipſarum A B B C. Sed A C vni ipſarum A B B C ſit commenſurabilis, videlicet ipſi A B. Dico & A B B C commenſurabiles eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit D. Itaque quoniam D metitur ipſas C A A B, & reliquam B C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipſas A B B C metitur: ac propterea A B B C commenſurabiles ſunt. Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



1. diff.
4. com. not.
3. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componãtur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. quòd ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit incõmẽſurabilis, et quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipſarum A B B C incommenſurabilem eſſe. ſi enim non ſunt incommenſurabiles C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur D metitur ipſas C A A B, & reliquam B C metietur. metitur autem & B A. ergo D ipſas A B B C metitur; ac propterea commenſurabiles ſunt A B B C. ponuntur autem & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas C A A B metietur aliqua magnitudo. quare C A A B incommenſurabiles ſunt. ſimiliter & A C C B incõmenſurabiles eſſe demõſtrabimus. ergo A C vtrique ipſarum A B B C eſt incõmenurabilis. ſed A C vni ipſarũ A B B C incõmenſurabilis ſit; & primũ ipſi A B. Dico & A B B C incõmẽſurabiles eſſe. ſi enim ſunt cõmenſurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & ſit D. qm̃ igitur D metitur ipſas A B B C, & totã A C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipſas C A A B metitur: ideoq; C A A B commenſurabiles ſunt. ponuntur autem & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas A B B C metietur aliqua magnitudo. quare A B B C incommẽſurabiles erũt. ſimiliter demonſtrabimus A C, & reliquæ B C eſſe incommenſurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

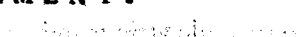
4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis illud etiam conſtat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentium ſit incommenſurabilis, & reliquæ incommenſurabilis erit.

Sit enim tota magnitudo AC incommensurabilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquae BC incommensurabilem esse. Quoniã enim CA est incommensurabilis ipsi AB, erunt AB, BC incommensurabiles. & quoniam AB BC incommensurabites sunt, & AC vtrique ipsarum incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

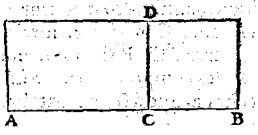


Ex demonstratis.

LEMMA. I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

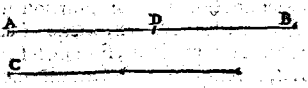
Ad aliquam enim rectam AB applicetur AD parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata DB. Dico parallelogrammum AD rectangulo ACB æquale esse; quod quidem per seſe patet. quoniam enim quadratum est DB, erit DC ipsi CB æqualis, atque est parallelogrammum AD, quod AC CB continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



LEMMA. II.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.

Si enim fieri potest, sint duæ rectæ lineę inæquales AB C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quæ scilicet, fit à DB ipsius AB dimidia, erit ex præcedenti lemmate id, quod applicatum est æquale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc est æquale quadrato ex DB. etenim AB bifariã in puncto D secatur. quod igitur quater fit à DB æquale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à DB est ipsius AB quadratum; nam longitudines duplæ potentia quadruplę sunt: quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex AB est æquale quadrato ex C, hoc est quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri non potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad AB per bipartitam sectionẽ trãsit.

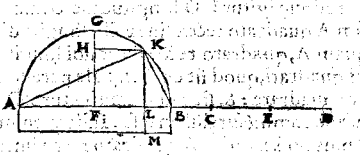


LEMMA. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Sint datę duæ rectæ lineæ inæquales AB CD; sitq; maior AB. & oporteat facere quod propositum est. secetur CD bifariã in E. manifestum est quartam partem quadrati, quod fit à CD esse quadratum ex CE. & describatur in recta linea AB semicirculus; secenturq; AB bifariã in F: & à puncto F ipsi AB ad rectos angulos ducatur

ducatur F G. Quoniam igitur A B maior est, quàm C D, erit & ipsius A B dimidia maior, quàm dimidia ipsius C D, hoc est maior quàm C E. ponatur F H æqualis C E, & per H ipsi A B parallela ducatur H K, atque à puncto K ad A B perpendicularis ducta K L, iungantur A K, K B. rectangulum igitur est triangulum A K B, & ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est K L. ergo rectangulum A L B est æquale quadrato, quod fit ex K L. producatur K L, & ponatur ipsi L B æqualis L M, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex K L, hoc est quod ex F H est æquale parallelogrammo A M. sed quod fit ex F H est æquale quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D: estq; A M deficiens figura quadrata. quod ipsum facere oportebat.

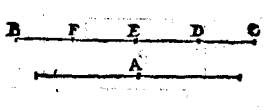


8 & 17. secundi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tanto plus possit, quàm minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudiue commensurabiles ipsam diuidet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur B D D C, sitq; B D ipsi D C commensurabilis longitudine. Dico B C plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. secetur enim B C bifariam in puncto E, & ipsi D E æqualis ponatur E F. reliqua igitur D C est æqualis B F. & quoniam recta linea B C secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit B D D C rectangulum vnà cum quadrato ex E D æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla quod igitur quater B D D C continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale est quadrato quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater B D D C continetur æquale est quadratum ex A: ei vero, quod quater fit ex D E æquale est quadratũ, quod ex D F; etenim D F ipsius D E est dupla: & ei quod quater fit ex E C æquale est quadratum quod ex B C; rursus enim B C dupla est ipsius E C. ergo quadrata, quæ fiunt ex A D F æqualia sunt ei, quod fit ex B C quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex B C maius est, quàm quadratũ, quod ex A, quadrato, quod ex D F. recta igitur linea B C tanto plus potest, quàm A, quantum est ipsius D F quadratum. ostendendum est & B C ipsi D F commensurabilem esse. Quoniam enim B D commensurabilis est ipsi D C longitudine, erit & B C ipsi C D longitudine commensurabilis. sed D C ipsis C D, B F est commensurabilis longitudine. æqua-



5. secundi.

5. quinti.

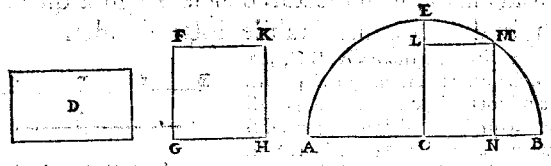
D lis enim est C D ipsi B F. quare & B G ipsis B F C D longitudine est commensurabilis,
E & reliquę igitur F D longitudine commensurabilis erit. ergo B C plus potest, quàm A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sed B C plus possit quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad B C applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur B D. D C. ostendendum est B D ipsi D C lõgitudine commẽsurabilem esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus B C plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ F D. sed B C plus potest, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: ergo B C commensurabilis
F est ipsi F D longitudine. & reliquę igitur, vtrique scilicet B F. D C longitudine est commensurabilis, sed vtraque B F. D C ipsi D C commẽsurabilis est longitudine;
G quare & ipsa B D ipsi D C longitudine commensurabilis est.
H ex quibus constat, si B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse. Si igitur duę rectæ lineę inæquales sint, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud est, nisi rectam lineam maiorem, ita secare, vt rectangulum ipsius portionibus contentum quartae parti quadrati minoris sit aequale. sed possumus illud idem vniuersalius explicare in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod partibus cõtinetur, sit æquale dato rectilineo, oportet autem datum rectilineũ minus esse quadrato, quòd à dimidia describitur.

Sit data recta linea A B, diuisa bifariam in C: datumq; rectilineum D. & oporteat facere quod prono situm est. Describatur in A B semicirculus A E B: & à puncto C ipsi A B ad rectos anguli
25. sexti. *los ducatur C E: deinde rectilineo D fiat aequale quadratum F G H K. erit eius latus F G minus*



ipsa A C, hoc est ipsa C E. quare à recta linea C E abscindatur C L, quae sit aequalis F G: & per L quidem ducatur L M parallela ipsi A B: per M vero ducatur M N parallela C E. Dico rectam lineam A B sectam esse in puncto N, vt oportebat, hoc est rectangulum A N B rectilineo D aequale esse. aequale etenim est quadrato ex M N. sed cum M N sit aequalis ipsi C L, hoc est ipsi F G, erit rectangulũ A N B quadrato F G H K, hoc est rectilineo D æquale. quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita dividemus, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis esse debet, quadrato dimidij minorem esse.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere, vt qui ex partibus producitur, sit aequalis dato numero 75. Accipiatur ipsius 20 medietas, quae est 10, & in se multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum, videlicet 75, & relinquetur 25. huius igitur latus 5 additũ ipsi 10 constituit 15, & detractum ab eodem constituit 5. Dico 20 in has partes ita diuisum esse, vt oportebat, hoc est eum, qui ex ipsis producitur, aequalem esse dato numero 75. Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes aequales, & in duas partes inæquales, numerus planus, qui fit ex partibus inæqualibus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui fit à dimidio quadrato, quod demonstratum est à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum, quae nos ad 15 noni

apposuimus

appoſuimus. ergo quæſit ex 15, & 5 vnà cũ quadrato ipſius 5 eſt aequalis quadrato dimidij, videlicet 100: & detracto communi quadrato 25, erit quæ producitur ex 15, & 5 aequalis dato numero 75. quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur æquale eſt quadratum ex A]*Ponitur enim parallelogrammum rectãgulum D B C aequale quartae parti quadrati, quod fit ex A.* B

Erit & BC ipſi CD longitudine cõmẽſurabilis]*Ex prima parte ſextae decimae huius.* C

Quare BC ipſis BF CD longitudine eſt commenſurabilis]*Ex 12 huius.* D

Et reliqua igitur F D longitudine commenſurabilis erit]*Ex eo, quod nos ad 17. huius demonſtrauimus. ſumantur enim BF DC ſimul, ac ſi vna linea eſſet.* E

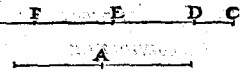
Et reliquę igitur, vtrique ſcilicet B F. D C longitudine eſt commenſurabilis]*Ex eodem theoremate, quod ad 17 huius appoſuimus.* F

Ergo & BC ipſi DC longitudine eſt commenſurabilis.]*Ex 12 huius.* G

Ex quibus conſtat BD ipſi DC longitudine commenſurabilem eſſe]*Ex ſecunda parte ſextae decimae huius.* H

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XIX.

Si duæ rectę lineæ inæquales ſint, quartę autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori A, æquale parallelogrammum ad ipſam BC applicetur, deficiẽs figura quadrata; & ſit quod continetur B D D C; ſitq; BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis. Dico B C plus poſſe, quàm A quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. ijſdem enim, quę ſupra, conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BC plus poſſe, quàm A, quadrato rectę lineæ D F. oſtendendum igitur eſt B C ipſi D F longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt B D ipſi D C, erit & BC ipſi C D longitudine incommenſurabilis. ſed DC incommenſurabilis eſt vtriſque BF DC. ergo & BC ipſis BF DC longitudine eſt incommenſurabilis. ac propterea reliquę F D incommenſurabilis eſt longitudine; & BC plus poteſt, quàm A. quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. Sed BC rurſus plus poſsit, quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figura quadrata; & ſit quod BD DC continetur. oſtendendum eſt BD ipſi DC longitudine incommenſurabilem eſſe. Ijſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC plus poſſe quàm A, quadrato rectæ lineæ DF. ergo oſtendendum relinquitur BC plus poſſe, quàm A, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi DF longitudine. quare & reliquę, videlicet vtrique BF DC eſt incommenſurabilis. ſed vtraque BF DC commenſurabilis eſt longitudine ipſi DC. ergo & BC ipſi CD eſt incommenſurabilis longitudine; ac propterea diuidendo

17. huius. 14. huius. Ex demonſtratis ad 17. huius. Ex demonſtratis ad 17. huius. 14. huius. 17. huius.

do BD ipsi DC longitudine incommensurabilis erit. Si igitur duę rectæ lineę inæquales sint, & reliqua, quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad rationales & medias transit.

LEMMA. I.

Quoniam demonstratum est longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse. potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles: manifestum est, si expositæ rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia, longitudine enim commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositę rationali aliqua fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quòd si expositæ rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.

Coroll. 9. huius.

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. sunt autem & aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositę rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur rationales, & commensurabiles inter se, quatenus rationales, sed commensurabiles inter se vel longitudine, & potentia, vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, vt intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum, inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles.

Rationales commensurabiles sunt. 12. huius.

At vero rationales commensurabiles esse ex his constat.

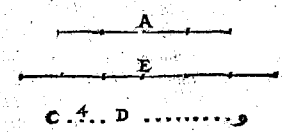
Quoniam enim rationales sunt, quæ expositę rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse. quod demonstrare oportebat.

LEMMA III.

Inuenire duas rationales longitudine commensurabiles.

Exponatur

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel ſimpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quæ demonſtrata ſunt A E longitudine commenſurabiles.



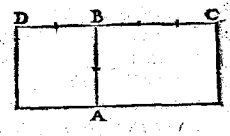
Ex corol. 8. huius.

In 9. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum continetur rectãgulum rationale eſt. A

Rationalibus enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale eſſe. deſcribatur ex A B quadratum A D. ergo A D eſt rationale. Et quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C longitudine, atque eſt A B æqualis BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. eſt autem & vt DB ad BC, ita DA ad AC: & commenſurabilis eſt DB ipſi BC. ergo & DA ipſi AC commenſurabile erit. eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale. quod igitur rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum rationale eſt. quod demonſtrare oportebat.



B

1. ſexti. C

D

F. C. COMMENTARIVS.

Secundum aliquem prædictorum modorum] *Rectarum enim linearum AB BC vel vtreque ſunt expoſitae rationali longitudine commenſurabiles, vel vtreque eidem commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe commenſurabiles longitudine. quocumque autem modo ſe habeãt, quod ex ipſis fit rectangulum rationale eſt, & eadem demonſtratio in omnibus congruit.* A

Ergo AD eſt rationale] *Ex diffinitione 9. ſiue enim longitudine ſint commenſurabiles expoſitae rationali, ſiue potentia ſolum, earum quadrata rationalia ſunt, quippe quae quadrato expoſitae rationalis ſint commenſurabilia.* B

Ergo & DA ipſi AC commenſurabilis erit] *Ex decima huius.* C

Eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale] *rationali namque commenſurabile & ipſum rationale eſt. quod ita demonſtrabitur.* D

Sit expoſitae rationalis quadratum A, & ipſi commenſurabile ſit ſpacium B. erit B rationale ex 9 diffinitione. ſit rurſus aliud ſpacium C ipſi B commenſurabile. Dico & C rationale eſſe. Quoniam enim ſpacia A C eidem ſpacio B ſunt commenſurabilia, & inter ſe commenſurabilia ſunt ex 12 huius. Quòd cum C ipſi A ſit commenſurabile, etiam rationale erit ex 9 diffinitione. quod demonſtrare oportebat.

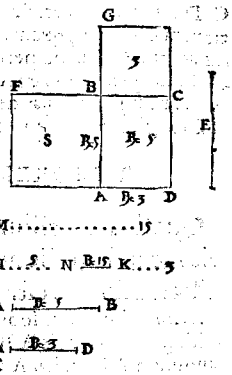
Vt autem ea, quae hoc loco de rationalibus dicuntur, manifeſtiora ſint, & quaſi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quae ad ea etiam, quae ſequuntur, vtilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datũ erit.

Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum

datum esse. Exposita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraque commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine, altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraque est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datum erit ex ijs, quæ Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex ijs, quae nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositionē libri Archimedis de circuli dimensione. si vero vtraque expositae rationali potentia solum est commensurabilis, nihilominus rectangulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia sunt commensurabiles, earum quadrata commensurabilia erunt. ideoq; inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipsum K multiplicans faciat M, cuius radix sit N. erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps proportionales; rectangulum enim contentum H K est aequale quadrato ex N, hoc est ipsi M. & quoniam quadratum F A ad rectangulum AC est vt FB ad BC, hoc est vt AB ad BC; vt autem AB ad BG, hoc est ad BC, ita rectangulum AC ad CG quadratum: erunt & tres hę magnitudines deinceps proportionales. quādo autem tres magnitudines deinceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad secundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC, sed quadratum AF ad quadratum CG est, vt numerus H ad ipsum K. & cum H ad K similiter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum F A ad rectangulum AC, vt H ad N. sunt autem magnitudines H N datae; ideoq; data ipsarum proportio. & datum est quadratum F A. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione demonstrabimus rectangulum datum esse, si altera datarum linearum sit longitudine commensurabilis, altera vero potentia solum. quod demonstrare oportebat.



5. huius.

17. sexti.

1. sexti.

11. quinti.

10. diffi. quinti.

1. datorum Euclid.

2. Datorum Euclid.

OPERATIO.

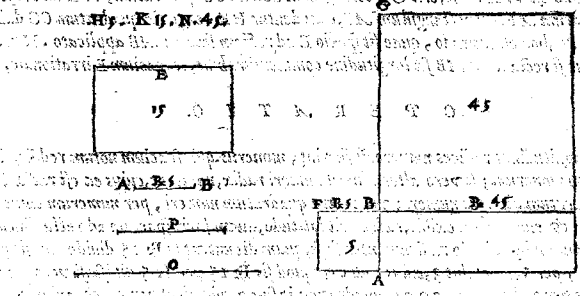
Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hoc nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarū inter se. vt si AB sit radix 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex B 5, & B 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD B 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod queritur.

THEOREMA II.

Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

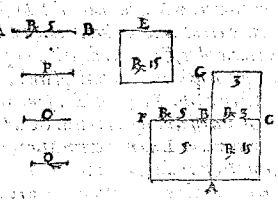
Sit data recta linea rationalis AB, & spacium datum E. Dico si ad rectam lineam AB spacium E applicetur, latitudinem, quam facit, datam esse. vel igitur recta linea AB expositae rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spacium E rationale est, vel irrationale, quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spacium E rationale, illud manifestum erit ex ijs, quae Regiomontanus demonstrauit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex ijs, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstrauimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spacium E siue rationale, siue irrationale, vel AB est longitudine commensurabilis, & spacium E irrationale, latitudo, quā facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spacium E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio

E commensu-



E commensurabile; ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum habeat quam numerus H ad numerum K; fiatq; ex corollario sextae propositionis huius libri vt H ad K, ita recta linea AB ad aliam rectam lineam O: & inter AB & O sumpta media proportionali P, erit vt numerus H ad numerum K, ita quadratum rectae lineae AB ad rectę lineae P quadratum. sed & quadratū rectae lineae AB ad spaciū E erat, vt numerus H ad numerū K. Cum igitur quadratum ex AB ad spacium E eādem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipsa P; erit quadratū ex P spacio E aequale. Itaque ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC aequale quadrato ex P, hoc est aequale spacio E; latitudinem faciens BC. & ex AB BC describātur quadrata AF CG. numerus autem K se ipsum multiplicans faciat M, & M per K diuiso exeat N. erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales; rectangulū enim ipsis KN contentum est aequale quadrato ex K. Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectangulum AC ad CG quadratum, quod superius ostensum est. quadratum autem FA ad rectangulum AC est, vt numerus H ad numerum K; erit & rectangulum AC ad quadratum CG, vt K ad N. sed datum est quadratum FA; & rectangulum AC; quod numeri K N sint dati. ergo & quadratum CG datum erit; & data ipsius radix BC, videlicet latitudo, quam facit spacium E ad rectam lineam AB applicatum. 9. quinti. 2. datorum Euclid.

Sit rursus recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E irrationale. ergo quadratum rectae lineae AB incommensurabile est spacio E. sit autem quadratum rectae lineae AB ad spacium E, vt H ad K, hoc est ad radicē numeri M: & H se ipsum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati sint, & eorum latera HK, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad rectam lineam Q: & inter AB & Q sumatur media proportionalis O. habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque est vt L ad M, ita AB ad Q. ergo vt H ad K, ita AB ad O. Rursus inter AB & O inueniatur media proportionalis P; erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad



quadratum ex P. vt igitur H ad K, ita est quadratum ex AB ad quadratum ex P. sed erat vt H ad K, ita quadratum ex AB ad spacium E. Ergo quadratum ex AB ad quadratum ex P eandem habet proportionem, quam ad spacium E. ideoq; quadratum ex P spacio E aequale erit. Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC, aequale quadrato ex P, hoc est spacio E aequale, quod faciat latitudinem BC: deinde ex AB BC fiant AF CG quadrata; & rursus ipsarum H K magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ductā K inter se se; & quod producitur diuiso per B, vt proxime dictum est. sit autem tertia proportionalis N. Eadem ra 9. quinti.

tione demonstrabitur vt quadratum ex AB ad rectangulum AC, ita esse rectangulum AC ad CG quadratum. Quoniam igitur H K N deinceps proportionales sunt, quadratum autem FA ad rectangulum AC est vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. sed datum est quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC, hoc est latitudo, quae fit spacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonstrabitur si recta linea AB sit longitudine commensurabilis, et spacium E irrationale.

OPERATIO.

Si datae magnitudines radices numerorũ fuerint, numerus, qui spacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; si vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea est radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius est radix, diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit spacium ad rectã lineam applicatum. est autem hęc diuisio radicum inter se se, quam dicunt. vt si ℞ 15 diuidenda sit per ℞ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix est quod fit ℞ 15 per ℞ 5 diuisa: si vero ℞ 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipsius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix est id, quod quęritur.

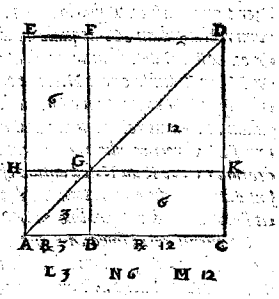
THEOREMA III.

Quæ ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.

Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse, vel igitur datae rectae lineae expositae rationali longitudine commensurabiles sunt, vel commensurabiles potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles. Et si quidem expositae rationali sint commensurabiles longitudine, quae ex ipsis componitur recta linea data erit, ex demonstratis a Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propositione tertia, & ex ijs, quae nos eodem in loco demonstrauimus. si uero expositae rationali sint commensurabilis potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, ea

9. huius. rum quadrata proportionem habebunt; quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat recta e lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erũt numeri L M similes plani. si enim quadrati sint, rectae lineae AB AC

11. octaui. longitudine erunt commensurabiles. quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit N. describatur ex recta linea AC quadratum ACDE; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipsarum AE CD parallela B G F, per G uero ducatur H G K alteruti ipsarum AC ED parallela. similiter vt supra demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita esse, vt rectangulum GC ad GD quadratum. sed quadratum AG ad quadratum GD est vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC est vt numerus L ad ipsum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. est autem rectangulum EG, quod est alterum supplementorum, aequale reliquo GC. Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB est vt L ad M vnà cum duplo ipsius N: & conuertendo gnomon EKB ad quadratum AG, vt M vnà cum duplo ipsius N ad ipsum L. ergo componendo, rursusq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L & M vnà cum duplo ipsius N, sed compositum hoc est datum, quippe cum dati sint numeri ipsum componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis constat. atque illud est, quod demonstrandum proponebatur.



OPERATIO.

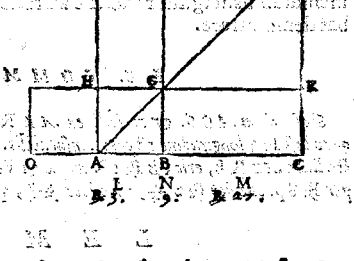
Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul coaceruabimus vnà cum duplo lateris

peris quadrati eius, qui ex eorum inter se multiplicatione producitur, hoc est vna cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipsos medius interijcitur; et huius compositi radix erit recta linea, quæ ex duabus datis rectis lineis constat. atque hæc est radicum inter se additio, quam dicunt: vt si radix 3 addenda sit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod est 6 duplabimus: et omnibus simul coaceruatis fient 27, cuius radix est recta linea, quam quærimus: Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, si inter se componantur, vna recta linea fit, sic ex duobus spacijs mediijs commensurabilibus, si itidem inter se componantur vnum fiet medium. Quòd si duæ rationales longitudine incommensurabiles inter se addendæ sint, vt ℞ 3. ℞ 5, dicemus ℞ 3 vnà cum ℞ 5, vel ℞ 3 addita ℞ 5, vel vtemur hac voce plus, quod est in communi vsu, hoc modo ℞ 3 plus ℞ 5, et 3 plus ℞ 8, et ita fiet etiam si plures sint, quàm duæ, vt 2 plus ℞ 3 plus ℞ 5. Quòd si duæ sint, dicentur ex binis nominibus, seu binomia, vt Campanus, et recentiores. si vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. et eodem modo in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum rationalium, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duæ datæ rationales inæquales, & longitudine commensurabiles rectæ lineæ AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. si enim AB AC sint expositæ rationali longitudine commensurabiles, earum differentia data erit ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propositione 4, & ex ijs, quæ à nobis eodem in loco demonstrata sunt. si vero expositæ rationali commensurabiles sint potentia solùm, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat igitur rectæ lineæ AB quadratum ad quadratum rectæ lineæ AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM similes plani; ideoq; inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, sitq; N. & ex recta linea AC describatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum superius. producta vero CA vsque ad O, ita vt AO, sit æqualis AB, quadratum OH describatur, quod quidem quadrato rectæ lineæ AB, hoc est ipsi AG æquale erit. atque est quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratum CE, vt CK ad CD, hoc est vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC, ita est rectangulum HC ad CE quadratum. sed & numeri LNM deinceps proportionales sint, & quadratum OH ad quadratum CE est vt Lnmerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N, & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quòd cum rectangulum EG sit æquale rectangulo GC, supplementa etenim sunt, addito vtrique æquali quadrato, erit rectangulum HC æquale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. si igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectangu li HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectæ lineæ BC est æquale. quod etiam in septima propositione secundi libri demonstratum est. & quoniam numeri LNM sunt dati, & quadratum OH CE data erunt, & rectangulum HC, atque eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonstrare oportebat.



9. huius.

8. octau.

PORISMA I.

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul iungemus, & ab eo, qui factus est, auferemus duplum numeri, qui inter ipsos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim

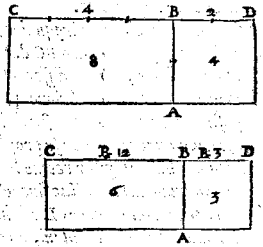
quadratum, cuius radix erit recta linea, quam quærimus. atque hęc est radicum quadratarum subtractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui est 9, videlicet 18, & relinquentur 12, cuius radix est ea, quam quærimus. eodem modo & spaciorum mediorum inęqualium, quae commensurabilia sint, differentia inuenietur. Si uero ab aliqua rationali auferenda sit alia minor, quae ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à Ɍ 5 auferre velimus Ɍ 3, dicemus Ɍ 5 dępta Ɍ 3, vel utemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo Ɍ. 5 minus Ɍ 3, & Ɍ 6 minus Ɍ 4, quas Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores residua, seu recisa.

Si igitur recta linea AB sit Ɍ 3, & recta BC Ɍ 12, erit ex ante demonstratis in primo antecedentium theorematum, rectangulum AC Ɍ 36, hoc est 6. & rursus si AB sit Ɍ 8, & BC Ɍ 18, erit AC rectangulum Ɍ 144, hoc est 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, lõgitudine cõmensurabilẽ.

Rationale enim AC ad rationalem secũdum aliquem rursus dictorum modorũ applicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC rationalem esse, & ipsi ab longitudine commensurabilẽ. Describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est: sed & rationale est AC. ergo AD ipsi AC est commensurabile. atque est vt DA ad AC, ita DB ad BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est autem DB æqualis BA. quare AB ipsi BC commensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis igitur est & BC, & ipsi BA longitudine commensurabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportebat demonstrare.



45. primi.

Ex lẽma: 2. ad 10. huius

10. huius.

6. diffi.

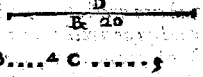
F. C. COMMENTARIVS.

Sit spacium AC 6. & recta linea AB Ɍ 3. erit ex 2 theoremate premissorum CB Ɍ 12, quae ipsi Ɍ 3 longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC 12, & recta linea AB Ɍ 8, erit CB Ɍ 18. atque est Ɍ 18 ad Ɍ 8, ut 3 ad 2. nam si Ɍ 18 diuidatur per Ɍ 8 proueniet Ɍ 2 $\frac{1}{4}$, videlicet Ɍ $\frac{9}{4}$, quae est $\frac{3}{2}$.

LEMMA. I.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles.

Exponatur rationalis A, & duo numeri BC non habẽtes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quę ostensa sunt A D potentia solũ cõmensurabiles.



Coroll. 6. huius.

LEMMA. II.

Recta linea, quæ potest irrationale spacium, irrationalis est.

Posit

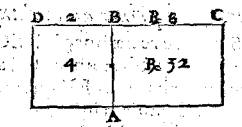
Posſit enim recta linea A ſpacium irrationale, hoc eſt quadratum, quod fit ab A irrationali ſpacio ſit æquale. Dico A irrationalem eſſe. ſi enim ſit rationalis, erit quod ab ipſa fit quadratum rationale; ſic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non eſt. ergo A irrationalis ſit neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat.

Diffi. 8:

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

Quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt: & recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vocetur autem media.

Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipſum poteſt, irrationalem eſſe. vocetur autem media, ſeu media lis. deſcribatur enim ex A B quadratum AD. ergo AD rationale eſt. Et quoniam AB incommenſurabilis eſt ipſi BC longitudine, potentia enim ſolum ponuntur commenſurabiles. atque eſt AB æqualis B D. incommenſurabilis igitur eſt DB ipſi BC longitudine. eſt autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipſi A C eſt incommenſurabile. ſed DA rationale eſt. irrationale igitur eſt AC. Quare & recta linea, quę ipſum AC poteſt, videlicet quę poteſt quadratum ipſi æquale eſt irrationalis. vocetur autem media; propterea quòd ipſius quadratum eſt æquale rectangulo, quòd AB BC continetur, & ipſarum AB BC media ſit proportionalis. quod demonſtrare oportebat.



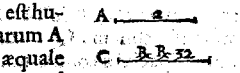
Diffi. 10.

Diffi. 11.

SCHOLIVM. I.

Media eſt irrationalis, quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.

Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis A B ſpacium contineatur. oſtendendum eſt huiuſmodi ſpacium irrationale eſſe. ſumatur enim ipſarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB eſt æquale quadrato ex C; ac propterea C poteſt rectangulum, quod ipſis AB continetur. eſt igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex ſecunda, quod demonſtratum eſt in corollario 20 ſexti elementorum. incommenſurabilis autem eſt A ipſi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C eſt incommenſurabile. ſed quadratũ ex A rationale eſt. irrationale igitur eſt quadratum ex C, hoc eſt rectãgulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C eſt irrationalis. media autem idcirco vocatur, quòd irrationalis exiſtens ipſarum A B media eſt proportionalis.



Diffi. 11.

SCHOLIVM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ vna eſt irrationalium, in geometrica analogia conſiderari: media enim eſt proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia ſolum commenſurabiles.

&

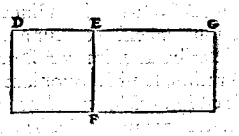
& recta linea ipsũ potẽs est media. si enim quod extremis cõtinetur æqua
17.sexti. *le est quadrato, quod fit à media, tres rectæ lineæ proportionales sunt.*

F. C. COMMENTARIVS.

Sciendum est spacium illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari.
Sit recta linea AB 2; & recta BC Bx 8. erit rectangulum AC Bx 32, quod irrationale est, & medium dicetur. recta autem linea ipsum potens est Bx Bx 32, quę media appellatur.

LEMMA.

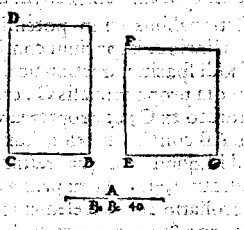
Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.



Sint duæ rectæ lineę FE. EG. Dico vt FE ad EG, ita esse quadratum ex FE ad FEG rectangulum. describatur ex FE quadratum DF, & GF cõ
1.sexti. pleatur. Quoniam igitur est vt FE ad EG, ita DF ad FG; atque est DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc est rectangulum FEC: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. similiter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est vt GF ad FD, ita est GE ad EF.

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.



Sit media quidem A, rationalis autem CB,
45.primi. & ad CB ei, quod fit ex A æquale spacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico CD rationalem esse, & ipsi BC longitudine incommensurabilem. Quoniam enim media est
Ex antecedenti. A, potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. posit GF: sed potest & BD. æquale igitur est BD ipsi GF. atque est æquiangulum. æqualium autem, &
14.sexti. æquiangulorum parallelogrãmorũ latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo vt BC ad EG, ita
21.sexti. est EF ad CD. est igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. sed quadratum ex BC commensurabile
1.pars 10.huius. est quadrato ex EG; vtraque enim ipsarum est rationalis. commensurabile igitur est & quadratum ex EF quadrato ex CD. est autem quadratum ex EF rationale. ergo & rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rationalis. itaq; quoniam FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia enim solum cõ-
Ex antecedente lemmate. mensurabiles sunt; vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectangulũ: erit quadratum ex EF incommensurabile rectangulo FEG. sed quadrato quidem
* ex EF commensurabile est quadratum ex CD; rationales enim sunt potentia, vt ostẽsum est. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG est incommensurabile. rectangulo autem FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt enim quadrato

ex A

ex A æqualis, incommensurabile igitur est, & quadratum ex CD rectangulo DCB. sed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum, ita est DC ad CB. ergo DC ipsi CB incommensurabilis est longitudine. & ob id DC est rationalis, & ipsi C B longitudine incommensurabilis. quod oportebat demonstrare. 13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

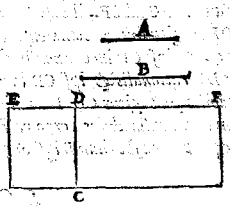
Rationales enim sunt potentia] *hoc est potentia commensurabiles: rationales enim commensurabiles sunt, vt in Scholio ante vigesimam huius demonstratur. & quamquam hę voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. quod nonnulli negarunt.* ✻

Sit quadratum ex A ℞ 40, CB vero sit 2. si igitur ad CB applicetur ℞ 40, latitudinem faciet ℞ 10. rursus si CB sit ℞ 5. & ad ipsam applicetur ℞ 40, erit latitudo, quam facit ℞ 8 ex 2. theoremate præmissorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Mediæ commensurabilis, media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico & B mediam esse. Exponatur enim rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CE, latitudinem efficiens ED. rationalis igitur est ED, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CF, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF. atque est vt EC ad CF, ita ED ad DF. ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis, & incommensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rationalis est, & ipsi DC longitudine incommensurabilis. rationales igitur sunt CD DF potentia solũ commensurabiles. quod autem rationalibus potentia solum commensurabilibus recta linea continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis: vocetur autem media. ergo recta linea, quę potest rectangulum C D F est media. sed B potest rectangulum CDF. quare B media erit.



1. primi. Ex antecedente.

cor. 9. huius

13. huius.

22. huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile, medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ, quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est, ita & in medijs dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; vniuersę enim quę longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, si- ✻

quidem

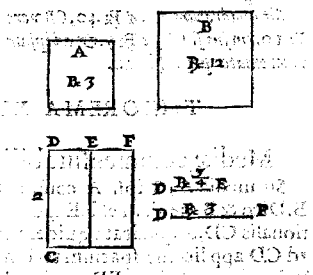
quidem etiam longitudine, dicuntur & sic mediæ & longitudine, & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles.

P. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile medium esse.

Sit spacium medium A, & ipsi commensurabile sit alterum spacium B. Dico B medium esse. Exponatur enim rationalis CD, & ad ipsam applicetur spatium rectangulum C E spacio A aequale, quod latitudinem faciat ED. erit E D rationalis, & ipsi C D longitudine incommensurabilis. Rursus ad eadem C D applicetur aliud spacium rectangulum CF, aequale spacio B, latitudinemq; faciens DF. Quoniam igitur spacium A est cõmensurabile spacio B, estq; spacio quidem A aequale rectangulum CE; spacio autem B aequale rectangulũ CF: rectangulum C E rectangulo C F commensurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita est ED ad DF. ergo & E D ipsi DF longitudine est commensurabilis. sed ED rationalis est, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. ergo & DF rationalis, & ipsi CD longitudine est incõmensurabilis. sunt igitur CD DF rationales, & potentia solum commensurabiles. ergo rectangulum CF, quod ipsis continetur, irrationale est, & medium: ac propterea spacium B ipsi aequale, medium sit necesse est. quod oportebat demonstrare.

25. huius.

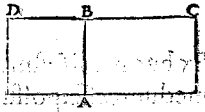


25. huius.

SCHOLIVM.

Media duplex est, videlicet potens quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, & quæ media est commensurabilis. postquam autem ostendisset mediam esse, quę potest id quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, indigebat hoc theorẽmate ad ea, quę sequuntur. oportet enim primum ostendere aliquas esse commensurabiles medias, deinde inquirere quale spacium illud sit, quod ipsis comprehenditur.

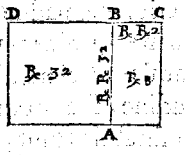
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.



Quod medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulũ medium est.

Medijs enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC contineatur rectangulum AC. Dico A C medium esse. describatur enim ex AB quadratum A D. ergo AD medium est. & quoniam commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, æqualis autem AB ipsi B D; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis. quare & DA commensurabile est ipsi AC. sed A D est medium. ergo & AC medium erit. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedẽte coroll.



F. C.

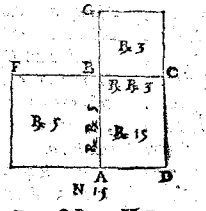
F. C. COMMENTARIVS,

Quae de rationalibus ſupra demonſtrata ſunt, eadem & de medijs demonſtrabuntur.

THEOREMA. I.

Quod datis duabus medijs, vel media & rationali cõtinetur rectãgulũ datũ erit.

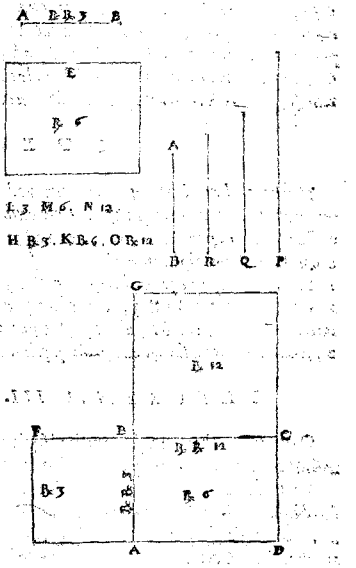
Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum eſſe. ſint primum AB AD mediae, & fiant ex ipſis quadrata AF CG. eruut ea irrationalia, quae media appellantur. habeant autem inter ſe proportionem, quam H ad K. & H quidem ſe ipſam multiplicans faciat L, K vero ſe ipſam multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipſum N faciat, cuius N radix ſit O; & rurſus ipſius O ſit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deinceps ſunt proportionales, ſuntq; earũ radices HPK, & HPK deinceps proportionales erũt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC eſt vt rectãgulum AC ad CG quadratum. quod ſuperius demonſtratum eſt. quadratum autem FA ad quadratum CG eſt, vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. et ſunt HP datę, et datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum ſit neceſſe eſt. ſed ſit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media; et ex ipſis rurſus fiant quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et iiſdem conſtructis ſimiliter demonſtrabitur rectangulum AC datum eſſe. quod demonſtrare oportebat.



2. Datorum Euclid.

OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum redactos inter ſe multiplicabimus, & eius qui producitur radix radicis erit rectãgulum, quod datis rectis lineis continetur: atque hęc eſt multiplicatio radicum radicum inter ſe, quam dicuut. Vt ſi AB ſit Bx Bx 5 AD Bx Bx 3, multiplicabimus 5 per 3, fient 15, & Bx Bx 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter ſe ductis producitur. ſi vero AB ſit Bx Bx 5, AD 2, quadratũ quadrati ipſius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus, fient 80, & Bx Bx 80 erit ea, quae ex eorũ multiplicatione oritur. deniq; ſi AB ſit Bx 2, & AD Bx Bx 5, multiplicabimus quadratum ipſius 2, hoc eſt 4 per 5, & producti accipiemus radicẽ radicis, erit Bx Bx 20 ea, quam inquirimus.

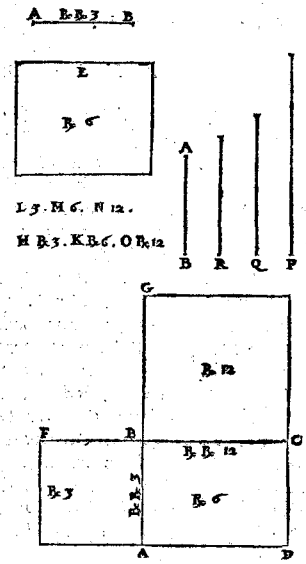


THEOREMA II.

Si ad datum mediam applicetur ſpacium datum, latitudo, quam facit, data erit.

Sit data media AB, et ſpacium datum E, quod ad ipſam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam eſſe. vel igitur ſpacium E rationale eſt, vel irrationale, quod

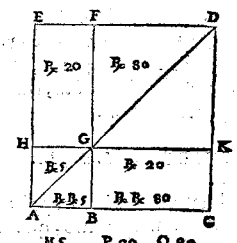
medium appellatur. sit primum irrationale, ac medium, habeatq; quadratum ipsius AB ad spacium E proportionem eam, quã habet H ad K; et H quidem se ipsum multiplicans faciat L: K vero se ipsum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc est H ad K. Itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: et inter AB, et P sumpta media proportionali, Q, habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rursus inter AB et Q sumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R est vt H ad K, sed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad spacium E. ergo quadratum ex R spacio E est aequale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectãgulum AC, aequale quadrato ex R, quod et spacio E aequale erit. et ex AB AD fiant AF, CG quadrata; numerorum autem LM inueniatur tertius proportionalis N, cuius radix sit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps sunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erũt. atque est vt quadratum F A ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare similiter ac superius demonstrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita esse, vt K ad O. ergo et quadratum CG, et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quærimus. non alia ratione demonstrabimus, si spacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam esse. quod oportebat demonstrare.



9. quinti.

OPERATIO.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo spacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit spacium ad rectam lineam applicatum; et hæc est radicum inter se diuisio, quam dicunt, vt si diuidenda sit R 6 per R R 3, multiplicabimus 6 in se ipsum, fient 36, et diuidemus 36 per 3, exibunt 12, et R R 12 erit, quae ex earum diuisione oritur. si vero diuidere oporteat 3 per R R 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et fient 81, diuisiq; 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix est ea, quam quærimus.



THEOREMA III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmẽsurabilibus cõponitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commensurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse. sit quadratum rectae linae AB ad quadratũ ipsius BC, vt L ad M, et L quidem se ipsum multiplicans faciat N; M vero se ipsum multiplicans faciat O. et quoniam A B B C longitudine commensurabiles

sunt,

sunt, earum quadrata L M, & rursus quadratorum quadrata N O inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipsos N O cadet vnus medius proportionalis numerus, cadat, sitq; P, cuius radix Q. & ex AC descripto quadrato A C D B, & reliqua figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q; & rectangulum GE ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L, & M vna cum duplo ipsius Q. quod cum dati sint L Q M, & compositum ex ipsis dabitur. ergo & AD quadratum, & eius rad. x AC data erit. quod oportebat demonstrare. 9 huius.

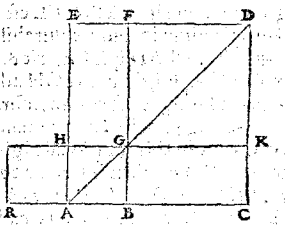
OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vna cum duplo medi.ae proportionalis, & huius compositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis constat; atque hęc est R R inter se additio, quam vocant, vt si R R 5 addenda sit R R 80, iungemus ex ante demonstratis R 5 cum R 80, & cum duplo R 20, quae faciunt R 405, cuius radix, videlicet R R 405 est recta linea, quae ex earum additione producitur. Quod si duae, vel plures mediae longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendae sint, vel etiam rationales, & mediae vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo R R 5 plus R R 3, vel R R 2 plus R R 3, plus R R 5, vel R 2 plus R R 6, vel 3 plus R 5 plus R R 6. & sic in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quae inaequales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inaequales, & longitudine commensurabiles AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. sit quadratum rectae lineae A3 ad quadratum ipsius AC, vt L ad M. & sit rursus ipsius L quadratum N, & ipsius M quadratum sit O. habebunt N O inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit P, cuius radix Q. & ex AB AC descriptis quadratis R H AD, & figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum R H ad rectangulum H C esse, vt L ad Q; & rectangulum H C ad quadratum C E, vt Q ad M. & praeterea duo quadrata R H AD aequalia esse duplo rectanguli H C & quadrato P K. ergo si ab ipsis L N auferatur duplum ipsius Q, reliquum erit id, quod quadrato F K respondet. datae autem sunt L Q M magnitudines. ergo & quadratum F K, atque eius radix B C dabitur. quod demonstrare oportebat.



N 5. P 45. O 405.

L R 5. Q R 45. M R 405.

A R R 5 B. A B R R 405 C.

OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, et ab ea, quae facta est, auferemus duplam mediae proportionalis, quae inter ipsas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quęrimus; atque hęc est R R subtractio, quam appellant. nam si a R R 405 auferenda sit R R 5, iungemus ex ante demonstratis R 5 cum R 405, fient R 500, a qua auferemus duplum R 45, hoc est R 180, relinquetur R 80. ergo BC erit R R 80. At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quae longitudine sit ipsi incommensurabilis, vel a media rationalis, vel contra a rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationalibus

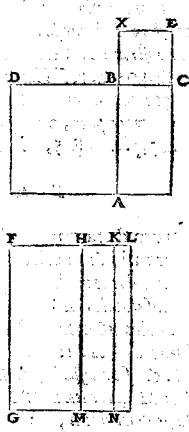
libus dictū est hoc modo R̃ R̃ 5 *minus* R̃ R̃ 3, *vel* R̃ R̃ 12 *minus* R̃ 3, *vel* R̃ R̃ 20 *minus* 5, *vel* R̃ 6 *minus* R̃R̃ 30, *vel* 3 *minus* R̃R̃ 40. *et ita in reliquis.*

Itaque si mediae lōgitudine cōmēsurabiles sint AB BC videlicet R̃R̃ 32, *et* R̃R̃ 2. *erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipsis continetur* R̃R̃ 64, *hoc est* R̃ 8; *sunt enim* R̃R̃ 32 *et* R̃R̃ 2 *longitudine commensurabiles, videlicet vt* 2 *ad* 1. *nam si* R̃R̃ 32 *diuidatur per* R̃R̃ 2 *prouenit* R̃R̃ 16, *hoc est* 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quod medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium.

Medijs enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B BC contineatur rectangulū A C. Dico AC vel rationale esse, vel medium. describantur enim ex AB BC quadrata AD BE. vtrumque igitur ipsorum A D BE medium est. exponatur ra-
21. huius. 45. primi. tionalis FG, & ipsi quidem AD equale ad FG applicetur parallelogrammum rectangulum GH, latitudinem faciens FH; ipsi vero AC æquale ad HM applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens HK; & insuper ipsi BE equale similiter ad KN applicetur
14. primi. NL, latitudinē faciens KL. In recta igitur linea sunt FH HK KL. Quoniam igitur medium est vtrūque ipsorum AD BE; atque est AD quidem æquale ipsi GH, BE vero ipsi NL, erit & vtrumque ipsorum G H NL medium, & ad rationalē FG applicata sunt.
23. huius. ergo & vtraque ipsarū FH KL est rationalis, & ipsi FG longitudine incommensurabilis. & quoniam cō-
1. sexti. 10. huius. mensurabile est AD ipsi BE, erit & GH ipsi NL commensurabile. est igitur & vt GH ad NL, ita FH ad K L. ergo FH ipsi K L est commensurabilis longitudine; ac propterea FH KL rationales sunt longitudi-



ne commensurabiles. rationale igitur est rectangulum, quod FH KL continetur. et
1. sexti. Conuertendo. quoniam BD quidem ipsi BA est æqualis; XB uero ipsi BC, erit vt DB ad BC, ita A B ad BX. sed vt D B ad BC, ita D A quadratum ad rectangulum A C: vt autem A B ad BX, ita AC rectāgulum ad quadratum CX. est igitur vt XC ad CA, ita CA ad A D: æquale autem est AD ipsi GH, & AC ipsi MK, & CX ipsi NL. quare vt GH ad M K, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoq; quod FH KL contiⁿ. 17. sexti. netur est æquale quadrato, quod fit ex HK. est autem quod continetur FH KL rationale. ergo & rationale est quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK rationalis. & si quidem HK commensurabilis est ipsi HM, hoc est ipsi FG longitudine,
20. huius. 22. huius. erit rectangulū NH rationale; si vero HK est incōmensurabilis ipsi FG lōgitudine, KH HM rationales erunt potentia solum commensurabiles: & ob id rectangulum HN medium erit. ergo HN vel rationale est, vel medium. sed HN est æquale ipsi A C. quare AC vel rationale, vel medium est. quod igitur medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est, vel mediū. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Admiratione dignum est triadis vel ternarij vim, ac facultatem ita potentem esse, vt etiam irrationalium potestatem definiat, & ad illorum vsque extrema permeet. præterea & illud mirum est vnamquāque

irrationalitatis

irrationalitatis speciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Musica. porrò anima ipsa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in se habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non sunt, & ipsam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud est, nomen commune mediæ in ea, quæ magis est particularis, natura positum esse. nam & quæ potest spacium contentum rationalibus longitudine commensurabilibus, media omnino est rationalium illarum; & quæ potest spacium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, sed quæ potest ante dictum spacium. Illud quoque animaduertendum est, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias versatur, similem facere rationalibus, etenim has vel longitudine, vel potentia solum commensurabiles, quemadmodum illas esse dicit. & spacium quidem, quod medijs longitudine commensurabilibus continetur, medium esse, quemadmodum illic spacium rationalibus contentum rationale. spacium vero contentum medijs potentia solum commensurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, medium esse. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit. & videtur ea, quę inter medias longitudine commensurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia solum commensurabiles omnino media esse; quæ vero inter medias potentia solum commensurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media, ideoq; & incommensarabilis potentia interdum rationalis, interdum media est. duę enim mediæ potentia commensurabiles esse possunt, quemadmodum & duę rationales potentia commensurabiles. existimandum igitur est analogiam causſam esse ortus contentorum spaciorum: vt potequæ inter extrema; hoc est vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem constituit; & totum nexum quandoque similem facit extremis, quandoque ipsis dissimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiue a potẽtibus appellat Euclides.

Contẽplatio quæ circa medias simi lis est ei, quæ circa rõnales uersatur.

Medium tripliciter, rationale uero dupliciter contingit.

F. C. COMMENTARIVS.

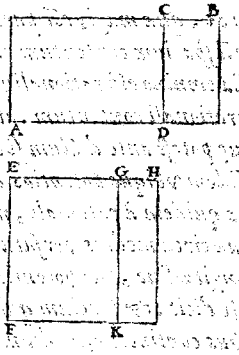
Sint mediae potentia solum commensurabiles AE EC, & sit AB ℞℞ 54, & BC ℞℞ 24, erit rectangulum ipsis contentum ℞℞ 1296, videlicet 6, quod est rationale. Rursus sint mediae potentia solum commensurabiles ℞℞ 128, & ℞℞ 22, rectangulum, quod ipsis continetur, erit ℞℞ 9216, videlicet ℞ 96, quod est medium. At vero ℞℞ 54, & ℞℞ 24: itemq; ℞℞ 128, & ℞℞ 72 esse potentia solum commẽsurabiles patet tum ex 28, & 29, huius, tum ex eo, quòd si ℞℞ 54 per ℞℞ 24 diuidatur, prouenient ℞℞ $\frac{9}{4}$, hoc est ℞ $\frac{3}{2}$. erit igitur ℞℞ 54 ad ℞℞ 24, vt

4, vt B 3 ad B 4. Rursus si B B 128 diuidatur per B B 72, proueniet B B 1 ½. quare B B 128 ad B B 72 erit vt B 4 ad B 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVII.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B. & exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H: ipsi vero A C æquale auferatur F G. reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. rationale autē est B D. ergo & K H rationale. quoniam igitur medium est vtrumque ipsorum A B, A C; erit q; A B æquale F H, & A C æquale F G: erit & vtrumque ipsorum F H F G medium: & ad rationalem E F applicata sunt. rationalis igitur est vtraque earum H E G, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale; & K H rationale erit. est autem ad E F applicatum. rationalis igitur est G H, & ipsi E F commensurabilis longitudine. sed & E G est rationalis, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. ergo E G incommensurabilis est ipsi G H longitudine. atque est vt E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod E G, G H continetur. incommensurabile igitur est quadratum ex E G rectangulo E G H. sed quadrato quidem ex E G commensurabilia sunt ex E G, G H quadrata. vtraque enim sunt rationalia. rectangulo autem E G H commensurabile est quod bis E G G H continetur; est enim ipsius duplum. ergo quadrata ex E G, G H incommensurabilia sunt ei, quod bis E G, G H continetur. & vtraque igitur, videlicet quadrata ex E G G H, & quod bis continetur E G G H, hoc est quadratum ex E H, incommensurabilia sunt quadratis ex E G G H. sunt autē rationalia, quę ex E G G H quadrata. irrationale igitur est quadratum ex E H: ac propterea E H est irrationalis. sed & rationalis. quod fieri non potest. non igitur medium superat medium rationali. quod oportebat demonstrare.



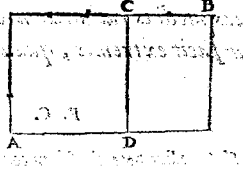
23. huius.
21. huius.
Coro. 25. huius.
10. huius.
6. huius.
14. huius.
4. secundi.
17. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non superare rationale nisi rationali, hoc modo demonstrabitur.

Sint parallelogramma rectangula A B A C rationalia. Dico D B, quo parallelogrammum A B ipsum A C superat, rationale esse. quoniam enim A B A C sunt rationalia, & inter se commensurabilia sunt. atque est tota magnitudo A B ex magnitudinibus A C D B composita vni ipsarum A C commensurabilis. ergo & reliquae D B commensurabilis erit. sed A B est rationale. quare & D B rationale sit necesse est. quod nos ad 28 huius demonstrauimus.

16. huius.

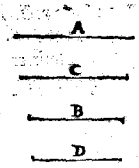


PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur

Exponatur duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB; & ſumatur ipſarum AB media proportionalis C: fiatq; vt A ad B, ita C ad D. quoniã igitur AB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit quod ipſis A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadratum ex C medium. ergo recta linea C media eſt. & quoniam ut A ad B, ita eſt C ad D; ſuntq; AB potentia ſolũ commenſurabiles: & CD potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem recta linea C media. media igitur eſt & D. quare C D mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. Dico etiam ipſas rationale continere. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D. ſed vt A ad C, ita C ad B. ergo & vt C ad B, ita B ad D. quod igitur ipſis C D continetur quadrato ex B eſt æquale. rationale autem eſt quadratum ex B. ergo & quod continetur C D rationale erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. atque illud eſt. quod facere oportebat.



12. ſexti. ✻ 22. huius. 10. huius, 24. huius. 17. ſexti.

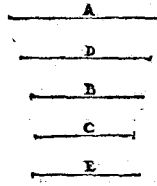
F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq; ut A ad B, ita C ad D] *Sit A 3, & B R 6, erit rectangulum, quod ipſis continetur R 54, & recta linea C inter ipſas A B media proportionalis, quæ ipſum poteſt R R 54, itaque fiat ut A ad E, hoc eſt ut RR 81 ad RR 36, ita C videlicet RR 54 ad aliam, quæ ſit D, hoc modo. multiplicetur 54 per 36, fiet 1944. ergo RR 1944 eſt rectangulum, quod continetur R R 36, & RR 54 ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad RR 81 latitudinem facit RR 24 ex ſecundo eorundem. quare rectangulum contentũ RR 81, & R R 24 eſt æquale ei, quod continetur R R 36, & R R 54. eſt igitur ut RR 81 ad R R 36, ita RR 54 ad RR 24.* ✻ 16. ſexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentia ſolum cõmenſurabiles A B C, ſumaturq; ipſarum A B media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D ad E. Quoniam igitur A B rationales ſunt, potẽtia ſolum commenſurabiles, erit quod A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadratum ex D medium. ergo D media eſt. & quoniam B C ſunt rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt vt B ad C, ita D ad E; rectę lineæ D E potẽtia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem D media. ergo & E media eſt; ac propterea D E medię ſunt potetia ſolum commenſurabiles. Dico ipſas etiam medium continere. Quoniam enim eſt vt B ad C, ita D ad E, erit permutando vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita eſt D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad E. quod igitur A C continetur rectangulum eſt æquale contento D E. eſt autem quod continetur A C medium. ergo & quod continetur D E medium erit. Inuentę igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, vt facere oportebat.



✻ 22. huius. 10. huius. 24. huius. 16. ſexti. 22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

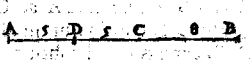
Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit A 4, B R 8, et C R 6, erit rectangulum, quod A B continetur* ✻

tinetur ℞ 128, & recta linea D inter ipsas A B media proportionalis ℞℞ 128. fiat igitur vt B ad C, hoc est vt ℞℞ 64 ad ℞℞ 36, ita D videlicet ℞℞ 128 ad aliam, quae sit E. eodem modo, quo supra, multiplicetur 128 per 36, fit 4608, & 4608 diuidatur per 64, exeunt 72. ergo ℞℞ 72 erit quarta proportionalis A, quam quærebamus.

LEMMA. I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis cõponitur etiã quadratus sit.

Exponantur duo numeri AB BC, qui vel pares sint, vel impares. & quoniam siue à par par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; erit AC numerus par. secetur AC bifariam in D. sint autem AB BC nel similes pla-



A

B ni, vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex C D est æqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque est quadratus, qui fit ex

C AB BC; ostensum enim est si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciãt, factum quadratum esse. Inuenti igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum, qui fit ex BD. quod ipsum facere oportebat.

COROLLARIVM.

Et manifestum est rursus inuentos esse duos numeros quadratos, & qui fit ex B D, & qui ex C D, ita vt ipsorum excessus, videlicet qui

D *fit ex AB BC, sit quadratus; quando AB BC similes plani sint. Quãdo autem non sint similes plani, inuenti sunt duo quadrati & qui fit ex BD, & qui ex CD, quorũ excessus, qui ex AB BC nõ est quadratus.*

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam siue à pari par auferatur, siue ab impari impar reliquus par est] *ex 24, & 26 noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD est æqualis ei, qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonstratur à Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quae nos ad 15 noni libri apposuimus.*

C Ostensum est enim si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciant, factum planum esse] *in prima propositione noni libri.*

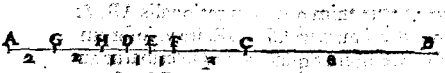
D Quando autem non sint similes plani, inuenti sunt] *Sint enim duo numeri AB BC, qui non sint similes plani, & AC bifariam secetur in D. rursus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD est aequalis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. sed qui fit ex AB BD non est quadratus. si enim quadratus sit, erunt numeri AB BD similes plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri sunt, qui fiunt ex BD, & DC, quorum excessus, qui fit ex AB BC non est quadratus.*

LEMMA. II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit

Sit enim qui ex A B BC quadratus, vt dictum est, & par numerus CA; secetur; CA bifariam in D. perspicuū est quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CD æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadratus ex AB BC vnà cum quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. Dico igitur quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si enim est quadratus vel æqualis est quadrato ex BE, vel eo minor, nō autem maior, vt ne vnitas secetur; neue qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD, qui est æqualis quadrato ex BD æqualis sit quadrato ex AB BC vnà cum quadrato ex CE. sit primum, si fieri potest, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & sit GA duplus ipsius DE vnitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus, quorum AG est duplus DE, erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in puncto E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis ponitur quadrato ex BE. ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis ei, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE, & communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis, quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. Dico neque quadrato ex BE minorē esse. si enim fieri potest, sit quadratus ex BF æqualis, & ipsius DF duplus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita ut & HC in F bifariam diuidatur; ac propterea qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF æqualis sit quadrato ex BF. ponitur autem & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex FB. ergo sequitur, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualem esse ei, qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis minori, quàm sit quadratus ex BE. ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem esse. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri possit, vt idem pluribus modis ostendatur, unus qui proxime dictus est nobis sufficiat, ne longam tractationem longius producamus.



A
B
C
D
E
F

F. C. COMMENTARIVS.

Perspicuum est quadratum ex A B BC unà cum quadrato ex C D æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

Non autem maior ut ne unitas secetur] *si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius latus est BD, vel minus quàm BD. & si quidem BD, erit totum parti aequale. quod fieri non potest. si vero minus quàm BD, cum sit maius quàm BE, vnitas secabitur. quod itidem fieri non potest.*

Erit & reliquus CG ipsius GE duplus] *Ex 7 vel 11 septimi libri.*

Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis] *Relinquetur enim qui ex AB BC aequalis ei, qui ex GB BC. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC est vt AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est aequalis. quod est absurdum.*

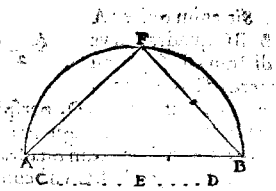
Concludetur rursus HC duplus CF.] *Quoniam enim AC ipsius CD est duplus, quorum AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.*

Quod est absurdum] *Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quòd AB sit maior quàm BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex CF; quoniam AC quàm CF est maior.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur enim quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD, DE, ita vt ipſorum exceſſus CE non ſit quadratus. Deſcribatur autẽ in recta linea AB ſemicirculus AFB: fiatq; vt DC ad CE, ita AB quadratum ad quadratum ex AF, & FB iungatur. Quoniam igitur eſt, vt quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, quã numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF eſt commenſurabile. ſed rationale eſt quadratum ex AB. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF eſt rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt recta linea BA ipſi AF longitudine. ergo AB AF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quod cum ſit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionẽ habebit, quã quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea AB ipſi BF longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt quadratum ex AB, æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus poteſt, quàm AF quadrato. rectæ lineę B F ſibi commenſurabilis longitudine. Inuentæ igitur ſunt duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles BA AF, ita vt maior BA plus poſſit, quàm minor AF, quadrato ipſius FB, ſibi longitudine commenſurabilis. quod facere oportebat.



Ex corolla. primi lem. antecedentium.
Per Coroll. 6. huius.
6. huius.
diffi. 9. huius.
9. huius.
Ex 47. primi, uel ex coroll. ante 15. huius.
9. huius.
47. primi.

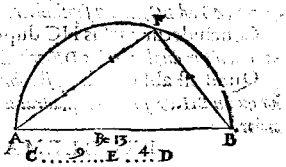
SCHOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quæ per compoſitionem fiunt; præmittit autem theoremata hęc, vtpote ex quibus eiuſmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut maior plus poſsit, quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipſis componitur nõ ſit quadratus. atque in recta linea AB ſemicirculus AFB deſcribatur: & fiat vt DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF: & iuncta FB, ſimiliter oſtendemus, vt in antecedente, BA AF rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad id quod ex AF quadratum; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nõ igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

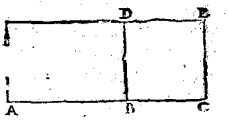


merum. ergo A B ipſi B F longitudine eſt incommenſurabilis. & B A plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF ſibi incommenſarabilis longitudine. quare A B BF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AB plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ FB ſibi longitudine incommenſurabilis.

LEMMA.

Si ſint duę rectę lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ lineæ AB BC in proportione aliqua. Dico vt A B ad B C, ita eſſe rectangulum ex AB BC ad quadratū ex B C. deſcribatur enim ex BC quadratum BDEC, & compleatur AD parallelogrammū. manifeſtum eſt ut AB ad BC, ita eſſe A D parallelogrammum ad parallelogrammum B E. atque eſt A D quidem, quod AB BC continetur; eſt enim B C ipſi B D æqualis. B E vero eſt quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum. quod demonſtrare oportebat.



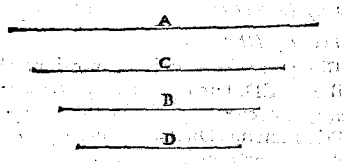
1. ſexti.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus poſsit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

30. huius.

Exponantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A B, ita vt A maior *plus poſsit*, quàm B minor, quadrato rectę lineę ſibi lōgitudine commēnſurabilis. & ſit rectangulo ex AB æquale quadratum, quod ſit à recta linea C. medium autem eſt quòd ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipſa C media. at quadrato quod fit ex B æquale ſit rectāgulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD eſt rationale. & quoniam eſt vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quadratum ex C; quadrato autem ex B æquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipſam D. vt igitur A ad B, ita C ad D. commenſurabilis autem eſt A ipſi B potentia ſolum. ergo & C ipſi D potentia ſolū eſt commenſurabilis. atque eſt C media. media igitur & D. & quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis lōgitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Inuentę igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum cōmenſurabiles C D, quæ rationale continent, & C plus poteſt quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſimiliter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commenſurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus poſsit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi incommenſurabilis longitudine, quādo A plus poſsit, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis.



22. huius.

Ex antecedēti lemmate.

1. forti.

10. huius.

24. huius.

15. huius.

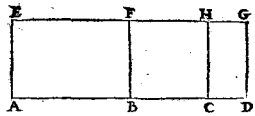
❖

Similiter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commẽſurabiles] *Maneant edem quae ſupra, & A plus poſsit, quàm B quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſimiliter vt ante demonſtrabitur, rectam lineam D mediam eſſe. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. ergo rurſus inuentae ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles C D, rationale continentes, & C plus poteſt quàm D quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis.*

Sit A 8, B Rx 28. erit rectangulũ, quod ipſis cõtinetur Rx 1792, & recta linea C RxRx 1792, quae media eſt. fiat vt 8 ad Rx 28, ita RxRx 1792 ad aliam, quae ſit D. erit ea Rx Rx 343. ergo RxRx 1792 & RxRx 343 duae mediae ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine cõmenſurabilis. nam ſi à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à Rx 1792 auferatur Rx 343, relinquetur Rx 567. & ſunt duae mediae RxRx 1792 RxRx 567 inter ſe longitudine commenſurabiles, videlicet vt 4 ad 3. ſi enim RxRx 1792 diuidatur per Rx Rx 567, prouenit RxRx 3 $\frac{13}{81}$, quae eſt 1 $\frac{1}{3}$, hoc eſt $\frac{4}{3}$. Rurſus ſit A 8. B Rx 20, erit rectangulum ipſis contentum Rx 1280, & recta linea C RxRx 1280. fiat ut 8 ad Rx 20, ita RxRx 1280 ad aliam, quae ſit D. erit ea RxRx 125. ſunt igitur R R 1280, & R R 125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A 3 B Rx 6, rectangulum ipſis contentum erit R 54, & recta linea C RxRx 54. Rurſus fiat ut 3 ad Rx 6, ita R R 54 ad aliã, erit ea R R 24. quare R R 54, & R R 24 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 6; & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis.

LEMMA

Si fuerint tres rectae lineę in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.



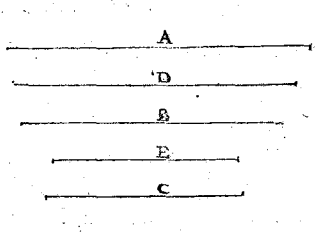
Sint tres rectę lineæ in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt A B ad C D, ita eſſe rectangulum contentũ AB BC ad id quod B C CD continetur. Ducatur enim à pũcto A ipſi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipſi BC æqualis; & per E quidem ipſi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF. CH DG parallelæ ipſi A E. quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum B H; ut autem BC ad CD, ita parallelogrammum BH ad ipſum C G: erit ex æquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum C G. & eſt parallelogrãmum quidem A F, quod AB BC continetur; namque AE eſt æqualis BC; parallelogrammum vero CG eſt, quod continetur BC CD; etenim BC ipſi CH eſt æqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima & media ad rectangulum media & tertia cõtentum. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus poſsit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Exponantur

Exponantur tres rationales A B C, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine: & ſit rectangulo ex ipſis A B æquale quadratum, quod fit ex D. medium autem eſt rectangulum ex AB. ergo & quadratũ ex D medium erit; & recta linea D media. rect angulo autem ex B C æquale ſit rectangulum ex DE. Quoniam igitur eſt vt rectangulum ex AB ad rectangulum ex BC, ita recta linea A ad ipſam C; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C æquale rectangulum ex DE: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E rectangulum. ſed ut quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & ut igitur A ad C, ita D ad E. commenſurabilis autem eſt A ipſi C potentia ſolum. ergo & D ipſi E potentia ſolum eſt cõmenſurabilis. atque eſt D media. media igitur & E. itaque qm̃ eſt vt A ad C, ita D ad E; & A plus poteſt, quàm C quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine commenſurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectę lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine. Dico prꝛeterea rectangulum ex DE medium eſſe. Quoniam enim rectangulo ex B C æquale eſt, quod ex D E rectangulum; medium aũt eſt quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuentę igitur ſunt duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles DE, quæ medium continẽt, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine commẽnſurabilis. Rurſus ſimiliter inuenientur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles. & medium continentes, ita vt maior plus poſsit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; quando ſcilicet A plus poſsit, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod facère oportebat.



35.

22. huius.

Ex antecedem. lemmate.

Lem. 23. huius.

24. huius.

15. huius.

22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 8 B Rx 48, C Rx 28, rectanguli quod ipſis AB cõtinetur, erit Rx 3072. & recta linea D RxRx 3072, quae eſt media. ſit vt A ad C, ita D ad aliã, quae ſit E. erit E RxRx 588. ergo RxRx 3072, & RxRx 588 duae mediae ſunt potentia ſolũ commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine commenſurabilis. ſi enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à Rx 3072 auferatur Rx 588, reliqua erit Rx 972. ſuntq́ RxRx 3072, & RxRx 972 duae mediae longitudine inter ſe commenſurabiles, vt 4 ad 3. nã ſi RxRx 3072 diuidatur per RxRx 972, exibit RxRx 3, $\frac{13}{81}$ quae eſt 1. $\frac{1}{3}$ hoc eſt $\frac{4}{3}$. rurſus ſit A 8, B Rx 48, C Rx 20, erit D cadẽ, quę ſupra, videlicet RxRx 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quae ſit E. erit E RxRx 300. ſunt igitur RxRx 3072, & RxRx 300 duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A Rx 6, B Rx 3, C Rx 2, erit D RxRx 18. fiatq́ vt A ad C, ita RxRx 18 ad aliã, quae ſit E, erit E RxRx 2. ergo RxRx 18, & RxRx 2 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, & medium continentes, quarum maior plus poteſt, quã minor, quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine.

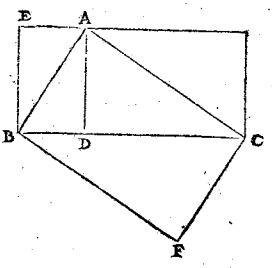
LEMMA I.

Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum B A C, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD æquale eſſe quadrato, quod fit ex BA; cõtentum vero BC CD æquale quadrato ex CA; & contentum B D D C æquale quadrato ex

DA

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale esse.

Quoniam enim in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD, triãgula ABD ADC similia sunt, & toti
8 sexti. triangulo ABC, & inter se se. et quoniam simile
4. sexti. est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt C B ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulũ, quod
17. sexti. CB BD continetur quadrato ex AB est æquale. Eadem ratione et rectangulum contentum BC CD æquale est quadrato ex AC. rursus quoniã in triangulo orthogonio ab angulo recto ad ba sim perpendicularis ducitur, ducta basis partiũ
8. sexti. media proportionalis est. quare ut BD ad DA, ita AD ad DC; ac propterea rectãgulum, quod

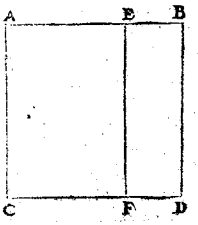


BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt dixímus, trian gulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem
4. sexti. quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est
16. sexti. çquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit Dico præterea si describamus parallelogrammum rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulum EC ipsi AF æquale esse. vtrũque enim ipsorum duplum est triãguli ABC. atque est rectangulũ quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectã gulum, quod cõtinetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.

LEMMA II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulũ, quod tota, & minori continetur.

Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæ quales ad E. Dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. de scribatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E qui dem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrãmum ad parallelogrammum FB. atque est AF quidẽ parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis: parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis enim est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cõtinetur. quod oportebat demonstrare.

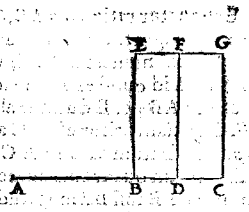


LEMMA. III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ inæquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrammum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum. atque est BG quidem, quod AB BC continetur; etenim AB est æqualis BE: DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DF est æqualis. quod oportebat demonstrare.

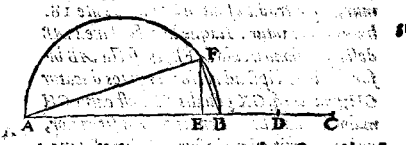


1. sexti.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium.

Exponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, quã minor BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & secta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineã AB applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB; ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duæ rectæ lineę AB BC inæquales sunt, & AB plus potest, quam BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quarta autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipsi EB incommensurabilis. atque est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE æquale quadrato ex BF. quadratũ igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum, quod fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus quoniam rectangulum AEB est æquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE est æqualis BD; ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulũ igitur ABC duplum est rectãguli, quod AB EF continetur. sed rectangulum ABC est medium. ergo & medium quod continetur AB EF. est autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est. sed & ostensum est rationale, quod componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuentę igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AF FB, quę faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium. quod facere oportebat.



31. huius.

Per lemma ante 19. huius uel per 28. sexti.

19. huius.

Per 2. lemma ex antecedentibus.

Per 1. lemma

Per 9. diffi.

Per 3. lemma 22. huius.

Cor. 24. huius.

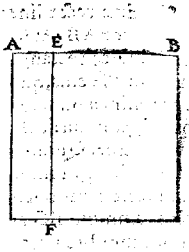
Per 1. lemma

SCHOLIVM.

At vero ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

Exponatur

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex AB ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis. ergo & BA reliqua AE incommensurabilis est longitudine. vt autē AB est ad vtramque ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorū. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurabile erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quæ rationalis sunt partes, & ipsum rationale cōplēti

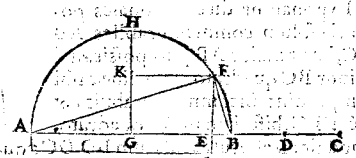


Corol. 10. huius.

9. huiue. Ex demonstratis ad 17. huius. 2. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 8, BC ℞ 20. erit BD, vel DC ℞ 5: & quadrato ipsius BD, quod est 5 æquale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figura quadrata. illud autem facile assequemur, si quæ tradita sunt in lemmate ante 18. huius repetantur. Itaque in recta linea AB descripto semicirculo AFE; & secta AB bifariam in G, ipsi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK æqualis BD. est enim GH maior, quam BD. nam cum AB sit maior, quam BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quam dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quæ protendatur, in L, ita vt EL sit æqualis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE, EB continetur, & æquale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD æquale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad G, & in partes inæquales ad E, erit rectangulum contentum AE. EB vnà cum quadrato ipsius GE æquale quadrato dimidiæ AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE ℞ 5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB est æquale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE ℞ 11. ergo AE constans ex AG. GE est 4 vnà cum ℞ 11, vel 4 plus ℞ 11. & EB 4 dempta ℞ 11, vel 4 minus ℞ 11. vt autē sciamus, quæ sint AE. FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE. EB. quare non inutile visum est theoremata nonnulla hic apponere, attentia ad eas, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.



secundi.

THEOREMA. I.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB ℞ 11. Dico quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB vt cunque secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratum totius æquale quadratis partium, & rectangulo, quod his dictis partibus continetur. itaque quadratum AC est 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est ℞ 176, cuius duplum ℞ 704. ergo quadratum AB est 27 plus ℞ 704.

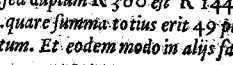
A 4 C ℞ 11 B

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: sitq; AB 6, BC R 10, *& CD* R 3. *Dico et quadratum ipsius dari. nã cum AD secetur in duobus punctis B C, erit quadratum totius aequale rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis cõtinentur, ex ijs, quae à nobis demõstrata sunt ad secundã propositionẽ secũdi libri. quadratum igitur AB est 36, & rectangulũ contentũ AB BC est* R 360; *contentum verò AB CD est* R 108. *& rursus contentum AB BC est* R 360, *& quadratum BC est 10. preterea rectangulum, quod continetur BC CD est* R 30, *& quod rursus continetur AB CD* R 108; *& quod continetur BC CD* R 30. *& denique quadratũ CD est 3. sed duplum* R 360 *est* R 1440, *& duplum* R 108 *est* R 432; *duplum vero* R 30 *est* R 120. *quare summa totius erit 49 plus* R 1440 *plus* R 432 *plus* R 120, *quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs facie mus quot cumque nomina habeant.*

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

Sint rectae linee AB CD, constetq; AB ex binis nominibus AE EB; & sit AE 5, *EB* R 12; *CD vero constet ex CF FD, & sit CF* 4 *FD* R 7. *Dico rectangulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vtcumque secantur in punctis E F, rectangulum ipsis cõtẽtũ est aequale rectãgulis, quae vnaquaq; parte vnius ad vnãquãq; partẽ alterius applicata, continentur, ex ijsquae nos demõstrauimus ad primã propositionẽ secũdi libri theoremate primo. rectãgulũ igitur contentũ 4 & 5 est 20, & contẽtũ 4, &* R 12 *est* R 192. *quod aũt cõtinetur* R 7, *& 5 est* R 175, *& quod continetur* R 7, *&* R 12 *est* R 84. *totius ergo summa est 20 plus* R 292 *plus* R 175 *plus* R 84. *quod est rectangulum ipsius AB CD contentum. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus constent.*



THEOREMA III.

Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC, & recta linea ipsi congruens sit CB; sitq; tota AB 4, *BC* R 11. *erit AC* 4 *minus* R 11. *Dico & quadratum ipsius datum esse. vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secundi libri, vt ante, sed septima eiusdem. non enim* 4, *&* R 11 *sunt partes dictae lineae, sed* 4 *est tota linea, et* R 11; *est pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur vtcunque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB, et BC vnà cum alterius partis AC quadrato. est igitur quadratum ipsius AB* 16, *et quadratum BC* 11; *rectangulum autem, quod tota AB, et BC continetur est* R 176, *cuius duplum* R 704. *ergo* R 704 *vnà cum quadrato ex AC est aequale* 27; *ac propterea quadratum ex AC est* 27 *minus* R 704. *qui vero ex quarta propositione secundi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed et Philosophus, ac medicus prestantissimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verũ quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.*

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipsis continetur, datum erit.

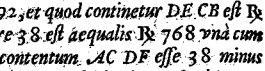
Sint duae apotomae datae AC DF: et ipsi quidem AC cõgruat CB; ipsi vero DF congruat FE: sitq; tota AB 8, *BC* R 12: *et sit DE* 4, *EF* R 3. *erit AC* 8 *minus* R 12, *et DF* 4 *minus* R 3. *Dico*

et rectãgulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duæ rectæ lineæ AB DE vtcumque secantur in punctis C F, erit rectangulũ, quod continetur totis AB DE vnà cum rectãgulo contento partibus CB FE aequale rectangulo contento tota AB, et parte FE vnà cum contento tota DE, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus A C DF continetur, ex ijs quae demonstrata sunt à nobis ad primã propositionem secundi libri theoremate secundo. itaque rectangulum contentum AB DE est 32, & contentum CB FE est Rx 36, hoc est 6; rectangulum vero, quod continetur AB FE est Rx 192, et quod continetur DE CB est Rx 192, quae duae radices inter se iunctae faciunt Rx 768. quare 38 est aequalis Rx 768 vnà cum eo, quod AC DF continetur. ex quibus sequitur rectangulum contentum AC DF esse 38 minus Rx 768. at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; et ob id asserunt si minus per minus multiplicetur produci plus, sed non recte, cum vtendum sit theoremate secundo; neque enim 8, et Rx 12 sunt partes vnius rectae lineae; immo vero 8 est tota linea, et eius pars Rx 12, et similiter dicendũ de 4 minus Rx 3. ex ipsorum tamen operatione nullus sequitur error.

THEOREMA V.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectãgulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quae constet ex binis nominibus AC CB, vt sit AC 6, CB Rx 20. data autem apotome sit DF, et ipsi congruens FE, vt tota DE sit 4, et EF Rx 12. erit DF 4 minus Rx 12. Dico rectãgulũ, quod ipsis AB DF cõtinetur datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB DE vtcumque secantur in punctis CF, erit ex secundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipsis AB DE continetur, aequale rectangulis, quae fiunt vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata; videlicet rectangulo contento DF AC, et contento DF CB: et preterea rectangulo, quod continetur FE AC, et quod continetur FE CB. rectangulum autem contentum DE AC vnà cum contento DE CB est aequale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima secundi libri. Itaque rectangulum contentum DE AC est 24, et contentum DE CB est Rx 320. rectangulũ vero, quod cõtinetur FE AC est Rx 432, et quod continetur FE CB Rx 240. ergo rectangula, quae continẽtur DF AC, et DF CB, hoc est rectangulum contentum DF AB est 24 plus Rx 320, minus Rx 432, et minus Rx 240. Eodem modo procedemus, si rectae lineae AB DE ex pluribus nominibus constent.



Ex quibus apparet si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.

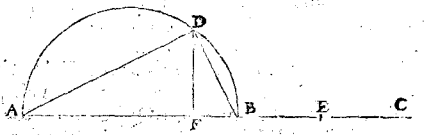
His ita demonstratis constat, quadratum ipsius AE esse 27 plus Rx 704, et quadratum EB esse 27 minus Rx 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod est 5, erit quadratum ex AF 32 plus Rx 704, et quadratum ex FB 32 minus Rx 704, rectaq; linea AF radix huius summae 32 plus Rx 704, quam radicem vniuersalem appellant, et ita notant, videlicet Rx V. 32 plus Rx 704: et similiter BF Rx V. 32 minus Rx 704, quarum quidem quadrata inter se iuncta videlicet 32 plus Rx 704, et 32 minus Rx 704 faciunt 64, quod est ipsius AB quadratum. preterea quoniam rectangulum, quod continetur rectis lineis AF FB est aequale contẽto ipsis AB EF, vt demonstratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF est Rx 320: erit etiam rectangulum, quod his lineis Rx V. 32 plus Rx 704, et Rx V. 32 minus Rx 704 continetur Rx 320. Hoc autem ita esse ex earum quoque inter se multiplicatione manifesto apparere potest. dispositis enim his radicibus videlicet Rx V. 32 plus Rx 704, et Rx V. 32 minus Rx 704, vt quid ex earum multiplicatione proueniat cognoscamus, operandum est, quemadmodum in simplicibus radicibus; nimirũ multiplicãdo eatũ quadrata inter se, et eius, quod producitur radix erit id, quod quæritur. cũ aũt quadrata utriusq; cõstẽt ex duabus partibus, erit rectãgulũ, quod totis cõtinetur, ac si lineæ essent, aequale rectãgulis, quæ fiũt singulis partibus unius ad singulas alterius applicatis, vt demonstratũ est. si igitur 32 in se multiplicentur fiunt 1024; rursus si 32, hoc est Rx 1024 multiplicet Rx 704 fit Rx 720896. et ita si 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. postremo simul tiplicetur Rx 704 per minus Rx 704 fiunt minus 704. totũ igitur ex his compositũ est 1024 plus

R 720896

R 720896 minus R 720896 minus R 704, hoc est 1024 minus 704. itaq; detractis 704 de 1024 relinquẽtur 320, & eius radix erit id quod quæritur. ergo si multiplicemus R V. 32 plus R 704 per R V. 32 minus R 704 producetur R 320. Quatenus vero ad scholiũ pertinet, sit A B 30 & numeri C D 5 3. & fiat vt 5 ad 3. ita quadratũ ex AB, hoc est 100 ad quadratũ ex BE, erit ad 60. ergo ipsa BE est R 60, & AE 10 minus R 60. rectãgulum autem BF est R 6000, & rectangulum AF 100 minus R 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectãgulum vero quod ipsis continetur rationale.



2. huius.

Exponantur duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant, ita vt A B plus possit quam BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. & in ipsa AB describatur semicirculus DB; sectaq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur AF FB. incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine. à puncto autem F ipsi A B ad rectos angulos ducatur FD; & AD DB iungantur. itaque quoniam AF est incommensurabilis F B; erit & BAF rectangulum rectangulõ ABF incommensurabile. est autem rectangulũ quidem BAF quadrato ipsius A D æquale; rectangulum vero A B F æquale quadrato ipsius D B incommensurabile igitur est quadratum A D ipsius D B quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam medium est quadratum ipsius AB, erit & compositum ex quadratis ipsarum AD DB medium. quòd cum dupla sit BC ipsius D F, & rectangulum ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commens. rabile. rationale autem est rectangulum ABC, ita enim ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD est rationale. sed rectangulo ex AB FD æquale est rectangulum ADB quare & ipsum ADB rectangulum rationale erit. Inuentæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommẽsurabiles AD DB, quæ faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum uero, quod ipsis continetur rationale.

Lemma ad 19. huius.
19. huius.
Lemma 2.
Lemma. 1.
Lemma 3.
Lemma 1. ante 34. huius.

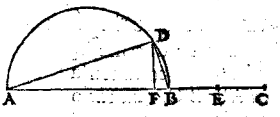
F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB R R 54, BC R R 24. & diuisa R R 24 bifariam, erit eius dimidia BE R R 1 $\frac{1}{2}$. applicetur ad AB parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est aequale R 1 $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata. quod similiter, atque supra fiet. diuisa enim rursus AB. hoc est R R 54 bifariam, erit eius dimidia R R 3 $\frac{1}{8}$. & si ab ipsius quadrato, videlicet à R 3 $\frac{3}{8}$ auferatur R 1 $\frac{1}{2}$, reliqua erit R $\frac{1}{8}$. ergo recta linea AF est RR 3 $\frac{1}{8}$ plus RR $\frac{3}{8}$, & FB RR 3 $\frac{1}{8}$. minus R R $\frac{3}{8}$. quadratũ autẽ ipsius AF eodẽ modo inuenietur esse R 6 plus R 4 $\frac{1}{2}$. & quadratũ ex FB R 6. minus R 4 $\frac{1}{2}$, quibus addito cõi quadrato ipsius FD, videlicet R 1 $\frac{1}{2}$, erit quadratum ex AD R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & quadratum ex DB R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$. ideoq; recta linea AD R V R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & DB R V. R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$, quarũ quadrata simul iuncta faciunt R 54, videlicet rectae lineae AB quadratum. quod est medium. At rectangulum, quod AD DB continetur est aequale contento AB DF. contentum vero AB DF, hoc est RR 54, & RR 1 $\frac{1}{2}$ est RR 81, hoc est 3. ergo quod continetur AD DB est 3. sed et idem aliter constat multiplicando R V. R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$ plus R V R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$; fit enim R 9.

quae est 3. sunt igitur hę rectae lineae potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex eorum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectãgulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.



35 huius: Exponantur duæ mediæ potentia solũ commensurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quẽadmodũ in ijs, quæ superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex AB, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quòd cum rectangulũ AFB æquale sit quadrato alterutrius ipsarũ BE DF, erit DF æqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplũ est eius, quod AB FD continetur. medium autem est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediũ, atque est æquale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lõgitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurabile est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quę ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentæ sunt duę rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.

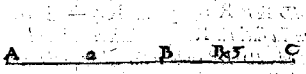
Corol. 24 huius. 1. lemma ad 34. huius. 33. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞ 18, & BC ℞ 2. diuidatur BC bifariam in E, erit BE ℞ $\frac{1}{6}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est ℞ $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF ℞℞ $1\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{2}$ & FB ℞℞ $1\frac{1}{8}$ minus ℞℞ $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipsius AF ℞ $3\frac{1}{6}$ plus ℞ 3, & quadratum FE ℞ $3\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito utrique quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD ℞ $4\frac{1}{2}$ plus ℞ 3. & quadratum ex DB ℞ $4\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD est ℞ V. ℞ $4\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ $4\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, quarũ quadrata simul iuncta faciunt ℞ 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est ℞ $1\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.



Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, potẽtia enim solũ

commensu-

commensurabiles sunt; & vt AB ad BC, ita rectãgulum ABC ad id, quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed recta gulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC continetur incommensurabile est quadratis ex A B B C. & componendo quod bis AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incommensurabile est compositio ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 1. sexti. 10. huius. 6. huius. 13. huius. 4. secundi. 20. diffi. 11. diffi.

SCHOLIVM.

Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2, & BC ℞ 3. erit AC 2 plus ℞ 3. & eius quadratum 7 plus ℞ 48. est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur ℞ 12, cuius duplum est ℞ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineat. dico totam AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed A B C rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex A C irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

A ℞ 54 B ℞ 24 C

A B C

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hæ inueniantur docuit in 28 huius. sit autem AB ℞ 54, BC ℞ 24, erit tota AC ℞ 54 plus ℞ 24.* A

Et quadrata ex A B B C incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis A B BC continetur] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum] *Ex 4 secundi.* C

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.* D

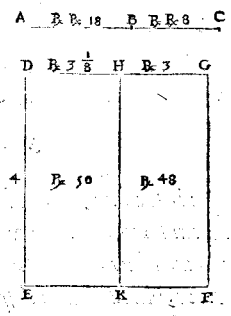
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur.

quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles, AB BC, quæ medium
B contineant. Dico AC irrationalem esse. exponatur rationalis DE: & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum D F ad ipsam DE applicetur, quod latitudine faciat DG.
C itaque quoniam quadratum ex A C æquale est
4. secundi quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB B C continetur. applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammũ
E rectangulum E H. reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB BC, erũt & qua
F drata ex AB BC media. medium autem ponitur & quod bis continetur AB B C. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo autem bis AB BC contento æquale est ipsum HF. me-



G dium igitur est vtrumque ipsorum EH HF. & ad rationalẽ applicantur. ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis.
H & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; atque est vt AB ad BC,
K ita quadratum ex AB ad A B C rectangulum: erit quadrato ex A B rectangulum
L ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC: rectangulo autem ABC est commensurabile,
M quòd bis AB BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC. sed quadratis ex AB BC æquale est parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF pa
N rallelogrammum. quare EH ipsi HF est incommensurabile, & ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales. ergo DH
O HG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est irratio-
P nalis; rationalis autem D E; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulũ
Q irrationale est. spacium igitur DF est irrationale, & quę ipsum potest irrationalis. potest autem ipsum D F recta linea AC. ergo A C irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medijs secundam; quoniam medium est non rationale, quod ipsis AB BC continetur; medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

21 huius: Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ medię potentia solum commensurabiles AB BC, quę medium contineant] *Quomodo autem hę inueniantur docet in 29 huius. sit AB* RR 18, *et BC* RR 8, *erit AC* RR 18 *plus* RR 8, *cuius quadratum* R 50 *plus* R 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectan-

gulum

gulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4. ad quam si applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quae sit DH: et si ad eadem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quae sit HG. ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis] *Ex quarta secundi, vel 4. Barlaam monachi.* C

Applicetur ad ipsum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum rectangulum EH] *Quadratum ipsius AB est* R 18, *et quadratum BC* R 8, *quae inter se iunctę faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH est* R 50, *et recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$. D

Reliquum igitur FH est æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc est* R 48, *et recta linea HG* R 3, *vt dictum est.* E

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod A B BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur est ei commensurabile, videlicet duplum ex 6. huius, et ipsum medium erit, ex corollario 24. huius.* F

Ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23. huius.* G

Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23 huius appositio, vel ex 1. sexti.* H

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommensurabile] *Ex 10. huius.* K

Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commensurabiles. ergo & earum quadrata commensurabilia erunt, et compositum ex ipsis commensurabile vtrique quadrato ex 16. huius.* L

Ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC] *Ex 14. huius.* M

Et ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine] *Ex 1. sexti, et 10. huius.* N

Ac propterea DG est irrationalis] *Ex 37. huius.* O

Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum fuit.* P

Et quę ipsum potest irrationalis] *Ex 11. diffinitione.* Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL. A

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componãtur, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem maior.

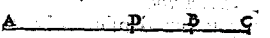
Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes eã, quæ proposita sunt. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim id, quod AB BC continetur, medium est; & quod bis continetur AB BC medium erit. compositum autem ex ipsarum AB BC quadratis est rationale. ergo quod bis AB BC continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum AB BC. & ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC, incommensurabile est quadratis ex AB BC. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta linea AC est irrationalis. vocetur autem maior. A

SCHOLIVM.

Vocauit autem ipsam maiorem, propterea quod rationalia ex AB BC maiora

BC maiora sint medio, quod bis AB BC continetur: oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC maiora esse eo, quod bis AB BC continetur, sic ostendemus.

Manifestum igitur est AB BC inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit. quod nō ponitur. Inæquales igitur sunt AB BC, ponatur maior AB, & ipsi BC



7. secundi æqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia sunt ei, quod bis AB BD cōtinetur vnà cum quadrato ex DA. æqualis autem est DB ipsi BC. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoq; quadrata ex AB BC maiora sunt, quàm id, quod bis AB BC continetur, quadrato ipsius DA.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt] *Inueniuntur autē hæ ex 34 huius. sit AB R V. 34 plus R 704; et*
B *BC R V. 32 minus R 704. erit tota AC R V. 32 plus R 704 plus R V. 32 minus R 704.*
C Et quod bis AB BC continetur medium erit] *Ex corollario 24 huius.*
Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC incommensurabile est quadratis ex AB BC] *Ex 17 huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommēsurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt. Dico A

B C irrationalem esse. Quoniam enim cō positum ex ipsarum AB BC quadratis medium est; quod autem bis AB BC cōtinetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare componēdo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur ABBC. est autem rationale, quod bis AB BC continetur, quadratum igitur ex AC irrationale est; ideoq; recta lineā AC est irrationalis. vocētur autem rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipsam idcirco appellauit, quòd possit bina spacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale præcedit irrationale, ipsius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Componātur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea quæ proposita sunt] *Hæ autem inueniuntur ex 35 huius. sit AB R V. R 13 + plus*

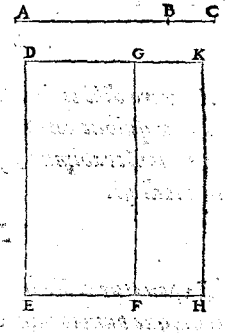
R 4 $\frac{1}{2}$, BC R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *vt tota AC sit* R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R V. R. 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius.* B *ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.*

Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis con- C
tinetur AB BC] *Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC vnà cum eo, quod bis AE BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis conti-* 4. secundi.
netur AB BC.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectę lineę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis cõtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bina media potens.



Componantur enim duæ rectæ lineę potẽtia incõmensurabiles AB BC, quę faciant compositum quidẽ ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Dico AC irrationalẽ esse. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. totum igitur DH quadrato ipsius AC est æquale. & quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum AB BC, & æquale parallelogrammo DF, erit ipsum quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatũ est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. ob eandem causam & GK est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG, hoc est ipsi DE. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit & parallelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK; & sunt rationales. quare DG GK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationalis est. vocetur autem bina media potens. A B C D E F G

SCHOLIVM.

Vocauit ipsam bina media potẽtem, propterea quod potest bina spatia media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis; & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur.n.duæ rectę lineę potentia incõmensurabiles AB BC, quæ faciãt A

compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium, quod autem ipsis cõtinetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri posint, tradit in 36. huius. Sit AB R V. R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 3, & BC R V. R 4 $\frac{1}{2}$ minus R 3. erunt earum quadrata simul iuncta* R 18, *& rectangulum ipsis contentum* R 1 $\frac{1}{2}$, *cuius duplum est* R 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam si applicetur parallelogrãmum DF, aequale compositio ex ipsarum AB BC quadratis, videlicet* R 18, *latitudinem faciet* R 2, *quae sit DG: & si ad eandem applicetur parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* R 6, *latitudinẽ faciet* R $\frac{2}{3}$, *quae sit GK. tota igitur latitudo DK erit* R 2 *plus* R $\frac{2}{3}$, *quae est irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit aequale quadrato ipsius AC, ex 4 secundi.*

C Rationalis igitur est DG ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK] *Ex 10 huius, est enim vt D F ad GH, ita DG ad GK, ex 1. sexti.*

E Ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale est] *Nam quod rationali, & irrationali continetur est irrationale, vt in scholio 39. huius demonstratum fuit.*

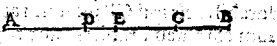
G Et ipsum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCHOLIVM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lis, ex quibus componuntur, & quę propositas species constituunt, nox demonstrabimus, si prius lemma quoddam exposuerimus, quod huiusmodi est.

LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & secetur tota in partes inæquales ad vtrumque punctorum CD: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipsarum AC CB quadratis AD DB maiora esse.



Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam maior est AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB est autem AE ipsi EB æqualis. ergo D E. quàm EC est minor: & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineæ CE est æquale quadrato ipsius EB; sed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineę DE est æquale ipsius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipsius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipsius DE. Quorum quadratum ipsius DE est minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus est rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus est eo, quod bis continetur AD DB. sed compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, est æquale compositio ex quadratis ipsarum AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. est enim vtrumque eorum quadrato ipsius AB æquale. & reliquum igitur compositum ex quadratis AC CB maius erit compositio ex quadratis AD DB. quod demonstrare oportebat.

5. secundi.

4. secundi

ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuisa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex AC CB maiora esse quadratis ex AD DB.

Quoniã enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, quod demonstratum est in nono theoremate secundi libri elementorum; & sunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD, propterea quod AB in D bifariam secatur; quod autem bis fit ex DC duplum est quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB æqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC: quadrata igitur ex AC CB maiora sunt quàm quadrata ex AD DB, eo quod bis fit ex DC. Nõ secetur autem AB bifariam, sed vtcunque in punctis CD, ita vt AD sit maior, quàm CB. similiter demonstrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse. Quoniam enim recta linea AB vtcũque secatur in C, quadratum ex AB est æquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratũ ex AB est æquale quadratis ex AD DB vnà cũ eo, quod bis AD DB continetur. quorũ quod bis continetur AD DB maius est eo quod bis AC CB continetur: est enim rectangulum ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora sunt, quod demonstrare oportebat.

A D C B

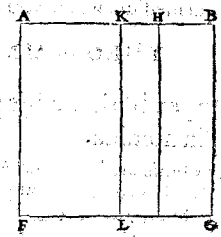
4 secundi.

Ex proxime demõstratis.

I. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perspicue apparet excessum, quo compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB superat compositum ex quadratis ipsarum AD DB, æquale, vel potius eundem esse excessui, quo rectangulum bis contentum AD DB superat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipsam A F applicetur parallelogrammum F H æquale composito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG aequale rectangulo bis contento AC CB. Rursus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK aequale composito ex quadratis AD D B. reliquum igitur parallelogrammum KG est aequale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH est aequale composito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK est aequale composito ex quadratis AD DB: erit parallelogrammum LH excessus, quo alterum alterum superat. Sed idem LH est excessus, quo rectangulum bis contentum AD DB superat id, quod bis A C CB continetur. constat igitur verum esse, quod nos demonstrandum proposuimus.



4 secundi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B diuisa in nomina ad punctum C. ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles. Dico AB ad aliud punctũ non diuidi in duas rationales potentia solum commensurabiles. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB rationales sint potẽtia solũ cõmẽsurabiles. Itaq; manifestũ est A B C non esse eandem, quæ D B. si enim fieri potest, sit eadem. erit igitur & AD ea- C

dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD ad DA : & AB in D similiter diuisa erit, atque in punctō C, quod non ponitur. ergo AC non est eadē, quę DB. simili ratione & puncta CD non æquali ter distant à bipartita sectione. quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectarum linearū AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB, & quadrata ipsarum AD DB vnà cū eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ipsa media sint. atqui medium non superat medium rationali. nō igitur quæ ex binis nominibus ad rationē, atque aliud punctum diuiditur, quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.

D E F G H

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 37 huius.*

B Itaque manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse æqualem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro æquali.*

C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit æqualis ipsi DB, dempta BC vtrique communi, erit reliqua AD reliquæ CB æqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuisa, atque in ipso C.*
Simili ratione & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione] *Nā si AD CB inter se æquales non sint, neque puncta CD æqualiter distabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD bifariam diuidit.*

F Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis cōtinetur AC CB] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum est.*

G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt] *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non superat medium rationali] *Ex 27 huius.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XLIIII.

Quę ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum ditiditur in nomina.

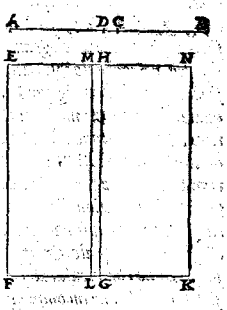
Sit ex binis medijs prima AB diuisa in puncto C, ita vt AC CB medię sint potentia solum cōmensurabiles, quæ rationale contineāt. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur etiam in D, ita vt AD DB sint medię potentia solum cōmensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis AD DB ab eo, quod bis AB CB continetur, hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim sunt rationalia: sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio puncto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.

Ex demonstratis ad 21 huius.

27. huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs ſecunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs ſecũda AB diuiſa in C, ita vt AC CB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quę medium contineant. manifeſtum eſt punctum C non eſſe in bipartita ſectione, quoniam nõ ſunt longitudine commenſurabiles. Dico ipſam A B in alio puncto non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt AC non ſit eadem, quæ DB. ſed maior A C poſitione. A
Itaque conſtat quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora eſſe, vt ſupra oſtendimus; & AD DB mediasse potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Exponatur rationalis EF: & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipſam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æquale auferatur EG. reliquum igitur HK æquale eſt ei, quod bis AC CB continetur, rurſus quadratis ex AD DB, quæ minora ſunt quadratis ex AC CB, vt oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur EL. ergo reliquum MK eſt æquale ei, quod bis cõtinetur AD DB. et quoniam media ſunt quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum eſt. quare EH rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione & HN eſt rationalis, & ipſi EF incommenſurabilis lõgitudine. Quòd cum AC CB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, erit AC ipſi C B incommenſurabilis longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB continetur. quadratum igitur ex A C incommenſurabile eſt ei, quod continetur AC CB. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex A C C B, etenim AC CB potentia ſunt commenſurabiles; ei uero, quod continetur AC CB, commẽ ſurabile eſt illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autẽ ex AC CB æquale eſt parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB eſt æquale HK. ergo EG ipſi HK eſt incommenſurabile; & ob id recta linea EH ipſi HN incommenſurabilis longitudine; ſuntq; rationales. ergo EH HN rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur, tota irrationalis eſt, quę ex binis nominibus appellatur. quare EN ex binis nominibus eſt diuiſa in puncto H. eadem ratione & EM MN oſtendentur rationales potentia ſolum cõmenſurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiſa, uidelicet ad H, & ad M. & non eſt EH eadem, quæ MN: quoniam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB ſunt maiora; quadrata autẽ ex AD DB maiora ſunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc eſt parallelogrammum EG multo maius eſt eo, quod bis cõtinetur AD DB, hoc eſt parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN eſt maior. non igitur E H eadem eſt, quę MN. quod demonſtrare oportebat.

B C D E F K G

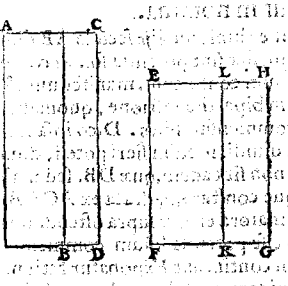
F. C. COMMENTARIVS.

Sed maior AC poſitione] *Hoc eſt ponatur nunc AC maior, quam DB.* A
Vt ſupra oſtendimus] *In lemmate, quod poſitum eſt ante 43. huius.* B
Reliquum igitur HK æquale eſt ei, quod bis AC CB cõtinetur.] *Ex 4. ſecundi libri.* C
Et quoniam media ſunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] *Rectae enim li* D

neae

neæ AC CB ponuntur mediæ potentia solum commensurabiles. quare & media erunt ipsarum quadrata, atque inter se commensurabilia, & si componantur vnum fiet medium, quemadmodū ex duabus rationalibus, si longitudine commensurabiles sint, vna fit rationalis.

At vero spacium ex mediis compositum irrationale esse, sic demonstrabimus.] *Componantur duo media spacia AB BC. Dico totum AD esse irrationale. sit enim rationale, si fieri potest; exponaturq; rationalis quædam recta linea EF; & ad ipsam applicetur parallelogrammum EG ipsi AD æquale, latitudine faciens EH: à parallelogrammo autem EG auferatur EK æquale ipsi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC est æquale. & quoniam medium est vtrumque ipsorum AB BC; atque est EK quidem ipsi AB æquale; LG vero ipsi BC: erit & vtrumque ipsorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata sunt. rationalis igitur est vtraque ipsarum EL LH, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Rursus quoniam AD rationale ponitur, estq; ipsi EG æquale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationalis erit, & ipsi EF longitudine commensurabilis. est autem EL eidem EF incommensurabilis longitudine. ergo EH ipsi EL longitudine incommensurabilis erit. sed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commensurabile est quadratis ex HE EL; vtrumque enim ipsorum est rationale. & rectangulum contentum HE EL est commensurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quæ ad 14. huius demonstrauimus, quadrata ex HE EL incommensurabilia sunt ei, quod bis continetur HE EL. sed quadratis ex HE EL æquale est id, quod bis HE EL continetur vnà cum quadrato ipsius LH, ex 7 secundi libri. si autem magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit. quod à nobis demonstratum est ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommensurabilia sunt quadrato ex LH. rationalia autem sunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale est: & ob id recta linea LH est irrationalis; sed & rationalis, vt demonstratum fuit; quod fieri non potest. non igitur spacium AD est rationale. quare irrationale sit necesse est. quod demonstrare oportebat.*



A. II. 23. huius. 21. huius. 13. huius.

E Quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis.] *Ex 23 huius.*

F Ergo EC ipsi HK est incommensurabile.] *Ex demonstratis ad 14 huius.*

G Tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37. huius.*

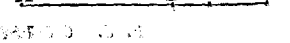
H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M.] *Quod fieri non posse in 43 huius demonstratum est. non igitur quæ ex binis mediis secunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi necessarium est.*

K Et non est EH eadem, quæ MN.] *Ostendit EH ipsi MN non esse æqualem.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, mediū. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur, medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis continetur AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur. sed

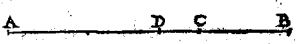


ſed quadrata ex AC CB ſuperant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia ſunt. ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali ſuperat id, quod bis AC CB cõtinetur, cũ media ſint. quod eſt abſurdũ. nõ igitur maior ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur neceſſe eſt. Ex demonſtratis ad 27 huius. Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

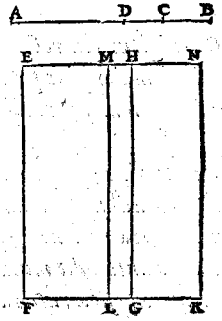
Sit rationale, ac medium potens AB, diuiſa in C; ita vt AC CB potentia incõmenſurabiles ſint; faciantq; compoſitũ quidem ex ipſarum AC CB quadratis medium; quod autem ipſis continetur, rationale. Dico AB *in alio puncto non diui di.* ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt etiam AD DB potentia incommenſura biles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium: quod autem ipſis continetur, rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali ſuperat id, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB ſuperant quadrata ex AD DB rationali, cum media ſint. quod eſt abſurdum. non igitur rationale, ac mediũ potens *diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum* diuidetur.



THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit bina media potens AB, *diuiſa in* C, ita vt AC CB potentia incommenſurabiles ſint, facientes etiam compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium; & quod ipſis continetur, medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita vt faciat quæ propoſita ſunt. Si enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt rurſus AC non ſit eadem, quæ DB, ſed ſit AC poſitione maior; exponaturq; rationalis EF, & ad ipſam quadratis quidẽ ex AC CB æquale parallelogrammum EG applicetur, rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK eſt æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rurſus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur, reliquo MK eſt æquale. & quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB medium ponitur, erit & parallelogrammum EG medium: & ad rationalem EF applicatum eſt. rationalis igitur eſt HE, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione & HN eſt rationalis, ipſiq; EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammũ EG ipſi HK incommenſurabile. ergo & recta linea EH eſt incommenſurabilis rectę HN. & ſunt rationales. quare EH HN rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles



4. ſecundi. 23. huius.

biles. & ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoque M diuidi: & non est FH eadem, quæ MN. ergo quæ ex
Ex 43. huius. binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3 Quòd si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rursus si maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectę lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLIVM.

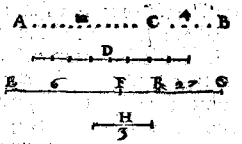
Cum igitur sex rectæ lineę ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas uero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quòd commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam uero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis, videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;

numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. & exponatur quędam rationalis D, & ipsi D longitudine commensurabilis sit EF. ergò EF est rationalis. fiat autẽ vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratũ FG. Sed BA ad AC proportionem habet, quàm numerus ad numerum. ergo & quadratum ipsius EF ad quadratũ FG proportionẽ habebit, quã numerus ad numerũ. cõmensurabile igitur est quadratũ ex EF quadrato ex FG; atq; est EF rationalis. ergo & rationalis FG. & qm̃ BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem habebit, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine. & ob id EF FG rationales sunt potentia solum cõmensurabiles. ex binis igitur nominibus est EG. Dico & primam esse. Quoniã enim est vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG quadratum. maior autem est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H. Quoniam igitur est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare EF ipsi H longitudine est commẽsurabilis. ideoq; EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EF FG rationales; & EF ipsi D longitudine est commensurabilis. ergo EG ex binis nominibus est prima.



D E F

F. C. COMMENTARIVS.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat] *Inuenientur aũt hi ex corollario primi lemmatis ante 30 huius.* A

Ergo EF est rationalis] *Ex 6 diffinitione.* B

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratum FG] *Ex corollario 6 huius.* C

Commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG] *Ex sexta huius.* D

Ergo & rationalis FG] *Ex 6 diffinitione.* E

Ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine] *Ex 9 huius.* F

Ex binis igitur nominibus est EG] *Ex 37 huius.* G

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H] *Inuenietur quadratum ipsius H ex lẽmate ante 15 huius.* H

Quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis] *Ex 9 huius.* K

Ergo EG ex binis nominibus est prima] *Ex prima secundarum diffinitionum.* L

Sit AC numerus 12, CB 4, & EF 6. fiatq; vt 16 ad 12, ita 36 ad aliũ. erit ad 27, ergo 6 plus 27 est ex binis nominibus prima.

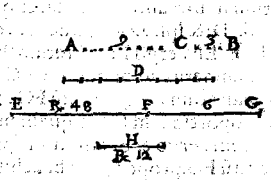
PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO L.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad ipsum BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

numerum:& exponatur rationalis D:& sit FG ipsi D longitudine commensurabilis.ergo FG rationalis est.fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE.commensurabile igitur est quadratum ex GF quadrato ex FE. ergo & EF est rationalis. & quoniã CA numerus ad ipsum AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionẽ habebit,quàm numerus quadratus ad quadratum numerum.incommensurabilis igitur est GF ipsi FE longitudine. quare EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles;ac propterea ex binis nominibus est EG. Ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim conuertendo est vt BA numerus ad numerũ AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG: maior autẽ est BA,quàm AC.ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H.est igitur per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.ergo & quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionẽ habebit,quam quadratus numerus ad quadratum numerum;& ob id EF ipsi H longitudine est commensurabilis.quare EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine.suntq; rationales EF FG potentia solum cõmensurabiles:& FG minus nomen longitudine commensurabile est ipsi D expositæ rationali.ergo EG ex binis nominibus est secunda.

6.diffi. Corol. 6. huius. 6.huius. 6.diffi. 9.huius. 9.huius. 2.diffi.secundarum.



F. C. COMMENTARIVS.

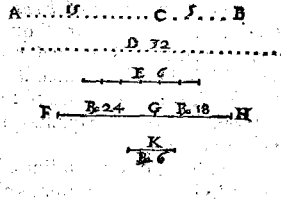
Sit AC 9 CB 3.& FG 6.fiat autem vt 9 ad 12,ita 36 ad aliũ erit ad 48. quare ▱ *48 plus 6 est ex binis nominibus secunda.*

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat,quam quadratus numerus ad quadratum numerum.denique ex ponatur rationalis quędam recta linea E; fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG.quadratum igitur ex E quadrato ex FG est commensurabile.rationalis autem est E.ergo & FG est rationalis.& quoniam D ad AB proportionem non habet,quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit,quã quadratus numerus ad quadratum numerum.incommensurabilis igitur est E ipsi FG longitudine. Rursus fiat vt BA numerus ad numerum AC,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. ergo quadratum ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationalis autem est FG.quare;& GH est rationalis.& quoniam BA ad AC proportionem non habet,quã quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex FG ad quadratum

Corol.6.huius. 6.huius. Diffi.6. 9.huius. 6.huius.



tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. Dico & tertiam esse. Quũ enim est vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est vt A B ad B C, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est F G ipsi K longitudine. & ob id FG plus potest, quam GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntq; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex binis nominibus est tertia.

9. huius.
9. huius.
9. huius.
3 diffi. secundarum.

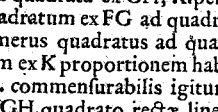
F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5, & D 30, rationalis autẽ E sit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ. erit ad 24. rursus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo Bx 24 plus Bx 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrũque ipsorum proportionem non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipsi D commensurabilis sit E F longitudine. ergo EF est rationalis. fiat autem vt BA numerus ad numerum A C, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG: ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi F G longitudine incommensurabilis. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam enim est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem est BA, quàm AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF aqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed A B ad B C proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi H longitudine est incommẽsurabilis; ac propterea EF plus potest, quàm FG quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles; & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta.



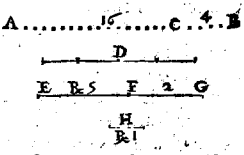
diffi. 6.
6. huius.
9. huius.
37. huius.
9. huius.
4. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 16, CB 6. rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; ut 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10: erit 4 plus Bx 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.



Exponantur duo numeri A C CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit FG. ergo FG est rationalis: & fiat vt C A ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum. rationalis igitur est FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nō habet, quam numerus quadratus ad quadratū numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. itaque dico & quintam esse. Quoniam enim est vt CA ad AB, ita quadratū ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per cōuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea E F ipsi H longitudine est incommēsurabilis. quare EF plus potest, quàm FG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles: & FG minus nomen exposite rationali D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quinta.

6. diffi.

5 huius.

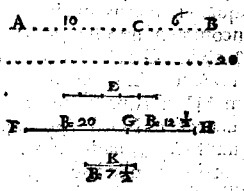
5. diffi. secundum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit B 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus sextam.



Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. sit etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & exponatur rationalis quędā recta linea E: fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. commēsurabilis igitur est E ipsi F G potentia, atque est E rationalis. quare & rationalis est F G. Et quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis. itaque rursus fiat ut BA ad AC, sic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rationale: ob idq; recta linea GH est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionē nō habet,

9 huius.

9. diffi.

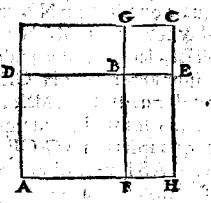
bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est FH. ostendendum est & sextæ esse. Quoniam enim vt D ad AB, ita est quadratũ ex E ad quadratũ ex FG; est aũt & vt BA ad AC, ita quadratũ ex FG ad quadratũ ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratũ ex E ad quadratũ ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommẽsurabilem esse. quare utraque ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratũ ex FG quadrato ex GH maius, sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. ergo per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed AB ad BC proportionem non habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K longitudine est incommensurabilis: ergo FG plus potest, quam GH. quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: suntq; FG GH rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta. 9. huius: 37. huius. 9. huius. 6. diffi. secundarum.

E. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E sit 5, & fiat vt 20 ad 16, ita 25 ad aliud, nempe ad 20. rursus fiat vt 16 ad 10, ita 20 ad aliud, erit ad 12 ½. ergo ℞ 20 plus ℞ 12 ½ est ex binis nominibus sexta.

LEMMA

Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, vt DB sit in directum ipsi B E. ergo & FB ipsi B G in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum esse: & quadratorum AB BC rectangulum DG medium esse proportionale; itemq; ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.



Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE toti FG æqualis. sed DE æqualis est vtrique ipsarum AK HC, ergo & vtraque AH KC vtrique AK HC est æqualis. æquilaterũ igitur, est AC parallelogrãmum, est autem & rectangulum. ergo quadratum est AC. Et quoniam est vt FB ad BG, ita DB ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igitur AB ad DG, ita est DG ad BC: ideoq; ipsorum AB BC medium proportionale est DG. Dico præterea ipsorum AC CB medium proportionale esse DC. nam cũ sit vt AD ad DK, ita KG ad GC: est enim vtraque vtrique æqualis: & componendo erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. sed vt AK ad KD, ita AC ad CD; & vt KC ad CG, ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorum AC CB medium proportionale est CD. quod ostendendum proponebatur. 14. primi. 1. sexti.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

Si spacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta

recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spaciũ enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpacium AC irrationalem eſſe, quę ex binis nominibus appellatur. Quoniã enim AD eſt ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctum E: & ſit AE maius nomen. manifeſtum eſt AE ED rationales eſſe potentia ſolũ commenſurabiles, & AE plus poſſe, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea AE expoſitæ rationali AB longitudine commenſurabilem eſſe. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur AE plus poteſt, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſi quartę parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex EF æquale parallelogrammũ ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet.

A itaque applicetur, & ſit AGE. ergo AG ipſi GE

B longitudine eſt commenſurabilis. Deinde per pũcta G E F alterutri ipſarum AB DC parallelæ ducantur GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum conſtitutur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi NX. ergo RN ipſi NO in directum erit: & parallelogrammum SP compleatur. quadratum igitur eſt SP. & quoniam rectangulum AGE eſt æquale quadrato ex EF, erit vt AG ad EF, ita FE ad EG. quare & vt AH ad EL, ita eſt

C EL ad KG: ac propterea parallelogrammorum AH KG mediũ proportionale eſt EL. Sed parallelogrammo AH æquale eſt quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP. ergo quadratorum SN NP medium proportionale eſt EL. ſed & eorumdem SN NP medium proportionale eſt & MR. æquale igitur eſt MR ipſi EL. ſed MR eſt æquale OX, & EL ipſi FC. ergo totũ EC ipſis MR OX eſt æquale. ſunt autem & AH GK æqualia ipſis SN NP. totũ igitur AC eſt æquale totũ SP, hoc eſt quadrato ex MX; ideoq; ipſa MX poteſt parallelogrammum AC. Dico MX

D ex binis nominibus eſſe. quoniam enim AG commenſurabilis eſt ipſi GE, erit AE utrique ipſarum AG GE commenſurabilis; ponitur autem & AE commenſurabi-

E lis ipſi AB longitudine. ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles; ſunt; atque eſt

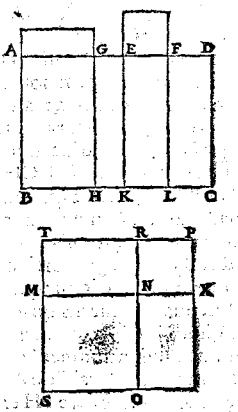
F AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipſarũ AG GE: & ob id rationale vtrũq;

G ipſorum AH GK: & AH ipſi GK eſt commenſurabile. ſed AH eſt æquale ipſi SN, & GH ipſi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia

H ſunt, & commenſurabilia. Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG; DE vero ipſi EF: erit & AG ipſi

K L EF longitudine incommenſurabilis. ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL. ſed AH eſt æquale SN, & EL ipſi MR. quare SN eſt incommenſurabile ipſi MR: vt autem SN ad MR, ita ON ad NR. incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR: eſt autẽ

M N ON æqualis MN, & NR ipſi NX. ergo MN ipſi NX eſt incommẽſurabilis. atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX: & vtrumque rationale. quare MN NX rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus eſt, & poteſt parallelogrammum AC, quod demonſtrare oportebat.



1. Secundarũ diffin.

14. ſecundi.

Ex antecedẽti lemmate.

1. ſexti.

43. Primi.

37. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A In partes commenſurabiles ipſam diuidet] *Ex 2 parte 18 huius.*

Itaque

Itaque applicetur, & sit AGE] *Ex 3. lemmate ante 18 huius.* B
Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14 sexti.* C
Erit AE vtrique ipsarum AG GE commensurabilis] *Ex 16 huius.* D
Ergo & AG GE ipsi AB commensurabiles sunt] *Ex 12 huius.* E
Et ob id rationale vtrumque ipsorum AH GK] *Ex 20 huius.* F
Et AH ipsi GK est commensurabile] *Est enim ex 1 sexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogramum GK, ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipsi GK est commensurabile.* G
Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine] *Ponitur enim AD esse ex binis nominibus prima, quae constat ex duabus rationalibus potentia solum commensurabilibus.* H
Erit & AG ipsi EF longitudine incommensurabilis] *Ex ijs, quae ad 14 huius demonstrauimus.* K
Ergo & AH est incommensurabile ipsi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipsum EL. quare ex 10 huius propositum concludetur.* L
Incommensurabilis igitur est ON ipsi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam est.* M
Atque est quadratum ex MN commensurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim supra demonstratum est.* N

Sit AB 5, & AD 4 plus ℞ 12. erit EF, vel FD ℞ 3. & si ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammum AH est 15, GK 5, & EL, vel FC ℞ 75: ideoque totum AC parallelogrammum erit 20 plus ℞ 300. Huiusmodi vero spacia iuniores etiam binomialia, seu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quae tradita sunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis spacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit binomiale spacium 20 plus ℞ 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur meius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale quartae parti quadrati minoris nominis, hoc est aequale 75. erit ex ijs, quae nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico ℞ 15 plus ℞ 5 esse latus quadratum eius spacij 20 plus ℞ 300. Quoniam enim recta linea, quae ex binis nominibus cõstat, videlicet ℞ 15 plus ℞ 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius aequale quadratis partiũ vnà cum rectangulo, quod bis di ctis partibus continetur. itaque quadratum ℞ 15 est 15; & quadratum ℞ 5 est 5: rectangulum autem, quod continetur ℞ 15 & ℞ 5 est ℞ 75, & eius duplum est ℞ 300. quae omnia si componantur facient 20 plus ℞ 300, et idem erit quadratũ quod fit ex recta linea ℞ 15 plus ℞ 5. ergo ℞ 15 plus ℞ 5 est latus quadratum, vel radix huius spacij binomialis 20 plus ℞ 300. Eodem modo & aliorum spaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

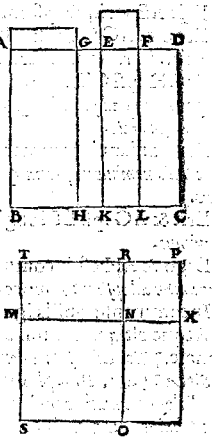
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus secunda, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, ex binis medijs primam esse. Quoniam enim AD est ex binis nominibus secunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. ergo AE ED rationales sunt potẽtia solum cõmensurabiles: & AE plus potest quàm ED quadrato rectę lineę sibi longitudine cõ- 2. diffi secũ-
mensurabilis: & minus nomen ED commensurabile est ipsi AB longitudine. secetur ED bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. commensurabilis 18. huius.
igitur est AG ipsi GE lõgitudine. & per puncta G E F ipsis AB DC parallelę ducantur GH EK FL. parallelogrammo antè AH æquale quadratum SN constituatur, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN sit in directum

ipsi

ipſi NX. ergo & RN ipſi NO in directum erit; & compleatur SP quadratum. manifeſtum iam eſt ex ijs, quæ demõſtrata ſunt, parallelogrammum MR medium eſſe proportionale quadratorum SN NP: & parallelogrammo EL æquale: & præterea rectã lineam MX poſſe ſpacium AC. oſtendendum igitur eſt ipſam MX ex binis medijs primam eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, cõmenſurabilis aũt ED ipſi AB; erit AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis. Et quoniam AG commenſurabilis eſt longitudine ipſi GE, erit AE vtrique ipſarũ AG GE lõgitudine cõmẽſurabilis. atque eſt AE rationalis. rationalis igitur & vtraque AG GE. Quòd cũ A E ſit incommenſurabilis quidem ipſi A B lõgitudine, commenſurabilis autẽ vtrique ipſarum AG GE, erunt AG GE ipſi AB longitudine incommenſurabiles. quare B A, A G, G E rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt vtrumque parallelogrammorum A H G K. & ob id vtrumque quadratorum S N N P eſt medium. ergo rectæ lineæ M N N X mediæ ſunt.



In antecedenti lemmate.

Ex demonſtratis in antecedente.

37. huius.

14. huius.

16. huius.

6. diffi.

14. huius.

22. huius.

rurſus quoniam commenſurabilis eſt AG ipſi GE longitudine, erit parallelogrammum AH parallelogrammo GK commenſurabile, hoc eſt quadratum SN ipſi NP, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia commenſurabiles ſunt. & quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine: & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG; ED vero ipſi EF: erit AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis. quare & parallelogrammum AH incommenſurabile parallelogrammo EL, hoc eſt SN ipſi MR, hoc eſt ON ipſi NR, hoc eſt MN ipſi NX incommenſurabilis eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN NX & mediæ, & potentia commenſurabiles. ergo MN NX mediæ ſunt, potentia ſolum commenſurabiles. Dico & rationale continere. Quoniam enim DE ponitur commẽſurabilis vtrique ipſarum AB EF. erit FE ipſi EK longitudine commenſurabilis: atque eſt rationalis vtraque ipſarum, rationale igitur eſt & parallelogrammum EL, hoc eſt MR. eſtq; MR, quod MN NX continetur. ſi autem duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quę rationale continent; tota irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur. ergo MX ex binis medijs eſt prima, quod demonſtrare oportebat.

Ex demonſtratis ad 14 huius.

1. huius.

20 huius.

38. huius.

F. C. *COMMENTARIVS.*

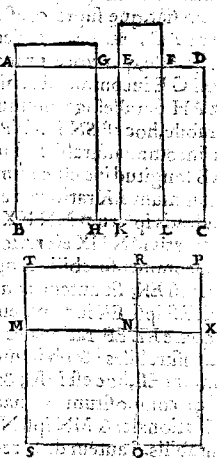
Sit AB 6, AD ℞ 12 plus 3. erit EF vel FD 1 $\frac{1}{2}$: & ſi ad AE applicetur parallelogrammũ æquale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata; erit AG ℞ 6 $\frac{1}{4}$ GE ℞ $\frac{3}{4}$. parallelogrammum igitur AH eſt ℞ 243, GK ℞ 27, & EL 9 & totum AC parallelogrammum ℞ 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, diuidemus ℞ 432 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit æquale quartæ parti quadrati 18, hoc eſt æquale 81. erit ex iam dictis maior pars ℞ 108 plus ℞ 27: quæ duæ radices ſi inter ſe componantur facient ℞ 243. minor autem pars erit ℞ 108 minus ℞ 27. & detracta ℞ 27 à ℞ 108 relinquitur ℞ 27. maior igitur pars eſt ℞ 243, & minor ℞ 27. quare ſpacij binomialis ℞ 432 plus 18 radix erit ℞℞ 243 plus ℞℞ 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis medijs ſecunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD, diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. Dico rectam lineam, quę potest spacium AC irrationalem esse, quę ex binis medijs secunda appellatur; construantur enim eadem, quæ supra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia est, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles, & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine: neutraq; ipsarum AE, ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostendemus MX eam esse, quæ spacium AC potest, & MN NX ex binis esse medijs. itaque ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; atque est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secunda.



diffi. 3. secundarum.

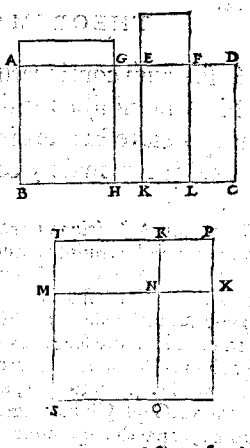
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD Ɍ 18 plus Ɍ 10, erit EF Ɍ 2 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammũ AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit AG Ɍ 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est Ɍ 450, GK Ɍ 18, & EL Ɍ 90: & totum parallelogrammum AC est 648 plus Ɍ 360. Diuidatur Ɍ 648 in duas partes, ita vt quod ipsis continetur sit aequale quartae parti quadrati Ɍ 360, hoc est 90. erit maior pars Ɍ 450, & minor Ɍ 18. spacij igitur binomialis Ɍ 648 plus Ɍ 360 radix est Ɍ Ɍ 450 plus Ɍ Ɍ 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ vocatur maior.

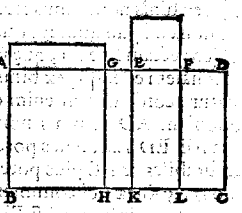
Spacium enim AC contineatur rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E, quorum AE sit maius. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus est quarta, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. erit igitur AG ipsi GE longitudine incommen-

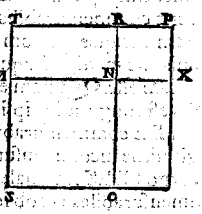


diffi. 4. sectarum.

19. huius:

ſurabilis. Ducãtur ipſi AB parallelę GH EK FL. & eadem fiãt, quę ſupra. conſtat igitur MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtendendum eſt MX irrationalem eſſe, quæ vocatur maior. Quoniã enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt lõgitudine, erit & AH parallelogrammum ipſi GK incommẽſurabile, hoc eſt SN ipſi NP. ergo MN NX potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum AK rationale eſt. atque eſt æquale quadratis ipſarum MN NX. ergo compoſitũ ex quadratis MN NX eſt rationale. quòd cum DE ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; ſit autem commenſurabilis ipſi EF: erit EF ipſi EK incommenſurabilis longitudine. quare KE EF rationales ſunt potentia ſolũ commenſurabiles: & ob id medium eſt parallelogrammum EL, hoc eſt MR, & MN NX continetur: eſtq; compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX rationale. & MN ipſi NX potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium; tota irrationalis erit. vocetur autem maior. ergo MX irrationalis eſt, quæ maior appellatur, & poteſt ſpacium AC. quod demonſtrare oportebat.





20. huius.

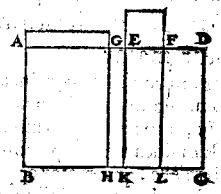
40. huius.

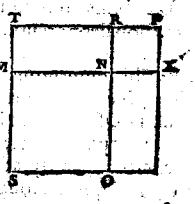
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD 6 plus R 24. erit EF R 6. ſi autem ad AE applicetur parallelogrammum AG æquale quadrato ipſius EF, et deficiẽs figura quadrata; erit AG 3 plus R 3, & GE 3 minus R 3. ergo AH parallelogrammũ eſt 18 plus R 108, GK 18 minus R 108, & EL vel FC R 216, totumq; parallelogrammum AC 36 plus R 864. itaque ſi diuidamus 36 in duas partes, vt productum ex ipſis ſit æquale 216, erit maior pars 18 plus R 108, & minor 18 minus R 108. quare ſpacij binomialis 36 plus R 864 radix eſt R V. 18 plus R 108 plus R V. 18 minus R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt, vocaturq; rationale, & medium potens.





Spacium n. AC cõtineatur rationali AB, & AD exbinis nominibus quinta, quę diuidatur in nomina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ ſit AE. Dico rectam lineã, quę põtſpaciũ AC, irrationalẽ eſſe, quę vocatur rationale, ac mediũ potens. conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. manifeſtũ eſt MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtẽdere oportet MX irrationalem eſſe, quæ rationale, ac medium poteſt. Qũ enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt longitudine, & parallelogrammum AH eſt incom-

19. huius.

menſurabile

mensurabile parallelogrammo HE, hoc est quadratū ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incōmensurabiles sunt. Quòd cū AD sit ex binis nominibus quinta; sitq; minor ipsius portio ED, erit ED ipsi AB cōmensurabilis longitudine. sed AE ipsi ED est incommensurabilis. ergo & AB incommensurabilis est longitudine ipsi AE; ac propterea BA, AE rationales sunt potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. & quoniam DE commensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; estq; DE commensurabilis ipsi EF: erit & FE ipsi EK commensurabilis. rationalis autem est EK. ergo & FE est rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. ergo MX potens est rationale, ac medium, & potest spacium AC. quod demōstrare oportebat.

Diffi. 5. secūdarum.

21. huius.

17. huius.

20. huius.

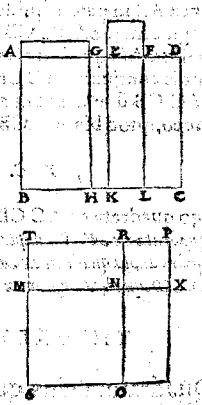
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD R 24 plus 4, erit EF 2. applicetur ad AE parallelogrammum AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiēs figurā quadrata; erit AG R 6 plus R 2, GE R 6 minus R 2; parallelogrammum, AH R 216 plus R 72; GK R 216 minus R 72; EL 12; & totum AC parallelogrammum R 864 plus 24. si igitur dividamus R 864 in duas partes, vt id, quod ex ipsis producitur, sit equale 144, erit maior pars R 216 plus R 72, & minor R 216 minus R 72. quare spacium binomiale R 864 plus 24 radix est R V. R 216 plus R 72 plus R V. R 216 minus R 72.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO. LX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est: vocaturq; bina media potens.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC, irrationalem esse, quæ vocatur bina media potens. cōstruantur enim eadem, quę supra, manifestū est MX posse spacium AC. & MN ipsi NX potentia incommensurabilem esse. Et quoniam EA ipsi AB incommensurabilis est longitudine, erunt EA, AB rationales potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarū MN NX. Rursus quoniam incōmensurabilis est ED ipsi AB longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis. ergo & FE, EK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea medium est EL, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incommensurabile erit. Sed AK quidem est cōpositū ex quadratis ipsarū MN NX. EL vero est quod MN, NX continetur. incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque est vtrumque ipsorum medium; & MN NX potentia sunt incommensurabiles. ergo MX est bina media potens, & potest spacium AC. quòd demonstrare oportebat.



21. huius.

A

B

C

D

F. C. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam incõmensurabilis est ED ipsi ab longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis] *Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.*

B Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF] *Ex 13 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.*

C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles] *Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratũ ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.*

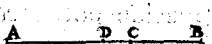
C Ergo MX est bina media potens] *Ex 42 huius.*

D *Sit AB 5, AD R 10 plus R 8. erit EF R 2. si igitur ad AE applicetur parallelogrammum AGE, aequale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AG R 2 $\frac{1}{2}$ plus R $\frac{1}{2}$, GE R 2 $\frac{1}{2}$ minus R $\frac{1}{2}$ & parallelogrammum AH R 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$, GK R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$, et EL R 50: totumq; AC parallelogrammum R 250 plus R 200. Diuidatur R 250 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale 50; erit maior pars R 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$, & minor R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$. Eius igitur spacij binomialis R 250 plus R 200 radix est V. R 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$ plus R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$.*

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto C, ita vt AC sit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, quod bis AC CB continetur. secetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem æquales secatur ad D, in partes vero inæquales ad C, rectangulum, quod AC CB continetur vnà cum quadrato ipsius CD est æquale ei, quod fit ex AD quadrato. ergo rectangulũ ACB quadrato ex AD est minus. quod igitur bis continetur AC CB minus est quàm duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonstrare oportebat.



5. secundi.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur] *Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quàm dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quàm duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur.*

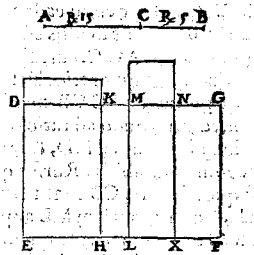
THEOREMA XLIII. PROPOSITIO LXI.

Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa in nomina ad punctum C, ita vt AC sit maius nomen: exponaturq; rationalis DE, & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam esse. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC æquale parallelogrammum DH: quadrato autem ipsius BC æquale KL.

reliquum

reliquum igitur, quod bis AC CB continetur est æquale parallelogrammo MF. secetur MG bifariã in N: & alterutri ipsarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum MX NF est æquale ei, quod semel AC CB continetur. Et quoniam ex binis nominibus est AB, diuisa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia solum commensurabiles. ergo quadrata ex AC CB rationalia sunt, & commensurabilia inter se: & ob id compositum ex quadratis ipsarum AC CB commensurabile est earumdem AC CB quadratis. rationale igitur est compositũ ex quadratis AC CB, atque est æquale parallelogrammo DL. ergo & DL est rationale, & ad rationalem DE applicatum est. rationalis igitur est D M, & ipsi DE commensurabilis longitudine. Rursus quoniam AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles, medium est, quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalem ML applicatum est rationalis igitur est MG, & ipsi ML, hoc est ipsi ED longitudine incommensurabilis. est autem & MD rationalis, & ipsi DE commensurabilis longitudine. ergo DM ipsi MG longitudine est incommensurabilis. suntq; rationales. ergo DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendendum est & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale est, quod AC CB continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale MX. est igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc est vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN est æquale. Et quoniam quadratum ex AC commẽsurabile est quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. quod cum quadrata ex AC CB maiora sint eo, quod bis AC CB continetur; erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo ME: ideoq; recta linea DM ipsa MG est maior. atque est rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex MG. & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes cõmensurabiles ipsam diuidat, maior plus poterit, quam minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntq; rationales DM MG, & DM, quæ est maius nomen exposite rationali DE longitudine est commensurabilis. ergo DG est ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.



4. secundi
37. huius.
16. huius.
6. diffi.
23. huius.
13. huius.
Ex lemmate ad 55. huius.
1. sexti.
17. sexti.
1. sexti.
10 huius.
Ex antecedentium.
1. sexti.
14. quinti.
19. huius.
1. diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

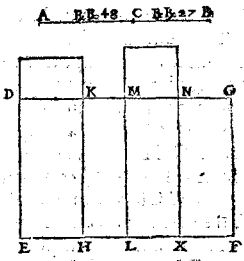
Sit AB R 15 plus R 5, & DE 5. erit DH 15 KL 5, & MX R 75 & NF R 75. quare si ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK 3. & si applicetur KL faciet KM 1. Quod si ad eandẽ applicetur MX videlicet R 75 faciet latitudinẽ MN R 3 ex 2 theoremate eorum, quae ad 20 huius conscripsimus. et similiter NG erit R 3. ergo tota DG erit 4 plus R 12, quae est ex binis nominibus prima.

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quę est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuisa in medias ad pũctum C, quarum AC sit maior: exponaturq; rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum æquale quadrato

quadrato ipſius AB, quod ſit DF, latitudinem faciēs DG. Dico DG ex binis nominibus ſecundā eſſe. Cōſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniam AB ex binis medijs eſt prima, diuiſa ad pūctum C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum cō
36. huius. menſurabiles, quæ rationalem continent. quare & quę fiunt ex AC CB media ſunt; ideoq; DL eſt medium, quod ad rationalem applicatū eſt.
24. huius. rationalis igitur eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rationale eſt quod bis AC CB continetur, erit & MF ratio
21. huius. nale, & ad rationalem ML applicatum eſt. ergo & MG eſt rationalis; & ipſi ML, hoc eſt ipſi DE commenſurabilis longitudine. incommenſura-
13. huius: bilis igitur eſt DM ipſi MG, & ſunt rationales. quare DM MG rationales ſunt potē-
37. huius. tia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendēdum
Ex lem. ad eſt & ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora ſunt eo, quod bis
61. huius. AC CB continetur, erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. er
1. sexti go & recta linea DM maior eſt ipſa MG. Quòd cum quadratum ex AC quadrato
14. quinta. ex CB ſit commenſurabile, & DH parallelogrammum parallelogrammo KL commenſurabile erit. quare & DK commenſurabilis ipſi KM: atque eſt quod DK KM cō
19. huius. tinetur quadrato ipſius MN æquale. ergo DM plus poteſt, quàm MG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. eſtq; MG commenſurabilis longitudi-
2. diffi. ſecūdarum. ne ipſi DE. quare DG ex binis nominibus eſt ſecunda.



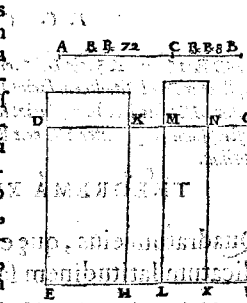
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 48 *plus* RR 27, *et DE* 4; *erit DH* R 48, *KL* R 27, *MX, et NF* 6. *ergo ſi ad DE applicetur DH, faciet DK* R 3 *ex 2 theoremate iam dicto, et eadem ratione ſi ad eandem applicetur KL, erit KM* R $1\frac{11}{16}$ *et ſi applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG* $1\frac{1}{5}$ *et quoniam DK KM hoc eſt* R 3, R $1\frac{11}{16}$ *longitudine cōmenſurabiles ſunt, ſi inter ſe componantur, erit ex tertio theoremate eorum, quae nos ad 20 huius appoſuimus, DM* R $9\frac{1}{16}$ *ergo tota DG eſt* R $9\frac{1}{16}$ *plus 3 videlicet ex binis nominibus ſecunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO LXIII.

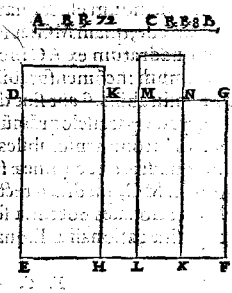
Quadratum eius, quę eſt ex binis medijs ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis medijs ſecunda AB, diuiſa in medias ad C, ita vt AC ſit maior portiō. rationalis autem ſit DE: & ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus tertiam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniā AB eſt ex binis medijs ſecūda, diuiſa ad punctū
39. huius. C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. ergo & compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium eſt,
A & ipſi DL æquale, medium igitur eſt DL, & ad ra-
23. huius. tionalem DE applicatur. ergo rationalis eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione, & MG eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi ML, hoc eſt ipſi DE. vtraque igitur ipſarum



DM

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine, vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incommensurabile ipsi MB. et ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: suntq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendū est eā tertiā esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. atque est rectangulum DKM quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest quàm MG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertia.



1. sexti, uel ex lemm. ad 23. huius: B

1. sexti. & 10. huius.

37. huius.

19. huius.

3. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo et compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] *Ex duobus enim medijs commensurabilibus, si inter se componantur, vnum fit medium, vt in 45 huius diximus.* A

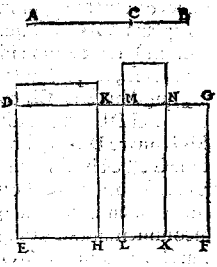
Ergo et compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis A B C CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum commensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectangulo ACB est incommensurabile, vt pote eius duplum. ergo ex 15. quæ nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.*

Sit AB RR 72 *plus* RR 8, *et DE* 4. *erit DH* R 72, *KL* R 8, *MX, vel NF* R 24. *quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R 4 $\frac{1}{2}$: *si vero applicetur KL faciet KM* R $\frac{1}{2}$. *et si MX, vel NF faciet MN, vel NG* R 1 $\frac{1}{2}$. *At si DK KM componantur, hoc est* R 4 $\frac{1}{2}$ & R $\frac{1}{2}$ *fiet DM* R 8. *tota igitur DG est* R 8 *plus* R 6, *quæ est ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIIII.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB, diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quā CB: rationalis autem quædam sit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartā esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam maior est AB, diuisa in C, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DC longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalē ML est applicatum; erit et MG rationalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est; ac propterea DM MG rationales



40. huius.

21. huius.

23. huius.

37.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex duobus nominibus eſt DG. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim ſuperioribus cõcludemus DM maiorem eſſe, quàm MG: et rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incõmenſurabile eſt quadrato ex CB, erit et DH parallelogrammum incõmenſurabile parallelogrãmo KL. et ob id recta linea DK ipſi KM incõmenſurabilis. ſi aũt ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ergo DM plus poteſt, quàm MG, quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; D M MG rationales potentia ſolum commenſurabiles: atque eſt DM commenſurabilis expoſitæ rationali DE. quare DG eſt ex binis nominibus quarta.

1.ſexti & 20. huius.

19 huius.

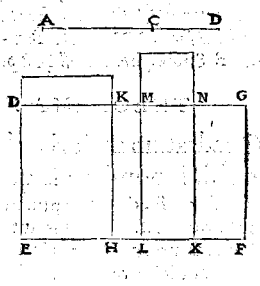
4.diffi.ſecũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. 10 plus R 37 ½ plus R V. 10 minus R 37 ½ et DE ſit 5, erit DH 10 plus R 37 ½: KL 10 minus R 37 ½: MX, vel NF R 62 ½: itaque ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciẽs DK, erit DK 2 plus R 1 ½: ſi vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus R 1 ½: & ſi applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG R 2 ½. Quòd ſi componantur DK KM, hoc eſt 2 plus R 1 ½, & 2 minus R 1 ½, fiet DM 4. ergo tota DG eſt 4 plus R 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Sit rationale, ac medium potens A B, diuiſa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC ſit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum DF ad ipſam DE applicetur, latitudinem faciens D G. Dico DG ex binis nominibus quintam eſſe. Conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam rationale, ac medium potens eſt AB, diuiſa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommenſurabiles, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis, erit & parallelogrãmum DL medium: ideoq; recta linea DM rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rationale eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt parallelogrammum MF; erit MG rationalis, & ipſi DE longitudine commenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demõſtrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN eſſe æquale; & DK ipſi KM longitudine eſſe incommenſurabilem. quare DM plus poteſt, quàm M G quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: ſuntq; DM MG rationales, potẽtia ſolum commenſurabiles; & minor MG commenſurabilis eſt ipſi DE lõgitudine. ergo DG eſt ex binis nominibus quinta.

41.huius.

23.huius.

21.huius.

13.huius.

5.diffi ſecundarum.

F. C.

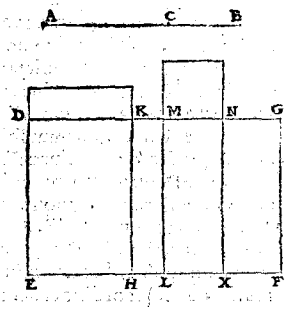
F. C. COMMENTARIVS.

Sit ab R V. R 125 plus 5, plus R V R 125 minus 5; & DE sit 5. erit parallelogrammũ DH R 125 plus 5; KL R 125 minus 5; MX vel NF 10: & si ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudiuem faciens DK, erit DK R 5 plus 1. si vero applicetur KL latitudinẽ faciens KM, erit KM R 5 minus 1. & si applicetur MX uel NF, erit MN, vel N G 2. quòd si componantur DK KM videlicet R 5 plus 1, R 5 minus 1, fiet DM R 20. tota igitur DG est R 20 plus 4. nimirum ex binis nominibus quinta.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens A B, diuisa ad punctum C: rationalis autem sit D E: & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus sextam esse. Construantur enim eadem quę supra. Et quoniam bina media potens est AB, diuisa ad C, erũt AC CB potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis medium: & quod ipsis continetur medium; & adhuc incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum. ergo ex iam demonstratis medium est vtrumque parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata sunt. rationalis igitur est & vtraque DM MG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum AC CB quadratis incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommensurabile: & idcirco DM incommensurabilis MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ex binis nominibus est D G. Dico & sextam esse. similiter enim prædictis rursus ostendemus rectãgulum DKM quadrato ex M N æquale, & DK ipsi KM longitudine incommensurabilem esse. ergo DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine: & neutra ipsarum DM MG longitudine commensurabilis est expositę rationali DE. quare DG ex binis nominibus est sexta.



42. huius.

23. huius.

19. huius.

4. diffi. sectadarum.

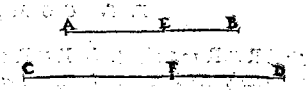
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. R 252 plus R 72, plus R V. R 252 minus R 72: & DE sit 6, erit DH R 252 plus R 72: KL R 252 minus R 72: MX, vel NF R 180. applicetur ad DE parallelogrammũ DH latitudinem faciens D K. erit D K R 7 plus R 2. Rursus applicetur K L faciens latitudinem KM. erit KM R 7 minus R 2. denique applicetur MX, vel NF. erit MN, vel NG R 5. ergo tota DG est R 28 plus R 20 ex binis nominibus sexta.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

Sit ex binis nominibus AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit CD. Dico CD ex binis nominibus esse, & ordine eandem ipsi AB. quoniam enim ex binis nominibus est AB, diuidatur in nomina ad punctum E, & sit AE maius nomen. ergo AE EB rationales sunt potentia solum commensurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur EB ad reliquam FD est, ut AB ad CD. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. ergo & AE ipsi CF, & EB ipsi FD longitudine est commensurabilis. suntq; rationales AE EB. rationales igitur sunt & CF FD. & quoniam est vt AE ad CF, ita EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autem AE EB potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD potentia solum cõmensurabiles erunt. & sunt rationales. ex binis igitur nominibus est CD. Dico & ipsi AB ordine eandẽ esse. uel enim AE plus potest, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. si quidem commensurabilis, & CF plus potest, quàm FD quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit. & ob id vtraque ipsarum A B CD ex binis nominibus est prima; hoc est ordine eadem. Si vero EB sit commensurabilis expositę rationali, & FD eidem erit commẽsurabilis. ob eamq; causſam CD ipsi AB ordine eadem est; vtraque enim est ex binis nominibus secunda. quòd si neutra ipsarum AE EB sit expositę rationali commensurabilis, & neutra CF FD eidem commensurabilis erit; & est vtraque tertia. At si AE plus possit, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis: & si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit, & est vtraque quarta. quòd si EB, & ipsa FD, & est vtraque quinta. si vero neutra ipsarũ AE EB, & neutra CF FD expositę rationali erit cõmensurabilis, & est vtraque sexta. ergo ei, quę est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, & ordine eadem.

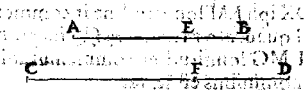


11.sexti. 19.quinti. 10.huius. 8.diffi. 10.huius. 13.huius. 12.huius. 15.huius.

THEOREMA L. PROPOSITIO LXVIII.

Ei, quę est ex binis medijs longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis medijs est, atque ordine eadem.

Sit ex binis medijs AB, & ipsi AB commensurabilis longitudine sit CD. Dico CD ex binis medijs esse, & ipsi AB ordine eandẽ. quoniam enim AB ex binis medijs est, diuisa in medias ad punctum E, erunt AE EB mediæ potentia solum commensurabiles. Itaque fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF. ergo & reliqua EB ad reliquam FD est vt AB ad CD. commẽsurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. quare & AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, & EB ipsi FD. suntq; mediæ AE EB, mediæ igitur & CF FD. Et quoniã est vt AE ad EB, ita CF ad FD, & sunt AE EB commensurabiles potentia solum; erunt & CF FD potentia solum commensurabiles. ostensę autem sunt & mediæ. ergo CD est ex binis medijs. Dico & ipsi AB ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratũ ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex AE ad quadratum ex CF, ita rectangulum AEB ad CFD rectangulum. commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD est commensurabile. si igitur rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit: atque est ex binis medijs prima. est vero medium. est rectangulum AEB



18.huius. 12.sexti. 19.quinti 10.huius. 24.huius.

AEB, & ipsum CFD erit medium: & est vtraque ex binis **medijs secunda**. ergo CD ipsi AB ordine eadem est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim est vt AE ad EB, sic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad re ctangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum C F D] *Nam cum sit ut AE ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1 sexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad FD. sed vt C F ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.* * 11. quinti

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commensurabilis, & ipsa maior est.

Sit maior A B: & ipsi A B commensurabilis sit CD. Dico CD maiorem esse. diuidatur AB in E. ergo AE EB potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis cõtinetur, medium. & fiant eadem, quæ supra. quoniam igitur est vt AB ad CD, ita AE ad CF, & EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commensurabilis autẽ est A B ipsi CD. ergo & vtraque ipsarum AE EB vtrique CF FD est commensurabilis. & quoniam est vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & componendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex A B ad quadratũ ex B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F. similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex C D ad quadratum ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. commensurabile autẽ est quadratum ex A B quadrato ex C D. ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD sunt commensurabilia. atque est compositum ex quadratis ipsarum AE EB rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. similiter aũt & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur. atque est medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD continetur. ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis cõtinetur medium. tota igitur CD irrationalis est, quæ vocatur maior. ergo maiori commensurabilis & ipsa maior est. quod demonstrare oportebat.

10. huius

A B C

F. C. COMMENTARIVS.

Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF] *Ex 22. sexti libri.* A

Similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF] B

Quoniam enim est vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conuersionẽ rationis vt B A ad AE, ita D C ad C F. ergo ut quadratum ex A B ad quadratum ex A E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex CF. 22. sexti.

Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratũ ex CD ad quadrata ex CF FD] *Est enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autẽ* C

ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.

D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 secundi quadratum ex AB est aequale quadratis ex AE EB una cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD est aequale quadratis ex CF FD una cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur sit ut totum ad totum, ita ablatu ad ablatu, videlicet ut quadratum ex AB ad quadratu ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquu ad reliquu, ut totum ad totu; hoc est quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex CD. ergo ex 10 huius & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur.*

E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.]*Ex corollario 24 huius. quare & medium est, quod semel continetur CF FD.*

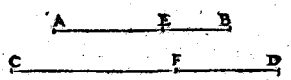
F Ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles] *Vt enim AE ad EB, ita est CF ad FD. sed AE est potentia incommensurabilis ipsi EB. ergo & CF ipsi FD potetia incommensurabilis erit. sunt igitur CF FD potentia incommensurabiles.*

10. huius.

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.

Sit rationale, ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. ostendendum est & CD rationale, ac medium potentem esse. diuidatur AB in rectas lineas ad punctum E. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur rationale. & eadem, quæ prius constituantur. Similiter demonstrabimus CF FD potentia esse incommensurabiles: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD. Quod autē continetur AE EB cōmēsurabile est ei, quod CF FD continetur. ergo & compositum ex quadratis ipsarum CF FD est medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens est CD. quod ostendere oportebat.



40. huius.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.

Sit bina media potens AB, & ipsi AB commēsurabilis CD. ostendendū est CD bina media potentem esse. Quoniam enim bina media potens est AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare AE EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum. & constituantur eadem, quę supra. similiter demonstrabimus CF FD potentia incommensurabiles esse: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commēsurabile composito ex quadratis CF FD. quod autem AE EB continetur commensurabile est ei, quod continetur CF FD. quare & compositum ex quadratis ipsarum CF FD medium est: itemq; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens est CD. quod ostendendum fuit.

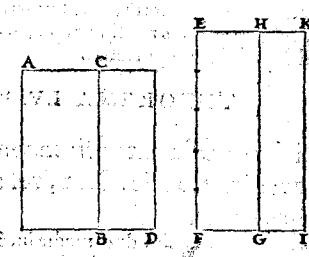
41. huius.

THEO-

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale,& medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea,quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima,vel maior,vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem ſpacium AB, medium autem CD. Dico eam, quę poteſt ſpacium AD, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis medijs primam, vel maiorem,vel rationale, ac medium potentem. etenim AB vel maius eſt, quã CD, vel minus. ſit primum maius, expoſitaq; rationalis EF: & ad ipſam applicetur parallelogrammũ EG ipſi AB æquale, quod latitudinem faciat EH: ipſi vero CD æquale ad EF, hoc eſt ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK. & quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt æquale EG, erit & EG rationale; & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EH. ergo EH eſt rationalis, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt CD, & ipſi eſt æquale HI; erit & HI medium; & ad rationalem EF, hoc eſt HG applicatum eſt, latitudinem faciens HK. quare HK eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi EF longitudine. quòd cum medium ſit CD, rationale autem AB; erit AB ipſi CD incommẽſurabile. ergo & EG incõmenſurabile eſt ipſi HI. vt autem EG ad HI, ita eſt recta linea EH ad HK. ergo EH ipſi HK longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtręq; rationales. quare EH HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibus eſt EK, diuiſa ad punctum H. & quoniam maius eſt AB, quàm CD, æquale autem AB ipſi EG, & CD ipſi HI; erit & EG, quàm HI maius. ergo & EH maior eſt quàm HK. vel igitur EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectæ linæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit maior HE expoſitę rationali EF commenſurabilis. ergo EK ex binis nominibus eſt prima, atque eſt EF rationalis. Si autem ſpacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta linea ſpacium potens ex binis nominibus eſt. ergo quæ poteſt ſpacium EI eſt ex binis nominibus. quare & ea quæ poteſt ſpacium AD. Sed EH plus poſsit, quàm HK, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſit maior EH expoſitę rationali EF commenſurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt quarta, & eſt EF rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ maior appellatur. potens igitur ſpacium EI maior eſt. ergo & potẽs ſpacium AD maior. ſit deinde ſpacium AB minus, quàm CD. erit & EG quàm HI minus; & ob id recta linea EH minor, quàm recta HK. vel igitur KH plus poteſt, quàm HE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis longitudine, & ſit minor EH commenſurabilis expoſitæ rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt ſecunda: rationalis autem EF. quod ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens eſt ex binis medijs primam:



21. huius.

23. huius.

1. ſexti.

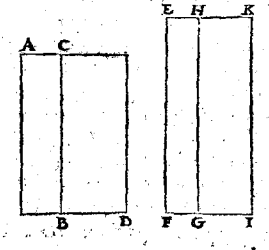
10. huius.

1. Diffi. ſecũdarum.

55. huius.

4. diffi.

58. huius.



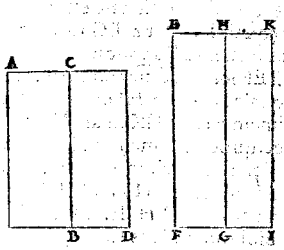
56. huius.

prima. potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs. ergo & potẽs ſpaciũ AD. Sed KH plus poſsit, quàm HE quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine: quare EK ex binis nominibus eſt quinta; atque eſt rationalis EF. ſi autem ſpacium con-
59. huius. tineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea rationale ac medium potẽs eſt. quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale & medium potens eſt; ideoq; rationale & mediũ potẽs eſt quæ pōt ſpaciũ AD. Si igitur rationale, & medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens. quod demonſtrare oportebat.

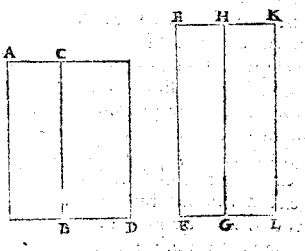
THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens.

Cõponantur enim duo media incõ-
ante. menſurabilia inter ſe AB CD. Dico rectam lineam, quæ ſpaciũ AD poteſt vel ex binis medijs ſecundam eſſe, vel bina media potentem. ſpacium enim AB vel maius eſt, quàm CD, vel minus. ſit primum maius; exponaturq; rationalis EF: & ad EF ſpacio quidem AB æquale applicetur EG, latitudinem faciens EH. ipſi vero CD æquale applicetur HI, latitudinem faciens HK. & quoniam medium eſt vtrumq; ipſorũ AB CD, erit & vtrũq; EG HI medium, & ad rationalem EF applicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E



23. huius. H HK. ergo vtraque EH HK rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. quòd cum AB incõmenſurabile ſit ipſi CD; ſitq; AB quidem æquale EG; CD
1. ſexti. vero ipſi HI: erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile. ſed vt EG ad HI, ita eſt EH ad HK.
10. huius. incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK lõgitudine: ideoq; EH HK rationales sũt
17. huius. potentia ſolum commenſurabiles. quare ex binis nominibus eſt EK. Itaque vel EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali EF. ergo EK ex binis nominibus eſt tertia, & eſt FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis
57. huius. nominibus tertia, recta linea ſpaciũ potens eſt ex binis medijs ſecũda. ergo quę poteſt ſpacium EI, hoc eſt AD eſt ex binis medijs ſecunda. ſed EH plus poſsit quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & vtraque ipſarum EH HK longitudine incõmenſurabilis eſt expoſitę rationali EF. quare EK ſexta eſt ex binis nominibus. At ſi ſpacium contineatur rationali, &
60 huius. ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium poteſt recta linea eſt bina media potẽs. ergo quę poteſt ſpacium AD bina me-



dia

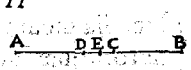
dia potens est. Similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quàm CD, rectam lineam, quæ spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquæ duæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. quod demonstrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt, irrationales neq; mediæ, neque inter se eædem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incommensu- 23.huius.
rabilem. quòd autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum 61.huius.
latitudinem efficit ex binis nominibus primam, quod ab ea, quę est ex binis medijs 62.huius.
prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundâ.
Quod ab ea, quæ est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinẽ 63.huius:
efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum lati- 64.huius.
tudinem efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quæ rationale, ac mediũ 65.huius.
potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam.
Quod ab ea, quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit 66.huius.
ex binis nominibus sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt et à prima & inter se: à prima quidem, quòd rationalis sit; inter se se vero, quod ordine non sint eædem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

SCHOLIUM.

Septem sunt senarij, de quibus hactenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium: secundus autem diuisionem, nempe quòd ad vnum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primę, secundę, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextę. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæ lineæ inter se differant. namque vsus ijs, quæ ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quę ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorũ spaciorũ. In sexto aũt quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media sumitur proportionalis inter portiones cuiusque lineę irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipsa eiusdem speciei cũ ijs, inter quarũ portiones media interijcitur. itaq primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet.

Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quàm CB. auferatur à recta linea AC ipsi BC æqualis AD, & CD bifariam in E secetur. constat igitur AE ipsi EB æqualem esse. ponatur alterutri ipsarum æqualis FG. manifestum est quo differt AC ab ipsa FG, eo differre EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine EC: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmeticæ analogiæ proprium. cõmensurabilis autem est FG ipsi AB; est enim eius dimidię æqualis. ergo FG ex bi- 67.huius.
nis nominibus est. similiter ostenditur & in alijs.



PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM

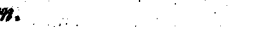
PER APHAERESIM HOC EST

Per detractionem.

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſura bilis exiſtẽs toti, reliqua irrationalis eſt. vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur B C, potentia ſolum cõmenſurabilis exiſtens toti. Dico reliquã AC irrationalem eſſe, quæ vocatur apotome. Quoniã enim incommenſura-



A bilis eſt AB ipſi BC longitudine; atq; eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id quod continetur AB BC: erit quadratũ ex AB incommenſurabile ei, quod AB BC continetur. ſed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt quadrata ex AB B C: ei vero, quod continetur AB BC, commenſurabile eſt quod bis AB BC contine-
B tur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſu-
C rabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommenſurabilia ſunt quadrata ex
D AB BC; quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC contine-
E tur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem ſunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem apotome.

F. C. COMMENTARIVS.

A Atque eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. ſexti, vel ex lemmate, quod 23 huius inſeruit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia] *Ex demonſtratis à nobis ad 14 huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC] *Ex demonſtratis ad 17 huius.*

D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC cõtinetur, vnà cum quadrato ex AC] *Ex ſeptima 2 libri.*

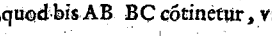
E Ergo recta linea AC eſt irrationalis] *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommenſurabilia ſunt quadrato ex AC, & ſunt quadrata ex AB BC rationalia, ſequitur quadratum ex AC irrationale eſſe, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC eſſe irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC ℞ 3, erit AC 2 minus ℞ 3, reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quæ eſt ex binis nomibus, de qua in 37 huius agitur; & BC reſpondet minori. atque eſt AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem mediæ apotome prima.

A media enim AB auferatur media BC, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi AB, & cum ea rationale faciens, videlicet quod AB BC continetur. Dico reliquam AC irrationalẽ eſſe. vocetur autem mediæ apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ ſunt.



A erunt & quæ ex AB BC quadrata media. rationale autem eſt quod bis continetur

AB

AB BC quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis AB BC continetur, quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Irrationalis igitur est AC. vocetur q; media apotome prima. B C D

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem est, quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod semel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis A B BC continetur] *Namque ex 7 secundi quadrata ex AB BC sunt aequalia ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex AC.* B

Quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis] *Ex 17 huius.* C

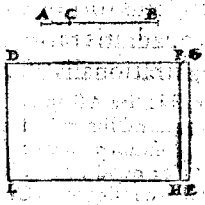
Irrationalis igitur est AC] *Nam cum id, quod bis AB BC continetur sit rationale, & incommensurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcircoq; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.*

Sit recta linea AB ℞ 54, BC ℞ 24. erit AC ℞ 54 minus ℞ 24. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae est ex binis mediis prima, de qua in 38 huius, & BC minori, est igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracto. D

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome secunda.

A media enim AB auferatur media BC potẽtia solum commensurabilis existens toti AB, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome secunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG: ei vero quod bis AB BC continetur æquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC. & quoniam media sunt, quæ ex AB BC quadrata; erit & parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. ergo DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam medium est quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB BC medium: atque est æquale parallelogrammo DH. ergo & DH est medium, & ad rationalem DI applicatum est latitudinem faciens DF. rationalis igitur est DF, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. & quoniam AB BC potentia solum cõmensurabiles sunt, erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine. ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidẽ ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata; ei vero, quod AB BC continetur commensurabile est id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum autem DE est æquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale est ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipsi DH est incommensurabile, sed vt DE



A B C D E Coroll. 26 huius. F

1. sexti. 10. huius. ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longitudine. & sunt vtraque rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum cõmensurabiles. ergo FG apotome est; & DI est rationalis. quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis. G H K sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC est irrationalis. vocetur autem mediæ apotome secunda.

F. C. COMMENTARIVS.

A Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC] *Ex 7 secundi libri.*

B Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

C Erit & quod bis continetur AB BC medium] *Ex corolario 24 huius.*

D Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur] *Est enim vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC longitudine sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur; ex 10 huius.* Lemma. ad 23. huius.

E Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata] *Nam rectae lineae AB BC potentia commensurabiles ponuntur.*

F Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

G Ergo FG apotome est] *Ex 74 huius.*

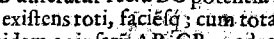
H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Ex scholio ad 39 huius apposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.*

K Ergo AC est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB R R 18, BC R R 8. erit AC R R 18 minus R R 8. respondet autem ipsa AB maiori nomini eius, quae est ex binis mediis secunda; & BC respondet minori. de qua in 39 huius.

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est. vocetur autem minor.



A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommensurabilis existens toti, faciẽsq; cum tota AB compositum quidem ex ipsarũ AB CB quadratis rationale; quod autem bis AB BC continetur medium. Dico reliquam AC irrationalem esse, quę vocatur minor. Quoniam enim cõpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est: quod autem bis AB BC continetur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia. sed quadrata ex AB BC rationalia sunt. irrationale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irrationalis. vocetur autem minor. A B C

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

B Irrationale igitur est quadratum ex AC] *Ex 10 diffinitione.*

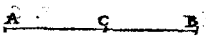
C Ideoq; recta linea AC est irrationalis] *Ex vndecima diffinitione.*

Sit AB R V. 32 plus R 704, BC R V. 32 minus R 704. erit AC R V. 32 plus R 704 minus R V. 32 minus R 704. respondet autem AB maiori nomini eius, quae dicitur maior, & BC respondit minori nomini eiusdem; de qua in 40 huius.

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est; vocetur que cum rationali medium totum efficiens.



A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur 17. huius quadratum ex AC incommensurabile est ei, quod bis continetur AB BC. atque est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale est: & 10. diffi. ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aũt cũ rationali medium totum efficiẽs.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB Rx V. Rx 13 ½ plus Rx 4 ½: BC Rx V. Rx 13 ½ minus Rx 4 ½, erit AC Rx V. Rx 13 ½ plus Rx 4 ½ minus Rx V. Rx 13 ½. minus Rx 4 ½, respondetq; AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis cõtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiẽs.

A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potẽtia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; cõpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis mediũ; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis D I: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam D I applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens D F. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex A C. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaque quoniam cõm positum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammo DE æquale, erit ipsum DE medium: & ad rationalẽ D I applicatũ est, latitudinẽ faciẽs DG. quare D G est rationalis, & ip 23. huius. si D I longitudine incõmensurabilis. Rursus qm̃ id quod bis AB B C cõtinetur mediũ est, & æquale parallelogrãmo DH, erit DH mediũ, & ad rationalẽ D I applicatũ

23.huius: est, latitudinem faciens DF. ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incõmensurabilis longitudine. Quòd cum quadrata ex A B BC incommensurabilia sint ei, quod bis AB
1.sexti. BC continetur, & parallelogrãmum DE ipsi DH est incommensurabile. vt autem
10.huius. DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incõmensurabilis igitur est DG ipsi DF, & sunt vtrèque rationales. ergo GD DF rationales sunt, potentia solum cõmen
A surabiles. apotome igitur est FG: & FH est rationalis. quod autem rationali, & apo
B toma continetur rectangulum irrationale est, ipsumq; potens est irrationalis. sed A
C C potest parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens,

F. C. COMMENTARIVS.

A Apotome igitur est F G] *Ex 74 huius.*

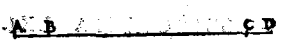
B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale est] *Etenim in scholio ad 39 huius appositio demonstratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse.*

C Ipsumq; potens est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*
Sit AB Ɽ V. Ɽ 13 ½ plus 3, BC Ɽ V. Ɽ 13 minus 3. erit AC Ɽ V. Ɽ 13 ½ plus 3 minus Ɽ V. Ɽ 13 ½ minus 3. & respondet AB maiori nomini eius, quae uocatur bina media potens; & BC respondet minori, de qua in 42 huius.

THEOREMA LXII. PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia solum cõmensurabilis existens toti.

A Sit apotome A B: congruens autem ipsi sit BC. ergo AC CB rationales sunt potẽtia solum commensurabiles. Dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ



potentia solum sit comensurabilis toti. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC
B CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraque enim excedunt eodem quadra
C to, quod fit ex AB. & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC
D CB continetur. sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtraque rectarum linearum rationalis est. quod igitur bis continetur AD
E DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non potest; vtraq;
F enim media sunt. medium autem medium non superat rationali. ergo rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. vna igitur tantum ipsi congruit.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 74 huius.*

B Vtraque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] *Quadrata enim ex AD DB aequalia sunt ei, quod bis AD DB continetur vna cum quadrato ex AB, ex 7 secundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB sunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vna cum quadrato ex AB.*

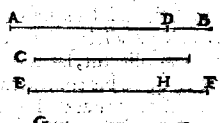
C Et permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC C B] *Hoc sequenti lemmate demonstrabimus.*

LEMMA

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.

Sit enim DB exceſſus, quo AB excedit C: & HF exceſſus quo EF excedit G. erunt DB HF æquales; itemq; æquales inter ſe AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem exceſſu, quo C ipſam G. & additis vtrinque æqualibus DB HF, excedet AB ipſam EF, vel ab ea excedetur eodem exceſſu, quo AD ipſam EH, hoc eſt quo C ipſam G. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.



Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali] *Rationale enim non ſuperat rationale, niſi rationali. quod nos ad 27 huius demonſtrauimus.* D

Vtraque enim media ſunt] *Nam quod rationalibus potentia ſolũ commenſurabilibus continetur rectangulum irrationale eſt, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediũ igitur eſt id, quod continetur AD DB; & ideo medium quod bis continetur AD DB, vt pote eius duplum ex corollario 24 huius. eadem ratione & medium eſt, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non ſuperat rationali] *Ex 27 huius.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipſi AB cõgruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quę rationale continent. Dico ipſi AB alteram non congruere mediam, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodẽ & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim rurſus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. ſed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraque enim rationalia ſunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nõ poteſt; vtraque enim ſunt media. medium autem medium non ſuperat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quę potentia ſolum toti ſit commẽſurabilis, & cum tota rationale contineat.

75 huius.

7. ſecundi.

Ex antecedẽti lemmate.

Ex demonſtratis ad 17. huius.

27. huius.

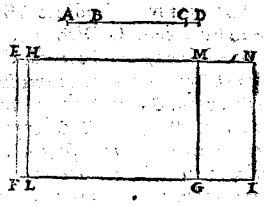
THEOREMA LXIIII. PROPOSITIO LXXXII.

Medię apotomæ ſecundę vna tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipſi AB alteram

76. huius.

alteram non congruere mediam quæ potentia ſolum ſit cõmenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ADB continent: & expo natur rationalis EF: quadratiſq; ex AC C B æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens E M, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur EL eſt æquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL æquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniã mediæ ſunt AC CB, erunt & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam mediũ eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt æquale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC in commenſurabilis ipſi CB longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod continetur AC CB. incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex AC ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB; ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt, quod bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommẽſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atque eſt quadratis ex AC CB æquale parallelogrammum EG; ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt incommenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt vtræque rationales. ergo EM MH rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EH; & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo mediæ apotomę ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.



23. huius.

23. huius.

Ex lemm. ad 23. huius.

Ex demonſtratis in 14. huius.

1. sexti.

10. huius.

74. huius.

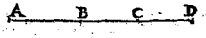
Ex 80. huius

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis continetur mediũ.

77. huius.

Sit minor A B, & ipſi A B congruat B C. ergo A C C B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium.



Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quę eadem faciat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem

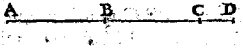
Ex lemmate ad 80. huius

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. quod fieri non potest. etenim vtraque sunt media. ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cū tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod vero bis ipsis continetur medium. 27 huius.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIIII.

Ei, quæ cū rationali mediū totū facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipsi BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Dico ipsi AB alterā non congruere eadem facientem. si enim fieri potest, congruat. BD. ergo AD DB potētia sunt incōmensurabiles, facientes cōpositum quidem ex ipsarū AD DB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo ex excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur: quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedēt quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraque sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis cōtinetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea.

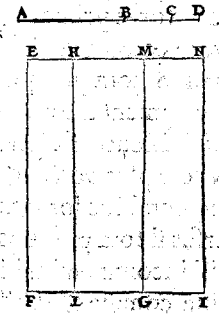


78. huius.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quę cum medio mèdium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

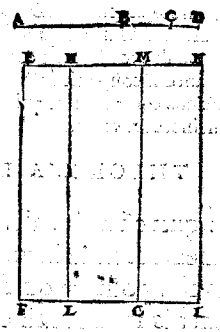
Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incōmensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ proposita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommensu



79. huius.

rabiles

rabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & incomensurabile composito ex quadratis ipsarum. & exponatur rationalis EB, & quadratis ipsarum AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinē facens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB æquale parallelogrammum auferatur H G, latitudinem faciens H M. reliquum igitur quadratum ex AB est æquale parallelogrammo E L. ergō AB ipsum EL pōt. rursus quadratis ex A D D B æquale parallelogrammum EI ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E N. est autem & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipsi H I est quale, & quoniam compositum ex quadratis AC CB medium est, & æquale parallelogrāmo E G, erit & E G medium, quod ad rationalem EF applicatum est, latitudinem



23. huius. faciens EM. quare EM est rationalis, & ipsi EF longitudine incommēsurabilis. Rursus quoniam quod bis AC CB continetur est medium, & æquale ipsi H G, erit & HG medium, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM. rationalis igitur est H M, & ipsi E F incommensurabilis longitudine. quòd cum quadrata ex AC CB incommensurabilia sint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC in-

10. huius. commensurabile ipsi GH; ideoq; recta linea EM rectæ MH longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræque rationales. cum igitur EM MH rationales sint, potē-

74. huius. tia solum commensurabiles, recta linea EH apotome est, & ipsi congruens HM. similiter demonstrabimus EH rursus apotomen esse, ipsiq; congruentem H N. ergo

99. huius. apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ipsi A B altera congruet recta linea, quare vna tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1 Exposita rationali, & apotoma, si quidē tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; sitq; tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit; quàm congruens quadrato rectę lineæ sibi cōmensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

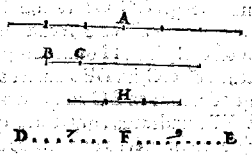
3 Quòd si neutra sit longitudine commensurabilis expositę rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

4 Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

Si vero congruens expositę rationali sit longitudine commen- 5
surabilis, vocetur apotome quinta.

Quòd si neutra, dicatur apotome sexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit BC. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE, EF, quorum excessus DF nō sit quadratus, neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commē surabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC; rationale autē est quadratū ex BC. ergo & quadratum ex GC est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. *incommensurabilis* igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. Dico & primam esse. sit enim quadratum ex H id, quo quadratū ex BG plus potest, quàm quadratum ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est BG ipsi H lōgitudine. & BG plus potest, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poterit, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BG expositę rationali A commensurabilis lōgitudine. ergo BG apotome est prima. Inuēta igitur est prima apotome. quod facere oportebat.

6. diffi.

Coroll. 1. lē. ad 30. huius

9. huius.

74. huius.

9. huius.

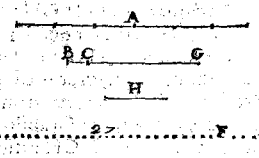
3. diffi. tertium.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4. numerus autem DE sit 16, EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC ℞ 7. ergo BC est 4 minus ℞ 7, quae est apotome prima.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

Inuenire secundam apotomen.

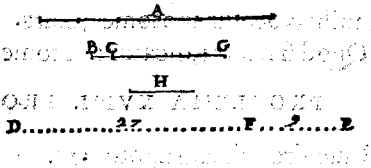


Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri quadrati D E EF, quorū excessus DF, nō sit quadratus fiatq; vt F D ad D E, ita quadratum ex CG ad quadratum ex G B. commensurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex G B. sed quadratum ex

6. Diffi.

Corol. 1. lemma ad 30. huius.

CG est rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB; ac propterea ipsa GB est rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum,



9.huius. erit CG ipsi GB incommensurabilis longitudine; & vtræque sunt ra-
74.huius. tionales. ergo CG GB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, & ob id B C est apotome. Dico & secundam esse. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, sit ex H quadratum. Quoniam igitur est vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuersionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque est vterque ipsorum DE EF quadratus. quadratū igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipsi H longitu-
9. huius. dine est commensurabilis. & plus potest BG, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quam GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens CG, expositæ rationali A commensurabilis longitudine. ergo B
23.diffi. C apotome est secunda. Inuenta igitur est secunda apotome BC. quod facere oportebat.

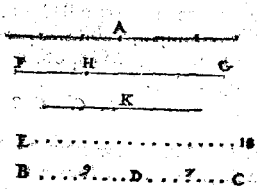
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE sit 36, & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GE est Ɐ 12, & EC Ɐ 12 minus 3, quae est apotome secunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis A, & exponātur tres numeri E BC CD non habentes inter se proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus
Corol.6.huius. ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad
6.huius. quadratum ex GH. commēsurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex FG. atque est quadratum ex A rationale. ergo & rationale est quadratum ex FG; ac propterea recta li-



nea FG est rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. in
9.huius. cōmensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus qm̄ est vt BC ad CD, ita
6.huius. quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commensurabile. rationale autē est quadratum ex FG. ergo & quadratū ex GH est rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quòd cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratū ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad
9.huius. quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo FG GH rationales sunt potentia solum commensu-
74.huius. rabiles; ac propterea apotome est FH. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt E

quidem

quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerū. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH expositę rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex FG plus potest, quàm quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine. & plus potest FG, quàm GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longitudine commensurabilis est expositę rationali A. quare FH apotome est tertia. Inuenta igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat. 9. huius. 9. huius. 33. diff.

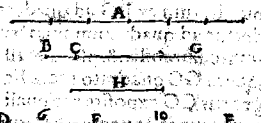
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7. erit BD 9. fiat vt 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est ℞ 32. rursus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium. erit ad 14 quare GH est ℞ 14 & FH ℞ 32 minus ℞ 14, quae est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.

Exponatur rationali A: & ipsi A longitudine commensurabilis sit BC. ergo BC est rationalis. exponantur præterea duo numeri D F FE, ita vt totus DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat vt DE ad EF, ita quadratum ex BC ad quadratum ex GC. commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC. est autem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratū ex GC; ideoq; recta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BC ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est BC. Dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG, quàm GC, fit quadratum ex H. & quoniam est vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi H longitudine: & plus potest BG, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est tota BG commensurabilis expositę rationali A. ergo BC apotome est quarta. Inuenta igitur est quarta apotome BC. quod facere oportebat.



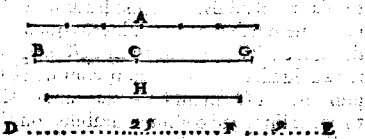
6. huius. 9. huius. 74. huius. 4. diff. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; si fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC R 10 & BC 4 minus R 10, quae est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem rursus nō habeat, quā numerus quadratus ad quadratū numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB. est autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB: & idcirco recta linea GB est rationalis. & quoniam vt DE ad EF, ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC: & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. Dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG, quàm quadratum ex GC, sit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF, erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratū. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine. atque est congruens CG expositę rationali A longitudine commensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuenta est igitur quinta apotome BC. quod facere oportebat.

6. huius.

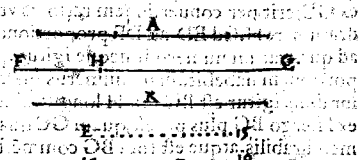
9. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF sit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG, quod est 9 ad alium, erit BG R 34, & BC R 34 minus 3, quę est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO XCI.

Inuenire sextam apotomen.



Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter se, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. & fiat vt E ad BC, ita quadratū ex A ad quadratū ex FG: ut aūt BC ad CD, ita quadratū ex FG ad quadratū ex GH. qm igitur est vt E ad BC ita, quadratū ex A ad quadratū ex FG; erit quadratum ex A quadrato ex FG cō

6. huius.

mensurabile.

mensurabile. rationale autem est quadratum ex A. ergo & quadratum ex F G ratio nale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem nō habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommēsurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quo niam est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum ex FG commensurabile quadrato ex GH. est autem quadratum ex FG rationale. ra tionale igitur est & quadratum ex GH; & ipsa GH rationalis, quòd cū BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerū; ne que quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam nume rus quadratus ad quadratum numerum. ergo F G ipsi G H longitudine est incom mensurabilis: & sunt vtræque rationales. quare FG GH rationales sunt potentia solum commēsurabiles, & FH apotome est. Dico & sextam esse. Quoniam enim est vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita qua dratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quā numerus qua dratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numetum. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabiliis: & neutra ipsarum FG GH ex positæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo igitur plus potest quadra tum ex FG, quàm quadratum ex GH, sit quadratum ex K. & quoniam est vt BC ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit *per conuersionem rationis* vt CB ad BD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K. at C B ad B D proportio nem non habet, quam *numerus quadratus ad quadratum numerum*. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus qua dratus ad quadratum numerum. ergo incommensurabilis est FG ipsi K longitudi ne. & FG plus potest, quā GH quadrato ex K. plus igitur potest FG, quàm GH qua drato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum FG GH est commensurabilis longitudine expositæ rationali A. ergo FH apotome est sexta. Inuenta est igitur sexta apotome F H. sed & expeditius sex dictarum linearum in uentionem ostendere licet.

9 huius. 6. huius. 9. huius. 74. uuius. 9 huius. 6. tertiarum diffi.

Si enim oporteat inuenire primam apotomē, exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius maius nomē sit AB. & ponatur B D ipsi B C equa lis. ergo AB BC, hoc est AB BD rationales sūt, potentia solum commensurabiles: & AB plus potest, quàm BC, hoc est quàm B D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & AB est commensurabi lis lōgitudine expositæ rationali. apotome igitur prima est AD. similiter & reliquas apotomas inueniemus, eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

F. C. COMMENTARIVS.

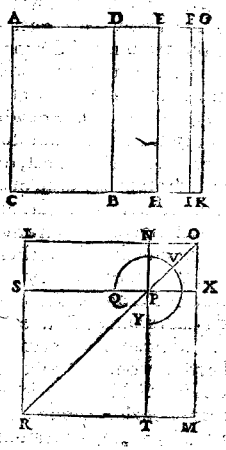
Sit A 6. numerus autem E sit 15, *BC* 25, *& CD* 10. *fiat igitur ut* 15 *ad* 25, *ita* 36 *ad alium, erit ad* 60. *Rursus fiat ut* 25 *ad* 10, *ita* 60 *ad alium, erit ad* 24. *ergo F G est* R 60, *& G H* R 24. *at proptereà FH est* R 60 *minus* R 24, *quę est apotome sexta.*

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si spacium cōtineatur rationali, & apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Contineatur

Contineatur enim ſpacium AB rationali AC, & apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium AB apotomen eſſe. Quoniã enim AD prima apotome eſt, ſit ipſi congruens
1. diffinitia rum. DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & tota AG longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC. & præterea AG plus poteſt, quam GD quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, æquale parallelogrammũ ad AG applicetur, de-
18. huius: ficiens figura quadrata, in partes longitudine cõmenſurabiles ipſam diuidet. ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. commenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine: & per E F G puncta ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. & quũ AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabi-
16. huius. lis, erit & tota AG vtrique ipſarum AF FG cõmenſurabilis longitudine. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AC. vtraque igitur AF FG ipſi AC longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt AC rationalis. ergo & rationalis vtra-
20. huius. que AF FG; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK eſt rationale. &
16. huius. quoniam DE ipſi EG longitudine eſt commenſurabilis, erit & DG vtrique DE EG commenſurabilis longitudine: eſtq; rationalis DG, & ipſi AC longitudine incõmenſurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & incommenſurabilis ipſi AC
14. huius. 22. huius. longitudine: & ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium eſt. ponatur ipſi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LO.
26. sexti. M. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectãgulum AFG eſt æquale quadrato ex
14. sexti. EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. ſed vt AF ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK. & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipſum KF. parallelogrammorum igitur AI KF medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN, vt ſuperius oſtenſum eſt. parallelogrammumq; AI eſt æquale quadrato LM; & parallelogrammum KF quadrato NX æquale. ergo & parallelogrammum MN eſt æquale ipſi EK. ſed parallelogrammum quidem EK eſt æquale parallelogrammo DH, parallelogrammum vero MN ipſi LX. & parallelogrammum igitur DX eſt æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. eſt autẽ & parallelogrãmũ AK quadratis LM NX æquale. ergo & reliquũ AB eſt æquale quadrato ST. at quadratũ ST eſt id, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN eſt æquale parallelogrammo AB; ideoq; recta linea LN ipſum AB poteſt. Dico LN apotomen eſſe. Quoniam enim rationale eſt vtrumque parallelogrammorum AI FK, & ſunt æqualia quadratis LM NX, erit & vtrumque LM NX rationale; hoc eſt vtrumque ipſorum, quæ fiunt ex LO ON; & vtraque igitur LO ON rationalis eſt. rurſus
10. huius: Qm̃ medium eſt parallelogrammum DH, atque eſt æquale ipſi LX, erit & LX medium. cũ igitur LX quidẽ medium ſit, NX vero rationale, incõmenſurabile eſt LX ipſi NX, vtrq; LX ad XN, ita eſt recta linea LO ad ON. ergo LO ipſi ON longitudine eſt
74. huius. incommenſurabilis. & ſunt vtreque rationales. quare LO ON rationales ſunt potẽtia ſolum commenſurabiles. & idcirco apotome eſt LN; & ſpacium AB poteſt. quę igitur poteſt ſpacium AB eſt apotome. ergo ſi ſpacium contineatur rationali, & apotoma prima, recta linea ſpacium potens apotome eſt.

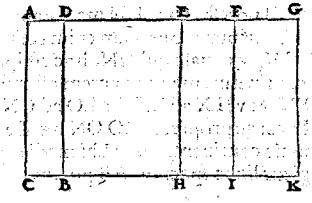


F. C. COMMENTARIVS.

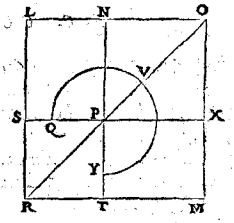
Sit AC 6, AD 7 minus R 13. *erit DG* R 13, *& DE, uel EG* R 3 $\frac{1}{4}$. *quòd ſi ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipſius EG, deficiens figura quadrata, erit ex demonſtratis ad 18 huius AF* 6 $\frac{1}{2}$ *FG* $\frac{1}{2}$. *ergo parallelogrammum AI eſt 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum uero DK eſt* R 468, *DH, uel EK* R 117, *EI* R 117 *minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB eſt 42 minus* R 468. *Huiuſmodi autem ſpacium iuniores etiam apotomen primam, uel reſiduum primum appellare conſueuerunt, cuius latus quadratum, uel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum eſt in ſpacijs binomialibus, præterquã quòd loco uocis plus, utemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes; ita ut quod ex ipſis producitur, ſit aequale quartæ parti 468, hoc eſt 117. erit maior pars 39, minor 3 : ideoq;* R 39 *minus* R 3 *erit latus quadratum, uel radix huius ſpacij reſidui 42 minus* R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſecunda, recta linea ſpacium potens mediæ eſt apotome prima.



2. diffi. tertiarum.



18. huius.

Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AB poteſt mediæ apotomen eſſe primam. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG, GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & congruẽs DG commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC; totaq; AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ipſius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E: & quadrato ipſius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. ergo commenſurabilis eſt AF ipſi FG longitudine; & per puncta EFG ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabilis, erit AG vtrique ipſarum AF FG commenſurabilis longitudine. rationalis autem eſt AG, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis. ergo & vtraque AF FG eſt rationalis, ipſiq; AC incommenſurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium eſt. Rurſus quoniam DE commenſurabilis eſt ipſi EG, erit & DG vtrique DE EG commẽſurabilis. ſed DG commenſurabilis eſt ipſi AC longitudine, ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammorum DH EK eſt rationale. conſtituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum ſunt quadrata LM NX. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media ſint, & ſibi ipſis commenſurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON medię sũt, potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam rectangulum AFG eſt æquale quadrato

16. huius.

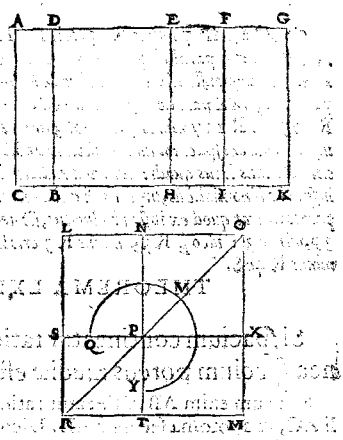
22. huius.

16. huius.

20. huius.

16. ſext.

14. sexti. drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallelogrãmum AC ad ipsum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK mediũ proportionale est EK. est autẽ & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidẽ est æquale quadrato LM; parailelogrãmum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipsi EK est æquale. sed DH est æquale EK, & LX ipsi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX æquale erit. itaq; quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ; & quadrato NX, erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est ei, quod fit ex LN. quadratũ igitur ex LN est æquale spacio AB; ideoq; recta linea LN spacium AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse primam. quoniam enim rationale est EK, & æquale ipsi MN, hoc est ipsi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem ostensum est NX. quare LX est incommensurabile ipsi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine sunt incommensurabiles; ac propterea LO ON mediæ sunt commensurabiles potentia solum, quæ
75. huius rationale continent. quare LN mediæ apotome prima est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens mediæ est apotome prima.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 4, & AD Ɽ 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata: erit AF Ɽ 27, FG Ɽ 3. & ob id parallelogrammum AI Ɽ 432, FK Ɽ 48, & totum AK parallelogrãmum Ɽ 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus Ɽ 48. ergo AB est Ɽ 768 minus 24, quod spacium etiam apotomen secundam, vel residuum secundum vocãt. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur Ɽ 768 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit aequale quartae parti quadrati 24, hoc est aequale 144, erit maior pars Ɽ 432, minor Ɽ 48. quare ƊƊ 432 minus ƊƊ 48 est latus quadratum, seu radix eius spacij residui Ɽ 768 minus 24.

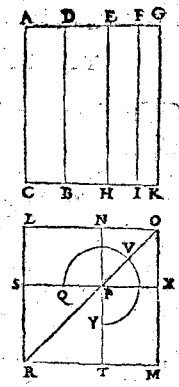
THEOREMA LXX. PROPOSITIO XCIIII.

Si spacium cõtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spacium potens mediæ est apotome secunda.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectã lineam, quæ potest spacium AB, medlæ esse apotomen secundam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt, potẽtia solum commensurabiles, & neutra ipsarum A G GD longitudinę commensurabilis est expositæ rationali AC, totaq; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ipsius DG æquale parallelogrãmum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E, & quadrato ipsius EG æquale ad
18. huius. AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG: & per puncta EFG

ipsi

ipſi AC parallelę ducantur EH FI GK. ergo AF FG commenſurabiles ſunt: atque ob id parallelogrammũ AI parallelogrammo FK eſt commenſurabile. & quoniã AF FG commenſurabiles ſunt longitudine, erit & AG vtrique ipſarum AF FG longitudine commenſurabilis. eſt autem rationalis AG, & ipſi AC incommenſurabilis longitudine. & vtraque igitur AF FG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK eſt medium. Rurſus quoniam DE commenſurabilis eſt ipſi EG longitudine, erit & DG vtrique DE EG cõmenſurabilis. ſed DG rationalis eſt, & ipſi AC incõmenſurabilis longitudine. rationalis igitur eſt & vtraque DE EG, & ipſi AC lõgitudine incommenſurabilis. ergo vtrumque pãrallelogrammorũ DH EK medium eſt. quòd cum AG GD potentia ſolum commẽſurabiles ſint, AG ipſi GD longitudine erit incommẽſurabilis. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AF longitudine, & DG ipſi GE. eſt igitur AF ipſi EG longitudine incommenſurabilis. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum. ergo incõmenſurabilis eſt AI ipſi EK. conſtituatur ipſi quidem AI æquale quadratum LM; ipſi vero FK æquale auferatur NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. Quoniam igitur rectangulum AFG eſt æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo & vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & parallelogrammum AI quidem æquale eſt quadrato LM; FK vero ipſi NX. ergo & EK eſt æquale MN. ſed MN æquale eſt LX, & EK ipſi DH. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. eſt autem & parallelogrammũ AK æquale quadratis LM NX. ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ST, hoc eſt quadrato ex LN. & ob id recta linea LN ipſum AB ſpacium poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe ſecundam. Quoniam enim media oſtenſa ſunt parallelogramma AI FK, & ſunt æqualia quadratis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcirco vtraque LO ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON commenſurabile. Rurſus quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi EK, & LM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt quadratum ex LO rectangulo LON. quare & recta linea LO ipſi ON longitudine eſt incommenſurabilis. ſunt igitur LO ON mediæ commenſurabiles potentia ſolum. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonſtratum eſt EK, atque eſt rectãgulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quę medium continent; ac propterea LN mediæ apotome ſecunda eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens mediæ apotome eſt ſecunda.



16. huius.
21. huius.
16. huius.
21. huius.
Ex demonſtratis ad 14 huius.
26. ſexti.
14. ſexti.
Lem. ad 23. huius.
76. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

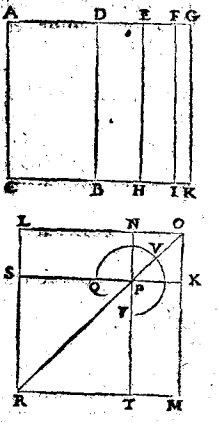
Sit AC 6, & AD R 27 minus R 15. erit DG R 15, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{4}$. quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum aequale quadrato ex EG, deficiens figura quadrata, quod ſit AF G, erit AF R 18 $\frac{3}{4}$, FG R $\frac{1}{4}$. ideoq; parallelogrammum AI eſt R 675, FK R 27, & totum AK parallelogrammum R 972. parallelogrammum autem DK R 540, EK R 135, & EI R 135. minus R 27. eſt igitur AB R 972 minus R 540. quod ſpacium eſt apotome tertia, vel tertium reſiduum. Itaque diuidatur R 972 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit æquale

R 135. *erit maior pars* R 675, *& minor* R 27. *ergo* RR 675 *minus* RR 27 *est latus quadrā tum, vel radix spacij illius residui* R 972 *minus* R 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea spacium potens minor est.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę spacium AB potest, minorem esse. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AG commensurabilis est expositę rationali AC lōgitudine, totaq; AG plus potest, quàm GD, quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Itaque secetur DG bifariā in E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF ipsi FG longitudine est incommensurabilis. Ducantur per puncta EFG ipsis AC BD parallelæ EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rursus quoniam incommensurabilis est DG ipsi AC longitudine, & sunt vtræque rationales, erit parallelogrammum DK medium. quòd cum AF ipsi FG longitudine sit incommensurabilis, erit & parallelogrammum AI incommensurabile parallelogrammo FK. constituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem, quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. itaque quoniā rectangulum AEG est æquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. sed vt AF quidem ad EG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque est parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & EK æquale est MN. sed EK quidem est æquale parallelogrammo DH, MN vero ipsi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX est æquale. & quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est quadrato ex LN. ergo LN spacium AB potest. Dico LN irrationalem esse, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, & æquale quadratis ipsorum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON rationale. Rursus quoniam parallelogrammum DK medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON cōtinetur mediū: est enim aūt est parallelogrāmū AI incōmensurabile ipsi FK. ergo & quadratū ex LO incōmensurabile est quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. quare LN irrationalis est, quæ minor appellatur, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens minor est.



4. diffi. tertarum.
16. huius.
20. huius.
22. huius.
26. sexti.
14. sexti.
77. huius.

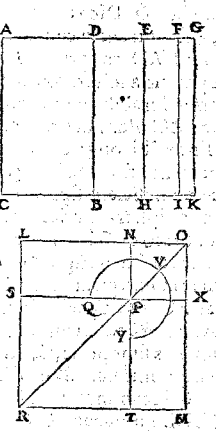
F. C.

Sit AC 6. AD 7 minus R 14. *erit DG* R 14, *& DE, vel EG* R $3\frac{1}{4}$. *Si vero ad AG applicetur parallelogrammum A F G æquale quadrato ipsius E G, deficiens figura quadrata, erit A F* $3\frac{1}{4}$ *plus* R $8\frac{3}{4}$: *FG* $3\frac{1}{2}$ *minus* R $8\frac{3}{4}$, *& parallelogrammum AI est* R 21 *plus* R 315, *FK* 21 *minus* R 315, *& totum AK* 42. *parallelogrammum vero D K est* R 504, *CK* R 126. *& AE* 42 *minus* R 504. *quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum. si igitur* 42 *dividatur in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit æquale quartæ parti* R 504, *hoc est* R 126, *erit maior pars* 21 *plus* R 126, *& minor* 21 *minus* R 126. *ergo* R *V.* 21 *plus* R 126 *minus* R *V.* *minus* R 126 *est latus quadratum, seu radix spacij residui* 42 *minus* R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO. XCVI.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectâ lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens D G. ergo AG GD rationales sunt potentia solum cũmensurabiles; & congruens DG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Itaque secetur D G bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam A G applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit A F G. ergo AF incommensurabilis est ipsi F G longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelæ EH FI GK. & quoniam AG incommensurabilis est ipsi A C lõgitudine, & sunt vtræque rationales; erit parallelogrammum AK medium. Rursus quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Constituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum LM; ipsi vero FK æquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quem LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter ostendemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam DK rationale est, & æquale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi F K. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoque LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsorum quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua L N irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.



19. huius.

22. huius.

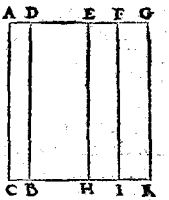
20. huius

26. huius

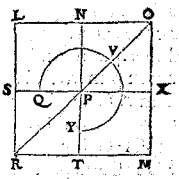
Sit AC 6, AD R 36 *minus* 4, *erit DG* 4, *& DE, vel EG* 2. *quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ex CG, deficiensq́, figura quadrata, erit AF* R 14 *plus* R 10; *FG* R 14 *minus* R 10. *& parallelogrammum AI eſt* R 504 *plus* R 360, *FK* R 504 *minus* R 360: *totumq́, AK* R 2016. *At vero DK eſt* 24, *EK* 12, *& AB* R 2016 *minus* 24. *quod ſpacium eſt apotome quinta, vel reſiduum quintum. Diuidatur* R 2016 *in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit aequale* 144, *erit maior pars* R 504 *plus* R 360, *& minor* R 504 *minus* R 360. *quare* R *V.* R 504 *plus* R 360 *minus* R *V.* R 504 *minus* R 360 *eſt latus quadratum dicti ſpacij reſidui* R 2016 *minus* 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotomą ſexta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.



Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma ſexta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium AB poteſt, eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales
6. diffin. tertiarum. ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC longitudine. totaq́; AG plus poteſt, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. ſi igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale ad rectam lineam AG ap
23. huius. plicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. incommenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine. ut autem AF ad FG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum FK. ergo
10. huius: 11. huius AI ipſi FK eſt incommenſurabile. & quoniam AG AC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit parallelogrammum AK medium. ſunt autem AC DG rationales, & incommenſurabiles longitudine. medium igitur



eſt & DK. quòd cum AG GD potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit AG ipſi GD longitudine incommenſurabilis. ſed ut AG ad GD, ita eſt AK ad KD. incom-
10. huius: menſurabile igitur eſt AK ipſi KD. itaque conſtituatur parallelogrammo AI ęquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale auferatur quadratum NX,
14. ſexti. angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eãdem ſunt diametrum. ſit eorum diameter OR, & figura deſcribatur. ſimiliter vt ſupra, oſtendemus rectam lineam LN ſpacium AB poſſe. Dico LN eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quonã enim medium oſtenſum eſt AK, atque eſt æquale quadratis ipſarum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON medium. Rurſus quoniam medium oſtenſum eſt DK, & eſt ęquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommenſurabile autem oſtenſum eſt AK ipſi KD. ergo & quadrata ex LO ON incommenſurabilia ſunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommenſurabile. ergo LO ON potentia ſolum commenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium. quod autem ipſis bis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſa-
79. huius. rum quadratis, ergo LN irrationalis eſt, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & poteſt AB ſpacium. recta igitur linea ſpacium AB potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.

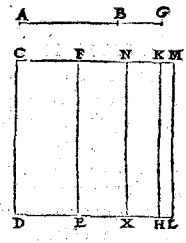
F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD R 32 minus R 20. erit DG R 20, & DE vel EG R 5. si autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, æquale quadrato ex EC, & deficiens figura quadrata, erit AF R 8 plus R 3, FG R 8 minus R 3: & idcirco parallelogrammum AI R 288 plus R 108, FK R 288 minus R 108, & totum parallelogrammum AK R 1152. parallelogrammum vero DK est R 720, DH R 18, & AB R 1152 minus R 720. quod spacium est apotome sexta, vel sextæ residuum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur esse R V. R 288 plus R 108 minus R V. 288 minus R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.



Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinẽ faciens CF. Dico CF apotomen esse primam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rationales sunt potentia solum cõmensurabiles: & quadrato quidẽ ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG æquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB continetur est æquale, secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX: vtrumque igitur ipsorum FX LN est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia sunt, atque est quadratis ex AG GB æquale parallelogrammum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationalẽ CD applicatum est, latitudinẽ faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. Rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG GB, estq; ei, quod bis AG GB continetur, æquale parallelogrammum LF; erit ipsum LF medium: & applicatum est ad rationalem CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB medium. quadrata igitur ex AG GB incommẽsurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. ergo CL ipsi LF est incommensurabile. vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommẽsurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea CF est apotome. Dico & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrãmum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB æquale KF. erit ipsorum CH KL medium proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. vt autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK. & obid rectangulum CKM est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartę parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. sed vt CH ad KL ita est recta linea CK ad ipsam KM. commensurabilis igitur est CK ipsi KM. itaque cum duæ rectæ lineę inæquales sint CM MF, & quartę parti quadrati ex FM æquale parallelogramum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, quod scilicet

74. huius.

7. secundi.

21. huius.

23. huius.

1. sexti.

74. huius.

Lem. ad 55. huius.

11. quinti.

17. sexti.

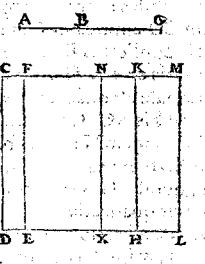
18.huius. scilicet CK KM continetur; sitq; CK commensurabilis ipsi KM: recta linea CM plus
1.diffi. tertiæ huius. poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est CM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF est prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R 33 minus R 3, BG R 3. rationalis autem CD sit 6; & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est 33, latitudinem faciens CK, erit CK 5 $\frac{1}{2}$. & si ad eandem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est 3, latitudinem faciens KM, erit KM $\frac{1}{2}$, & tota GM 6. Rursus si ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod est R 99, latitudinem faciens FN, erit FN R 2 $\frac{1}{2}$, & eadem ratione NM est R 2 $\frac{1}{4}$, & tota FM R 11. ergo CF est 6 minus R 11, quę est apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum mediæ apotomæ primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.



Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autē CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammū CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomē esse secundam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt
73.huius. potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent: & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB mediis existentibus. quare & CL est medium; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem
23.huius. faciens CM. rationalis igitur est CM, & ipsi CD longitudine incommensurabilis, itaque quoniam CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB æquale est parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æqua-
7 secundi. le ipsi FL. est autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur est &
21.huius. FL; & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc est parallelogrammum CL medium est; quod autem bis continetur AG GB, videlicet FL est rationale: erit CL incommensurabile ipsi LF. vt autem CL ad
1.sexti. LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. &
10.huius. sunt vtræque rationales. sunt igitur CM MF rationales potentia solum commensu-
74.huius. rabiles. ideoq; CF apotome est. Dico & secundam esse. secetur enim FM bifariam in puncto N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum
Lem. ad 55. huius. ex AG GB medium proportionale est, quod AG GB continetur; estq; quadratū ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipsi KL: erit parallelogrammorū CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NE ad LK. Sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt
11.quinti. 17.sexti. CK ad NM, ita est NM ad MK; ac propterea rectāgulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex CB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile, hoc est recta linea CK commensurabilis ipsi KM. quod cum

duæ

duę rectæ lineę inæquales sint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æquale parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: atque est congruens FM expositę rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomę primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. 18. huius: 2. Diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

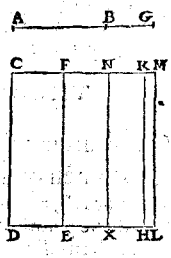
Ex iam demonstratis perspicuum fit, vt apotomę quadratũ inueniamus, nos vti septima propositione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum est.

Sit AB RR 972 *minus* RR 108, *BG* RR 108, *rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est* R 972, *latitudinem faciens CK; erit CK* R 27. *& si ad eãdem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est* R 108 *latitudinem faciens KM; erit KM* R 3. *& tota CM* R 48. *Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX aequale rectangulo AGB, quod est* 18, *latitudinem faciens FN; erit FN* 3, *itemq; NM* 3, *& tota FM* 6. *ergo CF est* R 48 *minus* 6, *quae est apotome secunda.*

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit mediæ apotome secundæ AB; rationalis autem CD & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciẽs CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. secetur FM bifariam in N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam AG GB potentia solum commensurabiles sunt, erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commensurabile est quod bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, sunt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale EL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine; & sunt vtręque rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est CF. Dico & tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB,

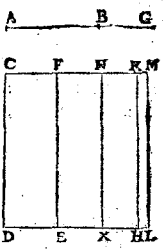


76. huius: 23. huius. 7. secundi. 23. huius. Lem. ad 23. huius. Ex demonstratis in 24 huius. 1. sexti. 10. huius. 74 huius.

erit

erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & recta linea CK est cõmensurabilis ipsi KM. & quoniam quadratorum ex AG GB mediũ proportionale est rectangulũ AGB; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL; erit parallelogrammorum CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK, ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens figura quadrata, quod in partes cõmensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & neutra ipsarum CM MF longitudine commensurabilis est expositæ rationali CD. ergo CF tertia est apotome. quadratum igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.

Lem. ad 55. huius:
1. sexti.
11. quinti.
27. sexti.
18. huius.
8 diffin. tertiarum.



F. C. COMMENTARIVS.

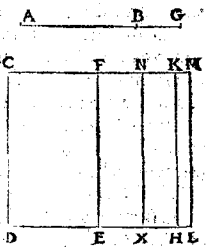
Sit AB RR 882 *minus* RR 18, *BG* RR 18, *& rationalis CD sit 6. quòd si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* R 24 $\frac{1}{2}$. *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM* R $\frac{1}{2}$; *& tota CM* R 32. *praeterea si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, quod est* R 126, *latitudinem faciens FN, erit FN* R 3 $\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *ergo CF est* R 32 *minus* R 14, *quae est apotome tertia.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB congruẽs BG. ergo AG GB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; quod autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atque est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciẽs CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB cõtinetur. Itaque secetur FM bifariam in N; & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quod bis continetur AG GB medium est, & æquale parallelogrammo LF. erit & LF medium.

97. huius.
21. huius.
7. secundi.



dium.& ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM.ergo FM est rationalis,& ipsi CD longitudine incommensurabilis.& quoniam compositū ex quadratis ipsarum AG GB est rationale;quod autem bis AG GB continetur mediū: erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL;& ei quod bis AG GB continetur est æquale FL.incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad LF,ita est CM ad MF.quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis:& sunt vtræque rationales.ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles.& eam ob caussam apotome est CF.Dico & quartam esse. Quoniam enim AG GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB est æquale KL.incommensurabile igitur est CH ipsi KL,sed vt CH ad KL,ita est CK ad KM.ergo CK ipsi KM est incommensurabilis longitudine.& quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectangulum;atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH;quadrato autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB æquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita CK ad MN;& vt NL ad LK, ita NM ad MK.ergo vt CK ad MN ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartę parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duę rectæ lineæ inæquales sunt CM MF;& quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est,deficiens figura quadrata,quod est CKM,& in partes incommensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus potest,quam MF quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine.& est tota CM longitudine commensurabilis expositę rationali CD. ergo CF quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

23.huius.
1.sexti.
10.huius.
74.huius.
1.sexti.
10.huius.
Lem. ad 55. huius.
1.sexti.
11.quinti.
17.sexti.
19.huius.
4.Diffi. rationum.

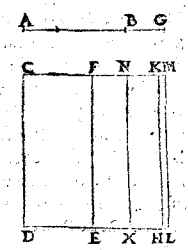
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB Rᵗ V.21 plus Rᵗ 3 15;minus Rᵗ V.21 plus Rᵗ 3 15; BG Rᵗ V.21 minus Rᵗ 3 15:rationalis autem CD sit 6. & si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK,erit CK 3 $\frac{1}{2}$ plus Rᵗ 8 $\frac{1}{2}$: & si applicetur KL aequale quadrato ex GB,quod latitudinem faciat KM,erit KM 3 $\frac{1}{2}$ minus Rᵗ 8 $\frac{1}{2}$: & tota CM 7. Quòd si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB,videlicet Rᵗ 126, latitudinem faciens FN,erit FN Rᵗ 3 $\frac{1}{2}$; & tota FM R 14.est igitur CF 7 minus R 14,quae est apotome quarta.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius,quę cum rationali mediū totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quę cum rationali medium totum efficit AB;rationalis autem CD;& quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quintam. sit enim ipsi AB congruens BG.ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incōmensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex quadratis ipsarum medium;quod autem bis ipsis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammū CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale applicetur KL latitudinē faciens KM.totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed compositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium.ergo & medium est parallelogrammum CL; &



38.huius.

ad rationalem CD applicatum eſt, latitudinem faciens CM. quare CM eſt rationalis, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. & quoniam totum CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale eſt quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaque ſecetur FM bifariam in puncto N, & ab ipſo N alterutri ipſarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur FX NL eſt æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale eſt, & æquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale; & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens FM. ergo FM eſt rationalis, & ipſi CD commenſurabilis longitudine. eſt autem parallelogrammum CL medium, & FL rationale. incommenſurabile igitur eſt CL ipſi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad MF. ergo CM ipſi MF longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtræque rationales. quare CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ob idque apotome eſt CF. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demonſtrabimus rectangulum CK M eſſe æquale quadrato ex NM, hoc eſt quartæ parti quadrati ex FM. quod cum quadratum ex AG incommenſurabile ſit quadrato ex GB; ſitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL: erit CH ipſi KL incommenſurabile. ſed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipſi KM longitudine eſt incommenſurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ CM MF inæquales ſunt: & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad ipſam CM applicatum eſt, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles ipſam diuidit; recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. atque eſt congruens FM commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali CD. ergo CF quinta apotome eſt. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

23. huius

7 ſecundi.

21. huius.

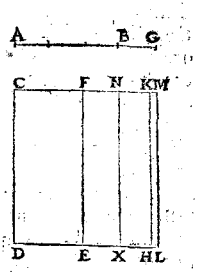
9. ſexti. 80. huius.

74. huius.

2. ſexti. 10. huius.

99. huius.

5. diffi. tertiæ ſum.



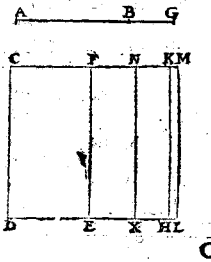
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ *V.* ℞ 288 *plus* ℞ 207 *minus* R *V.* 288 *minus* ℞ 207. *BG* ℞ *V.* ℞ 288 *minus* ℞ 207: *rationalis autem C D ſit 6. quòd ſi ad C D applicetur parallelogrammum C H æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK* ℞ 8 *plus* ℞ 5 $\frac{1}{4}$. *& ſi applicetur K L æquale quadrato ex GB, latitudinẽ faciens KM erit KM* R 8 *minus* R 5 $\frac{1}{4}$, *& tota CM* R 32. *Rurſus ſi ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN* 1 $\frac{1}{5}$, *& tota FM* 3. *quare CF eſt* R 32 *minus* 3, *quæ eſt apotome quinta.*

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam.

Sit quę cum medio medium totum efficit A B; rationalis autem C D: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens C F. Dico CF apotomen eſſe ſextam. ſit enim ipſi AB congruens BG. ergo AG GB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium: quod autem bis ipſis AG GB continetur medium, & adhuc quadratis ipſarum incommenſurabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG æquale parallelogrãmũ C H, latitudinem faciens



CK.

CK: quadrato aũt ex BG ęquale applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL est ęquale quadratis ex AG GB: ac propterea CL est mediũ, & ad rationalẽ CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM rationalis est, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. Quoniam igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. atque est quod bis cõtinetur AG GB medium. ergo & FL est medium, & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. est igitur FM rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur; atque est quadratis quidem AG GB ęquale parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipsi LF incommensurabile. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF: quare CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine: & sunt vtręque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id CF est apotome. Dico & sextam esse. Quoniã enim FL est ęquale ei, quod bis continetur AG GB, secetur FM bifariã in puncto N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrũq; igitur parallelogrammorum FX NL est æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex BG. sed quadrato quidem ex AG est æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipsi KL est incommensurabile. vt autem CH ad KL, ita est CK ad KM. incommensurabilis igitur est CK ipsi KM. quod cum quadratorum ex AG GB medium proportionale sit rectangulum AGB; sitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectangulo; AGB æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum est commensurabilis lõgitudine expositæ rationali CD. ergo CF sexta est apotome. quadratum igitur eius, quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

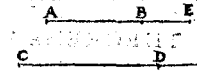
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.* R 396 *plus* R 288 *minus* R *V.* R 396 *minus* R 288; *BG* R *V.* R 396 *minus* R 288; *& rationalis CD sit* 6. *si vero ad CD applicetur parallelogrammum CH, latitudinem faciens CK; erit CK* R 11 *plus* R 8, *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM; erit KM* R 11 *minus* R 8; *& tota CM* R 44. *Rursus si ad CD applicetur FX ęquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat FN, erit ea* R 3, *& tota FM* R 12. *ergo CF est* R 44 *minus* R 12, *quae est apotome sexta.*

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO. CIIII.

Recta linea apotomę longitudine cõmensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome AB; et ipsi AB longitudine cõmensurabilis sit CD. Dico CD apotomen esse, atque ordine eandem, quæ AB. quoniam enim apotome est AB, sit ipsi congruens BE. ergo AE EB rationales sunt potentia solum commẽsurabiles. & fiat proportio BE ad DF eadem, quę est AB ad CD. quare vt vna ad vnam, ita erunt omnes ad omnes. est igitur vt AB ad CD, ita AE ad CF. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. ergo & AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, & BE ipsi DF. sunt autem AE EB rationales potentia solum cõmensurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia solum commẽsurabiles: ac propterea CD apotome est. Dico & ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad CF, ita BE ad FD, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD. vel igitur AE plus



74. huius.

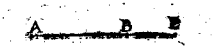
11. quinti.

10. huius.

A
B

74. huius.

poteſt, quàm EB quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: & ſi quidem commenſusabilis, & C F plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę ſibi lõgitudine cõmenſurabilis: & ſi quidem AE commenſurabilis eſt longitudine expoſitę rationali; & CF expoſitæ rationali lõgitudine commenſurabilis erit: ſi vero EB eſt cõmenſurabilis, & DF cõmenſurabilis erit: & ſi neutra ipſarũ AE EB cõmenſurabilis eſt expoſitæ rationali longitudine, & neutra ipſarũ CF FD eidẽ longitudine erit cõmenſurabilis. quòd ſi AE plus poſſit, quã EB quadrato rectę lineæ ſibi incõmenſurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine incõmenſurabilis: & ſiquidem AE ſit cõmenſurabilis expoſitæ rationali lõgitudine, & CF eidẽ longitudine cõmenſurabilis erit: ſi uero BE, & DF, & ſi neutra ipſarũ AE, EB, & neutra ipſarũ CF FD erit expoſitæ rationali lõgitudine cõmẽſurabilis. ergo CD apotome eſt, & ordine eadẽ, quę AB.



P. C. COMMENTARIVS.

A 10. huius

Et BE ipſi DF,] *Quoniam enim eſt vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF, vt AE ad CF, hoc eſt vt AB ad CD. commenſurabilis igitur eſt & BE ipſi DF longitudine.*

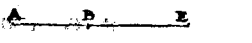
B 10. huius

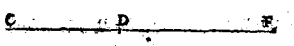
Ergo & CF FD rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles] *Nam cum ſit ut AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: ſuntq; AE EB rationales potentia ſolũ cõmenſurabiles. ergo & CF FD rationales potentia ſolũ cõmenſurabiles erũt.*

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

Recta linea mediæ apotomæ commenſurabilis, & ipſa mediæ apotome eſt, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB, & ipſi AB lõgitudine commenſurabilis ſit CD. Dico CD mediæ apotomen eſſe, & ordine eandem. Quoniam enim mediæ apotome eſt AB, ſit BE ipſi AB congruens. ergo AE EB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. ſunt autem AE EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. ergo & CF FD mediæ potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles erũt; ac propterea mediæ apotome eſt CD. oſtendendum eſt & ordine eandem eſſe, quę AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. ſed quadratum ex AE cõmẽſurabile eſt quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD eſt commenſurabile. & ſi quidem rationale eſt rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. ſi vero rectangulum AEB medium eſt, & medium erit rectangulum CFD. mediæ igitur apotome eſt CD, atque ordine eadem, quæ AB.





75. 76. huius

Lem. ad 25. huius.

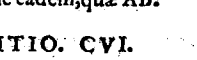
THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

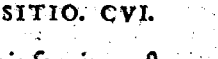
Recta linea minori commenſurabilis, & ipſa minor eſt.

Sit minor AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico & CD minorem eſſe. fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE EB potentia ſunt incõmenſurabiles, & CF FD potentia incõmẽſurabiles erũt. eſt autẽ vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadratũ ex AE ad quadratũ ex EB, ita quadratũ ex CF ad

77. huius.

22. ſexti.

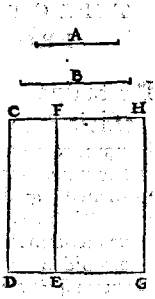




quadratum

quadratum ex FD : & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando, commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB composito ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositũ ex quadratis AE EB est rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. Rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium. ergo C D est minor. 77. huius.

ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse. Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta est CF. quadrato autem ex B æquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commensurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; et spacium FG rationali, et apotoma quarta continetur. recta igitur linea spacium potens minor est. potest autem spacium FG ipsa B. ergo B est minor.

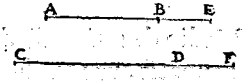


19. huius. 104. huius. 95. huius.

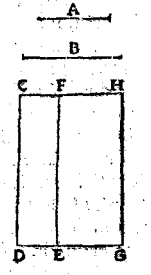
THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens AB; et ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eam, quę cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes cõpositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. et eadem constituantur. similiter demonstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportione, in qua AE EB: et compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare et CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est quæ cum rationali medium totum efficit.



78. huius.



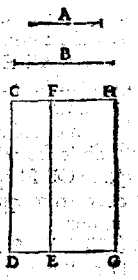
78. huius.

ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiẽ A, et ipsi A commensurabilis B. Dico B esse eam, quę cũ rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quinta: quadrato aũt ex B æquale

102. huius.

FG ad

FG ad ipsam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE est commebsurabile ipsi FG; ob idque recta linea CF ipsi FH longitudine est commensu-
104. huius. rabilis. apotome autem quinta est CF. ergo & FH est apo-
tome quinta; estq; FE rationalis. si autem spacium conti-
96. huius. neatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit. sed ipsa B potest spacium FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens est.



THEOREMA LXXXIIII. PROPOSITIO CVIII.

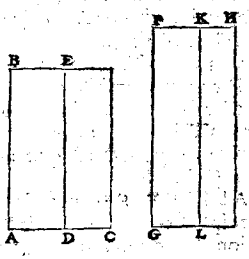
Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

Sit cum medio medium totum efficiens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eã, quę cum medio medium totum efficit. sit ipsi AB
79. huius. congruēs BE, & eadem cõstruantur. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. & sunt AE EB commensurabiles ipsis CF FD, vt ostensum est: & compositum ex quadratis AE EB commensurabile composito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. ergo
77. huius. CD est quę cum medio medium totum efficit.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum spacium potest, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum spacium EC potest, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomẽ vel minorem. Exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CE est æquale LH. Itaque quoniam rationale est BC, medium autem BD: atque est BC equale GH, & BD ipsi GK; erit GH rationale; medium autem GK, & ad ra-
97. huius. tionalem FG applicatum est. rationalis igitur est
23. huius. FH, & ipsi FG longitudine commensurabilis: FK vero rationalis, & incommensurabilis ipsi FG lõ-
23. huius. gitudine. ergo FH ipsi FK longitudine incommensurabilis est, & HF FK rationales sunt, potentia solum commensurabiles; ac propterea HK est apotome. ipsi vero
74 huius.



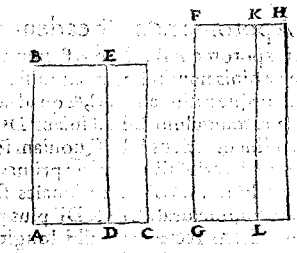
congruens

congruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi commē surabilis longitudine, vel incommensurabilis. posit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. atque est tota HF commensurabilis longitudine expositę rationali FG. ergo HK prima est apotome. recta autem linea, quæ potest spacium rationali, & apotoma prima contentum est apotome. Ergo quæ potest LH hoc est CE apotome est. quòd si HF plus posit, quàm FK quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; estq; tota HF expositæ rationali F G longitudine commensurabilis; erit HK apotome quarta. & quę potest spacium rationali, & apotoma quarta contentum minor est. quæ igitur potest spacium LH, videlicet EC est minor. 1 tertiarum. diffin. 92. huius. 4 diffin. tertiarum. 95. huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

Rationali de medio detracto alię duę irrationales fiunt, vel medię apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim BC rationale BD detrahatur. Dico rectā lineā, quæ reliquū spaciū EC potest, vnā duarum irrationalium fieri vel mediæ apotomen primam, vel eam, quę cum rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis FG, & ad ipsam similiter spacia applicentur; erit rationalis quidē FH, & ipsi FG longitudine incommensurabilis; rationalis autem FK, & incommensurabilis ipsi FG longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est HK, & ipsi congruēs KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. & si quidē commensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositæ rationalis F G longitudine: erit HK apotome secunda. est autem FG rationalis. ergo quæ potest spacium LH, hoc est CE, mediæ est apotome prima. quòd si HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. recta igitur linea potens spacium EC est quæ cum rationali medium totum efficit.

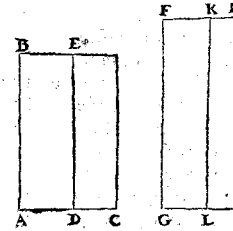


23. huius. 21. huius. 74. huius. 2 diffi. tertiarum. 93. huius. 5 diffi. tertiarum. 99. huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO. CXI.

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquę duæ irrationales fiunt, vel medię apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

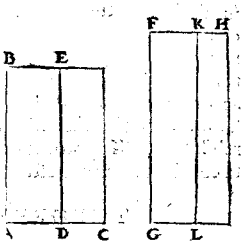
Detrahatur enim, vt in propositis figuris de medio BC medium BD, quod sit incommensurabile toti. Dico rectam lineam, quæ potest spacium CE, vnā esse ex duabus irrationalibus, vel medię apotomen secundam, vel eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim medium est vtrumque ipsorū BC BD, & BC incommensurabile est ipsi BD, hoc est GH ipsi GK; erit HF ipsi FK incommensurabilis longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id apotome est HK, & ipsi congruens KF. itaque vel HF plus



23. huius. 74. huius.

HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: & ſi quidem commenſurabilis, & neutra ipſarum HF FK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia, rationalis autem eſt KL: & rectangulum rationali, & apotoma tertia contẽtum irrationale eſt. ergo recta linea, quę ipſum poteſt, eſt irrationalis, & vocatur mediæ apotome ſecunda. ſi vero HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & neutra ipſarum HF FK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali FG; erit HK apotome ſexta. at recta linea potens quod rationali, & apotoma ſexta cõtinetur eſt quæ cum medio medium totum efficit. ergo quæ poteſt ſpacium LH, hoc eſt EC eſt cum medio medium totum efficiens.

3. diffi. tertiarum.
94. huius.
6. diffi. tertium.
97. huius.

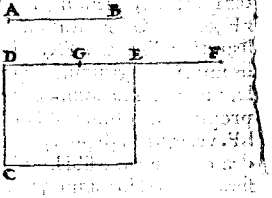


THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. ſit enim, ſi fieri poteſt: exponaturque rationalis DC, & quadrato ex AB æquale rectangulum CE ad ipſam DC applicetur latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apotome eſt AB, erit DE apotome prima. ſit ipſis congruens EF. ergo DF FE rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles: & DF plus poteſt, quàm FE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commẽſurabilis: atq; eſt DF cõmẽſurabilis expoſitę rationali CD lõgitudine. Rurſus qm̃ ex binis nominibus eſt AB, erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G, ſitq; DG maius nomẽ. ergo DG GE rationales ſunt, potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles: & DG plus põt, quã GE quadrato rectæ lineæ ſibi cõmẽſurabilis lõgitudine: & maior DG longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali DC. quare DF ipſi DG longitudine eſt commenſurabilis. & reliquę igitur FG commenſurabilis erit. Itaq; quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG, atque eſt rationalis DF; erit & FG rationalis. Rurſus quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG longitudine, atque eſt DF ipſi FE incommenſurabilis longitudine; erit & FG ipſi FE longitudine incommenſurabilis: & ſunt rationales. ergo GF, FE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EG. ſed & rationalis. quod fieri non poteſt. ergo apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

98. huius.
1. diffi. tertiarum.
61. huius
37. huius.
32. huius
Ex demonſtratis ad 17. huius.
74. huius.



Apotome, & quę poſt ipſam ſunt irrationales, neque medię, neque inter ſe eædẽ ſunt: quadratum enim, quod à media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem, & ei, ad quam applicatur, longitudine incommenſurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam. quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea, quæ cum rationali mediũ totũ efficit ad rationalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã. quod ab ea, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt tum à prima, tum inter ſe ſe, à prima quidem, quòd rationalis ſit, inter ſe vero, quod ordine non ſint eædẽ; manifeſtum eſt & ipſa irrationales inter ſe differentes eſſe. & oſtenſum eſt apotomẽ

23. huius.
98. huius.
99. huius.
100. huius.
101. huius.
102. huius.
103. huius.

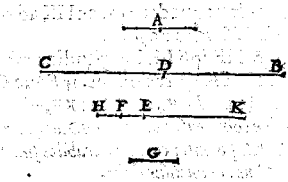
non

non esse eandem, quæ ex binis nominibus. quadrata autem apotomæ & earum quę sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusdē ordinis, cuius & illæ sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ est ex binis nominibus, & earum, quæ post ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illę sunt. ergo rectę lineæ, quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter se differunt, ita vt omnes sint numero tredecim, videlicet.

1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quę ex binis medijs prima
4 Quæ ex binis medijs secunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome secunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

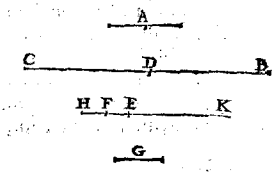
THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



Sit rationalis A; ea, quę est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD: & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod BC EF continetur. Dico EF apotomen esse, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis CD DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF est æquale ei, quod BD G continetur, erit vt CB ad BD, ita G ad EF: A
maior autem est CB, quàm BD. ergo & G quàm EF maior erit. fit ipsi G æqualis E B
H. est igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo vt CD ad DB, ita HF ad FE,
fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE. vt enim C
vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia
consequentia. sed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB. D
cōmensurabile autē est quadratū ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratū ex HK qua E
drato ex KF est commensurabile. atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex F

KF, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportiones sunt. commensurabilis igitur est HK ipsi
C KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniã quadratum ex A est æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est.
21. huius rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoq; & EK, quæ est incommensurabilis ipsi HE rationalis erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autẽ CD DB potentia solum cõmensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabi-
H lis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsiq; CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentia solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis,
15. huius. etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & FK eidem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quòd si CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.



F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 sexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quæ à nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quæ ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] *Ex 22 sexti, & decima huius.*

F Atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario secundo 20 sexti.*

G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] *Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensuraalis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.*

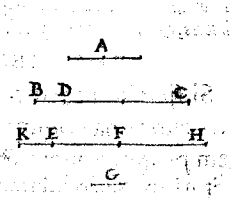
K Et idcirco EF apotome est] *Ex 74 huius.*

Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD, sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinẽ faciẽs G, erit G 1 1/3, cui æqualis sit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF. vi delicet vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 1/3 ad aliũ. multiplicabimus igitur 3 per 1 1/3 producetur 4, & 4 diuidemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per apotomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producitur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & obid R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quã 4, si applicetur ad R 12 plus 3. sed

3. sed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit R 21 $\frac{1}{4}$ minus 4. quadratum igitur rationalis 2, videlicet 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad R 12 plus 3 applicatum latitudinem facit R 21 $\frac{1}{4}$ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.



Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale sit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportione: & K H eundem habere ordinem, quem habet B D. sit enim ipsi BD congruens DC. ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A æquale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est æquale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quàm BD. ergo & KH, quàm G est maior. ponatur ipsi G æqualis KE. commensurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. & quoniam est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per conuersionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est vt BC ad CD. sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum commensurabiles erunt. & cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut KF ad FH, ita HF ad FE: quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commensurabile autem est quadratum ex KF quadrato ex FH; sunt enim KF EH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi B C longitudine commensurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniã est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autem est B C ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; B C C D rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD est commensurabilis longitudine expositę rationali, erit & ipsa FH eidem commensurabilis; & si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH. at si BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & si quidem BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH. quòd si neutra ipsarum BC CD, & neutra

74. huius.

21. huius.

14. sexti: Ex demonstratis ad 16. quinti.

19. quinti.

11. quinti.

Corr. 2. 20. sexti.

tra ipſarum KF FH: ex binis igitur nominibus eſt KH, cuius nomina KF FH commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportione; & KH eundem tenet ordinem, quem ipſa BC.

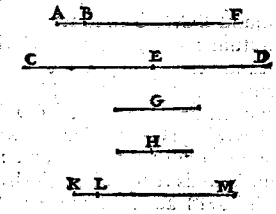
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, BD R 18 *minus* R 10. *& multiplicetur* R 18 *minus* R 10 *per eam, quę ex binis nominibus ipſi reſpondet, videlicet per* R 18 *plus* R 10 *producitur 8, rurſus multiplicetur ipſius A rationalis quadratum, quod eſt 4 per eandem, producitur* R 288 *plus* R 160. *habebit igitur 8 ad* R 288 *plus* R 160 *proportionem eandem, quam* R 18 *minus* R 10 *ad 4 ex 17 ſeptimi. quare ſi* R 288 *plus* R 160 *applicetur ad 8 latitudinem faciet* R $4\frac{1}{2}$ *plus* R $2\frac{1}{2}$, *& eandem latitudinem faciet 4, ſi ad* R 18 *minus* R 10 *applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad* R 18 *minus* R 10 *latitudinem facit eam, quae eſt ex binis nominibus tertia, hoc eſt* R $4\frac{1}{2}$ *plus* R $2\frac{1}{2}$ *cuius nomina commenſurabilia ſunt apotomae nominibus, & in eadem proportione.*

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si ſpacium cõtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomę, & in eadem proportione; recta linea ſpacium potens eſt rationalis.

Spacium enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quę fit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commenſurabilia nominibus apotomæ AF FB: & in eadę proportione; ſitq; recta linea G potens ſpacium contentum AB CD. Dico ipſam G rationalem eſſe. exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur eſt KL, cuius nomina KM ML commenſurabilia ſint nominibus eius, quę eſt ex binis nominibus CE ED, & in eadem proportione. ſed CE ED commenſurabiles ſunt ipſis AF FB, atque in eadem proportione. eſt igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL eſt vt AF ad KM. commenſurabilis autem eſt AF ipſi KM. ergo & AB ipſi KL eſt cõmenſurabilis. eſtq; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. ſed rectangulum contentum CD KL eſt æquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H eſt commenſurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB eſt æquale quadrato ex G. ergo quadratũ ex G commenſurabile eſt quadrato ex H. atque eſt quadratum ex H rationale. rationale igitur eſt quadratum ex G; & idcirco ipſa G eſt rationalis; & poteſt quod CD AB continetur. Si igitur ſpacium contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis uominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadę proportione, recta linea ſpacium potens eſt rationalis.



xij. huius.

19. quinti.
10. huius.
1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex ijs manifeſto conſtat fieri poſſe, vt ſpaciũ rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

F. C.

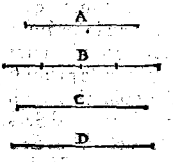
F. C. COMMENTARIVS.

Sit apotome AB R 21 ½ *minus* 4. *ea vero, quae ex binis nominibus CD sit* 12 *plus* 3. *& multiplicetur* R 21 ½ *minus* 4 *plus* R 12 *plus* 3. *fit* R 256, *quae est* 16 *minus* 12, *hoc est* 4, *quod est rationale, & eius radix* 2 *rationalis.*

THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

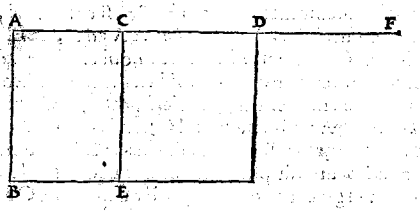
A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A. Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. exponatur enim rationalis B. & rectangulo contento A B æquale sit quadratum ex C. irrationalis igitur est ipsa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quę prius est eadem: non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectãgulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D. irrationale igitur est, quod fit ex D: & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C. Similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.



In scholio ad 39. huius.

ALITER. Sit media AC. Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandẽ esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB: sitque AB rationalis, & BC cõpleatur. irrationale igitur est BC, & quæ ipsum potest est irrationalis. posit autẽ ipsum recta linea CD. ergo CD irrationalis est, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. posit ipsum recta linea DF. ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullius enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD, ergo à media infinitę irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.



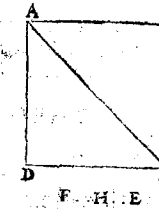
THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrũ lateri incommensurabilem esse longitudine.

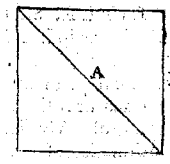
Sit quadratum ABCD, cuius diameter AC. Dico AC ipsi AB longitudine incõmensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. Dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse, & imparem. itaque manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB. & quoniam AC commensurabilis est ipsi AB, habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerũ. habeat, quam EF ad

A
B

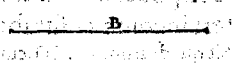
EF ad G: sintq; EF, G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas est EF. si enim est vnitas, & habet ad G proportionem eam, quam AC ad AB; estq; AC maior, quàm AB: & EF vnitas, quàm G numerus maior erit. quod est absurdum. ergo EF non est vnitas. quare numerus sit necesse est. & quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem est quadratum ex CA quadrati ex AB. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: ac propterea quadratus ex EF par est, & ipse EF par. si enim esset impars, & qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quomodocumque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit. ergo EF est par. secetur bifariam in H. & quoniam numeri EF, G minimi sunt eorum, qui eandem habent proportionem, inter se primi sunt: & est EF par. impar igitur est G: si enim esset par, numeros EF, G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter se sunt. quod fieri non potest. non igitur G est impar. ergo par. & quoniam FE duplus est ipsius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. est autem quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH. ideoq; par est qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipse G est par; sed & impar. quod fieri non potest. non igitur AC commensurabilis est ipsi AB longitudine. ergo est incommensurabilis.



ALITER. Sed & aliter ostendendum est incommensurabile esse quadrati diametrum ipsius latericum. sit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. & rursus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipsum G: sintq; minimi eorum, qui eandem habent proportionem. ergo EF, G primi inter se sunt. Dico primum, G non esse vnitatem. si enim fieri potest, sit G vnitas. & quoniam est vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem est quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: atq; est G vnitas. binarius igitur est quadratus ex EF. quod fieri non potest. ergo G non est vnitas. numerus igitur. & quoniam est vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. sed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus metitur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipsum EF latus metitur. metitur autem & se ipsum. ergo G numeros EF, G metitur, primos inter se existentes. quod fieri minime potest. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. quare incommensurabilis sit necesse est.



Itaque inuentis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus. nimirum superficies incommensurabiles inter se. si enim ipsarum AB mediam proportionalem sumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam, siue quadrata, siue alia rectilinea similia, siue circuli, qui circa diametros AC describantur. quando quidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur sunt spacia plana inter se incommensurabilia. ostensis autem his ostendemus etiam ex solidorum



rum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, & incommensurabilia inter se se. nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipsis æqualia sint solida æque O
alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se, vti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia; si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erunt. sed & duobus P
circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases, hoc est vt AB circuli, & si quidem circuli commensurabiles sint, commensurabiles erunt & coni inter se se, & Cylindri; si vero incommensurabiles, & coni, & Cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est non solum in lineis, & superficiebus esse commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, sed & in solidis figuris.

F. C. COMMENTARIVS.

Manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB]*Ex 47 primi.* A
Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum]*Ex 5. huius.* B
Et quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam enim est vt AC ad AB, ita EF ad G, erit et vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. sed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario secundo 20. sexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita est quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.* C
Quoniam si impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totum impar erit]*Ex 23 noni. sequitur enim hoc ex 29 eiusdem.* D
Inter se primi sunt]*Ex 24 septimi.* E
Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus]*Ex 11. octaui.* F
Duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, composita est ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. sed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH est quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratū ex G est dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.* G
Ideoq; par est, qui fit ex G quadratus] *Quoniam enim quadratus ex G duplus est quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par necessario erit.* H
Et ex iam dictis ipse G est par]*Si enim sit impar, & quadratus ex ipso impar est ex 29 noni. sed & par. quod fieri non potest.* K
Et propterea latus G ipsum EF latus metitur]*Ex 14 octaui,* L
Erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter de- M
scriptam]*Ex corollario secundo vigesimae sexti.*
Quandoquidem circuli iuter se sunt, vt diametrorum quadrata] *Ostenditur id in se cunda propositione duodecimi libri. vnde colligi potest hac siue sint Euclidis, siue alterius alieno lo co posita esse.* N
Nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quę ipsis æqualia sint, solida æque al O
ta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se vti bases]*Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi,*
Sed & duobus circulis existētibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros P
constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases]*Ex 11. duodecimi.*

DECIMI LIBRI FINIS.

SCHO-

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à scientia solidorum distinxerunt. etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato ostendit in politicis; hanc autem stereometriam. At vero Iuniores cum utriusque scientiæ communis sit cognitio, quæ circa magnitudines uersatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas uelut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia uero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in solidis, alia constant ex planis rectilineis, alia ex sphæricis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et sphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea uero, uel quæ ex rectilineis sunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum est. & si aliquod est corpus, hoc & solidum est, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta sunt: hęc enim imaginabilia sunt solida, non antitypa, hoc est dura, & resistentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER VNDECIMVS

ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

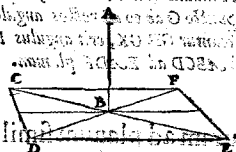
Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si possit planum in rectas lineas resolui, ita diuisset. Quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsum planum contingunt, rectos facit angulos, tunc, & ad ipsum rectam erit. Sed quoniam planum non infinitis rectis lineis sectum in ipsas non resoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano. contingentes autem addit, ut non parallelæ sint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ad subiectum planum CDEF perpendicularis, siue recta, & à puncto B ducantur quotcunque rectae lineae in eodē plano BC BD BE BF. erūt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quod si anguli CBA DBA EBA FBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum CDEF perpendicularem fore. Etenim

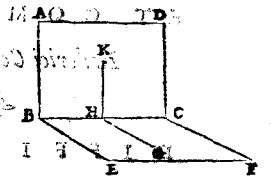


IIII.

Planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineę in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit planum ABCD ad planum BEFC rectũ, sitq; eorũ cõis sectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpẽdicularis ad ipsã BC. erit recta linea GH ad planũ ABCD perpẽdicularis, siue recta. Ac si recta GH, vel planũ ABCD perpẽdicularis sit, siue recta, erit ea ad BC cõem duorũ planorũ sectionẽ perpẽdicularis. Et similiter cõtinget, si in alio plano ducatur KH perpẽdicularis ad ipsã BC. ponatur autẽ nũc cõem duorũ planorũ sectionẽ recta linea esse, quod in sequentibus demonstrabitur.

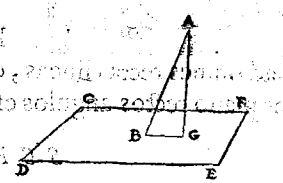


V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino lineę ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & stante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB inclinata ad subiectum planũ CDEF: atque à puncto sublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectae lineae AB ad planum CDEF inclinatio.

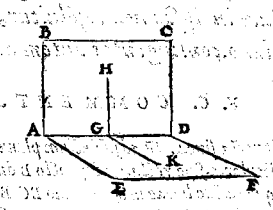


VI.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis cõtentus, quę ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, quorum cõmunis sectio AD, & sumpto in ipsa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK, erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.



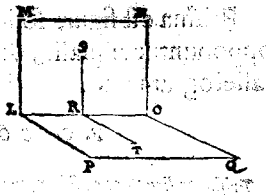
VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, de quibus proxime dictum est: sintq; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & sint anguli HGK SRT aequales. dicetur planum ABCD ad planum EADF similiter inclinatum, atque planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela sunt, quę inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figurę sunt, quę similibus planis multitudine æqualibus continetur.

X.

Aequales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium, quàm duarum linearum, quæ sese contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, & ad vnum punctum constitutis.

SCHOLIVM.

Euclides quidem in inclinatione angulum vult esse: Stoici vero dicunt inclinationem esse angulum. sed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. hæc autem diffinitio imperfecta est. angulus enim quartę partis sphæræ pluribus quidem, quàm duabus superficiebus comprehenditur, sed non planis: & dimidius conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est angulus: & conuertex angulus erit. quare & ex duabus superficiebus & ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est, melius igitur erit solidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, vel magnitudinum ad vnum punctum. ἐν τῇ κλίσει. σύνευσιν. σύνευσιν.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

XLII.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Prismata dicuntur non solum, quae bases habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quecumque plana, quae opponuntur, siue triangula, siue quadrilatera, siue pentagona, siue plurilatera, & aequalia, & similia habent, reliqua vero parallelogramma. quod ex ijs, quae tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas lateratas vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & Cylindros columnas rotundas.

XLIII.

Sphæra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituatur rursus in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XLV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XLVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

XLVII.

Diameter sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta, & ex vtraque parte à superficie sphæræ terminata.

XLVIII.

Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituatur locum, à quo moueri cœpit. & si quidem manens recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectũ angulũ cõuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor, ambligonius; & si maior, oxigonius.

XLIX.

Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

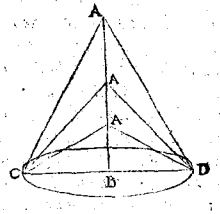
Basis

XX.

Basis vero circulus à conuersa recta linea descriptus.

SCHOLIVM.

Ostendendum quomodo conus orthogonius sit, vel angulum rectum ad verticem habeat.



Exponatur triangulum orthogonium ABC rectũ habens ABC angulum; & rectam lineam BC rectę A B æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum constitui. producatur enim CB vsque ad D: ponaturq; B D ipsi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB est æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC æqualis, & vterque ipsorũ dimidius recti, quòd rectus ponatur ABC: Eadem ratione & BAD est recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus est; & idcirco conus circa ABC descriptus est orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eũdem locum restituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB necesse est in conuersione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipsi BD sit æqualis: & circulus à puncto C descriptus basis erit coni, qui à triangulo ABC constituitur, & eius circuli diameter erit basis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd si conus à vertice A ad basim vsque bifariam diuidatur, portionum superficies non aliud erunt, nisi triangulum ADC, quod est orthogonium. quare & coni uertex orthogonius erit. si vero angulus BAC sit maior dimidio recti, erit ob eandem caussam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtusus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtusum habebit. si denique BC sit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ ostensa sunt, DAC angulus recto minor, hoc est acutus, & conus oxygonius erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides conos, & cylindros dumtaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuersę ex Apollonio, Serenoq; ortum explicare visum est.

EX APOLLONIO.

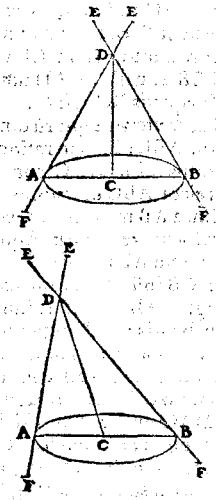
Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur, & manente puncto cõuertatur circa circuli circũferentiã, quousque ad eum locum redeat, à quo cepit moueri: superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta, uoco Conicam superficiem, Verticem ipsius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctũ, et centrum circuli ducitur: Conum autem voco figuram contentam circulo

& conica superficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur. Verticem coni punctum, quod et superficiei conicæ vertex est. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Basim circulum ipsum.

Conorũ rectos quidẽ voco, qui axes habẽt ad rectos angulos ipsis basibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habẽt.

Quem locum explicans Eutocius ita scribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod sublime D: iunctaque D B in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E F. Si igitur recta linea D B feratur eo vsque in circuli A B circumferentia, quousque punctum B rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quę quidem constat ex duabus superficiebus, ad D punctum se se tangentibus. eam voco conicam superficiem; quę & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsã describens in infinitum producitur. verticem superficiei dicit, punctum D: axem, rectam D C. conum vero appellat figuram cõtentam circulo A B, & ea superficie, quam D B sola describit: coni verticem punctum D: axẽ D C: & basim, A B circulum. At si D C ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; sin minus, scalenum.



Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quae non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineae, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circumductam in conuersione quandoque maiorem; quandoque minoram, & quandoque aequalem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.

XXI.

Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertatur, quousque rursus restituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XXII.

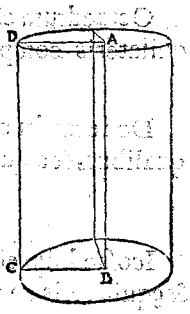
Axis Cylindri est manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII.

Basis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuersis describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latere AB manente intelligatur latus CD conuerti, quousq; ad eum locum redeat, à quo capit moueri. erit iã descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.



EXSERCIO.

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorũ diametri semper inter se se parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & vna circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo mouer ic cœpit: superficies, quę à circumlata recta linea describitur, Cylindrila superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri, basis circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius Cylindri, bases vtrasque contingit: quam & circumlatam describere superficiem Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIII.

Similes coni, & Cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffiniemus.

Similes coni, & Cylindri sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Octaedrum

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis continetur.

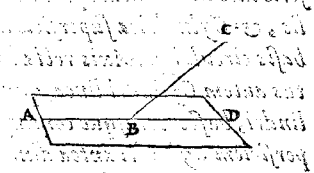
XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida, quę viginti triangulis æqualibus, & æquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt rectæ lineę AB pars quidem AB ſit in ſubiecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit vtique recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubiecto plano.

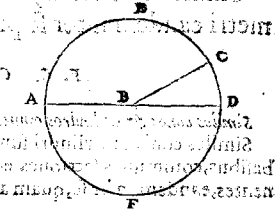


A ſitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis AB & ABD communis portio eſt AB; quod fieri non poteſt; recta enim linea cum recta linea non conuenit in pluribus punctis, quam vno.

B alioqui rectæ lineę ſibi ipſis congruet. non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.

SCHOLIVM.

A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD cõmunis portio eſt AB, quod fieri non poteſt.] *Duabus enim rectis lineis non eſt communis portio. ſi enim fieri poteſt, ſit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & ſumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallum vero BA, & circulus AEF deſcribatur. Quoniam igitur punctum B centrum eſt circuli AEF, & per B ducta eſt quędam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter. ABC diameter autem circulum bifariam ſecat. ergo AEC ſemicirculus eſt. Rurſus quoniam B centrum eſt AEF circuli, & per B recta linea quędam ducta eſt ABD, erit ABD circuli AEF diameter. oſtenſa autem eſt & ABC diameter eiuſdem circuli, & ſemicirculi eiuſdem circuli ſunt aequales inter ſe. ergo AEC ſemicirculus ſemicirculo AED eſt aequalis, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur duabus rectis lineis communis portio eſt, ſed differens; ac propterea neque fieri poteſt, vt terminatae rectae lineae alia recta linea in directum continuata ſit ex iis, quae ante oſtenſa ſunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non eſt recta linea.*



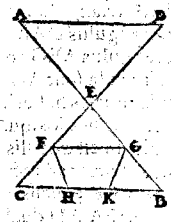
B Alioqui rectę lineę ſibi ipſis congruent.] *Manifeſtum eſt congruentibus rectis lineis, & earum fines inter ſe congruere. ſi autem hoc, duae rectae lineę eoſdem fines habentes ſpacium cõtinebunt. quod fieri non poteſt.*

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent, in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

Duę enim rectæ lineę AB CD ſe inuicem in puncto E ſecent. Dico ipſas AB CD in vno eſſe plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis EB EC quæuis puncta FG, iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum conſiſtere in vno plano. Si enim trianguli EBC pars quidem FHG, vel GBK in ſubiecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in ſubiecto plano, & pars in alio. Quod ſi trianguli ECB pars FG BG ſit in ſubiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarũq; recta rum linearum EC EB quędam pars erit in ſubiecto plano, quędam vero in alio. quod abſurdũ eſſe oſtendimus. Triangulum igitur EBC in vno eſt plano. in quo autem plano eſt BCE triangulum, in hoc eſt vtraque ipſarum EC EB. in quo autem vtraque ipſarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.



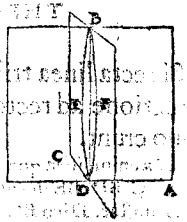
SCHOLIVM.

Propoſitum eſt oſtendere rectas lineas, quę ſe mutuo ſecant in vno plano eſſe. quoniam autem hoc per triangulum oſtenditur, illud appoſuit, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana ſe inuicem ſecent, cõmunis ipſorum ſectio recta linea erit.

Duo enim plana AB BC ſe inuicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit DB linea. Dico lineam D B rectam eſſe. ſi enim non ita ſit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB, in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtique duarum rectarũ linearum DEB DFB ijdem termini, & ipſę ſpacium cõtinebunt, quod eſt abſurdum. non igitur DEB DFB rectæ lineæ ſunt. Similiter oſtendemus neque aliam quãpiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam eſſe, præter ipſam DB, communem ſcilicet planorum AB BC ſectionem. ſi igitur duo plana ſe inuicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiã ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD ſe inuicem ſecãtibus in E puncto, ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat. Dico EF etiam plano per AB CD ducto

ducto ad rectos angulos esse. sumantur enim rectæ lineæ AE EB CE ED inter se æquales: perq; E ducatur recta linea GEH vtcunque, & tangantur A D CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA F G FD FC FH FB. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, & angulos æquales continent, erit AD basis basi CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est aũt & angulus AEG æqualis angulo BEH. Duo igitur triangula sunt AGE BEH duos angulos duobus angulis æquales habẽtia, alterum alteri, & vnum latus AE vni lateri EB æquale. quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt, ergo GE quidem est æqualis EH; AG verò ipsi BH. Quòd cum AE sit æqualis EB, communis autem & ad rectos angulos FE; erit basis AF basi FB æqualis. Eadem quoq; ratione & CF æqualis erit FD. Præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri, & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus igitur FAD angulo FBC est æqualis. Rursus ostensa est AG æqualis BH. sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH, vt demonstratum fuit. basis igitur GF basi FH est æqualis. Rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem FE; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est vterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH vtcunque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autẽ ad planum rectæ est, quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

4. primi.

26. primi.

4. primi.

8. primi.

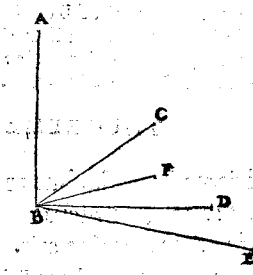
4. primi.

3. diffi.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineę in vno plano erunt.

Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in vno plano esse. non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidẽ in subiecto plano, BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. cõmunẽ vtique sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam. faciat BF. in vno igitur sunt plano per AB BC ducto tres rectę lineæ AB BC BF. & quoniam AB vtrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem DB BE est subiectum planum. ergo A B ad subiectum planum recta est. quare & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,



3. huius.

Ex antecedente.

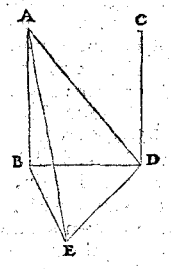
3. diffi.

tes,quæ in eodem plano sunt,rectos faciet angulo; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus.equalis igitur est angulus ABF angulo ABC,& in eodem sunt plano; quod fieri non potest.recta igitur linea BC non est in plano sublimi. quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis se se tangẽtibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat,tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, illę inter se se parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subiecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subiecto plano in punctis BD,iungaturq; BD recta linea,*cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur* DE, & posita DE ipsi AB equali,iũgantur BE AE AD.Qm igitur AB recta est *ad subiectum planum*, & ad omnes rectas lineas,quę ipsam cõtingunt, *& in subiecto sunt plano*, rectos angulos efficiet.contingit autem AB vtraque ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo vterque angulorum ABD ABE rectus est. *Eadem ratione rectus etiam est vterq;* ipsorum CDB CDE.& quoniam AB equalis est ipsi DE,cõmunis autem BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales,& rectos angulos *continent.basis igitur* AD *basi* BE est æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE,duę AB BE duabus ED DA æquales sunt,& basis ipsarum AE communis.ergo angulus ABE angulo EDA est equalis.sed ABE rectus est.*rectus igitur* & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad vtramque ipsarum BD DC.quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos.tres igitur rectæ lineę BD DA DC *in vno sunt plano*. *in quo autem sunt* BD DA,in hoc & AB:omne enim triangulum in vno est plano. ergo AB BD DC in vno plano sint necesse est,atque est vterque angulorum ABD BDC rectus.parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidẽ plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.



Diffi. 8.

4. primi.

8. primi.

Ex antecedente.

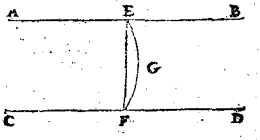
2. huius.

28. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duę rectæ lineę parallelæ sint,sumantur autem in vtraque ipsarum quælibet puncta; quę dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano,in quo & parallelę.

Sint duæ rectę lineæ parellelæ AB CD, & in vtraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F cõiungit,in eodem plano esse,in quo sunt parallelę.non enim,sed si fieri potest,sit in sublimi,vt EGF, & per EGF planũ ducatur, quod in subiecto plano sectionem faciet, rectam lineam.faciat vt EF.ergo duæ rectæ lineæ EGF E F *spacium continebunt*, quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo,quod per AB CD parallelas transit.si igitur duæ rectæ lineæ parallelę sint, & reliqua, quæ sequuntur.quod oportebat demonstrare.

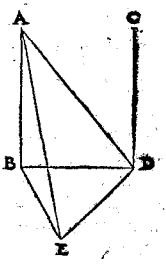


5. huius.

10. com. no. primi libri.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si duę rectę lineæ parallelę ſint, altera autem ipſarum plano ali cui ſit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

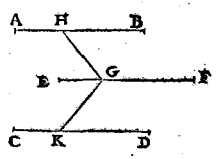


Sint duę rectę lineæ parallelę AB CD, & altera ipſarum AB ſubiecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe. occurrāt enim AB CD ſubiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo A B CD BD in vno ſunt plano. Ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubiecto plano DE: & ponatur DE ipſi AB æqua lis: iungantur; BE AE AD. Et quoniam AB perpendicula ris eſt ad ſubiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, ſuntq; in ſubiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur eſt vterque angulorum ABD ABE. Quòd cū in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD, erūt anguli ABD CDB duobus rectis ęquales. rectus autem eſt ABD. ergo & CDB eſt rectus; ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. Et quoniam AB eſt ęqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales ſunt; & angulus ABD eſt æqualis angulo EDB, rectus enim vterq; eſt. baſis igitur AD baſi BE eſt ęqualis. Rurſus quoniam AB æqualis eſt DE, & BE ipſi AD; erunt duę AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & baſis earum communis AE. quare angulus ABE eſt æqualis angulo EDA. rectus autem eſt ABE. ergo & EDA eſt rectus, & ED ad DA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BD. ergo ED ēt ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem exiſtentes plano ipſā contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD eſt DC, quonlam in plano per BD DA ſunt AB BD: in quo autem ſunt AB BD in eodem eſt ipſa DC. quare ED ipſi DC eſt ad rectos angulos; ideoq; CD ad rectos angulos eſt ipſi DE. ſed & CD ipſi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB ſe mutuo ſecantibus in cōmuni ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE DB eſt ad rectos angulos. planum autem per DE DB eſt ſubiectum planum. ergo CD ſubiecto plano ad rectos angulos erit.

Ex antecedente.
3. diffi.
29. primi.
4. primi.
8. primi.
4. huius.
3. diffi.
2. huius.
4. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Quæ eidem rectę lineę ſunt parallelę, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano, etiam inter ſe parallelæ erunt.



Sit enim vtraque ipſarum AB CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano. Dico AB ipſi CD parallelā eſſe. ſumatur in EF quod uis punctum G, à quo ipſi EF in plano quidem per EF AB tranſeunte ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem tranſeunte per FE CD rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. Et quoniam EF ad vtramque ipſarum GH GK eſt perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK tranſeunte. atque eſt EF ipſi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos eſt. eadem ratione & CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. vtraq; igitur ipſarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter ſe ſe. ergo AB ipſi CD eſt parallela.

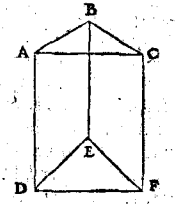
4. huius.
Ex antecedente.
8. huius.

THEO-

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectę lineæ ſe ſe contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem eſſe. Aſſumantur enim BA BC ED EF inter ſe æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipſi ED æqualis eſt & parallela, erit & AD æqualis & parallela ipſi BE. Eadē ratione & CF ipſi BE æqualis & parallela erit. Vtraque igitur ipſarum AD CF ipſi BE æqualis eſt & parallela. Quæ autem eidem rectę lineę ſunt parallelę, nō exiſtentes in eodem, in quo ipſa plano; & inter ſe parallelę erūt. ergo AD parallela eſt ipſi CF, & æqualis. atque ipſas coniungunt AC DF, & AC igitur ipſi DF æqualis eſt & parallela. & quoniā duæ rectę lineę AB BC duabus DE EF æquales ſunt, & baſis AC eſt æqualis baſi DF; erit angulus ABC angulo DEF æqualis. ſi igitur duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingētibus ſint parallelę, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. quod oportebat demonſtrare.



32. primi.

Ex antecedente.

33. primi.

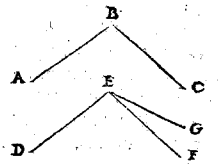
8. primi.

SCHOLIUM.

CONVERSUM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non exiſtentibus, & earum vna parallella ſit uni continentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint duo anguli aequales ABC DEF: & rectae lineae AB BC angulum ABC continentes nō ſint in eodem plano, in quo DEF. ſit autem DE parallela ipſi AB. Dico & EF ipſi BC parallelam eſſe. Si enim nō eſt EF parallela ipſi BC, erit alia ipſi parallela, ſit EG. Itaque quoniam duae rectae lineae ſeſe contingentes AB BC duabus rectis lineis ſeſe cō tingentibus DE EG ſunt parallelae, nō autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC eſt aequalis. Sed et angulus DEF ponitur aequalis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG aequalis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur EG parallela eſt ipſi BC. ſimiliter oſtendemus neque aliam vllam eidem BC parallelam eſſe preter ipſam EF. ergo EF ipſi BC eſt parallela. quod demonſtrare oportebat.

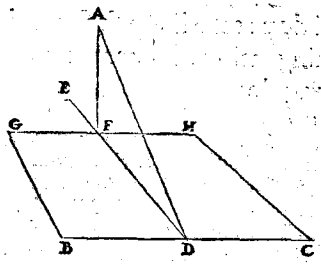


PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem pūctum ſublime A, datum autem ſubiectum planum. oportet à puncto A ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineā ducere. In ſubiecto enim plano ducatur quędam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad BC per

C perpendicularis agatur A D. Si quidem igitur AD perpẽdicularis ſit etiam ad ſubiectum planum; factum iam erit, quod proponebatur: ſin minus, ducatur à puncto D ipſi B C in ſubiecto plano ad rectos angulos D E: & à pũcto A ad DE perpendicularis ducatur AF. deniq; per F ducatur GH ipſi BC parallela. Et qm̃ BC vtri que ipſarum DA DE eſt ad rectos angulos, erit & B C ad rectos angulos plano per ED DA tranſeunti, atq; eſt ipſi parallela GH. Si aũt ſint duæ rectæ lineę parallelæ, quarum vna plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA tranſeunti ad rectos angulos eſt: ac propterea ad omnes rectas lineas, quę in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt, eſt perpendicularis. contingit aũt ipſam AF exiſtẽs in plano per ED DA. ergo G H perpendicularis eſt ad F A. & ob id F A eſt perpẽdicularis ad GH: eſt autem AF & ad DE perpẽdicularis. ergo A F perpendicularis eſt ad vtrãq; ipſarum HG DE. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe contingentibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per E D GH ducto eſt ad rectos angulos. planum autem per ED GH eſt ſubiectum planum. ergo AF ad ſubiectum planum eſt perpẽdicularis. A dato igitur puncto ſublimi A ad ſubiectum planum perpendicularis recta linea ducta eſt AF. quod facere oportebat.

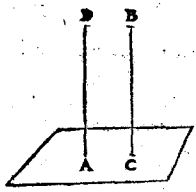


11. primi. 12 primi. 4. huius. 8 huius. 3. diffi. 4. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipſo datum, eſt ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Sit datum quidem planum ſubiectum, punctum autẽ, quod in ipſo ſit A. oportet à puncto A ſubiecto plano ad rectos angulos rectã lineam conſtituere. Intelligatur aliquod punctũ ſublime B, à quo ad ſubiectũ planum agatur perpendicularis B C; & per A ipſi BC parallela ducatur AD. Qm̃ igitur duę rectæ lineæ parallelæ ſunt A D CB, vna autem ipſarum B C ſubiecto plano eſt ad rectos angulos; & reliqua AD ſubiecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipſo eſt datum ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. quod facere oportebat.

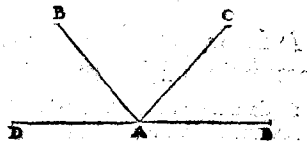


Ex antecedente. 8 huius.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à pũcto, quod in ipſo eſt, duæ rectę lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte.

Si enim fieri poteſt, dato plano à puncto quod in ipſo eſt A, duæ rectę lineę AB AC ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte: & ducatur planũ per BA AC, quod faciet ſectionem per A in ſubiecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in vno ſunt plano. Et quoniam CA ſubiecto plano ad rectos angulos eſt, & ad omnes rectas lineas, quę in ſubie-



3. huius. A 3. diffi.

cto plano

cto plano existentes ipsam contingunt, recto s faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quę est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadē parte. quod demonstrare oportebat. B

F. C. COMMENTARIVS.

Et ducatur planum per BAC] *Sunt enim ex secunda huius rectae lineae BA AC in vno plano.* A

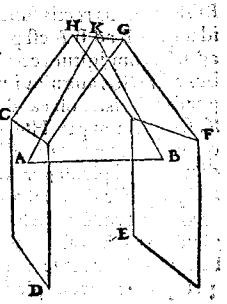
SCHOLIVM.

Quod fieri non potest] *Essent enim & parallelae, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelae autem essent ex sexta huius.* B

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se, conueniāt; & cōem sectionē faciāt rectā lineā GH; & in ipsa GH sumpto quouis puncto K, iungantur AK BK. Quū igitur AB perpēdicularis est ad EF planū, erit & perpēdicularis ad ipsā BK rectā lineā in plano EF producto existētē. quare angulus ABK rectus est. Eadē ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sunt necesse est. Ad quę igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.



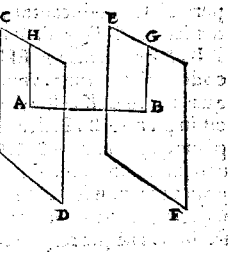
3 diff.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

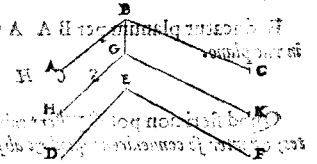
Sint duo plana parallela CD EF, & recta quędam linea AB ad planum CD sit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient tandem inter sese rectae lineae BG AH. quare & ipsa plana conuenient. atqui parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.



THEO-

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XV.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.



Duæ enim rectæ lineę ſeſe tangẽtes AB BC duabus rectis lineis ſeſe tangẽtibus DE EF parallelæ ſint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF tranſit perpendicularis BG, quę plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. Itaque quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE EF, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam vtraque earum GH GK, quę eſt in eodem plano: rectus igitur eſt vterque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela eſt ipſi GH, anguli GBA BGH duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt BGH. ergo et GBA rectus erit; ideoq; G B ad B A eſt perpendicularis. Eadem ratione & G B eſt perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC ſe inuicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem cauſſam BG eſt perpendicularis ad planum per HG G K. ſed planum per HG GK eſt illud, quod per DE EF tranſit. quare BG ad planũ, quod tranſit per DE EF eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt BG etiam perpendicularis ad planũ per AB BC. atq; eſt ad planũ per DE EF perpẽdicularis. ergo BG perpẽdicularis eſt ad vtrũq; planorũ, quæ per AB BC DE EF trãſeũt. Ad quæ vero plana eadẽ recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. parallelũ igitur eſt planũ per AB BC plano per DE EF. Quare ſi duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod demonſtrare oportebat.

5. diff.

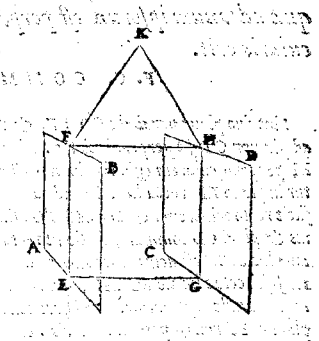
29. primi.

2. huius.

Ex antecedente.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelę erunt.



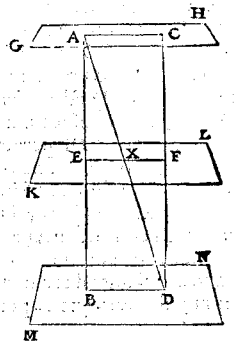
Duo enim plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH ſecentur: communes autem ipſorũ ſectiones ſint EF GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe. ſi enim non eſt parallela, productæ EF GH inter ſe conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, vt ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK eſt in plano AB, & omnia quæ in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt. vnum autem punctorum, quæ ſunt in EFK, eſt ipſum K punctum. ergo K eſt in plano AB. Eadem ratione & K eſt in CD plano. ergo plana AB CD producta inter ſe cõuenient. non conueniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectę lineę producte conuenient ad partes FH, ſimiliter demonſtrabimus neque ad partes EG conuenire, ſi producantur

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelę ſunt.ergo EF ipſi GH eſt parallela.ſi igitur duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt.quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

Si duæ rectę lineę à parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur.

Duæ enim rectæ lineę AB CD à parallelis planis GH KL MN ſecentur in punctis A E B C F D.Dico vt AE recta linea ad ipſam EB, ita eſſe CF ad FD. Iungantur enim AC BD A D:& occurat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX ſecantur, communes ipſorum ſectiones EX BD parallelę ſunt.Eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC ſecantur, communes ipſorũ ſectiones AC FX ſunt parallelæ. Et quoniã vni laterum trianguli ABD, videlicet ipſi BD parallela ducta eſt EX, vt AE ad EB,ita erit AX ad XD. Rurſus quoniam vni laterum trianguli AD C,nempe ipſi AC parallela ducta eſt XF, erit vt AX ad XD,ita CF ad FD. oſtenſum autem eſt & vt AX ad XD, ita eſſe AE ad EB.& vt igitur AE ad EB,ita eſt CF ad FD.Quare ſi duę rectę lineæ à parallelis ſecentur planis,in eaſdem proportiones ſecabuntur. quod demonſtrare oportebat.



Ex antecedente.

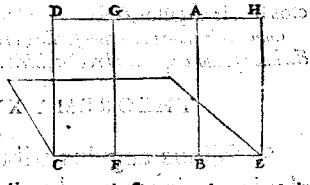
2.ſexti.

11.quinti.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quædam AB ſubiecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipſam AB tranſeunt, ſubiecto plano ad rectos angulos eſſe. producatur enim per AB planum DE, ſitq; plani D E, & ſubiecti plani communis ſectio CE: & ſumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipſi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad ſubiectũ planum eſt perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quę ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano perpendicularis erit.quare & ad CE eſt perpendicularis. angulus igitur ABF rectus eſt. ſed & GFB eſt rectus. ergo AB parallela eſt ipſi FG. eſt autem AB ſubiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos angulos erit. At planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductę rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos ſint:& communi planorum ſectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG,oſtenſa eſt ſubiecto plano ad rectos eſſe angulos. ergo planum DE rectũ eſt ad ſubiectum planum.ſimiliter demonſtrabuntur, & omnia quę per AB trãſeũt plana ſubiecto plano recta eſſe. ſi igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos,& omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt;



3.diffi.

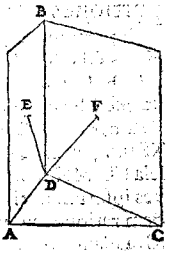
8.huius.

4.diffi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana se inuicem secantia AB BC subiecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subiecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autē BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad sublectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit DE ad subiectum planum perpendicularis. simi liter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subiectum planū, quare ab eodē puncto D subiecto plano duę rectæ li
cq. huius. neę ad rectos angulos constitutę sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subiecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB, communem planorum AB BC sectionem. Ergo si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidē plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis apparet conuersum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Fit enim recta linea dictorum planorum communis sectio. quare cum ea plana plano cuipiam ad rectos angulos esse ponantur, & recta linea quæ ipsorum communis sectio est eidem plano ad rectos angulos erit.

Conuersum vero præsentis theorematis apparet ex antecedente. quod huiusmodi est.

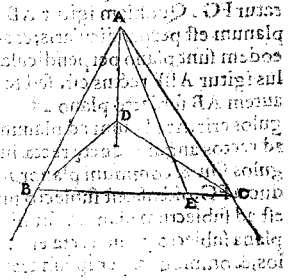
Quorum planorum se se mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum sectio est recta linea, per quam dicta plana transeunt. quod cum, recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipsa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumq; sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. Sin



minus.

minus,ſit maior BAC.& ad rectam lineam AB,& ad punctum in ipſa A conſtituatur angulo DAB in plano per BA AC tranſeũte,æqualis angulus BAE; ponaturq; ipſi AD æqualis AE;& per E ducta BEC ſecet rectas lineas AB AC in punctis BC & DB DC iungantur.Itaque quoniam DA eſt æqualis AE, communis autem AB, duę DA AB duabus BA AE æquales ſunt:& angulus DAB æqualis eſt angulo B AE.baſis igitur DB baſi BE eſt æqualis.Et quoniam duę DB DC ipſa BC maiores ſunt,quarum DB æqualis oſtenſa eſt ipſi BE;erit reliqua DC quàm reliqua EC maior.Quòd cum DA ſit æqualis AE, communis autem AC & baſis D C maior, baſi EC;erit angulus DAC angulo EAC maior. oſtenſus autem eſt & DAB angulus æqualis ipſi BAE.quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores ſunt. ſimiliter demonſtrabimus & ſi duo quilibet alij ſumantur,eos reliquo eſſe maiores.ſi igitur ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur, duo quilibet reliquo maiores ſunt, quomodocumque ſumpti.quod demonſtrare oportebat.

32.primi.

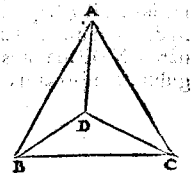
4.primi.

2.primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis ſolidus angulus minoribus,quàm quattuor rectis angulis planis continetur.

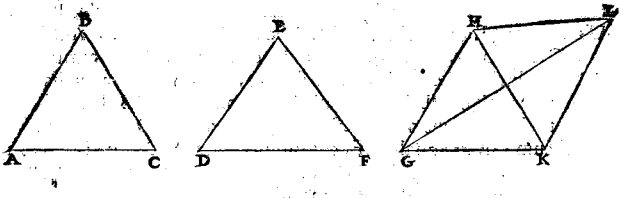
Sit ſolidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB cõtẽtus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor rectis eſſe minores.ſumãtur enim in vnaquaq; ipſarũ AB AC AD quęuis pũcta B C D,& BC CD DB iũgãtur.Quoniam igitur ſolidus angulus ad B tribus angulis planis cõtinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores ſunt.anguli igitnr CBA ABD angulo CBD ſunt maiores. Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores ſunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB.quare ſex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB ſunt maiores. ſed tres anguli CBD BDC DCB ſunt ęquales duobus rectis.Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores ſunt.Quòd cũ ſingulorũ triãgulorum ABC ACD ADB tres anguli ſint ęquales duobus rectis,erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD ęquales ſex rectis.quorũ ſex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis ſunt maiores.reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli,qui ſolidum continent angulum quattuor rectis minores erunt.Quare omnis ſolidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur.quod oportebat demonſtrare.



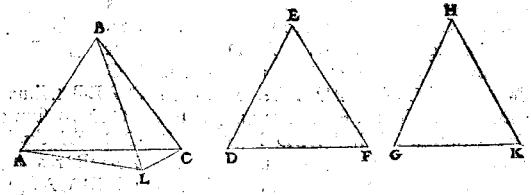
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si ſint tres anguli plani,quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti,contineant autem ipſos rectæ lineæ æquales fieri poteſt, vt ex ijs, quæ rectas æquales coniungunt triangulum conſtituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores,quomodocumque ſumpti,videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC;& præterea anguli GHK ABC angulo DEF: maiores ſintq; æquales rectæ lineę AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungãtur.Dico fieri poſſe, vt ex ęqualibus ipſis AC DF GK triangulũ cõſtituatur;hoc eſt ipſarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua eſſe maiores, quomodocumq; ſumptas. ſi quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter ſe æquales ſint; manifeſtũ



est & æqualibus factis AC DF GK ex æqualibus ipsis triangulum constitui posse.
23.primi. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipsa H, angulo ABC æqualis angulus constituatur KHL, & ponatur vni ipsarum AB BC DE EF GH HK æqualis HL: & GL KL iungantur. Itaque quoniam duæ AB BC duabus KH HL æquales sunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit basis AC æqua
4.primi. lis basi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF sunt maiores; æqualis autē est angulus ABC angulo KHL: erit GHL angulo DEF maior. Quòd cum duæ GH HL duabus DE EF æquales sint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior,
24.primi. basis GL basi DF maior erit. Sed GK KL ipsa GL sunt maiores. multo igitur maio
20.primi. res sunt GK KL ipsa DF. est autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF sunt maiores. similiter demonstrabimus, & ipsas quidem AC DF maiores esse GK, ipsas uero GK DF maiores AC. fieri igitur potest vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triā gulum constituatur.

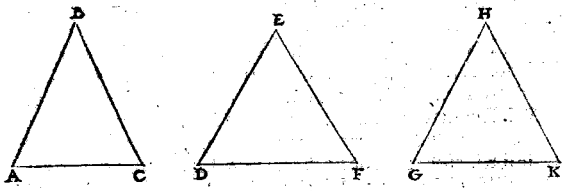


ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti: cōtineant autem ipsos æquales rectæ lineę AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri posse, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est rursus duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. si igitur rursus anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales erunt, & duę reliqua maiores. sin minus, sint inæquales an-
24.primi. guli ad B E H, & maior qui est ad B vtroque ipsorum qui ad E H. maior igitur est & recta linea AC vtraque ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC vnà cū altera ipsarum DF GK reliqua esse maiorem. Dico & DF GK ipsa AC maiores es-
23.primi. se. constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & vni ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL LC iungantur. Quoniam igitur duę AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H angulo ABC maiores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quòd cum duę LB BC duabus DE EF
24.primi. æquales sint, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC maior; basis DF basi LC maior erit. ostensa est autem GK æqualis AL. ergo DF GK ipsis AL LC sunt maiores. sed AL LC maiores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK ipsa AC maiores erūt. quare rectarum linearum AC DF GK duę reliquæ maiores sunt, quomodocumque sumptę; ac propterea fieri potest, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. quod oportebat demonstrare.

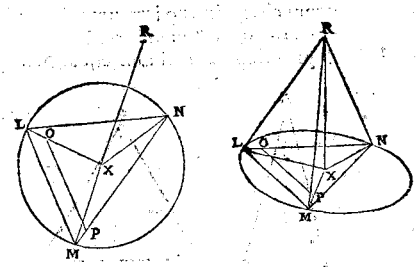
PRO-

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis eſſe minores.



Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumq; ſumpti. ſintq; tres anguli quattuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipſis ABC DEF GHK ſolidum angulum conſtituere. abſcindatur æquales AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungãtur. fieri igitur põt, vt ex æqua libus ipſis AC DF GK conſtituatur triangulum. Itaque conſtituatur LMN, ita vt AC quidem ſit æqualis LM, DF vero ipſi MN: & præterea GK ipſi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN deſcribatur: ſumaturq; ipſius cẽtrum X; quod vel erit intra triangulũ LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primũ intra: ſitq; X: & LX MX NX iungãtur. Dico AB maiorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB eſt æqualis LX, atque eſt AB ipſi BC æqualis; erit LX æqualis BC; eſt autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales ſunt: altera alteri; & AC baſis baſi LM æqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM eſt æqualis. Eadem ratione & angulus quidẽ DEF eſt æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales ſunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis ſunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt æqualis. Dico præterea neque AB minorem eſſe ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ponatur ipſi quidem AB æqualis XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB eſt æqualis BC, & XO ipſi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM eſt æqualis; ac propterea LM parallela eſt ipſi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. eſt igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX, quàm XO. ergo & LM quàm OP eſt maior. Sed LM poſita eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales ſunt, & baſis AC maior baſi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonſtrabimus & DEF angulum maiorẽ eſſe angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN



Ex antecedente. 22. primi.

8. quarti.

8. primi.

Corol. 15. primi.

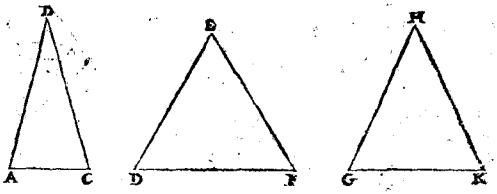
2. sexti.

4. sexti.

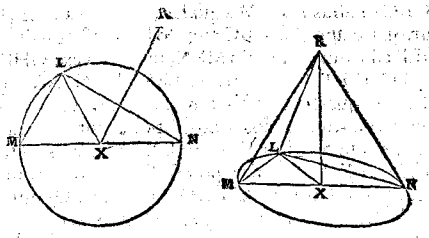
25 primi.

MXN NXL sunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores po
Coro.15.primi. nuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed
12.huius. & æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quàm LX. ostensum autẽ est neque esse æqualem. ergo maior sit necesse est. constituatur à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN iungan-
5.diffi. tur. Quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad vnamquamque ipsarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX est æqualis
4.primi. XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis basi RM. Eadem ratione & RN vtrique ipsarum RL RM est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ R L RM RN inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB qua-
47.primi. dratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale est quadratũ ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoq; AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est vnaquæque ipsarum BC DE EF GH HK; ipsi vero RL æqualis vtraque ipsarum RM RN. vnaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. Quòd cum duæ LR RM duabus AB BC æquales sint, & basis LM ponatur
8.primi. æqualis basi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R, qui angulis LRM MRN LRN cõtinetur.

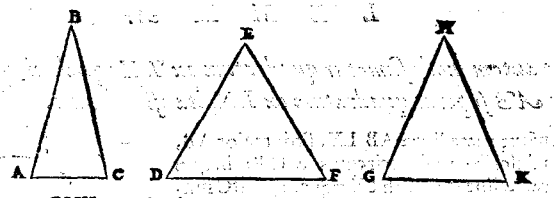
Sed sit centrum circuli in vno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & X L iungatur. Dico rursus AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis L, X vel ipsa minor. sit primum æqualis. duę igitur AB BC, hoc est DE EF



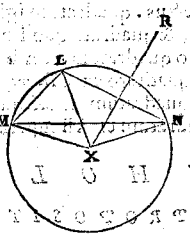
duabus MX XL, hoc est ipsi M N æquales sunt. sed MN ponitur æqualis DF. ergo DE EF
20.primi. ipsi DF sunt æquales. quod fieri non potest. non igitur AB est æqualis LX. similiter neq; minor. multo enim magis id quod fieri non potest, sequeretur. ergo AB ipsa LX maior est. & similiter si excessui quo quadratũ ex AB superat quadratũ ex LX æquale ponatur, vt quadratum ex RX, & ipsa R X circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

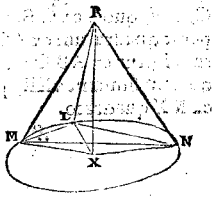


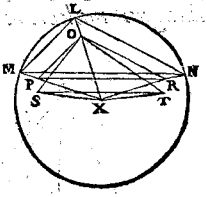
Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX iũgantur. Dico & sic AB ipsa LX maiorem esse. si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML. angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. Ea
8.primi dem



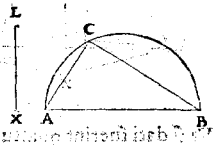
dem ratione & GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores sunt. & angulus igitur MXN ipso DEF est maior. Et quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. ostensus autem est maior, quod est absurdum. non igitur AB est æqualis LX. deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare maior necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsa æqualē ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. Itaque dico neque minorem esse AB ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX quàm XO. ergo LM quàm OP est maior. sed LM est æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales, altera alteri; & basis AC maior est basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. similiter & si XR sumatur æqualis vtriq; ipsarum XO XP, & iungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR maiorem. constituatur ad rectam lineam LX, & ad punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipsi OX æqualis: iungantur; OS OT ST. Et quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS; erit basis AC, hoc est LM basi OS æqualis. Eadem ratione & LN est æqualis ipsi OT. Quòd cum duæ ML LN duabus OS ST sint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT; erit et basis MN basi ST maior. sed MN est æqualis DF. ergo et DF quàm ST maior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, et basis DF maior basi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autē est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior est. sed et minor. quod fieri non potest.







3. sexti. 4. sexti.



25. primi.

4. primi.

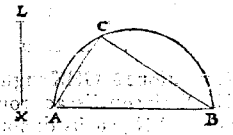
42. primi.

25. primi.

LEMMA

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ita oſtendemus.

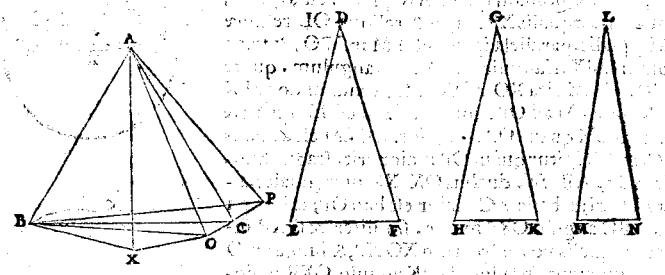


Exponãtur rectę lineæ AB LX, ſitq; maior AB, & in ipſa deſcribatur ſemicirculus A C B; in quo aptetur recta linea AC ipſi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in ſemicirculo ABC angulus eſt AGB, erit A C B rectus. quadratum igitur
31. tertii. 47. primi. quod fit ex AB æquale eſt, & quadrato quod ex A C, & ei, quod ex C B. ergo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem eſt AC ipſi L X. quadratum igitur ex AB ſuperat quadratum ex LX, quadrato ex C B. Quare ſi ipſi C B æqualem ſumamus XR, quadratum ex AB ſuperabit quadratum ex L X, eo quod fit ex R X quadrato.

SCHOLIVM.

PROPOSITIO I.

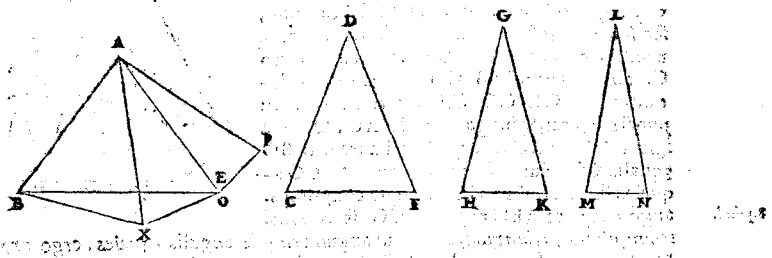
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorũ vno reliqui ſint maiores quo modocunque ſumpti, contineant autem ipſos rectæ lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos ſubtendentium, vna reliquas maiores eſſe quomodocũque ſumptas: hoc eſt fieri poſſe, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura conſtituatur.



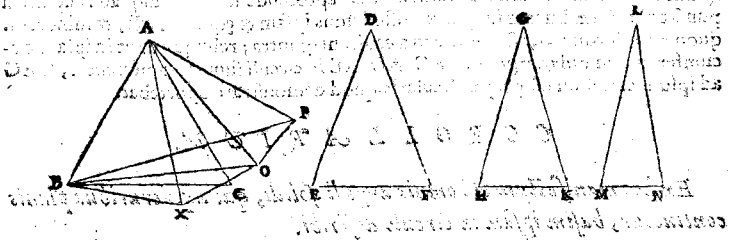
Vt ſi dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorum tres reliquo ſint maiores quomodocumq; ſumpti: æquales autem ſint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN, & iungantur BC EF HK MN. Dico ipſarum BC EF HK MN tres reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas. ſi enim æquales ſint anguli ad puncta A D G L, & latera BC EF HK MN æqualia erunt. & manifeſtum eſt tres vna reliqua eſſe maiores, quomodocumque accipiãtur. ſi vero inæquales ſint, ſit maior qui ad A. baſis igitur BC ſingulis ipſarum EF HK MN maior eſt. quare BC cũ
24. primi. vna earum reliquis quibuslibet eſt maior: & cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam EF HK MN ipſa BC maiores eſſe. Quoniam enim angulus ad A maior
23. primi. eſt ſingulis ipſorum D G L, conſtituatur ad BA rectam lineam, & ad pũctum in ipſa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX, & ad rectam lineam AX, & ad pũctũ in ipſa A angulo, qui ad G æquali cõſtituto angulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipſam, vel extra ipſam. Cadat primũ intra, & ad rectam lineam OA,

& ad

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L æqualis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo sunt maiores. & ipsis AB AC æquales ponatur AX AO AP: iungãturq; BX XO BO OP BP. Quin igitur duę BA AP duabus BA AC sunt æquales, angulus aũt BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi AC maior. Sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP mul- 24. primi.



to maiores sunt ipsa BC. atque est BX quidem æqualis ipsi EF, quoniam & angulus BAX æqualis est angulo EDF; XO vero est æqualis HK, & OP ipsi MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum æqualem angulo G cadat in ipsam AC, vt in secunda figura: & BX XC CP iungantur. Itaque quoniam BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN, erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. Denique recta linea AO, quæ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, vt in tertia figura: ponaturq; æqualis ipsi AP. & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam 4. primi.

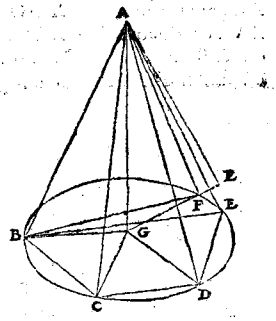


igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales sunt, angulus autem BAP maior est angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rursus quoniam BO OP maiores sunt quã BP; & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed BP est maior BC. quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC; suntq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sunt. Et quoniam tres reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptæ, fieri potest, vt ex ipsis quadrilaterum ipsam constituatur. 24. primi.

PROPOSITIO II.

Si in aliquod planũ à quodam sublimi puncto æquales rectę lineę cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.

A puncto enim A in ſubiectum planum æquales rectæ lineę cadãt AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia eſſe. Iungantur enim in ſubiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triãgulum circulus deſcribatur BCDF. ergo puncta BCD in circuli circumferentia ſunt. Dico etiam ipſum E in circumferẽtia eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & ſumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectę lineæ ducantur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F ſecet, & iungantur AE AG. Quoniã igitur AB ipſi AC eſt æqualis, eſt autem & BG æqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æquales ſunt. & baſis AG eſt vtrique communis.



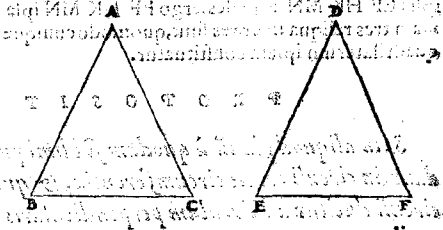
8. primi. angulus igitur ABG angulo ACG eſt æqualis, triangulumq; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus AGB æqualis eſt angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æqualis erit. Quòd cũm AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem exiſtentes
4. huius. plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipſas ducitur perpendicularis erit. quare ad circulum ipſum. Itaque quoniam GD ipſi GF eſt æqualis, communis
4. primi. autem & ad rectos angulos GA; erit baſis AD baſi AF æqualis. ergo & vnaqueque
16. primi. ipſarum AB AC AE æqualis eſt ipſi AF. Et quoniam angulus AFE maior eſt recto AGF, quòd exterior ſit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF an-
19. primi. gulus qui eſt ad F maior eſt angulo qui ad E. quare & latus AE maius eſt latere AF. ſed & oſtenſum eſt æquale. quod eſt abſurdum. non igitur punctum E extra circuli circumferentiam cadit. ſimiliter oſtendemus neque cadere intra. ducentes enim ad ipſum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rurſuſq; ab A ad dictũ punctum rectam lineam iungentes, oſtẽdemus ipſam & æqualem eſſe, & minorem. quod eſt abſurdum. At ſi neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipſam circumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli ſunt circumferentia, & AG ad ipſum circulum eſt perpendicularis. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi.

PROPOSITIO XXI.

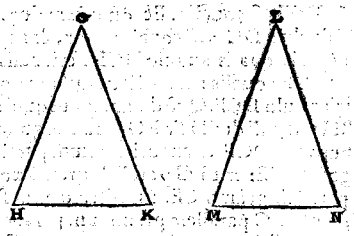
Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui ſint maiores quomodocũq; ſumpti, ſolidũ angulũ cõſtituere. oportet aũt datos angulos quatuor rectis eſſe minores.



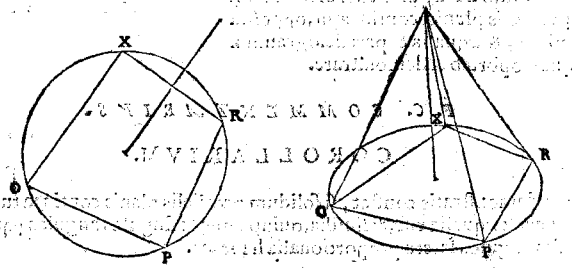
Sint dicti anguli BAC ED F HGK MLN. oportet ex angulis qui ſunt ad puncta A D G L ſolidum angulum conſtituere. ſumantur æquales rectæ

lineæ

lin eæ, quę ipſos angulos continent, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur ſunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque ſumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiēt. fiat & ſit X O P R. Et quoniā oportet ex æquicruribus triangulis B AC EDF HGK MLN ſolidum angulum conſtituere: omnis autem ſolidi



Ex coroll. antecedenti.

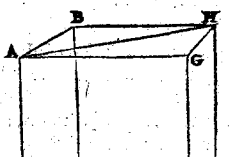


anguli, qui æquicruribus triangulis continetur baſim circumſcribit circulus; & anguli ſolidi contenti triangulis B AC EDF HGK MLN, baſim circulus circumſcribet. dicti vero anguli baſis conſtat ex baſibus ipſorum triangulorum, videlicet XO PR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circūſcribit. Et deinceps eadem conſtruentes ijs, quę dicta ſunt in angulo ſolido pro baſi triangulum habente propoſitum efficiemus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico oppoſita eius plana, & æqualia & parallelogramma eſſe. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC ſecantur, cōmunes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. ergo AB ipſi CD eſt parallela. Rurſus quoniā duo plana parallela BF AE ſecantur à plano AC, cōmunes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. parallela igitur eſt AD ipſi BC: oſtenſa autem eſt & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, & vnumquodque ipſorum DF FG GB BF AE parallelogrammum eſſe. Iūgantur AH DF. Et quoniam parallela eſt AB quidem ipſi DC; BH vero ipſi CF, erunt duę AB BC ſeſe tangentes duabus DC CF ſeſe tangentibus parallelæ, & non in eodem plano. quare æquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an-

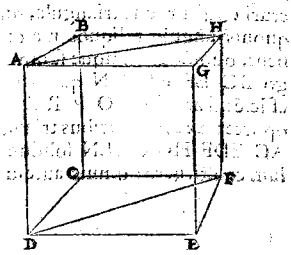


16. huius.

10. huius.

gulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales sunt, & angulus ABH æqualis angulo DCF, erit basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. Quòd cum ipsius quidem ABH trianguli duplũ sit BG parallelogrãmũ; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrãmũ CE: erit BG parallelogrãmũ æquale parallelogrãmo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma sunt, quod oportebat demonstrare.

34. primi. 4. primi. 41. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM.

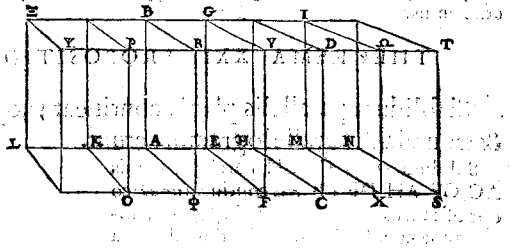
Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis continea tur oppositæ ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

11. diffi. sexti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidũ enim parallelepipedum AB CD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico vt AEFΦ basis ad basim EH CF, ita esse ABFY solidum ad solidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponantur ipsi quidem EH æquales quotcumque HM MN; ipsi uero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniã igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se æqualia: itemq; æqualia inter se parallelogramma KX KB AG, & adhuc parallelogramma LΥ KP AR inter se æqualia; opposita enim sunt. Eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se; itemq; parallelogrãma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadem ratione & tria solida ED DM MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. Et eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius HY solidi: & si basis LF est



1. sexti. Ex antecedente.

eſt æqualis baſi NF, & ſolidum LY ſolido NY æquale erit. & ſi baſis LF ſuperat NF baſim, & LY ſolidum ſolidum NY ſuperabit, & ſi minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, duabus ſcilicet baſibus AF FH, & duobus ſolidis AY YH ſumpta ſunt æque multiplicia, baſis quidem AF, & AY ſolidi, videlicet baſis LF, & ſolidum LY: baſis vero HF, & HY ſolidi, nempe baſis NF & ſolidum NY. & demóſtratum eſt ſi baſis LF ſuperat baſim NF, & LY ſolidum ſolidum NY ſuperare, & ſi æquales æquale, & ſi minor minus. eſt igitur vt AF baſis ad baſim FH, ita AY ſolidũ ad ſolidum YH. Quare ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, oppoſitis planis parallelo; erit vt baſis ad baſim, ita ſolidũ ad ſolidũ. quod oportebat demonſtrare.

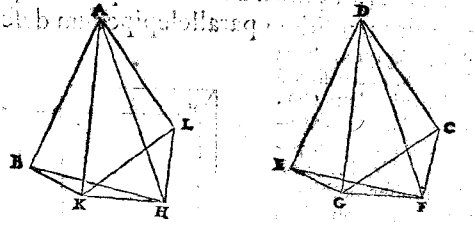
F. C. COMMENTARIVS.

Quod ſi ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus parallelo; erit ſolidum ad ſolidum, vt altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum propoſitione XVIII.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVI.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualem ſolidum angulum conſtituere.

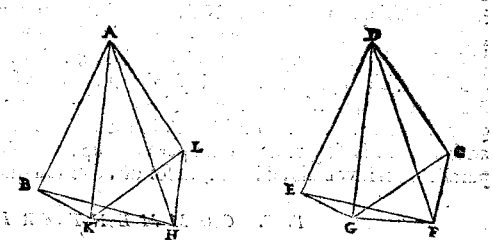


Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipſa pũctum A, & datus ſolidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis cõtineatur. oportet ad datam rectam lineã AB, & ad datum in ipſa punctum A, dato angulo ſolido ad D æqualẽ ſolidum angulum conſtituere. ſumatur enim in linea DF quod vis punctum F, à quo ad planum per ED DC tranſiens ducatur perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipſa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus conſtituatur BAL; angulo autem EDG conſtituatur æqualis BAK. deinde ipſi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq; ipſi GF æqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum ſolidum ad A, qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem eſſe ſolido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contẽto. ſumantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quoniam igitur FG perpendicularis eſt ad ſubiectũ planum; & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, ſuntq; in ſubiecto plano rectos faciet angulos. Vterque igitur angulorũ FGA FGD FGE rectus eſt. Eadẽ ratione, & vterq; ipſorum HKA HKB eſt rectus. Et quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales ſunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit baſis BK baſi EG æqualis. eſt autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis igitur et HB ipſi FE. Rurſus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales ſunt, et rectos continent angulos; erit baſis AH baſi DF æqualis: eſtq; AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE ſunt æquales; et baſis HB eſt æqualis baſi FE. ergo angulus BAH angulo EDF æqualis erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC eſt æqualis, quandoquidem ſi aſſumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL eſt

11. huius. 23. primi. 12. huius. 3. diffi. 4. primi. 4. primi. 8. primi.

æqualis

æqualis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. Et quoniã duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, et angulos æquales continent; basis KL basi GC æqualis erit. est autem et KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus DC GF sunt æquales; angulosq; rectos continent. ergo basis HL æqualis est basi FC. Rursus quoniam duæ HA AL duabus FD DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atque est angulus BAL angulo EDG æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. quod facere oportebat.



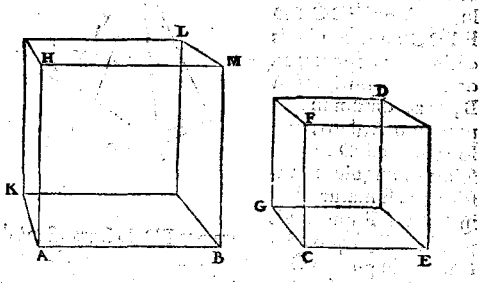
4. primi.

8 primi.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidẽ linea AB; datum vero solidũ parallelepipedum CD. oportet à data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positũ solidum parallelepipedum describere. constituatur enim ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita vt angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angulo GCF, & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK; vt autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. Quoniam igitur est vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogrãma solidi AL tribus parallelogrãmis solidi CD similia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia, & similia: Ergo totũ AL solidum toti solido CD simile erit. A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. quod facere oportebat.



Ex antecedente.

12. sexti.

1. diffi. sexti.

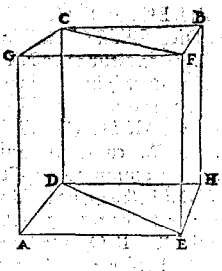
24. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum

positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorũ planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB solidum à plano CDEF bifariã secatur. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIX.

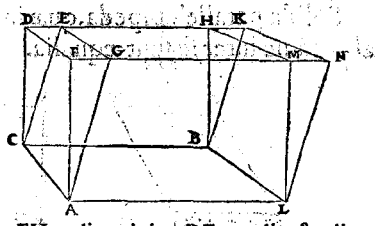
Solida parallelepipeda, quę in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stãtes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est vtrumque ipsorum CH CK; erit CB vtrique ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autẽ DG est æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammũ CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

34. primi.

1. sexti.

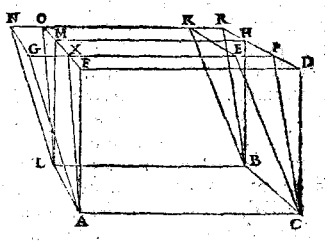
24. huius.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

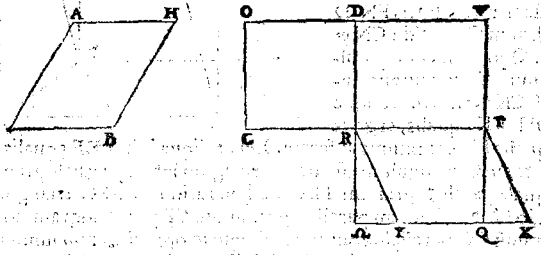


Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidũ CM solido CN æquale esse. producãtur enim NK DH & GE FM, cõueniantq; inter se in punctis RX: & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. solidum CM, cuius basis quidẽ ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est æquale solido CO, cuius basis parallelogrammum ACBL, & ei oppositũ X P R O; in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. Sed solidum CO, cuius basis quidem parallelogrãmum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est æquale solido CN, cuius basis ACBL parallelogrãmum, & ipsi oppositum GE KN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadẽ sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdẽ rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

Ex antece dente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadẽ altitudine inter se sunt æqualia.



Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadẽ altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. sint autem primum stantes HK BE AG LM OP DF CΞ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT, constituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturq; basis RX, & τY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL. Et quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosq; æquales continẽt, parallelogrammum Rτ parallelogrammo AM æquale & simile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogrãma solidi AE tribus parallelogrammis solidi τY æqualia & similia sunt. Sed & tria tribus

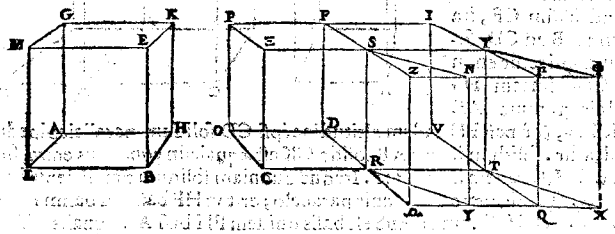
29. primi.

1. diffi. sexti.

bus oppoſita & æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedũ toti ſolido parallelepipedo ϒ eſt æquale. producantur DR XY, cõueniantq; inter ſe in pũcto Ω, & per T ipſi D Ω parallela ducatur TQ, & producãtur TQ OD, & cõueniant in V, compleanturq; ſolida Ωϒ RI. ſo idum igitur Φ Ω cuius baſis eſt Rϒ parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi Ωπ eſt æquale ſolido ϒY, cuius baſis eſt Rϒ parallelogrammum, & oppoſitum ipſi ϒΦ, in eadem enim ſunt baſi Rϒ, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN Φπ ϒΦ in eiſdẽ ſunt rectis lineis ΩXZΦ. Sed ſolidum ϒϒ æquale eſt ſolido AE. ergo & ϒΩ ſolido AE eſt

24. huius.

29. huius.



æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD eſt æquale, quoniam & ipſi AB; parallelogrammumq; ΩT æquale parallelogrammo CD: aliud autem parallelogrammum DT. eſt igitur vt CD baſis ad baſim DT, ita ΩT ad ipſam DT. Et quoniam ſolidum parallelepipedum CI plano RF ſecatur planis oppoſitis parallelo; erit vt CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidum. Eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano Rϒ oppoſitis planis parallelo, vt ΩT baſis ad baſim CD, ita erit ſolidum Ωϒ ad RI ſolidum. ſed vt CD baſis ad baſim DT, ita baſis ΩT ad ipſam TD. Vt igitur ſolidum CF ad RI ſolidum, ita ſolidum Ωϒ ad ſolidum RI. Quod cum vtrumque ſolidorum CF Ωϒ ad ſolidum RI eandem habeat proportionem, ſolidum CF ſolido Ωϒ eſt æquale. ſolidum autem Ωϒ oſtenſum eſt æquale ſolido AE. ergo & AE ipſi CF æquale erit. ſed non ſint ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE æquale eſſe ſolido CF. Ducãtur à punctis K E G M P F N S ad ſubiectum planum perpendiculares KΣ ET GY MΦ PX Fϒ NΩ SI, & plano in punctis Σ T Y Φ X ϒ Ω I occurãt, & ſungantur ΣT YΦ XY TΦ Xϒ XΩ Ωϒ I. æquale igitur eſt KΦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eadem altitudine, quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed KΦ ſolidum ſolido AE eſt æquale: ſolidum vero PI æquale ſolido CF. ſi quidem in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quę in æqualibus ſunt baſibus, & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.

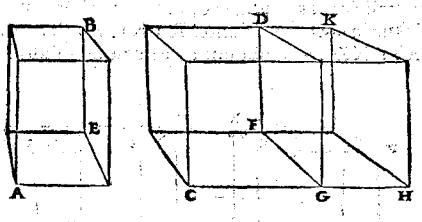
11. huius.

Ex proximæ demõſtratis.

30. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quę eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes.



Sint ſolida parallelepipeda AB CD, quæ eãdem altitudinem habeant. Dico inter ſe eſſe vt baſes. hoc eſt vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad CD ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à baſi FH eadem altitudine ipſi CD ſolidum parallelepipedum GK compleatur. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt æquale; in æqualibus enim ſunt baſibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam ſolidum parallelepipedum CK plano DG ſecatur, oppoſitis planis parallelo; erit vt HF baſis ad baſim FC, ita ſolidum HD ad DC ſolidum, atque eſt baſis quidem FH baſi AE æqualis: ſolidum vero GK æquale ſolido AB. eſt igitur & vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad ſolidum CD. Quare ſolida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente. 25. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conſtat etiam ſolida parallelepipeda in eadem baſi, vel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum, propoſitione XIX.

COROLLARIVM.

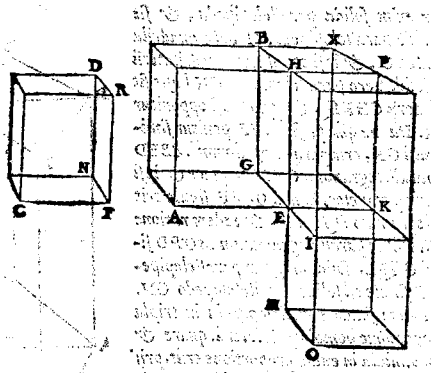
Ex his igitur & iam demonſtratis ſequitur priſmata triãgulares baſes habentia, quę vel in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituũtur, & eadem altitudine inter ſe æqualia eſſe. Et inſuper quæ eandem habent altitudinem inter ſe eſſe, vt baſes. Et quę vel in eiſdem vel æqualibus baſibus conſtituuntur, inter ſe eſſe, vt altitudines.

28. huius. *Sunt enim ea ſolidorum parallelepipedorum dimidia. per baſes autem priſmatis intelligimus non quaſcunque, ſed alterum dumtaxat oppoſitorum planorum ſimilium & parallelorum, vt nũc in priſmate triangularem baſim habente, alterum triangulum, alioquin obſtarent, quæ in vltima propoſitione huius traduntur.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplam proportionem habere eius, quã habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipſis AE GE HE: & ipſi quidem CF æqualis ponatur EK, ipſi vero FN æqualis EL; & adhuc ipſi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO ſolidum compleatur. Quoniam igitur duę KE EL duabus CF FN æquales ſunt; ſed & angulus KEL angulo CFN eſt æqualis: quod & angulus AEG ipſi CFN ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum ſimile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum



mum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipſi DF parallelogrammo. tria igitur parallelegramma ſolidi KO tribus parallelogrammis CD ſolidi æqualia & ſimilia ſunt. Sed tria tribus oppoſitis æqualia ſũt & ſimilia. totum igitur KO ſolidum æquale eſt & ſimile toti ſolido CD. compleatur GK parallelogrãmũ; & à baſibus quidẽ GK KL parallelogrãmis, altitudine vero eadẽ ipſi AB ſolida cõpleãtur AX LP. Et quñ ob ſimilitudinẽ ſolidorũ AB CD eſt vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; æqualis aũt EG ipſi EK, & FN ipſi EL, & FR ipſi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. ſed vt AE quidẽ ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. ſed vt AG quidem ad GK, ita AB ſolidum ad ſolidũ EX: vt autem GK ad KL, ita ſolidum XE ad PL ſolidum: & vt PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO: & vt igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. ſi autem quattuor ſint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quàm ad ſecundam. ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. ſed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, & AE recta linea ad ipſam EK. quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam proportionem habebit eius, quã AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, & recta linea EK rectæ GF eſt æqualis. ergo & AB ſolidum ad ſolidum CD triplam habet proportionẽ eius, quam latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus: quod demonſtrare oportebat.

14 huius.

3. ſexti.

Ex antecedente.

11. quinti. 11. diffi quinti.

Ex antecedente. 1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod fit à prima ad ſolidum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionẽ habet eius, quam ad ſecundam.

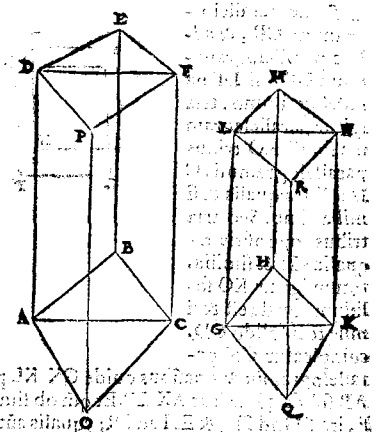
PROCLI COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis, ſequitur priſmata ſimilia, quę triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia priſmata triangulares baſes habentia, & ſimiliter poſita AF, GN; & priſmatis quidem AF baſis ſit triangulum ABC, & quod ipſi opponitur DEF: priſmatis uerò GN baſis ſit triangulum GHK, & ipſi oppoſitum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Dico priſma AF ad priſma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Con-

pleantur enim ſolida parallelepipeda, & ſit ſolidi quidē parallelepipedi AF baſis quadrilaterum ABCO, & ipſi oppoſitum quadrilaterū DEFP ſolidi vero parallelepipedi GN baſis ſit quadrilaterū GHKQ, & quod ipſi opponitur LM NR. Itaque qm̄ priſma AF ponitur ſimile priſmati GN, erit parallelogrāmum ABED ſimile parallelogrammo GHML. quare & ipſi oppoſitum parallelogrāmum OCFP ſimile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonſtrabitur parallelogrammum AOPD ſimile ipſi GQRL. ſolidum igitur parallelepipedum AF ſimile eſt ſolido parallelepipedo GN. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in tripla ſunt proportione homologorū laterū. quare & ipſorum dimidia in eadē proportione erūt. priſma igitur AF ad priſma GN triplā proportionē habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonſtrare.

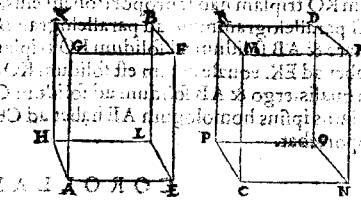
2. diff. huius
34. huius.



THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIIII.

Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.

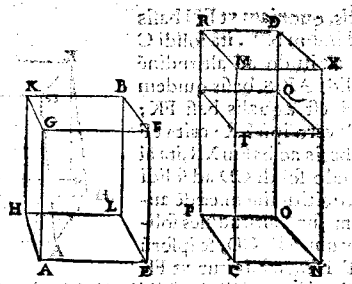
Sint æqualia ſolida parallelepipeda AB CD. Dico ipſorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpōdere: hoc eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Sint enim primū ſtantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos baſibus ipſorū. Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. Si igitur



baſis EH baſi NP ſit æqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido CD, erit & CM æqualis ipſi AG, ſi enim baſibus EH NP æqualibus exiſtentibus non ſint AG CM altitudines æquales, neque AB ſolidum ſolido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis eſt altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis: ſit neceſſe eſt. ac propterea vt EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG. ex quibus conſtat ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere. At vero non ſit baſis EH æqualis baſi NP. Sed EH ſit maior. eſt autem & AB ſolidum ſolido CD æquale. ergo maior eſt CM ipſa AG; alioqui rurſus ſequeretur ſolida AB CD æqualia nō eſſe, quæ ponuntur æqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipſi AG: & à baſi quidem NP, altitudine autem CT ſolidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur ſolidum AB ſolido CD eſt æquale, aliud autem aliud quod eſt VC, & æqualia ad idem eandem habēt proportionem; erit vt AB ſolidum ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. ſed vt AB ſolidum ad ſolidum CV, ita baſis EH ad NP baſim, æquealta enim ſunt AB CV ſolida. Vt autem ſolidum CD ad ipſum CV, ita MP baſis ad baſim PT, & MC ad CT. & vt igitur baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. eſt autem CT æqualis AG. ergo & vt EH baſis ad baſim NP, ita

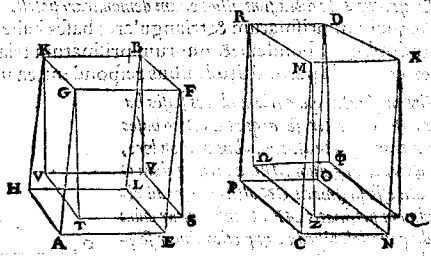
7. quinti.
32. huius.
25 huius.
1. ſexti.

NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AG CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim MP, ita solidi CD altitudo ad altitudinẽ solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Sint enim rursus stãtes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estq; vt EH basis ad basim NP, ita



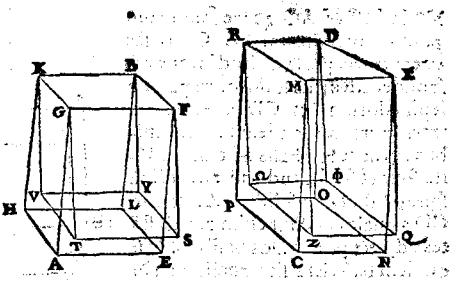
altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. ergo solidum AB solido CD est æquale. sed nõ sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH maior. maior igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est vt EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AC, æqualis autem est AC ipsi CT: erit vt basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed vt basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æquealta enim sunt solida AB CA. vt autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & vt igitur solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. Quòd cum vtrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandẽ proportionẽ habeat; erit AB solidũ solido CD æquale. quod demonstrare oportebat. 50. huius.

Non sint autem stãtes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpẽdiculares, quæ planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurant & cõpleantur solida FVXΩ, Dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD,



bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est solidum BT; in eadem namq; sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est æquale solido D Z, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido D Z æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos; bases altitudinibus ex contraria parte respondent: est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare vt EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi D Z ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ BT, itemq; solidorum DC BA. est igitur vt EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB: ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex cõtraria parte respõdeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Iisdem namque constructis, 31. huius. Ex ante demonstratis.

ctis, quoniam vt EH basis ad basim NP, ita solidi C D altitudo ad altitudinē solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP verò ipsi XR: erit vt F K basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædē autem sunt altitudines solidorum AB CD, & ipsorū BT DZ. est igitur vt FK



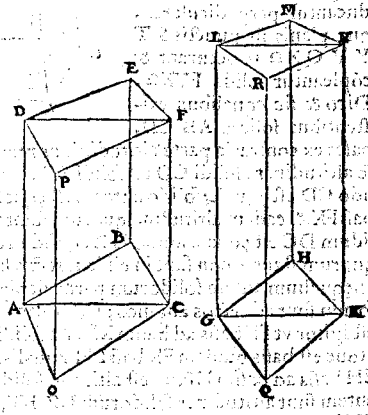
basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorū BT DZ parallelepipedorū bases ex contraria parte respondent altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidū quidem BT æquale est solido BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum verò DZ est æquale solido D C, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidū AB solido CD est æquale. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quę ante dicta sunt, illud etiam demonstrari potest.

Aequalium prismatum & triangulares bases habentium bases ex cōtraria parte altitudinibus respondent: & quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia.

Sint prismata, quae triangulares bases habent AF GN inter se aequalia. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt triangulum ABC ad triangulum GHK, ita esse prismatis GN altitudinem ad altitudinem prismatis AF. Compleantur enim solida parallelepipeda, quę etiam inter se æqualia erūt, cum sint prismatum dupla: æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. ergo vt solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, hoc est vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita est solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem. solidi parallelepipedi AF. sed vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum GHK. Vt igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo solidi parallelepipedi GN ad altitudinē solidi parallelepipedi AF, hoc est ita prismatis GN altitudo ad altitudinē prismatis AF. Rursus prismatum AF GN bases ex cōtraria parte respondent altitudinibus, hoc est vt triangulū ABC ad triangulū GHK, ita sit prismatis GN altitudo ad altitudinem prismatis AF. Dico prismata AF GN inter se aequalia esse. compleantur enim rursus solida parallelepipeda, erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, vt triangulum ABC ad

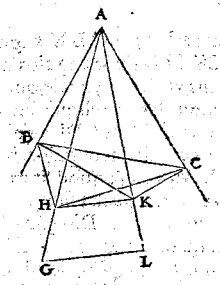


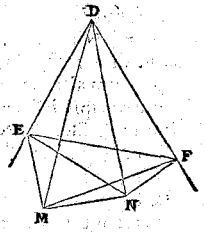
11. quinti.

ad triãgulum GHK. quare vt ſolidi parallelepipedi AF baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi GN, ita erit priſmatis GN altitudo ad altitudinẽ priſmatis AF, hoc eſt, ita ſolidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi AF. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. ergo & æqualia erunt eorum dimidia. priſma igitur AF priſmati GN eſt æquale. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipſorum ſublimes rectæ lineæ conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quæuis puncta, atque ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineæ: cum ſublimibus æquales angulos continebunt.





Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis AD ſublimes rectæ lineæ AG DM conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineãt, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & ſumantur in ipſis AG DM quæuis puncta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN, occurrentes planis in punctis L N; & L A ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN æqualem eſſe. ponatur ipſi DM æqualis AH, & per H ipſi GL parallela ducatur HK. eſt autem GL perpendicularis ad planum per BAC. ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. Ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DE DF perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale eſt quadratis ex HK KA; quadrato autem ex HA æqualia ſunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale eſt quadratum ex H C. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus H C A eſt rectus. Eadem ratione & angulus D F M rectus eſt. ergo angulus A C H ipſi D F M eſt æqualis. eſt autem & H A C angulus æqualis angulo M D F. duo igitur triangula ſunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; uidelicet HA ipſi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare A C eſt æqualis D F. Similiter demonſtrabimus & AB ipſi DE æquale eſſe. iungantur HB ME. Et quoniam quadratum ex AH eſt æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia ſunt quadrata ex AB BK; erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed quadratis

8. huius.

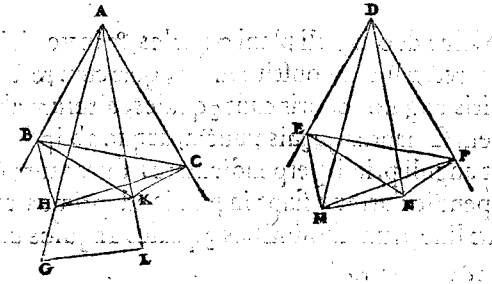
47. primi.

47. primi.

48. primi.

26. primi.

dratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, prò-
pterea quòd & HK perpendicularis est ad subiectum planum. quadratũ igitur ex
48.primi. AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus est. Eadem ratio-
ne & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita
26.primi. enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE est æqualis. Quoniam
igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo FDE
4.primi. est æqualis: basis igitur BC basi EF, & triangulum triângulo, & reliqui anguli reliquis æquales sũt. ergo angulus ACB angulo DFE. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. Eadem ratione & CBK angulus est æqualis angulo FEN. Itaque duo triangula sunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod est ad æquales angu-
26.primi. los, videlicet BC ipsi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK
4.primi. duabus DF FN æquales sunt, & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqua-
lis basi DN. Et cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum qua-
47.primi. drato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quòd cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint; altera
8.primi. alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis erit. quod oportebat demonstrare.



COROLLARIVM.

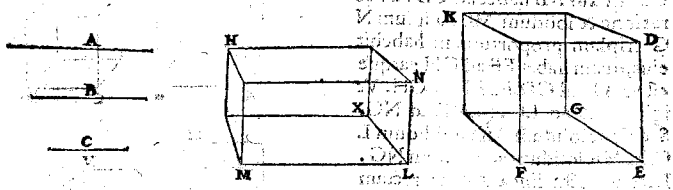
Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quę cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quę ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se æquales esse.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectę lineę proportionales sint, solidum parallelepipedũ, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sitq; vt A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus an-



gulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur angulo solido ad E, æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidē B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum æquales angulos MLN DEF, latera ex cōtraria parte sibi ipsis respondent, ergo MN parallelogrammum parallelogrammo DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LX EG æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atque est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod demonstrare oportebat.

16. huius.

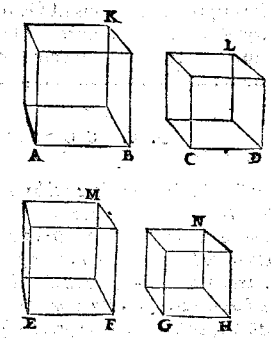
14. sexti.

Ex antecedenti.

31. huius.

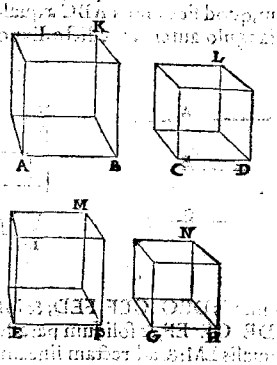
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXVII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiūt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quę ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta ꝓportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectę lineę proportionales AB CD EF GH, sitque vt AB ad CD, ita EF GH, & describātur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico vt KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quo-

33. huius. niam enim ſolidum parallelepipedum KA ſimile eſt ipſi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadē ratione & ſolidum ME ad ipſum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque eſt vt AB ad CD, ita EF ad GH. Vt igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed ſit vt ſolidum AK ad ſolidum LC, ita ME ſolidum ad ſolidum NG. Dico vt recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH. Quoniam enim rurſus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque vt AK ad LC, ita ME ad NG: erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

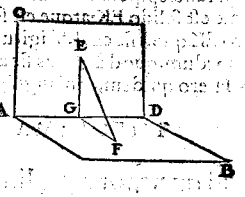


THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum ſit, & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum ſectionem cadet.

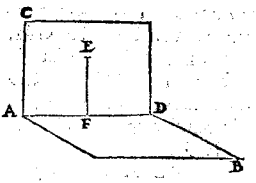
Planum enim CD ad planum AB rectum ſit; cōis aũt eorum ſectio ſit AD; & in ipſo CD plano quod uis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AD. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iũgatur. qm igitur FG plano CD eſt ad rectos angulos; contingit autem ipſam rectam lineam EG, quæ eſt in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. ſed & EF plano AB ad rectos angulos eſt. rectus igitur eſt angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis ſunt æquales; quod eſt abſurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipſam cadat neceſſe eſt. Si igitur planum ad planum rectum ſit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

17. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

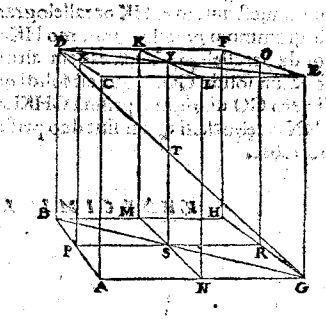
Poſſumus & recta demõſtratione vti hoc modo. Sit rurſus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipſorum ſectio ſit AD; & in plano CD quod vis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipſam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum eſt, & communi planorum



ni planorum sectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta est EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum sectionem AD cadit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secẽtur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, cõis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt.

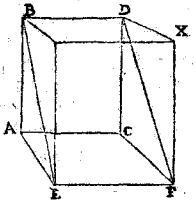


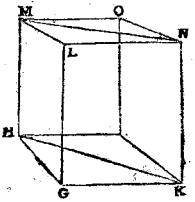
In solido enim parallelepipedo AF oppositorum planorum CF, AH latera bifariã secentur in punctis KLMNXPOR. & per sectiones plana ducantur KN, XR communis autem planorum sectio YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS DT vero ipsi TG æqualem esse. Iungantur enim DY YE BS SG. Quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales sunt. Et quoniam DX quidem est æqualis OE XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit basis DY æqualis basi YE, & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id recta linea est DYE. Eadem ratione & BSG recta est. atque est BS æqualis SG. Et quoniã CA ipsi DB æqualis est & parallela, sed CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela & ipsas coniungũt rectæ lineæ DE GB. parallela igitur est DE ipsi BG. & sumpta sunt in vtraque ipsarum quæuis puncta DYGS, & iunctæ sunt DG YS. ergo DG YS in vno sunt plano. Quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, uidelicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliquos augulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT uero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

29 primi. 4. primi. 14. primi. 9. huius. 33 primi. 7. huius. 29. primi. 15. primi. 26. primi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

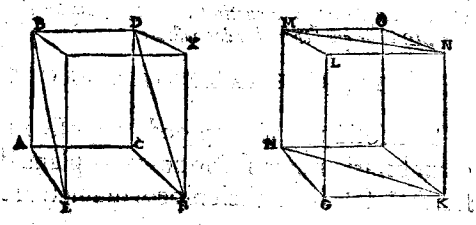
Si sint duo prismata æquealta, quorũ vnũ quidẽ basim habeat parallelogrãmũ, alterum vero triangulũ, & parallelogrammũ duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.





Sint prismata æquealta ABCDEF GHKLMN, &

unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum uero GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammũ triãguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. compleãtur enim AX GO solida. Et quoniam parallelo grãmum AF trianguli GHK



est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum trianguli GHK; erit AF pa-
34. huius. rallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ uero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi uero GO dimidium prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. si igitur sint duo prismata æquealta, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER DVODECIMVS

ET SOLIDORVM SECVNDVS.

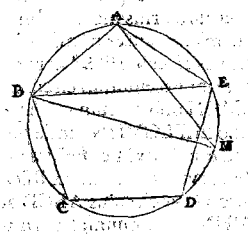
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

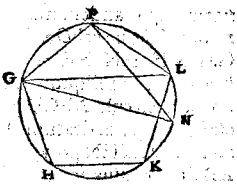
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SIMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL, diametri autem circulorum sint BM GN. Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Iungantur enim BE AM GL FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL, & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL vnum angulum vni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL: circa æquales autē angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est, ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG æqualis est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. Sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN; proportionis vero BA ad GF dupla est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL. & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrum quadrata.





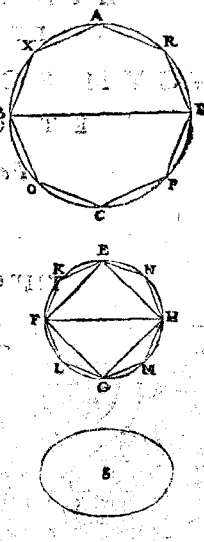
al. certè.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Circuli inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH: diametri autem ipſorũ ſint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita eſt; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod ſit S: & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. Itaque deſcriptum in circulo quadratum maius eſt dimidio circuli EFGH; quoniam ſi per puncta EFGH contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH maius eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF, FG, GH, HE in punctis KLMN: & EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE iungantur. Vnum quodque igitur triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE maius eſt dimidio portionis circuli in qua conſiſtit, quoniam ſi per puncta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę ſunt in rectis lineis EF, FG, GH, HE cõpleamus; erit vnumquodque triãgulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt: ſed portio minor eſt parallelogrammo, quare vnumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE maius eſt dimidio portionis circuli, in qua conſiſtit. reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & iungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes relinquemus tandẽ quaſdã circuli portiones, quę minores erũt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis ſi à maiori auferatur, maiuſquã dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rurſus maiuſquàm dimidium, & hoc ſemper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquam, quę minori magnitudine expoſita ſit minor. Itaque relictæ ſint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, quæ maiores ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit ſpacio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpacium S. ergo & vt circulus ABCD ad ſpacium S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipſo eſt, ita ſpacium S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem eſt circulus ABCD eo, quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpacium S maius eſt polygono EKFLGMHN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH. ſimiliter oſtendemus neque eſſe vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpacium maius circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius ſpacium S. erit igitur conuertendo vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita ſpacium S ad ABCD circulum. ſed vt ſpacium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, vt demonſtrabitur. ergo & vt quadratum ex



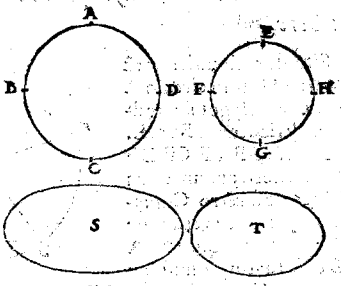
A

B

C

Ex antecedenti 11. quinti.

ex FH ad quadratum ex BD, ita EF GH circulus ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Nõ igitur vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.



LEMMA.

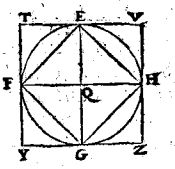
Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH, eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. Dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. Quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFGH, ita ABCD circulus ad ſpacium T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciũ S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH} A

Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH puncta rectis lineis, quae circulum contingant, vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſe ſe in puncto Q ſecantes, quae circuli diametri erunt: atque erit Q circuli cẽtrum. angulus igitur QEV eſt rectus. ſed & rectus EQH; ſi quidẽ duae FQ QE aequales ſint duabus HQ QE; & baſis EF aequalis baſi EH. ergo angulus FQE angulo HQE eſt aequalis: & ob id vterque rectus. ex quibus ſequitur rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelae ipſi EQG: & inter ſe ſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. Quòd cum FQ ſit aequalis QH, erit & TE ipſi EV aequalis: ideoq; TV eſt dupla ipſius TE. ſimiliter demonſtrabimus & TT ipſius TF duplam. cumq; TY TV aequales ſint, erunt & earum dimidiae FT TE aequales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplũ erit. ſimiles enim rectilineae figurae in dupla ſunt proportione homologorũ laterũ. ſed quadratũ ex EF eſt aequale quadratis ex FT TE, quae quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare. B



18. tertij.

8. primi.

18. primi.

34. primi.

Cor. 20 ſexti.

47. primi.

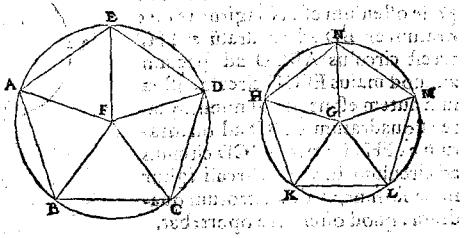
Erit vnum quodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt [*Ex 41 primi.*

SCHOLIVM.

Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. C

In

In dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere.



Sint duo circuli, quorũ centra FG, & in circulo A B C D E polygonũ quoduis describatur ABCDE, iũgãturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quędam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem A FB cõstituatur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cõstituatur: ergo reliquus AFE reliquo HGN est æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. est autem vt A F ad F B, ita HG ad GK; similia enim sunt AFB LGK triangula, quod ostensum est in theoremate sexto sexti libri elementorum. Vt igitur semidiameter circuli ad circuli semidiametrum, ita BA ad HK. similiter ostendemus & vnamquamque ipsarũ BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sũt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales sunt. polygona igitur ABCDE HKLMN singulos angulos singulis angulis æquales habẽt: & circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE simile est polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE simile polygonum descriptum est. quod facere oportebat.

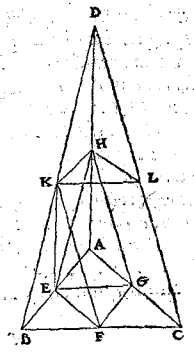
23.primi.

4.sexti.

1.diffi. tertia

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesq; toti; & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.



Sit pyramis, cuius basis quidem ABC triangulum, vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares q; bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit EH ipsi DB parallela. Eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est æqualis EB. Sed EB ipsi A E est æqualis. ergo & A E ipsi H K æqualis erit. est autẽ & AH æqualis HD. duę igitur AE AH duabus KH H D æquales sunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis angulo KHD. basis igitur E H basi K D est æqualis. quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ se se tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodẽ plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL.

2.sexti.

34.primi.

29.primi.

4.primi.

10.undecimi

KDL. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH, HG duabus KD, DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KL æqualis. æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK, erit triangulū ADB triangulo DHK æquiangulū, & latera habēt proportionalia. Simile igitur est ADB triangulū triangulo DHK: & eadē ratione triangulū quidē DBC simile est triangulo DKL; triangulū vero ADC triangulo DHL. quōd cum duę rectę lineę se se tangentes BA, AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH, HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoq; pyramis, cuius basis quidem triangulum ABC, uertex autem punctum D simili est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & uertex punctum D, sed pyramis cuius basis quidem HKL triangulum, uertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triangulum AEG, & uertex H punctum. Quare & pyramis cuius basis triangulum ABC & uertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. Vtraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF est equalis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triāguli GFC. & quoniam duo prismata æquealta sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estq; parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF, EHG, & tribus parallelogrāmis EBFG EBKH KHFG est equale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est vtrumque ipsorum prismatum, & cuius basis est EBGF parallelogrammum, oppositā autem ipsi HK rectā linea: & cuius basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, uertices autem puncta H D; quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & oppositā ipsi rectā linea HK maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, uertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & uertex K punctū est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H; equalibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrammū EBFG, oppositā autē ipsi rectā linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. prisma vero cuius basis parallelogrammum EBFG & oppositā ipsi rectā linea HK est equale prismati, cuius basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum, & uertex punctū D. ergo duo prismata de quibus dictū est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorū bases triāgula AEG HKL, uertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triangulum, uertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. quod ostendere oportebat.

4. primi.

10. undecimi.

A

B

C

10. diffi. undecimi.

F. C. COMMENTARIVS.

Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triangu li GFC]*Iuncta enim EF quoniam BF est aequalis FC, & EG parallela ipsi EC, erit triangulum BEF aequales triāgulo FGC. sed parallelogrammum EBFC duplum est trianguli BEF. ergo & ipsius FGC trianguli duplum erit.*

A

28. primi.

4. primi.

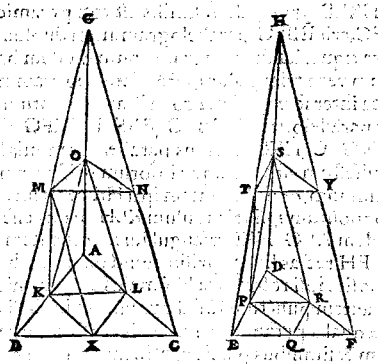
Erunt in prismata inter se æqualia]*Ex vlt. vndecimi libri.*

B

C Prisma quidē cuius basis est EBFG parallelogrāmū. & opposita ipsi recta linea HK, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem punctum K. *Patet autem hoc ex his, quae in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partē esse, cum sit tertia pars prismatis, cuius basis GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si sint duę pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant, diuidatur autem vtraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia; & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc sẽper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in vna pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.



Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeāt A BC DEF, uertices autem sint pũcta GH, & diuidatur vtraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuisa intelligatur: atq; hoc sẽper fiat. Dico vt ABC basis ad basim DEF ita esse prismata oĩa, quę sunt in pyramide ABC ad prismata omnia, quæ in pyramide DEF multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. Eadem ratione & triangulum DEF simile est triangulo RQF. Et quoniam BC quidem est dupla CX; EF vero dupla ipsius FQ, vt BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & ut igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma, cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. Et quoniam duo prismata, quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cuius basis parallelogrammum KLXB, oppositum uero ipsi recta linea MO ad prisma cuius basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cuius basis parallelogrammum EPRQ & oppositum ipsi recta linea ST ad prisma cuius basis RQF triangulum, oppositum uero ipsi STY. quare cõponẽdo ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando ut prismata KBXLOMN LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXC

2. sexti.

22. sexti.

31. quinti.

MNO

MNO ad prisma RQFSTY. Vt autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF, ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autē & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quę in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prisma, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY, hoc modo ostendemus.

In eadē enim figura intelligātur ab ipsis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorū plana, quę inter se æquales erunt, propterea quod pyramides ipsæ æquealtę ponuntur. Et quoniam duę rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in easdem proportiones secabuntur. & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadē ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur. & sunt æquales perpendiculares, quę ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quę à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. æquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF. opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur æquealta, inter se sunt ut bases, & eorū dimidia ut LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erunt. quod demonstrare oportebat. 17. undecimi. 15. quinti.

FIC. COMMENTARIVS.

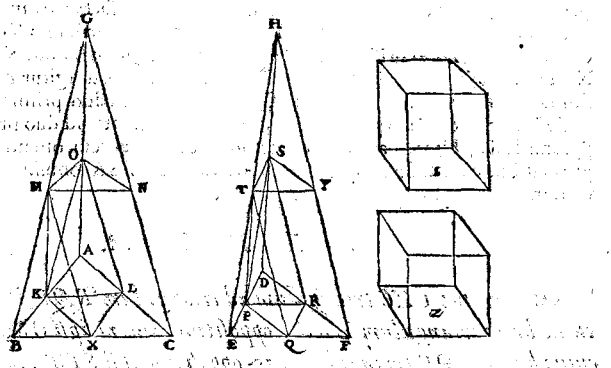
Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY. *Hoc et cōstare pōt ex corollario, quod nos ad 32 undecimi conscripsimus.*

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt vt bases.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC, DEF, uertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, uel ad solidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Sit primum ad solidum minus, sitq; Z. & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atque hoc semper fiat, quo ad sumantur quædam pyramides à pyramidē DEFH,

de DEFH, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis DEFH ſolidum Z ſuperat. Itaque ſumantur, & ſint exempli cauſſa pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in



pyramide DEFH priſmata ſolido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes ſimiliter pyramidi DEFH, ergo vt ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quæ in pyramide DEFH; ſed vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramis ABCG ad ſolidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad priſmata, quæ in ipſa ſunt, ita ſolidum Z ad priſmata, quę in pyramide DEFH. maior autem eſt pyramis ABCG priſmatibus, quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide DEFH eſt maius, ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad ſolidum aliquod minus pyramide DEFH. ſimiliter oſtendemus neque ut DEF baſis ad baſim ABC, ita eſſe pyramidem DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque eſſe vt ABC baſis ad baſim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod ſolidũ maius pyramide DEFH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius, videlicet ad ſolidum I. erit igitur conuertendo vt DEF baſis ad baſim ABC, ita ſolidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem ſolidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime oſtenſum fuit. & ut igitur DEF baſis ad baſim ABC, ita pyramis DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus, quod eſt abſurdum. non igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt ABCG pyramis ad ſolidum aliquod maius pyramide DEFH. oſtenſum autem eſt, neque ad minus. quare vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedenti.

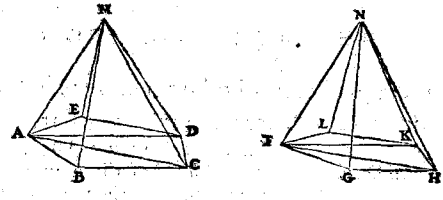
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem ſunt altitudine, & multiangulas baſes habent, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas baſes habeant ABCDE FGHKL: uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE, baſis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æqualtę ac pyramides, quę à principio. Quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangulum

lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyramidē ACDM: & componendo ut ABCD trapeziū ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidē ACDM. sed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM: & rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem ratione & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent & eadem sunt altitudine; erit ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidem FKLN. Quod cū sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidē ADEM, ut aūt ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidē FKLN: erit ex æquali ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed et ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat et FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidē FGHKLN. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, et multangulas bases habent inter se sunt, ut bases. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

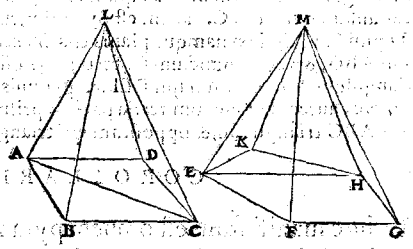


F. C. COMMENTARIVS.

Idem etiam demonstrabitur, si bases inæqualibis numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides æquealtæ ABCDLEFGHKM, sitq; pyramidis ABCDL basis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM basis sit pentagonum EEGHK, & vertex L. Dico vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Iungantur AC EG EH. erit quadrilaterum ABCD diuisum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuisum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligantur ab vnoquoque triangulo pyramides æquealtæ primis pyramidibus. Et quoniam est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonstrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita esse pyramidem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. quare ex æquali vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EFGHM ad pyramidem EHKM: & rursus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM: conuertendoq; vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulum ACD ad triangulum EHK, ita est pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem vt quadrilaterum ABCD ad triangulū ACD ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Quare rursus ex æquali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis ABCDL

Ex antecedente.

Ex antecedenti.

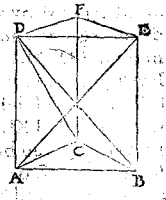


BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonstrabitur, quotcunque lateribus bases earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne prisma triangularem habens basim diuiditur in tres pyramides æquales inter se, quę triangulares bases habent.

Sit prisma cuius basis quidem triangulum ABC, oppositũ autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Iungantur enim BD, EC, CD. Et quoniam parallelogrammum est ABED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD æquale. ergo pyramis cuius basis triangulum ABD, vertex autem punctum C æqualis est pyramidi, cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C. Sed pyramis cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijsdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius basis triangulũ ABD, vertex autem punctũ C æqualis est pyramidi, cuius basis EBC triangulum, & vertex pũctum D. Rursus quoniam FCBE parallelogrammum est, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est æquale. ergo & pyramis, cuius basis BEC triangulum, vertex autem punctum D æqualis est pyramidi, cuius basis triãgulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi, cuius basis triãgulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cuius basis triangulum ABD, & vertex C punctum. Prisma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cuius basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijsdem namque planis continentur: pyramis aut, cuius basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cuius basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF.



34 primi.

5. huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualẽ; quoniam etiam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandẽ, diuiditur in prismata, quę triangulares bases habent, & quę ipsis opponuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus sequitur prismata omnia, quę eadem sunt altitudine inter se esse, vt bases: sunt enim ea pyramidum eiusdẽ altitudinis tripla.

Sed & hęc uera sunt, quę nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione. XX. & XXI.

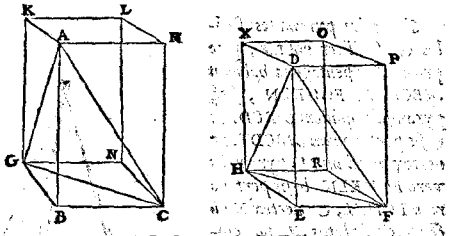
Prismata omnia, & pyramides, quę in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur eam inter se proportionem habent, quam altitudines.

Et

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quę triangulares bases habent in tripla sũt proportione homologorum laterum.



Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem GH puncta. Dico ABCG pyramidẽ ad pyramidem DEFH triplam proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleatur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis AB CG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusq; GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrãmo. Tria igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia, & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO. Similia autem solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplã habet proportionem eius, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed vt BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplam proportionem habebit eius, quam BC habet ad EF.

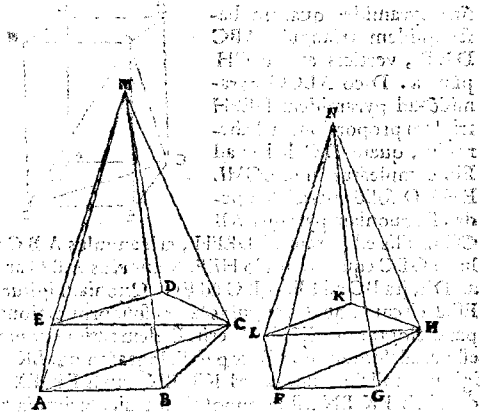
9. diffi. Vndecimi.
1. diffi. sexti.
24. Vndecimi.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multiangulas bases habent inter se esse in tripla proportione homologorum laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habẽtes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in pyramide altera triãgulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multiangulam habens basim ad pyramidem, quæ multiangulam basim habet. Sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem

ramidem,quæ triangularem basim habet est in tripla proportione homologorum laterum.& pyramis igitur multiangulam habẽs basim ad pyramidem similem basim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.



Sint enim pyramides similes & similiter positae, quae pro basibus pentagona habeant ABCDEM FGHKLN, sitq; pyramidis quidem ABCDEM basis pentagonum ABCDE, & uertex punctum M, pyramidis vero FGHKLN basis pentagonum FGHKL, & vertex N punctum, & sit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidẽ ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC CE FH HL. & quoniam polygona similia in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erit triãgulum ABC simile triangulo FGH, triangulumq; ACE triangulo FHL simile, & triangulum CDE triangulo HKL. est autem ob pyramidum similitudinem triangulum AMB simile triangulo FNG. quare vt MA ad AB, ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH. ex aequali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH. non aliter demonstrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC simile est triangulo NFH. est autem & triangulum MBC simile triangulo NGH ob similitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC & vertex M punctum, similis est pyramidi, cuius basis triangulum FGH, & vertex punctum N: quippe quod similibus triangulis contineantur. Eadem ratione demonstrabitur pyramis ACEM similis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. sed pyramis quidem ABCM ad pyramidem FGHN triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc est quam AB habet ad FG, est enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutãdo vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis autem CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK, hoc est quam AB ad FG. Quoniã enim vt AB ad BC, ita est FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex aequali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam consequentium, hoc est pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonstrare oportebat.

a 12. quinti.

9. diffi. und.

COROLLARIVM.

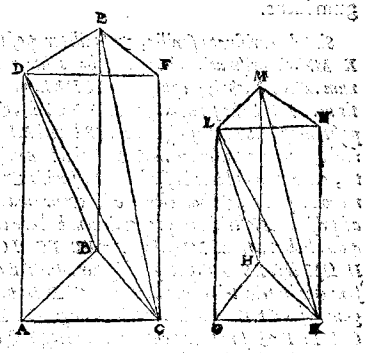
Ex his colligitur pyramides similes, quæ multiangulas bases habent diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales & homologas totis.

Sed

Sed quod Euclides demonstrauit in pyramidibus similibus, nos etiam in similibus prismatibus demonstrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonstratum sit prismata, si milia, quae triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonstrare in hunc modum.

THEOREMA. I.

Prismata similia, quæ triangulares bases habẽt in pyramides similes, numeroq; æquales diuiduntur, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint prismata similia, & similiter posita AEGM & prismatis quidem AE basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur triangulum DEF: prismatis vero GM basis sit GHK triangulum & oppositum ipsi LMN: sitq; latus AB lateri GH homologum. Dico prismata AEGM diuidi in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma AE ad prisma GM triplã habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonstratis prisma AE diuisum in tres pyramides equales inter se, & prisma GM similiter diuisum in totidem pyramides aequales, quae pyramidibus prismatis AE similes erunt. Quoniam enim ob prismatum similitudinem parallelogrammum ABED simile est parallelogrammo GHML, erit vt DA ad AB, ita LG ad GH: atque est angulus DAB equalis angulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG est simile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quae sunt parallelogrammorum dimidia alijs triangulis, quibus respondent similia demonstrabuntur. Et quoniam vt DC ad CA, ita est LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH: erit ex aequali ut DC ad CB, ita LK ad LH. Et similiter demonstrabitur vt DB ad BC, ita esse LH ad HK. quare triangulum DBC simile est triangulo LHK. Quòd cum triangulum DAB simile sit triangulo LGH, triangulumq; DBC simile triangulo LHK, & triangulum DAC ipsi LGK; erit pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum similis pyramidi, cuius basis triangulum GHK, & uertex punctum L. Eandem ob causam erit pyramis cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, similis pyramidi cuius basis MHK triangulum, uertex autem punctum L, & adhuc pyramis, cuius basis triangulum ECF, & uertex punctum D similis pyramidi, cuius basis triangulum MKN, & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc est quam AB habet ad GH; est enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & similiter pyramis ECFD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc est BC ad HK, hoc est AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum prisma AE ad totum prisma GN. sed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & prisma AE ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.

9. diff. unde cimi.

6. sexti.

9. diff. unde cimi.

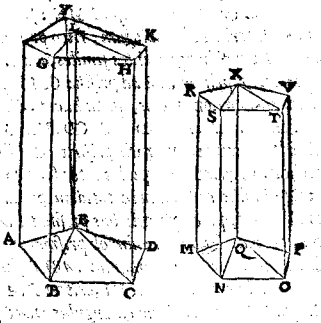
12. quinti.

ALITER. Quoniã igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL; similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum: habebit pyramis ABCD ad pyramidẽ GHKL triplam proportionẽ eius, quam AB habet ad GH. sed vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita prisma AE ad prisma GM, sunt enim prismata pyramidum tripla. ergo & prisma AE

ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Prismata igitur similia, quae triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. II.

Prismata similia, quę multiāgulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHKL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MV homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quae triangulares bases habent, similia & numero aequalia, & homologa totis; & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iungantur EB EC LG LH QN QO XS XT. Pētagonū igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq; FGHKL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: & pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur vnumquodque prismatū AK MV diuisū in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, perq; LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL similia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq; ECD LHK ipsis QOP XTV similia. Et qm prisma AK ponitur simile prismati MV, parallelogrāmū ABGF simile erit parallelogrāmo MNSR, & parallelogrāmū AELF simile ipsi MQXR. quare vt LE ad EA, ita XQ ad QM: vt aut AE ad EB, ita MQ ad QN. ex equali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq; vt BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est aequalis angulo XQN ob similitudinē prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est aequalis angulo XQN, alter eorum maior erit. sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituatur aequalis angulus BEY, vt recta linea EY terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHKY simile pentagono RSTVX. sed & pentagonum FGHKL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHKL simile est pentagono FGHKY. quare angulus FLK aequalis est angulo FYK. sed & maior. quod fieri nō potest. Non igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inaequalis est angulo XQN: quare necessario est aequalis; & ob id angulus EBG aequalis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ sunt aequales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prisma AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSX; similibus enim planis continentur. est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QTVX. ergo & prisma BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositum LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulum QNO, et ipsi oppositum XST, & denique prisma CL cuius basis triangulum ECD, & oppositum ipsi LSK, simile est prismati QX, cuius basis triangulum QQP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autem

prismata

20. sexti.

9. diffi. unde cimi.

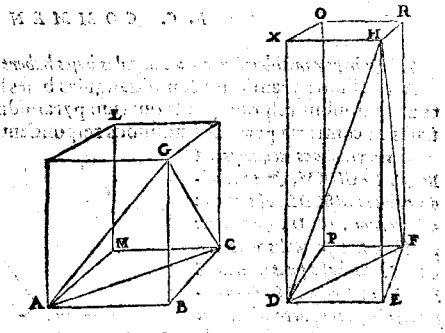
3. diffi. sexti.

34 primi.

prismata, quae triangulares bases habent sunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34. propositionem antecedentis libri, & proxime aliter demonstrauimus. prisma igitur AL ad prisma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN; & prisma BH ad prisma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc est AB ad MN. prisma autem CL ad prisma OX triplam proportionem habet eius, quam habet CD ad OP, hoc est AB ad MN ut supra demonstrauimus. homologa enim latera omnia inter se eandem habent proportionem. Quare vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Vt igitur prisma AL ad prisma MX, ita omnia prismata ad omnia prismata, hoc est totum prisma AK ad totum prisma MV. prisma autem AL ad prisma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN. ergo & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur prismata, quae multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; & prismo ad prisma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

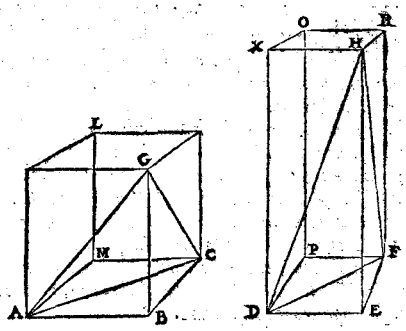
Aequalium pyramidum, & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt equales.



Sint enim pyramides equales, quae triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero GH puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG est equalis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit solidum BGML solido EHPO aequale. equalium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed ut BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est altitudini pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est altitudini pyramidis ABCG. est igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Sed pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte respondeant altitudinibus, sitq; vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH aequalem esse. ijsdem enim constructis, quoniam vt ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramimidis ABCG; vt autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & vt parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFG altitudo ad altitudinem pyra-

5. quinti.
34. undecimi.
5. quinti.
5. quinti.

midis ABCG. Sed pyramidis quidē DEFH altitudo eadē eſt altitudini ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt altitudini ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur vt BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK eſt æqualis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent illæ ſunt æquales. quod oportebat demonſtrare.



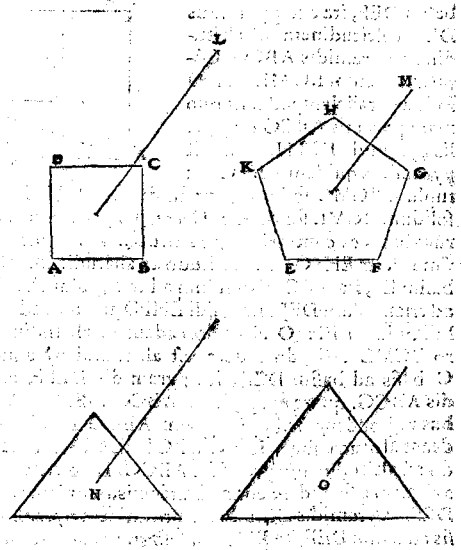
F. C. COMMENTARIVS.

Sed & in pyramidibus, quae multiangulas baſes habent idem demonſtrabitur hoc modo.

Aequalium pyramidum & multiangulas baſes habentium, baſes ex cōtraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum multiangulas baſes habentiū baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales.

Sint pyramides aequales ABCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL baſis ſit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM ſit baſis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: hoc eſt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinē pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxv. ſexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rurſus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis æquealta pyramidi ABCDL: à triangulo autem O eriga-

6. huius. *tur alia pyramis aequealta pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: ſunt enim in baſibus aequalibus, & æqualem habent altitudinem*



dinem: & ſimili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyramidi O eſt aequalis. aequalium autem pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumque enim vtrique eſt aequale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc eſt altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed iiſdem ſtantibus ſit ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem eſſe. eſt enim ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDE, hoc eſt ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illae ſunt aequales. aequalis igitur eſt pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM eſt aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas baſes habentium, & reliqua. quod demonſtrare oportebat.

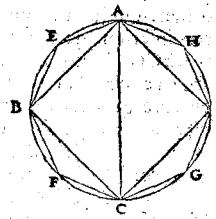
COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur priſmatum omnium æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: & quorum priſmatum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea eſſe æqualia; priſmata enim in eiſdem baſibus conſtituta, & eadem altitudine ſunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat enim conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus nõ ſit triplus coni, vel maior erit, quàm triplus, uel minor. Sit primũ maior quàm triplus; & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius eſt, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æquealtũ cylindro, quod quidem priſma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti: & ſunt ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æquealta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt vt baſes, & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulũ ABCD deſcribitur, atq; eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulũ ABCD. priſma igitur erectũ à quadrato ABCD æquealtũ cylindro dimidio cylindri eſt maius. ſecentur circũferentiæ AB BC CD DA bifariã in punctis EFGH; & AE EB BF FC CG GD DH HA iungantur. Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua cõſiſtit, vt ſuperius demonſtratũ eſt. erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA priſmata æquealta cylindro. ergo & vnumquodque erectorum priſmatum maius eſt dimidio portionis cylindri quæ ad ipſum eſt, quoniam ſi per puncta EFGH parallelę ipſis AB BC CD DA ducãtur, & compleãtur in ipſis AB BC CD DA parallelogramma: à quibus ſolida



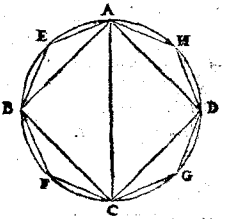
Ex coroll 7. huius.

parallele-

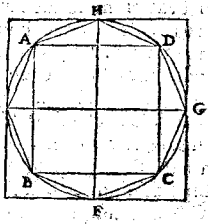
parallelepipeda æquealta cylindro erigantur: erunt vniuſcuiuſque erectorum dimidia priſmata ea, quæ ſunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & ſunt cylindri portiones erectis ſolidis parallelepipedis minores. ergo & priſmata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora ſunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipſa ſunt. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes priſmata æquealta cylindro, & hoc ſemper facientes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri, quæ ſint minores exceſſu, quo cylindrus ipſius coni triplum ſuperat. reliquantur iam & ſint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur priſma, cuius baſis quidem polygonū AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quę cylindri, maius eſt, quàm triplum coni. Sed priſma cuius baſis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum eſt pyramidis, cuius baſis polygonum AEBFGGDH, uertex autem idem, qui coni. & pyramis igitur, cuius baſis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idē qui coni, maior eſt cono, qui baſim habet ABCD circulum. Sed & minor; ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico inſuper neq; cylindrum minorem eſſe, quàm triplum coni, ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri. Deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius eſt quā dimidiū ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticē habēs eundē quē conus. pyramis igitur erecta maior eſt quàm coni dimidium: quoniam, vt ante demonſtrauimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum deſcriptum eſt: & ſi à quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æquealta cono, quæ & priſmata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto, etenim inter ſe ſunt vt baſes. quare & tertiæ partes ipſarum. pyramis igitur, cuius baſis quadratum ABCD, dimidia eſt eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum, maior eſt cono, ipſum namque comprehendit. ergo pyramis cuius baſis ABCD quadratum, vertex autem idē qui coni, maior eſt, quàm coni dimidium. ſecentur circumferentię AB BC CD DA bifariā in punctis EFCH. & iungātur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quod que igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius eſt, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit. erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior eſt, quàm dimidium coni portionis, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, iungenteſq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandē quaſdam coni portiones, quę maiores erunt exceſſu, quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. Relinquantur & ſint, quę in ipſis AE EB BF FC CG DH HA. reliqua igitur pyramis cuius baſis polygonum AEBFCGH, & uertex idem qui coni, maior eſt, quàm tertia cylindri pars. ſed pyramis cuius baſis polygonum AEBFCDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis, cuius baſis polygonū AEBFCDH, altitudo autem eadem quę cylindri. priſma igitur, cuius baſis AEBFCGH polygonum, & altitudo eadem, quę cylindri, maius eſt cylindro, cuius baſis

Ex 1. decimi.

Ex corol. 7. huius.



5. quinti.



eſt

est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est, quàm triplus coni. ostensum autem est neque maiorem esse, quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus est tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eadē, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

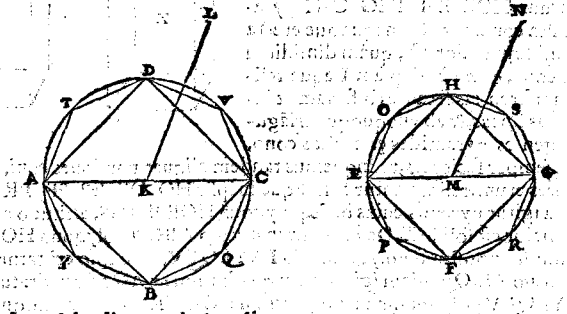
Eodem modo illud etiam demonstrabitur in conis & cylindris scalenis.

COROLLARIVM.

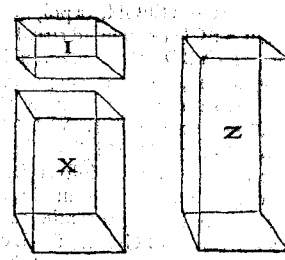
Ex quibus constat omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scaleni, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

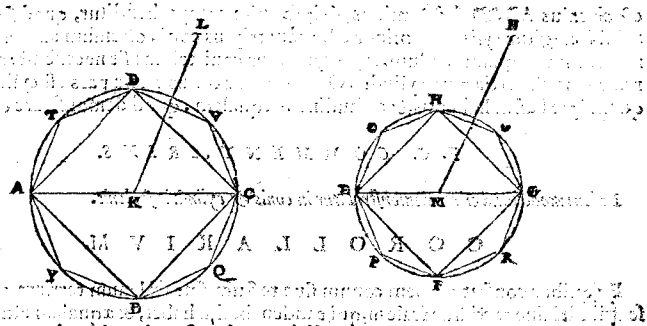
Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.



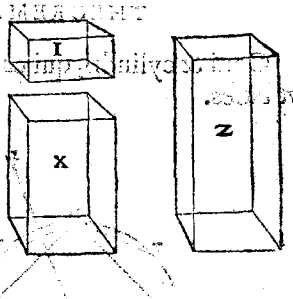
Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH axes autem KL, MN, & diametri basiū AC EG. Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. si enim non ita sit; erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidū minus cono EN, vel ad maius. sit primū ad minus, quod sit X, & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratū EFGH. ergo quadratum maius est, quàm dimidium circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. pyramis igitur erecta maior est, quàm coni dimidium; nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æquealtam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptę dimidia; etenim inter se sunt vt bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, uertex



autem



autem idem qui coni, maior est quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis O P R S: & OE EP PF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius est, quàm dimidium portionis circuli, in qua consistit. erigatur ab vnoquoque triangulorum HOE EPF FEG GSH pyramis æqualta cono. ergo & vnaquæque erecta rum pyramidum maior est, quàm dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam; & iungentes rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides equealtas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur & sint quę in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonū HOEPFRGS, altitudo autē eadē, quę coni, maior est solido X. Describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æqualta cono AL. Quoniam igitur est vt quadratum ex AC ad quadratum ex EG ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS, vt autem quadratum ex AC ad quadratū ex EG, ita ABCD circulus ad circulū EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & vt polygonū DTAYBQCV ad polygonū HOEPFRGS, ita pyramis cuius basis DTAYBQCV polygonū, uertex autem punctum E ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex punctum N. Vt igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cuius basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum I. ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidem, quæ in ipso est, ita solidum X ad pyramidē, quę in cono EN. conus autem AL maior est pyramide, quæ in ipso. maius igitur est solidum X pyramide, quæ in cono EN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. Similiter demonstrabitur neque vt EFGH circulus ad circulum ABGD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico præterea neque esse vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum maius cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum maius, quod sit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum. sed ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulū ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus



v. huius.
s. huius.

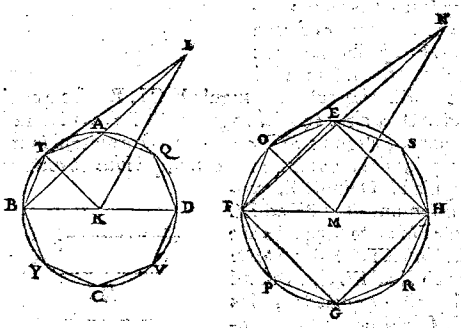
minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN ostensum autem est neque esse ad minus. ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed vt conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim vterque utriusque triplus. & ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æquealti conis. ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinē inter se sunt ut bases. quod demonstrare oportebat. 15. quinti. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

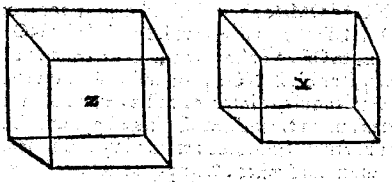
Et hoc in conis & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

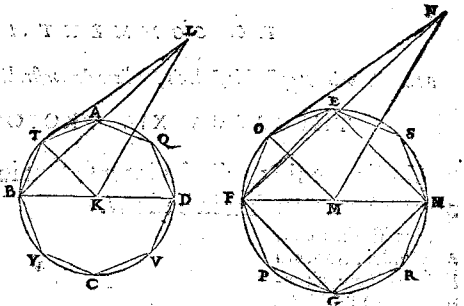
Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

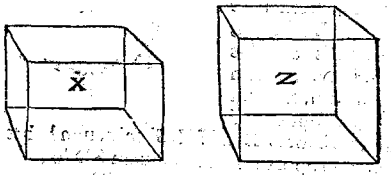


Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH, & axes conorum, vel cylindrorum HK MN. Dico conū cuius basis ABCD circulus, vertex autē punctum L ad conū, cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplam habere proportionē eius, quā habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad ali quod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem, vel ad maius. habeat primum ad minus, quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius est, quam dimidium EFCH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. ergo erecta pyramis maior est, quam coni dimidia. Itaque secētur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorū EOF FPG GRH HSE maius est quàm dimidium portionis circuli EFGH, in qua consistit. & erigatur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticē habēs, quem conus. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est quàm dimidia portionis coni, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem, quem conus; atque hoc semper facientes tādem relinquemus quasdam coni portiones, quę minores erūt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. Relinquātur & sint quę in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE.



HS SE. Reliqua igitur pyramis, cuius basis quidem polygonum EOFPGRHS, uertex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EOFPGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem uerticem habens, quem conus; & triangulorum continentium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, uertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorũ uero continentiũ pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonũ, & uertex punctũ N, unum sit NFO, & iũgãtur KT, MO. Qm igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit ut BD ad FH, ita KL axis adaxẽ MN, ut aũt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & ut BK ad FM, ita KL ad MN, & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. perpẽdiculares enim utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sũt proportionalia. Simile igitur est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quę pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K centrũ, eadem est pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT triãgulo FMO simile. Et quoniã ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis aũt est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recta enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. Quòd cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem uero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triangulum BKT, uertex autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triangulum, & uertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quę triangulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDVCY ad K, à punctis uero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides uertices eosdẽ habentes, quos coni, ostendemus & unãquamque pyramidũ eiusdẽ ordinis ad unaquãq; alterius ordinis triplã proportionẽ habere eius, quã habet BK latus homologũ ad homologũ latus FM, hoc est quã BD ad FH. Sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia





quentia. est igitur & vt BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidē cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD uertex autem punctum L ad solidum X triplam proportionem habere eius, quam BD ad FH. Vt igitur conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quę in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonū, uertex aūt punctū L; ita solidum X ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N, dictus autem conus maior est pyramide, quę in ipso; etenim eam comprehendit. maius igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRHS, uertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionē habet eius quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum maius cono EFGH N triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. si enim fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. conuertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD: ut autem solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplā proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existēs basi, in qua conus, & ipsi æqualtus coni triplus est. cum ostē sum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habē tis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionē habebit eius, quam BD habet ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorū, quæ sunt in basibus. quod demonstrare oportebat. 15. quint. 10. huius.

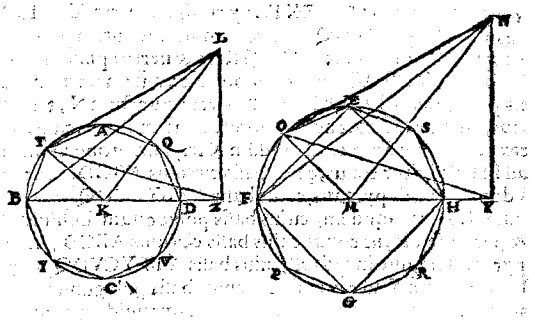
F. C. COMMENTARIVS.

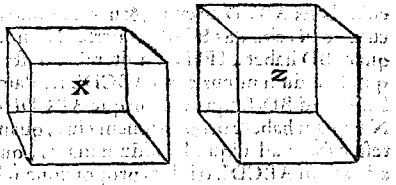
Precedens demonstratio In conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos uniuerse ad omnes tam rectos quam scalenos accōmodabimus hoc pacto.

Similes coni & cylindri omnes interse in tripla sunt proportionem diametrorū, quę sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quae bases secent, sintq; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quae circulorū diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, et vertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet ED ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quàm dimidium EFGH circuli. Erigatur à quadrato EFGH pyramis aequealta cono, quae maior erit, quàm coni dimidia, & secentur EF FG GH HE circumferentiae bifariam in punctis OPRS, iungantur q; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est, quam

dimidiũ portionis circuli EFGH, in qua cõsistit: & erigatur ab unoquoque triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus vertirem habens. ergo et vnaquęque erectarũ pyramidũ maior est, quã dimidia coni portionis, q ae est ad ipsam. secãtes igitur reliquas circũferentias bifariam, inigẽtesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus: atque hoc semper facientes tandem relinquemus quasdã coni portiones, quę minores erunt excessu, quo conus EFG HN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quae in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N solido X est maior.





Describatur etiam in circulo ABCD ipsi EOFPGRHS polygono simile & similiter positum polygonum ATBTCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundem, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius basis polygonum ATBTCVDQ; & vertex punctum L, vnum aliquod sit LBT triangulorũ vero continentium pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum sit NFO: & KT MO iungantur. Quoniã igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit ex diffinitione conorum similium, quã nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axẽ: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atque est angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione conorum similium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera sint proportionalia; erit BKL triangulum simile triangulo FMN. Et quoniam vt BK ad KT, ita est FM ad MO; angulus autem BKT est aequalis angulo FMO: etenim quę pars est angulus BHT quattuor rectorũ, qui sunt ad centrum K, eadem est pars angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad M centrum. rursus erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO est simile. Itaque quoniam ostensum est vt BK ad KL, ita FM ad MN; aequalis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN. & sunt in conis rectis anguli TKL OMN inter se aequales, quòd recti sint. ergo in ipsis cum circa aequales angulos TKL OMN latera sint proportionalia; erit triangulum LKT simile triangulo NMO. At in conis scalenis hoc modo demonstrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis basium rectae lineae LΦ NΥ, quae cadent in communes planorum & basium sectiones BD FH ex 38. antecedentis libri. & iungantur TΦ OΥ. Cum igitur ex diffinitione conorum similium angulus LKΦ sit equalis angulo NMΥ, & anguli LΦK NΥM utrique recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNΥ aequalis, & triangulum LΦK simile triangulo NΥM. rursus cum angulus BKT sit equalis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ aequalis erit reliquo OMΥ. est autem ob similitudinem triangulorum LΦK NΥM, ut ΦK ad KL, ita ΦM ad MN; & ob similitudinem triangulorũ BKL FMN, ut LK ad KB, hoc est ad KT ipsi aequalem, ita NM ad MF, hoc est ad MO. ergo ex aequali vt ΦK ad KT, ita ΥM ad MO. & cum circa aequales angulos TKΦ OMΥ latera sint proportionalia, erit & triangulum KTΦ triangulo MOΥ simile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita NΥ ad ΥM: & vt ΦK ad ΦT, ita ΥM ad MO. quare ex aequali vt LΦ ad ΦT, ita NΥ ad ΥO. & sunt anguli LΦT NΥO

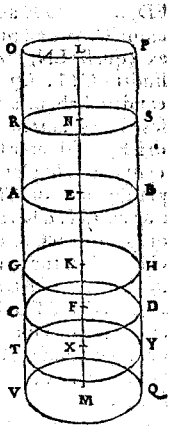
6. sexti.

inter

inter se aequales, quòd vtrique recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum recta est cum igitur circa aequales angulos LΦT NΤO latera sint proportionalia, sequitur triangula quoq; LTΦ NOΤ inter se similia esse. ideoq; vt LT ad TΦ, ita NO ad OΤ: & vt TΦ ad TK, ita OΤ ad OM. ex aequali igitur vt LT ad TK, ita est NO ad OM. demonstratum autem est vt LK ad KT, ita esse N M ad MO. quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN. rursus igitur ex aequali vt TL ad L K, ita est ON ad NM. quòd cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, aequiangula sunt, & ob inter se similia. Itaq; quoniam ob similitudinem triangulorum BKL FMN est vt LB ad BK. ita NF ad FM, & ob similitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO, erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN. Rursus quoniam ob similitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita est NO ad OM, & ob similitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF: ex aequali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. rursus igitur ex aequali vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera sunt proportionalia, ob eamq; causam & aequiangula & inter se similia erunt. pyramis igitur, cuius basis triangulum BKT, vertex autem punctum L similis est pyramidi, cuius basis triangulum FMO, & vertex N punctum, similibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem simile in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua similiter vt in antecedente demonstrabimus. 6. sexti.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipsi quidē EK axi exponantur æquales quotcumq; EN NL; ipsi vero FK æquales quotcumque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipsis AB CD parallela; atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligātur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se vt bases: bases autem æquales sunt. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. Quòd cum axes LN NE EK inter se æquales sint, itēq; cylindri PR RB BG inter se æquales; sitq; ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si autem axis LK maior sit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, & si minor minor. quattuor igitur existentibus magnitudinibus, nidelicet axibus EK KF, & cylindris BG GD sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nēpe axis KL, & cylindrus PG; axis uero KF, & cylindri GD æquemultiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ, & si æqualis æqualis, & si minor minor. est igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. quod demonstrare oportebat. 11. huius.

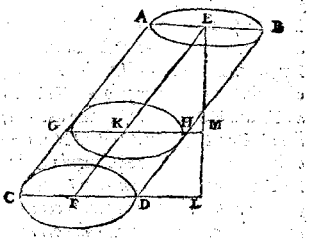
F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro ſcaleno; quod eadem ratione demonſtrabitur.

Ex quibus conſtat ſi quilibet cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita eſſe altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

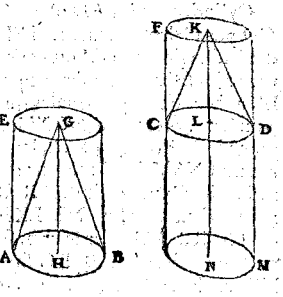
In cylindris enim rectis illud perſpicuum eſt, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in ſcalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad baſis planum perpendicularis, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duę rectę lineę EF EL ſecantur à plaxi. undecimi nis parallellis, in eaſdem proportiones ſecabuntur. quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea ut B G cylindrus ad cylindrum G D, ita cylindri B G altitudo EM ad ML altitudinem cylindri G D, quod propoſitum fuerat demonſtrandum.



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri inter ſe ſunt vt altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB CD cylin-
* dri EB FD. Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe G H axem ad axem KL. producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturq; ipſi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus C M. Quoniam igitur cylindri EB CM
vt. huius. eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes: baſes autem ſunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter ſe æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM plano ſecatur CD, oppoſitis planis
Ex antece- dente. parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi G H. eſt igitur vt EB cylindrus ad cylindrũ F D, ita axis GH ad KL axem: vt autem EB cylindrus
15. quinti. 1. huius. ad cylindrum FD, ita ABC conus ad conũ CDK; cylindri enim ſunt conorum tripli. ergo & vt GH axis ad axem KL, ita eſt ABC conus ad conum C D K, & cylindrus EB ad F D cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri inter ſe ſunt, ut altitudines. quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

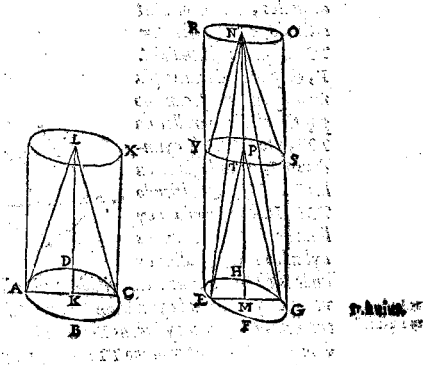
* Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL] *Hoc eſt ita eſſe altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, altitudo ipſa axis eſt, ſine ab axe determinatur; in ſcalenis uero non item. ſed tamen nihilominus demonſtrabitur conos & cylindros in aequalibus baſibus conſtitutos inter ſe eſſe vt axes, & ob id, vt eorum altitudines ex ijs, quae nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte

altitudinibus

altitudinibus reſpondent, & quorum conorum & cylindrorũ baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt æquales.



Sint æquales coni & cylindri, quorum baſes quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum ſunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinẽ MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non æqualis. Sit primum æqualis: atque eſt AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter ſe ſunt vt baſes. æqualis igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH, ac propterea ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. eſtq; vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed maior ſit MN, & auferatur ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM, & per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus æqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrũ. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrũ, ita MN altitudo ad altitudinẽ MP. nam cylindrus EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem, æqualis autẽ eſt MP altitudo altitudini KL. quare vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. 5. huius. 15. huius.

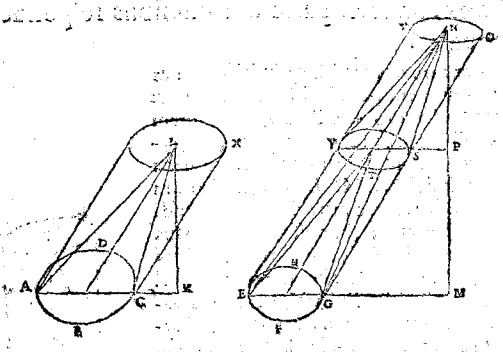
Sed cyiindrorũ AX EO baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinẽ. Dico AX cylindrũ cylindro EO æqualẽ eſſe. ijſdẽ enim cõſtructis quoniã vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis eſt altitudini MP: erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita A X cylindrus ad cylindrum E S; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus E O ad ES cylindrum. eſt igitur vt A X cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt æqualis. ſimiliter autem & in conis. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonſtrauit. Sed & in omnibus demonſtratur hoc modo.

Sint æquales coni, & cylindri ſiue recti ſiue ſcaleni, quorum baſes circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere; hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM ſunt æquales vel inæquales; ſi æquales, cum æquales ſint cylindri, erunt & baſes æquales inter ſe: cylindri enim & coni qui eandem

eandem habet altitudinē, inter se sunt vt bases. quare bases ex contraria parte altitudinibus respondēt. Si vero altitudines nō sint aequales, Sit maior NM altitudo, à quā auferatur PM aequalis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum secans, oppositis planis parallelum TTS, intelligatur q; cylindrus ES, cuius basis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaque quoniam cylindrus AX est aequalis cylindro EO, & alius cylindrus est ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim, cum eandem habeant altitudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudō ad altitudinem MP; cylindrus enim EO secatur plano TTS opposito planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita est NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur basis ABCD ad EFGH basim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem est altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD basis ad basim EFGH, ita est altitudo NM ad LK altitudinem.



11. huius. 12. huius.

Sed cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondeant, sitq; vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO aequalem esse. iisdem enim constructis quoniam vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK est aequalis ipsi PM altitudini; erit vt ABCD basis ad basim EFGH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quòd eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO est aequalis. similiter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt aequales. quod demonstrare oportebat.

Sed & illud verum est, quod nos demonstrauimus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & spheroidibus ad propositionem XI.

Cylindri omnes, et coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & ex proportione altitudinum.

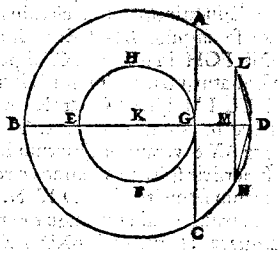
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existētibus in maiori polygonum æqualium, & numerō parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & eius dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes tandem relinquemus

circumferentiam

circumferentiam minorem ipſa AB. Relinquatur, ſitq; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iunganturq; LD DN LN. ergo LD ipſi DN eſt æqualis. Et quoniam LN parallela eſt AC, & AC tangit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. Quòd ſi ipſi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonũ æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. quod facere oportebat.

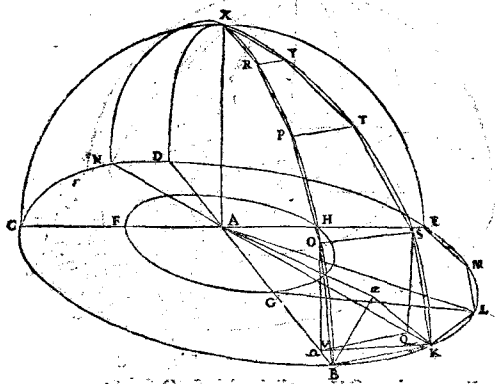


F. C. COMMENTARIVS.

Ergo LD ipſi DN eſt æqualis] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, quare & bifariam ipſam ſecabit. atque erit LM æqualis MN. eum igitur duae LM MD duabus NM MD aequales ſint & angulos aequales contineant, nempe rectos: erit baſis LD baſi LN aequalis.* 3. tert. 4. prim.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus in maiori ſolidum polyhedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.



Intelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A. oportet in maiori ſphæra deſcribere ſolidum polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. ſecentur ſphæræ plano aliquo per centrum ducto. erunt ſectiones circuli, quoniam diametro manẽte, & ſemicirculo circumducto, ſphæra facta eſt. ergo in quacumque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planũ in ſuperficie ſphęræ circulum efficiet, & conſtat circulum maximum eſſe, cum diame-

16. tertij.

ter ſphæræ,quæ & ſemicirculi,& circuli diameter eſt, maior ſit omnibus rectis lineis,quæ in circulo vel ſphæra ducũtur.ſit igitur in maiori quidem ſphęra circulus BCDE;in minori autem circulus FGH;& ducantur ipſorum duæ dimetri ad rectos inter ſe angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus B CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum deſcribatur,nõ tãgẽs minorẽ circulũ FGH;cuius latera ſint in BE circuli quadrãte BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N;& à puncto A plano circuli BCD E ad rectos angulos cõſtituatur AX; quæ ſuperficiei ſphærę in puncto X occurrat: & per AX,& vtramque ipſarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiẽt in ſuperficie ſphæræ maximos circulos.Itaque efficiant, & ſint in diametris BD K N eorum ſemicirculi BXD KXN.Quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli B CDE, erunt omnia plana,quæ per ipſam XA tranſeunt ad planum circuli BCDE re cta.quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum. Et quoniam ſemicirculi; BED BXD KXN æquales ſunt,in æqualibus enim cõſiſtũt BD KN diametris;erũt & eorũ quadrantes BE BX KX inter ſe æquales.quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante BE,tot erunt & in quadrantibus BX KX æqualia ipſis BK KL LM ME: Deſcribantur & ſint BO OP PR RX KS ST TY YX: iunganturq; SO TP YR,& ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadẽt hæ in communes planorum ſectiones BD KN,quoniam & plana ſemicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta ſunt.Itaque cadant,ſintque OVSQ: & V Q iungatur.Cum igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN æquales circumferẽ
B tiæ ſumptę ſint BO KS,& ductę perpendiculares OV SQ: erit OV quidem ipſi SQ æqualis,BV vero æqualis KQ.eſt autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA eſt æqualis. Vt igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoq; VQ ipſi BK parallela eſt. Quod cum vtraque ipſarum OV SQ recta ſit ad circuli BCDE planũ, erit OV ipſi SQ parallela. oſtenſa autem eſt & ipſi æqualis. ergo QV SO æquales

Ex antecedenti.

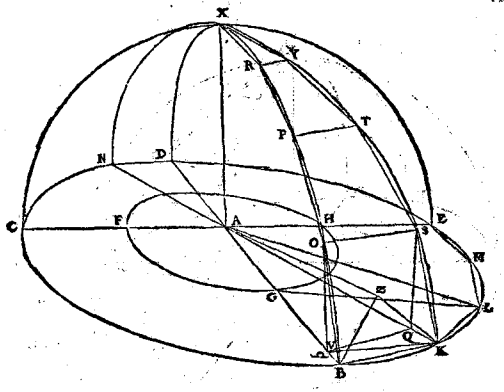
28.undecimi

38.undecimi.

6.primi.

6.undecimi.

9.primi.



ſunt & parallelæ. Et quoniam QV parallela eſt ipſi SO,ſed & parallela ipſi KB; erit & SO ipſi KB parallela: & ipſas coniun
C gnunt BO KS.ergo & KBOS quadrilaterũ eſt in uno plano:nã ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in vtraque ipſarum quæuis pũcta ſumantur,quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem eſt plano, in quo parallelę. Et eadem ratione vtra que ipſorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno ſunt pla no.eſt autem in vno plano & triangulum YRX.Si igitur à pũctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida

9.undecimi.

6.undecimi.

ſolida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus compoſita, quarũ baſes quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX, vertex autẽ punctum A. quòd ſi in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem conſtruamus, & in reliquis tribus quadrãtibus, & in reliquo hemiſphærio conſtituetur figura quædam polyhedra in ſphæra deſcripta, & compoſita ex pyramidibus, quarum baſes ſunt quadrilatera iam dicta, & YRX triãgulum; & quæ eiuſdem ordinis ſunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tãgere ſuperficiem minoris ſphæræ, in qua eſt circulus FGH. Ducatur à puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta eſt ad quadrilateri KBSO planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipſarum BZ ZK eſt perpendicularis. et quoniam AB eſt æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK æquale, et ſunt quadrato quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus eſt: quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK eſt æquale; ideoq; recta linea BZ rectæ ZK æqualis. Similiter oſtendemus, & quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipſarum BZ ZK æquales eſſe. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipſarum ZB ZK deſcriptus, etiam per puncta OS trãſibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniã KB maior eſt, quàm QV, æqualis autem QV ipſi SO; erit & KB, quàm SO maior. Sed KB eſt æqualis vtrique ipſarũ KS BO. ergo vtraque KS BO, quàm SO eſt maior. cum igitur in circulo quadrilaterum ſit KBOS, & æquales ſint KB BO KS, & minor OS; ſitq; ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KΩ. Et quoniam BD minor eſt, quã dupla ipſius DΩ, atq; eſt vt BD ad DΩ, ita rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ ad rectangulum, quod DΩ ΩB cõtinetur, nempe deſcripto ex BΩ quadrato, & completo parallelogramo in ipſo ΩD. quare & rectangulũ contẽtũ DB BΩ minus eſt, quã duplum eius, quod DΩ ΩB continetur: & iuncta KD, quod DB BΩ continetur eſt æquale quadrato ex KB; & quod continetur DΩ ΩB æquale quadrato ex KΩ. quadratum igitur ex KB minus eſt, quàm duplum quadrati ex KΩ. ſed quadratum ex KB maius eſt, quàm duplum quadrati ex BZ. ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BZ eſt maius. Et quoniam BA eſt æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK æquale. & ſunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato autem ex AK æqualia quadrata ex KΩ ΩA. quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex KΩ ΩA ſunt æqualia, quorum quadratum ex KΩ maius eſt quadrato ex BZ. ergo reliquum ex ΩA quadratum quadrato ex ZA eſt minus; ac propterea rectæ linea AZ maior, quàm recta AΩ. multo igitur maior eſt AZ, quàm AG: atque eſt AZ quidem ad vnam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphæræ. quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangit.

Oſtendendum autem aliter & expeditius, maiorem eſſe AZ, quàm AG. Ducatur à puncto G ipſi AG ad rectos angulos GL, & AL iungatur. Itaque circumferentiã EB bifariam ſecantes, & dimidiam ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BC D, quæ ſubtenditur æquali ipſi GL. relinquatur, ſitq; circumferentia KB. minor igitur eſt recta linea KB, quàm GL. Et quoniã in circulo eſt BKSO quadrilaterum, & ſunt æquales OB BK KS, & minor OS; erit angulus BZK obtuſus: ideoq; BK maior, quàm BZ. ſed GL quàm BK eſt maior. multo igitur maior eſt GL, quàm BZ, & quadratum ex GL quadrato ex BZ maius. & cum æqualis ſit AL ipſi AB, erit & quadratum ex AL quadrato ex AB æquale. ſed quadrato quidem ex AL, æqualia ſunt quadrata ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia ſunt; quorum quadratum ex BZ minus eſt quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius eſt quadrato ex AG. & ob id recta linea ZA, quã recta AG eſt maior. Duabus igitur ſphæris circa idẽ

3. diffi. vnde cimi.

49. primi.

D

E

F

G

H

K

A

B

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum descriptum est, minoris sphæræ superficiem non tangens. quod facere oportebat.

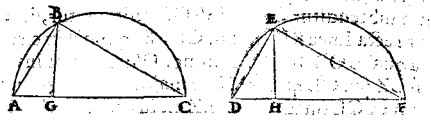
COROLLARIVM.

Quod si etiam in altera sphæra, solido polyhedro descripto in sphæra ABCDE simile solidũ polyhedrum describatur, habebit solidũ polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplam proportionem eius, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphęrę diametrũ. diuisis enim solidis in pyramides numero æquales, & eiusdem ordinis; erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in triplá sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphæra eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphęrę circa centrum A existentis ad eam, quę est ex centro alterius sphęræ. Similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiusdem ordinis, quę sunt in altera sphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quę est ex cẽtro alterius sphærę. Et vt vnũ antecedentium ad vnũ consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphęrę, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphærę diametrum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt sectiones circuli.] *Hoc vniuersè à Theodosio demonstratur in primo propositione sphæricorum, nempè quomodocunque plano sphæra secetur, semper sectiones fieri circulos.*

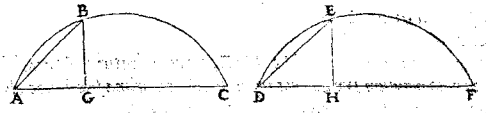
B Erit OV quidem ipsi SQ æqualis. BV vero æqualis KQ.] *Sint enim duo semicirculi æquales ABC DEF, sumanturq; æquales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi EH, & AG ipsi DH æqualem esse. Quoniam enim circumferentia AB est æqualis circumferentiae DE, quae sunt æqualium circulorum, erunt rectæ lineæ AB DE inter se æquales. & eadem ratione æquales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus æqualis recto DEF. cum igitur circa æquales angulos latera sint proportionalia*



29. 3. 6. huius.

lia, erit triangulum ABC simile triangulo DEF. sed triangulum ABG est simile triangulo ABC, ergo & ipsi DEF. triangulum autem DEH est simile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triangulo DEH est simile. ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad EH. aequalis autem est AB ipsi DE. ergo & BG ipsi EH est aequalis. & eodem modo demonstrabitur AG aequalis ipsi DH, quod demonstrare oportebat. sed & illud vniuersè in omnibus portionibus demonstratur sequenti lemmate. 6.sexti. 8.sexti. 9.sexti. 14.quinti.

Sint æquales portiones æqualiũ circulorũ ABC DEF; sumanturq; circumferẽtiæ æquales AB DE: & à pũctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipsi EH æqualem esse; AC verò ipsi DH.



Iungantur AB DE. & quoniam æquales sunt circumferentiae AB DE, erunt & reliquae BC EF inter se æquales. ergo & æquales anguli, qui in ipsis consistunt, quare angulus BAC est æqualis angulo EDF. sed & recti sunt anguli, qui ad G H. duo igitur triangula sunt ABG, DEH, quae duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri DE æquale, quod vni æqualium angulorum subtenditur. ergo omnia omnibus sunt æqualia. aequalis igitur est AG ipsi DH, & BG ipsi EH. quod demonstrare oportebat. 27.tertij. 26.primi.

C

Nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraque ipsarum quæuis puncta sumãtur, quæ dicta puncta coniungit in eodem est plano in quo parallelæ] *Ex VII. vndecimi.*

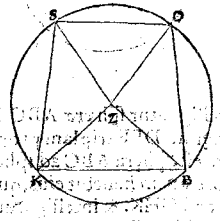
D

Et quoniam KB maior est, quam QV] *Est enim triangulum AQV triangulo AKB simile, cum angulus ad A sit vtrique communis, angulus AQV angulo AKB, & angulus AVQ angulo ABK aequalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita KB ad QV. est autem AK maior, quàm AQ. ergo & KB, quàm QV maior erit.* 29.primi. 4.sexti.

E

Erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ.] *Nam cum rectae lineae KB BO KS aequales sint, & minor ipsis OS; erunt circumferentiae, quas auferunt KB BO KS inter se aequales, & reliqua circumferentia OS maior ex quare & anguli KZS KZB BZO aequales, & maiores angulo OZS. sunt autem quattuor anguli quattuor rectis aequales. ergo OZS est minor recto, videlicet acutus; & vnusquisque reliquorum trium obtusus; ac propterea quadratum quod fit ex KB maius est duobus quadratis, quae ex KZ ZB, hoc est maius, quàm duplũ quadrati, quod ex BZ. sunt enim KZ ZB inter se aequales, vt demonstratum est. sed & hoc sequenti lemmate planius demonstratur.*

Sit in circulo quadrilaterum KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter se sint æqualia: sitq; BO maior, quàm OS; & sumpto circuli centro Z, iungatur BZ. Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius esse, quàm duplum.

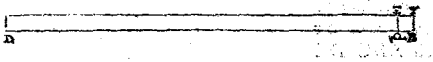


Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ est aequalis ZS, & communis ZO; erunt duae BZ ZO duabus SZ ZO aequales, altera alteri, & basis BO basi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS est maior. & quoniam angulus QZB vnicuique ipsorum BZK KZS est æqualis; in aequalibus namque circumferentijs consistunt OB BK KS; quod rectae lineae æquales sint. erit & vterque angulorum BZK KZS maior angulo QZS. sed quattuor anguli QZS SZK KZB BZO quattuor rectis sunt aequales; etenim circa vnum punctum Z consistunt. vnusquisque igitur angulorum QZB BZK KZS est obtusus. ideoq; obtusiangulum est triangulum BZO. At in obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quadratis, quae à lateribus obtusum angulum continentibus fiunt. ergo quadratum, quod ex BK maius est quadratis, quae ex KZ ZB. sed quadrata ex KZ ZB dupla sunt quadrati Coroll. 15. primi.

drati ex BZ; aequalis enim est KZ ipsi ZB. quadratũ igitur ex KB, maius est, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonstrare.

F Et quoniam BD minor est quàm dupla ipsius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente constat: & cum BD dupla sit ipsius D A, erit ipsius DΩ minor, quàm dupla.*

G Atque est vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectãgulum quod DΩ ΩB continetur.] *Describatur ex ΩB quadratum quod sit ΩBΥΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit ut BD ad DΩ, ita rectangulum DΥ ad rectangulum DΞ. ex prima sexti, hoc est ita rectangulum, quod continetur DB EΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*



H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur est æquale quadrato KB.] *Est enim angulus in semicirculo DKB rectus; & ab eo ad basim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octaui sexti libri KB est proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB: & ob id quadratum quidem ex KB æquale est rectangulo contento DB BΩ; quadratum uero ex KΩ æquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior est AZ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE descriptum est, non tangens minorem circulum FGH; perpendicularis à puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex ijs, quae in antecedente demonstrata sunt. quare AΩ maior erit, quàm AG; & idcirco AZ longe maior, quàm quae à centro minoris sphęrae ad eius superficiem pertinet.*

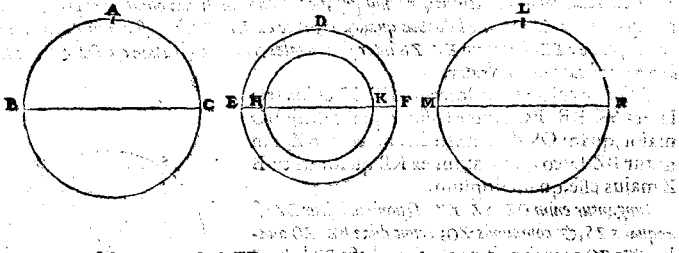
L Et quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim descriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et sunt æquales OB BK KS, & minor OS] *Hęc proxime demonstrata sunt.*

N Et cum æqualis sit AL ipsi AB.] *Sunt enim à centro ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ inter se in tripla sunt proportione suarum diametrorũ.



Intelligantur sphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC sphærã ad sphęram DEF triplam proportionem habere eius, quã habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphęra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrũ, circa quod est sphæra GHK; describaturq; in maiori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangẽs minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphęra DEF descriptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphęra ABC ad solidum polyhedrum, quod in sphęra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet autem ABC sphęra ad sphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC sphęra ad sphęram GHK,

Ex antecedente.

Ex corel. antecedente.

HK, ita ſolidum polyhedrum in ſphęra ABC ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF; & permutando, vt ABC ſphęra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. maior autem eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphærę polyhedro, quod in ſphęra DEF eſt maior. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neque D E F ſphærā ad ſphæram minorem ipſa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphæram ABC neque ad maiorem ſphæram ipſa DEF triplam proportionem habere eius, quā BC ad EF. Si enim fieri poteſt, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur ſphęra LMN ad ABC ſphæram triplam proportionē habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Vt autem ſphæra LMN ad ABC ſphęram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quādam minorem ipſa ABC, vt ante demonſtratum fuit; quoniam ſphæra LMN maior eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphęram minorem ipſa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphęram maiorē ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad E F. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo ABC ſphæra ad ſphęram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonſtrare oportebat.

DVODECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER TERTIVSDECIMVS

ET SOLIDORVM TERTIVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

A

B

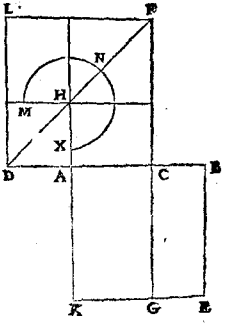
I recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidiã totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia fit, quadrati.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C; & sit AC maior portio: producaturq; in directum ipsi CA recta linea AD; & ponatur AD ipsius AB dimidia. Dico quadratum ex CD quadrati ex D A quintuplum esse. describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atque est rectãgulum quidem CE quod continetur AB BC: quadratum vero ex AC est FH. ergo rectangulum CE quadrato FH est æquale. & quoniam BA dupla est ipsius A D; æqualis autem BA ipsi AK; & DA ipsi AH: erit & KA ipsius AH dupla. ut autem KA ad AH, ita est rectangulum KC ad ipsum CH. duplum igitur est KC rectanguli CH:

Lemma.

C & sunt rectangula LH HC ipsius CH dupla. ergo rectangulum KC rectãgulis LH HC est æquale. ostensum autem autem est & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratũ est æquale gnomoni MNX. Rursus quoniam BA

D dupla est ipsius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc est quadratum AE quadrati DH. æquale autem est quadratum AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomon quadruplus est quadrati DH. & ob id totum DF ipsius DH est quintuplum. atque est D F quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex D A quintuplũ erit. ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens totius dimidiam quintuplum potest eius, quòd à dimidia fit quadrati. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Resolutio est sumptio quæsiti tãquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod uerum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quę consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam A B extrema, ac media ratione secetur in C, sitque maior portio A C, & ponatur A D ipsius AB dimidiæ æqualis. Dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplũ esse. Quoniam enim quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur: erunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnà cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis CA AD continetur æquale est rectangulum BAC, est enim BA ipsius AD dupla. quadrato autem ex AC est æquale rectangulum ABC; namque A B extrema, ac media ratione secta est in C. rectangulum igitur BAC vnà cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD. sed rectangulum B A C vnà cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum est quadrati ex AD. quod quidem ita se habet. est enim BA ipsius AD dupla. 4. secundi. 2. secundi. Cor. 20. sexti

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratũ autem ex AB est rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC: erit rectangulum B AC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidem BAC est æquale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC est æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnà cũ eo, quod bis DA AC continetur quintuplum est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in pũcto C] *Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri, & in 30 sexti.* A

Describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iuncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quæ diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum LF DC parallela.* B

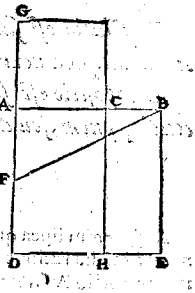
Et sunt rectangula LH HC ipsius HC dupla] *Supplementa enim LH HC inter se sunt æqualia ex 43 primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] *Ex 20. sexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] *Possumus etiam aliter, & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.* E

Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & ex AB fiat quadratū ADEB; sectaq; AD bifariū in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipsi FB sit aequalis, erit AG æqualis AC ex demonstratis 1 vndecimæ secūdi libri. quare FG cōstat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratū ex FG quin

20. sexti. *tuplū esse quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla est ipsius AF, erit quadratū ex AB quadrati ex AF quadruplū. sed quadratum ex FB est aequale quadratis ipsarum FA AB, ex 47 primi. quadratū igitur ex FB, hoc est quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplū erit. quod oportebat demonstrare. sed & alia nonnulla demonstranda sunt, quae ad hanc sectionem attinent.*

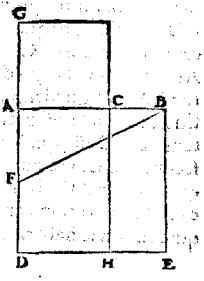


PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & vtra que ipsius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione secetur in C. Dico ipsas AC CB datas esse. Constituantur enim eadem, quę supra. & quoniam AB est 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratū est 25: quadratū aūt ipsius AB est 100. ergo quadratū ex FB est 125, & ipsa FB, hoc est FG ℞ 125. sed FA est 5. erit igitur AG, hoc est AC ℞ 125 minus. Quod cū sit vt BA ad AC, ita ACad CB, re

17. sexti. *ctangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC. quadratum autem ex AC, hoc est quadratum ℞ 125 minus 5 est 150 minus ℞ 12500. si igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciēs CB, erit CB 15 minus ℞ 125. ergo AC CB datae sunt, vt oportebat.*



Ex quibus manifestum est si recta linea rationalis, expositae rationali longitudine commēsurabilis extrema ac media ratione secta fuerit, maiorem eius portionē apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam.

Est enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex

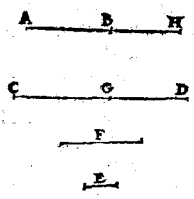
9. decimi. *BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipsi BA longitudine incommensurabilis; ac propterea FB plus potest, quam FA quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. est autem AF, quae ipsi AG congruit, expositae rationali longi*

5. diffi. ter- narum. *tudine commensurabilis. quare AC est apotome quinta. At vero CB esse apotomen primam, manifesto constat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.*

PROPOSITIO. II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quae extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita vt CD sit ipsius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis sit F: & ex CD abscindatur DG ipsi F aequalis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc est ad F, ita AH ad HB. et



Cor. 10. sexti *quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportionales sunt, erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratum ex F. est autem CD quintupla ipsius E. quadratū igitur ex CD quintuplum est quadrati ex F. ergo quadratum ex AH quadrati ex HB est quintuplū. estq; AB ma-*

ior portio

ior portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. quare BH est totius dimidia, & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inueniendam proposuimus.

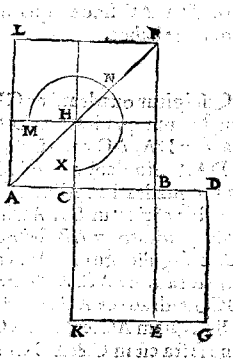
Itaque constat, Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4, sic CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD R 5, & CG 5 minus R 5. fiat vt 5 minus R 5 ad R 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum R 5 per 4, producetur R 80. deinde multiplicabimus 5 minus R 5 per eam, quae ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus R 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus R 80 fiet R 2000 plus R 400. quare si ad 20 applicabimus R 2000 plus R 400, latitudinem faciet R 5 plus 1, cuius duplum est R 20 plus 2. tota igitur recta linea est R 20 plus 2, & minor portio R 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ.

Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit: & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describâtur enim ex vtraque ipsarum AB CD quadrata AF CG: & in AF figura describatur, producatur FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomõ ipsius AH qua druplus. & quoniam DC dupla est CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH. ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG est æqualis. Rursus quoniam DC dupla est CA, æqualis autem est DC ipsi CK, & AC ipsi CH; erit KC ipsius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum est parallelogrammi BH. & sunt parallelogramma LH HB ipsius HB dupla. ergo KB æquale est ipsis LH HB. sed & totus MNX gnomõ toti CG est æqualis. & reliquum igitur HF æquale est reliquo BG. atque est BG quidem quod CD DB cõtinetur; etenim CD est æqualis DG: ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB est æquale. vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD, maior autem est DC, quàm CB. ergo & CB quàm BD est maior. Itaque recta linea C D extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quę à principio rectę lineæ. quod demonstrare oportebat.



A 20. sexti.

B 4. sexti.

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quàm CB, sic demonstrabitur.

Si enim nõ, sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. quadratum igitur ex BC quadruplum est quadrati ex CA, & ob id vtrumque quadratorum, quę fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum est. sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA æquale est quadratis ex BC CA. quod fieri non potest. non igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demonstrabimus neque minorem BC ipsius CA duplam esse. multo enim maius absurdum sequetur. ergo ipsius AC dupla maior est quàm BC. quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam CD partis ipsius DA quintuplũ posſit,& ipsius DA dupla ponatur AB.Dico AB extrema, ac media ratione ſectam eſſe in puncto C,& maiorem portionem eſſe AC, quæ quidem eſt reliqua pars eius,quę à principio rectæ lineę. Quoniam enim AB extrema,ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio ; erit rectangulum ABC quadrato ex AC ęquale.eſt autem & rectangulum BAC ęquale ei, quod bis DA AC continetur. etenim BA ipſius AD eſt dupla.ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo BAC,quod quidem eſt ipſius AB quadratũ,æquale eſt ei,quod bis DA AC continetur vnà cum quadrato ex AC. quadratum autem ex AB quadruplum eſt quadrati ex AD.ergo quòd bis DA AC continetur vnà quadrato ex AC quadruplum eſt eius, quod fit ex AD quadrati.ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC;hoc eſt quadratũ ex CD,quintupla ſunt quadrati ex AD. quod quidem ita ſe habet.

2.secundi.
2.0. sexti.
4.secundi.

Compoſitio.

Qm igitur quadratũ ex CD quintuplũ eſt quadrati ex DA; quadrato aũt ex CD ęqualia ſunt quadrata ex DA AC vnà cũ eo,quod bis DA AC cõtinetur; erũt quadrata ex DA, AC vnà cũ eo,quod bis cõtinetur DA AC quintupla ipſius quadrati ex DA.& diuidendo quod bis DA AC cõtinetur vnà cũ quadrato ex AC quadrupla sũt quadrati ex AD.eſt aũt & quadratũ ex AB quadrati ex AD quadruplũ.ergo quod bis cõtinetur DA AC,quod eſt rectãgulũ BAC vnà cũ quadrato ex AC eſt ęquale quadrato ex AB.ſed quadratũ ex AB eſt rectãgulũ ABC unà cũ rectãgulo BAC.rectãgulũ igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC eſt æquale rectangulo BAC vnà cũ quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC, erit reliquũ rectangulũ ABC quadrato ex AC æquale.eſt igitur vt BA ad AC,ita AC ad CB. maior autem eſt BA, quam AC.ergo & AC quam CB eſt maior.quare AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio.quod demonſtrare oportebat.

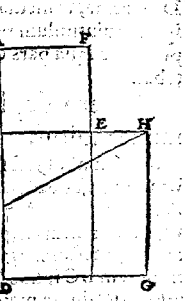
2.secundi.
14.sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipſius AC quintuplum poſsit] *Hoc eſt quadratum rectę lineę AB quintuplum ſit quadrati partis ipſius AC.*

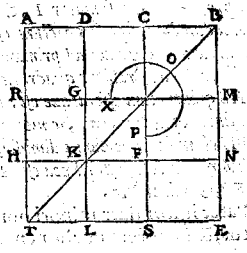
B Maior autem eſt DC,quam CB] *Hoc eſt dupla ipſius AC maior eſt,quam BC, illud uero ipſe mox demonſtrabit,ſed & aliter id demõſtrari poteſt hoc pacto.*

Recta enim linea AB partis ipſius BC quintuplum poſsit, & producatur AB ad D,ita vt DC ipſius CB ſit dupla. Dico ſi CD extrema,ac media ratione ſecetur,maiorem eius portionem eſſe AC. fiãt enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur.itaq; quoniam DC,hoc eſt HC dupla eſt ipſius CB, erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum.ſed quadratum ex BH eſt aequale duobus quadratis,quae fiunt ex HC CB.quadratum igitur ex BH quintuplum eſt quadrati ex CB ; ideoq; BH ipſi BA eſt aequalis.ergo ex iis,quae demonſtrata ſunt in vndecima ſecundi libri recta linea CH extrema,ac media ratione ſecatus in E, & CE eſt maior portio. eſt autem CH ipſi CD aequalis, & CE aequalis ipſi CA.ſi igitur recta linea partis ipſius quintuplum poſsit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

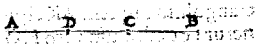
Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor assumens dimidiam maioris portionis quintuplũ potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.



Recta enim linea quædã AB extrema, ac media ratione secetur in C; sitq; AC maior portio, & secetur bifariam in D. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplũ esse. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AC dupla est CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc est quadratum RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur est æquale quadrato ex AC; atque est rectangulum quidem contentũ AB BC ipsum CE; quadratum vero ex AC est RS: erit rectangulum CE quadrato RS æquale. quadruplum autem est quadratũ RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quãdrati FG quadruplum est. rursus quoniam AD. æqualis est DC, erit & HK ip KF æqualis, ideoq; quadratum GF est æquale quadrato HL. æqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare & CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplum GF quadrati. & gnomon igitur XOP ipsius GF est quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplũ est ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ex DC. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. Quoniam enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo quod AB BC continetur vnà cum quadrato ex DC quintuplũ est quadrati ex DC. & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. Ei verò, quod continetur AB BC est æquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet est enim AC ipsius CD dupla. 6 secundi.

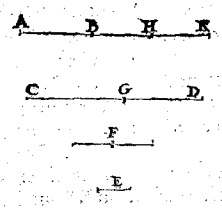
Compositio.

Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratũ ex AC quadrati ex CD quadruplum. sed quadratum ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadrati ex CD. & componendo quod continetur AB BC vnà cum quadrato ex CD, quod quidem est quadratum ex BD, quintuplum est quadrati, quod fit ex DC. atque hoc est, quod demonstrare oportebat.

F. C.

Ex iam dictis & alia conſtare poſſumus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.



Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E; ſitq; CD ipſius E quintupla: & inter CD E media proportionalis ſumatur F, & alia conſtruantur, quemadmodum ſuperius dictum eſt in propoſitione ſecunda earum, quas nos ad primam huius appoſuimus. ſimiliter demonſtrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum eſſe. atque eſt AB minor portio rectas lineae, quae extrema, ac media ratione ſecatur. ergo BH eſt maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea eſt AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

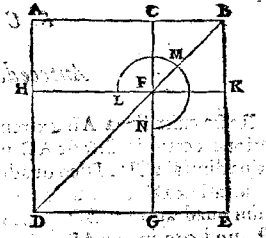
Patet igitur data minori portione rectæ lineę, quæ extrema ac media ratione ſecatur, & maiorem portionem & totam lineam datam eſſe.

Sit enim minor portio AB 4, & ſit CD 5, & E 1. ſimiliter, vt ſupra, eodem in loco, demonſtrabimus, maiorem portionem eſſe B 20 plus 2 quare tota recta linea erit 6 plus B 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla ſunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.

Sit recta linea AB, quę extrema ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla eſſe. Deſcribatur enim ex AB quadratũ ADEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, & maior portio eſt AC; erit rectangulum contentũ AB BC quadrato ex AC æquale. atque eſt rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG eſt quod fit ex A. C. æquale igitur eſt AK ipſi HG. & quoniam rectangulum AF eſt æquale FE, commune appo natur CK, erit totum AK toti CE æquale. ergo rectãgula CE AK ipſius AK ſunt dupla. ſed rectãgula AK CE ſunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla ſunt ipſius AK. rectangulum autem AK oſtenſum eſt æquale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK ipſius HG ſunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla ſunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG ſunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem ſunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH eſt quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC ſunt tripla. quod demonſtrare oportebat.

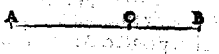


SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio

portio. Dico quadrata ex AB BC tripla esse quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex AB BC tripla sunt quadrati ex AC; suntque quadrata ex AB BC æqualia rectãgulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cõtinetur AB BC duplũ quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C.



.secti.

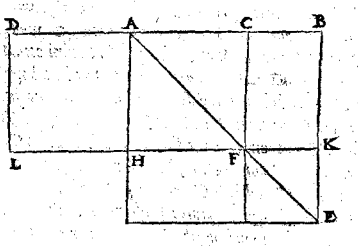
A

Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atque est AC maior portio: erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC æquale: ergo quod bis continetur AB BC duplum est quadrati ex AC: & cõponendo quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturque ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.



Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC portio maior: ponaturq; ipsi CA æqualis AD. Dico rectam lineam DB extrema, ac media ratione secari in puncto A: & maiorem portionem esse AB, quę à principio posita est. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AB extrema, ac media ratione secta est in C, erit rectangulum quod continetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est æquale. sed CE est æquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit. cõmune apponatur HB. totum igitur DK toti AE est æquale. atque est DK quidem, quod BD DA continentur; est enim AD æqualis DL: quadratũ aũt AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur est æquale quadrato ex AB. & ob id vt DB ad BA, ita est BA ad AD. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quàm AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demonstrare oportebat.

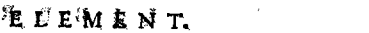
14. secti.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta .n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit maior portio A C: pona-

C ponaturq; AD ipſi AC æqualis.
Dico DB extrema ac media ratione ſecari in puncto A: & BA maiorem eſſe portionem. Quoniã enim



A DB extrema, ac media ratione ſecta eſt in A, & maior portio eſt AB; erit vt DB ad BA, ita BA ad AD. æqualis autem eſt DA ipſi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad AC. & per conuerſionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare diuidendo ut BA ad AD, ita AC ad CB. æqualis autem eſt DA ipſi AC. eſt igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. quod quidem ita ſe habet, etenim AB extrema, ac media ratione ſecatur in C puncto.

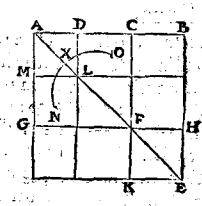
Compoſitio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, erit vt BA ad AC ita AC ad CB. æqualis autem eſt CA ipſi AD. ergo ut BA ad AD, ita AC ad CB. cõponendoque vt BD ad DA, ita AB ad BC. & per conuerſionem rationis vt DB ad BA, ita BA ad AC. atque eſt CA æqualis AD, eſt igitur vt DB ad BA, ita BA ad AD. quare DB extrema, ac media ratione ſecatur in pũcto A, & BA eſt portio maior.

V. EIVS. COMMENTARIVS.

Sed non inutile uiſum eſt hoc loco demonſtrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto libro, quamquam eius demonſtrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, abſcindaturque à maiori portione linea, quę minori ſit æqualis; erit etiam ea extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit quæ abſciſſa eſt recta linea



Sit recta linea AB, quae extrema, ac media rõne ſecetur in C, ſitq; AC maior portio: & ab ipſa AC abſcindatur CD, quae ipſi CB ſit aequalis: Dico AC extrema, & media rõne ſecari in D: & CD maiorem eſſe portiorẽ. fiat enim ex AB quadratũ AE: & iuncta AE ducantur per CD rectae lineae CFK DL ipſi BE parallelae, quae diametrum AE ſecent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelae ipſi AB. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C; rectangulũ, quod AB BC continetur, hoc eſt rectangulum CE eſt aequale quadrato AF. ſed ipſi CE aequale eſt rectangulum GE; etenim ſupplementa CH GK inter ſe æqualia ſunt; & quadratum FE eſt commune vtrique. ergo rectangulum GE quadrato AF eſt aequale. ſi igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum; & à quadrato AF auferatur quadratum LF, quod quidem eſt aequale quadrato FE, cum DE CB ſint aequales, reliquum GK rectangulum, hoc eſt rectangulum MF, hoc eſt ipſum DF gnomoni NXO aequale erit, à quibus ſublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum aequale quadrato LE. at rectangulum quidem DG eſt quod CA AD continetur: quadratum vero LF eſt quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita CD ad DA. ſed AC maior eſt, quàm CD. ergo & CD quàm DA maior erit. recta igitur linea AC extrema, ac media rõne ſecta eſt in D, & maior eius portio eſt CD quod demõſtrare oportebat.

14. ſexti.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt; quæ apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB; & ſecetur extrema, ac media ratione in C, ſitque AC maior portio. Dico vtramque portionem AC CB irrationalẽ

eſſe.

esse, quæ apotome appellatur. producatur enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quę est ipsius AB dimidia; erit quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD commensurabile est quadrato ex DA. rationale autem est quadratum ex DA; etenim DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD est rationale; ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitudine. quare CD DA rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco AC apotome est. Rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secta est, & maior portio est AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. ergo BC est apotome prima. ostensa est autem & AC apotome. si igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ex 1. huius
6. decimi
6. dif. decimi
9. decimi
74. decimi
98. decimi

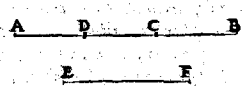
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstrauimus: sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quae eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositę rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionē CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam.



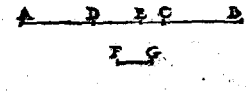
Diuidatur enim AC bifariam in D. & quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD, quae est dimidia portionis maioris; quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atque ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum ex DC, quòd ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD rationalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit longitudine. quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque CB apotome est. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD superat quadratum ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi EF longitudine est incommensurabilis. quare BD plus potest, quàm DC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. atque est DC longitudine commensurabilis expositae rationali AC. ergo CB est apotome quinta. rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC aequale quadrato ex AC. quadratum igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. sed quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eā, quę ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipsa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commen-

5. huius
6. decimi
6. dif. decimi
9. decimi
9. decimi
5. dif. tertiarum.

mensurabilis, erit maior portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

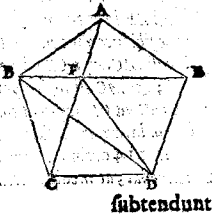
Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.



Sit recta linea AE, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, expositę cą rationali longitudine commensurabilis. Dico maiorem portionē AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. Secetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam BD ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi commen-
19.quinti *surabile. & quoniam est vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, vt BD ad DC, hoc est ut DE ad EC. ergo cum tres rectæ lineae proportio-*
Cor.10.sexti *nales sint BE ED EC; erit BE ad E C, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, ut ED ad DC. quare BE ipsius*
6.dif.decimi *EC quintupla est; & idcirco BC est quadrupla ipsius CE; estq; BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipsi CB longitudine commensurabilis. & quoniam quadratum ex DE commensurabile est*
3.dif.decimi *quadrato ex EC, atque est quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratū ex DE, ipsaq; DE rationalis. quòd cum quadratum ex DE ad quadratū ex EC proportionem non habeat,*
9.decimi *quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit DE ipsi EC incommensurabilis longitudine.*
37.decimi *sunt igitur DE EC rationales, & inter se potentia solum commensurabiles; & ob id DC ex binis nominibus est, cuius maius nomen DE. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex FG, quo*
9.decimi *quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo F.G ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaque quoniam DE plus potest quàm EC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; estq; EC expositae rationali CB longitudine cōmensurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. recta enim linea commensurabilis ei, quae est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit aequale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni æquilateri tres anguli siue continuati, siue non cōtinuati fuerint æquales, æquiangulum erit pentagonum.



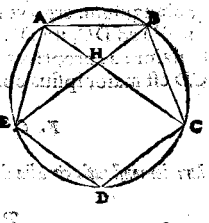
Pentagoni enim æquilateri ABCDE tres anguli primum cōtinuati, qui ad puncta ABC æquales inter se sint. Dico pētagonum ABCDE æquiāgulum esse. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duę CB BA duabus BA AE æquales sunt, altera alteri, & angulus CBA est æqualis angulo BAE,
4.Primi *erit basis AC æqualis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur.*

subtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB. quare & latus AF est æquale lateri BF. ostensa autem est & tota AC toti BE æqualis. ergo & reliqua FC est æqualis reliquæ FE. atque est CD æqualis DE. duæ igitur FC CD duabus FE ED æquales sunt, & basis ipsorum est communis FD. quare angulus FCD angulo FED est æqualis. ostensus autem est & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD æqualis est toti AED. sed angulus BCD positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AB æqualis erit. similiter demonstrabimus & angulum CDE angulis, qui sunt ad AB esse æqualem. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. sed non sint anguli continuati sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad puncta ACD. Dico & sic æquiangulum esse ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE æqualis basi BD, & ABE triangulum triangulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus AEB angulo CDB. est autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE est æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE est æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui sunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AC est æqualis. Eadem ratione & angulus ABC æqualis est angulis, qui sunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum, quod demonstrare oportebat. 8. primi

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuo secant, & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABCDE duos continuatos angulos, qui sunt ad puncta AB subtendant rectæ lineæ AC, BE, quæ sese in puncto H secent. Dico vtramque ipsarum extrema, ac media ratione secari in puncto H: & maiores earum portiones pentagoni lateri æquales esse. describatur enim circa ABCDE pentagonum circulus ABCDE, & quoniam duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE basi AC æqualis, & ABE triangulum æquale triangulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus anguli BAH est duplus; etenim exterius est ABH. est autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quod & circumferentia EDC circumferentiæ CB est dupla. ergo HAE angulus æqualis est angulo AHE; & ob id recta linea HE est æqualis ipsi EA, hoc est ipsi AB. et quoniam BA est æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB æqualis. sed angulus ABE ostensus est æqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAH. & communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE, & triangulo ABH est angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB est æqualis. ergo triangulum ABE æquiangulum est triangulo ABH; ideoque vt EB ad BA, ita est AB ad BH. æqualis autem est BA ipsi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maior est quam EH. ergo & EH quam HB est maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione secta est in H, & maior portio HE pentagoni lateri est



4. primi

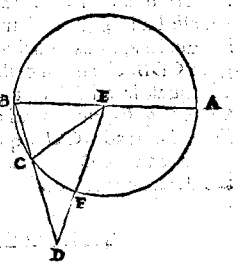
32. primi
33 eiusd.

6. primi
21. tertij

æqualis. Similiter demonstrabimus & A C extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri æqualem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.



Sit circulus ABC, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum sibi ipsis constituantur. Dico totam rectam lineam BD extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse CD. Sumatur enim centrum circuli; quod sit E; iungantur; EB EC ED, & BE ad A producatur. quoniã igitur decagoni æquilateri latus est BC, erit ACB circumferentia circumferentiæ BC quintupla; & ob id circumferentia AC. quadrupla est circumferentiæ CB. vt autem circumferentia A C ad ipsam C B, ita A E C angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadruplus est. & quoniã EBC angulus est æqualis angulo E CB, erit angulus AEC. anguli ECB duplus. est autem recta linea EC æqualis ipsi C D; vtraque enim est æqualis lateri hexagoni, quòd in circulo A B C describitur. quare & angulus C E D æqualis est angulo CDE. est igitur angulus ECB anguli EDC duplus. sed & angulus AEC duplus ostẽsus est anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC est quadruplus. ostensus autem est & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus anguló BEC æqualis erit. atque est angulus E B D communis duobus triangulis BEC BED. & reliquus igitur BED reliquo ECB est æqualis. ideoq; triangulum E B D triangulo EBC æquiangulum. ergo vt DB ad BE, ita EB ad BC. æqualis autẽ est EB ipsi CD. vt igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; est BD maior quàm DC. ergo & DC quã CB est maior; ac propterea recta linea B D extrema, ac media ratione secta est in C, & CD est maior ipsius portio. quod demonstrare oportebat.

Vlt. sexti.
5. primi.
32. primi.
5. primi.
32. primi.
32. primi.
4. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hæc.

PROPOSITIO I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.

Sit recta linea AB, quæ secetur in C, ita vt AC sit hexagoni latus, & C B latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo AB extrema, ac media ratione secatur in C: atque est AC maior portio. abscindatur ab AC linea CD ipsi CB æqualis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione secta in D: atque erit CD portio maior ex iis, quæ à nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem AC hexagoni latus, & CD latus decagoni, si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.

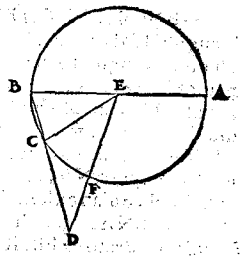
A D C B

Ex antecedente.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta.



Maneant enim eadem, quæ supra; & sit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC esse apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB est rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc est CD rationalis. atq; est DC maior portio rectæ lineæ DB extrema, ac media ratione sectæ; & CB minor portio eiusdem. Quando autem maior portio rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secatur sit rationalis, minor portio est apotome quinta. quod à nobis supra demonstratum fuit. ergo latus decagoni BC est apotome quinta. quod oportebat demonstrare. ad 6. huius. Propo. 1.

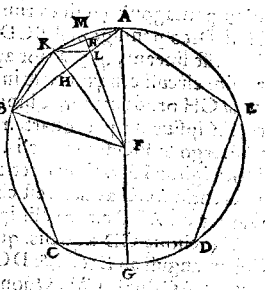
PROPOSITIO III.

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti, sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Iisdem enim manentibus sit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB esse ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ est rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonstratum est; ipsius autem CD dupla est AB; & quæ longitudine commensurabilis est ei, quæ ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. ergo & AB ex binis nominibus est quinta. quod demonstrare oportebat. ad 6. huius. Propo. 2.

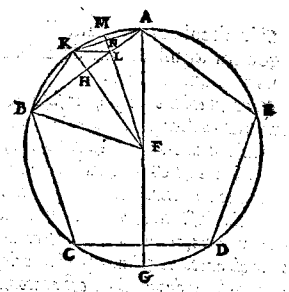
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.



Sit circulus ABCDE, & in ipso pentagonum æquilaterum ABCDE describatur. Dico pentagoni ABCDE latus posse latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Sumatur enim centrum circuli F, iunctaq; AF ad G producatur, & iungatur FB; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad K producatur; iunganturque AK, KB. & rursus à puncto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniam igitur circumferentia ABCG est æqualis circumferentiæ AEDG, quarum ABC æqualis est ipsi AED, erit reliqua CG reliquæ GD æqualis. Sed CD est pentagoni. ergo CG decagoni erit. quòd cum AF sit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB. quare & circumferentia AK circumferentiæ KB est æqualis, dupla igitur est circumferentia AB circumferentiæ BK; & ob id recta linea AK est decagoni latus. Eadem ratione & AK est dupla KM. & quoniam circumferentia AB dupla est circumferentiæ BK, æqualis autem CD circumferentia circumferentiæ AB, erit circumferentia CD circumferentiæ BK dupla. estque DC dupla ipsius CG. ergo CG est æqualis BK, sed BK ipsius KM est dupla, quoniam & AK 8. primi. 26. tertii.

AK. & CG igitur ipſius KM dupla erit. eſt autem & CB circumferentia circumferentię B K dupla: etenim CB eſt æqualis BA. ergo & tota GB dupla eſt ipſius BM, & angulus GFB anguli BFM duplus. ſed & angulus GFB eſt duplus anguli FAB: quandoquidem FAB angulus æqualis eſt angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB eſt æqualis. communis autem duobus triangulis ABF BFN eſt KBF angulus. reliquus igitur AFB eſt æqualis reliquo BNF, & triangulum ABF triangulo BFN æquiangulum. ergo vt AB ad BF, ita FB ad BN. rectangulum igitur ABN eſt æquale quadrato ex FB. Rurſus quoniam AL eſt æqualis LK, communis autem, & ad rectos angulos LN; erit baſis KN æqualis baſi NA. ergo & angulus LKN angulo LAN eſt æqualis. ſed angulus LAN eſt æqualis angulo KBN. & angulus igitur LKN eſt æqualis angulo KBN. angulus autem NAK eſt communis duobus triangulis AKB, & AKN. ergo reliquus AKB reliquo KNA eſt æqualis; & triangulum KAB triangulo KNA æquiangulum. vt igitur BA ad AK, ita KA ad AN; ac propterea rectangulum BAN eſt æquale quadrato ex AK. oſtenſum eſt autem & rectangulum ABN quadrato ex BF æquale. rectangulum igitur ABN vna cum rectangulo BAN, quod eſt quadratum ex AB eſt æquale quadrato ex BF vna cum quadrato ex AK. atque eſt AB quidem pentagoni latus, BF vero latus hexagoni, & AK decagoni. ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. quod demonſtrare oportebat.

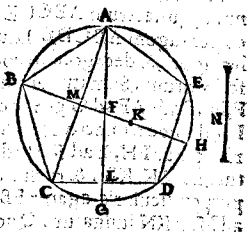


Vltime sexti 32 primi, uel 20 tertij.
4. sexti. 17. sexti.
4. primi.
5. primi.
4 sexti. 17. sexti.
2. secundi.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur, pentagoni latus eſt linea irrationalis, quę minor appellatur.

In circulo enim ABCDE rationalē diametrū habēte pentagonū æquilaterum deſcribatur ABCDE. Dico pentagoni ABCDE latus irrationalem eſſe lineam, quę minor appellatur. ſumatur enim circuli centrum F; & iunctæ AF BF ad puncta GH producantur, & iungatur AC; ponaturq; FK ipſius AF pars quarta. rationalis autem eſt AF. ergo & FK eſt rationalis. ſed & rationalis BF. tota igitur BK rationalis erit. & quoniam circumferentia ACG æqualis eſt circumferentiæ ADG, quarum ABC eſt æqualis ipſi AED; erit reliqua CG reliquę GD æqualis. quòd ſi iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipſius CL. Eadem ratione & anguli ad M recti ſunt, & AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC eſt æqualis angulo AMF, communis autem duobus triangulis ALC, & AMF eſt angulus LAC; reliquus ACL reliquo MFA æqualis erit; ideoq; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulū. ergo ut LC ad CA, ita MF ad FA; & antecedentium dupla. quare vt dupla ipſius LC ad CA, ita ipſius MF dupla ad FA. ſed vt ipſius MF dupla ad FA, ita eſt MF ad dimidiā ipſius FA. & vt igitur dupla ipſius LC ad CA, ita MF ad ipſius FA dimidiā. & conſequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipſius CA, ita MF ad quartam partem ipſius FA. atque eſt ipſius quidem LC dupla CD; ipſius vero CA dimidia



6. diffi. decimi.
A
8. sexti.
B

dimidia CM;& ipſius FA quarta pars FK.eſt igitur vt DC ad CM,ita MF ad FK : & componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF.ergo ut quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM ,ita quadratum ex MK ad id,quod fit ex KF quadratum.& quoniam recta linea,quæ duo pentagoni latera ſubtendit,vt AC extrema,ac media ratione ſecta,maior portio eſt æqualis lateri pentagoni,hoc eſt ipſi DC; & maior portio aſſumens dimidium totius quintuplum poteſt eius,quod fit à totius dimidia;atq; eſt totius AC dimidia CM:erit quadratum ex DCM tanquam ex vna linea,quintuplum eius,quod fit ex CM . vt autem quadratum ex DCM tanquam ex vna linea ad quadratum ex CM , ita oſtendimus eſſe quadratum ex MK ad quadratum ex KF.quintuplum igitur eſt quadratum ex MK quadrati ex KF : eſtque quadratũ ex KF rationale ; quippe cum diameter rationalis ſit.ergo & rationale eſt quadratum ex MK;& ipſa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex KF proportionem habet,quam numerus ad numerum . & quoniam BF quadrupla eſt ipſius FK,erit BK ipſius KF quintupla; & quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF.quadratum autem ex MK quintuplum eſt quadrati ex KF. ergo quadratum ex BK quadrati ex KM eſt quintuplum ; ac propterea ad illud proportionẽ non habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum , incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi KM longitudine, atque eſt vtraque ipſarum rationalis.ergo BK KM rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles . ſi autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti,reliqua irrationalis eſt, quę apotome appellatur.quare MB eſt apotome,& ipſi congruẽs MK. Dico & quar tam eſſe.quo enim quadratum ex BK ſuperat quadratum ex KM,illi ſit æquale quadratum ex N.ergo BK plus poteſt,quàm KM quadrato ex N.& quoniam commenſurabilis eſt KF ipſi FB,& componendo KB commenſurabilis ipſi BF; ſed & BF cõmenſurabilis ipſi BH longitudine,erit & KB ipſi BH commenſurabilis. quòd cum quadratum ex BK quintuplum ſit quadrati ex KM , habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM proportionem eam,quam habet quinque ad vnum. Ergo per cõuerſionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet, quam quinque ad quattuor,& non eam , quam quadratus numerus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi N:idcircoq; BK plus poteſt , quàm KN quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis.itaque quoniam tota BK plus poteſt,quàm congruens MK,quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis , & tota BK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali BH, erit MB apotome quarta.quod autem rationali,& apotome quarta continetur rectangulum irrationale eſt , & ipſum potens eſt irrationalis , quæ minor appellatur . ſed AB poteſt id,quod continetur HB BM,propterea quòd iuncta AH triangulum ABH eſt æquiangulum triangulo AB M:atque eſt vt HB ad BA,ita AB ad BM.ergo AB pentagoni latus eſt linea irrationalis,quę minor appellatur.quod oportebat demonſtrare.

C D E F G H K L M N O P Q R S T

9. undecimi;

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd ſi iungamus AG, fient anguli ad L recti , & DC dupla ipſius CL] *Iunctis enim AC ALG,ſi etiam intelligatur iuncta AD,quoniam circumferentia CG eſt æqualis circũferentiæ GD,erit angulus CAG æqualis angulo GAD . duæ igitur CA AL duabus DA AL æquales ſunt,& angulus CAL eſt æqualis angulo DAL.ergo & baſis CL baſi LD eſt æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis æquales , quibus æqualia latera ſubtenduntur . angulus igitur ALC eſt æqualis angulo ALD.& ob id vterque rectus eſt.& cum CL ſit æqualis LD,erit DC ipſius CL dupla.* A 27. tertij. 4. primi. Diffi. 10. primi.

Et antecedentium dupla] *Quoniam enim eſt vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem dupla ipſius LC ad LC,ita dupla ipſius MF ad MF;erit ex æquali vt dupla ipſius LC ad CA, ita dupla ipſius MF ad FA.* B

Ergo vt quadratum , quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22. ſexti libri.* C

Maior portio eſt æqualis lateri pentagoni,hoc eſt ipſi DC] *Ex 8. huius.* D E

totius

E Et maior portio assumens dimidiam totius quintuplum potest eius, quod fit à totius dimidia] *Ex 1. huius.*

F Ergo & rationale est quadratum ex MK] *Rationali enim commensurabile, & ipsum rationale est ex nona diffinitione decimi libri.*

C Et ipsa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiusdem libri.*

H Et quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 sexti libri. est enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1. proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadtati ex KM est quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF sit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF sit vt 5 ad. 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc est vt 5 ad 1.*

L Incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quę apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*

N Et quoniam commensurabilis est KF ipsi FB] *Intellige commensurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; posita est enim KF quarta pars ipsius FA, hoc est ipsius FB.*

O Et componendo KB commensurabilis ipsi BF] *Ex 16 decimi.*

P Sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine] *Est enim BF ipsius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipsi BH commensurabilis] *Ex 12 decimi.*

R Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

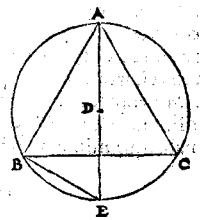
S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irralione est & ipsum potens est irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*

T Sed AB potest id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 sexti, & 17 eiusdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quę ex circuli centro.

Sit circulus ABC, & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplũ esse eius, quę est ex circuli ABC cẽtro. sumatur enim circuli cẽtrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iũgatur. Itaque quoniam æquilaterum est ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE est sexta pars circuli circumferentiæ; ideoq; recta linea BE est latus hexagoni, & æqualis ipsi DE, quę est ex circuli centro. & quoniam AE est dupla ipsius ED, erit quadratũ ex AE quadrati ex ED, hoc est quadrati ex EB quadruplũ. quadratũ autem ex AE est æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla sunt quadrati ex BE. & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum: atque est BE æqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex DE. ergo trianguli latus est potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonstrare oportebat.



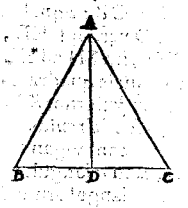
Corol. 15. quarti. 20. sexti. 47 primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basim perdendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulum aequilaterum ABC, cuius basis BC bifariam secetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipsam AC perpendicularis; sunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD DC

DC aequalia,& baſis AB eſt aequalis baſi AC. angulus igitur ADB eſt aequalis angulo ADC. & ideo vterque ipſorum rectus,& AD ad BC eſt perpendicularis. Dico quadratum ex BA ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3. Quoniam enim AB dupla eſt ipſius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque eſt quadratum ex AB aequale quadratis ex AD. DB. quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quã 4 ad 3. quod oportebat demonſtrare.

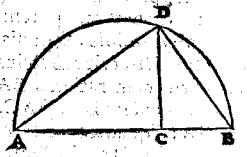


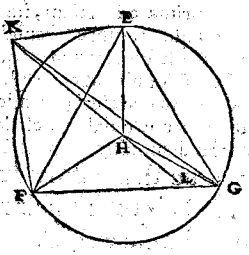
10. ſexti. 47. primi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem conſtituere,& ſphęrę comprehendere data,ac demonſtrare ſphærę diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis.

Exponatur enim datæ ſphærę diameter AB, & ſecetur in C,ita vt AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturque in AB ſemicirculus ADB: & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD,& DA iungatur. exponatur præterea circulus EFG æqualem habens eam,quæ ex centro ipſi DC, in quo deſcribatur triangulum æquilaterum EFG: ſumaturque centrum circuli H, & iungantur EH HF HG: atque à puncto H ipſi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita vt HK ipſi AC ſit æqualis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta eſt ad planum circuli EFG,& ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano exiſtentes ipſam cõtingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam vnãquãque linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamque ipſarum HE HF HG eſt perpendicularis. & quoniam AC quidem eſt æqualis HK, CD vero ipſi HE,& rectos angulos continent; erit baſis DA æqualis baſi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipſi DA eſt æqualis. tres igitur KE KF KG inter ſe æquales ſunt. quòd cum AC ſit dupla CB, erit AB ipſius BC tripla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, vt deinceps demonſtrabitur. triplum igitur eſt quadratum ex AD quadrati ex DC. eſt autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum. atque eſt DC æqualis EH. ergo & AD ipſi EF eſt æqualis. ſed AD oſtenſa eſt æqualis vnicuique ipſarum KE KF KG. & vnaquæque igitur ipſarum EF FG GE vnicuique KE KF KG eſt æqualis. & ob id æquilatera ſunt quattuor triangula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cõſtituta eſt ex quattuor triangulis æqualibus & æquilateris, cuius baſis quidem eſt triangulum EFG, uertex autem K pũctum. Iraq; oportet ipſam & ſphæra data comprehẽdere,& oſtẽdere ſphęræ diametrum potentia ſeſquialterã eſſe lateris pyramidis. producatur enim recta linea HL in directum ipſi HK; ponaturque HL

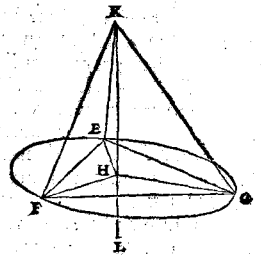




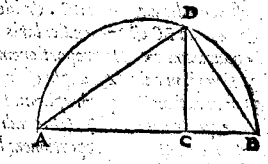
3 diffinit. undecimi.

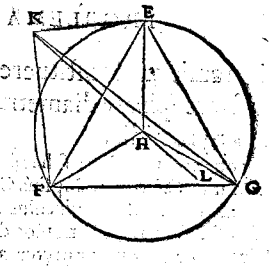
4. primi.

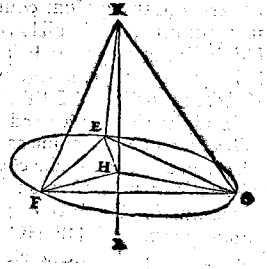
A
B
C



ipsi BC æqualis. & quoniam est vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipsi KH, CD vero ipsi HE, & CB ipsi KL: erit vt K
17.sexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL est æquale quadrato ex EH. atque est rectus vterque angulorum K HE EHL. ergo in KL descrip tus semicirculus & per punctum E transibit. nam si coniungamus EL, angulus LEK fiet
8. sexti. rectus, cum triangulum ELK æquiangulum sit vnicuiq; triangulorum ELH EKH. si igitur manente KL semicirculus cóuersus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiã per puncta FG transibit, iunctis FL LG; & rectis similiter factis ad puncta FG angulis: atque erit pyramis comprehensa data sphæra; etenim KL sphæræ diameter est æqualis diametro datæ sphæræ AB, quoniam ipsi quidem AC, ponitur æqualis KH; ipsi vero CB æqualis HL. Dico igitur sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis. Quoniam enim AC dupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC tripla. ergo per conuersionem rationis BA sesquialtera est ipsius AC. vt autem BA ad AC, ita est quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iuncta BD, est vt BA ad AD, ita DA ad AC ob
Cor. 8. sexti. similitudinem triangulorum DAB DAC, &
Cor. 20. sexti. quòd vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. ergo quadratum ex BA sesquialterum est quadrati ex AD. atque est BA quidem datæ sphæræ diameter, AD vero æqualis lateri pyramidis. sphæræ igitur diameter sesquialtera est lateris pyramidis. quod demonstrare oportebat.





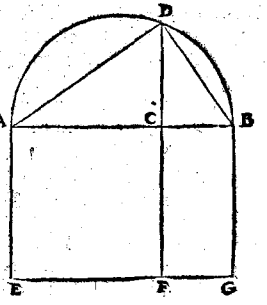


Itaque demonstrandum est vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim semicirculi figura; iungatúrq; DB: & ex AC describatur quadratum EC, & parallelogrammum FB compleatur. Quoniã igitur est vt BA ad AD, ita DA ad AC, propterea quòd triãgulum DAB æquiangulum est triãgulo DAC; erit rectangulum contentum BAC quadrato ex AD æquale. & quoniam est vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrammum BF; atque est parallelogrammũ quidem EB, quod continetur BA AC, est enim EA æqualis AC; parallelogrammum uero BF æquale est ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad BC, ita rectangulum contentum BA AC ad cõtentum AC CB. est autem contentum BA AC æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB quadrato ex DC. æquale: perpendicularis enim DC media est proportionalis inter basis portio-

Cor. 8. sexti. 17. sexti. 8. sexti.

17. sexti. Cor. 8. sexti



nes

nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur, hoc modo.* A

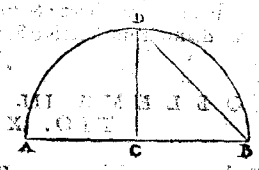
Quoniam enim est ut BA ad AC, ita quadratum ex DA ad quadratum ex AC, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectae lineae BA, AD, AC deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sexti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.* B

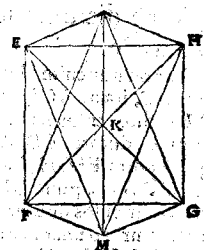
Ergo & DA ipsi EF est equalis] *Quoniam enim quadratum ex AD triplū est quadrati ex DC, et quadratū DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq; quadratū ex DC equale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit aequalis: erit quadraū ex AD equale quadrato ex EF: ideoq; AD ipsi EF equalis.* C

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XIIII.

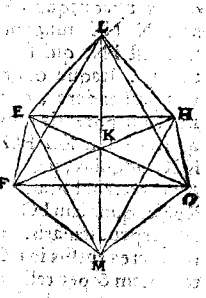
Octaedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & pyramidem: demonstrareq; sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.



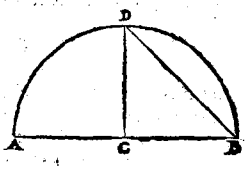
Exponatur datæ sphæræ diameter AB: & in C bifariam secetur; describaturq; in AB semicirculus ADB; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD: & DB iungatur. exponatur preterea quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipsi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL, producaturq; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KL KM vni ipsarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL KM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. quoniã igitur KE est æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratũ ex HE quadrati ex EK duplum: Rursus quoniam LK est æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostẽsum est autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH equalis. Eadẽ ratione & LH est equalis HE. æquilaterũ igitur est LEH triangulum. similiter ostendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem L M puncta, æquilaterum esse. octaedrum igitur constitutum est, quod octo triãgulis æquilateris continetur. Itaq; oportet ipsum & data sphæra comprehendere. demonstrareq; sphęræ diametrum potentia duplam esse lateris octahedri. quoniam enim tres rectæ lineæ LK KM KE inter se æquales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctum E transibit. & ob eandem causam si manente LM conuertus semicirculus in eundem locum restituatur, à quo cœpit



47. primi

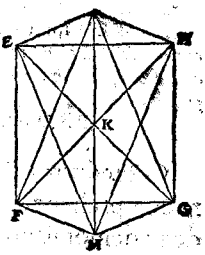


moueri, transibit etiam per puncta FGH: atque erit octaedrum sphæra comprehensum. Dico etiam comprehensum esse data sphæra. quoniam enim LK est æqualis KM, communis autem KE, & angulos æquales cõtinent; erit basis LF basi EM æqualis. & quoniam rectus est LEM angulus, in semicirculo



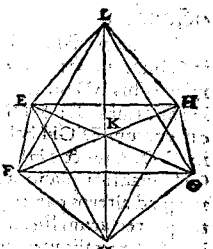
47.primi. enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rursus quoniam AC est æqualis CB,

Cor. 8.& 20 sexti. erit AB dupla ipsius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BD. ostensum est autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque est quadratum ex BD æquale quadrato ex LE; posita est enim EH ipsi DB æqualis. ergo quadratum ex AB est æquale quadrato ex LM; ac propterea ipsa AB est æqualis LM. est autem AB diameter datæ sphæræ. quare LM est æqualis datæ sphæræ diametro. octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris octaedri potentia duplam esse.

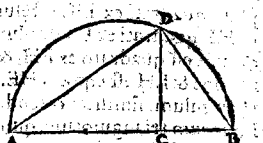


PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.

Cubum constituere, & sphæra comprehendere, qua & priores, demonstrareque sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse.



Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB: & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturq; in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iungatur. deinde exponatur quadratum EFGH, habens vnumquodque latus æquale ipsi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab vnaquaque rectarum linearum EK FL GM HN vni ipsarum EF FG GH HE æqualis vnaquæque EK FL GM HN: & KL LM MN NK iungantur. cubus igitur constitutus est FN, qui sex quadratis æqualibus continetur. Itaque oportet ipsum & sphæra data comprehendere, demonstrareque sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. Iungantur enim KG EG. & quoniam rectus est

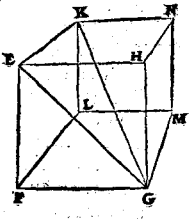


3.diffi. unde cimi. KEG angulus, propterea quod & KE perpendicularis sit ad EG planũ, nidelicet, & ad rectam lineam EG: semicirculus in KG descriptus & per punctum E transibit.

4.Vndecimi Rursus quoniam FG perpendicularis ad vtramque ipsarum FL FE, & ad FK planum est perpendicularis. quare si iungamus FK ipsa FG, & ad FK perpendicularis erit; ac propterea rursus in KG descriptus semicirculus transibit & per punctum F, similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur manente KG, conuersus semicirculus in eũdem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, erit cubus sphæ-

ra

ra comprehensus. Dico & data sphæra. Quoniam enim GF est æqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. æqualis autem est EF ipsi EK. quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quoniam AB est ipsius BC tripla: & ut AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostensum est autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & posita est KE ipsi BD æqualis. ergo & KG est æqualis AB, atque est AB data sphæræ diameter. quare & KG æqualis erit diametro datæ sphæræ. cubus igitur data sphæra est comprehensus. & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. quod demonstrare oportebat.



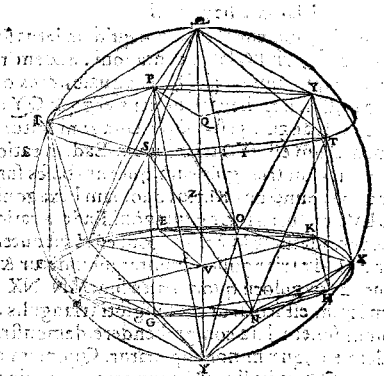
47 primæ.

Coroll. 20 sexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

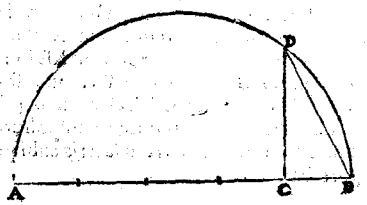
Icosaedrum constituere & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras; demonstrareque icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur.

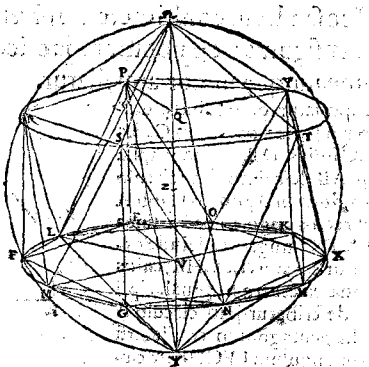
Exponatur datæ sphæræ diameter AB; secetur que in C, ita ut AC ipsius CB sit quadrupla: & in AB descripto semicirculo ADB, ducatur à puncto C ipsi AB ad rectos angulos recta linea CD. & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ea centro sit æqualis ipsi DB: describaturq; in circulo EFGHK pentagonum æquilaterũ & æquiangulum EFGHK. & circumferentiæ EF FG GH HK KE bifariam secentur in LMNXO punctis, & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE. & similiter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur est LMNXO pentagonum; & recta linea EO est decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipsi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP FR GS HT KY æquales existentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK, & iungatur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX XY YO OP. Quoniam igitur utraque ipsarum EP KY eidem plano est ad rectos angulos, erit EP ipsi KY



parallela

parallela; atque eſt ipſi æqualis. quę autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes
33. primi. coniungunt rectæ linræ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. ergo PY ipſi EK & æqua-
lis eſt, & parallela. ſed EK eſt latus pentagoni æquilateri. ergo & PY eſt pentagoni
æquilateri latus, in circulo EFGHK deſcripti. Eadem ratione & unaquæque ipſarũ
PR RS ST TY eſt latus pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti. æquilate-
rum igitur eſt PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus eſt PE, de
B goni uero EO, atque eſt rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim la-
tus pentagoni poteſt & hexagoni, &
decagoni latus in eodem circulo de-
ſcriptorum. Eadem ratione & OY
eſt pentagoni latus, eſt autem & PY
latus pentagoni. ergo æquilaterum
eſt triangulum POY. & ob eandem
cauſſam vnumquodque triangulo-
rum PLR RMS SNT TXY eſt æ-
quilaterum. & quoniam pentagoni
oſtenſa eſt vtraque ipſarum PL PO,
atque eſt LO pentagoni; erit PLO
æquilaterum triangulum. Ea-
dem ratione & vnumquodq; triã
gulorum LRM MSN NTX X
YΩ æquilaterum eſt. ſumatur cẽ
trum circuli EFGHK, quod ſit
punctum V; & à puncto V ipſi
circuli plano ad rectos angulos
erigatur VΩ, & ad alteras partes
producatur, vt Vτ: & auferatur
hexagoni quidem latus VQ: de-
cagoni vero vtraque ipſarum V
τ QΩ, & iungantur PΩ PQ Y
Ω EV LV Lτ τM. & quoniam
vtraque ipſarum VQ PE circu-
li plano eſt ad rectos angulos,
6 undecimi erit VQ ipſi PE parallela. ſunt
autem & æquales. ergo EV PQ
& æquales ſũt, & parallelæ: eſtq;
EV hexagoni latus. hexagoni





igitur & PQ quòd cum hexagoni quidem latus ſit PQ, decagoni vero QΩ, & rectus
10. huius. PQΩ angulus; erit PΩ latus pentagoni. Eadem ratione & YΩ pentagoni eſt latus;
quoniam ſi iungamus VK QY & æquales, & ex oppoſito erunt. atque eſt VK ex cen
tro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY eſt latus hexagoni. decagoni autẽ
QΩ, & rectus angulus eſt YQΩ. pentagoni igitur eſt YΩ: eſtque PY pentagoni. quà
re æquilaterum eſt PYΩ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum eſt vnumquod
que reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt PR RS ST TY rectæ lineę, uer
tex autem Ω punctum. Rurſus quoniam hexagoni eſt VL, decagoni vero Vτ, & an-
gulus LVτ rectus; erit Lτ pentagoni. Eadem ratione ſi iungamus MV, quæ eſt hexa-
goni, concludetur & Mτ pentagoni eſſe. eſt autem & LM pentagoni. æquilaterum
igitur eſt LMτ triangulũ. ſimiliter oſtendetur & æquilaterum eſſe unumquodque
reliquorũ triãgulorũ quorũ baſes ſunt MN NX XO OL, uertex aũt τ punctũ. cõſti
tutum igitur eſt icoſaedrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; opor
tet ipſum ſphęra data comprehendere, demonſtrareq́ue icoſaedri latus lineam irra
C tionalem eſſe, quæ minor appellatur. Quoniam enim hexagoni latus eſt VQ, decа-
goni vero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q, & VQ eſt ma
ior portio. eſt igitur ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ. atque eſt VQ ipſi VL æqualis, &

QΩ

QΩ ipsi V☥. quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V☥, & sunt anguli ΩVL, LV☥ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ☥LΩ rectus angulus, ob similitudinem triangulorum ☥LΩ VLΩ. ergo semicirculus in ☥Ω descriptus etiam per L transibit. Eadem ratione, quoniam est ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ; & æqualis est ΩV quidem ipsi ☥Q. VQ uero ipsi QP: erit vt ☥Q ad QP, ita PQ ad QΩ: ideoque si rursus iungamus P☥, erit angulus, qui ad P rectus. semicirculus igitur descriptus in ☥Ω transibit & per P. Quòd si manente ☥Ω conuersus semicirculus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiam per P, & per reliqua icosaedri puncta transibit: atque erit icosaedrum sphæra comprehensum. Dico & data. secetur enim VQ bifariam in Z & quoniam recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q, & ΩQ est minor ipsius portio, ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis, videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quòd à dimidia maioris portionis describitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum est. & ipsius quidē ZΩ dupla est Ω☥; ipsius vero AQ dupla QV. ergo quadratum ea Ω☥ quintuplum est quadrati ex VQ. & quoniam AC quadrupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC quintupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quaratum ex BD. quadratum igitur ex AB quadrati ex BD est quintuplum. ostensum autem est & quadratum ex Ω☥ quintuplum quadrati ex VQ: atque est DB æqualis VQ: vtraque enim ipsarum est æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK. quare & AB est æqualis ☥Ω, estq; AB data spheræ diameter. & ☥Ω igitur erit diameter datę sphęrę. ergo icosaedrum est data sphæra comprehensum. Dico icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur. Quoniã enim rationalis est sphęrę diameter, atque est potētia quintupla eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis, quare & diameter ipsius rōnalis erit. si aūt in circulo rationalē diametrū habente pentagonū æquilaterū describatur, erit latus pētagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri. ergo icosaedri latus est linea irrationalis, quę minor appellatur.

6. secū.

E F G H K L

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est sphæræ diametrum potentia quintuplã esse eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur: & sphærę diametrum compositam esse ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quę in eodem circulo describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur utraq; ipsarum EP KY eidem plano est ad angulos rectos, erit EP ipsi KY parallela.] *Ex 6 vndecimi.* A

Erit PO latus pentagoni] *Ex 10 huius.* B

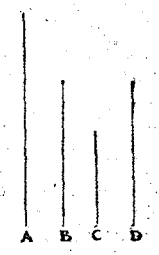
Quoniam enim hexagoni est VQ, decagoni uero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q] *Ex 9 huius.* C

Quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V☥: & sunt anguli ΩVL LV☥ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ☥LΩ angulus rectus ob similitudinem triangulorum ☥LΩ VLΩ] *Quoniam enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad V☥, erit vt ΩV ad V☥, videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratum primae ΩV ad quadratum VL secundae: componendoq; vt Ω☥ ad ☥V, ita quadrata ex ΩV VL, hoc est quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV: & per conuersionem rationis vt ☥Ω ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV. quare LΩ est media proportionalis inter ☥Ω ΩV, quod deinceps demonstrabimus. vt igitur ☥Ω ad ΩL, ita LΩ ad ΩV. atque est angulus LΩ☥ vtrique communis. ergo triangulum ☥ΩL simile est triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus est aequalis angulo ☥LΩ. angulus igitur ☥LΩ rectus erit. At vero LΩ inter ☥Ω ΩV mediam esse proportionalem ex his apparebit.* D

Si sint tres rectæ lineæ, sitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectae lineae A B C; sitq; vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC deinceps proportionales esse. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratũ ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed vt A ad C, ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale est quadrato ex B; ac propterea D ipsi B est aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum ϒLΩ rectum, esse hoc modo. Quoniã enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad Vϒ; suntq; anguli ΩVL LVϒ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVϒ simile, & angulus LΩV equalis angulo VLϒ. sunt autem anguli VLΩ LΩV equales vni recto, cum rectus sit LVΩ: ergo & anguli ΩLV VLϒ vni recto sint aequales: & ob id angulus ϒLΩ est rectus. quod opo rtebat demonstrare.



E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur] *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex Ωϒ quintuplum est quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollario 20 sexti. est enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.*

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit] *Quoniam enim sphęrę diameter est potentia quintupla eius, quae ex centro circuli, habebit quadratum diametri sphęrę ad quadratum eius, quae ex centro circuli proportionem eam, quã numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphęrę, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quae ex centro circuli, est rationale: idcoq; ea, quae ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quae rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.*

6. decimi.

6. diffi. dec.

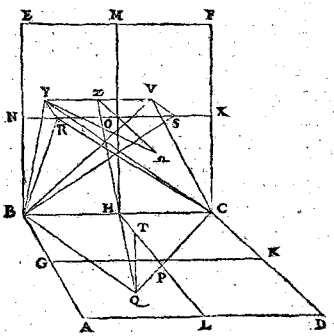
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum equilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 11. huius.*

L Sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri] *Illud vero ex ia dictis manifestissime cõstat.*

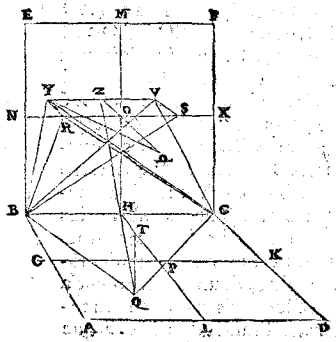
PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

Dodecahedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonstrare quę dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponãtur prędicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se se AB CD CBEF: & secetur vnumquodq; ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GH KLMNX, & GK HL MH NX iungantur. deinde secentur rectæ lineæ NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorũ maiores portiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis RO OS TP equales ponantur; iungantur; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV æquilaterũ es-



se, &

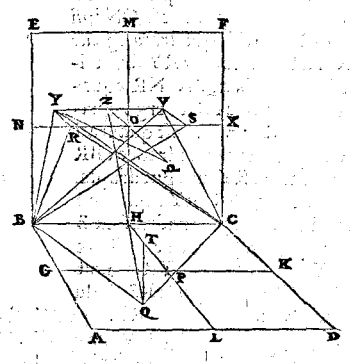


47.primi

20.sexti

e, & in uno plano, & præterea æquiangulum. Iungantur enim RB SB VB. & quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior ipsius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR. æqualis autem est ON ipsi NB, & OR ipsi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY sunt tripla. sed quadratis ex BN NR æquale est quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum est quadrati ex RY: ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY sunt quadrupla. quadratis autē ex BR RY æquale est quadratū ex BY. ergo quadratū ex BY quadruplū est quadrati ex YR. & ob id BY est dupla ipsius YR. atq; est VY ipsius YR dupla, quē & RS est dupla ipsius RO, hoc est ipsius RY. ergo BY est æqualis YV. similiter demōstrabitur & unaquæq; ipsarū BQ QC CV utriq; BY YV æqualis. æquilaterū igitur est BYVCQ pentagonū. Dico & in vno esse plano. ducatur. n. à puncto O ipsa OZ utriq; ipsarū RY SV parallela ad exteriores cubi partes: & iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectā lineam esse. nā cum HP extrema, ac media ratione secetur in T, & PT sit maior ipsius portio, erit ut HP ad PT, ita PT ad TH. æqualis autem est HP quidem ipsi HO, PT verò utrique ipsarum TQ OZ. est igitur vt HO ad OZ, ita QT ad TH. atque est HO parallela ipsi TQ; utraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos: TH uero est parallela OZ, quòd vtraque ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autē duo triangula componantur ad unum angulum, ut ZOH, HTQ, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam sint parallela, reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in directum ipsi HQ. omnis autem recta linea est in uno plano. In uno igitur plano est YBQCV pentagonum. Dico & æquiangulum. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit vt utraque NO OR ad ON, ita NO ad OR. æqualis autem est RO ipsi OS. quare ut SN ad NO, ita NO ad OS. & ob id NS extrema, ac media ratione secta, est in O; & maior portio est NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla. æqualis autem est ON ipsi NB, & OS ipsi SV. ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex SN NB est æquale quadratum ex BS. quadrata igitur ex BS SV, hoc est quadratum ex VB, quòd angulus VSB sit rectus, quadruplum est quadrati ex NB: ideoq; ipsa VB ipsius BN est dupla. est autem & BC dupla BN. ergo VB est æqualis BC. & quoniam duæ BY YV duabus BQ QC æquales sunt. & basis VB æqualis basi BC, erit angulus BYV angulo BQC æqualis. similiter ostendemus & YVC angulum æqualem angulo BQC. tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se æquales sunt. si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales, pentagonum æquiangulum erit. æquiangulum igitur est pentagonum BYVCQ. ostensum est autem & æquilaterum. ergo pentagonum BYVCQ æquilaterum est, & æquiangulum. atque est in uno cubi latere BC. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem constituamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis contenta. Itaque oportet ipsum & data sphæra comprehendere, demonstrareque dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur: producatur enim ZO, & sit ZΩ. occurrit igitur ZΩ diametro cubi, & bifariam se mutuo secant. hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω. ergo Ω est centrum

ſphæræ, quæ cubum comprehendit, & Oω dimidium lateris cubi. iungatur Yω. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio maior, erũt quadrata ex NS SO, tripla eius quod fit ex NO. æqualis aũt eſt NS ipſi Zω, quoniam & NO ipſi Oω eſt æqualis, & ZO ipſi Os. ſed & OS eſt æqualis ZY, quoniã & RO. quadrata igitur ex ωZ ZY tripla ſunt quadrati, quod fit ex NO. ſed quadratis ex ωZ ZY æquale eſt quadratum ex Yω. ergo quadratum ex Yω triplum eſt quadrati ex NO. eſt autem quę ex cẽtro ſphæræ cubũ cõprehendentis potentia tripla dimidij lateris cubi. prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere, demõſtrareq; ſphęrę diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. ſi autem tota totius, & dimidia dimidiæ. atque eſt NO dimidia lateris cubi. ergo Yω eſt æqualis ei, quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis: eſtque ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y eſt ad ſphęrę ſuperficiem. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiẽ ſphæræ. dodecaedrum igitur eſt data ſphęra comprehenſum. Dico dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt RO; erit tota NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio RS. nam cum ſit ut NO ad OR, ita OR ad RN: & earum duplæ: partes enim eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit vt NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem eſt NX, quàm RS. ergo & RS eſt maior, quàm vtraque NR SX. eſt igitur NX extrema, ac media ratione ſecta; & RS eſt ipſius maior portio. æqualis autem eſt RS ipſi YV. ergo NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt YV. & quoniam rationalis eſt ſphæræ diameter, atque eſt potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quę eſt cubi latus. ſi autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt latere cubi extrema, ac media ratione ſecto maiorem portionem eſſe dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque eſt HO parallela ipſi TQ: vtraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos] *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt] *Ex 32 ſexti.*

D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior portio, erit vt vtraque NO OR ad ON, ita NO ad OR] *Ex 5. huius. ſi enim recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturq; ipſi aequalis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quae à principio recta linea, quare vtraque*

que

que NO OR, hoc eſt ut tota NO unà cum maiori portione OR ad totam NO, ita eſt NO ad OR; ſit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON ſunt tripla] *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni æquilateri tres anguli ſint æquales pentagonum æquiangulum erit] *Ex 7. huius.* F

Prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere] *In quinta decima huius.* G

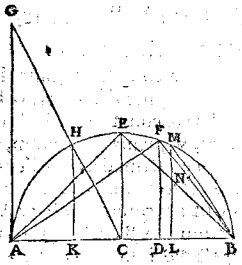
Erit NX rationalis, quę eſt cubi latus] *Nam cum ſphęrae diameter ſit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipſum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipſi commenſurabile erit. quae autem rationali ſunt commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales ſunt, per ſextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur] *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

Exponatur datæ ſphęrę diameter A B, & ſecetur in C quidem, ita vt AC ſit æqualis CB; in D vero ita, vt A D ipſius D B ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus AEB: & à punctis CD ipſi AD ad rectos angulos ducãtur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaq; quoniam A D dupla eſt ipſius DB, erit AB ipſius BD tripla: & per cõuerſionem rationis B A ſeſquialtera ipſius A D. vt autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A F. eſt enim triangulum A F B triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AF. eſt autem & ſphærę diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis; eſtque A B ſphæræ diameter, ergo A F pyramidis lateri eſt æqualis. Rurſus quoniam AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. Sed ut AB ad BD, ita quadratum ex A B ad quadratum ex FB. quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex BF. eſt autem & ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque eſt AB ſphæræ diameter. ergo BF eſt cubi latus. & quoniam AC eſt æqualis CB, erit AB ipſius BC dupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplum. atque eſt ſphęræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB eſt diameter datę ſphæræ. quare BE eſt octaedri latus. ducatur à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG æqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur AG dupla eſt ipſius AC; etenim GA eſt æqualis AB; ut autem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipſius KC dupla. ergo quadratum ex H K quadruplum eſt quadrati ex K C. quadrata igitur ex HK K C, quod eſt quadratum ex HC quintuplum eſt quadrati ex K C. æqualis autem eſt H C ipſi CB. ergo quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex C K. & quoniam A B eſt dupla ipſius BC, quarum AD dupla eſt DB; erit reliqua B D dupla ipſius D C: ideoque B C ipſius CD eſt tripla. nonuplum igitur eſt quadratum ex BC quadrati ex CD. ſed quadratum ex B C quadrati ex C K eſt quintuplum. ergo quadratum ex K C maius eſt quadrato ex C D. & K C ipſa C D maior. ponatur ipſi K C æqualis C L; & à puncto L ipſi A B ad rectos angulos ducatur L M, & M B iungatur. & quoniam quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex K C; atque eſt ipſius quidem C B dupla B A; ipſius uero C K dupla K L: erit quadratum ex A B quadrati



1 ſexti.

8. huius.

15. huius.

14. huius.

4. ſexti.

20. ſexti.

19 quinti.

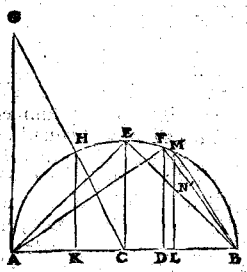
20. ſexti.

15. quinti.

Corol.16.huius. drati ex KL quintuplum. sed & sphęrę diameter potentia quintupla est eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. atque est AB diameter sphęræ. ergo
Corol.16.huius. KL est hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam sphærę diameter composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo descriptorũ; atque est AB quidem diameter sphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK est æqualis
14.tertij. LB: erit vtraque ipsarum AK LB latus decagoni descripti in eodem circulo, à quo icosaedrum describitur. & quoniam decagoni est LB, hexagoni vero ML; est enim
10.huius. æqualis ipsi KL, quòd & ipsi HK; namque æqualiter à centro distant; & est vtraque
16.huiut. HK KL dupla ipsius HC: erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idē est, & icosaedri. ergo MB est icosaedri latus. & quoniam FB est latus cubi, secetur extre
Ex corol. antecedentis. ma, ac media ratione in N, & BN sit maior portio; erit NB dodecaedri latus. quòd cum sphæræ diameter ostensa sit ipsius quidem AF lateris pyramidis potentia sesquialtera; ipsius vero BE octaedri potētia dupla, & ipsius FB cubi potentia tripla, quarum partium sphæræ diameter potentia est sex, earum pyramidis quidem latus erit quattuor, octaedri vero trium, & cubi duarũ. ergo latus pyramidis octaedri qui dem lateris potentia est sesquitertium, cubi vero potentia duplum: & octaedri latus lateris cubi potentia est sesquialterum. latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter se sunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo, dico autem icosaedri, & dodecaedri, neque inter se, neque ad iam dicta sunt in rationalibus proportionibus, nempe minor, & apotome.

At vero MB latus icosaedri maius esse dodecaedri latere BN, ita demonstrabimus.

8.sexti Quoniam enim triangulum FDB æquiangulum est triangulo FAB, erit vt DB ad BF, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum secundę. est igitur vt DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt AB ad BD, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla autem est AB ipsius BD. ergo quadratum ex
Cor.20. sexti. 20.sexti. FB quadrati ex BD est triplum. atque est quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; est. n. AD ipsius DB dupla. ergo quadratū ex AD maius est quadrato ex FB; propterea quòd AD quàm FB est maior. multo igitur maior est
9. huius. AL quàm FB. & ipsa quidem AL extrema, ac media ratione secta, maior portio est LK, quoniam KL est hexagoni latus, & KA decagoni. ipsa uero FB extrema, ac media ratione secta, maior portio est BN. maior igitur est KL quàm BN, est autem KL
19.primi ipsi LM æqualis. ergo LM quàm BN est maior. sed BM est maior quàm ML. ergo MB, quę est latus icosaedri maior erit ipsa BN, dodecaedri latere.



ALITER. Quoniam enim AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. ut autem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod triangulum FAB triangulo FBD æquiangulum est. triplum igitur est quadratum ex AB
Cor.20.sexti. 8.sexti. quadrati ex BF. Ostensum est autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplũ. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF sunt æqualia. sed tria ex FB maiora sunt quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. & quinque igitur ex KL, quàm sex eorum, quæ ex BN sunt maiora. ergo & unum ex KL maius est vno ex BN; ac propterea KL quàm BN maior: æqualis autem KL ipsi LM. maior igitur est LM, quam BN; multo igitur MB quàm BN est maior. quod demonstrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora esse, quàm sex earum, quæ ex BN, hoc modo ostendemus.

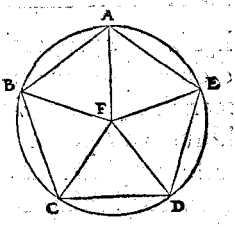
Quoniam

Quoniam enim maior est BN quàm NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN. quod igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius est, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. sed quod quidem continetur FB BN vnà cum contento BF FN est quadratum ex FB. contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N, & quod extremis continetur est æquale ei, quod fit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quàm duplum quadrari ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora sunt, quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat. 2. secundi. 17. sexti.

Dico præter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis cõstituitur angulus pyramidis, ex quattuor octa edri, ex quinque icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiãgulis ad vnum punctum constitutis, non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri anguli sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattor rectis æquales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autẽ æquilateris, & æquiãgulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor contineatur fieri non potest. nam cum pentagoni æquilateri angulus constet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neque uero alijs polygonis figuris constituetur angulus solidus propter absurda, quæ consequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura solida constituitur æquilateris, & æquiangulis contenta. quod oportebat demonstrare. 21 undecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulũ constare ex recto, & recti quinta parte, hoc modo ostendemus.



Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturque ipsius centrum, quod sit F; & iungantur F A FB FC FD FE, quæ pẽtagoni ABCDE angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis æquales sunt, & inter se sũt æquales, erit unus ipsorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt unius recti, & quintæ partis. æqualis aũt est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

TERTIIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVARTVS.

vt quidam arbitrantur.

VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

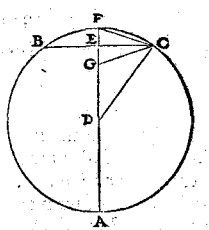
BASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam veniſſet, patriq́ue noſtro ob mathematicarum diſciplinarum ſocietatem commendatus fuiſſet, ipſo peregrinationis tempore, cum eo diu, multumq́ue uerſatus eſt. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio ſcriptum eſt de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione, quam ſcilicet hęc inter ſe proportionem habeant, arbitrati ſunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ, ac litteris prodiderunt. Ego vero poſtea incidi in aliũ librum ab Apollonio editum, qui propoſitę rei demonſtrationem recte complectebatur; atque ex eius problematis indagatione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ eſt, quilibet facile perſpicere poteſt, cũ in omnium manibus verſetur. quod autem nos poſtea ſummo, quantum conijci licet, ſtudio lucubraſſe videmur, id litteris mandatum tibi dedicandũ cenſuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus diſciplinis mathematicis, & præſertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quę dicturi ſumus: ob eam uero, quę tibi cum patre meo fuit conſuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipſam libenter audias. ſed iam tempus eſt ut prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo describuntur.

Sit circulus ABC, & in eo describatur pentagoui æqui lateri latus BC; sumaturque circuli centrum D: & ad BC ducta DE perpendicularis, producatur in directum ipsi DE recta linea EF. Dico DE dimidiam esse vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipsi EF æqualis: & à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiæ BFC: atque est totius quidem circuli circumferentiæ dimidia ACF, ipsius vero BFC dimidia FC, erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoq; circumferentia AC ipsius CF est quadrupla. vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF. angulus igitur ADC quadruplus est anguli CDF. duplus autem est angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC anguli GDC est duplus. est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC. duplus igitur est angulus EGC anguli GDC: & idcirco DG ipsi GC est æqualis. sed GC æqualis est CF. ergo & DG ipsi CF. est autem & GE æqualis EF. æqualis igitur est DE utrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipsius DE est dupla: atque est DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri decagoni. ergo DE est dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum.



A B C D E

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eã, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli. F

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] *Ex 15 quinti.*

B Vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF] *Ex vltima sexti.*

C Duplus autem est angulus ADC anguli EFC] *Ex 20 tertij.*

D Est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC] *Posita enim est FE aequalis EG: & EC est vtrique communis: anguli ad E recti. basis igitur FC est aequalis basi CG, & triangulum triangulo aequale; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtenduntur ex 4. primi.*

E Et idcirco DG ipsi GC est æqualis] *Nam cum angulus EGC exterior sit aequalis duobus interioribus, & oppositis GDC GCD, sitq; duplus ipsius GDC; erit angulus GCD aequalis angulo GDC: & ob id latus DG lateri GC aequale.* 32. primi. 6. primi.

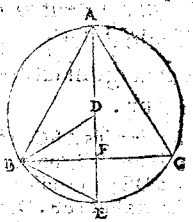
F Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli.

Sit circulus ABC, & in ipso describatur triangulum aequilaterum ABC; sumptoq; circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DE, & ad E producatur. Dico DE dimidiam esse ipsius DE. iungantur enim DB BE. & quoniam BE est latus hexagoni, quod ex 15 tertij decimi libri apparet: & ideo aequalis ei, quae ex centro: eruntq; DB BE inter se aequales, & ipsarum quadra-

ta

47 primi

ta aequalia. sed quadratum quidem ex DB est aequale quadratis ex EF FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE sunt aequalia; & dempto communi quadrato ex BF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipsi FE est æqualis, & DF ipsius DE dimidia. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

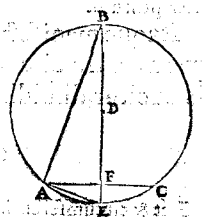
Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadē sphæra descriptorum.

Hoc autem conscribitur ab Aristero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro, videlicet vt dodecaedri superficies est ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum; quòd perpendicularis ducta à centro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem sit, quæ ad icosaedri triangulum ducitur. Itaque demōstrandum est eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, hoc præmisso.

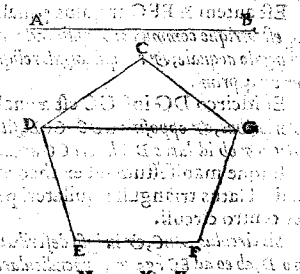
Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod fit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quę ex circuli centro.

Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: sumatur que circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla esse. iuncta enim AE est decagoni latus. & quoniā BE dupla est ipsius ED; erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE æqualia sunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla sunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA AE & ED sunt quintupla quadrati ex ED, sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED sunt quintupla.

47 primi

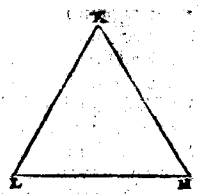


Hoc demonstrato, demonstrandum est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.



Exponatur sphæræ diameter AB, & in ipsa sphęra describatur dodecaedrum, & icosaedrū sitque unum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icosaedri uero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur DG. ergo DG est cubi latus. & exponatur recta linea quædam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN sit quintuplum. est autem & sphæ-

ræ diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniam quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplũ quadrati ex DG; erunt tria quadrata ex DG quadratis quinque ex MN æqualia. ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinque quadratis ex MX sunt æqualia. quinque autẽ quadrata ex KL æqualia sũt quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC æqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demõstratum est quadrata ex DG GC quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quę est ex centro circuli descripti circa triangulũ KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quę est ex centro circuli quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli sunt æqualia; ac propterea diameter diametro est æqualis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.



C
D
E
F
G
H

F. C. COMMENTARIVS.

A Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] *Ex decima tertij decimi.*

B Ergo DG est cubi latus] *Secta enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior portio erit aequalis lateri pentagoni CD. ex 8 tertiidecim. si aũt latus cubi extremã, ac media rõne secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertiidecimi. sed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duę rectę lineę extrema, ac media ratione secentur, erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.*

C Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus] *Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quae ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, hoc est hexagoni latus. si autem hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior portio latus decagoni. quod nos supra ad nouam tertij decimi demonstrauimus.*

D Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertij decimi libri.*

E Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX] *Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione secta. & similiter MX maior portio ipsius MN: & vt tota DG ad totam MN, ita est ipsius DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN. quod deinceps demonstrabitur.*

F Quinque autem quadrata ex KL æqualia sunt & quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX] *Ex 10 tertij decimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à quo icosaedrum describitur, & cuius ea, quae ex centro est MN.*

G Antea enim demonstratum est] *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.*

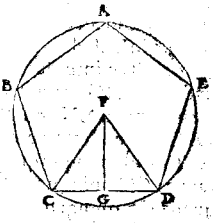
H Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quę ex centro circuli] *Ex undecima tertij decimi libri.*

A

THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit; quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipſum circulus: ſumatur autem centrum F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentagonis ABCDE æquale eſſe. Iungatur enim CF FD. & quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem triangulis æquale. decem autem triangula duo pentagona ſunt, & eorum ſextupla æqualia. ergo quod tricies CD FG continetur eſt æquale duodecim pentagonis. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies. ergo quod tricies continetur CD FG ſuperficiei dodecaedri æquale erit.



A

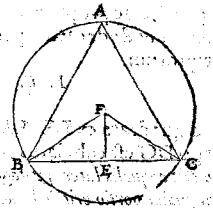
B

Similiter demonſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipſum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BC DE continetur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.

Quoniam enim rurſus quod BC DE continetur duplum eſt trianguli DBC, erunt duo triangula æqualia ei, quod continetur BC DE, & eorum tripla. ſex igitur triangula DBC æqualia ſunt tribus, quæ BC DE continentur. at ſex triangula vt DBC ſunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum decupla. ergo quod tricies BC DE continetur eſt æquale viginti triangulis ABC, hoc eſt icoſaedri ſuperficiei, erit igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

C

D



COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti, in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icoſaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti in ipſum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

F. C. COMMENTARII.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD] *Ex 41 primi, ex quo ſequitur duo triangula FCD æqualia eſſe ei, quod CD FG continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona ſunt] *Vnumquodque enim pentagonum quinque eiuſmodi triangula continet.*

C At ſex triangula vt DBC ſunt æqualia duobus A B C triangulis] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis DBC conflat.*

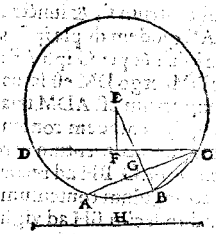
D Erit igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur] *Quoniam enim quod tricies cõtinetur CD FG eſt æquale ſuperficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE æquale ſuperficiei icoſaedri,*

ſaedri, erit vt ſuperficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG; ita ſuperficies icoſaedri ad id, quod tricies continetur BC D E: & permutando vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. ſed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod ſemel continetur CD FG ad id, quod ſemel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Hoc probato demonſtrandum erit, vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus.

Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: & in ipſo deſcribatur trianguli quidem æquilateri latus CD: pentagoni vero AC: ſumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipſi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe H ad ipſam CD.



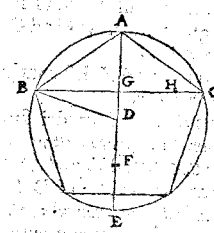
quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt EB, & eſt vtriuſque quidem dimidia EG, ipſius vero BE dimidia EF: erit & ipſius EG extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF. eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectæ maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit. vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF; ideoque contentum H FE eſt æquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam eſt vt H ad CD, ita quod cõtinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur eſt æquale cõtentum CA EG: erit vt H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD.

A
B
C
D
E
F G
H
K
L

Aliter demonſtrare ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus, hoc præmiſſo.

Sit circulus A B C, & in eo deſcribantur æquilateri pentagoni latera AB AC: & iungatur B C; ſumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturq; ipſius A D dimidia DF, & GC ipſius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono æquale eſſe.

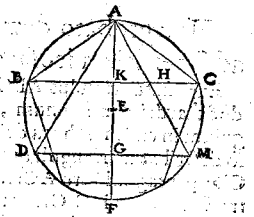
Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla eſt ipſius DF, erit FA ipſius AD ſeſquialtera. rurſus quoniam G C tripla eſt ipſius C H, erit G H ipſius H C dupla. ſeſquialtera igitur eſt CG ipſius GH. quare vt FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentũ AF GH eſt æquale ei, quod AD CG cõtinetur: ſed CG eſt æqualis GB. ergo contentum AD BG eſt æquale ei, quod AF G H continetur. contentum autem AD BG eſt duo triangula, ut A B D. quod igitur AF G H continetur & duo triangula A B D. ergo quinque rectangula contenta AF GH decem ſunt triangula. decem autem triangula duo pentagona ſunt. quinque igitur rectangula



M

contenta AF GH duobus pentagonis ſunt æqualia. & quoniam GH eſt dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC ſunt æqualia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla. decem igitur rectangula contenta AF HC ſunt æqualia quinque, quę AF GH continentur, hoc eſt duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pentagono ſunt æqualia. quinque autem contenta AF HC, ſunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam B H quintupla eſt ipſius H C, & communis altitudo eſt AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono eſt æquale.

Hoc demonſtrato nunc exponatur circulus cõprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphęra deſcriptorum; & in circulo ABC deſcribantur æquilateri pentagoni latera BA AC: & iungatur BC. ſumatur præterea circuli centrum E, & iuncta A E ad F producatur: ſitq; AE quidem dupla ipſius EG, KC vero ipſius CH tripla: & per G ipſi AF ad rectos angulos ducatur DM. ergo DM eſt latus trianguli æquilateri; & æquilaterum eſt ADM triangulum. & quoniam rectangulum quidem contentum AG BH eſt æquale pentagono, contentum vero AGD æquale triangulo ADM; erit vt rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula, hoc eſt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. & duodecim quidē BH ſunt decem B C: etenim BH quintupla eſt ipſius H C; & B C ipſius C H ſextupla: ideoq; duodecim BH ſunt æquales decem BC: viginti autem DG ſunt decem DM; dupla enim eſt D M ipſius D G. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc eſt vt BC ad DM, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque eſt BC quidem cubi latus, DM vero latus icoſaedri. & vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita BC ad DM, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.



F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta maior portio eſt EB] *Ex nona tertiidecimi.*

B Et eſt vtriuſque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipſius vero BE dimidia EF] *Ex iis, quae nos demonſtrauimus ad finem primae huius.*

D Erit & ipſius EF extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF] *Ex 15 quinti.*

E Eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectæ maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit] *In 17 tertiidecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF.] *Hoc autem ita eſſe ad finem huius libri demonſtrabitur.*

G Ideoque contentum H FE eſt æquale ei, quod CA EG continetur] *Ex 16 ſexti.*

H Et quoniam eſt vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima ſexti.*

K Ei vero quod H EF continetur eſt æquale contentum CA EG] *Quod proxime demonſtratum fuit.*

L Hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonſtratum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur CA EG ad id, quod CD EF continetur.*

M Contentum autem AD BG eſt duo triangula vt ABD] *Hoc eſt contentum AD BG eſt aequale duobus triangulis ABD. eſt enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinque autem contenta AF HC ſunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH eſt quintupla ipſius HC: & communis altitudo eſt AF] *Ex prima ſexti.*

Ergo

Ergo DM eſt latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad trianguli aequilateri latus eſt dimidia eius, quae ex circuli centro, ut nos demonſtrabimus ad finem primae huius.* O

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH eſt æquale pentagono] *Ex ijs, quae proxime demonſtrauit.* P

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonſtratis in 42 primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG] *Parallelogramma enim, quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes, ex prima ſexti.* R

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti triangula] *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita eſſe pentagonum ad triangulum.* S

Et duodecim quidem BH ſunt decem BC, etenim BH quintupla eſt ipſius HC, & BC ipſius CH ſextupla] *Quoniam enim BH eſt quintupla ipſius HC, & BC eſt eiuſdem H C ſextupla, habebit HB ad BC proportionem eam, quam habet quinque ad ſex. ſed quinque multiplicans duodecim producit 60, & ſex multiplicans decem producit ſimiliter 60. ergo duodecim BH ſunt aequales decem BC.* T

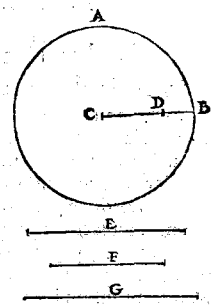
Hoc eſt vt BC ad DM] *Ex 15 quinti.* V

Atque eſt BC quidem cubi latus] *Hoc à nobis ſuperius demonſtratum eſt in ſecundâ huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Oſtendendum eſt & qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quę poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri.

Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadē ſphæra deſcriptorum: ſumaturque circuli centrum C; & & ab eo producatur recta linea vtcumque CB: & ſecetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD ſit maior portio. quare CD eſt latus decagoni in eodē circulo deſcripti. exponatur icoſaedri latus E, dodecaedri F, & cubi G. ergo E eſt trianguli æquilateri latus, F pentagoni in eodem circulo deſcripti: atque eſt F ipſius G maior portio. & quoniam E eſt æqualis lateri trianguli æquilateri: trianguli autem æquilateri latus eſt potentia triplum ipſius BC. ergo quadratum ex E quadrati ex BC eſt triplum: ſuntq; quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutādo. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. ſed vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita eſt quadratum ex G ad quadratum ex F; eſt enim F maior portio ipſius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque. ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex C B BD. quadrato autem ex F æqualia ſunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus pentagoni poteſt & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. ſed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea extrema



A B C D E F

extrema, ac media ratione secta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque est G quidem cubi latus, E vero icosaedri. si igitur recta linea extrema, ac media ratione secetur, erit vt potens totam & maiorem portionem ad eam, quæ potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaestri, in eadem sphæra descriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare CD est latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur maior portio est decagoni latus, in eodem circulo descripti, vt nos supra demonstrauimus ad nonam tertij decimi.*

B Atque est F ipsius G maior portio] *Ex corollario 17 tertij decimi, nimirum ipsa G extrema, ac media ratione secta.*

C Trianguli autem æquilateri latus est potentia triplum ipsius BC] *Ex duodecima tertij decimi.*

D Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] *Ex 4. tertij decimi.*

E Etenim latus pentagoni pot & hexagoni & decagoni latus] *Ex decima tertij decimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratu totius & minoris portionis] *Græcus codex corruptus est qui sic hēt* ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ ἢ, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γθ πρὸς τὰ ἀπὸ γθ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ πρός τὰ ἀπὸ γθ, οὕτως ἐν θείας ἧς διῄρηται δύν ἄκρον καὶ μέσον λόγὸν τεμνομένης, ἡ μυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅ-λης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρός τὴν μυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ ἢ, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γθ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βθ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γθ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βθ, οὕτως ἐυθείας ἧς διῄρη-τῆσθω οὐ κρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo post. etenim hæ uoces ἡ μυναμένη. & τὴν μυναμένην hoc loco superuacaneæ sunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Ostendendum nunc est vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

2 huius. Quoniam enim æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, &
A icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum; in sphæris autem æquales circuli æqualiter à centro distant. nam quę à centro sphæræ ad plana circulorum per-
B pendiculares ducuntur & æquales sunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro sphæræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum æquales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ: & ob id pyramides, quę bases habent dodecaedri pentagona, & icosaedri triangula ę-
C que altę sunt. pyramides autem æque altæ inter se sunt vti bases. vt igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius basis est dodecaedri pentagonum, & vertex centrum sphęræ ad pyramidem, cuius basis est icosaedri triangulum, vertex autem sphæræ centrum. ergo & vt duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares habent bases. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & uiginti triangula superficies icosaedri. est igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quę triangulares bases habent. & duodecim pyramides pentagonales bases habentes sunt dodecaedri solidum: uiginti autem pyramides, quę triangulares habēt bases sunt solidum icosaedri. quare & vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita solidum dodecaedri ad icosaedri solidum. ut autem dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita ostensum est esse latus cubi ad icosaedri latus & vt

igitur

igitur latus cubi ad icoſaedri latus, ita dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

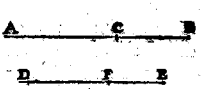
In ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant] *Ex 6. propoſitione primi libri ſphæricorum Theodoſii.* A

Et in contra circulorum cadunt] *Ex 2 corollario primæ eiuſdē libri ſphæricorū Theodoſii.* B

Pyramides autem æque altæ ſunt inter ſe, vti baſes] *Ex quinta & ſexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas ſi extrema, ac media ratione ſectæ fuerint, in ſubiecta eſſe anologia, ita demonſtrabimus.



Secetur enim AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio ſit AC: & ſimiliter DE extrema, ac media ratione ſecetur in F, vt DF ſit portio maior. Dico vt tota AB ad maiorem portionem AC, ita eſſe totam DE ad DF maiorem portionem. Quoniam enim rectangulum quidem ABC eſt æquale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF; & ut rectāgulum, quod quater cōtinetur AB BC ad quadratū ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratū ex DF: componendoque vt quod quater cōtinetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF vnà cū quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & vt quadratum ex vtraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraque DE EF ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraque AB BC ad AC, ita vtraque DE EF ad DF: & componendo vt vtraque AB BC vnà cum AC ad AC, hoc eſt duę AB ad AC, ita utraque DE EF vnà cum DF ad DF, hoc eſt duę DE ad DF. & antecedēntium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF. A B

COROLLARIVM.

Itaque hoc demonſtrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri. atque hoc demonſtrato vt latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. & inſuper hoc cognito vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum, propterea quòd idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icoſahedri triangulū: conſtat, ſi in ipſa ſphæra deſcribatur & dodecaedrum, & icoſaedrum, eandem inter ſe proportionem habere, quam ſi recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, habet potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius, ac minoris portionis. C D E

Quoniam

Quoniam enim est vt dodecaedrum ad icosaedrum, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est latus cubi ad icosaedri latus. vt autem latus cubi ad icosaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra describuntur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eã, quę potest quadratũ totius & minoris portionis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratũ ex DF] *Ex 8 secundi, est enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea. & similiter quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea.*

B Et longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF] *Ex 22 sexti.*

C Eãdem habere cubi latus ad latus icosaedri] *Ex 5 huius.*

D Ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum] *Ex quarta huius.*

E Ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum] *Ex 6 huius.*

QVARTIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVINTVSDECIMVS

ET SOLIDORVM QVINTVS.

vt quidam arbitrantur.

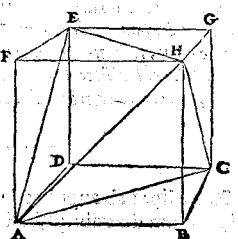
VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.

IN dato cubo pyramidem describere.

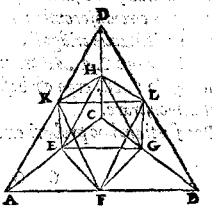
Sit datus cubus ABCDEFGH, in quo oporteat pyramidem describere. iungantur AC AE CE AH EH HC. itaque perspicuum est triangula AEC AHE AHC CHE æquilatera esse. quadratorum enim diametri sunt latera. pyramis igitur est AECH, & descripta est in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum describere.

Sit data pyramis ABCD, cuius latera secentur bifariã in punctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur AB dupla est vtriusque HK FG, erit HK ipsi GF æqualis, & parallela. Similiter & HG æqualis, & parallela ipsi FK. æquilaterum igitur est HKFG. Dico & rectangulum esse. si enim ab ipsa KL perpendiculares ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG HKFG similiter demonstrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera esse.



F. C. COMMENTARIVS.

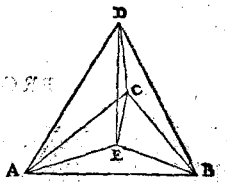
Quoniam igitur AB dupla est vtriusque HK GF, erit HK ipsi GF æqualis & parallela] *Est enim HK ipsi AB parallela; namque ut DH ad HA, ita est DK ad KB. & eadem ratione* A 2. sexti

9. undecimi. tione demonstrabitur GF parallela ipsi AB. quae autem uni, & eidem sunt parallelę, & inter se parallelae sunt. ergo HK ipsi GF est parallela. triangula autem D A B D H K aequiangula sunt.
29. primi & 4. sexti. namque angulus quidem DHK est aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipsi DBA, & BAD vtrique communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK. est autem AD dupla ipsius DH.
9. quinti. ergo & AB ipsius HK est dupla. & eadem ratione erit AB dupla ipsius GF. quare HK ipsi GF
32. primi. est aequalis, atque est parallela, vt demonstratum fuit. quae autem aequales & parallelas coniungunt & ipsae aequales sunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela est HG ipsi KF. sunt autem HK KF inter se aequales, cum aequalium sint dimidiae. ergo HKFG aequilaterum est.

Dico & rectangulum esse] Vt hoc facile demonstretur duo lemmata premittenda sunt.

LEMMA PRIMVM.

Si à vertice pyramidis ad basim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa basis triangulum describitur.



Sit pyramis ABCD, cuius basis triangulum ABC, & vertex D punctum: ducatur autem à puncto D ad basim perpendicularis DE. Dico E centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis est ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipsam contingunt, quę in eodem sunt plano rectos angulos faciet. recti igitur
47. primi anguli sunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex AD est aequale quadratis ex AE ED & quadratum ex BD aequale quadratis ex BE ED. sunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quòd aequales sint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia sunt quadratis ex BE ED. & demptis communi quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter se aequalia. ideoq; rectae lineae AE EB
9. tertij. aequales sunt. similiter demonstrabimus CE aequalem esse ipsis AE EB. quare punctum E centrum est circuli circa triangulum ABC descripti, quod demonstrare oportebat.

LEMMA SECVNDVM.

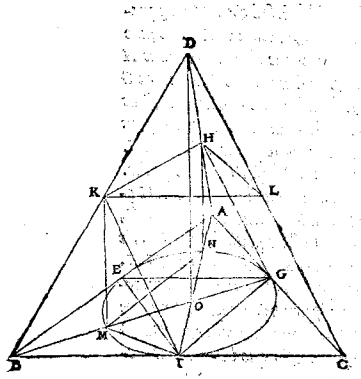
Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, basim bifariam secat.

Sit triangulum aequilaterum ABC, & circa ipsum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD secet basim in puncto E. Dico BE ipsi EC aequalem esse: producatur enim AE vsque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum transit, circuli erit diameter: ideoq; circumferentia ABE circumferentiae ACF est aequa-
28. tertij. lis. circumferentia autem AB aequalis est circumferentiae AC, quòd
27. tertij. recta linea AE sit aequalis ipsi AC. ergo & reliqua circumferentia BF reliquae circumferentiae FC, & angulus BAE angulo EAC aequalis erit. itaque triangli ABE duo latera BA AE aequalia sunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequa-
8. primi. lis est angulo EAC. ergo & basis BE basi EC est aequalis: quod oportebat demonstrare.

Potest etiam hoc probari ex tertia sexti libri, cum BA sit aequalis ipsi AC.

COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij constat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, ad basim perpendicularem esse.



His demonſtratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad baſis planũ perpendicularis, quae ſit DO. erit O centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti, ex primo lemmate eorum, quae nos premiſimus. Itaque per latus pyramidis BD, et per DO ducatur planum pyramidem ſecans. erit illud rectum ad planum baſis ABC, atque erit eius, & trianguli ABC communis ſectio BO, quae vlterius protracta cadet in G ex ſecũdo lemmate premiſſorum; & erit ad ipſam AC perpendicularis. Eadem ratione ſi per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planum, ad baſim rectum erit, & communis ipſorum ſectio erit recta linea AOF ad ipſam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC perpendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum ſectiones ex 38 vndecimi, hoc eſt KM cadet in BO, & HN in ipſam AO: & BO AO in punctis MN bifariam diuidentur. Quoniam enim DO KM perpendiculares ſunt ad idem planum inter ſe parallelę erunt. quare vt BK ad KD, ita eſt BM ad MO. ſed BK eſt aequalis KD. ergo & BM ipſi MO aequalis erit. Eadem ratione demonſtrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus trianguli aequilateri dimidia eſt eius, quae ex centro circuli, vt ad primam quar tidecimi libri de monſtrauimus; erit OF dimidia ipſius OA, & OG dimidia ipſius OB. & cum FO OG ſint aequales, quoniã et ipſae AO OB quę ex circuli cẽtro; omnes AN NO OF BM MO OG inter ſe aequales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipſarum FO OG circulus deſcriptus etiam per puncta MN tranſibit. deſcribatur, & NM MF iungantur. quòd cum triangula BDO BKM ſint aequiangula, propterea quòd linea KM parallela eſt ipſi DO; erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: eſtq; DB dupla ipſius BK. ergo & DO ipſius KM dupla erit. & ita demonſtrabitur DO dupla ipſius HN. quare KM HN inter ſe aequales ſunt. & ſunt parallelae, quippe quòd ad idem planum ſint perpendiculares. quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipſae aequales, & parallelae ſunt. aequalis igitur eſt & parallela MN ipſi KH. ſed FG demonſtrata eſt aequalis, & parallela eidem KH. ergo MN FG aequales ſunt, & parallelae. angulus autem NMK eſt rectus: & ſimiliter rectus NMF, quod in ſemicirculo. quare cũ NM duabus rectis lineis KM MF ſe inuicẽ ſecantibus in cõi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, ẽt ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. ergo NM perpẽdicularis eſt ad planũ trianguli KMF. Sed demonſtrata eſt FG parallela ipſi MN. quare & FG ad idem planũ perpendicularis erit. ideoq; angulus GFK eſt rectus. ſunt autem anguli GFK FGH duobus rectis aequales. ergo & rectus eſt FGH: & ſimiliter recti, qui ipſis opponũtur. ex quibus ſequitur HK FG & aequilaterum eſſe, & rectangulum. quod oportebat demonſtrare.

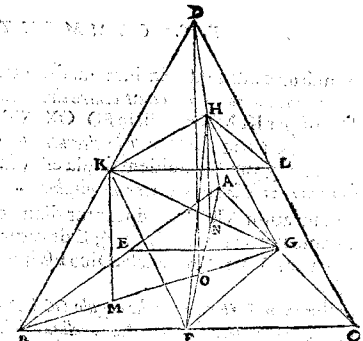
ALITER. Ductis KM HN perpendicularibus, ut in antecedẽti figura, iungantur HF KG. & quoniam perpendicularis BG eſt aequalis ipſi AF; eſt enim AB ad vtramq; ipſarũ, vt 4 ad 3, quod nos demonſtrauimus ad 12

11. undecimi

6. undecimi. 2. ſexti.

4. ſexti.

9. quinti. 6. undecimi. 13. primi.



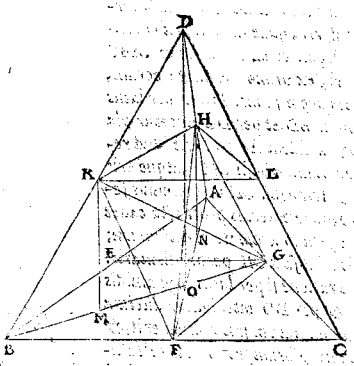
4. undecimi

8. undecimi

29. primi.

34. primi.

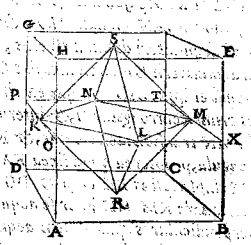
tertiædecimi libri. sed & BM est æqualis AN: erit & reliqua MG reliquæ NF æqualis: atque est KM æqualis HN. trianguli igitur KMG duo latera GM MK æqualia sunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus est æqualis recto FNH. ergo et basis KG basi FH est æqualis. rursus. quoniam duo latera FK KH æqualia sunt duobus lateribus GH HK, & basis FH est æqualis basi GK; erit angulus FKH æqualis angulo GHK. & sunt duobus rectis æquales. vterque igitur ipsorum est rectus, itemq; recti, qui ipsis opponuntur. ergo HKFG rectangulum est. quod oportebat demonstrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

In dato cubo octaedrum describere.

A Sit datus cubus ABCDEFGH: & sumantur centra insistentium quadratorum KLMN. Dico
B KLMN quadratum esse. ducantur per KLMN
C parallelæ PO OX XT TP. Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem du-
D pla ipsius OL, suntque æquales PO OX; erunt
E & KO OL inter se æquales. quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL. eadem ratione & quadratum ex ML duplum est quadrati
F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est æquale, æquilaterum igitur est KLMN, & cō
H stat rectangulum esse. sumantur duo quadrata BD EG, ipsorūque centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
K perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem ratione demonstrabimus.



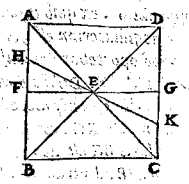
F. C. COMMENTARIVS.

A Et sumãtur centra insistentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata describuntur.*

B Ducãtur per KLMN parallelę PO OX XT TP] *Hoc est ducatur PO parallela alteruitri ipsarum DA GH: & OX parallela alterutri ipsarum AB HE, & sic in aliis.*

C Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL] *Centrum enim eas bifariam secat, vt monstrabitur.*

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E: perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela. Dico FE ipsi EG æqualem esse.



29. primi 15. primi. *Angulus enim FAE est æqualis angulo GCE, et angulus AEF angulo CEG: ad verticem enim sunt. reliquus igitur reliquo æqualis, & triangulum triangulo simile. quare ut AE ad EF, ita est CE, ad EG: & permutando ut AE ad EC, ita FE ad EG.*

atque

atque est AE aequalis EC, quòd AE sit circuli diameter, & E centrum eiusdem. ergo FE ipsi EG æqualis erit. centrum autem non solum ipsam FG bifariam secat, sed & alias omnes, quae in qua drato per ipsum ducuntur. quod eodem modo demonstrabimus.

Suntq; æquales PO OX] *Est enim PO aequalis DA, & OX aequalis AB ex 34 primi.* D *quare PO ad OX est vt DA ad AB: & sunt DA AB inter se aequales. ergo & PO OX aequales erunt.*

Quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL] *Est enim quadratum ex KL æ-* E *quale quadratis ex KO OL ex 47 primi.*

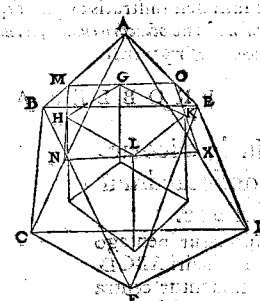
Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est æquale] *Ex quo sequitur & rectam lineã* F *KL ipsi LM aequalem esse. sed & aliter demonstrare possumus. Quoniam enim duo latera KO O L sunt aequalia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus est aequalis recto ad X; erit & basis KL basi LM aequalis ex 4 primi. et eodem modo demonstrabitur LM aequalis MN, et OK aequalis KN. quare omnes inter se aequales sint necesse est.*

Et constat rectangulum esse] *Quoniam enim KO est aequalis OL, & angulus KOL est re-* G *ctus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem causſam angulus MLX est dimidius recti. reliquus igitur K L M rectus est. sunt enim tres anguli duobus rectis aequales. Eadem ratione & vnusquisque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonstrabitur.*

Perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse, quod eadem H ratione demonstrabimus] *Iisdem enim argumentis probabimus KSMR NSLR aequilatera esse, & latera eorum ipsis KLMN aequalia.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato octaedro cubum describere.



A
B
C
D E
F

Sumantur centra circulorum, quæ sunt circa triangula ABE ABC ACD ADE, quæ sint G HKL, & GH GK LK LH iungantur. Dico GH KL quadratum esse. ducantur per GHKL ipsis EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO. quoniam igitur æquilaterum est ABC triangu-lum, recta linea, quæ à pũcto A ducitur ad H cẽ trum circuli circa triangulum ABC descripti bi fariam secat trianguli angulum, qui est ad A. æqualis igitur est MH ipsi HN. Eadem ratione & MG est æqualis GO. quoniam autem MN est æqualis MO, & MO ipsi OX; erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK; suntq; anguli HMG GOK recti. ergo HG ipsi GK est æqualis. Eadem ratio ne & reliquæ æquales erunt. cum igitur paralle-logrammum sit GHKL in uno erit plano. & cũ vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit. simi liter & reliqui. quadratum igitur est GHKL. possumus autem à principio sumentes centra GHKL, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, & dicere GHKL quadratum esse. quòd si sumentes reliquorum triangulorum centra, ipsa iungamus, ostendentur & reliqua quadrata esse, habebimusq; in dato octaedro descriptum cubum. quod facere oportebat.

F

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur æquilaterum est ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trian guli angulum, qui est ad A. æqualis igitur est MH ipsi HN] *Superius enim demonstratũ est rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum*

descriptus

describitur basim bifariam secare. sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quòd si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH aequalem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit aequalis, fiunt enim triangula BAC MAN inter se similia.

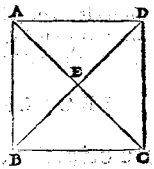
J Quoniam autem NM est æqualis MO, & MO ipsi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK] *Cum enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA, ita est NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali vt CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est aequalis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est aequalis. & eadem ratione MO ipsi OX aequalis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG aequalem esse, & ita GO aequalem ipsi OK.*

C Sunt q; anguli HMG GOK recti] *Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae sunt ipsis CB BE, atque est angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 vndecimi.*

D Ergo HG ipsi GK est æqualis] *Ex 4 primi.*

E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano] Omne enim parallelogrammum est in vno plano.

Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae se se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2 undecimi. itemq; in vno plano. triangulum AC D. sed et triangulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogramum ABCD in uno plano erit, quod oportebat demonstrare.



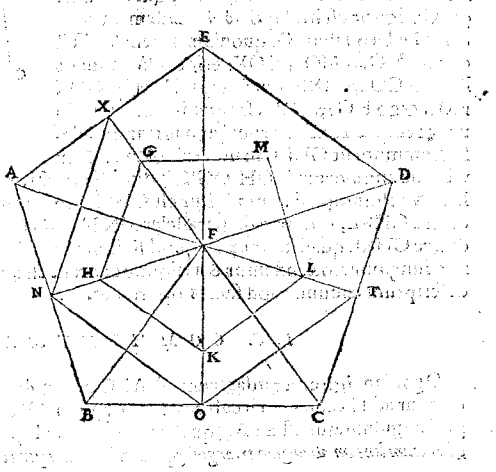
F Et cum vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit] *Sunt enim triangula HMG GOK aequicruria, et anguli ad M, et O recti; ut demonstratum iam est.*

Ex iam demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur.

Si enim in dato octaedro cubum, et rursus in cubo pyramidem describamus, et pyramis in dato octaedro descripta erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

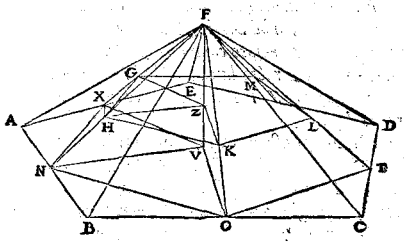


A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorũ, qui sunt circa triãgula AFE AFB BFC CFD DFE, uidelicet GHKLM, iungantur q; GH HK KL LM MG. & rursus iũctæ FG FH FK producãtur ad pũcta XNO, quæ rectas lineas EA AB BC in XNO punctis bifariam secabũt; atq; erit vt XN ad NO, ita GH ad HK. æqualis igitur est & HN ipsi KO. similiter autem & reli-

B C Ç D

qua

qua pentagoni GHKLM latera æqualia ostendentur. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent, & reliqua manifesta sunt. Intelligatur à puncto F ad planum pẽtagoni ABCDE ducta perpẽdicularis, quæ cadet in centrũ circuli circa pẽtagonũ descripti. si igitur à pũcto N ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineã ducamus, & per H ducamus ipsi parallelam, perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere. Rursus si à punctis XO ad cẽtrum circuli circa pentagonum descripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurit ad G K rectas lineas ducamus, manifestũ est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perspicue cõstat pentagonum GHKLM in vno esse plano.



E F G H K

F. C. COMMENTARIVS.

Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE] *Hoc est pentagonum descriptum in circulo, à quo icosaedrum ortum habet, vt in 16 tertij decimi.* A

Quę rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam secabunt] *Ex ijs, quae nos in antecedente demonstrauimus.* B

Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniam enim triangula AFE AFB BFC aequilatera sunt, & aequalia; erunt perpendiculares, quae ab angulo F ad basim ducuntur, videlicet FX FN FO inter se aequales. latus enim trianguli aequilateri ad perpendicularem, quae ab angulo ad basim ducitur, eam proportionem habet, quam 4 ad 3, vt nos demonstrauimus ad 12 tertij decimi. Rursus quoniam GHK sunt centra circulorum, qui circa triangula describuntur, erũt & ipsae, quae ex centris FG FH FK aequales. ergo & reliquae aequales sunt, nempe GX HN KO. sunt autem aequales EA AB BC: & earum dimidiae EX XA AN NB BO OC. cũ igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN aequalia sint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB sint aequales, ponitur enim pentagonum ABCDE aequilaterum, & aequiangulum: erit & basis XN basi NO aequalis. sed vt FG ad GX, ita est FH ad HN: est enim vtraque vtriusque dupla, vt ad primam quartidecimi demonstratum est. ergo GH parallela est ipsi XN. & eadem ratione HK ipsi NO est parallela. triangulum igitur FGH simile est triangulo FXN, & triangulum FHK simile ipsi FNO: ideoq; vt NX ad HG, ita est NF ad FH. vt autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando vt XN ad NO, ita GH ad HK. sunt autem aequales XN NO. ergo & GH HK aequales sint necesse est.* C

Aequalis igitur est & HN ipsi KO] *Videne potius legendum sit aequalis igitur est & GH ipsi HK propter ea, quae sequuntur.* D

Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent: & reliqua manifesta sunt] *Nam cum duae XN NO se se contingentes duabus GH HK se se contingentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos contiuebunt. ergo angulus GHK est aequalis angulo XNO. & similiter bifariam secta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL aequalis angulo NOT. sed anguli XNO NOT sunt aequales, vt monstrabitur. ergo & GHK HKL anguli aequales erunt. & similiter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO aequicruria sunt similia, & aequalia, erũt anguli AXN ANX BNO BON COT inter se aequales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO est aequalis reliquo NOT: item, reliqui aequales ostendentur.* E

10. undecimi

Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonũ descripti] *Cadat enim in punctum V,* F

&

& intelligãtur iunctae AV BV CV. Quoniã igitur FV perpẽdicularis eſt ad planũ pentagoni,
5 dif. undecimi. *erunt anguli AVF BVF CVF recti; & ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex*
47. primi. *AV VF: & quadratum ex BF æquale duobus ex BV VF. ſed quadratum ex AF eſt aequale*
quadrato ex BF, quòd AF ipſi FB ſit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF
ſunt aequalia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum quadratum ex AV aequale
reliquo ex VB, & recta linea AV ipſi VB aequalis. Eadem ratione & recta linea CV aequalis
9. tertij. *oſtendetur ipſis AV VB. ergo V eſt centrum circuli circa pentagonum deſcripti. quod demonſtra-*
re oportebat.

G Perſpicuum eſt eam perpendiculari occurrere, & cum ipſa rectum angulum con-
2. undecimi. tinere] *Nam cum triangulum FNV ſit in vno plano, ſi recta linea à puncto H ducta non occur-*
reret perpendiculari, parallela non eſſet ipſi NV, quod non ponitur. ſunt enim parallelæ in eodem pla-
no ex 35 diffinitione primi libri. Occurrat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus
NVF ſit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.

H Manifeſtum eſt ipſas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] *Quo-*
2. ſexti. *niam. n. HZ eſt parallela ipſi NV, erit ut FZ ad ZV, ita FH ad HN. ſed vt FH ad HN, ita FG ad*
11. quinti. *GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FG ad GX. quare GZ eſt parallela ipſi XV; anguluſq; GZF eſt rectus,*
nempe ipſi recto XVF aequalis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit: iunctiſq; LZ MZ ſi-
militer demonſtrabitur angulos LZF MZF eſſe rectos.

K Ex quo perſpicue conſtat pentagonum GHKLM in vno eſſe plano] *Ex quinta vnde-*
cimi. nã recta linea FZ tribus rectis lineis ſe ſe tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos infi-
ſtit. Si igitur reliquis icoſaedri angulis eodem modo pentagona ſubtendemus in dato icoſaedro do-
decaedrum deſcriptum erit.

De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem ſcire, ſi quis interroget nos, quot latera icoſaedrum habeat, ita reſpondendum eſſe. Patet icoſaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodque triangulum ex tribus rectis lineis conſtare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient ſexaginta; cuius dimidium triginta. ſimiliter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt ſexaginta, cuius rurſus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quòd ſingula latera ſiue ſit triangulum, ſiue pẽtagonum, ſiue quadratum, vt in cubo, bis ſumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. ſi vero ſingularum quinque figurarum anguli inueniendi ſint, rurſus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum ſolidi angulum continent; vt quoniam icoſaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icoſaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemnr per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. ſimiliter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De

De inclinatione planorum, quæ singulas quinque figuras continent.

Quęsitum est quo modo in vnaquaque solidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipsam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. In cubo quidem plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. In pyramide vero exposito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quę à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secent; & à sectione ad centra iunctę rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quę pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, interuallo autem similiter perpendiculari, quæ à uertice trianguli ad basim ducitur; describantur circumferentiæ; & rursus rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icosaedro autem à latere trianguli descripto pentagono, iungatur recta linea, quę duobus lateribus subtenditur: & centris quidē terminis eius, interuallo q; perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferentijs rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctę continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. Denique in dodecaedro exposito vno pentagono, & iuncta similiter recta linea, quę duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pē tagoni ipsi parallelum ducitur; describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra similiter iunctæ rectæ lineę continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

Pyramidis.

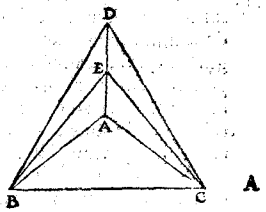
Octaedri planorum inclinatio.

Icosaedri planorum inclinatio.

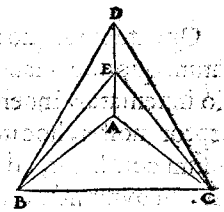
Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem vir ille clarissimus de prędictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur. sed vt contemplatio demonstratiua perspicue appareat, sermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.

Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius basis ABC, & vertex D punctum. secto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum esse.

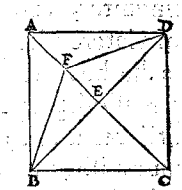


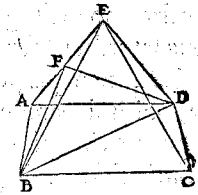
Quoniam enim AC dupla est ipsius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadratum ex AC æquale est quadratis ex AE EC, quorum
47. primi. B quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque est CE ipsi EB æqualis. quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC; ideoque angulus BEC est acutus. quòd cum duorum planorum ABD ADC communis sectio sit AD, & communi sectioni ad rectos angulos occurrant in vtroque planorum rectæ lineæ BE EC, quæ acutum angu-
D lum continent: erit angulus BEC planorum inclinatio, atque est data; datur enim BC latus existens trian-



E guli, & utraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri. centris igitur BC, hoc est terminis vnius lateris, & interuallo trianguli perpendiculari describtę circumferentiæ se inuicem secent in puncto E: & ab eo ad BC iunctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem est, quod dicebatur. atque illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari descripti circuli se mutuo secent,) manifestum est. vtraque enim BE EC maior est, quàm dimidia ipsius BC: & centris BC, & interuallo ipsius BC dimidia descripti circuli se se tangunt. si autem minor sit, neque se tangunt, neque secant: quòd si maior omnino secant; & ità de pyramide sermo & manifestus, & demonstrationibus conuenies apparet.

Intelligatur rursus in quadrato ABCD pyramis verticem habens punctum E, & continentia ipsam præter basim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. secerur latus vnius trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. sunt igitur BF FD & æquales inter se, & ad ipsam AE perpendiculares. Dico angulum BFD obtusum esse. iungatur enim BD; & quoniam quadratum est AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrari ex DA duplum. quadratum autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proximè dictum est; quam 4 ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportionem ha-
F bebit, quam 8 ad 3. est autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD est obtusus. & quoniam duorum planorum ABE ADE se inuicem secantium communis sectio est AE, & ipsi ad rectos angulos in vtroque plano ductæ sunt BF FD, angulum obtusum continentes; erit an-
G gulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum ABE ADE. si igitur angulus BFD datus sit, & dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam triangulũ octae-





H dri datum est, & unum eius latus est AD, à quo quadratum AC describitur; datur & BD diameter existens quadrati. sed & BF FD trianguli perpendiculares datæ sunt. ergo & angulus BFE dabitur. descripto igitur quadrato à latere trianguli, ut AC, & iuncta diametro BD, si centris quidem BD; interuallo autem perpendiculari trianguli circulos describamus, se mutuo secabunt in F: & rectę lineæ à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationem BFD, quæ quidem est reliqua ex duobus rectis, vt dictum est, inclinationis planorum. & hoc loco patet vtramque ipsarum BF FD maiorem esse, quàm ipsius BD dimidiam. ideoque in constructione organica necesse est circulos se mutuo secare. constat etiam ex demonstratione ipsam BD ad DF potentia proportionem habere. quam habet 8 ad 3, & dimidiæ eius potentia esse quadruplam. ergo utraque ipsarum BF FD ma-

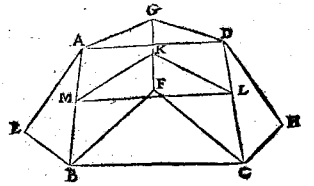
ior

ior est quàm dimidia ipsius BD. & hęc quidem de octaedro dicta sint.

In icosaedro autem intelligatur pentagonum ęquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis uerticē habens punctum F, ita vt continentia ipsam triangula sint ęquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icosaedri pars. secetur latus unius trianguli FC bisariam in G, & BG GD iungantur. erunt utique & æquales, & ad ipsam FC perpendiculares. Dico angulum BGD obtusum esse, quod per se se manifesto constat. Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtēdit: hoc autem maior est angulus BGD: nam BG GD ipsis BC CD sunt minores. similiter ijs, quę proxime dicta sunt, patet angulum BGD esse eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis BFC CFD triangulorum. hoc autem dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio. à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, & rectā linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, vt in figura est BD data: & similiter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam si centris quidem terminis ipsius BD, quę duobus pentagoni lateribus subtenditur, interuallo autem perpendicularī trianguli circuli describantur, se inuicem secabunt, vt in G: & rectæ lineę à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifestum est vtramque BG GD maiorem esse, quàm dimidiam ipsius BD. quamquam ita esse ex constructione organica demonstrari potest. intelligatur enim seorsum triangulum ęquilaterum HKL, & ab ipsa KL pentagonum describatur KMNXL: iunctaque ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem esse dimidia ipsius ML, quæ inclinationē planorum subtendit. ducta enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniā angulus KLP maior est tertia parte recti, hoc est maior angulo KHO; constituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL est perpendicularis æquilateri trianguli, cuius latus est RL; ac propterea quadratum ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quam 4 ad 3. sed maior est KL quàm LR. ergo quadratum ex KL ad quadratū ex LP maiorem habet proportionem, quàm 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quam 4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quā ad HO. maior igitur est HO quàm LP.

In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GD HCF. Dico & sic datam esse duorum pē tagonorum inclinationem. secetur FG bifariam in K; & à puncto K ipsi FG ad rectos angulos ducantur in vtroque planorum KL KM. & ML iungatur. Itaque primum dico angulum MKL obtusum esse. ostensum enim est in tertiodecimo libro elementorum, & in constitutione do-

decaedri, rectam lineam, quæ à puncto K ad quadratum ABCD perpendicularis ducitur, dimidiam esse lateris pentagoni. quare minor est quàm dimidia ipsius ML. ideoque angulus MKL est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidē ex KL æquale esse & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij lateris pentagoni, ita vt KL, & KM inter se æquales maiores sint, quàm dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datū est pentagonum; erit & ML data. data autem est & vtraque ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi paralleinm, ut ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictū est, inclinationis eius, quā inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis: & centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quę à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura sunt KL KM, describere circumferentias, atque à pūcto, in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quę continent angulum reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at uero perpendicularem KM maiorem esse dimidia ipsius ML iam dictum est, vt in elemētis simul est demonstratū.



F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erūt BE EC ad ipsam AD perpendiculares] *Ex ijs, quae nos ad 12 tertijdecimi libri demonstrauimus.*

B Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam 4 ad 3] *Ex demonstratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE EC, vt 4 ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri] *Dato autem latere trianguli aequilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum. est enim latus trianguli aequilateri ad perpendicularem, vt 4 ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD] *Est enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8 ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui est inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum datur necesse est ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter existens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtendit] *Angulus namque pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autem maior est angulus BGD, nam BG GD ipsis BC CD sunt minores] *Ex 21 primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.*

M Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL continet rectum, & recti quintam, vt dictum est. ergo anguli KML KLM sunt quattuor quintae*

tae recti, & ipse KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior est KL quàm LR] *Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex* N
21 *primi ergo & dimidia KL quàm dimidia LR maior erit.*

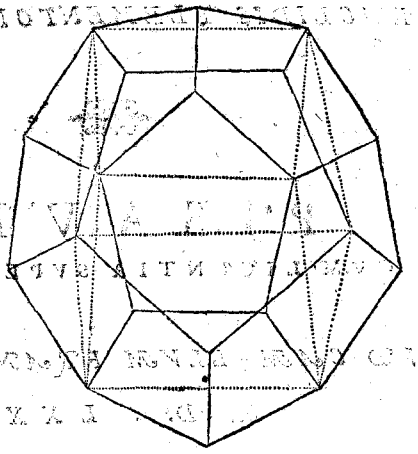
Maior igitur est HO quàm LP] *Ex 10 quinti.* O

Intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur] *Ad constitu* P
tionem enim dodecaedri vtitur ipsius cubi quadratis, vt in 17 tertijdecimi apparet.

Ex ijs aũt quæ proxime tradita sunt, & ex demonstratis in 17 tertjdecimi libri cõ stat, quomodo in dato dodecaedro cubus describatur.

Quoniam enim in dodecaedri constitutione cubi planis vtimur, & ad singula eius latera singula pentagona dodecaedri describimus, si in dodecaedro iam facto apposite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiusque pentagoni lateribus subtendantur, cubus ipse constitutus erit, vt in sequenti figura apparere potest.

Ex quibus iam perspicuum est quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipsa, tum octaedrum describatur.



Nam si in dodecaedro cubum, & rursus in cubo pyramidem vel octaedrum describamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro descripta sint necesse est.

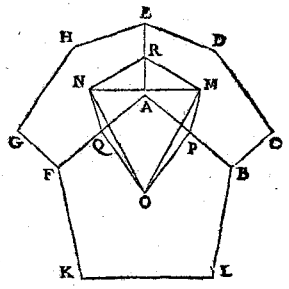
In dato icosaedro cubum describere.

Primum in icosahedro dodecaedrum describemus, vt in 5 huius dictum est; deinde in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icosaedro descriptus erit.

In dato icosaedro pyramidem describere.

Si enim describamus ex antecedenti in icosaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icosaedro descripta.

In dato dodecaedro icosaedrum describere.

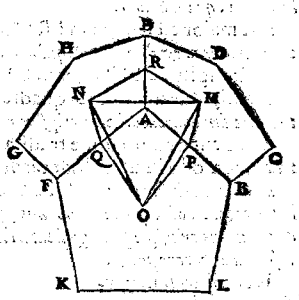


Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: sumanturq́, centra circulorum, qui circa pentagona describuntur MNO, & ab ipsis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonstratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipsius dodecaedri, & idcirco inter se aequales:

item

itemq; aequales perpendiculares ipsae. quare trianguli MOP duo latera MP PO aequalia sunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO est aequalis angulo MRN. basis igitur OM. est aequalis basi MN. & ita demonstrabitur basis ON ipsi NM aequalis. ex quibus constat triangulum MNO aequiangulum esse. ergo si reliquis dodecaedri angulis triangula aequilatera eodem modo subtendantur, descriptum erit icosaedrum. sunt enim omnes anguli ipsius dodecaedri numero viginti, quot sunt icosaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icosaedrum descriptum est. quod facere oportebat.

4. primi.



EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.

PISAVRI

CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMILLVM FRANCISCHINVM.

M. D. LXXII.