EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES XII.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI PRIORES XII.

EX

COMMANDINI ET GREGORII

VERSIONIBUS LATINIS.

IN USUM JUVENTUTIS ACADEMICÆ.

EDIDIT, PLURIBUS IN LOCIS AUXIT,

ET

IN DEPRAVATIS EMENDAVIT

SAMUEL, EPISCOPUS ROFFENSIS.

OXONII:

E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO.

MDCCCII.

PRÆFATIO.

NIHIL omnino opus eſt, vel de conſiliis noſtris hic loci agere, quomodo ſcilicet Juventutem in diſciplinis Mathematicis optime inſtitui poſſe arbitramur, vel ea ſingulatim percurrere, quæ in hunc finem conficere, et in lucem emittere nobiſcum ſtatuimus. Etenim de omnibus hiſce abunde dictum eſt, in Prolegomenis ad Opuſcula ea Mathematica, quæ a nobis concinnata, e PRELO OXONIENSI nuperrime prodierunt; ubi et Euclidem quoque denuo edere in nos ſuſcepimus, et alteram etiam Diatribarum ſeriem, in quibus eos gnaviter ſe exercere neceſſe eſt, qui id ſibi exoptant, in ſubtili, ſiqua alia, ſcientiâ, recto ingredi tramite, et initia ejus accurate ponere.

Impræſentiarum itaque, quod noſtri magis officii eſt, et Lectori etiam magis intererit, paucis eum edoceri volumus, quid in hâc noſtrâ Euclidis

Editione a nobis præstitum est, saltem quid ab aliis diversimode, vel posthabitis eorum consiliis; sed neque temere tamen aut infeliciter, uti spes est, nisi fallimur, et magnam in hoc negotio frustra insumpsimus operam.

Primo igitur, plerique eorum, qui in usum Studiosæ Juventutis Euclidem ediderunt, secus ac nos fecimus, non nisi priores sex libros cum undecimo et duodecimo typis mandârunt; partim, ut opinamur, quia facile sibi persuaserint, *septimi*, *octavi*, et *noni* nullam eos jacturam facturos esse, qui vel in puerorum scholis, vel a quocunque demum præceptore *Arithmeticæ* Elementa didicerint; partim quia omnem libri *decimi* utilitatem parvi penderint, præ *Surdorum* doctrinâ, prout ab iis exponitur qui artem Algebraicam tradunt—quod inerudite magis factum sit, nescio, an oscitanter; tam a ratione alienum est, juniores ad Algebram amandare, priusquam Geometriæ Elementa rite calluerint, e quibus pendet etiam regularum Algebraicarum sive veritas omnis, sive evidentia. Etenim has ut artem quandam, si placeat, absque Geometriâ quis condiscat; ut scientiam non intelliget, nullâ Geometriæ ratione habitâ, quæ et ea amplectitur, e quibus generales Numerorum affectus exoriri compertum est. Rectius itaque nos, ut visum est, et viam melius commonstrantes, tres Euclidis libros qui de Numeris agunt, *septimum* scilicet, *octavum* et *nonum*, Editioni nostræ inseruimus. De *decimo*, ut quod verum est confiteamur,

fiteamur, aliquamdiu dubitavimus; quia *Surdorum* doctrina, quatenus ibi traditur, angustior est, nec ullo modo fines eos attingit, ad quos provexerunt eam Scriptores Algebraici. Vicit tamen sententia, et hunc quoque librum ab aliis non divellere, tum ut Elementorum hæc Editio nostra ad libri duodecimi finem omnibus numeris absoluta esset, tum quia *Surdorum* doctrinam mirum est, quanto facilius pro se quisque arrepturus est, qui *Incommensurabilium* Mysteriis prius ab Euclide initiatus fuerit. Ad minimum, *viginti* priorum hujus Libri propositionum notitiam nemo est, qui commode desiderare poterit.

Per priores sex libros, ut et in undecimo et duodecimo, COMMANDINI textum secuti sumus, prout a Cl. *Keil*, Geometriæ Saviliano inter Oxonienses Professore, editus est: quoad libros quatuor intermedios, Latinam eorum versionem dedimus, quæ a GREGORIO concinnata est, eâ tamen ubique lege, ut quæ vel in hâc vel illâ manifeste depravata erant, ita a nobis emendarentur, ut res postulare visa est. Quod quidem sæpissime in Libris quinto, decimo, et undecimo faciendum erat. Porro autem vix credibile est, quam frequenter ex obscuris perspicua, et ex depravatis sana elicere datum est, immutatâ tantummodo Propositionum vel Definitionum serie, et in ordinem redactis, quæ, nescio quâ Editorum incuriâ, e locis suis turpiter antea amota erant. Hoc, exempli gratiâ, ipsissimum est, quod præter

 alia

alia de quibus mox dicturi ſumus, quoad novem priores *Libri quinti* definitiones, audacter fecimus. Simul autem ut intelligant ii, qui Euclidem noſtrum in manus ſumpſerint, quomodo ſingula in aliis item editionibus diſpoſita ſunt, numeros ordinem apud eas indicantes ad oram libri ſemper apponi curavimus, quod et ſemel monuiſſe ſatis eſto.

Verum in his, de quibus loquimur, definitionibus, ordinem earum immutare tantummodo, non erat ſtatim in ſolido quoque locare omnia. Definitionem *ſeptimam* Libri quinti, quæ aliter penes nos *nona* fuiſſet, abjecimus omnino et ablegavimus, et aliam ejus loco adſcripſimus, quæ Veterum Geometrarum ἀκρίβειαν magis ſaperet; rem, de quâ agit, dilucidius exponeret; et ex quâ Propoſitionum, quæ ab ea pendent, demonſtrationes, ope emendationis noſtræ plus in ſe elegantiæ ſuſciperent, et etiam perſpicuitatis. Cæterum ulterius indaganda res eſt, et quæ ad quæſtionem hanc pertinent, altius eruenda; ne aut nimiæ arguamur fiduciæ, aut etiam conſilii, quod minus eſt, male ſuſcepti.

Quotiescunque igitur dicimus duarum magnitudinum proportionem ad ſe invicem, *majorem* vel *minorem* eſſe duarum aliarum magnitudinum proportione, loquimur *Catachreſtice.* Proportio, ſecundum ipſius Euclidis definitionem, ſub illam e Categoriis cadit, quæ vocatur πρός τί. Porro autem illa, inter quæ intercedit relatio hæc, quam Propor-

Proportionem appellamus, quantitates sunt; nequit igitur relatio hæc in se τὸ πόσον suscipere; nequaquam enim fieri potest, unam eandemque rem simul et *relatum* esse, et *relationem*. Si itaque vocabulis nunquam, nisi legitime, uti concessum foret, nullo modo illud dicere liceret, proportionem quam habet A ad B, vel *majorem* esse vel *minorem* proportione, quæ inter alias duas magnitudines intercedit. Quam tamen loquendi formulam, quia ita voluit usus, " quem penes arbitrium est," eo, quem obtinuit, loco non ejecimus; tantummodo, quo sensu accipienda est, ostendere conati sumus, novam rei ipsius definitionem adhibentes, quæ verbis antea tam incongruis, et parum idoneis explicata est. Exinde etiam, ut supra dictum est, propositiones quæ e definitione de quâ agimus, omnino pendent, perspicue magis et dilucide demonstrare licuit. Immo et præter hæc suspicari consuevimus, definitionem a nobis adhibitam, vel eam esse, quam Euclides ipse posuit, vel, ad minimum, ei simillimam. Saltem, quæ toties ab Editoribus hoc in loco repetita est, ab Euclide profluxisse nullo modo censenda est; primo, quod verbis quibus ille nunquam conceptus suos in medium profert, exprimitur; tum autem præcipue, quod disciplinis Mathematicis prima, quod aiunt, labra admoventibus liquido non constet, unam eandemque magnitudinem ad secundam non posse habere *majorem* simul et *minorem* proportionem, (sensu definitionis illius, quæ vulgo circumfertur,) quam habet secunda ad tertiam.

Satis profecto scimus omnino hoc fieri non posse: sed in eo subsistimus, *Tyronibus hoc non constare*, neque rem ita se habere aliquem iis comprobaturum esse, nisi propositionum ope, quæ ex aliquâ *majoris* et *minoris* proportionis definitione demonstrandæ sunt. His interea incommodis omnino vacat definitio nostra. Ipsissimis effertur vocabulis, quibus et alibi Euclides utitur, ubi de re eâdem agit, (Vide *Dator. Definit.*) et ambiguitatem, quod maximum est, nullam omnino in se habet.

Cæterum, dum hæc ponimus, litem aliâ ex parte fortasse movebunt aliqui, et Definitioni nostræ objicient, graviter laborare eam, quia *pro concesso sumit*, aliquam semper exstare magnitudinem, quæ ad datam magnitudinem datam quamvis proportionem habeat. Porro ob hoc ipsum inquient Euclidi eam minime omnium accensendam esse, siquidem ille arbitrio suo nunquam ita utitur, nec a nobis exigit, ut concedamus exstare aliquid, quod prius non docuit quomodo inveniamus, vel quibus artificiis in medium proferre possimus; quod est multorum e recentioribus, qui in eum Commentarios scripserunt, tam fidenter et toties prolatum de Euclide judicium. Pace autem tantorum virorum, causâ idcirco non cadimus; nam quod afferunt ii, veritatem sibi consentientem non habet. Lege eâ, de quâ certant, Euclides ipse se non obstringit, ubi in Libro Elementorum quinto de illustribus iis et tam late paten-

patentibus relationibus agit, quas inter ſe habent quantitates continuæ, quicquid illud ſit, quod apud eum uſitatius eſt, (ſed tamen uſitatius tantummodo, non conſtanter et perpetuo factum) dum figurarum affectus ſpeciales tradit, aut effectionem problematum ad hos ſpectantium. Sed ut intra ea, quæ latius patent, diutius me non contineam, *hoc ipſum,* quod in definitione noſtrâ *pro conceſſo ſumitur,* ab EUCLIDE IPSO quoque *pro conceſſo ſumptum eſt,* ubi in ſecundæ et aliarum Libri duodecimi propoſitionum demonſtratione verſatur; ſicut et alios omnes facere neceſſe eſt, quotieſcunque per *Exhauſtionum* methodum, aliquid ponere volunt, aut certum eſſe oſtendere; cum iſtius methodi principium et origo, illud nimirum ſine quo nulla omnino eſſet, hoc ipſum ſit, quod et nos in definitione noſtrâ uſurpavimus. Unde obiter quoque notandum, quam inominato nonnulli e Libro quinto propoſitionum decimæ octavæ et aliarum quarundam demonſtrationes ſuſtulerint, quales in *Commandini* Editione juxta THEONEM extant, et alias earum loco induxerint, non efficaciores, tædii autem et moliminis longe majoris. Et de his quidem hactenus.

Jam autem ex ipſâ ordinis immutatione, quæ nobis complacuit quoad novem priores Libri quinti definitiones, *tertiæ, quintæ,* et *ſextæ* apud nos, olim *tertiæ, octavæ,* et *nonæ,* luce clarior eſt utilitas, licet ita hallucinentur nonnulli, ut eas prorſus abjiciant, aut nihili pendant. Siquidem omnia a nobis ita dispofita sunt, ut tandem aliquando μετά τινος ὁδȣ̃ καὶ τάξεως explicetur hæc definitionum series, impedita antea, et mire interturbata. Fac enim in iisdem periculum, prout apud alias Elementorum editiones extant, et nihil inveneris, quod aut perspicuum, aut ad doctrinam utile, vel denique iis, quibus interponitur, satis consonum est—Rem ipsam deinde perpendito, et subductis rationibus, quomodo ex salebris hisce quis se expediat aliter quam nos fecimus, ut opinor, vix invenies. Insuper ordinem ipsum a nobis præfinitum aperte comprobant omnia, vel potius eum unice exposcunt. Primo enim de *Proportionum analogiâ* differere insulsum fuisset, nisi prius, ut per definitionem *sextam* factum est, olim *nonam*, ubi eam inveniremus, commoniti fuerimus; quod tamen ipsum, ubinam invenienda esset Analogia, frustra indicasset aliquis, qui illud etiam prius non ostenderat, quidnam Analogia ipsa sit, quod definitionis *quintæ*, olim *octavæ* officium est. Porro effatum hoc, analogiam esse proportionum similitudinem, nihilo magis quam barbare dictum aliquid nos erudivisset, si non antea quoque intellexerimus, *quid esset* proportio, quod edocere, *tertiæ* definitionis est. Totâ enim errant viâ, quod tamen fecerunt nonnulli aliter quidem non ἀγεωμέτρητοι, qui *proportionalitatem* sive *analogiam* cum *proportione* quodammodo confundunt, et naturam ejus *septima* Definitione, olim *quintâ*, satis indicari opinantur. Etenim Definitio ista neque de Analogiæ, neque de Proportionis naturâ quicquam omnino

omnino agit ἁπλῶς ſumptâ, et prout per ſe exſtat. Non iſtiuſmodi definitio eſt, quam ſummam et optimam eſſe ſtatuunt Dialectici, et quæ apud eos appellatur, λόγος τῆς οὐσίας. Deſcriptio rei per certa quædam attributa, quæ aſſidue eam comitantur, potius eſt, quam definitio abſoluta, et proprie ita dicta. Indicium ponit proculdubio, quo magnitudines proportionales, id eſt, eæ quæ, binæ comparatæ, ſimilitudine Proportionis inter ſe gaudent, ab aliis dignoſcantur, quæ eandem inter ſe non habent Proportionis convenientiam; quod tamen *Proportione ipſâ* non prius explicata, nihilo magis profuerat, quam ſi nobis dixerat aliquis, exempli gratiâ, quomodo corpora *vi electricâ prædita* ab aliis diſtingueremus, ignaris interea et omnino indoctis, quid ſit, vel in quo conſtaret ipſa *hæc vis electrica*. Rectiſſime igitur, et etiam neceſſario docet Definitio *tertia*, quid ſit *Proportio*, et id etiam per λόγον τῆς οὐσίας.

Quæritur a nonnullis etiam, quare ullâ omnino opus ſit Proportionis definitione, cum nullam expoſcant homines, ut ope ejus intelligant, quid a vocabulis "majus" aut "minus;" exempli gratiâ, aut "æquale" innuitur. Retorquendum eſt, quia voces illæ, ſimplex aliquid, et perſpicuum, et nullo negotio intelligendum exprimant; Proportio non item, ſed vocabulum ſit, quod licet in ore omnium, pauciſſimis tamen præfinitam aliquam aut perſpicuam rei ipſius cognitionem idcirco ſufficiat. Quod ſi aliter eſſet,

non

non ut ſupra dictum eſt, ita omnia permiſcerent homines, ut interdum etiam *Proportionem* et *Proportionalitatem* unam eandemque rem eſſe, ullo modo exiſtimarent. Ponimus itaque non commodam tantummodo, ſed neceſſariam eſſe *Proportionis* definitionem; ubi Græco ſermone quis uteretur, præcipue, cum ex omnibus vocis λόγυ ſignificationibus, nullam apud Græcos in ſe recipit, vulgo ſaltem et uſitate, quæ proportionem innuere videatur.

Obſtrepunt interea alii, et Euclidi objiciunt, definitionem *Proportionis* quæ ab eo tradita eſt, *Metaphyſicam* eſſe, quod et certiſſime ita ſe habet. Neque tamen ſola eſt, aut unica hujuſce generis definitio, quâ Elementa ſua ab Euclide munita ſunt. Quid enim? Unitatis et Numeri apud eum Definitiones nonne etiam *Metaphyſicæ* ſunt? Quomodo autem ſine harum rerum definitionibus, numerorum affectus explicare potuerat, vel quomodo res, quæ generis generaliſſimi tam fere ſunt, aliter definire licuit, niſi *Metaphyſice?*—Adde, *Metaphyſicam* doctiſſimos e veteribus Geometris non tam averſari ſolitos eſſe, quam e recentioribus complures, qui tamen ſibi mirifice plaudunt, et propter ingenii ſui, et doctrinæ excellentiam.

Nosmet e contra Euclidis cauſam etiam ulterius agere non piget, et efficere, modo poterimus, ut *Definitionem hanc tertiam* in poſterum homines non refugiant, quaſi labem aliquam e *Metaphyſicis*

physicis in se contraxerit. Nihil uspiam in Elementis suis ad examen adigit Euclides, nisi cujus antea dederit *definitionem essentiæ*, si excipias tres e figuris solidis, Sphæram nimirum, Conum rectum, et Cylindrum rectum; quas, quænam sint, ostendit, illud utique indicando, quomodo per motum generari possint, unde et vera eorum essentia statim mente percipitur. Præter hæc, ut diximus, in aliis omnibus pro definitione utitur λόγῳ αὐτῶν τῆς ὀυσίας. Definitiones hujuscemodi omnes eæ sunt, quibus ostendit quid sit Circulus, quid Rhombus aut Quadratum, quid Prisma aut Pyramis, quid denique Angulus Planus. Si de Proportione igitur disserere inceperat, neque tamen prius illam per λόγον τῆς ὀυσίας definierat, aliter et minus accurate egisset in re subtili et difficillimâ, quam pro more suo, in iis, quæ discentibus multo minus molestiæ facessunt. Quod si, simul ac ad Proportionem devenerit, et antequam de eâ ulterius ageret, definienda esset et ea quoque, prout cætera, per λόγον τῆς ὀυσίας, quomodo aliter hoc, quam ab Euclide factum est, fieri potuisset, vellem mortalium aliquis mihi indicaret. *Relatio* enim est hæc Proportio, et nihil aliud, et *quantitatum* quoque, non aliarum rerum relatio. Essentia autem, vel alicujus τὸ τί ἦν εἶναι, alio modo definiri nequit, quam Categoriam indicando sub quam cadit, et enunciando quoque, quomodo ab aliis sub eandem Categoriam cadentibus diversa sit. Quorum utrumque ab Euclide factum est, eâ Proportionis definitione, quæ Libro Elementorum quinto præmittitur.

mittitur. Interea videri hanc definitionem magis *Metaphysicam*, quam eas, quibus Circulus docuit quid esset, aut Quadratum (exemplis tantummodo utimur) evenit propter rei ipsius naturam, tam longe a sensibus remotæ, et a conceptibus quæ per eos intrant. *Figura* scilicet ex eorum genere est, quorum, cum non sint essentiæ primariæ, ὀυσίαι πρῶται, ut cum Aristotele loquamur, nulla omnino existentia est præter eam quæ est in subjecto, ἐν ὑποκειμένῳ. Subjectum autem *figuræ* est *Materies*, sive Ὕλη. *Figuræ* itaque, Circuli, Quadrati, aut Trianguli existentia unice in *Corpore* est; non tamen in αἰσθητῷ aliquo, (de *figuris* etenim perfectis jam loquimur, quoniam de illis tantummodo Mathesis agit) sed in ὕλῃ πεπερασμένῃ, (siquidem hoc est quod per "Corpus" significare volumus,) qualis *mente intelligenda est*. In hâc inquam, et nullibi alias est *figurarum* existentia—inter quæ evenit tamen, ut earum adumbrationes quædam in iis quoque appareant, quæ αἰσθητὰ sunt, et quæ *sensibus subjiciuntur*. Porro quoniam quamplurimis contingit εἴδωλα hæc, sive umbras, pro rebus ipsis sumere, Triangulum et aliæ quævis figuræ tam per *phantasiam*, quam per *intellectum* agnoscuntur; et in hisce omnibus, λόγος τῆς ὀυσίας *phantasma* rei *perceptioni* necessario objicit, pariter ac *formam* ejus *intellectui*. E quibus, non vulgus tantummodo, sed omnes fere qui Veterum Dialecticâ non imbuti sunt, in *phantasmate* hærere potius quam in *formâ intellectuali* solent, tanquam hoc melius et certius

rem

rem ipſam repræſentaret, contra illud quod verum eſt. Quoad *Proportionem* interea, quæ *mera Relatio* eſt, *phantaſma* ejus nullum omnino exhiberi poteſt, quod intueamur, et in quo ſenſuum ope ſe defigat animus, quod vitio Euclidi vertitur et definitioni ejus; quaſi *per eum* proportionis doctrina difficilis eſſet et obſcura, dum tamen *e rei ipſius naturâ* omnino exoritur, ſi quid hujuſcemodi ſit circa eam incommodum. Neque enim non iiſdem opprobriis oneratæ fuiſſent etiam Circuli apud eum, vel Quadrati definitiones, ſi ſimilitudinem aut adumbrationem quadrati vel circuli in externis rebus nunquam viderimus. Sed ut poſt unum jam verbum aut alterum diſputatio hæc ad finem perducatur—meditati enim ſumus præfationem, ſcripſimus fere commentarios.

Diſcrepantibus in tantum et conturbatis hominum de hac Matheſeos partitione ſententiis, nihil mirum eſt, ſi inveteraverint etiam loquendi de eâ formulæ, neque veritati, neque ſibi ipſis conſonæ. Alii itaque vocabula "rationem" et "proportionem," alii "proportionem" et "proportionalitatem" promiſcue uſurparunt, ut ſi eadem utriuſque ſignificatio eſſet; "rationem" alii dixerunt "proportionem" eſſe quam habet magnitudo una ad aliam, quaſi Proportio *genus* eſſet, Ratio interea *ſpecies*—omnia multo aliter, quam oportuit. Quod verum et legitimum eſt, λόγον per Rationem, et ἀναλογίαν, per Proportionem, ubi Græca Latino ſermone proferenda ſunt, unice exprimere debemus.

Sed

Sed incuriam quæ tam diu invaluit, non noſtri eſt amovere, neque ſatis commodum eſſet jam aliter, quam ex recepto more loqui; unde factum eſt nos etiam Proportionis nomine λόγον indicaſſe, et ἀναλογίαν, ubi Græco vocabulo non utimur, Proportionalitatem appellâſſe, vel potius, ubi noſmet ipſi loquimur, Proportionis convenientiam.

Abſolutis hiſce, in iis quæ de opere hoc noſtro etiamnum dicenda reſtant, Lectorem non diu morabimur. *Decimus* Elementorum Liber, utpote qui minime, vel a doctis, vel a diſcentibus attrectatur, longe majorem quam alii emendationem poſtulabat, et operâ noſtrâ pluries emendatus eſt. Neque tamen opus eſt, ut eorum quæ ibi interjecimus, vel etiam reſtituimus, ratio a nobis ſingulatim reddatur. Adeo cuivis, ut opinamur, pro re natâ manifeſtum erit, quâ de cauſâ et quibus conſiliis hujuſcemodi omnia immutavimus. Quod in Libro *undecimo* a nobis factum eſt, quæ extra dubium deſiderabatur, *Paralleliſmi Rectæ lineæ et Plani* definitionem adjecimus; definitiones ipſas in ordinem redegimus; et *ſimilium Solidarum figurarum* definitionem, (*nonam* olim, penes nos *undecimam*,) eâ ex parte auximus quâ manca erat et imperfecta; ita ut ſtatim ex illâ, et per conſectarium agnoſcenda ſit *ſimilium eorum Solidorum* æqualitas, in quibus *latera homologa ſunt æqualia*. Quare et omnino quoque abjecimus eam, quæ in cæteris editionibus

tradita

tradita est, *æqualium et similium solidorum* Definitionem; quæ eo nomine etiam appellari nunquam debuit, cum nothum tantummodo Theorema sit, quod fusius ostendit SIMSONUS in Euclide suo Anglice reddito; ubi diserte quoque indicavit, quibus in locis res ita se habitura esset, et novas earum propositionum demonstrationes concinnavit, quæ neque ex accuratâ definitione antea derivatæ erant, neque rectâ ratiocinatione absolutæ. Quin et majus aliquod a nobis, et amplius factum est. Emendatâ *Solidorum similium* definitione, et positis accurate iis quæ *æqualitatem* eorum indicare possint, propositiones Libri *undecimi* 25tam, 27mam, 28vam, 29nam, 31niam, et 33iam, una cum *duodecimi* tertiâ et octavâ, quantum conjecturâ assequi possumus, ita demonstratas dedimus, ut ab Euclide ipso verisimile est eas olim prodivisse. Neque temere hoc a nobis dictum esse quivis pro se intelligat. In omnibus enim, quæ ita emendavimus, nihil aliud operâ nostrâ factum est, vel omnino faciendum erat, quam in demonstrationibus reponere, quod in singulis omnino desiderabatur—illud nimirum, quod, nescio quâ incuriâ, e *Solidorum similium* definitione pariter excidisse censendum est, utcunque neque in vetustissimis Elementorum Editionibus, neque etiam in Codicibus MSS. inveniatur. Problematis insuper, de quo agit Propositio Libri *undecimi* vicesima sexta, solutionem adjecimus uberiorem multo, quam, quæ ex angustis suis principiis a SIMSONO prolata est.

Corollaria,

Corollaria, *Lemmata*, et *Scholia*, quæ locis innumeris in hâc noſtrâ Euclidis Editione interjecta ſunt, et quæ in receptis editionibus non inveneris, ſive ex aliis deſumpta, ſive a nobis concinnata, aſteriſmo notantur. Quibus auctoris nomen non adſcribitur, ea omnia a nobis profecta ſunt. Quæcunque autem ſint ea, vel quales quales, quæ in Editione hâc noſtrâ fecimus emendationes, ducem in pleriſque eorum SIMSONUM certiſſime non ſecuti ſumus; propter quod a nonnullis ſatis certo improbabimur, ab aliis fortaſſe, ut fieri ſolet, diverſum experiemur judicium. Aliud interea nobis propoſitum fuit, et aliud unice in Euclide emendando, Euclide ipſo duntaxat magiſtro uti, per omnia intueri eum, et ad illius mentem, quantum fieri potuit, omnia componere. Porro autem, licet in eandem cum nobis arenam deſcenderit, cum SIMSONO multoties non ſentimus; ubique non aſtipulamur ejus de aliis Elementorum Editoribus judicio; quin et ex iis etiam quæ Operi ſuo inſeruit, ſupervacanea nonnulla, aut infructuoſa, impedita alia, et æquo longiora nobis ſemper viſa ſunt. Immo hoc ipſum erat, ut rem non diffiteamur, quod primo omnium ad Opus hoc noſtrum excitavit nos, et tandem aliquando etiam ad conficiendum impulit — certa nimirum neque unquam immutata opinio, Euclidem a SIMSONO ſermone Anglico donatum Juventutis Academicæ inſtitutioni non ſufficere, aut ſatis fideliter Veterum Geometrarum methodum, quæ nunquam non ἀκριβεστάτη eſt, iis in conſpectu

ſpectu ponere. Sed neque interea quoque, in egregii iſtius Viri exercitationibus, non confitemur iidem ineſſe multa et artificii ſingularis, et exquiſitæ elegantiæ, quibus ſpartam quam nactus eſt feliciter ornavit, et unde laudem ſibi jure adeptus eſt non mediocrem. Valeas, Lector, et quæ tibi in manus tradita ſunt, æqui bonique conſulas.

Dabamus ex Ædibus Bromleianis,
Kal. Mart. MDCCCII.

S.^oR.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

PUNCTUM eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe contingentium, et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio *.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea fuper rectâ lineâ infiftens, eos, qui deinceps funt, angulos, æquales inter fe fecerit, rectus eft uterque æqualium angulorum : et quæ infiftit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui infiftit.

XI.

Obtufus angulus eft, qui major eft recto.

XII.

Acutus autem, qui recto eft minor.

XIII.

Terminus eft, quod alicujus extremum eft.

XIV.

Figura eft, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eft figura plana, unâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur : ad quam ab uno puncto, intra figuram exiftente, omnes rectæ lineæ pertingentes funt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

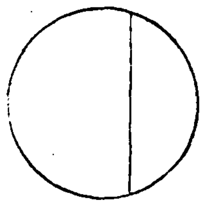
Diameter circuli eft recta quædam linea per centrum ducta, et ex utrâque parte a circumferentiâ circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum fecat.

XVIII.

Semicirculus eft figura, quæ continetur diametro, et eâ circuli circumferentiâ, quæ a diametro intercipitur.

* *Cum plures anguli ad unum punctum exiftunt, defignatur quilibet tribus literis; quarum illa quæ eft ad verticem anguli, in medio ponitur, e. g. in Fig. Prop.* xiii. *libri primi angulus rectis* A B, B C *comprehenfus dicitur angulus* A B C; *et angulus rectis* A B, B E *contentus dicitur angulus* A B E.

XIX.



XIX.

Segmentum circuli eſt figura, quæ rectâ lineâ, et circuli circumferentiâ continetur.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

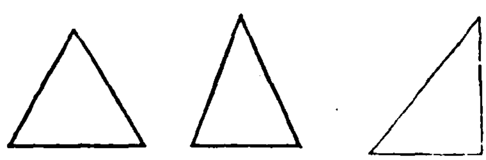
Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

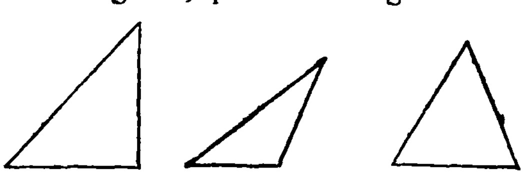


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

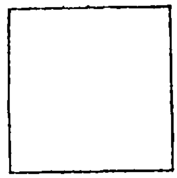
Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod et æquilaterum eſt, et rectangulum.



XXXI.

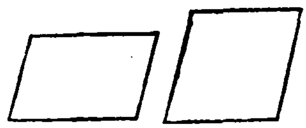
Alterâ parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ et oppoſita latera, et oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, et ex utrâque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Quovis centro, et intervallo, circulum deſcribere.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, et inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est suâ parte majus.

X.

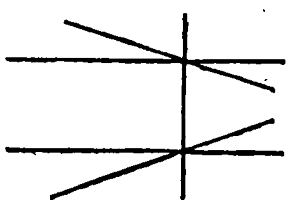
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

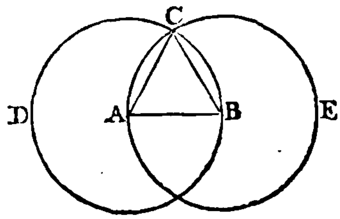
Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ, in infinitum productæ, inter se conveniunt ex eâ parte, in quâ sunt anguli duobus rectis minores. Vid. Cor. Prop. xxviii. 1^{mi}.



[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B. Oportet super ipsâ A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur B C D[a]. Et rursus centro B, intervalloque B A, describatur circulus A C E[a], et a puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A, B ducantur rectæ lineæ C A, C B[b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B[c] æqualis. Rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A: ostensa est autem et C A æqualis A B: utraque igitur ipsarum C A, C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis: tres igitur C A, A B, B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, et constitutum est super datâ rectâ lineâ terminatâ A B. *Q. E. F.*

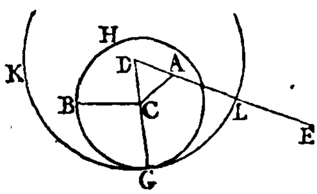


[a] Post. 3.
[b] Post. 1.
[c] Def. 15.

[II.] PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C: oportet ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur a puncto A ad C recta linea A C[d]: et super ipsâ A C constituatur triangulum æquilaterum D A C[e]: producanturque in directum ipsis D A, D C rectæ lineæ A E, C G[f]. Et centro quidem C, intervallo autem B C, circulus B G H describatur[g]. Rursusque centro D, et intervallo D G, describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis[h].



[d] Post. 1.
[e] 1. hujus.
[f] Post. 2.
[g] Post. 3.
[h] Def. 15.

Et

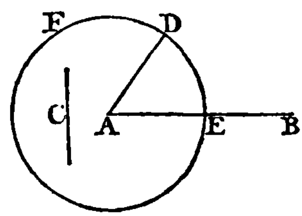
Et rurfus quoniam D centrum eft circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A eft æqualis D C: reliqua igitur A L reliquæ G C eft æqualis[i]. Oftenfa autem eft B C æqualis C G. Quare utraque ipfarum A L, B C eft æqualis ipfi C G. Quæ autem eidem æqualia funt, et inter fe funt æqualia. Ergo, et A L eft æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis pofita eft A L. *Q. E F.*

[i] Axiom. 3.

PROP. III. PROBL. [III.]

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, a majore minori æqualem abfcindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B et C; quarum major fit A B: oportet a majore A B minori C æqualem rectam lineam abfcindere. Ponatur ad A punctum ipfi C æqualis recta linea A D[k]; et centro quidem A, intervallo autem A D, circulus defcribatur D E F[l]. Et quoniam A centrum eft D E F circuli, erit A E ipfi A D æqualis. Sed et C æqualis A D. Utraque igitur ipfarum A E, C ipfi A D æqualis erit. Quare et A E ipfi C eft æqualis[m]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B et C, a majore A B minori C æqualis abfciffa eft A E. *Q. E. F.*



[k] Per antecedentem.

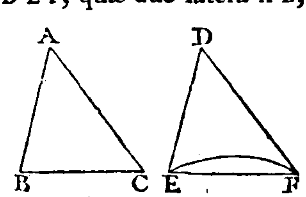
[l] Poft. 3.

[m] Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

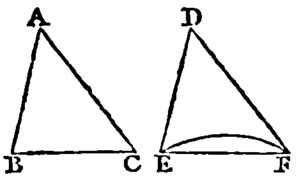
Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et bafim bafi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera fubtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipfi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico,



 et

et basim B C basi E F æqualem esse, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F; et angulum A C B angulo D F E.



Triangulo enim A B C applicato ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, rectâ vero lineâ A B ipsi D E applicatâ: et punctum B puncto E congruet; quod A B ipsi D E sit æqualis. Congruente autem A B ipsi D E; congruet et A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. Quare, et C congruet ipsi F: est enim recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, et punctum B congruebat puncto E. Ergo, et basis B C basi E F congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F, basis B C basi E F non congruat; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod [n] fieri non potest. Congruet igitur B C basis basi E F, et ipsi æqualis erit. Quare, et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales erunt [o]. Videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. *Q. E. D.*

[n] Ax. 10.

[o] Ax. 8.

[V.] PROP. V. THEOR.

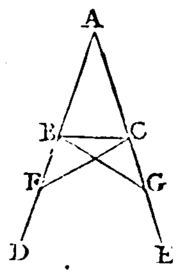
Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur in directum ipsis A B, A C rectæ lineæ B D, C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem esse. Sumatur enim in lineâ B D, quodvis punctum F: atque a majore A E minori A F æqualis [p] auferatur A G: junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F est æqualis A G; A B vero ipsi A C; duæ F A, A C, duabus G A,

[p] 3. hujus.

A B

A B æquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. Baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis [q], et triangulum A F C æquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C angulo A G B. Et quoniam tota A F toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit [r] et reliqua B F reliquæ C G æqualis. Oſtenſa eſt autem F C æqualis G B. Duæ igitur B F, F C duabus C G, G B æquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtque baſis ipſorum B C communis. Ergo et triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B; et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus [s] A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli. Oſtenſus autem eſt et F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. *Q. E. D.*



[q] 4. hujus.

[r] Ax. 3.

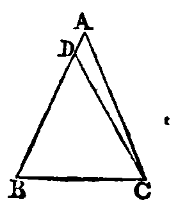
[s] Ax. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR. [VI.]

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe. Si enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt major. Sit major A B; atque a majori A B minori A C æqualis [t] auferatur D B; et D C jungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A C; communis autem B C: erunt duæ D B, B C duabus A C, C B æquales, altera alteri;



[t] 3. hujus.

teri; et angulus D B C æqualis angulo A C B, ex hyp. [u] 4. hujus. Baſis igitur D C baſi A B eſt[u] æqualis, et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualia ſunt latera A B, A C. Æqualia ſunt igitur. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt. *Q. E. D.*

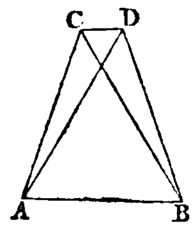
Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

[VII.]

PROP. VII. THEOR.

In eâdem rectâ lineâ, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non conſtituentur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

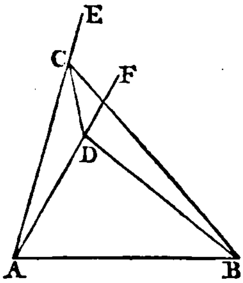
Si enim fieri poteſt, in eâdem rectâ lineâ A B duabus eiſdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D, D B æquales, altera alteri, conſtituantur, ad aliud atque aliud punctum C et D, ad eaſdem autem partes C et D, eoſdem habentes terminos A et B, quos primæ rectæ lineæ; ita ut C A quidem ſit æqualis D A, eundem, quem ipſa D A, terminum habens A; C B vero ſit æqualis D B, eundem habens B terminum; et C D jungatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis A D; erit, [x] 5. hujus. et angulus A C D angulo A D C æqualis[x]. Major igitur eſt A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rurſus quoniam C B eſt æqualis D B, et angulus B D C æqualis erit angulo B C D: oſtenſus autem eſt ipſo multo major; quod fieri non poteſt. Non igitur in eâdem rectâ lineâ, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, conſtituentur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. *Q. E. D.*



SCHO-

SCHOLION.*

Si punctorum C, D alterum D angulo ACB subsit, rectis ad alterum ductis comprehenso, demonstratio ad exemplum præcedentis instituenda est, ex parte posteriore propositionis quintæ. Productis enim AC, AD, anguli ECD, FDC, qui ad basim trianguli isoscelis CAD sunt externi, inter se æquales erunt [y]; angulus igitur BDC, angulo ECD major; angulo igitur BCD ille BDC multo major; sed propter æquales BD, BC, angulus BDC angulo BCD [z] æqualis, major minori. Quod est absurdum.



[y] 5. hujus.

[z] 5. hujus.

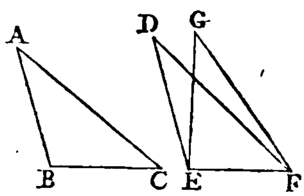
Si autem in alterutrâ ipsarum AC, BC sumatur punctum D, propositio statim constat: aliter enim toti AC vel BC pars ejus AD, vel BD æqualis esset, quod [a] fieri non potest.

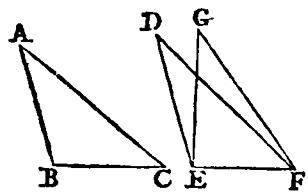
[a] Ax. 9.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF æqualia habeant, alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE; AC vero ipsi DF: habeant autem et basim BC basi EF æqualem. Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, et puncto quidem B posito in E; rectâ vero lineâ BC ipsi EF applicatâ: congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent et BA, AC ipsis ED, DF: si enim basis quidem BC basi EF congruat; latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruant, sed situm mutent;





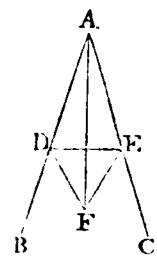
tent; ut E G, G F: constituentur in eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. Non

[b] Per 7. hujus. constituuntur autem; ut demonstratum est[b]. Non igitur, si basis B C congruat basi E F, non congruent et B A, A C latera lateribus E D, D F: congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque, æqualibus lateribus contentum, angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[IX.] PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus B A C: oportet autem ipsum bifariam secare. Sumatur in lineâ A B quodvis punctum D; et a lineâ A C



[c] 3. hujus. ipsi A D æqualis[c] auferatur A E; junctâ-

[d] 1. hujus. que D E, constituatur super eâ[d] triangulum æquilaterum D E F; et A F jungatur. Dico angulum B A C a rectâ lineâ A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A, A F duabus E A, A F æquales sunt, altera alteri; et basis D F æqualis

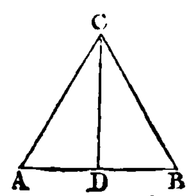
[e] 8. hujus. basi E F: angulus[e] igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C a rectâ lineâ A F bifariam sectus est. *Q. E. F.*

[X.] PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata A B; oportet ipsam A B

[f] 1 hujus. bifariam secare. Constituatur super[f] eâ triangulum æquilaterum A B C; et se-



[g] 9. hujus. cetur A C B angulus[g] bifariam rectâ lineâ C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C, C D dua-

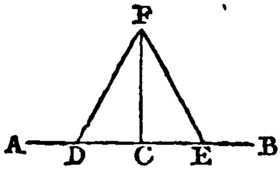
bus

bus B C, C D æquales sunt, altera alteri; et angulus A C D æqualis angulo B C D: basis igitur A D basi B D est [h] æqualis. Et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D. *Q. E. F.* [h] 4. hujus.

PROP. XI. PROBL. [XI.]

Datæ rectæ lineæ, a puncto in ipsâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea A B, et datum in ipsâ punctum C: oportet a puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D: ipsique C D æqualis [i] ponatur C E, et super D E constituatur [k] triangulum æquilaterum F D E, et F C jungatur. [i] 3. hujus. [k] 1. hujus.

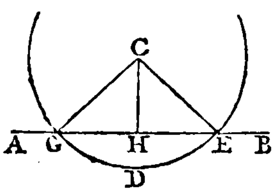


Dico datæ rectæ lineæ A B, a puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C, C F duabus E C, C F æquales, altera alteri; et basis D F est æqualis basi E F: angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis; et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus [l] est uterque æqualium angulorum: ergo uterque ipsorum D C F, E C F est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ A B, a puncto in ipsâ dato C, ad rectos angulos ducta est F C recta linea. *Q. E. F.* [l] Def. 10.

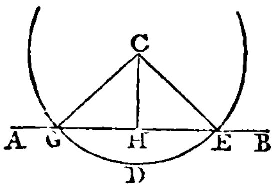
PROP. XII. PROBL. [XII.]

Super datâ rectâ lineâ infinitâ, a dato puncto quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in eâ non est. Oportet super datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: et centro quidem C, intervallo autem C D, circulus [m] describatur E D G: et E G in H bifariam [n] secetur: junganturque [m] Post. 3. [n] 10. hujus.



turque C G, C H, C E. Dico ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularem C H ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt G H ipſi H E, communis autem H C, duæ G H, H C duabus E H, H C æquales ſunt, alter alteri; et baſis C G eſt æqualis baſi



o 8. hujus. C E. Angulus igitur C H G angulo C H E eſt[o] æqualis; et ſunt deinceps. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales

p Def. 10. inter ſe fecerit; rectus[p] eſt uterque æqualium angulorum, et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit: ergo ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularis ducta eſt G H. *Q. E. F.*

[XIII.]

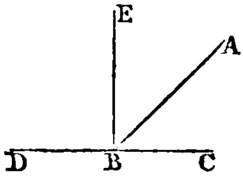
PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B ſuper rectam C D conſiſtens angulos faciat C B A, A B D. Dico C B A, A B D angulos, vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales. Si enim C B A eſt æqua-

q Def. 10. lis ipſi A B D; duo recti[q] ſunt: ſin minus, ducatur a puncto B ipſi

r 11. hujus. C D ad rectos[r] angulos B E: anguli igitur C B E, D B E ſunt duo



recti. Et quoniam C B E duobus C B A, A B E eſt æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli duo C B E,

s Ax. 2. E B D tribus angulis C B A, A B E, E B D ſunt[s] æquales. Rurſus quoniam D B A angulus eſt æqualis duobus D B E, E B A, communis apponatur A B C: anguli igitur duo D B A, A B C tribus D B E, E B A, A B C æquales ſunt. At oſtenſum eſt angulos quoque C B E, E B D eiſdem

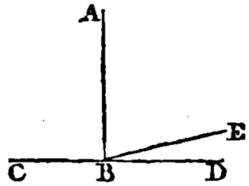
t Ax. 1. tribus æquales eſſe: quæ vero eidem ſunt æqualia[t], et inter ſe æqualia ſunt: ergo et anguli C B E, E B D ipſis D B A, A B C ſunt æquales: ſunt autem C B E, E B D duo recti; anguli igitur D B A, A B C duobus rectis æquales erunt. Ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in eà B, duæ rectæ lineæ B C, B D, non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A B C, A B D duabus rectis æquales faciant. Dico B D ipsi C B in directum esse: si enim B D non est in directum ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E.

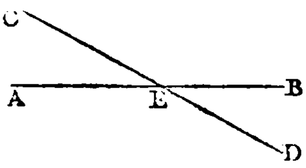


Quoniam igitur recta linea A B, super rectam C B E consistit; anguli A B C, A B E [u] duobus rectis sunt æquales. [u] 13. hujus. Sed et anguli A B C, A B D sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur C B A, A B E ipsis C B A, A B D æquales erunt. Communis auferatur A B C. Ergo reliquus A B E reliquo A B D est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur B E est in directum ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter B D. Ergo C B ipsi B D in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eà duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. *Q. E. D.*

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectam C D consistens angulos facit C E A, A E D;



erunt hi [x] duobus rectis æquales. Rursus quoniam [x] 13. hujus. recta linea D E super rectam A B consistens facit angulos A E D, D E B; erunt A E D, D E B anguli æquales [y] duobus [y] 13. hujus. rectis.

rectis. Oſtenſum autem eſt angulos quoque C E A, A E D duobus rectis eſſe æquales. Anguli igitur C E A, A E D angulis A E D, D E B æquales ſunt. Communis auferatur
[c] Ax. 3. A E D. Ergo reliquus [c] C E A reliquo B E D eſt æqualis. Simili ratione, et anguli C E B, D E A æquales oſtendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. *Q. E. D.*

Cor. 1. Ex hoc manifeſte conſtat duas rectas lineas, ſe invicem ſecantes, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

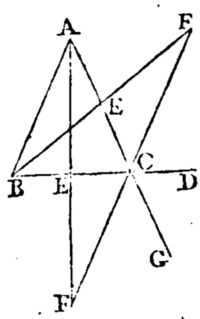
Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

[XVI.]

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et oppoſito eſt major.

Sit triangulum A B C, et unum ipſius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D utrovis interiore, et oppoſito, videlicet C B A, et B A C majorem
[a] 10. hujus. eſſe. Secetur enim A C bifariam [a] in E, et juncta B E producatur ad F; ponaturque ipſi B E æqualis E F. Jungatur præterea F C, et A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem eſt æqualis E C, B E vero ipſi E F; duæ A E, E B, duabus C E, E F æquales ſunt, altera alteri: et angu-
[b] 15. hujus. lus A E B angulo F E C eſt æqualis [b], ad verticem enim ſunt. Baſis igitur
[c] 4. hujus. A B æqualis [c] eſt baſi F C; et A E B triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus B A E eſt æqualis angulo E C F. Sed A C D angulus major eſt ipſo E C F. Major igitur eſt angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam ſecta, oſtendetur etiam B C G angulus, hoc eſt A C D angulus, angulo A B C major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et oppoſito major eſt. *Q. E. D.*

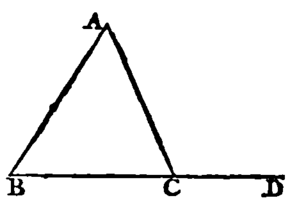


PROP.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duos angulos, quomodocunque sumptos, duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus A C D major [c] est interiore, et opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD, A C B angulis A B C, A C B majores sunt. Sed A C D, A C B sunt [d] æquales duobus rectis. Ergo A B C, B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque B A C, A C B, itemque C A B, A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

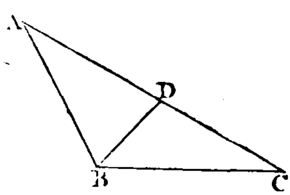


[c] 16. hujus.
[d] 13. hujus.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C, habens latus A C latere A B majus. Dico et A B C angulum angulo B C A majorem esse. Quoniam enim A C major est, quam A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; et B D jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [e] interiore, et opposito DCB. Sed ADB æqualis [f] est ipsi ABD, quod et latus A B lateri A D sit æquale; major igitur est et A B D angulus angulo A C B. Quare A B C ipso A C B multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit. *Q. E. D.*

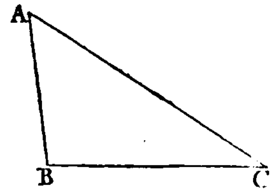


[e] 16. hujus.
[f] 5. hujus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum A B C, majorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B majus esse. Si enim non est majus A C, vel æquale est ipsi A B, vel ipso minus; æquale autem non est; nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset [g]; non est autem. Non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus; esset enim et angulus A B C angulo A C B minor [h]; atqui non est. Non igitur A C minus est ipso A B. Ostensum autem est neque æquale esse. Ergo A C ipso A B est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. *Q. E. D.*

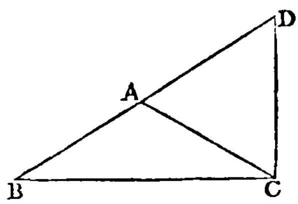


[g] 5. hujus.
[h] 18. hujus.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem B A, A C majora latere B C; latera vero A B, B C majora latere A C: et latera B C, C A majora ipso A B. Producatur enim B A ad punctum D; ponaturque ipsi C A æqualis A D [i]; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis [k]. Sed B C D angulus major est angulo A C D; angulus igitur B C D angulo A D C est major. Et quoniam triangulum est D C B habens B C D angulum majorem angulo B D C; majorem autem angulum majus latus subtendit [l]; erit latus D B latere B C majus; sed D B est æquale ipsis B A, A C; quare latera B A, A C ipso B C majora sunt. Similiter ostendemus et latera quidem A B, B C majora esse latere C A: latera vero B C, C A ipso A B majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. *Q. E. D.*



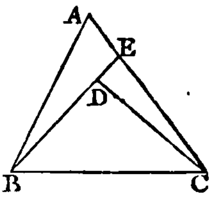
[i] 3. hujus.
[k] 5. hujus.
[l] 19. hujus.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD, DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora [m], erunt trianguli ABE duo latera BA, AE majora latere BE. Communis apponatur EC. Ergo BA, AC ipsis BE, EC majora [n] sunt. Rursus quoniam CED trianguli [n] duo latera CE, ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB; quare CE, EB ipsis CD, DB sunt majora [n]. Sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC: multo igitur BA, AC ipsis BD, DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major [o]; erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major [o]; sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. *Q. E. D.*



[m] 20. hujus.

[n] Ax. 4.

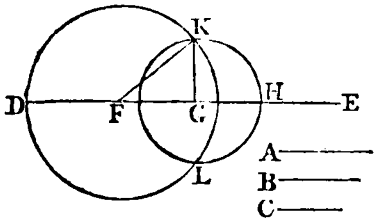
[o] 16. hujus.

PROP. XXII. PROBL. [XXII.]

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquâ majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliquâ majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B quidem sint majores quam C; A, C vero majores quam B; et præterea B, C majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum constituere.

ponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipſi quidem
p 3. hujus. A æqualis [p] D F, ipſi vero B æqualis F G, et ipſi C æqualis G H; et centro F, intervallo autem F D, cir-
q 3. Poſtul. culus [q] deſcribatur D K L; rurſusque

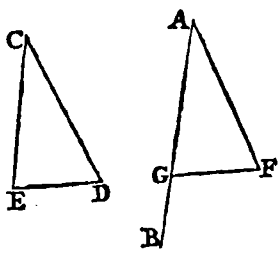


centro G, et intervallo G H, alius circulus K L H deſcribatur, et jungantur K F, K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C triangulum K F G conſtitutum eſſe. Quoniam enim punctum F centrum eſt D K L
r Def. 15. circuli, erit F D æqualis [r] F K; ſed F D eſt æqualis A; ergo et F K ipſi A eſt æqualis. Rurſus quoniam punctum G centrum eſt circuli L K H, erit G H æqualis [r] G K; ſed G H eſt æqualis C; ergo et G K ipſi C æqualis erit. Eſt autem et F G æqualis B. Tres igitur rectæ lineæ K F, F G, G K tribus A, B, C æquales ſunt. Quare ex tribus rectis lineis K F, F G, G K, quæ ſunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum conſtitutum eſt K F G. *Q. E. F.*

[XXIII.] PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, et ad datum in eâ punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipſâ punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualem angulum rectilineum conſtituere. Sumantur in utrâque ipſarum C D, C E quævis puncta D, E, ducaturque D E; et ex tribus rectis lineis,



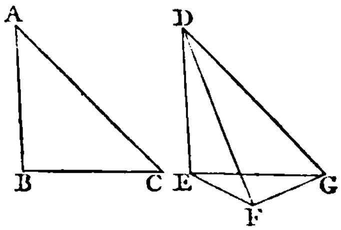
s 22. hujus. quæ æquales ſint tribus C D, D E, E C, triangulum [s] conſtituatur A F G, ita ut A F ſit æqualis C D, et A G ipſi C E, et F G ipſi D E. Itaque quoniam duæ D C, C E duabus F A, A G æquales ſunt, altera alteri, et baſis D E eſt æqualis

æqualis basi F G; erit et angulus D C E angulo F A G æqualis [t]. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. *Q. E. F.* [t] 8. hujus.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri; videlicet latus quidem A B æquale lateri D E, latus vero A C æquale D F. At angulus B A C angulo E D F sit major. Dico et basim B C basi E F majorem esse.



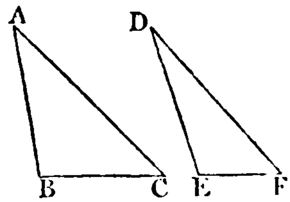
Quoniam enim angulus B A C major est angulo E D F, constituatur [u] ad rectam lineam D E, et ad punctum in eâ D, angulo B A C æqualis angulus E D G, ponaturque alterutri ipsarum A C, D F æqualis [x] D G; et G E, F G jungantur. Itaque quoniam A B quidem est æqualis D E, A C vero ipsi D G; duæ B A, A C, duabus E D, D G æquales sunt, altera alteri; et angulus B A C est æqualis angulo E D G; ergo basis B C basi E G est [y] æqualis. Rursus quoniam æqualis est D G ipsi D F; est angulus D F G angulo D G F [z] æqualis; erit itaque D F G angulus angulo E G F major; multo igitur major est E F G angulus ipso E G F. Et quoniam triangulum est E F G, angulum E F G majorem habens angulo E G F; majori autem angulo latus majus subtenditur [a]; erit et latus E G latere E F majus; sed E G latus est æquale lateri B C. Ergo et B C ipso E F majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt. *Q. E. D.*

[u] 23. hujus.
[x] 3. hujus.
[y] 4. hujus.
[z] 5. hujus.
[a] 19. hujus.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F. Basis autem B C basi E F sit major. Dico et angulum B A C angulo E D F majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F æqualis [b]. Non est autem. Non igitur æqualis est B A C angulus angulo E D F. Sed neque minor; minor enim esset [c] et basis B C basi E F. Atqui non est. Non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus B A C angulo E D F necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. *Q. E. D.*

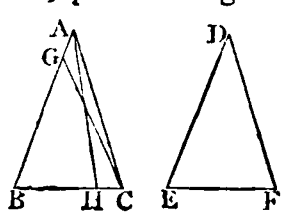


[b] 4. hujus.
[c] 24. hujus.

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis D E F, E F D æquales habeant, alterum alteri; videlicet angulum quidem A B C æqualem angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D. Habeant autem et unum latus uni



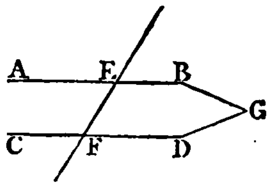
uni lateri æquale, et primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. A B lateri D E, et latus A C ipsi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis est A B ipsi D E, una ipsarum major est. Sit major A B, ponaturque G B æqualis D E; et G C jungatur. Quoniam igitur B G quidem est æqualis D E, B C vero ipsi E F, duæ G B, B C duabus D E, E F æquales sunt, altera alteri; et angulus G B C æqualis angulo D E F. Basis igitur G C basi D F est [d] æqualis; [d] 4. hujus. et G B C triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo G C B angulus est æqualis angulo D F E; sed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur; quare et B C G angulus angulo B C A est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est A B ipsi D E: ergo æqualis erit. Est autem et B C æqualis E F. Itaque duæ A B, B C duabus D E, E F æquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. Basis igitur A C basi [d] D F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, æqualia, ut A B ipsi D E. Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; A C quidem ipsi D F, B C vero ipsi E F; et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis est B C ipsi E F, una ipsarum major est. Sit major B C, si fieri potest, ponaturque B H æqualis E F, et A H jungatur. Quoniam igitur B H quidem est æqualis E F, A B vero ipsi D E; duæ A B, B H duabus D E, E F æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent; ergo [d] basis A H basi D F est æqualis; et A B H triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus B H A angulo E F D. Sed E F D est æqualis [e] angulo B C A. Ergo et B H A [e] ex hyp. angulus angulo B C A est æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis est interiori et opposito B C A; quod fieri non potest [f]. Quare non in- [f] 16. hujus. æqualis est B C ipsi E F; æqualis igitur. Est autem et A B æqualis D E. Duæ igitur A B, B C duabus D E, E F æquales sunt, altera alteri; angulosque æquales continent.

tinent. Quare basis A C æqualis est basi D F, et B A C triangulum triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens alternos angulos A E F, E F D æquales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B, C D, vel ad partes B, D convenient, vel ad partes A, C. Producantur, conveniantque ad partes B, D in puncto G. Itaque



[g] 16. hujus. G E F trianguli exterior angulus A E F major [g] est interiore et opposito E F G; sed et æqualis [h]; quod fieri
[h] ex hyp.
non potest. Non igitur A B, C D productæ ad partes B, D convenient. Similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A, C. Quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [i] inter se sunt. Parallela igitur est
[i] Def. 35.
A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ. *Q. E. D.*

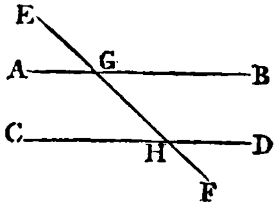
[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, et opposito G H D æqualem faciat; vel interiores et ad easdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam esse. Quoniam enim

E G B

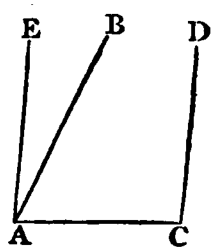
E G B angulus æqualis eſt [k] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [l], erit et angulus A G H angulo G H D æqualis; et ſunt alterni. Parallela igitur eſt A B ipſi C D [m]. Rurſus quoniam anguli B G H, G H D duobus rectis ſunt æquales [n], et ſunt A G H, B G H æquales duobus rectis [o]: erunt anguli A G H, B G H angulis B G H, G H D æquales. Communis auferatur B G H. Reliquus igitur A G H eſt æqualis reliquo G H D; et ſunt alterni. Ergo A B ipſi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. *Q. E. D.*



[k] ex hyp.
[l] 15. hujus.
[m] Ex antecedente.
[n] ex hyp.
[o] 13. hujus.

Cor. * Si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit; rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi invicem occurrent ex eâ parte, ex quâ ſunt anguli duobus rectis minores.

Incidat enim in duas rectas lineas A B, C D recta linea A C, ita ut angulos B A C, D C A duobus rectis minores efficiat: dico rectas lineas A B, C D in infinitum productas ex eâ parte, ex quâ angulos cum A C duobus rectis minores efficiunt, ſibi invicem occurſuras eſſe. Rectæ lineæ A C ad punctum A [p] applicetur angulus E A C æqualis angulo, qui anguli D C A ad duos rectos complementum eſt. Itaque anguli E A C, D C A ſimul ſumpti duobus rectis æquales ſunt, et recta linea A E ipſi D C parallela erit, per hanc Prop. Anguli autem B A C, D C A, duobus rectis ex hypotheſi minores, duobus E A C, D C A minores erunt, qui duobus rectis oſtenſi ſunt æquales. Communis auferatur angulus D C A, erit itaque B A C angulus angulo E A C minor. Igitur recta linea A B rectas A E, A C interjacet, angulum E A C dividens; itaque ab A E verſus C D deflectitur; quamobrem producta ipſi C D productæ occurret. Recta enim



[p] 23. hujus.

ea

ea demum eſt linea, quæ producta in eâ perſtat directione, quam primo habuerit. Directiones autem rectarum A B, C D erant, ut oſtenſum eſt, ad ſe invicem. Itaque &c. *Q. E. D.*

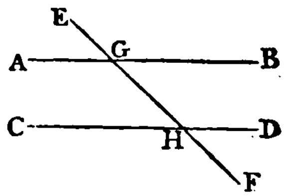
SCHOLION.*

In hoc Corollario verum eſſe illud demonſtravimus, quod in initio libri inter κοινὰς ἐννοίας, ſive Axiomata, poſuit Euclides. Vid. Ax. 12. hujus.

[XXIX.] PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas A B, C D recta linea incidat E F. Dico alternos angulos A G H, G H D inter ſe æquales efficere, et exteriorem E G B interiori, et ad eaſdem partes G H D æqualem: et interiores et ad eaſdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Si enim inæqualis



eſt A G H ipſi G H D, unus ipſorum major eſt. Sit major A G H. Et quoniam A G H angulus major eſt angulo G H D; communis apponatur B G H. Anguli igitur A G H, B G H angulis B G H, G H D majores ſunt. Sed
[r] 13. hujus. anguli A G H, B G H ſunt æquales duobus rectis[r]. Ergo B G H, G H D anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero a minoribus, quam ſint duo recti, in infinitum
[s] Ax. 12. producuntur rectæ lineæ, inter ſe conveniunt[s]. Ergo rectæ lineæ A B, C D in infinitum productæ convenient inter ſe. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis eſt A G H angulus angulo G H D; quare neceſſario eſt æqualis. Angulus autem
[t] 15. hujus. A G H æqualis eſt angulo E G B[t]. Ergo et E G B ipſi G H D æqualis erit. Communis apponatur B G H. Anguli igitur E G B, B G H ſunt æquales angulis B G H, G H D; ſed E G B, B G H æquales ſunt duobus rectis. Ergo et B G H, G H D duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori

et

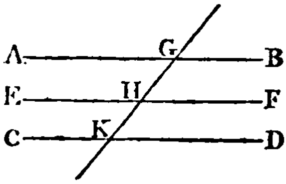
et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt.

Sit utraque ipſarum A B, C D ipſi E F parallela. Dico et A B ipſi C D parallelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B, E F recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F eſt æqualis [u]. Rurſus quoniam in parallelas rectas lineas E F, C D recta linea incidit G K, æqualis eſt G H F angulus angulo G K D [u]. Oſtenſus autem eſt et angulus A G K angulo G H F æqualis; ergo et A G K ipſi G K D æqualis erit; et ſunt alterni. Parallela igitur eſt A B ipſi C D [x]. Ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt. *Q. E. D.*



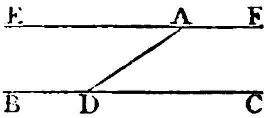
[u] 29. hujus.

[x] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. Oportet per A punctum ipſi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quodvis punctum D, et jungatur A D; conſtituaturque [y] ad rectam lineam D A, et ad punctum in ipſâ A, angulo A D C æqualis angulus D A E; et in directum ipſi E A recta linea A F producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas B C, E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D, A D C inter ſe æquales efficit, E F ipſi B C parallela erit [z]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C parallela ducta eſt recta linea E A F. *Q. E. F.*



[y] 23. hujus.

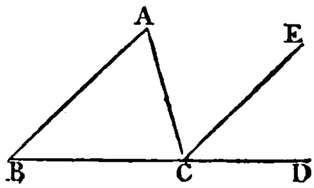
[z] 27. hujus.

PROP.

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis, et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse æquales.



[a] 31. hujus. Ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE; et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni
[b] 29. hujus. anguli BAC, ACE inter se æquales sunt [b]. Rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est æqualis [b]. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC, ABC. Communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BAC, ACB æquales sunt; sed anguli ACD,
[c] 13. hujus. ACB sunt æquales [c] duobus rectis. Ergo et ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

Cor. 1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

Cor. 2. Si in uno triangulo duo anguli, aut singuli, aut simul, æquales sint duobus angulis alterius trianguli; erit reliquus angulus reliquo æqualis.

Cor. 3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

Cor. 4. In triangulo isosceles si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

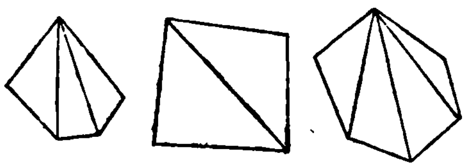
Cor. 5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEO-

THEOREMA I.

Omnes ſimul interiores anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea reſolvi poteſt in triangula binario pauciora quam ſunt ipſius figuræ latera, e. g. *ſi quatuor latera habeat, reſolvitur in duo triangula;*



ſi quinque in tria triangula; ſi ſex in quatuor et ſic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot ſunt triangula, ſed omnes horum triangulorum anguli æquales ſunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula, hoc eſt, bis tot rectis, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Q. E. D.

THEOR. II.

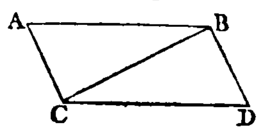
Omnes ſimul exteriores anguli cujuſque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores ſimul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores ſoli conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ; quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

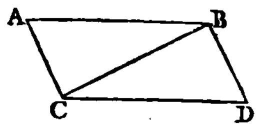
Quæ æquales et parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipſæ æquales et parallelæ ſunt.

Sint æquales et parallelæ A B, C D; et ipſas conjungant ad eaſdem partes rectæ lineæ A C, B D. Dico A C, B D æquales, et parallelas eſſe. Ducatur enim B C; et quoniam A B parallela eſt C D, in ipſaſque incidit B C, alterni anguli A B C, B C D æquales ſunt[d]. d 29. hujus.



Rurſus

Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus B C, C D sunt æquales; et angulus A B C æqualis angulo B C D. Basis igitur A C basi B D est æqua-



[e] 4. hujus. lis [e]; triangulumque A B C triangulo B C D; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C, B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B, C B D æquales inter se ef-

[f] 27. hujus. ficit, parallela est A C ipsi B D [f]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Quæ igitur æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. *Q. E. D.*

DEFINITIO.

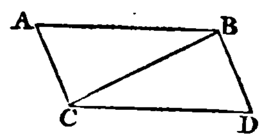
Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum A B D C, cujus diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos, inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta



linea B C; anguli alterni A B C, B C D inter se æquales

[g] 29. hujus. sunt [g]. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C, alterni anguli A C B, C B D æquales sunt inter se [g]. Duo igitur triangula sunt A B C, C B D, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis B C D, C B D æquales habent, alterum alteri; et unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos,

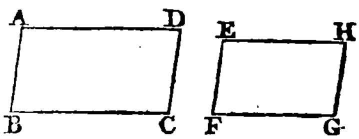
[h] 26. hujus. utrique commune, B C. Ergo [h] et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Æquale igitur est latus quidem A B lateri C D, latus vero A C ipsi B D, et angulus B A C angulo B D C æqualis. Et

quoniam

quoniam angulus A B C eſt æqualis angulo B C D, et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. Oſtenſus autem eſt et angulus B A C angulo B D C æqualis. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum latera, quæ ex oppoſito, et anguli, inter ſe æqualia ſunt. Dico etiam diametrum ea bifariam ſecare. Quoniam enim æqualis eſt A B ipſi C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus D C, C B æquales ſunt, altera alteri; et angulus A B C æqualis eſt angulo B C D. Baſis igitur [i] A C baſi D B æqualis; et triangu- [i] 4. hujus.
lum A B C triangulo B C D æquale. Ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam ſecat. *Q. E. D.*

Cor. * Parallelogramma, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, et reliquos reliquis, ſingulos ſingulis, æquales habent.

Parallelogramma A B C D, E F G H angulos ad A, E æquales habeant. Dico parallelogrammum A B C D reliquos ſui angulos reliquis parallelogrammi E F G H, ſingulos ſingulis, æquales habere.



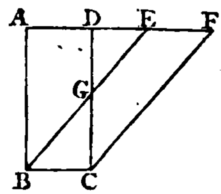
Nam in parallelogrammo A B C D anguli duo A, B ſimul ſumpti duobus rectis æquales ſunt [k]. Pari [k] 29. hujus.
ratione in parallelogrammo E F G H, duo E, F ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales. Duo igitur A, B ſimul duobus E, F ſimul ſunt æquales. Ablatiſque æqualibus A, E, reliquus B reliquo F æqualis [l] erit. [l] Ax. 3.
Jam vero in parallelogrammo A B C D anguli A, C oppoſiti inter ſe æquales ſunt, per hanc Prop. et in parallelogrammo E F G H oppoſiti E, G inter ſe æquales. Æquales autem A, E [m]. Quare et C, G æquales ſunt [n]. [m] ex hyp. [n] Ax. 1.
Pari ratione angulus D, cui oppoſitus eſt B, in parallelogrammo A B C D, æqualis oſtendetur angulo H, cui in parallelogrammo E F G H oppoſitus eſt F, ipſius B æqualis.

PROP.

[XXXV.]
PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eâdem basi, et in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma A B C D, E B C F super eâdem basi B C, et in eisdem parallelis A F, B C constituta. Dico A B C D parallelogrammum parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D,

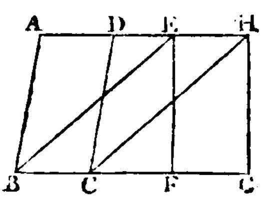


° 34. hujus. æqualis° est A D ipsi B C. Eâdem quoque ratione, et E F est æqualis B C. Quare et A D ipsi E F
p Ax. 1. æqualis erit p; et communis D E.
q Ax. 2. Tota igitur A E q toti D F est æqualis. Est autem et A B æqualis D C. Ergo duæ E A, A B duabus F D, D C æquales sunt, altera alteri, et angulus F D C æqualis
r 29. hujus. angulo E A B, exterior interiori r; basis igitur E B basi
s 4. hujus. F C est s æqualis, et E A B triangulum æquale triangulo F D C. Commune auferatur D G E. Reliquum igitur
t Ax. 3. trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est æquale t. Commune apponatur G B C triangulum. Ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F æquale erit. Parallelogramma igitur super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. *Q. E. D.*

[XXXVI.]
PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma A B C D, E F G H super æqualibus basibus B C, F G, et in eisdem parallelis A H, B G constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale esse. Conjungantur enim B E,



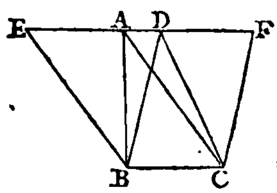
u Hyp. C H. Et quoniam æqualis u est B C ipsi F G, et F G æqualis ipsi E H; erit et B C ipsi E H æqualis. Sunt parallelæ, et ipsas conjungunt B E, C H. Quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes
x 33. hujus. conjungunt, æquales et parallelæ sunt x. Ergo E B, C H et æquales sunt, et parallelæ. Quare E B C H paral-

parallelogrammum est, et æquale parallelogrammo A B C D [y]; basim enim eandem habet B C, et in eisdem parallelis B C, A D constituitur. Simili ratione, et E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H est æquale. Basim enim eandem habet E H, et in eisdem parallelis E H, B G constituitur. Ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.* [y] 35. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR. [XXXVII.]

Triangula super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint triangula A B C, D B C super eâdem basi B C, et in eisdem parallelis A D, B C constituta. Dico A B C triangulum triangulo D B C æquale esse. Producatur A D ex utrâque parte in E, F puncta; et per B quidem ipsi C A parallela ducatur B E, [z] per C vero ipsi B D parallela C F. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum E B C A, D B C F; et parallelogrammum E B C A est æquale [a] parallelogrammo D B C F; etenim super eâdem sunt basi B C, et in eisdem parallelis B C, E F. Estque parallelogrammi quidem E B C A dimidium [b] A B C triangulum, cum diameter A B ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero D B C F dimidium [b] triangulum D B C; diameter enim D C ipsum bifariam secat. Quæ autem [c] æqualium dimidia sunt, inter se æqualia sunt. Ergo triangulum A B C triangulo D B C est æquale. Triangula igitur super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. *Q. E. D.*



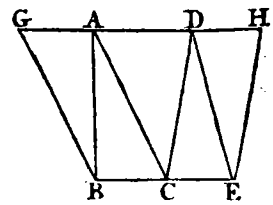
[z] 31. hujus.
[a] 35. hujus.
[b] 34. hujus.
[c] Ax. 7.

PROP. XXXVIII. THEOR. [XXXVIII.]

Triangula super basibus æqualibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Sint triangula A B C, D C E super æqualibus basibus B C, C E, et in eisdem parallelis B E, A D constituta. Dico A B C triangulum D C E triangulo æquale esse. Producatur enim A D ex utrâque parte in G, H puncta: et per B quidem ipsi C A parallela ducatur B G [d], per E [d] vero [d] 31. hujus.

[e] 31. hujus. vero ducatur E H parallela ipsi D C [e]. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum G B C A, D C E H. Atque est parallelogrammum G B C A æ-
[f] 36. hujus. quale [f] parallelogrammo D C E H; in æqualibus enim sunt basibus B C, C E, et in eisdem B E, G H parallelis. Parallelogrammi vero



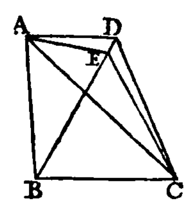
[g] 34. hujus. G B C A dimidium [g] est A B C triangulum, nam diameter A B ipsum bifariam secat: et parallelogrammi D C E H dimidium [g] est triangulum D C E, diameter enim D E ipsum secat bifariam. Quæ
[h] Ax. 7. autem æqualium dimidia sunt [h], inter se æqualia sunt. Ergo A B C triangulum triangulo D C E est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XXXIX.]

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C, D B C super eâdem basi B C constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Ducatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela,
[i] 31. hujus. ducatur [i] per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C ducatur. Æquale igitur est A B C triangulum
[k] 37. hujus. triangulo E B C [k], super eâdem enim est basi B C, et in eisdem B C, A E parallelis. Sed A B C
[l] ex hyp. triangulum triangulo D B C [l] est æquale. Ergo et triangulum D B C æquale est ipsi E B C triangulo, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam per A ipsi B C parallelam esse, præter ipsam A D. Ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis. *Q. E. D.*

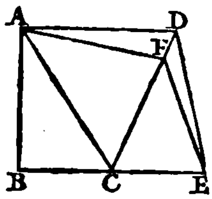


PROP.

PROP. XL. THEOR. [XL.]

Triangula æqualia super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C, C D E super æqualibus basibus B C, C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Ducatur enim A D. Dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur[m] per A ipsi B E parallela A F, et F E ducatur. Triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale[n], cum super æqualibus basibus et in eisdem parallelis B E, A F constituantur. Sed triangulum A B C æquale est triangulo D C E. Ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur A F ipsi B E est parallela. Similiter demonstrabimus neque aliam quampiam per A ipsi B E parallelam esse, præter A D. Ergo A D ipsi B E parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. *Q. E. D.*

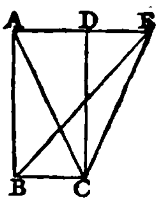


[m] 31. hujus.
[n] 38. hujus.

PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

Si parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim A B C D, et triangulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C, A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Jungatur enim A C. Triangulum igitur A B C triangulo E B C est æquale[o]; namque super eâdem basi B C et in eisdem B C, A E parallelis constituuntur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C[p], cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, et in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. *Q. E. D.*

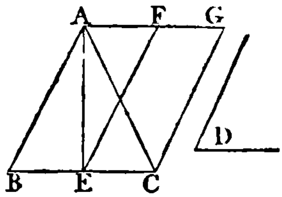


[o] 37. hujus.
[p] 34. hujus.

[XLII.] PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet dato triangulo A B C æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D

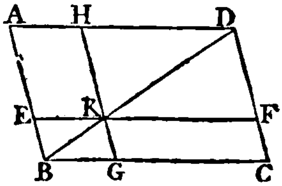


[q] 10. hujus. æquali. Secetur B C bifariam [q] in E; et junctâ A E, ad rectam lineam E C, atque ad punctum
[r] 23. hujus. in eâ E, constituatur angulus [r] C E F æqualis ipsi D; et per A quidem ipsi E C parallela
[s] 31. hujus. ducatur [s] A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G [s]. Parallelogrammum igitur est F E C G. Et quoniam B E
[t] 38. hujus. est æqualis E C, erit et A B E triangulum [t] triangulo A E C æquale, super æqualibus enim sunt basibus B E, E C, et in eisdem B C, A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. Est autem et paralle-
[u] 41. hujus. logrammum F E C G duplum [u] trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. Æquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetque C E F angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. *Q. E. F.*

[XLIII.] PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cujus diameter B D; et circa ipsam B D parallelogramma quidem sint F H, E G, quæ vero complementa dicuntur A K, K C. Dico A K complementum complemento K C æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est



[x] 34. hujus. A B C D, et ejus diameter B D, æquale [x] est A B D triangulum triangulo B D C. Rursus quoniam H K F D parallelogrammum est, cujus diameter D K, triangulum

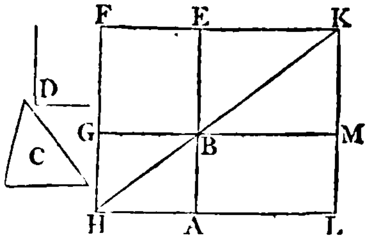
H D K

H D K triangulo D F K æquale [y] erit. Eâdem ratione, et triangulum K G B triangulo K E B eſt æquale. Cum igitur triangulum quidem B E K æquale ſit triangulo B G K, triangulum vero H D K ipſi D F K; erit triangulum B E K una cum triangulo H D K æquale triangulo B G K una cum D F K triangulo. Eſt autem et totum triangulum A B D æquale toti B D C. Reliquum igitur A K complementum reliquo complemento K C eſt æquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpatii eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.* [y] 34. hujus.

PROP. XLIV. PROBL. [XLIV.]

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æquali. Conſtituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui eſt æqualis D; et ponatur B E in directum ipſi A B, producaturque F G ad H; et per A alterutri ipſarum B G, E F parallela [a] ducatur A H, et H B jungatur. Quoniam igitur in parallelas A H, E F recta linea H F incidit, anguli A H F, H F E duobus rectis æquales [b] ſunt. Quare B H F, H F E duobus rectis ſunt minores. Quæ vero a minoribus, quam ſunt duo recti, ſi in infinitum producantur, convenient [c] inter ſe. Ergo H B, F E producta convenient. Producantur, et conveniant in K; perque K alterutri ipſarum E A, F H parallela [a] ducatur K L; et A H, G B ad L, M puncta producantur. Parallelogrammum igitur eſt H L K F, cujus diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem ſunt A G, M E; ea vero, quæ complementa dicuntur, L B, B F; ergo L B ipſi B F eſt [d] æquale. Sed et B F æquale eſt triangulo C. Quare et L B triangulo C æquale erit. Et quoniam G B E angulus æqualis [e] eſt angulo A B M, ſed et



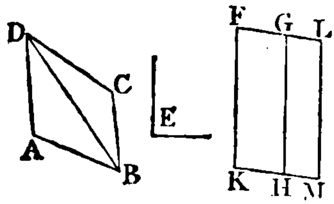
[a] 42. hujus.
[a] 31. hujus.
[b] 29. hujus.
[c] Ax. 12.
[d] 43. hujus.
[e] 15. hujus.

et æqualis angulo D, erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. *Q. E. F.*

[XLV.] PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus rectilineus E. Oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur D B, et constituatur triangulo A D B æquale [f] parallelogrammum F H in angulo H K F, qui est æqualis angulo E. Deinde ad rectam lineam G H applicetur triangulo D B C æquale [g] parallelogrammum G M, in angulo G H M, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum H K F, G H M, erit et H K F angulo G H M æqualis. Communis apponatur K H G; anguli igitur H K F, K H G angulis K H G, G H M æquales sunt. Sed H K F, K H G sunt æquales [h] duobus rectis. Ergo, et K H G, G H M duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam G H, et ad datum in eâ punctum H, duæ rectæ lineæ K H, H M non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt; in directum igitur [i] est K H ipsi H M. Et quoniam in parallelas K M, F G recta linea H G incidit, alterni anguli M H G, H G F æquales [h] sunt. Communis apponatur H G L; anguli igitur M H G, H G L angulis H G F, H G L sunt æquales. At anguli M H G, H G L æquales [h] sunt duobus rectis. Quare et anguli H G F, H G L duobus rectis æquales erunt. In directum [i] igitur est F G ipsi G L. Et quoniam K F ipsi H G et æqualis est et parallela; sed et H G ipsi M L; erit K F [k] ipsi M L et æqualis et parallela. Ipsasque conjungunt rectæ lineæ K M, F L; ergo et K M, F L æquales [l] et parallelæ sunt. Parallelogrammum igitur est K F L M. At cum triangulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo H F; triangulum vero D B C parallelogrammo G M, erit totum



[f] 42. hujus.
[g] 44. hujus.
[h] 29. hujus.
[i] 14. hujus.
[k] 30. hujus.
[l] 33. hujus.

A B C D

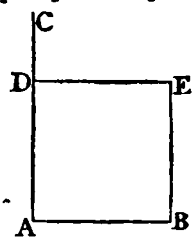
A B C D rectilineum toti parallelogrammo K F L M æquale. Dato igitur rectilineo A B C D æquale parallelogrammum conſtitutum eſt K F L M, in angulo F K M, qui eſt æqualis angulo E dato. *Q. E. F.*

Cor. Ex jam dictis manifeſtum eſt, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL. [XLVI.]

Super datâ rectâ lineâ quadratum deſcribere.

Sit data recta linea A B. Oportet ſuper ipſâ A B quadratum deſcribere. Ducatur [m] rectæ lineæ A B a puncto in eâ dato A ad rectos angulos A C; et ipſi A B æqualis [n] ponatur A D; perque punctum D ducatur [o] D E ipſi A B parallela, et per B ipſi A D parallela [o] ducatur B E. Parallelogrammum igitur eſt A D E B. Et A B quidem eſt [p] æqualis D E, A D vero ipſi [p] B E; ſed B A ipſi A D eſt æqualis. Quatuor igitur B A, A D, D E, E B inter ſe æquales ſunt, ideoque æquilaterum eſt A D E B parallelogrammum. Dico etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim in parallelas A B, D E recta linea incidit A D, anguli B A D, A D E duobus rectis ſunt [q] æquales. Rectus autem eſt B A D, ergo et A D E rectus erit. Parallelogrammorum vero ſpatiorum quæ ex oppoſito ſunt latera, et anguli, [p] inter ſe æqualia ſunt. Rectus igitur eſt uterque oppoſitorum A B E, B E D angulorum; et ob id rectangulum eſt A D B E. Oſtenſum autem eſt æquilaterum eſſe. [r] Quadratum igitur ſit neceſſe eſt, atque eſt ſuper rectâ lineâ A B deſcriptum. *Q. E. F.*



[m] 11. hujus.
[n] 3. hujus.
[o] 31. hujus.
[p] 34. hujus.
[q] 29. hujus.
[r] Def. 30.

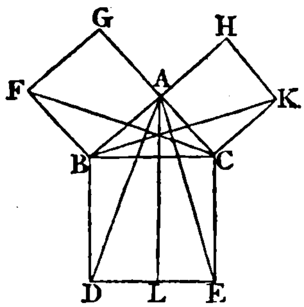
Cor. Hinc omne parallelogrammum, habens unum angulum rectum, eſt rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

In rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, æquale eſt quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum deſcriptum a rectâ

B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A, A C describuntur. Describatur [s] enim a B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis B A, A C quadrata [s] G B, H C; perque A alterutri ipsarum B D, C E parallela ducatur A L; et A D, F C jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum B A C, B A G rectus [t] est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in eâ punctum A, duæ rectæ lineæ A C, A G non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales efficiunt. In directum igitur [u] est C A ipsi A G. Eâdem ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est æqualis angulo F B A, rectus enim uterque est, communis apponatur A B C; totus igitur D B A angulus toti F B C est [x] æqualis. Quod cum duæ A B, B D duabus F B, B C æquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit et basis A D basi F C æqualis [y], et A B D triangulum triangulo F B C æquale. Estque [z] trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum, basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D, A L sunt parallelis: trianguli [z] vero F B C duplum est G B quadratum; rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B, G C. Quæ autem æqualium duplicia, inter se æqualia [a] sunt. Ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter junctis A E, B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. Totum igitur B D E C quadratum duobus quadratis G B, H C est æquale. Et describitur quidem B D E C quadratum a rectâ lineâ B C; quadrata vero G B, H C ab ipsis B A, A C. Quadratum igitur B E, a latere B C descriptum, æquale est quadratis, quæ describuntur a lateribus B A, A C. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur a latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur. *Q. E. D.*

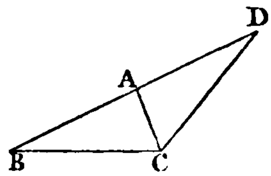


[s] 46. hujus.
[t] Def. 30.
[u] 14. hujus.
[x] Ax. 2.
[y] 4. hujus.
[z] 41. hujus.
[a] Ax. 6.

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR. [XLVIII.]

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Si trianguli A B C, quod ab uno latere B C describitur quadratum, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus B A, A C describuntur, dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim a puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturque A D ipsi B A æqualis; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato ex A B. Commune apponatur quadratum, quod ex A C. Ergo quadrata, quæ ex D A, A C, æqualia sunt quadratis, quæ ex B A, A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A, A C, æquale [b] est quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est [b] 47. hujus.
D A C: quadratis vero, quæ ex B A, A C, æquale ponitur quadratum, quod ex B C. Quadratum igitur, quod ex D C, æquale est ei, quod ex B C, quadrato. Ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A, A C æquales sunt duabus B A, A C; et basis D C est æqualis basi C B. Angulus [c] igitur D A C angulo B A C est æ- [c] 8. hujus.
qualis. Rectus autem est D A C. Ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

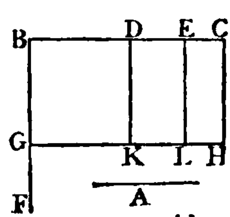
II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, ſub duabus rectis lineis contentum, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub rectâ lineâ inſectâ, et ſingulis partibus continentur.

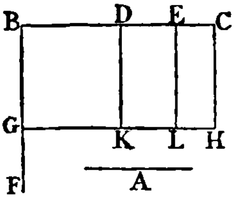
Sint duæ rectæ lineæ A, B C; et ſecta ſit B C utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum, rectis lineis A, B C contentum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub A et B D, ſub A et D E, ſub A et E C continentur, ſimul ſumptis. Ducatur enim a puncto B, ipſi B C ad rectos [a] angulos B F; atque ipſi A ponatur [b] æqualis B G; et per G



[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

quidem

[c] 31. primi. quidem ipsi B C parallela [c] ducatur G H; per D, E, C vero ducantur D K, E L, C H parallelæ [c] ipsi B G. Rectangulum igitur B H est æquale rectangulis B K, D L, E H simul sumptis. Atque est B H quidem, quod sub A et B C continetur, etenim continetur sub G B, B C; et B G ipsi A est æqualis. Rectangulum autem B K est quod continetur sub ipsis A et B D; continetur enim sub G B, B D, quarum G B est æqualis A. Et rectangulum D L est, quod continetur sub A et D E, quoniam D K, hoc est B G, ipsi A est æqualis; et similiter rectangulum E H est, quod sub A et E C continetur. Ergo rectangulum contentum sub A et B C est æquale rectangulis sub A et D B, sub A et D E, et sub A et E C simul sumptis. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, sub duabus rectis lineis contentum, est æquale eis, quæ sub rectâ lineâ insectâ, et singulis partibus continentur. *Q. E. D.*

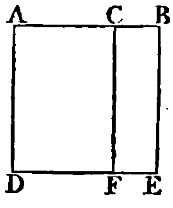


[II.] PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula, quæ sub totâ, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. Dico rectangulum, quod sub A B, B C continetur, una cum contento sub A B, A C, æquale esse quadrato, quod fit ex A B. Describatur [d] enim ex A B quadratum A D E B, et per C ducatur [c] alterutri ipsarum A D, B E parallela C F. Æquale igitur est A E rectangulis A F, C E. Atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum contentum sub B A, A C, etenim sub D A, A C continetur, quarum A D ipsi A B est æqualis; et rectangulum C E continetur sub A B, B C, cum B E sit æqualis A B. Ergo rectangulum sub A B et A C una cum rectangulo sub A B et B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangula, quæ sub totâ, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, quadrato. *Q. E. D.*

[d] 46. primi.
[c] 31. primi.

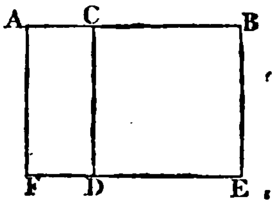


PROP.

PROP. III. THEOR. [III.]

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est et rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. Dico sub A B et B C rectangulum æquale esse rectangulo sub A C, B C una cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur [f] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: et per A alterutri ipsarum C D, B E parallela [g] ducatur A F. Æquale utique erit rectangulum A E ipsis A D, C E; et est A E quidem rectangulum contentum sub A B, B C; etenim sub A B, B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est, quod continetur sub A C, C B, cum D C ipsi C B sit æqualis: et D B est quadratum, quod fit ex B C. Ergo rectangulum sub A B, B C est æquale rectangulo sub A C, C B una cum quadrato, quod ex B C. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*



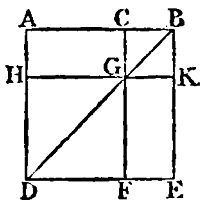
[f] 46. primi.

[g] 31. primi.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

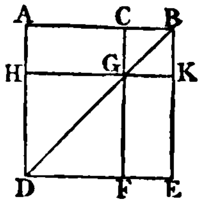
Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. Dico quadratum, quod fit ex A B, æquale esse et quadratis ex A C, C B, et ei rectangulo, quod bis sub A C, C B continetur. Describatur [h] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, et per C quidem alterutri ipsarum A D, B E parallela [i] ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B, D E ducatur [i] parallela H K. Et quoniam C F est parallela ipsi A D, et in ipsas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori



[h] 46. primi.

[i] 31. primi.

k 29. primi. interiori et oppofito A D B æqualis [k]: angulus autem
l 5. primi. A D B eft æqualis [l] angulo A B D, quod et latus B A æquale eft lateri A D. Quare C G B angulus angulo G B C eft æqualis: ac propterea latus B C lateri
m 6. primi. C G æquale [m]. Sed et latus C B æ-
n 34. primi. quale [n] eft lateri G K, et C G ipfi B K; ergo et G K eft æquale K B; et C G K B æquilaterum eft. Dico infuper etiam



rectangulum effe. Sed et rectangulum. Angulus enim K B C rectus eft. Parallelogrammum autem, habens
o Cor. 46. primi. unum angulum rectum, eft rectangulum [o]. Rectangulum igitur eft C G K B; fed oftenfum fuit et æquilaterum effe; quadratum igitur eft C G K B, quod quidem fit ex B C. Eâdem ratione et H F eft quadratum, quod fit ex H G, hoc eft, ex A C. Ergo H F, C K ex ipfis A C, C B
p 43. primi. quadrata funt. Et quoniam rectangulum A G eft æquale [p] rectangulo G E; atque eft A G, quod fub A C, C B continetur, eft enim G C ipfi C B æqualis; erit et G E æquale ei, quod continetur fub A C, C B; quare rectangula A G, G E æqualia funt ei, quod bis fub A C, C B continetur. Sunt autem et H F, C K quadrata ex A C, C B. Quatuor igitur H F, C K, A G, G E, et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis fub A C, C B continetur rectangulo, funt æqualia; fed H F, C K, A G, G E componunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B. Quadratum igitur ex A B æquale eft et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis fub A C, C B continetur rectangulo. Quare fi recta linea utcunque fecta fuerit; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei rectangulo, quod bis fub partibus continetur. *Q. E. D.*

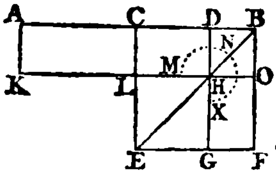
Cor. Ex hoc perfpicue conftat in quadratis fpatiis parallelogramma, quæ funt circa diametrum, quadrata effe.

PROP.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato.

Recta enim linea quævis A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum sub A D, B D, una cum quadrato, quod fit ex C D, æquale esse ei quod ex C B fit quadrato.



Describatur[q] enim ex B C quadratum C E F B: ducaturque B E; et per D quidem alterutri ipsarum C E, B F parallela[r] ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela[r] alterutri ipsarum C B, E F; et rursus per A ducatur alterutri C L, B O parallela[r] A K. Et quoniam C H complementum æquale[s] est complemento H F, commune apponatur D O; totum igitur C O toti D F est æquale. Sed C O est æquale[t] A L, quoniam et A C ipsi C B; ergo et A L æquale est D F. Commune apponatur C H. Totum igitur A H ipsis F D, D L æquale erit. Sed A H quidem est, quod sub A D, D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis[u]; F D, D L vero est gnomon M N X. Igitur M N X æqualis est ei, quod sub A D, D B continetur; commune apponatur L G, æquale [u] scilicet quadrato, quod ex C D. Ergo M N X gnomon, et L G, æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub A D, D B, et ei, quod fit ex C D, quadrato. Sed M N X gnomon, et L G, sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato, quod ex C D, æquale est ei quod ex C B fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato. *Q. E. D.*

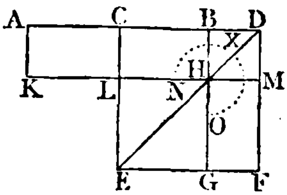
[q] 46. primi.
[r] 31. primi.
[s] 43. primi.
[t] 36. primi.
[u] Cor. 4. hujus.

PROP.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea quævis A B secetur bifariam in puncto C, et adjiciatur ipsi in directum B D. Dico rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale esse ei quod fit ex C D quadrato.



[v] 46. primi. Describatur [v] enim ex C D quadratum C E F D, et jungatur D E; per B alterutri ipsarum

[x] 31. primi. C E, D F parallela [x] ducatur B H G; et per H ducatur K L M parallela [x] alterutri ipsarum A D, E F; et adhuc per A alterutri C L, D M parallela [x] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit et rectangulum A L re-

[y] 36. primi. [z] 43. primi. ctangulo C H æquale [y]; sed C H æquale [z] est H F; ergo et A L ipsi H F æquale erit. Commune apponatur C M. Totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. Atque est A M, quod sub A D, D B continetur, etenim

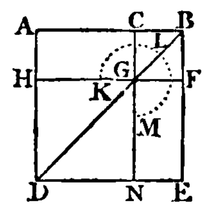
[a] Cor. 4. hujus. D M est [a] æqualis D B. Ergo et gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D, D B. Rursus commune apponatur L G, æquale [a] scilicet quadrato, quod ex C B. Rectangulum igitur sub A D, D B una cum quadrato, quod ex B C, æquale est gnomoni N X O et ipsi L G. Sed gnomon N X O, et L G componunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale est ei quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ, et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt et rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex A B, B C æqualia esse et rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, et ei, quod fit ex A C, quadrato. Describatur [b] enim ex A B quadratum A D E B, et figura construatur *. Itaque quoniam A G rectangulum æquale [c] est rectangulo G E, commune apponatur C F; quare totum A F toti C E est æquale. Rectangula igitur A F, C E dupla sunt rectanguli A F. Sed A F, C E sunt K L M gnomon, et quadratum C F; ergo K L M gnomon, et quadratum C F, dupla erunt rectanguli A F. Est autem id, quod bis sub A B, B C continetur, duplum ipsius A F; etenim B F est [d] æqualis B C. Gnomon igitur K L M, et quadratum C F, æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur. Commune apponatur H N, quod est ex A C quadratum. Ergo gnomon K L M, et quadrata C F, H N æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur, et quadrato ex A C. Sed gnomon K L M, et quadrata C F, H N componunt A D E B, et C F, quæ sunt ex A B, B C quadrata. Quadrata igitur ex A B, B C æqualia sunt rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, una cum eo, quod fit ex A C, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*



[b] 46. primi.

[c] 43. primi.

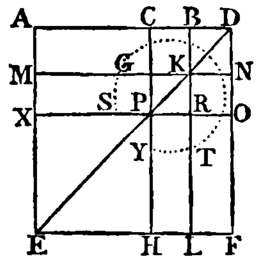
[d] Cor. 4. hujus.

* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, et duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, et quatuor complementa.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. Dico rectangulum quater sub A B, B C contentum, una cum quadrato, quod ex A C, æquale esse quadrato, quod ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, describitur. Producatur enim recta linea A B in D; et ipsi C B ponatur æqualis B D; describaturque ex A D quadratum A E F D; et dupla figura construatur. Quoniam igitur C B est [e] æqualis B D, atque est C B ipsi G K æqualis [f]; B D vero ipsi K N: erit et G K æqualis K N. Eâdem ratione, et P R ipsi R O est æqualis. Et quoniam C B est æqualis B D, et G K ipsi K N; erit rectangulum [g] quidem C K rectangulo B N; rectangulum vero G R ipsi R N æquale [g]. Sed C K est [h] æquale R N, complementa enim sunt parallelogrammi C O; ergo et B N æquale est G R, et quatuor rectangula B N, K C, G R, R N inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli C K. Rursus quodiam C B est æqualis B D, et B D quidem ipsi B K, hoc est, ipsi C G æqualis; C B vero ipsi G K, hoc est, G P: erit et C G æqualis G P. Est autem et P R ipsi R O æqualis, rectangulum igitur A G rectangulo M P, et rectangulum P L ipsi R F æquale erit. Sed M P est æquale P L; complementa enim sunt M L parallelogrammi; quare et A G ipsi R F est æquale. Quatuor igitur A G, M P, P L, R F inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius A G quadrupla. Ostensum autem est et quatuor C K, B N, G R, R N quadrupla esse C K. Quare octo continentia gnomonem S T Y ipsius A K quadrupla sunt. Et quoniam A K est, quod sub A B, B C continetur; etenim B K est æqualis B C; erit contentum quater sub A B, B C ipsius A K quadruplum. At demonstratus est gnomon S T Y quadruplus ipsius A K; quod igitur quater sub A B, B C continetur, æquale est gnomoni S T Y. Commune apponatur X H, quod quidem quadrato ex A C est [i] æquale. Ergo quod quater sub A B, B C continetur



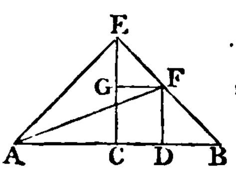
[e] hyp.
[f] 34. primi.
[g] 36. primi.
[h] 43. primi.
[i] Cor. 4. hujus.

tinetur, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ipſi S T Y gnomoni, et quadrato X H. Sed S T Y gnomon, et X H, totum ſunt A E F D quadratum, quod deſcribitur ex A D. Rectangulum igitur quater ſub A B, B C contentum, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ei, quod ex A D, hoc eſt ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quod quater ſub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato, quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur. *Q. E. D.*

PROP. IX. THEOR. [IX.]

Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales ſecta fuerit; quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur.

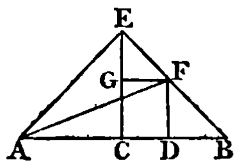
Recta enim linea quævis A B ſecta ſit in partes æquales ad C, et in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla eſſe. Ducatur [l] enim a puncto C ipſi A B ad rectos angulos C E, et utrivis ipſarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque E A, E B. [l] 11. primi.



Ac per D quidem ipſi C E parallela [m] ducatur D F; per F vero ipſi A B parallela [m] F G; et A F ducatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis C E; erit [n] et angulus E A C angulo A E C æqualis. Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui A E C, E A C uni recto æquales [o] erunt; et ſunt æquales inter ſeſe; utervis igitur ipſorum A E C, E A C recti eſt dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium eſt utervis ipſorum C E B, E B C. Quapropter et illi inter ſe ſunt æquales, et totus angulus A E B rectus eſt. Jam vero, cum in rectas parallelas, G F, C B recta E B incidat; angulus exterior E F G interiori F B D æqualis erit [p], cui etiam F E G æqualis. Anguli igitur E F G, F E G inter ſe æquales ſunt [q], ac proinde in triangulo G E F latera G E, G F inter ſe ſunt æqualia [r]. Pari ratione cum in rectas parallelas D F, C E recta B E incidat; angulus exterior B F D interiori B E C æqualis erit, cui etiam angulus F B D æqualis eſt. Anguli igitur B F D, F B D ſunt inter ſe æquales, ac proinde in triangulo D F B latera D F, D B ſunt inter ſe æqualia

[m] 31. primi.
[n] 5. primi.
[o] 32. Cor. 32. primi.
[p] 29. primi.
[q] Ax. 1.
[r] 6. primi.

qualia. Et quoniam A C eſt æqualis C E, erit et ex A C quadratum æquale quadrato ex C E. Quadrata igitur ex A C, C E dupla ſunt quadrati ex A C; quadratis autem ex A C, C E æquale[a] eſt quadratum ex E A, ſiquidem rectus eſt angulus A C E. Ergo quadratum ex E A quadrati ex A C eſt duplum. Rurſus quoniam E G æqualis eſt G F, et quadratum ex E G quadrato ex G F eſt æquale. Quadrata igitur ex E G et G F dupla ſunt quadrati ex G F; at quadratis ex E G, G F æquale[a] eſt quod ex E F quadratum. Ergo quadratum ex E F quadrati ex G F duplum erit. Æqualis[c] autem eſt G F ipſi C D; quadratum igitur ex E F duplum eſt quadrati C D. Sed et quatum ex A E quadrati ex A C eſt duplum. Ergo quadrata ex A E, E F dupla ſunt quadratorum ex A C, C D; quadratis vero ex A E, E F æquale[a] eſt ex A F quadratum; quoniam angulus A E F rectus eſt; quadratum igitur ex A F quadratorum ex A C, C D eſt duplum. Sed quadrato ex A F æqualia ſunt ex A D, D F quadrata; rectus enim eſt angulus, qui ad D. Ergo ex A D, D F quadrata dupla ſunt quadratorum ex A C, C D. Eſt autem D F ipſi D B æqualis; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, et in partes inæquales ſecta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur. *Q. E. D.*



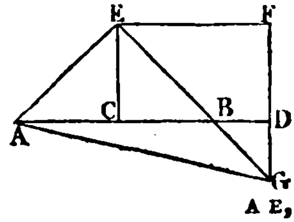
[a] 47. primi.
[c] 34. primi.

[X.]

PROP. X. THEOR.

Si recta linea ſecetur biſariam, et ipſi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ fiunt, utraque quadrata dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ conſtat, tanquam ab unâ lineâ, deſcribitur.

Recta enim linea A B ſecetur biſariam in C, et ipſi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla eſſe. Ducatur enim a puncto C ipſi A B ad rectos[u] angulos C E, et utrique ipſarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque A E,



[u] 11. primi.

A E, E B; et per E quidem ipsi A D parallela [x] ducatur [x] 31. primi.
E F; per D vero ducatur D F parallela [x] ipsi C E. Et
quoniam in parallelas E C, F D recta quædam linea E F
incidit, anguli C E F, E F D æquales [y] sunt duobus rectis. [y] 29. primi.
Anguli igitur F E B, E F D duobus rectis sunt minores.
Quæ autem a minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur, convenient inter se [z]. Ergo E B, [z] Ax. 12.
F D productæ ad partes B, D convenient. Producantur,
et conveniant in puncto G; et A G ducatur. Itaque
quoniam A C est æqualis C E, et angulus A E C angulo
E A C æqualis [a] erit; atqui est rectus qui ad C; uterque [a] 5. primi.
igitur ipsorum C A E, A E C est recti dimidium. Eadem
ratione, et recti dimidium est uterque C E B, E B C.
Quapropter et illi inter se sunt æquales, et totus A E B
est rectus. Jam vero anguli G B D, E B C, cum sint ad
verticem, sunt inter se æquales [b]. Quare et anguli G B D, [b] 15. primi.
B E C inter se æquales [c]. Et præterea, cum in rectas [c] Ax. 1.
parallelas G D, E C recta G E incidat; anguli alterni
B G D, B E C erunt inter se æquales [d]. Quare angulus [d] 29. primi.
D B G angulo D G B æqualis [c]. Ac proinde in triangulo
D B G, latera B D, D G sunt inter se æqualia [e]. Rursum [e] 6. primi.
cum in rectas parallelas B D, E F recta G E incidat; angulus
exterior G B D interiori G E F æqualis erit. Idem autem
G B D ipsi E G D æqualis. Quare anguli G E F, E G F inter
se sunt æquales, et in triangulo F G E, latera F G, F E inter
se æqualia. Et cum E C sit æqualis C A; et quadratum
ex E C æquale est ei, quod ex C A fit, quadrato. Ergo
quadrata ex E C, C A dupla sunt quadrati ex C A. Quadratis autem ex E C, C A æquale [f] est quadratum ex E A; [f] 47. primi.
quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum.
Rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est et ex
G F quadratum quadrato ex F E. Quadrata igitur ex
G F, F E quadrati ex E F sunt dupla. At quadratis ex
G F, F E æquale est [f] quod ex E G quadratum; ergo
quadratum ex E G duplum est quadrati ex E F; æqualis
autem est E F ipsi C D; quadratum igitur ex E G quadrati ex C D duplum erit. Sed ostensum est quadratum
ex E A duplum quadrati ex A C. Ergo ex A E, E G
quadrata quadratorum ex A C, C D sunt dupla. Quadratis vero ex A E, E G æquale est [f] quod ex A G quadratum; quadratum igitur ex A G duplum est quadratorum ex A C, C D. At quadrato ex A G æqualia [f] sunt
ex A D, D G quadrata; ergo quadrata ex A D, D G sunt

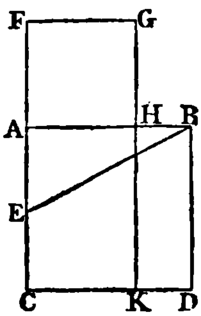
dupla quadratorum ex A C, C D; sed D G est æqualis D B; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ fiunt, utraque quadrata dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

[XI.]

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.

Sit data recta linea A B. Oportet ipsam A B ita secare, ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.



f 46. primi. Describatur [f] igitur ex A B quadratum A B C D, seceturque A C bifariam in E, et B E ducatur; deinde, productâ C A in F, ponatur ipsi B E æqualis E F; describaturque ex A F quadratum F G H A, et G H ad K producatur. Dico A B sectam esse in H, ita ut sub A B, B H rectangulum æquale sit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum A F; rectangulum sub C F, F A, una cum
g 6. hujus. quadrato ex A E, æquale [g] erit quadrato ex E F; sed E F est æqualis E B; rectangulum igitur sub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale est ei, quod fit ex E B, qua-
h 47. primi. drato. Quadrato autem ex E B æqualia sunt [h] quadrata ex B A, A E; etenim angulus ad A rectus est; ergo rectangulum sub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale est quadratis ex B A, A E. Commune auferatur quod ex A E fit quadratum. Reliquum igitur rectangulum sub C F, F A æquale est quadrato ex A B. Est autem rectangulum F K sub C F, F A; siquidem A F est æqualis F G: quadratum autem ex A B est ipsum A D. Rectangulum igitur F K æquale est quadrato A D. Commune auferatur A K. Ergo reliquum F H reliquo H D est æquale. Atqui est H D rectangulum sub A B, B H, cum A B sit æqualis B D, et F H est quadratum ex A H.

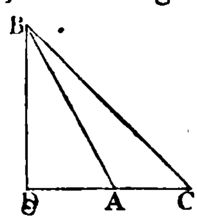
Rectan-

Rectangulum igitur ſub A B, B H quadrato ex A H æquale erit. Quare data recta linea A B ſecta eſt in H, ita ut ſub A B, B H rectangulum quadrato ex A H ſit æquale. *Q. E. F.*

PROP. XII. THEOR. [XII.]

In obtuſangulis triangulis, quod a latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum, majus eſt quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod ſcilicet protractum perpendicularis cadit, et lineâ aſſumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit obtuſangulum triangulum A B C, obtuſum angulum habens B A C; et ducatur [i] a puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico quadratum ex B C majus eſſe, quam quadrata ex B A, A C, rectangulo quod bis ſub C A, A D continetur. Quoniam enim recta linea C D ſecta eſt utcunque in puncto A; erit quadratum ex C D æquale [k] et quadratis ex C A, A D, et ei, quod bis ſub C A, A D continetur rectangulo. Commune apponatur ex D B quadratum. Quadrata igitur ex C D, D B æqualia ſunt et quadratis ex C A, A D, D B, et rectangulo quod bis ſub C A, A D continetur. Sed quadratis ex C D, D B æquale eſt [l] quadratum ex C B, rectus enim eſt angulus ad D, cum ſit B D perpendicularis. Quadratis vero ex A D, D B æquale eſt [l] quadratum ex A B. Quadratum igitur ex C B, æquale eſt et quadratis ex C A, A B, et rectangulo bis ſub C A, A D contento. Ergo quadratum ex C B majus eſt quam quadrata ex C A, A B, rectangulo quod bis ſub C A, A D continetur. In obtuſangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit a latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, et lineâ aſſumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtuſum. *Q. E. D.*

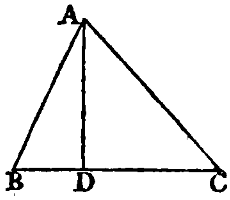


[i] 12. primi.
[k] 4. hujus.
[l] 47. primi.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod a latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata, quæ fiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumtâ ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B; et ducatur a puncto A [m] ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C, minus esse quam quadrata, quæ ex C B, B A fiunt, rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B, B D æqualia [n] et rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur, et quadrato ex D C. Commune apponatur ex A D quadratum. Quadrata igitur ex C B, B D, D A æqualia sunt et rectangulo bis sub C B, B D contento, et quadratis ex A D, D C. Sed quadratis ex B D, D A æquale est [o] ex A B quadratum, rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex A D, D C æquale [o] est quadratum ex A C; quadrata igitur ex C B, B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei, quod bis sub C B, B D continetur, rectangulo. Quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B, B A, rectangulo, quod bis sub C B, B D continetur. In acutangulis igitur triangulis, quadratum, quod a latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumptâ ad angulum acutum. *Q. E. D.*



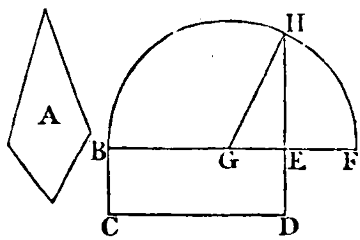
[m] 12. primi.
[n] 7. hujus.
[o] 47. primi.

PROP.

PROP. XIV. PROBL. [XIV.]

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. Constituatur [p] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum B C D E. Si igitur B E est æqualis E D, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est B D. Si B E, E D sint inæquales, producatur earum alterutra ad F, ponaturque ipsi E D æqualis E F. Deinde sectâ F B bifariam [q] in G; centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum G B, G F, semicirculus describatur B H F; producaturque D E in H, et G H ducatur. Quoniam igitur recta linea B F secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum sub B E, E F, una cum quadrato, quod fit ex E G [r], æquale quadrato ex G F. Est autem G F æqualis G H; rectangulum igitur sub B E, E F, una cum quadrato ex G E, æquale est quadrato ex G H. Sed quadrato ex G H æqualia [s] sunt ex H E, E G quadrata. Ergo rectangulum sub B E, E F, una cum quadrato ex E G, æquale est quadratis ex H E, E G. Commune auferatur ex E G quadratum. Reliquum igitur rectangulum sub B E, E F est æquale quadrato ex E H. Sed rectangulum sub B E, E F est ipsum B D parallelogrammum, quoniam E F est æqualis E D; ergo B D parallelogrammum quadrato ex E H est æquale. Parallelogrammum autem B D est æquale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex E H descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsâ E H describitur. *Q. E. F.*



[p] 45. primi.
[q] 10. primi.
[r] 5. hujus.
[s] 47. primi.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

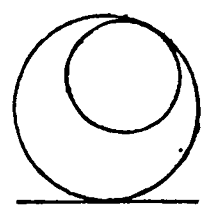
DEFINITIONES.

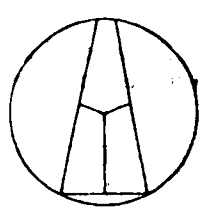
Definitio I. [II.]

RECTA linea circulum contingere dicitur, quæ circumferentiam circuli in occurſu non ſecat.

II. [III.]

Circuli contingere ſe dicuntur, quorum circumferentiæ in occurſu ſe mutuo non ſecant.





III. [IV.]

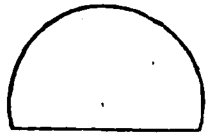
In circulo æqualiter diſtare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

IV. [V.]

Magis autem diſtare a centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

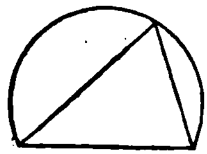
V.

[VI.] V.



Segmentum circuli est figura, quæ circumferentiâ circulari et lineâ rectâ continetur. Quæ quidem recta basis dicitur segmenti.

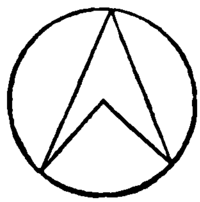
[VII.] VI.



Segmenti autem angulus est, qui basi, et circumferentiâ circulari comprehenditur.

[VIII.] VII.

In segmento est angulus, lineis rectis comprehensus a puncto quovis in circumferentiâ segmenti utcunque sumpto ad terminos basis ductis.



[IX.] VIII.

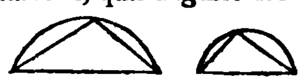
Quando autem continentes angulum rectæ lineæ intercipiunt circumferentiam; angulus in illâ consistere dicitur.

[X.] IX.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum consiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentiâ ipsis interceptâ.

[XI.] X.

Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.



DEF. I. AXIOMA.

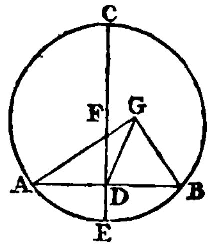
Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

PROPO-

PROPOSITIO I. PROBLEMA. [I.]

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C; oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipſo recta linea A B utcunque; quæ in puncto D bifariam [a] ſecetur. A puncto autem D ipſi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; et ſecetur C E bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli A B C centrum eſſe. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit G centrum, et G A, G D, G B ducantur. Itaque quoniam D A eſt æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D, D G duabus D B, G D æquales, altera alteri: et baſis G A æqualis [c] eſt baſi G B; ſunt enim ex centro G. Angulus igitur A D G angulo G D B eſt [d] æqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, [e] rectus eſt uterque æqualium angulorum. Ergo angulus G D B eſt rectus; ſed et rectus F D B; æqualis igitur eſt angulus F D B angulo G D B, major minori; quod fieri non poteſt. Quare G non eſt circuli A B C centrum. Similiter oſtendemus neque aliud eſſe, præter ipſum F. Ergo F centrum eſt circuli A B C. *Q. E. F.*



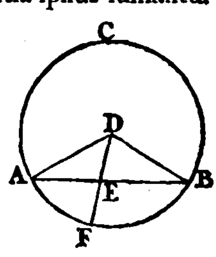
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea lineam quandam bifariam et ad angulos rectos ſecet, in ſecante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR. [II.]

Si in circumferentiâ circuli duo quævis puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea, intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentiâ ipſius ſumantur duo quævis puncta A, B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in rectâ A B punctum quodvis E; jungantur D A, D E, D B; et in D E, ſi opus ſit, productâ, capiatur D F ipſi D A vel D B æqualis. Quoniam D A eſt æqualis D B, erit [f] angulus D A B æqualis angulo D B A;

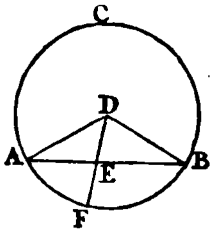


[f] 5. primi.

et

et quoniam trianguli D A E latus A E producitur, erit [g] angulus D E B angulo D A E major; angulus autem D A E æqualis eſt angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E eſt major. Sed majori angulo majus latus ſubtenditur; major igitur eſt D B ipſâ D E. Quare et D F, quæ ipſi D B ſumpta eſt æqualis, major eſt quam D E. Punctum igitur E punctis D, F neceſſario interjacet. Sed propter æquales D B, D F punctum F ad ipſam erit circuli circumferentiam. Punctum igitur E neceſſe eſt intus cadat. Similiter de alio omni puncto rectæ A B inter ipſa A, B oſtendi poteſt, intra circumferentiam eſſe. Si igitur in circumferentiâ &c. *Q. E. D.*

[g] 16. primi.



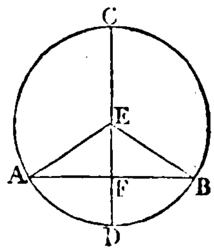
Cor. Hinc ſi recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

[III.] PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, et bifariam ſecabit.

Sit circulus A B C; et in ipſo recta linea per centrum ducta, C D, rectam lineam quandam, A B, non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipſam ſecare. Sumatur enim circuli A B C centrum [h], quod ſit E; et E A, E B jungantur. Quoniam igitur A F eſt æqualis F B, communis autem F E, duæ A F, F E duabus B F, F E æquales ſunt; et baſis E A baſi E B eſt æqualis. Ergo et angulus A F E angulo B F E æqualis [i] erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt [k] uterque æqualium angulorum; uterque igitur A F E, B F E eſt rectus. Quare recta linea C D per centrum ducta rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Si vero C D ſecet A B ad rectos angulos, dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt,

[h] 1. hujus.
[i] 8. primi.
[k] Def. 10. primi.



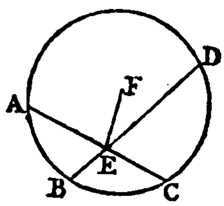
A F

AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem enim constructis,
quoniam EA, quæ ex centro, est æqualis EB, et angulus
EAF angulo [l] EBF æqualis erit; est autem et AFE [l] 5. primi.
rectus æqualis recto BFE; duo igitur triangula EAF,
EBF duos angulos duobus angulis æquales habent;
unumque latus uni lateri æquale, EF scilicet utrisque
commune, quod uni angulorum æqualium subtenditur.
Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [m] ha- m 26. primi.
bebunt; atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in
circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam
quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad
angulos rectos ipsam secabit; quod si ipsam secet ad
rectos angulos, et bifariam secabit. *Q. E. D.*

PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum; sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipso duæ rectæ lineæ AC,
BD se invicem secent in puncto E,
non ductæ per centrum. Dico eas
sese bifariam non secare. Si enim
fieri potest, secent sese bifariam, ita
ut AE sit æqualis EC, et BE ipsi
ED; sumaturque [n] centrum ABCD n 1. hujus,
circuli, quod sit E; et EF jungatur.
Quoniam igitur recta linea FE per



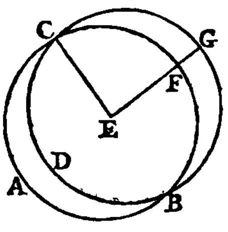
centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam
per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam
secabit [o]; quare rectus est FEA angulus. Rursus quo- o 3. hujus.
niam recta linea FE rectam lineam quandam BD non
ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos
ipsam [o] secabit; rectus igitur angulus est FEB. Osten-
sus autem est rectus et FEA. Ergo FEA angulus ipsi
FEB æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest.
Non igitur AC, BD sese bifariam secant. Quare si in
circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ
per centrum; sese bifariam non secabunt. *Q. E. D.*

PROP.

[V.] PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

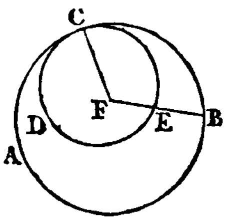
Duo enim circuli A B C, C D G se invicem secent in puncto C. Dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque E C; et sumatur in circumferentiâ C G D punctum aliquod G, quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta E G circumferentiæ A C B in F occurrat. Quoniam E centrum est circuli A B C, erit C E ipsi E F æqualis. Rursus quoniam E centrum est C D G circuli, æqualis est C E ipsi E G. Sed ostensa est C E æqualis E F; ergo E F ipsi E G æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur punctum E centrum est circulorum A B C, C D G. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. *Q. E. D.*



[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli A B C, C D E contingant sese intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. Si enim fieri potest, sit F; jungaturque F C, et sumatur in circumferentiâ A B C punctum aliquod B, quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta F B circumferentiæ C E D in E occurrat. Quoniam igitur F centrum est circuli A B C, æqualis est C F ipsi F B. Rursus quoniam F centrum est circuli C D E, erit C F æqualis F E. Ostensa autem est C F æqualis F B; ergo et F E ipsi F B est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F punctum centrum est circulorum A B C, C D E. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. *Q. E. D.*



PROP.

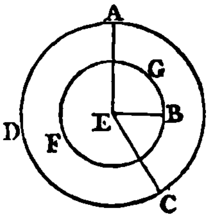
SCHOLION.*

Melius eſſet, noſtro ſaltem judicio, ſi pro duabus propoſitionibus, quintâ et ſextâ, hæc una ſubſtitueretur, quæ utramque complexa eſt.

PROPOSITIO.*

Circuli, eodem centro inæqualibus intervallis deſcripti, ſibi mutuo nullibi occurrunt.

Centro quodam communi E, intervallis inæqualibus E A, E B deſcripti ſint circuli A C D, F G B. Dico circulos illos ſibi mutuo non occurrere. Occurant enim, ſi fieri poteſt, in C. Jungatur E C. Recta E A ipſi E C æqualis erit[p]. Sed eidem E C æqualis erit E B[p]. Æquales igitur E A, E B[q]. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inæquales. Circuli igitur A C D, F G B, ſibi mutuo in puncto C non occurrunt. Pari ratione, nec in alio quovis puncto. Nullibi igitur. *Q. E. D.*



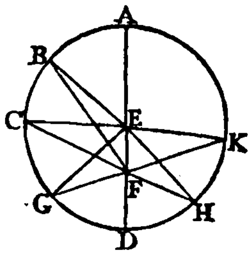
[p] Def. 15. primi.

[q] Ax. 1. primi.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, et ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in quâ centrum: minima vero reliqua: aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum tranſit, ſemper remotiore major eſt: at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utraſque partes minimæ.

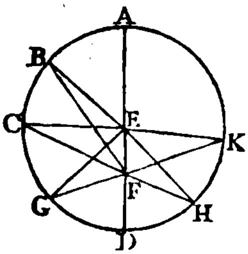
Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, et in ipſâ A D ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et a puncto F in circulum A B C D cadant quædam rectæ lineæ F B, F C, F G. Dico F A maximam eſſe, et F D minimam: aliarum vero, F B quidem majorem quam F C, et F C majorem quam F G. Jungantur enim B E, C E, G E. Et quoniam omnis trianguli duo latera[r] reliquo ſunt majora;



[r] 20. primi.

F

majora; erunt B E, E F majores quam B F. Est autem A E æqualis B E; ergo B E, E F ipsi A F sunt æquales; major igitur est A F quam F B. Rursus quoniam B E est æqualis C E, communis autem F E; duæ B E, E F duabus C E, E F æquales sunt: sed B E F angulus major est angulo C E F: basis igitur B F basi



24. primi. F C est [s] major. Eadem ratione, et C F major est quam F G. Rursus

20. primi. quoniam G F, F E majores [t] sunt quam G E, æqualis autem G E ipsi E D; erunt G F, F E majores quam E D; communis auferatur F E; ergo reliqua G F major est quam reliqua F D. Maxima igitur est F A, et F D minima: major vero B F quam F C, et F C quam F G major. Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum A B C D ad utrasque partes minimæ F D.

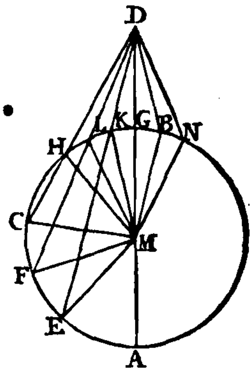
23. primi. Constituatur [u] enim ad lineam E F atque ad datum in eâ punctum E, angulo G E F æqualis angulus F E H: et F H jungatur. Quoniam igitur G E est æqualis E H, communis autem E F; duæ G E, E F duabus H E, E F æquales sunt: et angulus G E F est æqualis angulo

4 primi. H E F; basis igitur F G basi F H æqualis [x] erit. Dico a puncto F in circulum non cadere aliam ipsi F G æqualem. Si enim fieri potest, cadat F K; et quoniam F K est æqualis F G, estque ipsi F G æqualis F H, erit et F K ipsi F H æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

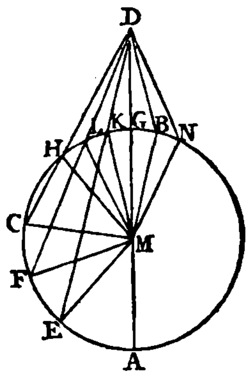
Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum tranſeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in cavam circumferentiam cadunt, maxima eſt, quæ per centrum tranſit; aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum, ſemper remotiore major eſt: at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima eſt, quæ inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero, quæ propinquior minimæ, ſemper remotiore eſt minor: duæ autem tantum æquales a puncto in circulum cadunt ad utraſque partes minimæ.



Sit circulus A B C, et extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam D A, D E, D F, D C: ſitque D A per centrum. Dico earum quidem, quæ in cavam A E F C circumferentiam cadunt, maximam eſſe D A, quæ per centrum tranſit; et minimam, quæ inter punctum D et diametrum A G interjicitur, videlicet D G: majorem autem D E quam D F; et D F majorem quam D C: earum vero, quæ in convexam circumferentiam H L K C cadunt, quæ propinquior eſt minimæ D G, ſemper remotiore eſſe minorem; hoc eſt, D K minorem quam D L, et D L minorem quam D H. Sumatur[y] enim centrum circuli A B C, [y] 1. hujus. quod ſit M, et jungantur M E, M F, M C, M H, M L, M K. Et quoniam A M eſt æqualis M E, communis apponatur M D; ergo A D eſt æqualis ipſis E M, M D; ſed E M, M D ſunt majores[z] quam E D: ergo et A D quam E D eſt major. [z] 20. primi. Rurſus quoniam æqualis eſt M E ipſi M F, communis apponatur M D; erunt E M, M D ipſis M F, M D æquales; at angulus E M D major eſt angulo F M D; baſis igitur E D baſi F D major [a] erit. Similiter demonſtrabimus, et F D [a] 24. primi. majorem eſſe quam C D. Ergo maxima eſt D A; major autem D E quam D F, et D F quam D C major. Præterea quoniam M K, K D ſunt majores[z] quam M D, et M K eſt

 æqualis

[b] Ax. 4. primi. æqualis M G; erit reliqua K D quam reliqua [b] G D major: quare G D minor quam K D. Et quoniam trianguli M L D in uno latere M D, duæ rectæ lineæ M K, K D intra constituuntur; erunt [c] M K, K D minores ipsis M L, L D, quarum M K est æqualis M L; reliqua igitur D K minor est quam reliqua D L. Similiter ostendemus, et D L quam D H minorem esse. Ergo D G minima est: minor vero D K quam D L, et D L minor quam D H. Dico etiam duas tantum æquales a puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. Constituatur ad rectam lineam M D,



[c] 21. primi.

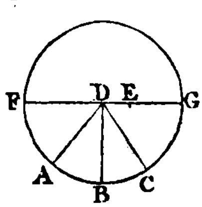
[d] 23. primi. ad datumque in eâ punctum M, angulo K M D æqualis [d] angulus D M B, et D B jungatur. Itaque quoniam M K est æqualis M B, communis autem M D; duæ K M, M D duabus B M, M D æquales sunt, altera alteri; et angulus K M D æqualis angulo B M D; basis igitur D K basi D B est æqualis [e]. Dico a puncto D aliam ipsi D K æqualem in circulum non cadere. Si enim fieri potest, cadat D N: et quoniam D K est æqualis D N, et D K ipsi D B est æqualis; erit et D B æqualis D N, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. *Q. E. D.*

[e] 4. primi.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque a puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A, D B, D C. Dico punctum D, quod sumitur, circuli A B C esse centrum. Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta D E in F, G producatur; ergo F G diameter est A B C circuli. Itaque quoniam in F G diametro circuli A B C sumptum est aliquod



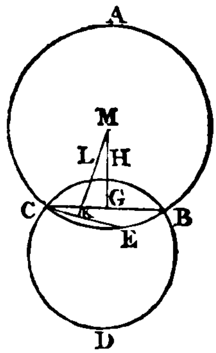
aliquod punctum D, quod non eft centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [f] autem D C quam D B, et D B quam D A; fed et æquales [g] D C, D B, D A; quod fieri non poteft; non igitur E centrum eft circuli A B C. Similiter oftendemus neque aliud punctum centrum effe, præter ipfum D. Ergo D circuli B C centrum erit. *Q. E. D.*

[f] 7. hujus.
[g] ex hyp.

PROP. X. THEOR. [X.]

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non fecat.

Nam fi fieri poteft circuli duo A B C, D B C tribus punctis B, C, et E, fe mutuo fecent. Jungantur C B, C E. Media dividatur recta C B in puncto G, et a puncto G ad perpendiculum educatur recta G H. Media etiam dividatur recta C E in puncto K, et a puncto K ad perpendiculum educatur K L. Rectæ G H, K L, duabus C B, C E non parallelis ad perpendiculum eductæ, fibi mutuo non erunt parallelæ. Occurrent igitur. Occurfus efto M. Jam cum puncta C, B ad peripheriam fint circuli A B C, recta C B intra circulum erit [h]. Recta autem H G rectam C B, in circulo A B C infcriptam, mediam dividit, et ad rectos [i]. Centrum igitur circuli A B C erit ad rectam G H [k]. Pari ratione centrum circuli A B C erit ad rectam K L, quæ rectam C E circulo infcriptam mediam dividit, et ad rectos. Centrum igitur circuli A B C commune eft rectarum G H, K L punctum. Sed harum rectarum folum eft commune M, punctum utique concurfûs. Punctum igitur M centrum eft circuli A B C. Sed fimili modo oftendemus punctum illud idem M circuli D B C centrum effe. Nimirum ad cujus peripheriam, æque ac alterius A B C, funt puncta B, C, E [l]. Circulorum igitur A B C, D B C, fe mutuo fecantium idem eft centrum M. Quod eft abfurdum [m]. Duo igitur circuli A B C, D B C in punctis tribus B, C, E fibi mutuo non occurrunt. Simili ratione nec in aliis tribus. Circulus igitur circulum &c. *Q. E. D.*

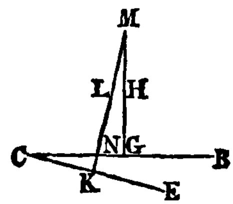


[h] 2. hujus.
[i] Per constr.
[k] Cor. 1. hujus.
[l] ex hyp.
[m] 5. hujus.

SCHOLION.*

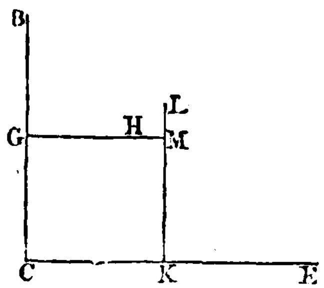
Illud autem quod aſſumpſimus, duas rectas non eſſe parallelas, ſi duabus aliis ad perpendiculum ſint non parallelis, ſic oſtendimus.

Duabus rectis C B, C E non parallelis ad perpendiculum ſint duæ G H, K L. Dico duas G H, K L non eſſe parallelas. Recta enim L K, quæ duarum C B, C E in C occurrentium alteri C E ad perpendiculum eſt[n], alteri C B vel occurret, vel ei parallela erit. Occurrat primum. Occurſus ſit N. In triangulo igitur C N K, angulus ad K rectus eſt. Duo igitur C N K, K C N ſimul ſumpti recto ſunt æquales[o]. Angulus igitur C N K, et illi æqualis L N G, recto minor. Sed angulus ad G rectus[p]. Duo igitur H G N, L N G ſimul ſumpti duobus rectis ſunt minores. Rectæ igitur G H, N L, ſeu K L, productæ inter ſe convenient[q]. Non ſunt igitur parallelæ.



[n] ex hyp.
[o] 32. primi.
[p] ex hyp.
[q] Ax. 12. primi.

CAS. 2. Sed parallela ſit K L ipſi C B. Si eadem K L parallela ſit ipſi G H, erunt G H, C B inter ſe parallelæ[r]. Quod eſt abſurdum. Cum recta G H illam C B in puncto G ad perpendiculum inſiſtat[s]. Non igitur ſunt parallelæ G H, K L. *Q. E. D.*



[r] 30. primi.
[s] ex hyp.

*Cor.** Rectis K L, G H, occurſum uſque in M productis, angulus ad M angulo ad C æqualis erit. Nam in caſu primo, triangulorum M G N, C K N, anguli ad G, K æquales ſunt. Uterque enim rectus. Sed anguli M N G, C N K æquales, ad verticem ſcilicet. Reliquus igitur N M G reliquo N C K æqualis.

In caſu ſecundo, quoniam L K, C B ſunt parallelæ, propter angulum ad K rectum[t], rectus erit angulus ad C[u]. Sed angulus ad G rectus[x]. Rectæ igitur G M, C K ſunt inter

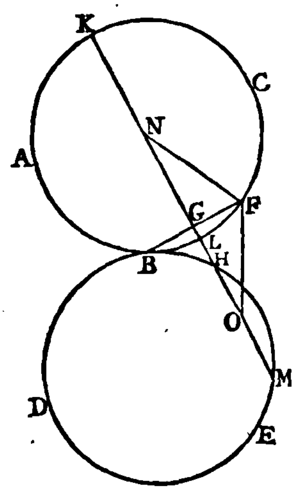
[t] ex hyp.
[u] 29. primi.
[x] ex hyp.

inter se parallelæ [y]. Figura igitur C M K C est parallelogrammum. Anguli igitur oppositi C et M sunt inter se æquales [z], et eorum uterque rectus est. [y] 28. primi. [z] 34. primi.

PROP. XI. THEOR. [XIII.]

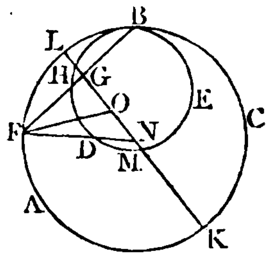
Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

Circuli duo A B C, D B E puncto B se mutuo contingant. Dico in alio præter B puncto sibi mutuo non occurrere. Nam si fieri potest, in alio puncto F occurrant. Juncta B F, media dividatur in puncto G; rectaque G K ad perpendiculum educta peripheriæ circuli A B C in punctis K, L, circuli autem D B E in H, M occurrat. Jam cum puncta B, F ad peripheriam sint circuli A B C, recta B F intra circulum cadet [a], et ad rectam G K erit centrum circuli A B C [b]. Simili modo ostendetur centrum circuli D B E esse ad rectam G K. Media igitur dividatur recta L K puncto N, rectaque H M puncto O. Erit N centrum circuli A B C, et O centrum circuli D B E. Jungantur F N, F O. Circuli A B C, D B E vel extra, vel intus, se mutuo contingunt. Contingant extra primum. [a] 2. hujus. [b] Cor. 1. hujus.



CAS. I. Jam cum N centrum sit circuli A B C, erunt N F, N L inter se æquales. Et cum O centrum sit circuli D B E, erunt O H, O F inter se æquales. Duæ igitur F N, F O simul sumptæ duabus N L, O H simul sumptis sunt æquales. Duæ autem N L, O H simul sumptæ totâ rectâ N O sunt minores. Duæ igitur F N, F O simul sumptæ rectâ O N sunt minores. Trianguli igitur N F O latera duo F N, F O simul reliquo minora. Quod est absurdum [c]. Circuli igitur se mutuo extra non contingunt plus uno punctis. [c] 20. primi.

CAS. 2. Sed intus contingant. Et interior ſit D B E. Jam cum O centrum ſit circuli D B E, æquales erunt inter ſe O F, O H. Addatur O N. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectæ N H ſunt æquales. Recta autem N H rectâ N L minor, propter peripheriam circuli D B E interiorem. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectâ N L ſunt minores. Sed cum punctum N centrum ſit circuli A B C, æquales inter ſe ſunt N L, N F. Duæ igitur O F, O N ſimul ſumptæ rectâ N F ſunt minores. Trianguli igitur F O N, latera duo O F, O N ſimul reliquo ſunt minora. Quod eſt abſurdum [d]. Circuli igitur intus ſe mutuo non contingunt plus uno punctis. Quare circulus circulum &c. *Q. E. D.*

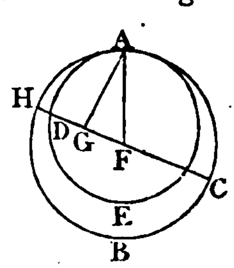


[d] 20. primi.

[XI.] PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, et ſumantur centra ipſorum; recta linea, ipſorum centra conjungens, producta, in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli A B C, A D E ſeſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem A B C centrum, quod ſit F, circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam a puncto G ad F ductam, ſi producatur, in punctum A cadere. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat ut F G D H; et A F, A G jungantur. Itaque quoniam A G, G F majores [d] ſunt quam F A, hoc eſt, quam F H, communis auferatur F G; reliqua igitur A G major eſt quam reliqua G H. Sed A G eſt æqualis G D; ergo G D ipſâ G H eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet; quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea, ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. *Q. E. D.*



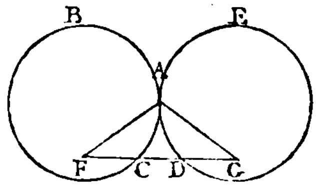
[d] 20. primi.

PROP.

PROP. XIII. THEOR. [XII.]

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

Duo enim circuli A B C, A D E ſeſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem A B C centrum, quod ſit F; circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam, quæ a puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, cadat ut F C D G; et F A, A G jungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli A B C, erit A F æqualis F C. Rurſus quoniam G centrum eſt A D E circuli, erit A G ipſi G D æqualis. Oſtenſa eſt autem et A F æqualis F C; ſunt igitur F A, A G ipſis F C, D G æquales, ergo tota F G major eſt quam F A, A G; ſed et minor[c]; quod fieri non poteſt. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea per contactum A non tranſibit; quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. *Q. E. D.*



[c] 20. primi.

SCHOLION.*

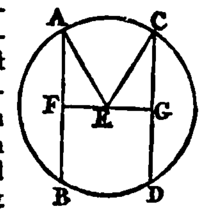
Inverſam Theoni Propoſitionum ſeriem in melius mutavimus. Primum ſcilicet docendum erat, circulorum contactus quid ſit; merum nempe punctum geometricum; dein demonſtrandum, rectam centra jungentem in punctum illud neceſſario incidere. Hæc nobiſcum meditati, in locum undecimæ revocandam judicavimus, quæ Theoni decima tertia eſt.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant; et quæ æqualiter a centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus A B D C, et in ipſo æquales rectæ lineæ A B, C D. Dico eas a centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli A B D C centrum, quod ſit E, et ab ipſo ad A B, C D perpendiculares ducantur E F, E G; et A E, E C jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta E F rectam lineam quandam A B non ductam

ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit[f]; quare A F est æqualis F B, ideoque A B ipsius A F dupla. Eâdem ratione, et C D dupla est C G; atque est A B ipsi C D æqualis; æqualis igitur et A F ipsi C G; et quoniam A E est æqualis E C, erit et quadratum ex A E quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia sunt ex A F, F E quadrata[g]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex E C æqualia sunt quadrata ex E G, G C, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex A F, F E æqualia sunt quadratis ex C G, G E, quorum quadratum ex A F quadrato ex C G æquale, etenim æqualis est A F ipsi C G: reliquum igitur quod fit ex F E quadratum, æquale est reliquo quod ex E G; ac propterea F E ipsi E G est æqualis. In circulo autem æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales[h] sunt. Ergo A B, C D a centro æqualiter distant. Sed si A B, C D æqualiter distent a centro, hoc est, si æqualis sit F E ipsi E G; dico A B ipsi C D æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A B duplam esse ipsius A F, C D duplam ipsius C G. Et quoniam æqualis est A E ipsi E C, erit et ex A E quadratum quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia[g] sunt quadrata ex E F, F A; quadrato autem ex E C æqualia[g] quadrata ex E G, G C. Quadrata igitur ex E F, F A quadratis ex E G, G C æqualia sunt, quorum quadratum ex E G æquale est quadrato ex E F, est enim E G ipsi E F æqualis: reliquum igitur ex A F quadratum æquale est reliquo ex C G: ergo A F ipsi C G est æqualis. Atqui est A B ipsius A F dupla, et C D dupla ipsius C G. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales. *Q. E. D.*



[f] 3. hujus.

[g] 47. primi.

[h] Def. 3. hujus.

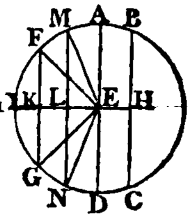
[XV.]

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, centrum E; et propinquior quidem diametro A D sit B C; remotior vero

vero F G. Dico A D maximam esse, et B C majorem quam F G. Ducantur enim a centro E ad B C, F G perpendiculares E H, E K. Et quoniam B C propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem F G; erit E K quam E H major. Ponatur ipsi E H æqualis E L; et per L ipsi E K ad rectos angulos ducta L M in N producatur; et jungantur E M, E N, E F, E G. Quoniam igitur E H est æqualis E L, erit et B C ipsi M N æqualis [l]. Rursus quoniam æqualis est A E ipsi E M, et D E ipsi E N; erit et A D ipsis M E, E N æqualis; sed M E, E N [k] majores sunt quam M N; ergo et A D major est quam M N; et M N est æqualis B C, erit igitur A D quam B C major. Quod cum duæ E M, E N duabus F E, E G æquales sint, angulusque M E N major angulo F E G; et basis M N basi F G major [l] erit. Ostensa autem est M N æqualis B C; ergo et B C quam F G est major. Maxima igitur est A D diameter, et B C major quam F G. Quare in circulo maxima est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. *Q. E. D.*



[l] 14. hujus.
[k] 20. primi.
[l] 24. primi.

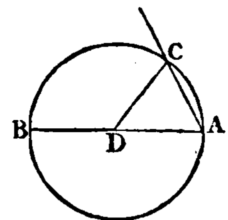
PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

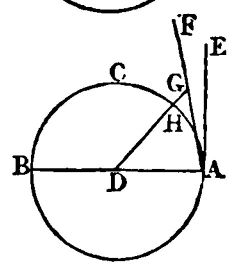
Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum; et in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus A B C circa centrum D, et diametrum A B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ipsi A B ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus, ut A C; et D C jungatur. Itaque quoniam æqualis est D A ipsi D C, erit et angulus D A C angulo A C D æqualis [m]; rectus autem est D A C; ergo et A C D est rectus; ac propterea anguli D A C, A C D duabus rectis æquales sunt; quod fieri non potest [n]. Non igitur a puncto A ipsi B A ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat necesse est. Cadat ut A E. Dico in locum, qui inter rectam lineam A E et circumferentiam C H A interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat ut F A, et

[m] 5. primi.
[n] 17. primi.

[o] 12. primi. et a puncto D ad F A perpendicularis[o] ducatur D G. Et quoniam rectus est angulus A G D, minor autem recto D A G, erit D A
[p] 19. primi. quam D G major[p]; æqualis autem est DA ipsi DH; major igitur est DH ipsâ D G, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui rectâ lineâ B A et circumferentiâ C H A continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentiâ C H A et rectâ lineâ A E omni angulo rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, aut aliquis minor contento C H A circumferentiâ et rectâ lineâ A E; in locum, qui inter circumferentiam C H A et rectam lineam A E interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorem quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, qui scilicet rectis lineis continetur; minorem vero contento circumferentiâ C H A, et A E rectâ lineâ.
[q] ex prius demonstratis. Non cadit autem[q]; non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, neque minor contento circumferentiâ C H A et A E rectâ lineâ. *Q. E. D.*





Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere.

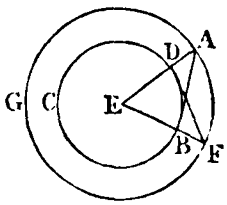
[XVII.]

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus B C D. Oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum B C D contingat. Sumatur centrum circuli E; et junctâ A E, quæ circumferentiæ B D C in D occurrat, centro quidem E, intervallo autem E A, circulus A F G describa-

describatur; et a puncto D ipsi E A ad rectos angulos [r] ducatur D F, quæ circumferentiæ A F G in F occurrat; jungaturque E F, quæ circumferentiæ C D B in B occurrat; jungatur denique A B. Dico a puncto A ductam esse A B, quæ circulum B C D contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum B C D, A F G; erit E A æqualis E F, et E D ipsi E B. Duæ igitur A E, E B duabus F E, E D æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. Ergo basis D F basi A B est [s] æqualis, triangulumque D E F æquale triangulo E B A, et reliqui anguli reliquis angulis. Æqualis igitur est angulus E B A angulo E D F; et E D F rectus est; quare et rectus E B A; atque est E B ex centro. Quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [t]. Ergo A B contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea A B, quæ circulum B C D contingit. *Q. E. F.*

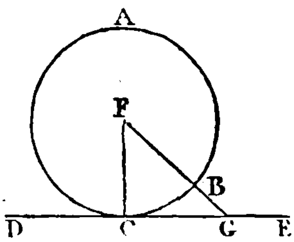


[r] 11. primi.
[s] 4. primi.
[t] 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Si circulum contingat quædam recta linea, a centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in puncto C; et circuli A B C centrum sumatur F, a quo ad C ducatur F C. Dico F C ad ipsam D E perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur a puncto F ad D E perpendicularis [u] F G. Quoniam igitur angulus F G C rectus est, erit G C F acutus [x], ac propterea F G C angulus major angulo F C G. Majorem autem angulum majus latus [y] subtendit; major igitur est F C quam F G. Æqualis autem F C ipsi F B; ergo F B ipsa F G est major, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur F G est perpendicularis ad D E. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter ipsam F C. Ergo F C ad D E est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a centro autem



[u] 12. primi.
[x] 32. primi.
[y] 19. Primi.

autem

autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Rectæ duæ, quæ in oppositis diametri terminis peripheriam circuli contingunt, inter se sunt parallelæ.

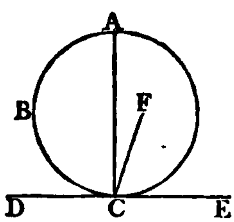
Cor. 2.* Si duæ rectæ parallelæ circulum contingant, in oppositis diametri terminis necessario illum contingent; neque plures duabus parallelæ eundem circulum contingere possunt.

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli centrum erit.

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in C, et a puncto C ipsi D E ad rectos angulos ducatur C A. Dico in ipsâ A C circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur C F. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea D E, et a centro ad contactum ducta est F C; erit F C ad ipsam D E perpendicularis [z]. Rectus igitur angulus est F C E; est autem et A C E rectus [a]; ergo F C E angulus est æqualis angulo A C E, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F centrum est A B C circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsâ A C. Quare si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli erit centrum. *Q. E. D.*



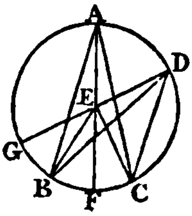
[z] 18. hujus.
[a] ex hyp.

[XX.]

PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus A B C, ad cujus centrum quidem angulus sit B E C, ad circumferentiam vero B A C, et eandem circumferentiam B C pro basi habeant. Dico B E C angulum anguli B A C duplum esse. Jungatur enim A E, et et ad F producatur. Itaque quoniam E A eſt æqualis E B, erit et angulus E A B angulo E B A [b] æqualis. Anguli igitur E A B, E B A duplices ſunt ipſius anguli E A B; ſed angulus B E F eſt æqualis [c] angulis E A B, E B A; ergo B E F angulus anguli E A B eſt duplex. Eâdem ratione et angulus F E C duplex eſt ipſius E A C. Totus igitur B E C totius B A C duplex erit. Rurſus inflectatur, et ſit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. Similiter oſtendemus angulum G E C anguli G D C duplum eſſe; quorum G E B duplus eſt ipſius G D B. Ergo reliquus B E C reliqui B D C eſt duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum, duplex eſt ejus, qui ad circumferentiam eſt, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant. *Q. E. D.*



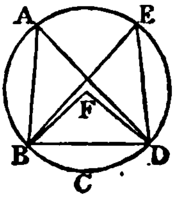
[b] 5. primi.

[c] 32. primi.

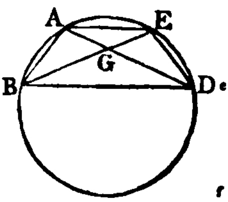
PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

In circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt.

Sit circulus A B C D E, et in eodem ſegmento B A E D anguli ſint B A D, B E D. Dico eos inter ſe æquales eſſe. Sumatur enim circuli A B C D E centrum, quod ſit F; junganturque B F, F D. Quoniam angulus quidem B F D eſt ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, et circumferentiam eandem B C D pro baſi habent; erit B F D angulus [d] anguli B A D duplus. Eâdem ratione angulus B F D duplus eſt etiam anguli B E D. Ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. Si anguli B A D, B E D ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales [e] omnibus angulis trianguli D E G. Et anguli A B E, A D E ſunt æquales per hactenus demonſtrata, et anguli A G B, D G E ſunt etiam æquales [f], ad verticem enim ſunt. Quare et reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt. *Q. E. D.*



[d] 20. hujus.



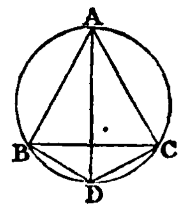
[e] 32. primi.

[f] 15. primi.

PROP.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

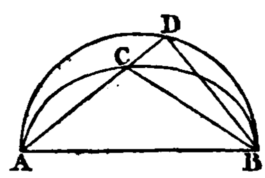


Sit circulus A B D C, et in ipso quadrilaterum A B D C. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur A D, B C. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales[g], erunt trianguli A B C tres anguli C A B, A B C, B C A æquales duobus rectis. Sed angulus A B C est æqualis [h] angulo A D C, in eodem enim sunt segmento A B D C. Et angulus A C B æqualis[h] ipsi A D B, quod sint in eodem A C D B segmento: totus igitur angulus B D C angulis A B C, A C B æqualis est. Communis apponatur B A C angulus; erunt anguli B A C, A B C, A C B angulis B A C, B D C æquales. Sed B A C, A B C, A C B sunt æquales [g] duobus rectis; ergo et anguli B A C, B D C duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque A B D, A C D duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

[g] 32. primi.
[h] 21. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum segmenta similia, et incongrua ex eâdem parte non constituentur.



Si enim fieri potest, super eâdem rectâ lineâ A B duo circulorum segmenta similia, et incongrua constituantur ex eâdem parte, A C B, A D B; circumferentiæ A C B, A B D, cum in punctis duobus A, B sibi mutuo occurrant, nullum aliud punctum præter illa A, B commune habent [i]. Sed inter A, B altera omnis interior, altera exterior omnis erit. Capiatur in interiori punctum quodvis C; junctaque A C exteriori producta in D occurrat; et C B, B D jungantur. Itaque quoniam segmentum A C B simile est segmento A D B, similia autem circulorum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt [k] æquales; erit A C B angulus æqualis angulo A D B, exterior

[i] 10. hujus.
[k] Def. 10. hujus.

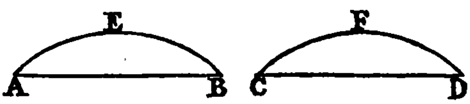
terior interiori; quod fieri non poteſt [l]. Non igitur ſu- [l] 16. primi.
per eâdem rectâ lineâ, duo circulorum ſegmenta ſimilia et incongrua ex eâdem parte conſtituentur. *Q. E. D.*

Cor. * Segmentorum inæqualium ſuper eâdem baſi ad partes eaſdem conſtitutorum, quod angulum majorem capit, ejus peripheria interior omnis erit.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta inter ſe æqualia ſunt.

Sint enim ſuper æqualibus rectis lineis A B, C D ſimilia circulorum ſegmenta A E B, C F D. Dico ſegmentum A E B ſegmento C F D æquale eſſe. Applicato enim



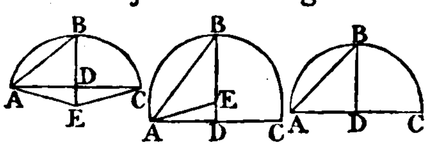
A E B ſegmento ſegmento C F D, et poſito puncto quidem A in C, rectâ vero lineâ A B in C D; congruet et B punctum puncto D, propterea quod A B ipſi C D ſit æqualis. Congruente autem rectâ lineâ A B rectæ C D; congruet et A E B ſegmentum ſegmento C F D [m]; con- [m] 23. hujus.
gruens autem, ipſi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.*

Cor. * Segmentorum ſimilium, baſibus æqualibus inſiſtentium, peripheriæ ſunt inter ſe æquales.

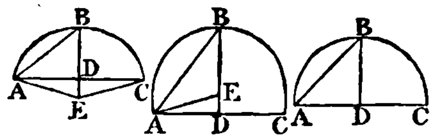
PROP. XXV. PROBL. [XXV.]

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.

Sit datum circuli ſegmentum A B C. Oportet deſcribere circulum cujus A B C eſt ſegmentum. Secetur



A C bifariam [n] in D: et a puncto D ipſi A C ad rectos [n] 10. primi.
angulos ducatur [o] D B, et A B jungatur. Vel igitur [o] 11. primi.
angulus A B D major eſt angulo B A D, vel minor, vel ipſi æqualis. Sit primum major, et ad rectam lineam



B A, atque ad datum in eâ punctum A constituatur angulus B A E æqualis [p] angulo A B D; productæ autem B D, A E sibi invicem in E occurrant, jungaturque E C. Quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo B A E, [q] erit et B E recta linea ipsi E A æqualis: et quoniam A D est æqualis D C, communis autem D E; duæ A D, D E duabus C D, D E æquales sunt, altera alteri; et angulus A D E æqualis angulo C D E, rectus enim uterque est; ergo et basis A E basi E C est [r] æqualis. Sed ostensa est A E æqualis E B; quare et B E ipsi E C est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ A E, E B, E C, inter se æquales sunt. Centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum A E, E B, E C, circulus descriptus etiam per reliqua [s] transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. Sed et illud constat, segmentum A B C semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter, et si angulus A B D sit æqualis angulo B A D; recta A D utrique ipsarum B D, D C æqualis erit; tres igitur rectæ lineæ A D, D B, D C inter se æquales erunt; quapropter erit D circuli descripti centrum, et segmentum A B C semicirculus. Si vero angulus A B D minor sit angulo B A D; constituatur ad rectam lineam B A, et ad punctum in eâ datum A, angulo A B D æqualis angulus B A E intra segmentum A B C; erit E centrum in ipsâ D B, atque erit A B C segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. *Q. E. F.*

p 23. primi.
q 6. primi.
r 4. primi.
s 9. hujus.

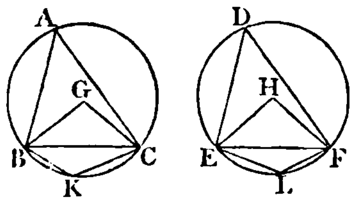
[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli A B C, D E F, et in ipsis æquales anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico B A C circumferentiam circumferentiæ E D F æqualem esse; jungantur enim

B C,

B C, E F. Quoniam æquales sunt A B C, D E F circuli, erunt et quæ ex centris æquales[t]; duæ igitur B G, G C duabus E H, H F æquales sunt: et angulus ad G æqualis angulo ad H; ergo et basis B C basi E F est [u] æqualis. Rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum B A C simile [v] erit segmento E D F: et sunt super æqualibus rectis lineis B C, E F. Segmentorum autem similium, basibus æqualibus insistentium, circumferentiæ æquales sunt[w]. Æquales sunt igitur circumferentiæ B A C, E D F.



[t] Def. 1.
[u] 4. primi.
[v] Def. 11.
[w] Cor. * 24. hujus.

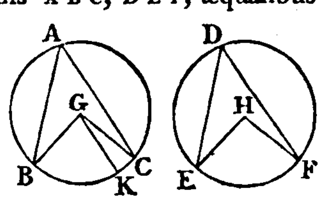
Dico insuper circumferentias B K C, E L F inter se æquales. Sumatur enim in circumferentia B K C punctum quodvis K, et in E L F punctum quodvis L. Jungantur B K, C K, E L, F L. Quadrilateri A B K C circulo inscripti anguli duo oppositi B A C, B K C simul sumpti duobus rectis sunt æquales[x]. Simili ratione, quadrilateri D E L F anguli duo oppositi E D F, E L F simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duo igitur B A C, B K C simul sumpti duobus E D F, E L F simul sumptis sunt æquales. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis est[y]. Reliquus igitur B K C reliquo E L F æqualis erit. Similia igitur sunt segmenta B K C, E L F. Sed rectis æqualibus B C, E F insistunt. Circumferentias igitur B K C, E L F æquales habent. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*

[x] 22. hujus.
[y] ex hyp.

PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

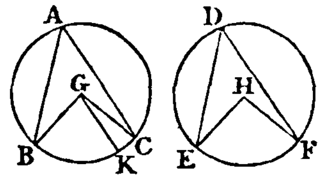
In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis A B C, D E F, æqualibus circumferentiis B C, E F insistant anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico angulum B G C angulo E H F, et angulum B A C angulo E D F æqualem



 esse.

esse. Si quidem inæquales sint anguli B G C, E H F; alter ipsorum erit major. Sit major B G C, et constituatur ad rectam lineam B G, et ad punctum in ipsâ G, angulo E H F æqualis[y] angulus B G K. Æquales autem anguli æqualibus insistunt[z] circumferentiis, quando ad centra fuerint; ergo circumferentia B K æqualis est circumferentiæ E F. Sed circumferentia E F æqualis est ipsi B C; ergo et B K ipsi B C est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus B G C angulo E H F: ergo est æqualis. Atque est anguli quidem B G C dimidium angulus, qui ad A; anguli vero E H F dimidium qui ad D; angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*



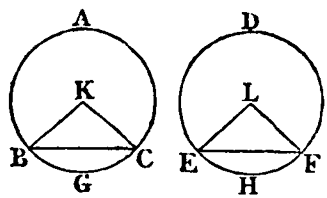
[y] 23. primi.
[z] 26. hujus.

[XXVIII.]

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales rectæ lineæ B C, E F, quæ circumferentias quidem B A C, E D F majores auferant, circumferentias vero B G C, E H F minores. Dico circumferentiam B A C majorem majori circumferentiæ E D F, et minorem circumferentiam B G C minori E H F æqualem esse. Sumantur enim centra[a] circulorum K, L; junganturque B K, K C, E L, L F. Quoniam circuli æquales sunt, erunt et quæ ex centris æquales[b]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duabus E L, L F; et basis B C æqualis est basi E F; ergo angulus B K C angulo E L F est[c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint[d]; quare circumferentia B G C æqualis est circumferentiæ E H F. Sed et totus A B C circulus toti D E F est æqualis; reliqua igitur circumferentia



[a] 1. hujus.
[b] Def. 1.
[c] 8. primi.
[d] 26. hujus.

ferentia B A C reliquæ E D F æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. *Q. E. D.*

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

In æqualibus circulis, æquales sunt rectæ lineæ quæ circumferentias æquales subtendunt.

Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales assumantur circumferentiæ B G C, E H F; et B C, E F jungantur. Dico rectam lineam B C rectæ E F æqualem esse. Sumantur enim centra [e] circulorum K, L; et jungantur B K, K C, E L, L F. Quoniam igitur circumferentia B G C est æqualis circumferentiæ E H F, erit et angulus B K C angulo E L F æqualis [f]; et quoniam circuli A B C, D E F sunt æquales, et quæ ex centris æquales erunt [g]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duobus E L, L F; et æquales angulos continent; quare basis B C, basi E F est [h] æqualis. In æqualibus igitur circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. *Q. E. D.*

Vide figur. Prop. præcedentis.

[e] 1. hujus.

[f] 27. hujus.

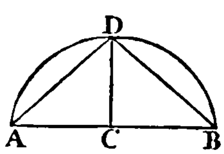
[g] Def. 1.

[h] 4. primi.

PROP. XXX. PROBL. [XXX.]

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia A D B. Oportet A D B circumferentiam bifariam secare. Jungatur A B, et in C bifariam [i] secetur. A puncto autem C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C D; et jungantur A D, D B. Quoniam igitur A C est æqualis C B, communis autem C D; duæ A C, C D duabus B C, C D æquales sunt; et angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque est: ergo basis A D, basi B D est [k] æqualis. Æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales [l] auferunt. Quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. *Q. E. F.*



[i] 10. primi.

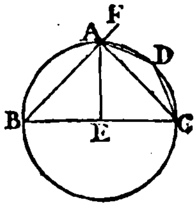
[k] 4. primi.

[l] 28. hujus.

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto; et qui in minori, major recto: et inſuper majoris quidem ſegmenti angulus, recto major eſt, minoris vero ſegmenti angulus, recto minor.

Sit circulus A B C D, cujus diameter B C, centrum autem E; et jungantur B A, A C, A D, D C. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo B A C, rectum eſſe; qui vero in ſegmento A B C, quod majus eſt ſemicirculo, videlicet angulum A B C, minorem eſſe recto; et qui eſt in ſegmento A D C, quod minus eſt ſemicirculo, hoc eſt, angulum A D C, recto majorem. Jungatur A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam B E eſt æqualis



[l] 5. primi. E A, erit et angulus E A B, angulo E B A æqualis [l]. Rurſus quoniam A E eſt æqualis E C, et angulus A C E angulo C A E æqualis [l] erit; totus igitur angulus B A C eſt æqualis duobus A B C, A C B angulis. Eſt autem et angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C,
[m] 32. primi. A C B æqualis [m]; angulus igitur B A C eſt æqualis an-
[n] Def. 10. primi. gulo F A C; ac propterea uterque ipſorum rectus [n]. Quare in ſemicirculo B A C angulus B A C rectus eſt. Et quoniam trianguli A B C duo anguli A B C, B A C duobus
[o] 17. primi. rectis ſunt [o] minores, rectus autem B A C; erit A B C angulus recto minor, atque eſt in ſegmento A B C, quod majus eſt ſemicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum ſit A B C D, quadrilaterorum vero, qui in circulis deſcri-
[p] 22. hujus. buntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint [p] æquales; erunt A B C, A D C anguli æquales duobus rectis, et angulus A B C minor eſt recto, reliquus igitur A D C recto major erit, atque eſt in ſegmento A D C, quod minus eſt ſemicirculo. Dico præterea majoris ſegmenti angulum, qui continetur A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C, recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentiâ A D C et rectâ lineâ A C, recto minorem. Quod quidem perſpicue apparet; quoniam angulus, qui rectis lineis B A, A C continetur, rectus eſt, erit et contentus A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C recto major. Rurſus quoniam angulus, contentus rectis lineis

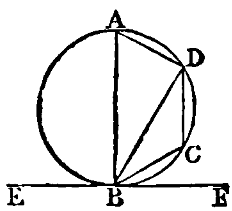
C A,

C A, A F, rectus est, erit qui continetur rectâ lineâ C A, et A D C circumferentiâ, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto: et insuper majoris quidem segmenti angulus, recto major est, minoris vero, recto minor. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quod et qui deinceps est, iisdem est æqualis. Quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt [q]. [q] Def. 10. primi.

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt.



Circulum enim A B C D contingat quædam recta linea E F in B, et a puncto B ad circulum A B C D ducatur recta linea B D ipsum utcunque secans. Dico angulos, quos B D cum E F contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est, angulum F B D esse æqualem angulo, qui constituitur in D A B segmento; angulum vero D B E æqualem angulo, qui in segmento D C B constituitur. Ducatur enim a puncto B ipsi E F ad rectos [r] angulos B A; et in circumferentiâ B D sumatur [r] 11. primi. quodvis punctum C; junganturque A D, D C, C B. Quoniam igitur circulum A B C D contingit quædam recta linea E F in puncto B; et a contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est B A, erit in ipsâ B A centrum [s] A B C D circuli. Quare B A ejusdem circuli dia- [s] 19. hujus. meter est, et angulus A D B in semicirculo est [t] rectus. [t] 31. hujus. Reliqui igitur anguli B A D, A B D uni recto [u] æquales [u] 32. primi. sunt. Sed et A B F est rectus; ergo angulus A B F æqualis est angulis B A D, A B D. Communis auferatur A B D. Reliquus igitur D B F ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo B A D, est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est A B C D, et anguli ejus oppositi æquales [w] sunt duobus rectis; erunt [w] 22. hujus.

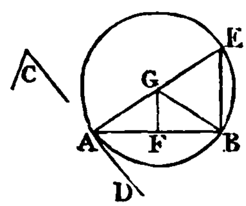
D B F, D B E anguli angulis B A D, B C D æquales; quorum D B F oftenfus eft æqualis ipfi B A D. Ergo reliquus D B E ipfi D C B, ei fcilicet, qui in alterno circuli fegmento D C B conftituitur, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a contactu vero in circulum ducatur recta linea ipfum fecans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli fegmentis confiftunt. *Q. E. D.*

[XXXIII.]

PROP. XXXIII. PROBL.

Super datâ rectâ lineâ defcribere fegmentum circuli, quod fufcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea A B, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet fuper datâ rectâ lineâ A B defcribere fegmentum circuli, quod fufcipiat angulum æqualem angulo, qui eft ad C. Ad rectam lineam A B, et ad punctum in eâ datum A, conftituatur angulus B A D angulo, qui eft ad C, æqualis [x]; et a puncto A ipfi A D ad rectos angulos [y] ducatur A E. Secetur autem A B bifariam [z] in F; atque a puncto F ducatur F G ad rectos angulos ipfi A B; et G B jungatur. Quoniam igitur A F eft æqualis F B, communis autem F G; duæ A F, F G duabus B F, F G æquales funt; et angulus A F G æqualis angulo B F G. Ergo bafis A G bafi G B eft [a] æqualis. Itaque centro G, intervallo autem A G, circulus defcriptus tranfibit etiam per B. Defcribatur, et fit A B E; circumferentiæ autem A B E recta A G producta iterum in E occurrat, jungaturque E B. Quoniam igitur ab extremitate diametri A E, et a puncto A, ipfi A E ad rectos angulos ducta eft A D; ipfa A D circulum [b] continget. Et quoniam circulum A B E contingit quædam recta linea A D, et a contactu qui eft ad A, in circulum A B E ducta eft recta linea A B; erit angulus D A B æqualis [c] angulo, qui in alterno circuli fegmento conftituitur, videlicet ipfi A E B. Sed angulus D A B angulo ad C eft æqualis; ergo et angulus ad C angulo A E B æqualis erit. Super datâ igitur rectâ lineâ A B, fegmentum circuli defcriptum eft A E B, fufcipiens angulum A E B dato angulo, qui eft ad C, æqualem. *Q. E. F.*



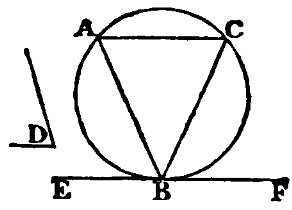
[x] 23. primi.
[y] 11. primi.
[z] 10. primi.
[a] 4. primi.
[b] Cor. 16. hujus.
[c] 32. hujus.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBL. [XXXIV.]

A dato circulo ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum, dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus A B C, datus autem angulus rectilineus, qui ad D. Oportet a circulo A B C ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur[d] recta linea E F circulum A B C in puncto B contingens; et ad rectam lineam B F, et ad punctum in eâ B, conſtituatur angulus F B C angulo, qui eſt ad D, æqualis[e]. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea E F in B puncto, et a contactu B ducta eſt B C, erit angulus F B C æqualis[f] ei, qui in alterno circuli ſegmento B A C conſtituitur. Sed F B C angulus angulo, qui ad D, eſt æqualis; ergo et angulus in ſegmento B A C angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo A B C abſciſſum eſt ſegmentum quoddam B A C, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo, qui eſt ad D, æqualem. *Q. E. F.*

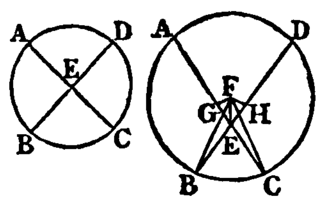


[d] 17. hujus.
[e] 23. primi.
[f] 32. hujus.

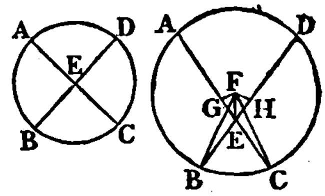
PROP. XXXV. THEOR. [XXXV.]

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum, ſub ſegmentis unius contentum, æquale eſt ei, quod ſub alterius ſegmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim A B C D, duæ rectæ lineæ A C, B D ſeſe mutuo in puncto E ſecent. Dico rectangulum, contentum ſub A E, E C, æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, B D per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum A B C D circuli; manifeſtum eſt, æqualibus exiſtentibus A E, E C, D E, E B, et rectangulum contentum ſub A E, E C æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, D B non tranſeant per centrum, ſumatur centrum circuli A B C D, quod ſit F; et ab F ad rectas lineas A C, D B perpendiculares ducantur F G, F H: junganturque F B, F C, F E. Quoniam igitur recta quædam linea G F, per centrum ducta, rectam lineam quandam



quandam A C, non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit [g]; quare A G ipsi G C est æqualis. Et quoniam recta linea A C secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E; erit rectangulum sub A E, E C contentum, una cum ipsius E G quadrato [h], æquale quadrato ex G C; commune addatur ex G F quadratum. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum iis, quæ ex E G, G F, quadratis, æquale est quadratis ex C G, G F; sed quadratis, quæ ex E G, G F, æquale [i] est quadratum ex F E: quadratis vero ex C G, G F æquale est [i], quod ex F C fit, quadratum. Rectangulum igitur sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F C. Est autem C F æqualis F B; ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex E F, æquale est ei, quod ex F B fit, quadrato. Eâdem ratione et rectangulum sub D E, E B, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F B. Ostensum autem est et rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale ei, quod fit ex F B, quadrato. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est rectangulo sub D E, E B, una cum quadrato ex F E; commune auferatur ex F E quadratum; reliquum igitur rectangulum sub A E, E C, reliquo sub D E, E B rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum, sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur. *Q. E. D.*



[g] 3. hujus.
[h] 5. secundi.
[i] 47. primi.

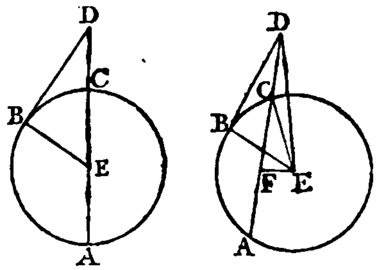
[XXXVI.]

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, æquale erit ei, quod a contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; et D C A quidem circulum A B C secet; D B vero contingat. Dico rectangulum sub A D, D C quadrato

drato, quod fit ex D B, æquale esse. Namque D C A vel transit per centrum, vel non transit. Primum transeat D A per centrum circuli A B C, quod sit E; et E B jungatur. Erit angulus E B D rectus[k]; itaque quoniam recta linea A C bifariam secta est in E, et ipsi adjicitur C D,



[k] 18. hujus.

rectangulum sub A D, D C una cum quadrato ex E C, æquale[l] erit ei, quod fit ex E D, quadrato; æqualis [l] 6. secundi. autem est C E ipsi E B; ergo rectangulum sub A D, D C una cum quadrato, quod ex E B, æquale est quadrato ex E D; sed quadratum ex E D est æquale quadratis [m] ipsarum E B, B D; rectus enim angulus est [m] 47. primi. E B D. Rectangulum igitur sub A D, D C, una cum quadrato ex E B, æquale est ipsarum E B, B D quadratis; commune auferatur quadratum, quod ex E B; ergo reliquum sub A D, D C rectangulum quadrato, quod fit a contingente D B, æquale erit. Secundo D C A non transeat per centrum A B C circuli: sumaturque[n] cen- [n] 1. hujus. trum E, et ad A C perpendicularis agatur E F, et jungantur E B, E C, E D. Rectus igitur est E F D angulus. Et quoniam recta linea quædam E F per centrum ducta, rectam lineam quandam A C, non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit[o]; [o] 3. hujus. quare A F ipsi F C est æqualis. Rursus quoniam recta linea A C bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur C D, erit rectangulum sub A D, D C, una cum quadrato ex F C, æquale [l] quadrato quod ex F D; commune apponatur quod ex F E quadratum; rectangulum igitur sub A D, D C una cum quadratis ex F C, F E est æquale quadratis ex D F, F E. Sed quadratis quidem ex D F, F E æquale est [m] ex D E quadratum; etenim rectus est angulus E F D: quadratis vero ex C F, F E æquale est [m] quadratum ex C E. Ergo rectangulum sub A D, D C, una cum quadrato quod ex C E, est æquale quadrato ex E D; æqualis autem est C E ipsi E B; rectangulum igitur sub A D, D C, una cum quadrato ex E B, æquale est ex E D quadrato. Sed quadrato ex E D æqualia sunt quadrata [m] ex E B, B D; siquidem rectus est angulus E B D. Ergo

Ergo rectangulum sub A D, D C, una cum quadrato ex E B æquale est eis, quæ ex E B, B D fiunt, quadratis; commune auferatur quadratum ex E B; reliquum igitur sub A D, D C rectangulum quadrato, quod fit ex D B, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. *Q. E. D.*

Cor. 1.* (Clavii) Ex hâc Propositione xxxvi. manifestum est, si a puncto quovis extra circulum plures lineæ rectæ, circulum secantes, ducantur; rectangula, comprehensa sub totis lineis et partibus exterioribus, inter se esse æqualia.

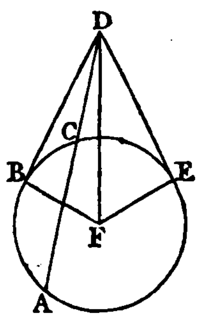
Cor. 2.* (Clavii) Constat etiam duas rectas, ab eodem puncto ductas, quæ circulum contingant, inter se esse æquales.

Cor. 3.* (Clavii) Perspicuum quoque est, ab eodem puncto duas tantum rectas duci posse, quæ circulum contingant.

[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente fit, quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; D C A quidem circulum secet, D B vero incidat: sitque rectangulum sub A D, D C æquale quadrato, quod fit ex D B. Dico ipsam D B circulum A B C contingere.



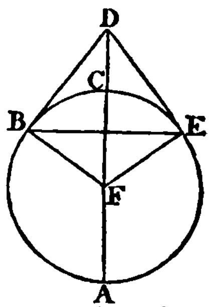
p 17. hujus. Ducatur enim recta linea D E [p] contingens circulum A B C; et sumatur circuli A B C centrum, quod sit F; junganturque F E, F B, F D; ergo angulus

q 18. hujus. F E D rectus est[q]. Et quoniam D E circulum A B C contingit, secat autem D C A;

r Ex antecedente. rectangulum sub A D, D C æquale erit[r] quadrato ex D E; sed rectangulum sub A D, D C ponitur æquale quadrato ex ex D B; quadratum igitur, quod ex D E, quadrato ex D B æquale erit; ac propterea linea D E erit ipsi D B æqualis; est autem et F E æqualis F B. Duæ igitur D E, E F duabus D B, B F æquales sunt; et basis communis F D; angulus igitur D E F est æqualis angulo D B F; rectus autem est D E F, ergo et D B F est rectus; atque est F B producta diameter. Quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, ᵃ circulum contingit; ᵃ Cor. 16. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. Si igitur hujus. extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. *Q. E. D.*

Cor. 1.* (Clavii) Si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam extra circulum in peripheriam incidant; earum autem una circulum contingat; et altera eundem continget.

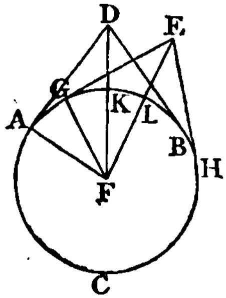
Cor. 2.* Si a puncto quopiam D extra circulum duæ rectæ ducantur, D B, D E, circulum in punctis B, E contingentes; recta B E, contactus jungens, peripheriam integram in partes inæquales B C E, B A E dividit; quarum minor est B C E, quæ angulum B D E convexa respicit; major B A E, quæ cava angulo obversa est.



Circuli B A E sumatur centrum F. Juncta F D peripheriæ in punctis A, C occurrat. Jungantur F B, F E. Propter angulum F B D rectum, angulus B F D recto minor erit. Duo autem B F D, B F A simul duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur B F A recto major. Multo major igitur quam B F C. Arcus igitur B A arcu B C major. Simili modo ostendetur arcus E A arcu E C major. Totus igitur B A E, ex duobus B A, E A compositus, toto B C E major, ex duobus B C, E C composito.

Cor. 3.* Si a punctis duobus extra circulum, distantiis æqualibus a centro remotis, rectæ ducantur, circulum contingentes; arcus, contingentibus intercepti, æquales erunt, convexus convexo, cavus cavo.

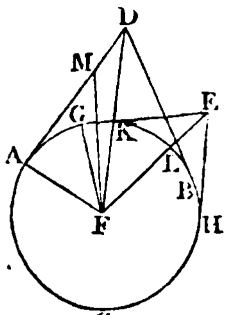
Extra circulum A C B, cujus centrum F, sint puncta D, E, distantiis æqualibus a centro F remota. A puncto D ducantur D A, D B, quæ in punctis A, B; et a puncto à puncto E ducantur E G, E H, quæ in punctis G, H, circulum contingant. Junctæ autem F D, F E, peripheriæ circuli, quâ parte convexa reſpicit puncta D, E, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, A C B arcubus G L H, G C H æquales: convexum A K B convexo G L H; cavum A C B, cavo G C H. Jungantur enim F A, F G. Anguli F A D, F G E ſunt recti. Sed rectæ F A, F D rectis F G, F E, ſingulæ ſingulis, æquales. Quare in triangulis D A F, E G F latus



[t] 47. primi. D A, lateri E G æquale [t]. Latera igitur D F, F A lateribus E F, F G, ſingula ſingulis, æqualia; et baſis D A baſi E G æqualis. Quare angulus D F A angulo E F G
[u] 8. primi. æqualis [u]. Arcus igitur A K arcui G L æqualis. Simili modo oſtendetur arcus B K æqualis arcui H L. Totus igitur A K B, ex duobus A K, B K compoſitus, æqualis toti G L H, ex duobus G L, H L compoſito. Arcus autem A K B, A C B ſimul integram circuli peripheriam complent; quam ſimiliter complent G L H, G C H. Duo igitur A K B, A C B, ſimul ſumpti, duobus G L H, G C H, ſimul ſumptis, æquales ſunt. Ablatiſque A K B, G L H æqualibus, relinquentur A C B, G C H inter ſe æquales. *Q. E. D.*

Cor. 4. * Si a punctis duobus extra circulum, diſtantiis inæqualibus a centro remotis, rectæ ducantur circulum contingentes; arcus inæquales intercipient; et convexum minorem, majorem vero cavum, quæ a puncto propiore ductæ fuerint.

Extra circulum ACB, cujus centrum ſit F, ſint puncta duo D, E, diſtantiis inæqualibus a centro remota. Hoc eſt, junctæ F D, F E inæquales ſint. Inæqualium autem altera major erit. Sit F D major. Ducantur a puncto D duæ rectæ D A, D B, quæ in punctis A, B, a puncto autem E, duæ E G, E H, quæ in punctis G, H circulum contingant. Rectæ autem F D, F E circuli peripheriæ, quâ parte puncta D, E convexa reſpicit, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, G L H, necnon A C B,



G C H,

G C H esse inæquales, et arcum G L H arcu A K B minorem, arcum autem G C H arcu A C B majorem. Jungantur enim F A, F G; propter angulum ad A rectum, quadratum ex F D duobus quadratis ex F A, A D est æquale [w]. Similiter propter angulum ad G rectum, quadratum ex F E duobus ex F G, G E est æquale. Sed quadratum ex F E minus erit quadrato ex F D, propter rectam F E rectâ F D [x] minorem. Duo igitur ex F G, G E duobus ex F A, A D sunt minora. Auferantur æqualia ex rectis æqualibus F G, F A; jam reliquum ex E G quadratum reliquo ex D A minus erit. Recta igitur E G rectâ D A minor. In A D igitur a puncto A capiatur A M illi E G æqualis. Minor erit A M quam A D, et punctum M duobus A, D necessario interjacebit. Quapropter, si jungatur F M, angulus A F M angulo A F D minor erit. Sed in triangulis F A M, F G E, propter latera F A, A M, lateribus F G, G E, singula singulis, æqualia, et angulos ad A, G æquales (etenim uterque rectus), anguli A F M, E F G erunt inter se æquales [y]. Angulus igitur G F E angulo A F D minor. Quare et arcus G L arcu A K minor. Simili modo ostendetur arcus H L arcu B K minor. Totus igitur G L H toto A K B minor. Et qui reliquus fuerit ex integrâ circuli peripheriâ, ablato G L H, major eo, qui reliquus fuerit, ablato A K B. Arcus nempe G C H arcu A C B major. *Q. E. D.*

[w] 47. primi.
[x] ex hyp.
[y] 4. primi.

Cor. 5. * Recta, quæ centrum circuli et contingentium occursum jungit, arcum contingentibus interceptum, necnon rectam contactus jungentem, bifariam dividit.

Cor. 6. * Recta, quæ arcum circuli, duabus contingentibus interceptum, in medio ipsius puncto contingit, rectæ, quæ contingentium primo positarum contactus jungit, parallela est.

EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

Definitio I.

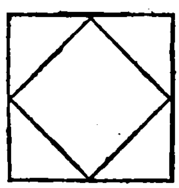


FIGURA rectilinea in figurâ rectilineâ deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus unumquodque latus ejus, in quâ deſcribitur, contingit.

II.

Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ, unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

III.

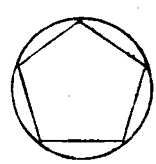


Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

IV.

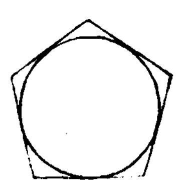


Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

V.

Circulus ſimiliter in figurâ rectilineâ deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus, in quâ deſcribitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

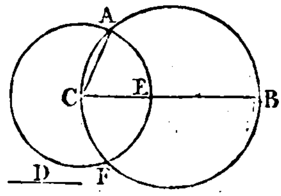
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentiâ fuerint.

[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea, non major circuli diametro, D. Oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. Si quidem igitur B C ſit æqualis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in circulo A B C



aptata eſt B C rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, major eſt B C quam D; ponatur igitur [a] ipſi D æqualis C E; et centro quidem C, intervallo autem C E, circulus deſcribatur A E F, qui circulo A B C in A occurrat; et C A jungatur. Itaque quoniam punctum C centrum eſt A E F circuli; erit C A ipſi C E æqualis; ſed D eſt æqualis C E. Ergo et D ipſi A C æqualis erit. In dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt A C. *Q. E. F.*

[a] 3. primi.

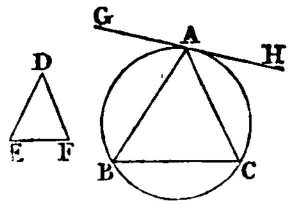
[II.] PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet in A B C circulo deſcribere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Ducatur recta linea G A H contingens [b] circulum A B C in puncto A; et ad rectam lineam A H, et ad punctum in eâ A, angulo D E F æqualis

[b] 17. tertii.

æqualis [c] angulus conſtituatur H A C. Rurſus ad rectam lineam A G, et ad punctum in ipſâ A, angulo D F E æqualis [c] conſtituatur angulus G A B; et B C jungatur. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta H A G; a contactu autem in circulum ducta eſt A C; erit H A C angulus æqualis [d] ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet ipſi A B C; ſed H A C angulus æqualis eſt angulo D E F, ergo et angulus A B C angulo D E F eſt æqualis. Eâdem ratione et angulus A C B eſt æqualis angulo D F E. Reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis [e] erit. Ergo triangulum A B C trangulo D E F eſt æquiangulum, et deſcriptum eſt in circulo A B C. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*



[c] 23. primi.

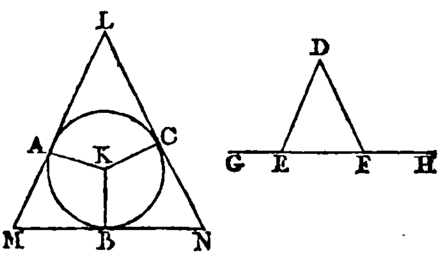
[d] 32. tertii.

[e] 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL. [III.]

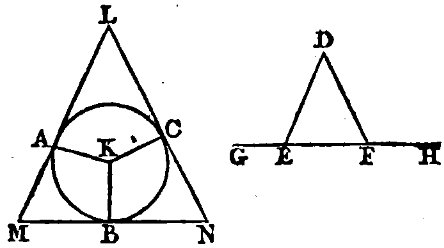
Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet circa circulum A B C deſcribere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Protrahatur E F ex utrâque parte ad puncta H, G, et ſumatur circuli A B C centrum K; et recta linea K B utcunque ducatur:



conſtituaturque ad rectam lineam K B, et ad punctum in eâ K, angulo quidem D E G æqualis [f], angulus B K A, angulo autem D F H æqualis, [f] angulus B K C; et per A, B, C puncta ducantur rectæ lineæ L A M, M B N, N C L circulum A B C contingentes. Jam cum rectæ A K, B K

[f] 23. primi.



angulo A K B sibi invicem inclinantur, angulo D E G æquali, directa non est linea A K B [g]. Rectæ igitur A M, N B, quæ circulum in punctis A, B, contingunt, ex diametro non oppositis, non erunt inter se parallelæ [h]. Rectæ igitur A M, N B sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto M. Similiter propter angulum B K C angulo D F H æqualem [i] directa non est linea C K B. Rectæ igitur M B, N C sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto N. Quoniam rectæ M A, M B N, N C circulum A B C in punctis A, B, C contingunt, a centro autem K ad puncta A, B, C ducuntur rectæ K A, K B, K C; erunt anguli ad puncta A, B, C recti. In quadrilatero igitur A M B K, cujus anguli quatuor quatuor rectis sunt æquales (per Theorema primum eorum, quæ Prop. 32. Lib. i. subjunxit Keillius) cum duo K A M, K B M sint recti; erunt reliqui duo A K B, A M B duobus rectis æquales. Duo autem D E G, D E F simul sumpti æquales sunt duobus rectis. Duo igitur A K B, A M B simul sumpti duobus D E G, D E F sunt æquales. Horum autem A K B ipsi D E G est æqualis. Quare et reliquus A M B reliquo D E F æqualis erit. Similiter ostendetur angulus C N B angulo D F E æqualis. Duo igitur A M B, C N M simul sumpti duobus D E F, D F E simul sumptis sunt æquales. Duo autem D E F, D F E duobus rectis sunt minores [k]. Duo igitur A M B, C N B duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur M A, N C productæ inter se convenient [l]. Conveniant in puncto L. Triangulum igitur est figura L M N, et propter angulos duos L M N, L N M duobus D E F, D F E æquales (id enim ostensum) reliquus M L N reliquo E D F æqualis est. Æquiangulum igitur est triangulum L M N triangulo D E F, et circulo A B C circumscriptum est. *Q. E. F.*

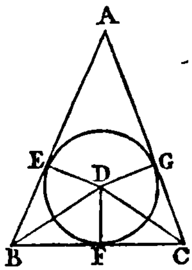
[g] 13. primi.
[h] 2. Cor. 18. tertii.
[i] Per construct.
[k] 17. primi.
[l] Ax. 12. primi.

PROP.

PROP. IV. PROBL. [IV.]

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum A B C. Oportet in triangulo A B C circulum deſcribere. Secentur[m] anguli A B C, B C A bifariam rectis lineis B D, C D, quæ conveniant inter ſe in D puncto; et a puncto D ad rectas lineas A B, B C, C A perpendiculares [n] ducantur D E, D F, D G. Quoniam angulus E B D eſt æqualis angulo F B D, eſt autem et rectus B E D recto B F D æqualis; duo triangula E B D, D B F duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; utrique ſcilicet commune B D, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [o] habebunt, atque erit D E æqualis D F. Et eâdem ratione D G æqualis D F. Ergo et D E ipſi D G eſt æqualis. Tres igitur rectæ lineæ D E, D F, D G inter ſe æquales ſunt; quare centro D, intervallo autem unius ipſarum D E, D F, D G, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C A continget; propterea quod recti ſunt ad E, F, G anguli. Si enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod eſt abſurdum [p]. Non igitur centro D, intervallo autem unius ipſarum D E, D F, D G, circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas A B, B C, C A, quare ipſas continget; atque erit circulus deſcriptus in triangulo A B C. In dato igitur triangulo A B C circulus E F G deſcriptus eſt. *Q. E. F.*



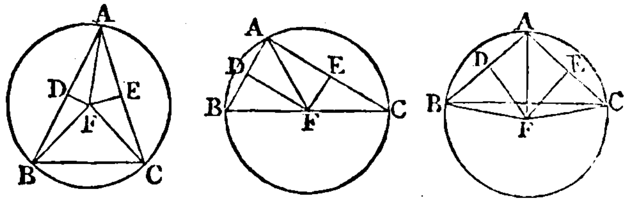
[m] 9. primi.
[n] 12. primi.
[o] 26. primi.
[p] 16. tertii.

PROP. V. PROBL. [V.]

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Sit datum triangulum A B C. Oportet circa datum triangulum A B C circulum deſcribere. Secentur A B, A C bifariam [q] in D, E punctis; et a punctis D, E ipſis A B, A C ad rectos angulos [r] ducantur D F, E F, quæ quidem vel intra triangulum A B C convenient, vel in rectâ lineâ B C, vel extra ipſam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F; et B F, F C, F A jungantur. Quoniam igitur A D eſt æqualis D B, communis autem,

[q] 10. primi.
[r] 11. primi.



[a] 4. primi. et ad rectos angulos, D F; erit basis A F basi F B æqualis [a]. Similiter ostendetur et C F æqualis F A. Ergo et B F est æqualis F C. Tres igitur F A, F B, F C inter se æquales sunt. Quare centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C. Secundo, D F, E F conveniant in rectâ lineâ B C, in puncto F, ut in secundâ figurâ; et A F jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum A B C descripti. Postremo D F, E F conveniant extra triangulum A B C rursus in F puncto, ut in tertiâ figurâ; et jungantur A F, F B, F C. Et quoniam rursus A D est æqualis D B, communis autem, et ad rectos angulos, D F; basis A F basi F B æqualis erit. Similiter demonstrabimus et C F ipsi F A æqualem esse. Quare et B F est æqualis F C. Rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum A B C descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*

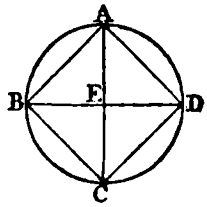
Cor. Si triangulum sit rectangulum, centrum circuli cadet in latus, angulo recto oppositum. Si acutangulum, cadet centrum intra triangulum; si obtusangulum, [b] 31. tertii. cadet extra [b].

[VI.] PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C, B D; et A B, B C, C D, D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, et ad

ad rectos angulos, E A; erit basis B A æqualis[u] basi A D. [u] 4. primi.
Et eâdem ratione utraque ipsarum B C, C D utrique B A, A D est æqualis; æquilaterum igitur est A B C D quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semicirculus; quare angulus B A D rectus[w] est. Et eâdem ratione unusquisque ipsorum A B C, B C D, C D A est rectus. Rectangulum igitur est A B C D quadrilaterum. Ostensum autem est et æquilaterum esse. Ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo A B C D. In dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. *Q. E. F.*

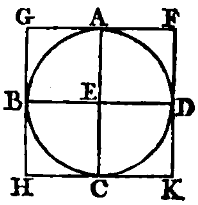


[w] 31. tertii.

PROP. VII. PROBL. [VII.]

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C, B D ad rectos inter se angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum A B C D contingentes[x] F G, G H, H K, K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, a centro autem E ad contactum, qui est ad A, ducitur E A; erunt [y] anguli ad A recti. Eâdem ratione, et anguli ad puncta B, C, D, recti sunt. Et quoniam angulus A E B rectus est, est autem et rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela[z]. Eâdem ratione, et A C parallela est F K. Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum G F, H K ipsi B E D parallelam esse. Quare et G F est parallela H K. Parallelogramma igitur sunt G K, G C, A K, F B, B K, ac propterea G F quidem est [a] æqualis H K; G H vero ipsi F K. Et quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum G H, F K est [a] æqualis; B D vero æqualis utrique G F, H K; et utraque G H, F K utrique G F, H K æqualis erit. Æquilaterum igitur est F G H K quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est G B E A, atque est rectus A E B angulus, et ipse A G B rectus erit. Similiter demon-



[x] 17. tertii.
[y] 18. tertii.
[z] 28. primi.
[a] 34. primi.

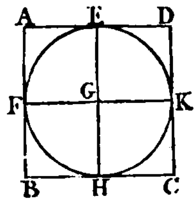
 strabimus

ſtrabimus angulos etiam ad puncta H, K, F, rectos eſſe. Rectangulum igitur eſt quadrilaterum F G H K. Demonſtratum autem eſt et æquilaterum. Ergo quadratum ſit neceſſe eſt, et deſcriptum eſt circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*

[VIII.] PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum A B C D. Oportet in quadrato A B C D circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum A B, A D, bifariam



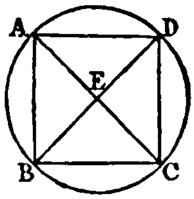
[b] 10. primi. [b] in punctis F, E. Et per E quidem alterutri ipſarum A B, C D parallela
[c] 31. primi. [c] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [c] alterutri A D, B C. Parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum A K, K B, A H, H D, A G, G C, B G, G D; et latera ipſorum, quæ ex oppoſito,
[d] 34. primi. ſunt æqualia [d]. Et quoniam D A eſt æqualis A B; et ipſius quidem A D dimidium eſt A E, ipſius vero A B dimidium A F; erit A E ipſi A F æqualis; quare et oppoſita latera æqualia ſunt. Ergo F G eſt æqualis G E. Similiter demonſtrabimus et utramque ipſarum G H, G K utrique F G, G E æqualem eſſe. Quatuor igitur G E, G F, G H, G K inter ſe ſunt æquales. Itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C D, D A continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti ſunt. Si enim circulus ſecabit rectas lineas A B, B C, C D, D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos
[e] 16. tertii. ducitur, intra circulum cadet; quod [e] eſt abſurdum. Non igitur centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D A ſecabit. Quare ipſas neceſſario continget; atque erit deſcriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. *Q. E. F.*

PROP.

PROP. IX. PROBL. [IX.]

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. Oportet circa A B C D quadratum circulum describere. Jungantur A C, B D, quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A, A C duabus B A, A C æquales sunt; et basis D C æqualis basi B C. Angulus igitur D A C angulo B A C æqualis [f]. Angulus igitur D A B bifariam sectus est rectâ lineâ A C. Similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C, B C D, C D A rectis lineis A C, D B bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; et E A B angulus angulo E B A æqualis erit. Quare et latus E A lateri E B est [g] æquale. Similiter demonstrabimus et utramque rectarum linearum E C, E D utrique E B, E A æqualem esse. Ergo quatuor rectæ lineæ E A, E B, E C, E D inter se sunt æquales. Centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A, E B, E C, E D, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. Describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. *Q. E. F.*



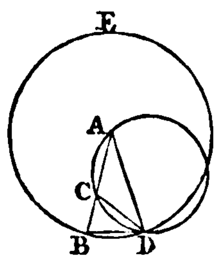
[f] 8. primi.

[g] 6. primi.

PROP. X. PROBL. [X.]

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea A B, et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B, B C æquale [h] sit ei quod ex C A describitur quadrato; et centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur B D E; apteturque in B D E circulo recta linea B D æqualis [i] ipsi A C, quæ non est major diametro circuli B D E. Junctâque D A, dico factum esse, quod fieri oportebat. Constitutum est enim triangulum isosceles B A D, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim B D, duplum reliqui B A D. Jungatur enim D C, et circa A D C triangulum [k] circulus A C D describatur.

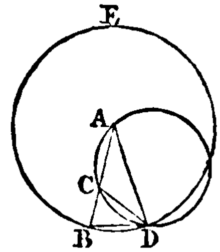


[h] 11. secundi.

[i] 1. hujus.

[k] 5. hujus.

describatur. Itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato, quod fit ex A C; æqualis autem est A C ipsi B D; erit sub A B, B C rectangulum quadrato ex B D æquale. Et quoniam extra circulum A C D sumptum est aliquod punctum B, et a puncto B in circulum A C D cadunt duæ rectæ lineæ B C A, B D, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub A B, B C æquale quadrato ex B D: recta linea B D circulum A C D [l] continget.



[l] 37. tertii.

Quoniam igitur B D contingit, et a contactu ad D ducta est D C; erit B D C angulus æqualis [m] ei, qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo D A C. Quod cum angulus B D C æqualis sit ipsi D A C, communis apponatur C D A; totus igitur B D A est æqualis duobus angulis C D A, D A C. Sed ipsis C D A, D A C exterior angulus B C D est [n] æqualis. Ergo et B D A æqualis est ipsi B C D. Sed B D A angulus est [o] æqualis angulo C B D, quoniam et latus A D lateri A B est æquale. Ergo et D B A ipsi B C D æqualis erit. Tres igitur anguli B D A, D B A, B C D inter se æquales sunt. Et quoniam angulus D B C æqualis est angulo B C D, et latus B D lateri D C est [p] æquale; sed B D ponitur æqualis ipsi C A. Ergo et C A est æqualis C D; quare et angulus C D A æqualis est angulo D A C. Anguli igitur C D A, D A C simul sumpti ipsius anguli D A C duplices sunt. Est autem et B C D angulus angulis C D A, D A C æqualis; ergo et B C D duplex est ipsius D A C. Sed B C D est æqualis alterutri ipsorum B D A, D B A; quare et uterque B D A, D B A ipsius D A B est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est A D B, habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. *Q. E. F.*

[m] 32. tertii.
[n] 32. primi.
[o] 5. primi.
[p] 6. primi.

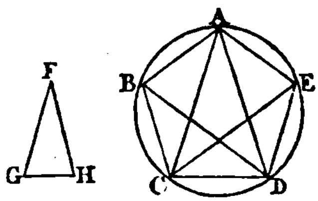
[XI.] PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D E. Oportet in A B C D E circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles F G H, habens utrumque eorum, qui sunt ad basim G H, angulorum, duplum [q] anguli, qui est ad F; et describatur in circulo A B C D E triangulo F G H æquiangulum [r] triangulum A C D,

[q] 10. hujus.
[r] 2. hujus.

A C D; ita ut angulo quidem, qui eſt ad F, æqualis ſit angulus C A D; utrique vero ipſorum, qui ad G, H, ſit æqualis uterque A C D, C D A. Et uterque igitur A C D, C D A anguli C A D eſt duplus. Secetur uterque ipſorum A C D, C D A bifariam [s] rectis lineis C E, D B; et A B, B C, D E, [s] 9. primi.

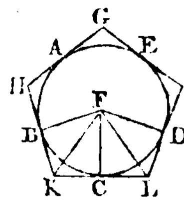


E A jungantur. Quoniam igitur uterque ipſorum A C D, C D A duplus eſt ipſius C A D, et ſecti ſunt bifariam rectis lineis C E, D B, quinque anguli D A C, A C E, E C D, C D B, B D A inter ſe ſunt æquales. Æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis inſiſtunt [t]; [t] 26. tertii.
quinque igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E A æquales ſunt inter ſe. Sed æquales circumferentias [u] æquales rectæ lineæ ſubtendunt. Ergo et quinque [u] 29. tertii.
rectæ lineæ A B, B C, C D, D E, E A inter ſe æquales ſunt. Æquilaterum igitur eſt A B C D E pentagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia A B æqualis eſt circumferentiæ D E, communis apponatur B C D. Tota igitur A B C D circumferentia toti circumferentiæ E D C B eſt æqualis; et in circumferentiâ quidem A B C D inſiſtit angulus A E D, in circumferentiâ vero E D C B inſiſtit B A E. Ergo et B A E angulus eſt æqualis angulo A E D. Eâdem ratione et unuſquiſque angulorum A B C, B C D, C D E unicuique ipſorum B A E, A E D eſt æqualis. Æquiangulum igitur eſt A B C D E pentagonum: oſtenſum autem eſt et æquilaterum eſſe. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*

PROP. XII. PROBL. [XII.]

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum et æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C D E. Oportet circa circulum A B C D E pentagonum æquilaterum et æquiangulum deſcribere. Intelligantur pentagoni in circulo deſcripti [x] angulorum puncta eſſe A, B, C, D, E, ita ut circum- [x] 11. hujus.
ferentiæ A B, B C, C D, D E, E A ſint æquales; et per puncta A, B, C, D, E ducantur [y] circulum contingentes [y] 17. tertii.
G H, H K, K L, L M, M G; et ſumpto circuli A B C D E centro F, jungantur F B, F K, F C, F L, F D. Quoniam igitur



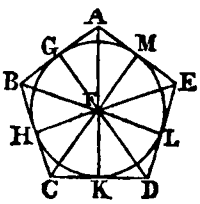
igitur recta linea K L contingit circulum A B C D E in puncto C, et a centro F ad contactum, qui est ad C, ducta est F C, erit F C ad
[a] 18. tertii. ipsam K L perpendicularis [a]. Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C. Eâdem ratione et anguli, qui ad puncta B, D, recti sunt. Et quoniam rectus angulus est F C K, qua-
[a] 47. primi. dratum quod fit ex F K æquale [a] est quadratis ex F C, C K. Et ob eandem causam quadratis ex F B, B K æquale est ex F K quadratum. Quadrata igitur ex F C, C K quadratis ex F B, B K æqualia sunt; quorum, quod ex F C ei, quod ex F B, est æquale. Ergo reliquum, quod ex C K, reliquo, quod ex B K, æquale erit. Æqualis igitur est B K ipsi C K. Et quoniam F B est æqualis F C, communis autem F K; duæ B F, F K duabus C F, F K æquales sunt, et basis B K est æqualis
[b] 8. primi. basi K C; erit angulus [b] itaque B F K angulo K F C æqualis, angulus vero B K F angulo F K C. Duplus igitur est angulus B F C anguli K F C, et angulus B K C duplus ipsius F K C. Eâdem ratione, et angulus C F D anguli C F L est duplus; angulus vero C L D duplus anguli C L F. Et quoniam circumferentia B C circumferentiæ C D est æqualis, et angulus B F C angulo C F D æqualis
[c] 27. tertii. [c] erit. Atque est angulus quidem B F C anguli K F C duplus; angulus vero D F C duplus ipsius L F C: æqualis igitur est angulus K F C angulo C F L. Itaque duo triangula sunt F K C, F L C, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est, F C: ergo et reli-
[d] 26. primi. qua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [d], et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Recta igitur linea K C est æqualis rectæ C L, et angulus F K C angulo F L C. Et quoniam K C est æqualis C L, erit K L ipsius K C dupla. Eâdem ratione, et H K ipsius B K dupla ostendetur. Rursus quoniam B K ostensa est æqualis ipsi K C, atque est K L quidem dupla K C, H K vero ipsius B K dupla; erit H K ipsi K L æqualis. Similiter et unaquæque ipsarum G H, G M, M L ostendetur æqualis utrique H K, K L. Æquilaterum igitur est G H K L M pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus F K C est æqualis angulo F L C; et ostensus est angulus H K L duplus ipsius F K C; ipsius vero F L C duplus

duplus K L M: erit et H K L angulus angulo K L M æqualis. Simili ratione oſtendetur et unuſquiſque ipſorum K H G, H G M, G M L utrique H K L, K L M æqualis. Quinque igitur anguli G H K, H K L, K L M, L M G, M G H inter ſe æquales ſunt. Ergo æquiangulum eſt G H K L M pentagonum. Oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe; et deſcriptum eſt circa A B C D E circulum. *Q. E. F.*

PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

In dato pentagono, quod æquilaterum et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet in A B C D E pentagono circulum deſcribere. Secetur uterque angulorum B C D, C D E bifariam [e] rectis lineis C F, D F; et a puncto F, in quo conveniunt inter ſe C F, D F, ducantur rectæ lineæ F B, F A, F E. Quoniam igitur B C eſt æqualis C D, communis autem C F; duæ B C, C F duabus D C, C F æquales ſunt, et angulus B C F eſt æqualis angulo D C F. Baſis igitur B F baſi F D eſt [f] æqualis, et B F C triangulum æquale triangulo D C F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus igitur C B F angulo C D F æqualis erit. Et quoniam angulus C D E anguli C D F eſt duplus, et angulus quidem C D E angulo A B C æqualis, angulus vero C D F angulo C B F æqualis; erit et C B A angulus duplus anguli C B F; ac propterea angulus A B F angulo C B F æqualis. Angulus igitur A B C bifariam ſectus eſt rectâ lineâ B F. Similiter demonſtrabitur unumquemque angulorum B A E, A E D rectis lineis A F, F E bifariam ſectum eſſe. A puncto F ad rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A ducantur [g] perpendiculares F G, F H, F K, F L, F M. Et quoniam angulus H C F eſt æqualis angulo K C F; eſt autem et rectus F H C recto F K C æqualis: duo triangula F H C, F K C duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; commune ſcilicet utriſque F C, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [h] habebunt; atque erit perpendicularis F H perpendiculari



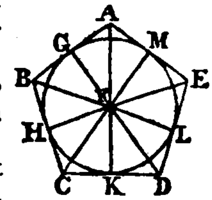
[e] 9. primi.

[f] 4. primi.

[g] 12. primi.

[h] 26. primi.

pendiculari F K æqualis. Similiter oſtendetur et unaquæque ipſarum F L, F M, F G æqualis utrique F H, F K. Quinque igitur rectæ lineæ F G, F H, F K, F L, F M inter ſe æquales ſunt. Quare centro F, intervallo autem unius ipſarum F G, F H, F K, F L, F M, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A continget; propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod abſurdum



[i] 16. tertii. [i]eſſe oſtenſum eſt. Non igitur centro F, et intervallo uno ipſorum punctorum G, H, K, L, M, circulus deſcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A ſecabit. Quare ipſas contingat neceſſe eſt. Deſcribatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono, quod eſt æquilaterum et æquiangulum, circulus deſcriptus eſt. *Q. E. F.*

Cor. 1. * (Barrovii) Hinc ſi duo anguli proximi figuræ cujuſcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ a puncto concurſûs dividentium ad reliquos figuræ angulos ductæ, reliquos medios dividunt.

Cor. 2. * (Clavii) Si duo anguli proximi figuræ cujuſcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ ex puncto concurſûs dividentium in latera figuræ ad perpendiculum deductæ, inter ſe æquales erunt.

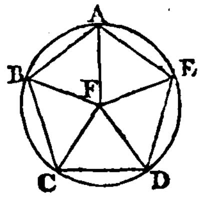
Cor. 3. * (Clavii) Eodem igitur modo in omni figurâ æquilaterâ et æquiangulâ circulus deſcribendus eſt.

[XIV.] PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet circa pentagonum A B C D E circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum B C D, C D E angulorum bifariam rectis lineis C F, F D; et a puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E ducantur F B, F A, F E. Et unuſquiſque angulorum C B A, B A E, A E D rectis lineis B F, F A, F E bifariam ſectus

[k] fectus erit. Et quoniam angulus B C D angulo C D E est [k] Cor. 1.* 13. hujus.
æqualis; atque est anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit et F C D angulus æqualis angulo F D C; quare et latus C F lateri F D est æquale [l]. [l] 6. primi.
Similiter demonstrabitur et unaquæque ipsarum F B, F A, F E æqualis unicuique F C, F D. Quinque igitur rectæ



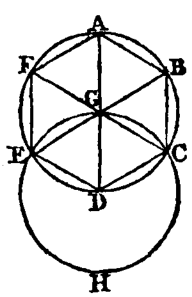
lineæ F A, F B, F C, F D, F E inter se æquales sunt. Ergo centro F, et intervallo unius ipsarum F A, F B, F C, F D, F E, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum A B C D E, quod æquilaterum est et æquiangulum. Describatur, et sit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et æquiangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*

Cor. * (Clavii) Eodem prorsus modo circa quamlibet figuram æquilateram et æquiangulam circulus describendus est.

PROP. XV. PROBL. [XV.]

In dato circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

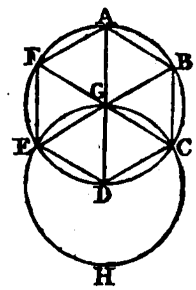
Sit datus circulus A B C D E F. Oportet in circuli A B C D E F hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Ducatur circuli A B C D E F diameter A D, sumaturque centrum circuli G; et centro quidem D, intervallo autem D G, circulus describatur E G C H. Junctæ E G, C G ad puncta B, F producantur, et jungantur A B, B C, C D, D E, E F, E A. Dico hexagonum A B C D E F æquilaterum et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum



est A B C D E F circuli, erit G E ipsi G D æqualis. Rursus quoniam D centrum est circuli E G C H, erit D E æqualis eidem D G. Æquilaterum igitur est E G D triangulum; ideoque tres ipsius anguli E G D, G D E, D E G inter se æquales [m] sunt; et sunt trianguli tres anguli æquales [n] duobus rectis. Angulus igitur E G D duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur et D G C duorum rectorum

[m] Cor. 5. primi.
[n] 32. primi.

rectorum tertia pars. Et quoniam recta linea C G super rectam E B insistens, angulos, qui deinceps sunt, E G C, C G B, duobus re-



[o] 13. primi. ctis æquales [o] efficit; erit et reliquus C G B tertia pars duorum rectorum. Anguli igitur E G D, D G C, C G B inter se sunt æquales. Et qui ipsis ad verticem sunt anguli B G A, A G F,
[p] 18. primi. F G E, æquales [p] sunt angulis E G D, D G C, C G B. Quare sex anguli E G D, D G C, C G B, B G A, A G F, F G E inter se æquales sunt. Sed æquales
[q] 26. tertii. anguli æqualibus circumferentiis insistunt [q]. Sex igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E F, F A inter se
[r] 29. tertii. sunt æquales. Æquales autem circumferentias æquales [r] rectæ lineæ subtendunt. Ergo et sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est A B C D E F hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia A F circumferentiæ E D est æqualis, communis apponatur circumferentia A B C D: tota igitur F A B C D circumferentia æqualis est toti circumferentiæ E D C B A. Et circumferentiæ quidem F A B C D angulus F E D insistit, circumferentiæ vero E D C B A in-
[s] 27. tertii. sistit angulus A F E; angulus igitur A F E angulo D E F est [s] æqualis. Similiter ostendentur et reliqui anguli hexagoni A B C D E F sigillatim æquales utrique ipsorum A F E, F E D. Ergo æquiangulum est A B C D E F hexagonum. Ostensum autem est et æquilaterum esse; et descriptum est circulo A B C D E F. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*

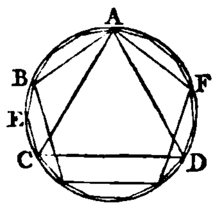
Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quæ est ex centro circuli, æquale esse; et si per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum, consequenter iis, quæ in pentagono dicta sunt: et præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, et circumscribemus. *Q. E. F.*

PROP.

PROP. XVI. PROBL. [XVI.]

In dato circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Sit A C latus trianguli[t] quidem æquilateri, in ipso circulo A B C D descripti; pentagoni [u] vero æquilateri latus A B. Quarum igitur partium est A B C D F circulus quindecim, earum circumferentia quidem A B C, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero A B, quæ quinta est circuli, erit trium. Ergo reliqua B C est duarum. Secetur B C bifariam in puncto E [x]. Quare utraque ipsarum B E, E C circumferentiarum quintadecima pars est A B C D circuli. Si igitur jungentes B E, E C, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo [y] A B C D aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum erit. *Q. E. F.*



[t] 2. hujus.
[u] 11. hujus.
[x] 30. tertii.
[y] 1. hujus.

Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum et æquiangulum; et insuper dato quindecagono æquilatero et æquiangulo circulum inscribemus, et circumscribemus.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

Definitio I. [I.]

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II. [II.]

Multiplex eſt major minoris, quando majorem minor metitur.

III. [III.]

Proportio ſeu ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem mutua quædam habitudo.

IV. [IV.]

Proportionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

V. [VIII.]

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

VI. [IX.]

Analogia vero in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

VII. [V.]

In eâdem proportione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æquimultiplices, ſecundæ et quartæ æquimultiplices,

multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ.

[VI.] VIII.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Cor. * Manifeſtum eſt ex definitione ſeptimâ, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, et inverſe proportionales eſſe.

[VII.] IX.

Prima ad ſecundam major eſſe dicitur quam in proportione tertiæ ad quartam (vel ad ſecundam majorem proportionem habere quam tertia ad quartam) quando minor aliqua quam prima ad ſecundam proportionem habet eandem, quam tertia ad quartam.

[X.] X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus, quam habet ad ſecundam.

[XI.] XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicetur ejus, quam habet ad ſecundam; et deinceps, uno ſemper amplius quoadusque analogia proceſſerit.

[XII.] XII.

Homologæ magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

[XIII.] XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.

[XIV.] XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem ceu conſequentem.

[XV.] XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

[XVI.] XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſûs, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

XVII. [XVII.]

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII. [XVIII.]

Ex æquo, ſive ex æqualitate, ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, et aliæ, ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum, omiſſis mediis.

XIX. [XIX.]

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX. [XX.]

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, et aliis, ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I. [I.]

Ejuſdem ſive æqualium æquimultiplices inter ſe æquales ſunt.

II. [II.]

Quarum eadem æquimultiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æquimultiplices, et ipſæ inter ſe ſunt æquales.

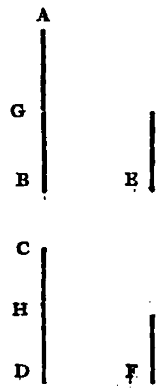
III. *

Inæqualium æquimultiplices ſunt inæquales, et major eſt majoris multiplex.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A B, C D quotcunque magnitudinum E, F, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices. Dico quotuplex est A B ipsius E, totuplices esse et A B, C D simul ipsarum E, F simul. Quoniam enim A B æquimultiplex est ipsius E, ac C D ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi E, tot erunt et in C D æquales ipsi F. Dividatur A B quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint A G, G B; et C D dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet C H, H D. Erit igitur multitudo partium C H, H D æqualis multitudini ipsarum A G, G B. Et quoniam A G est æqualis E, et C H æqualis F; erunt et A G, C H æquales ipsis E, F. Eadem ratione, quoniam G B est æqualis E, et H D ipsi F; erunt G B, H D æquales ipsis E, F. Quot igitur sunt in A B æquales ipsi E, tot sunt et in A B, C D æquales ipsis E, F. Ergo quotuplex est A B ipsius E, totuplices erunt et A B, C D simul ipsarum E, F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium. *Q. E. D.*

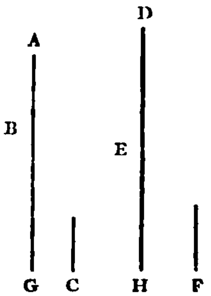


[II.] PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quintâ secundæ æquimultiplex, ac tertia cum sextâ quartæ.

Sit prima A B secundæ C æquimultiplex, ac tertia D E quartæ F. Sit autem et quinta B G secundæ C æquimultiplex, ac sexta E H quartæ F. Dico et compositam primam cum quintâ, scil. A G, secundæ C æquimultiplicem

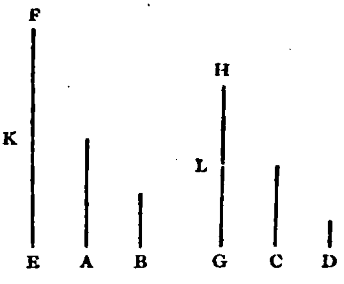
multiplicem eſſe, ac tertiam cum ſextâ, ſc. D H, quartæ F. Quoniam enim A B æquimultiplex eſt C, ac D E ipſius F; quot magnitudines ſunt in A B æquales C, tot erunt et in D E æquales F. Eâdem ratione et quot ſunt in B G æquales C, tot et in E H erunt æquales F. Quot igitur ſunt in totâ A G æquales C, tot erunt et in totâ D H æquales F. Ergo quotuplex eſt A G ipſius C, totuplex eſt et D H ipſius F. Et compoſita igitur prima cum quintâ A G ſecundæ C æquimultiplex erit, ac tertia cum ſextâ D H quartæ F. Quare ſi prima ſecundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem et quinta ſecundæ æquimultiplex, ac ſexta quartæ; erit compoſita quoque prima cum quintâ æquimultiplex ſecundæ, ac tertia cum ſextâ quartæ. *Q. E. D.*



PROP. III. THEOR. [III.]

Si prima ſecundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; ſumantur autem æquimultiplices primæ et tertiæ; erit et, ex æquali, ſumptarum utraque utriuſque æquimultiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A ſecundæ B æquimultiplex, ac tertia C quartæ D; et ſumantur ipſarum A, C æquimultiplices E F, G H. Dico E F æquimultiplicem eſſe ipſius B, ac G H ipſius D. Quoniam enim E F æquimultiplex eſt ipſius A, ac G H ipſius C; quot magnitudines ſunt in E F æquales A, tot erunt et in G H æquales C. Dividatur E F quidem in magnitudines ipſi A æquales E K, K F; G H vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet G L, L H. Erit igitur ipſarum E K, K F multitudo æqualis multitudini ipſarum G L, L H. Et quoniam æquimultiplex eſt A ipſius B, ac C ipſius D: æqualis autem E K ipſi A, et G L ipſi C; erit E K æquimultiplex ipſius B, ac G L ipſius D. Eâdem ratione æquimuiltiplex erit K F ipſius B, ac L H ipſius D.



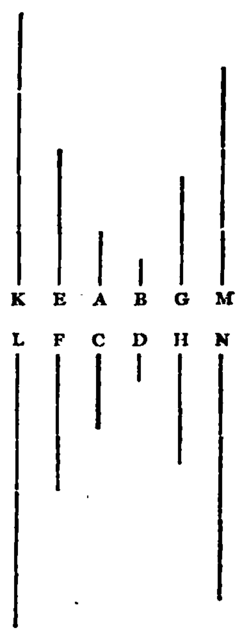
Quoniam igitur prima EK secundæ B æquimultiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem et quinta KF secundæ B æquimultiplex, ac sexta LH quartæ D: erit et composita prima cum quintâ EF secundæ B æquimultiplex[a], ac tertia cum sextâ GH quartæ D. Si igitur prima secundæ fuerit æquimultiplex, ac tertia quartæ, sumantur autem primæ et tertiæ æquimultiplices; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. *Q. E. D.*

[a] 2. hujus.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ et tertiæ ad æquimultiplices secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D. Et sumantur ipsarum quidem A, C utcunque æquimultiplices E, F; ipsarum vero B, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E, F utcunque æquimultiplices K, L, et ipsarum G, H utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur E æquimultiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E, F æquimultiplices K, L: erit K æquimultiplex[b] ipsius A, atque L ipsius C. Eâdem ratione M æquimultiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. Et quoniam est ut A ad B ita C ad D; sumptæ autem sunt ipsarum A, C æquimultiplices K, L; et ipsarum B, D aliæ æquimultiplices M, N: si [c]K superat M, superabit et L ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque K, L quidem ipsarum E, F utcunque æquimultiplices; M, N vero ipsarum G, H aliæ utcunque æquimultiplices.



[b] 3. hujus.

[c] Def. 5. hujus.

Ut

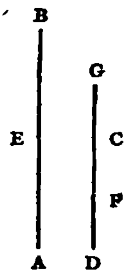
Ut igitur E ad G ita [d] erit F ad H. Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ ac tertiæ ad æquimultiplices ſecundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ. *Q. E. D.*

[d] Def. 5.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si magnitudo magnitudinis æquimultiplex ſit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ æqumiultiplex erit, ac tota totius.

Magnitudo A B magnitudinis C D æquimultiplex ſit, atque ablata A E ablatæ C F. Dico et reliquam E B reliquæ F D æquimultiplicem eſſe, atque totam A B totius C D. Quotuplex enim eſt A E ipſius C F, totuplex fiat et E B ipſius C G. Et quoniam A E æquimultiplex eſt C F, atque E B ipſius C G; erit [e] A E æquimultiplex C F, ac A B ipſius G F; ponitur autem æquimultiplex A E ipſius C F, ac A B ipſius C D. Æquimultiplex igitur eſt A B utriuſque G F, C D; ac propterea G F ipſi C D eſt [f] æqualis. Communis auferatur C F. Reliqua igitur G C æqualis eſt reliquæ D F.



[e] 1. hujus.

[f] Ax. 2. hujus.

Itaque quoniam A E æquimultiplex eſt C F, ac E B ipſius C G, eſtque C G æqualis D F; erit A B æquimultiplex C F, ac E B ipſius F D. Æquimultiplex autem ponitur A E ipſius C F, ac A B ipſius C D. Ergo E B eſt æquimultiplex F D, ac A B ipſius C D. Et reliqua igitur E B reliquæ F D æquimultiplex eſt, atque tota A B totius C D. Quare ſi magnitudo magnitudinis æquimultiplex ſit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ erit æquimultiplex, ac tota totius. *Q. E. D.*

PROP. VI. THEOR. [VI.]

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices ſint, et ablatæ quædam ſint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eiſdem æquales, vel ipſarum æquimultiplices.

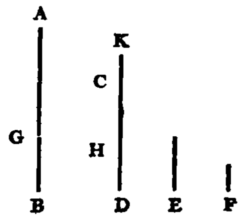
Duæ magnitudines A B, C D duarum magnitudinum E, F æquimultiplices ſint; et ablatæ A G, C H earundem ſint æquimultiplices. Dico et reliquas G B, H D vel

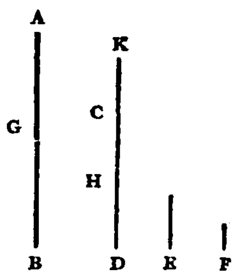
ipſis

ipsis E, F æquales esse, vel ipsarum æquimultiplices. Sit enim primo G B æqualis E. Dico et H D ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis C K. Et quoniam A G æquimultiplex est E, ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æquimultiplex [g] E, ac K H ipsius F. Æquimultiplex autem ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. Ergo K H æquimultiplex est F, ac C D ipsius F. Quoniam igitur utraque ipsarum K H, C D est æquimultiplex F, erit K H æqualis [h] C D. Communis auferatur C H. Ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. Sed K C est æqualis F. Et H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, et H D ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, et H D ipsius F æquimultiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatæ quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices. *Q. E. D.*

[g] 2. hujus.

[h] Ax. 1. hujus.





[VII. IX.]

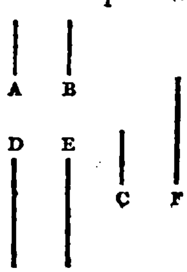
PROP. VII. THEOR.

Æqualium ad eandem eadem est proportio. Et æquales sunt, quarum ad eandem proportio eadem.

Sint æquales A, B, et ejusdem generis tertia quædam C. Dico A ad C eandem proportionem habere, quam B ad C.

Duarum A, B capiantur utcunque æquimultiplices D, E; et tertiæ C multiplex quælibet F. Æqualium A, B æquimultiplices D, E inter se sunt æquales [i]. Quare si D major sit quam F, et E eâdem F major erit. Si D, F inter se æquales sint, erunt E, F inter se æquales. Si D minor sit quam F, et E eâdem F minor erit. Æquales igitur

[i] Ax. 1. hujus.

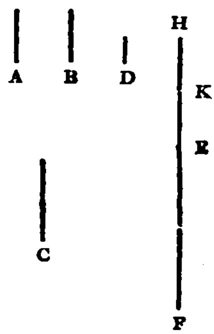


A, B

A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem habent[i].

[i] Def. 5. hujus.

Habeant jam A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem. Dico A, B esse inter se æquales. Non enim. Altera igitur major. Major sit A: excessui autem ponatur D æqualis. Multiplicari potest magnitudo D, eo usque ut magnitudine C major evadat. Factam puta multiplicationem, et sit H E multiplex magnitudinis D, magnitudine C major. Capiatur E F toties multiplex magnitudinis B, quoties H E magnitudinis D. Quoniam magnitudo A magnitudinibus B, D simul æqualis est; erunt H F, F E magnitudinum A, B æquimultiplices[k]. Capiatur F K magnitudinis C multiplex, magnitudine F E proxime major. E K igitur non major est quam C. Ast E H major quam C[l]. Quare E H major quam E K. Additoque communi F E, H F major quam K F. F E autem minor est quam F K[l]. Sed cum A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad C; magnitudines autem F E, F H magnitudinum A, B sint æquimultiplices, et F K multiplex sit ipsius C, et F H major sit quam F K; erit F E major quam F K[i]. Sed ostensa est minor. Simul igitur major et minor. Quod est absurdum. Non sunt igitur A et B inæquales. Æquales igitur. Æqualium igitur ad eandem &c. *Q. E. D.*



[k] 1. hujus.

[l] Per construct.

*Cor.** Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus A et B, et ejusdem generis tertiâ aliquâ C; inveniri possunt magnitudinum A, B æquimultiplices tales, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C superet, cum minoris multiplex eâdem magnitudinis C multiplici minor sit.

PROP. VIII. THEOR. [VII. IX.]

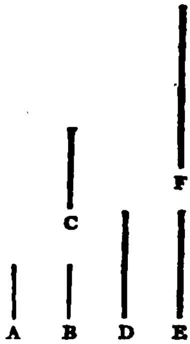
Ejusdem ad æquales eadem est proportio. Et æquales sunt, ad quas ejusdem proportio est eadem.

Æquales sint A, B, et generis ejusdem sit tertia quævis C. Dico magnitudinem C ad utramque A, B eandem proportionem habere. Capiantur enim A et B æquimultiplices D, E; et magnitudinis C multiplex quælibet

quælibet F. Æquales erunt D, E, æqualium æquimultiplices [m]. Quare si F major sit quam D, eadem F major erit quam E. Si F, D æquales sint, æquales erunt F, E. Si F minor quam D, eadem F minor quam E. Magnitudo igitur C ad utramque æqualium A, B eandem proportionem habet [n]. Quod primum erat demonstrandum.

[m] Ax. 1. hujus.

[n] Def. 5. hujus.



Habeat jam C ad utramque A, B proportionem eandem. Dico A, B æquales. Non enim. Inæquales igitur. Inveniri igitur possunt magnitudinum A, B istiusmodi æquimultiplices, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C superet, cum minoris multiplex eâdem magnitudinis C multiplici minor sit [o]. Non eadem igitur erit magnitudinis C ad A, quæ ipsius ad B proportio. Quod hypothesi contrarium est. Non sunt igitur A, B inæquales. Æquales igitur. Quare ejusdem ad æquales &c. *Q. E. D.*

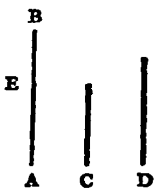
[o] Cor. * 7. hujus.

[VIII. X.]

PROP. IX. THEOR.

Inæqualium major ad eandem majorem proportionem habet. Et major est, cujus proportio ad eandem major.

Inæqualium A B, C major sit A B. Dico A B ad tertiam quamlibet D, ejusdem generis, proportionem habere majorem, quam C ad eandem D habet. Capiatur A E illi C æqualis. Æquales igitur A E et C ad eandem D eandem proportionem habent [p]. Sed propter æquales A E, C, et C minorem quam A B, erit A E minor quam A B. Minor igitur quam A B habet ad D proportionem eandem, quam C ad D. Ergo A B ad D majorem habet proportionem quam C ad D [q].



[p] 7. hujus.

[q] Def. 7. hujus.

Inæqualium autem A B, C, habeat A B ad tertiam aliquam homogeneam D majorem proportionem quam C ad D. Dico A B majorem quam C. Habet enim minor quædam quam A B ad D proportionem eam, quam C ad D [q]. Minor illa sit A E. Æquales igitur sunt

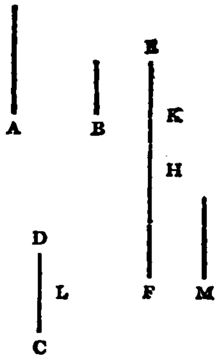
A E,

A E, C [r]. Quare A B, quæ major eſt quam A E, ejus æquali C major erit. Quare inæqualium major &c. *Q. E. D.* [r] 9. hujus.

PROP. X. THEOR. [VIII. X.]

Eadem ad inæqualium minorem majorem proportionem habet. Et minor eſt, ad quam ejuſdem proportio major.

Inæqualium A, B ſit B minor. Et ejuſdem generis ſit alia quævis C D. Dico C D ad B majorem proportionem habere quam ad A. Magnitudinum A, B capiantur æquimultiplices F E, F H; magnitudinis etiam C D multiplex F K, quæ minor ſit quam F E, major autem quam F H. Namque eo modo multiplices capi poſſunt [s]. Habeat C L ad B proportionem eam, quam C D ad A. Quoties autem F K multiplex eſt magnitudinis C D, toties ſit M illius C L. Jam cum C D ad A proportionem habeat, quam C L ad B; magnitudines autem F K, M primæ et tertiæ, C D et C L, ſint æquimultiplices, et F E, F H ſecundæ et quartæ A et B; F K autem minor ſit quam F E, idcirco M minor erit quam F H [t]. Multo igitur minor quam F K. Sunt autem M, F K magnitudinum C L, C D æquimultiplices: C L igitur minor erit quam C D [u]. Minor igitur quam C D habet ad B eandem, quam C D ad A proportionem: C D igitur majorem habet ad B quam ad A proportionem [x]. Quod primum erat demonſtrandum.



[s] Cor. 7. hujus.
[t] Def. 5. hujus.
[u] Ax. 3. hujus.
[x] Def. 7. hujus.

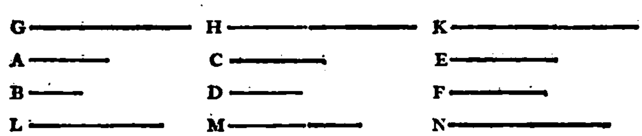
Habeat jam C D ad B proportionem majorem quam ad A. Dico B minorem quam A. Nam cum C D majorem habeat ad B quam ad A proportionem; minor aliqua quam C D habet ad B proportionem, quam C D ad A [x]. Sit minor illa C L. Inæqualium C D, C L capiantur F K, M æquimultiplices; et magnitudinis B multiplex quædam F H, quæ major ſit quam M, minor autem quam F K. Trium enim C D, C L, B eo modo capi poſſunt multiplices [s]. Quoties autem eſt F H multiplex ipſius B, toties ſit F E ipſius A. Jam cum C L ad B proportionem habeat eandem, quam C D ad A, et magnitudines M, F K primæ et tertiæ, C L et C D, ſint æqui-

æquimultiplices, necnon F H et F E secundæ et quartæ B et A, harum autem M minor sit quam F H; erit F K minor quam F E. Quare F H multo minor quam F E: Sunt autem F H, F E magnitudinum B, A æquimulti-
γ Ax. 3. hujus. plices. Quare B minor est quam A [γ]. Quare eadem ad inæqualium &c. *Q. E. D.*

[XI.] PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem sunt proportiones, et inter se eædem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D; ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B ita esse E ad F. Sumantur enim



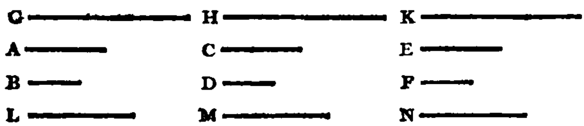
ipsarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K; ipsarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur est ut A ad B ita C ad D; et sumptæ sunt ipsarum A, C æquimultiplices G, H, et ip-
z Def. 5. hujus. sarum B, D aliæ utcunque æquimultiplices L, M; si [z] G superat L, et H ipsam M superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Rursus quoniam est ut C ad D ita E ad F; et sumptæ sunt ipsarum C, E utcunqne æquimultiplices H, K, ipsarum vero D, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N; si [z] H superat M, et K ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si H superat M, et G superabit L; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare si G superat L, et K ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt G, K quidem ipsarum A, E æquimultiplices; L, N vero ipsarum B, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ergo [z] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, et inter se eædem sunt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F, et ut A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A, C, E, ad B, D, F. Sumantur enim



ipsarum A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, et ipsarum B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, et E ad F; et sumptæ sunt ipsarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, ipsarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N; si [a] G superat L, et H ipsam M [a] Def. 5. superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si hujus. minor, minor. Quare et si G superat L, superabunt et G, H, K ipsas L, M, N; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Suntque G, et G, H, K ipsarum A, et A, C, E æquimultiplices; quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt et [b] 1. hujus. omnes omnium. Et eâdem ratione L, et L, M, N ipsarum B, et B, D, F sunt æquimultiplices. Est igitur [a] ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. *Q. E. D.*

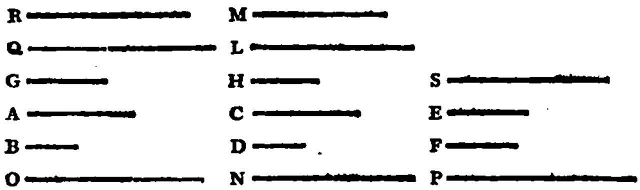
PROP.

[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad ſextam: et prima ad ſecundam majorem habebit proportionem, quam quinta ad ſextam.

Sit prima A ad ſecundam B ut tertia C ad quartam D. Tertia autem C major ſit quam ut habeat ad quartam D proportionem eam, quam quinta E ad ſextam F. Dico



primam A majorem eſſe quam ut habeat ad ſecundam B proportionem, quam quinta E ad ſextam F. Habeat enim G ad B proportionem eam, quam E ad F. Propter C majorem quam ad D in ratione E ad F, minor aliqua quam C habet ad D proportionem eam, quam E ad F. Sit H minor illa. Inæqualium C, H capiantur L, M æquimultiplices; capiatur etiam N multiplex ipſius D, quæ major ſit quam M, minor autem quam L. Trium enim C, H, D ita capi poſſunt multiplices [c]. Capiantur etiam Q, R, S magnitudinum A, G, E toties multiplices, quoties L, M magnitudinum ſunt C, H. Capiantur denique O, P magnitudinum B, F toties multiplices, quoties N multiplex eſt ipſius D. Jam cum H ſit ad D ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, H et E, ſint M et S æquimultiplices; ſecundæ autem et quartæ, D et F, ſint N, P æquimultiplices; cum præterea harum multiplicium M minor ſit quam N, erit S minor quam P [d]. Rurſum cum G ſit ad B ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, G et E, ſint R, S æquimultiplices, ſecundæ autem et quartæ, B et F, æquimultiplices ſint O et P; cum præterea harum multiplicium S minor ſit quam P (id enim modo oſtenſum) erit R minor quam O [d]. Rurſum cum A ſit ad B ut C ad D, harum autem primæ et tertiæ, A et

[c] Cor.* 7. hujus.

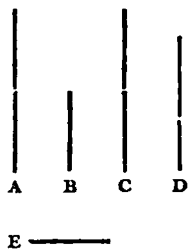
[d] Def. 5. hujus.

et C, sint Q, L æquimultiplices; secundæ autem et quartæ, B et D, æquimultiplices O et N; præterea cum harum multiplicium L major sit quam N, erit etiam Q major quam O [e]. Multo major igitur quam R, quæ ostensa est minor quam O. Magnitudinum autem A, G sunt illæ Q, R æquimultiplices. Quare A major est quam G [f]. Sed G habet ad B proportionem eam, quam E ad F. Major igitur A ad B quam in ratione E ad F. Quare si prima &c. *Q. E. D.*

[e] Def. 5. hujus.

[f] Ax. 3. * hujus.

Cor. * Si prima ad secundam major sit quam in ratione tertiæ ad quartam, invertendo erit quarta ad tertiam major quam in proportione secundæ ad primam. Sit A ad B major quam in ratione C ad D. Dico D ad C majorem quam in ratione B ad A. Sit enim C ad E ut A ad B. Cum igitur C sit ad E ut A ad B, et A ad B major quam in ratione C ad D; erit C ad E major quam in proportione C ad D [g]. Quare E minor erit quam D [h]. Sed cum C ad E ut A ad B, invertendo erit E ad C ut B ad A [i]. Minor igitur quam D habet ad C proportionem eam, quam B ad A. *Q. E. D.*



[g] Per hanc Prop.

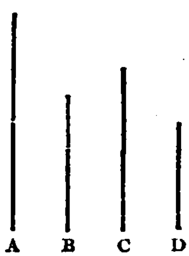
[h] 10. hujus.

[i] Cor. * Def. 8. hujus.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quam C. Dico et B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, et alia est utcunque magnitudo B, habebit [k] A ad B majorem proportionem quam C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. Ergo et C ad D majorem habebit [l] proportionem quam C ad B. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [m] est. Quare D est minor



[k] 8. hujus.

[l] 13. hujus.

[m] 10. hujus.

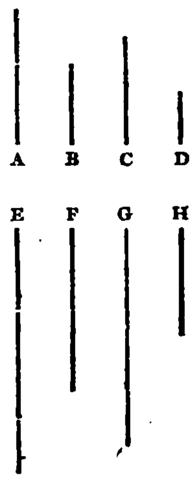
quam B; ac propterea B quam D major erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem; et si A sit minor quam C, et B quam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. *Q. E. D.*

SCHOLION.*

Subjungere visum est demonstrationem cognati Theorematis, quod mirum est Euclidem silentio præteriisse.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, prima autem secundæ æqualis sit, erit et tertia æqualis quartæ. Quod si prima major sit quam secunda, erit et tertia major quam quarta; si minor, minor.

(Demonstratio Simsoni) Sit prima A ad secundam B, ut tertia C ad quartam D. Quatuor A, B, C, D capiantur E, F, G, H æquimultiplices.



Jam si æquales sint A et B, æquales erunt E et F, æqualium utique æquimultiplices [n]. Sed cum A sit ad B ut C ad D, primæ autem et tertiæ æquimultiplices sint, E, G, secundæ item et quartæ, F, G; cum præterea E ostensa sit æqualis ipsi F, erit G æqualis ipsi H [o]. Illæ autem G, H tertiæ et quartæ C, D sunt æquimultiplices. Æquales igitur sunt C et D [p].

Quod si A major sit quam B, erit E major quam F [q]. Quare [o] G major quam H. Sed G, H duarum C, D sunt æquimultiplices. Quare duarum major est C, cujus multiplex major [q].

[n] Ax. 1. hujus.

[o] Def. 5. hujus.

[p] Ax. 2. hujus.

[q] Ax. 3.* hujus.

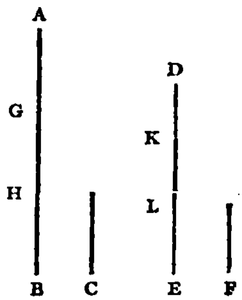
Simili modo ostendetur, si A minor sit quam B, minorem esse C quam D. Quare si prima &c. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices.

Sit enim A B æquimultiplex C, ac D E ipsius F. Dico ut C ad F, ita esse A B ad D E.

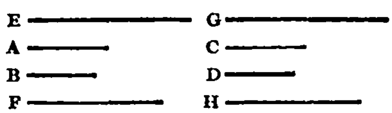


Quoniam enim æquimultiplex est A B ipsius C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi C, totidem erunt et in D E æquales F. Dividatur A B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint A G, G H, H B; et D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K, K L, L E. Erit igitur ipsarum A G, G H, H B multitudo æqualis multitudini D K, K L, L E. Et quoniam æquales sunt A G, G H, H B, suntque D K, K L, L E inter se æquales; ut A G ad D K, ita [r] erit G H ad K L, [r 7. hujus.] et H B ad L F. Atque erit [s] ut una antecedentium ad [s 12. hujus.] unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut A G ad D K, ita A B ad D E. Sed A G ipsi C est æqualis, et D K ipsi F. Ergo ut C ad F, ita erit A B ad D E. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices. *Q. E. D.*

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

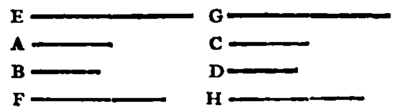
Sint quatuor magnitudines A, B, C, D; sitque ut A ad B, ita C ad D.



Dico et permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A, B utcunque æquimultiplices E, F; ipsarum vero C, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Et quoniam æquimultiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem inter se comparatæ eandem habent [t] pro- [t 15. hujus.]

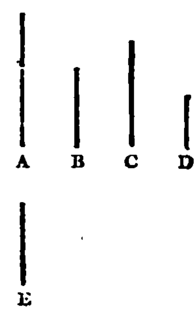
 portionem

portionem, quam habent earum æquimultiplices; erit ut A ad B ita E ad F. Ut autem A ad B ita C ad D. Ergo [u] 11. hujus. et ut C ad D ita [u] E ad F. Rursus quoniam G, H sunt ipsarum C, D æquimultiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter se comparatæ, [x] 15. hujus. quam habent earum æquimultiplices; erit [x] ut C ad D ita G ad H. Sed ut C ad D ita E ad F. Ergo et ut E ad F ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines pro- [y] 14. hujus. portionales sint, prima autem major [y] sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntque E, F ipsarum A, B utcunque æquimultiplices, et G, H ipsarum C, D aliæ utcunque æquimultiplices; [z] Def. 5. ergo [z] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. *Q. E. D.*



Cor. * Si prima ad secundam major sit quam in proportione tertiæ ad quartam; permutando prima ad tertiam major erit quam in ratione secundæ ad quartam.

Sit A major quam ad B in ratione C ad D. Dico permutando A majorem esse quam ad C in ratione B ad D. Quoniam enim A major est quam ad B in ratione C ad D; erit minor aliqua quam A ad B ut C ad D: sit E minor illa. Cum igitur sit E ad B ut C ad D; permutando erit [a] Per hanc Prop. E ad C, ut B ad D [a]. Minor igitur quam A habet ad C proportionem eam, quam B ad D. Quare major A quam ad [b] Def. 7. hujus. C in proportione B ad D [b]. *Q. E. D.*

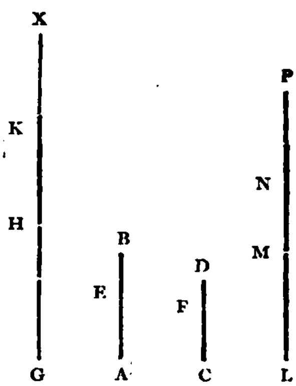


PROP.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si compositæ magnitudines sint proportionales, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales A B, B E, C D, D F; hoc est, ut A B ad B E, ita sit C D ad D F. Dico etiam divisas proportionales esse; videlicet ut A E ad E B ita esse C F ad F D. Sumantur enim ipsarum quidem A E, E B, C F, F D utcunque æquimultiplices G H, H K, L M, M N; ipsarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices K X, N P. Quoniam æquimultiplex est G H ipsius A E, ac H K ipsius E B; erit [c] G H ipsius A E æquimultiplex, ac G K ipsius A B. Æquimultiplex autem est G H ipsius A E, ac L M ipsius C F. Ergo G K æquimultiplex est A B, ac L M ipsius C F. Rursus quoniam æquimultiplex est L M ipsius C F, ac M N ipsius F D; erit [c] L M æquimultiplex C F, ac L N ipsius C D. Sed æquimultiplex erat L M ipsius C F, ac G K ipsius A B. Æquimultiplex igitur est G K ipsius A B, ac L N ipsius C D. Quare G K, L N ipsarum A B, C D æquimultiplices erunt. Rursus quoniam æquimultiplex est H K ipsius E B, ac M N ipsius F D: est autem et K X ipsius E B æquimultiplex, ac N P ipsius F D; et composita H X ipsius E B æquimultiplex est[d], ac M P ipsius F D. Quare cum sit ut A B ad B E, ita C D ad D F; et sumptæ sint ipsarum quidem A B, C D æquimultiplices G K, L N, ipsarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices H X, M P: si [e] G K superat H X, et L N superabit M P; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet igitur G K ipsam H X; communique ablatâ H K, et G H ipsam K X superabit. Sed si G K superat H X, et L N superat M P; itaque superat L N ipsam M P: communique M N ablatâ, et L M superabit N P. Quare si G H superat K X, et L M ipsam N P superabit. Similiter demonstrabimus et si G H sit æqualis



[c] 1. hujus.

[d] 2. hujus.

[e] Def. 5. hujus.

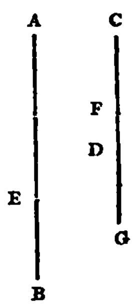
K X, et L M ipſi N P eſſe æqualem; et ſi minor, minorem. Sunt autem G H, L M ipſarum A E, C F utcunque æquimultiplices, et ipſarum E B, F D aliæ utcunque æqui-
[f] Def. 5. hujus. multiplices K X, N P. Ergo [f] ut A E ad E B ita erit C F ad F D. Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, et diviſæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

Cor. * Si prima et ſecunda ſimul ad ſecundam major ſit quam in proportione tertiæ et quartæ ſimul ad quartam; dividendo prima ad ſecundam major eſt quam in proportione tertiæ ad quartam.

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, et compoſitæ proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines proportionales A E, E B, C F, F D; hoc eſt ut A E ad E B, ita C F ad F D. Dico etiam compoſitas proportionales eſſe, videlicet ut A B ad B E, ita eſſe C D ad D F. Nam ut A B ad B E, ita ſit G F ad F D. Et quoniam eſt ut A B ad B E, ita G F ad F D, compoſitæ magnitudines ſunt proportion-
[g] 17. hujus. ales; ergo et diviſæ proportionales erunt [g]. Eſt igitur ut A E ad E B, ita G D ad D F. Ponitur autem ut A E ad E B, ita C F ad
[h] 11. hujus. F D. Quare et [h] ut G D ad D F, ita C F ad F D. Duarum igitur G D, C F ad eandem F D eadem eſt proportio. Æquales igitur
[i] 9. hujus. inter ſe ſunt G D, C F [i]. Additâque communi D F erunt G F, C D inter ſe æquales. Æqualium
[k] 7. hujus. autem G F, C D ad eandem F D proportio eadem [k]. Erit igitur C D ad D F ut G F ad F D. Sed G F eſt ad F D ut A B ad B E. Quare A B ad B E ut C D ad D F. Quare ſi diviſæ magnitudines ſint proportionales, et compoſitæ proportionales erunt. *Q. E. D.*



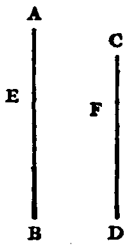
Cor. * Si prima ad ſecundam major ſit quam in proportione tertiæ ad quartam; componendo, prima et ſecunda ſimul ad ſecundam major eſt quam in ratione tertiæ et quartæ ſimul ad quartam.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

Sit enim ut tota A B ad totam C D, ita ablata A E ad ablatam C F. Dico et reliquam E B ad reliquam F D ita esse ut tota A B ad totam C D. Quoniam enim est ut tota A B ad totam C D, ita A E ad C F; et permutando erit [k] ut A B ad A E, ita C D ad C F. Quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, et divisæ proportionales erunt [l]; ut igitur B E ad E A, ita D F ad F C: rursusque permutando ut [k] B E ad D F, ita E A ad F C. Sed ut E A ad C F, ita posita est A B ad C D. Et reliqua [m] igitur E B erit ad reliquam F D, ut tota A B ad totam C D. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. *Q. E. D.*



[k] 16. hujus.
[l] 17. hujus.
[m] 11. hujus.

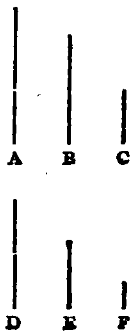
Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut A B ad B E ita C D ad D F. Dividendo erit A E ad E B ut C F ad F D [l]. Et invertendo B E ad E A ut D F ad F C [n]. Quare componendo B A ad A E ut D C ad C F [o].

[n] Cor.* Def. 8. hujus.
[o] 18. hujus.

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; ex æquali autem prima major sit, quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F, binæ sumptæ, sint in eâdem proportione: id est, sit ut A ad B, ita D ad E, et ut B ad C, ita E ad F: ex æquali autem major sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim A major est quam C, alia vero est utcunque B, et major ad eandem majorem habet [p] proportionem quam minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita D ad



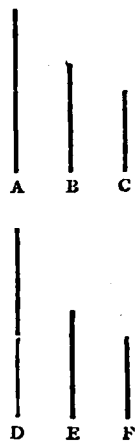
[p] 8. hujus.

D ad E; et invertendo ut C ad B, ita F ad E. Ergo
[p] 13. hujus. et D ad E majorem habet proportionem quam F ad E[p]. Proportionem vero ad eandem habentium, quæ majorem
[q] 10. hujus. habet, illa major[q] eſt. Major igitur eſt D quam F. Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F æqualem eſſe; et ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuérint, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. *Q. E. D.*

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione; ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali prima major ſit quam tertia: et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.

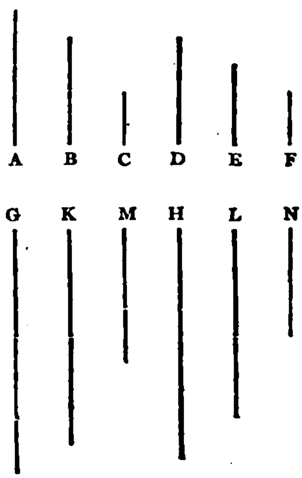
Sint tres magnitudines proportionales A, B, C, et aliæ ipſis numero æquales D, E, F; quæ, binæ ſumptæ, in eâdem ſint proportione. Sit autem perturbata earum analogia; videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A major ſit quam C. Dico et D quam F majorem eſſe; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Quoniam enim major eſt A quam C, alia
[r] 8. hujus. vero eſt B; habebit[r] A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita E ad F; et invertendo ut C ad B, ita E ad D. Quare et E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet,
[s] 10. hujus. illa minor eſt[s]. Minor igitur eſt F quam D; ac propterea D quam F major erit. Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F eſſe æqualem; et ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione; ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali autem prima major ſit quam tertia: et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. *Q. E. D.*



PROP.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; et ex æquali in eâdem proportione erunt.



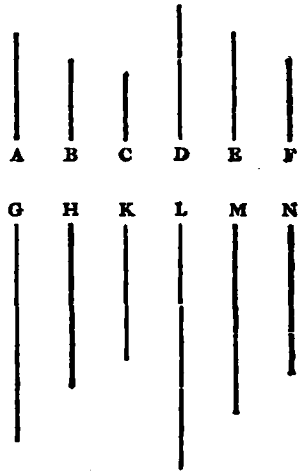
Sint quotcunque magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F, binæ sumptæ in eâdem proportione; hoc est, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eâdem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A, D utcunque æquimultiplices G, H; ipsarum vero B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L, et ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum A, D æquimultiplices G, H, et ipsarum B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L; erit ut[t] G ad K, [t] 4. hujus. ita H ad L. Eâdem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. Et cum sint tres magnitudines G, K, M, et aliæ ipsis numero æquales H, L, N, binæ sumptæ et in eâdem proportione; ex æquali[u] si G superat M, et H [u] 20. hujus. ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque G, H ipsarum A, D æquimultiplices, et M, N ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ut igitur A ad C, ita erit[w] D ad F. Quare si sint quot- [w] Def. 5. hujus. cunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

PROP.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia: et ex æquali in eâdem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eâdem proportione, D, E, F; sit autem perturbata earum analogia, hoc est, sit ut A ad B, ita E ad F, et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A, B, D utcunque æquimultiplices G, H, L: ipsarum vero C, E, F aliæ utcunque æquimultiplices K, M, N. Et quoniam G, H æquimultiplices sunt ipsarum A, B, partes autem eandem habent proportionem, quam habent ipsarum æqui-



[x] 15. hujus. multiplices: erit [x] ut A ad B, ita G ad H. Et simili ratione ut E ad F, ita M ad N.

[y] 11. hujus. Atque est ut A ad B, ita E ad F. Ut [y] igitur G ad H, ita M ad N. Rursus quoniam est ut B ad C, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum B, D æquimultiplices H, L, ipsarum vero C, E aliæ utcunque æquimultiplices K, M: erit ut H ad K, ita L ad M. Ostensum autem est et ut G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines sunt G, H, K, et aliæ ipsis numero æquales L, M, N, binæ sumptæ in eâdem proportione,

[z] 21. hujus. estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali, si [z] G superat K, et L ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sunt autem G, L ipsarum A, D æquimultiplices; et K, N æquimultiplices ipsarum

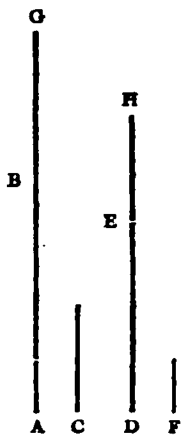
[a] Def. 5. hujus. C, F. Ut igitur [a] A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam.

Prima A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. Habeat autem et quinta B G ad secundam C proportionem eandem, quam sexta E H ad quartam F. Dico et compositam primam cum quintâ A G ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sextâ D H ad quartam F. Quoniam enim est ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. Et quoniam ut A B ad C, ita est D E ad F: ut autem C ad B G, ita F ad E H; erit[b], ex æquali, ut A B ad B G, ita D E ad E H. Quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales[c] erunt. Ut igitur A G ad G B, ita est D H ad H E. Sed et ut [d] G B ad C, ita H E ad F. Ergo, ex [b] æquali, ut A G ad C, ita erit D H ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam. *Q. E. D.*



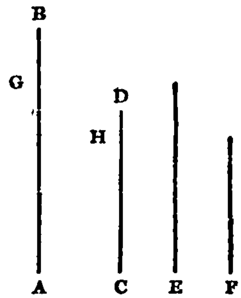
[b] 22. hujus.
[c] 18. hujus.
[d] Hypoth.

PROP.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, E, F; et sit ut A B ad C D, ita E ad F. Sit autem maxima ipsarum A B, et F minima. Dico A B et F ipsis C D, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis A G, ipsi vero F æqualis C H. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; estque A G æqualis E, et C H æqualis F; erit ut A B ad D C, ita A G ad C H. Et quoniam ut tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam C H; et reliqua G B ad reliquam H D erit



[e] 19. hujus. [e] ut tota A B ad C D totam. Et permutando G B ad A B
[f] 16. hujus. ad H D ad C D [f]. Major autem est A B quam C D. Ergo
[g] 14. hujus. et G B quam H D major erit [g]. Quod cum A G sit æqualis ipsi E, et C H ipsi F; erunt A G et F ipsi C H et E æquales. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. Ergo G B, H D inæqualibus existentibus, quippe cum G B sit major, si ipsi quidem G B addantur A G et F, ipsi vero H D addantur C H et E: fient A B et F ipsis C D et E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

EUCLIDIS

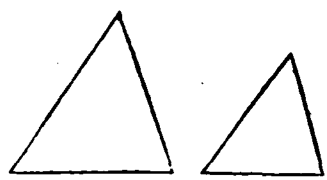
ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

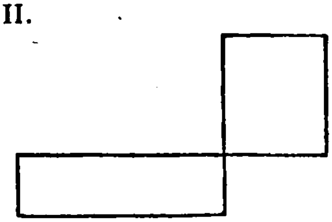
DEFINITIO I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ et singulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt, quando in utrâque figurâ antecedentes, et consequentes rationum fuerint termini.

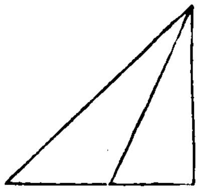


III.

Extremâ ac mediâ ratione secari recta linea dicitur, quando sit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.



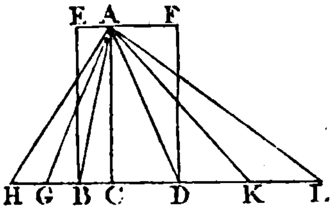
Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis, quæ a vertice ad baſim ducitur.

V.

Si fuerint plures magnitudines ejuſdem generis, ratio primæ ad ultimam componi dicitur ex rationibus omnibus intermediis.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.



Sint triangula quidem A B C, A C D, parallelogramma vero E C, C F, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad B D ductam. Dico ut baſis B C ad C D baſim, ita eſſe triangulum A B C ad triangulum A C D, et parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum. Producatur B D ex utrâque parte ad puncta H, L; et ipſi quidem B C baſi æquales quotcunque ponantur B G, G H; ipſi vero baſi C D ponantur quotcunque æquales D K, K L; et A G, A H, A K, A L jungantur. Quoniam igitur C B, B G, G H inter ſe æquales ſunt, erunt et tri-

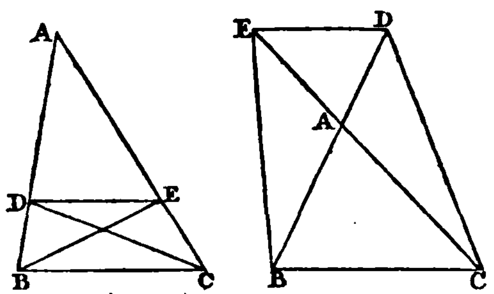
a 38. primi. angula A H G, A G B, A B C inter [a] ſe æqualia. Ergo quotuplex eſt baſis H C ipſius B C baſis, totuplex eſt A H C triangulum trianguli A B C. Eâdem ratione quotuplex eſt L C baſis ipſius baſis C D, totuplex eſt et triangulum A L C ipſius A C D trianguli; et ſi æqualis eſt H C baſis baſi C L, et triangulum A H C triangulo A L C eſt [a] æquale; et ſi baſis H C baſim C L ſuperat, et triangulum A H C ſuperabit triangulum A L C; et ſi minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus baſibus B C, C D, et duobus triangulis A B C, A C D, ſumpta ſunt æquimultiplicia baſis quidem B C, et A B C trianguli, videlicet baſis H C, et A H C triangulum:

angulum: basis vero C D, et trianguli A C D, alia utcunque æquimultiplicia, nempe C L basis, et A L C triangulum; atque ostensum est, si H C basis basim C L superat, et triangulum A H C superare triangulum A L C; et si æqualis, æquale; et si minor, minus. Est igitur [b] ut B C basis ad basim C D, ita triangulum A B C ad [b] Def. 5. A C D triangulum. Et quoniam trianguli A B C duplum quinti. est [c] parallelogrammum E C, et trianguli A C D paral- [c] 41. primi. lelogrammum F C duplum [d], partes autem cum pariter [d] 15. quinti. multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis B C ad C D basim, ita esse A B C triangulum ad triangulum A C D; ut autem A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum; erit [e] ut B C [e] 11. quinti. basis ad basim C D, ita parallelogrammum E C ad F C parallelogrammum. Quare triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

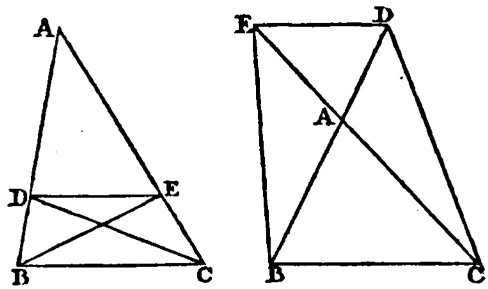
PROP. II. THEOR. [II.]

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim A B C uni laterum B C parallela ducatur D E. Dico ut D B ad D A, ita esse C E ad E A.

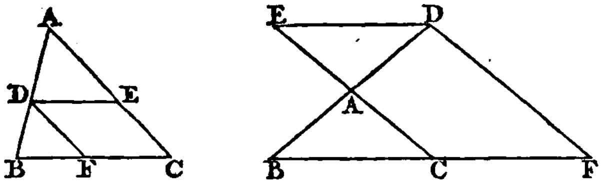


Jungantur B E, C D. Triangulum igitur B D E triangulo C D E est [f] æquale, in eadem enim sunt basi D E, et [f] 37. primi. in



in eisdem D E et B C parallelis; aliud autem triangulum [g] 7. quinti. est A D E: sed æqualia ad idem eandem habent [g] proportionem; ergo ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita est C D E triangulum ad triangulum A D E. [h] 1. hujus. Ut autem triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [h] est B D ad D A; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem a puncto E ad A B ductam, inter se sunt ut bases. Et ob eandem causam ut C D E triangulum ad triangulum A D E, ita C E ad E A. Et [i] 11. quinti. igitur ut B D ad D A, ita est [i] C E ad E A. Et si trianguli A B C latera A B, A C proportionaliter secta sint, *i. e.* si ut B D ad D A, ita sit C E ad E A; et jungatur D E: dico D E ipsi B C parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut B D ad D A, ita C E ad E A; ut autem B D ad D A, ita [h] est B D E triangulum ad triangulum A D E; et ut C E ad E A, ita C D E triangulum [h] ad triangulum A D E, erit ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [i] C D E triangulum ad triangulum A D E. Quod cum utrumque triangulorum B D E, C D E ad triangulum A D E eandem habeat proportionem; erit B D E triangulum [k] 9. quinti. [k] triangulo C D E æquale; et sunt in eâdem basi D E. Æqualia autem triangula, et in eâdem basi constituta, etiam in eisdem [l] sunt parallelis. [l] 39. primi. Ergo D E ipsi B C parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. *Q. E. D.*

Cor. * Recta D E, basi trianguli A B C parallela, lateribus A B, A C (si opus sit productis) in punctis D, E occurrens triangulum A D E constituit triangulo A B C simile, et homologa



mologa sunt latera, quæ sunt in eâdem rectâ. Et si recta DE, lateribus trianguli ABC in punctis D, E occurrens, constituat triangulum ADE ipsi ABC simile, et latera homologa sint in eâdem rectâ; recta DE basi BC parallela erit. Angulus enim A triangulis duobus BAC, DAE communis est. Et si DE basi BC parallela sit, erit angulus ADE angulo ABC, necnon AED angulus angulo ACB, æqualis [m]. Æquiangula igitur sunt triangula ABC, ADE. Et cum BD sit ad DA ut CE ad EA [n], componendo vel dividendo, erit BA ad AD ut CA ad AE [o]. Permutando BA ad AC ut AD ad AE. Triangulorum igitur BAC, DAE latera, circa angulum communem A, sunt proportionalia. Agatur jam per punctum D recta DF, ipsi AC parallela, quæ basi BC (si opus sit productæ) in F occurrat. Erit BF ad FC ut BD ad DA [n]. Componendo igitur vel dividendo, BC ad CF ut BA ad AD [o]. Figura autem DECF est parallelogrammum. Recta igitur FC rectæ DE æqualis est [p]. Rectæ igitur BC ad ED eadem, quæ ad FC, est proportio [q]. Quare BC ad DE ut BA ad AD [r]. Permutando BC ad BA ut DE ad AD [s]. Triangulorum igitur ABC, ADE latera, circa angulos æquales ABC, ADE, sunt proportionalia. Denique cum BC sit ad BA ut DE ad DA, et BA ad AC ut DA ad AE (id enim prius ostensum) ex æquo erit BC ad AC ut DE ad AE. Triangulorum igitur ABC, ADE latera, circa æquales angulos ACB, AED, sunt proportionalia. Triangula igitur ABC, ADE sunt æquiangula, et latera circa æquales angulos proportionalia habent. Similia igitur sunt triangula ABC, ADE, et latera sunt homologa, quæ in eâdem sunt rectâ. Quod primum demonstrandum erat.

[m] 29. primi.
[n] Per hanc Prop.
[o] 18. vel 17. quinti.
[p] 34. primi.
[q] 7. quinti.
[r] 11. quinti.
[s] 16. quinti.

Jam vero recta DE, lateribus trianguli ABC in punctis D, E occurrens, constituat triangulum ADE simile triangulo ABC, et homologa sint latera, quæ sunt in eâdem rectâ. Nempe AB ad AD, ut AC ad AE. Dico rectam DE

 trianguli

trianguli A B C basi B C esse parallelam. Nam cum similia sint triangula A B C, A D E, æquiangula erunt. Et æquales erunt anguli, circa quos latera sunt proportionalia [t]. Angulus igitur A D E angulo A B C æqualis. Recta igitur D E rectæ B C parallela [u]. *Q. E. D.*

[t] Def. 1. hujus.
[u] 28. primi.

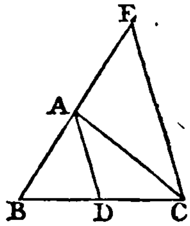
[III.]

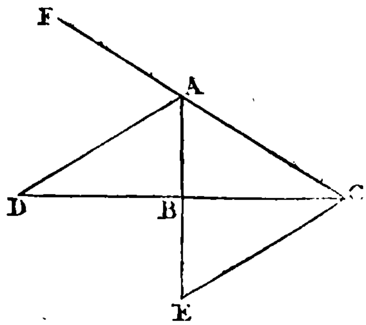
PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera; et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, triangulum angulum bifariam secabit.

Sit triangulum A B C; et secetur angulus B A C (vel externus B A F) bifariam [x] rectâ lineâ A D. Dico ut B D ad D C, ita esse B A ad A C. Ducatur per C ipsi D A pa-

[x] 9. primi.





rallela [y] C E, et producta B A conveniat cum ipsâ in E puncto. Quoniam igitur in parallelas A D, E C incidit recta linea quædam A C; erit [z] A C E angulus angulo C A D (vel adjacenti D A F, si externus sit angulus, quem A D medium dividit) æqualis. Sed C A D angulus (vel D A F) ponitur æqualis angulo B A D. Ergo et B A D ipsi A C E angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas A D, E C recta linea B A E incidit, angulus B A D æqualis est A E C. Ostensus autem est et angulus A C E angulo B A D æqualis. Ergo et A C E ipsi A E C æqualis erit: ac propterea latus A E æquale [a] lateri A C. Et quoniam uni laterum trianguli B C E, videlicet ipsi E C, parallela ducta est A D; erit [b] ut B D ad D C, ita B A ad A E; æqualis autem

[y] 31. primi.
[z] 29. primi.
[a] 6. primi.
[b] 2. hujus.

autem eſt A E ipſi A C. Eſt igitur [c] ut B D ad D C, ita B A ad A C. Et ſi ſit ut B D ad D C, ita B A ad A C, et A D jungatur; dico angulum B A C (vel externum B A F, ſi punctum D ſit extra triangulum) bifariam ſectum eſſe rectâ lineâ A D. Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut B D ad D C, ita B A ad A C; ſed et ut B D ad D C, ita [d] B A ad A E, etenim uni laterum trianguli B C E, videlicet ipſi E C, parallela ducta eſt A D; erit et ut B A ad A C, ita B A ad A E [e]. Ergo A C eſt [f] æqualis A E; ac propterea, et angulus A E C angulo E C A æqualis [g]. Sed angulus quidem A E C eſt æqualis [h] angulo B A D; angulus vero A C E æqualis [h] C A D (vel D A F.) Quare et B A D angulus ipſi C A D (vel D A F) æqualis erit. Angulus igitur B A C (vel externus B A F) bifariam ſectus eſt rectâ lineâ A D. Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea etiam baſim ſecet; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. Et ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit. *Q. E. D.*

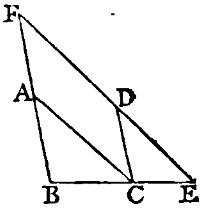
c 7. quinti.
d 2. hujus.
e 11. quinti.
f 9. quinti.
g 5. primi.
h 29. primi.

SCHOLION.*

Hanc propoſitionem tam de externis, quam internis triangulorum angulis accepiſſe veteres, certiſſimum eſt. Quorum utique nemo eam de externo demonſtrare aggreſſus eſt; tanquam ab Euclide demonſtratam uſurpant omnes. Neque minus generaliter accipiendam eſſe Euclides ipſe ſignificavit, cum tali eam conditione ſubjecerit, ἐὰν ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν. Quaſi illud perſpectum habuerit, rectam, quæ angulum dividat, non ſemper occurſuram baſi. Atqui baſi nequit non occurrere, quæ internum dividit. Quæ medium dividit externum, ita baſi occurret, ſi crura trianguli inæqualia ſint. Nam ſi iſoſceles fuerit triangulum, quæ angulum, qui ad verticem externus eſt, medium dividit linea recta, baſi parallela erit.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos ſunt, proportionalia ſunt; et homologa, ſive ejuſdem nominis, ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.



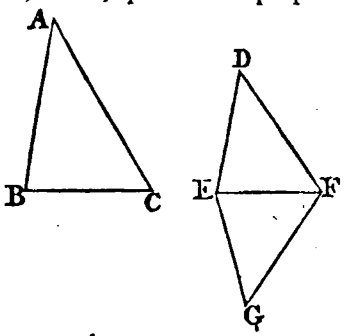
Sint æquiangula triangula A B C, D C E, quæ angulum quidem A B C angulo D C E, angulum vero A C B angulo D E C æqualem habeant, et prætere angulum B A C angulo C D E. Dico triangulorum A B C, D C E proportionalia eſſe latera, quæ ſunt circa æquales angulos; et homologa, ſive ejuſdem nominis, latera eſſe, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ponatur B C in directum ipſi C E. Et quo-
[f] 17. primi. niam anguli A B C, A C B duobus rectis minores [f] ſunt, æqualis autem eſt angulus A C B angulo D E C; erunt A B C, D E C anguli duobus rectis minores. Quare B A,
[g] 12. ax. primi. E D productæ inter ſe convenient [g]; producantur, et conveniant in puncto F. Et quoniam angulus D C E
[h] 28. primi. eſt æqualis angulo A B C; erit [h] B F ipſi D C parallela. Rurſus quoniam æqualis eſt angulus A C B angulo D E C, parallela [h] erit A C ipſi F E. Parallelogrammum igitur eſt F A C D; ac propterea F A quidem ipſi C D, A C vero
[i] 34. primi. ipſi F D, eſt [i] æqualis. Et quoniam uni laterum trianguli F B E, videlicet ipſi F E, parallela ducta eſt A C;
[k] 2. hujus. erit [k] ut B A ad A F, ita B C ad C E. Æqualis autem eſt A F ipſi C D. Ut igitur B A ad C D, ita B C ad C E; et permutando, ut B A ad B C, ita C D ad C E. Rurſus quoniam C D parallela eſt B F, erit [k] ut B C ad C E, ita
[l] 7. quinti. F D ad D E. Sed F D eſt æqualis A C. Ergo ut [l] B C ad C E, ita A C ad D E. Permutando igitur, ut B C ad C A, ita C E ad E D. Itaque quoniam oſtenſum eſt, ut A B ad B C ita D C ad C E, ut autem B C ad C A ita C E
[m] 22. quinti. ad E D: erit, [m] ex æquali, ut B A ad A C ita C D ad D E. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; et homologa, ſive ejuſdem nominis, latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ latera proportionalia habeant; hoc est, sit ut A B quidem ad B C, ita D E ad E F: ut autem B C ad C A, ita E F ad F D; et adhuc ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur; angulum quidem A B C angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D, et præterea angulum B A C angulo E D F.



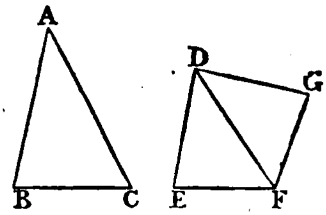
Constituatur enim [n] ad rectam lineam E F, et ad puncta in ipsa E, F, angulo quidem A B C æqualis angulus F E G; angulo autem B C A angulus E F G. Quare reliquus B A C angulus [o] reliquo E G F est æqualis. Ideoque æquiangulum est triangulum A B C triangulo E G F. Triangulorum igitur A B C, E G F proportionalia sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ergo ut A B ad B C [p], ita G E ad E F. Sed ut A B ad B C, ita D E ad E F. Ut igitur D E ad E F, ita [q] G E ad E F. Quod cum utraque ipsarum D E, E G ad E F eandem proportionem habeat, erit [r] D E ipsi E G æqualis. Eadem ratione et D F æqualis F G. Itaque quoniam D E est æqualis E G, communis autem E F; duæ D E, E F duabus G E, E F æquales sunt, et basis D F basi F G æqualis. Angulus igitur D E F est æqualis [s] angulo G E F, et D E F triangulum æquale triangulo G E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus quidem E D F æqualis angulo E G F. Et quoniam angulus D E F est æqualis angulo G E F, et angulus G E F angulo A B C; erit et angulus A B C angulo F E D æqualis. Eadem ratione et angulus A C B æqualis est angulo D F E; et adhuc angulus ad A angulo ad D. Ergo A B C triangulum triangulo

[n] 23. primi.
[o] 2. Cor. 32. primi.
[p] 4. hujus.
[q] 11. quinti.
[r] 9. quinti.
[s] 8. primi.

angulo D E F æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum B A C uni angulo E D F æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; hoc eſt, ſit ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe, et angulum quidem A B C habere æqualem angulo D E F; angulum vero A C B angulo D F E. Conſtituatur [t] enim ad rectam lineam D F, et ad puncta in ipſâ D, F, alterutri angulorum B A C, E D F æqualis angulus F D G, angulo autem A C B æqualis D F G. Reliquus igitur ad B reliquo ad G eſt [u] æqualis. Ergo triangulum A B C triangulo D G F æquiangulum eſt; ac propterea ut B A ad A C, ita [x] eſt G D ad D F: ponitur autem et ut B A ad A C, ita E D ad D F. Ut igitur [y] E D ad D F, ita G D ad D F. Quare E D æqualis eſt [z] ipſi D G, et communis D F. Ergo duæ E D, D F duabus G D, D F æquales ſunt, et angulus E D F angulo G D F eſt æqualis; baſis igitur E F eſt [a] æqualis baſi F G, triangulumque D E F æquale triangulo G D F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus quidem D F G eſt æqualis angulo D F E; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus D F G æqualis eſt angulo A C B; et angulus igitur A C B angulo D F E eſt æqualis. Ponitur autem et B A C angulus æqualis angulo E D F. Ergo et reliquus, qui ad B, æqualis eſt reliquo ad E. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B C triangulo D E F. Quare ſi duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa

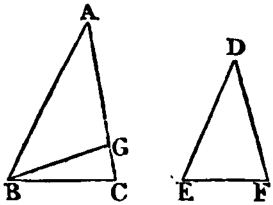
[t] 23. primi.
[u] 2. Cor. 32. primi.
[x] 4. hujus.
[y] 11. quinti.
[z] 9. quinti.
[a] 4. primi.

circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. *Q. E. D.*

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum B A C angulo E D F æqualem, circa alios autem angulos A B C, D E F latera proportionalia, ut ſit D E ad E F, ſicut A B ad B C; et reliquorum, qui ad C, F, utrumque ſimul minorem, vel non minorem recto. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe; angulumque A B C æqualem angulo D E F, et reliquum, videlicet qui ad C, reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis eſt angulus A B C angulo D E F, unus ipſorum major erit; ſit major A B C; et conſtituatur [b] ad rectam lineam A B, et ad punctum in ipſâ B, angulo D E F æqualis angulus A B G. Et quoniam angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero A B G angulo D E F; erit reliquus A G B reliquo D F E æqualis [c]. Æquiangulum igitur eſt A B G triangulum triangulo D E F. Quare ut [d] A B ad B G, ſic D E ad E F: utque D E ad E F, ſic ponitur A B ad B C. Ut igitur A B ad B C, ſic A B ad B G. Quod cum A B ad utramque B C, B G eandem habeat proportionem, erit B C ipſi B G æqualis [e]; ac propterea angulus ad C eſt æqualis angulo B G C. Quare uterque angulorum B C G, B G C minor eſt recto; igitur qui ei deinceps eſt, A G B, major eſt recto. Atque oſtenſus eſt angulus A G B æqualis angulo, qui ad F. Angulus igitur, qui ad F, recto major eſt. Atqui ponitur non major, nimirum cum C non eſt major recto: quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt angulus A B C angulo D E F. Ergo ipſi eſt æqualis. Eſt autem et angulus ad A æqualis ei, qui ad D. Quare et reliquus qui ad C, æqualis reliquo, qui ad



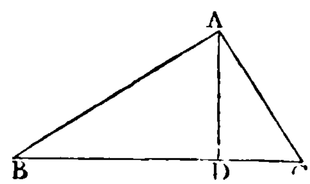
[b] 23. primi.
[c] 2. Cor. 32. primi.
[d] 4. hujus.
[e] 9. quinti.

ad F. Æquiangulum igitur eſt A B C triangulum triangulo D E F. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. *Q. E. D.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe ſimilia ſunt.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C; et a puncto A ad B C perpendicularis ducatur A D. Dico triangula A B D, A D C toti triangulo A B C, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B A C eſt æqualis angulo A D B,



rectus enim uterque eſt, et angulus ad B communis duobus triangulis A B C, A B D; erit [g] reliquus A C B reliquo B A D æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B C triangulo A B D. Quare [h] ut B C, quæ ſubtendit angulum rectum trianguli A B C, ad B A ſubtendentem angulum rectum trianguli A B D, ſic ipſa A B, ſubtendens angulum ad C trianguli A B C, ad D B ſubtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet B A D ipſius A B D trianguli; et adhuc A C ad A D ſubtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. Ergo triangulum A B C triangulo A B D æquiangulum eſt, et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur [i] eſt triangulum A B C triangulo A B D. Eadem ratione demonſtrabimus etiam A D C triangulum triangulo A B C ſimile eſſe. Quare utrumque ipſorum A B D, A D C toti A B C triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula A B D, A D C etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B D A rectus eſt æqualis recto A D C; ſed et B A D oſtenſus eſt æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo D A C æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B D triangulo A D C. Ergo [h] ut B D trianguli A B D ſubtendens B A D angulum, ad D A trianguli A D C ſubtendentem angulum, qui eſt ad C,

æqualem

[g] 2. Cor. 32. primi.
[h] 4. hujus.
[i] Def. 1. hujus.

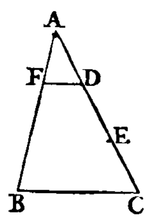
æqualem angulo B A D, ſic ipſa A D trianguli A B D ſubtendens angulum ad B, ad D C ſubtendentem angulum D A C ei, qui eſt ad B, æqualem; et adhuc B A ad A C ſubtendentem angulum rectum A D C. Simile igitur eſt A B D triangulum triangulo A D C. Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe ſimilia ſunt. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularem ductam, mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis; et præterea inter baſim et baſis ſegmentum, latus utrumlibet ſegmento conterminum, medium eſſe proportionale.

PROP. IX. PROBL. [IX.]

A datâ rectâ lineâ imperatam partem abſcindere.

Sit data recta linea A B. Oportet ab ipſâ A B imperatam partem abſcindere. Ducatur a puncto A quædam recta linea A C, quæ cum ipſâ A B angulum quemlibet contineat; ſumaturque in A C quodvis punctum D, et capiatur A C, quæ toties ſit multiplex rectæ A D, quoties recta ipſa A B partis abſcindendæ; jungatur B C; et per D ipſi B C parallela [k] ducatur D F. Itaque quoniam uni laterum trianguli A B C, videlicet ipſi B C, parallela ducta eſt F D; erit [l] ut C D ad D A, ita [l] B F ad F A; componendo ut C A ad A D, ita B A ad A F [m]. Quæ pars igitur eſt A D rectæ A C, eadem erit A F rectæ A B [n]. A datâ igitur rectâ lineâ A B pars imperata eſt [n] abſciſſa A F. *Q. E. F.*



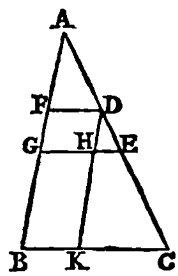
k 31. primi.
l 2. hujus.
m 18. quinti.
n 15. quinti.

PROP. X. PROBL. [X.]

Datam rectam lineam inſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.

Sit data quidem recta linea inſecta A B, ſecta vero A C. Oportet rectam lineam A B inſectam ipſi A C ſectæ ſimiliter ſecare. Sit ſecta A C in punctis D et E; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; junctaque B C, per puncta quidem D et E ipſi B C parallelæ [o] ducantur D F, E G; per D vero ipſi A B ducatur parallela D H K. (o 31. primi.)

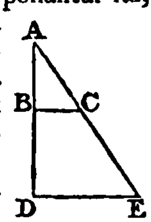
D H K. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum
[q] 34. primi. F H, H B: ac propterea D H quidem est[q] æqualis F G, H K vero ipsi G B. Et quoniam uni laterum trianguli D K C, ipsi scilicet K C, parallela ducta est H E;
[r] 2. hujus. erit [r] ut C E ad E D, ita K H ad H D. Æqualis autem est K H quidem ipsi B G, H D vero ipsi G F. Est igitur ut C E ad E D, ita B G ad G F. Rursus quoniam uni laterum trianguli A G E, nimirum ipsi E G, parallela ducta est F D, ut E D ad D A, ita [r] erit G F ad F A. Sed ostensum est ut C E ad E D, ita esse B G ad G F. Ut igitur C E ad E D, ita est B G ad G F; et ut E D ad D A, ita G F ad F A. Ergo data recta linea insecta A B, datæ rectæ lineæ sectæ A C similiter secta est. *Q. E. F.*



[XI.] PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, A C; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis A B, A C tertiam proportionalem invenire. Producantur A B, A C ad puncta D, E; ponaturque ipsi A C æqualis B D; et
[s] 31. primi. junctâ B C, ducatur [s] per D ipsi B C parallela D E. Quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E, parallela
[t] 2. hujus. ducta est B C, erit [t] ut A B ad B D, ita A C ad C E. Æqualis autem est B D ipsi A C. Ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. Quare datis rectis lineis A B, A C tertia proportionalis inventa est C E. *Q. E. F.*



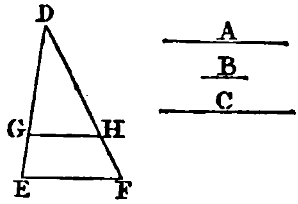
[XII.] PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C. Oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E, D F angulum quemvis E D F continentes; et ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, et ipsi C æqualis D H: junctâque

G H,

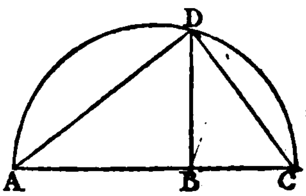
G H, per E ipsi parallela[u] ducatur E F. Itaque quoniam uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E ita D H ad H F. Est autem D G ipsi A æqualis; G E vero æqualis B; et D H æqualis C. Ut igitur A ad B, ita C ad H F. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est H F. *Q. E. F.* [u] 31. primi.



PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, B C. Oportet inter ipsas A B, B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, et super ipsâ A C describatur semicirculus A D C; ducaturque[x] a puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D; et A D, D C jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus A D C, is rectus[y] est. Et quoniam in triangulo rectangulo A D C, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est D B; erit D B media proportionalis[z] inter segmenta basis A B, B C. Duabus igitur datis rectis lineis A B, B C media proportionalis inventa est D B. *Q. E. F.* [x] 11. primi. [y] 31. tertii. [z] Cor. 8. hujus.



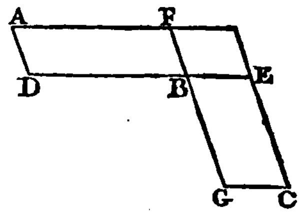
PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma A B, B C, æquales habentia angulos ad B; et ponantur in directum D B, B E. Ergo et in directum[a] erunt F B, B G. Dico parallelogrammorum A B, B C latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca esse: hoc est, ut D B ad B E ita esse [a] 14. primi.

G B

G B ad B F. Compleatur enim parallelogrammum F E. Et quoniam parallelogrammum A B æquale est parallelogrammo B C, aliud autem aliquod est F E parallelogram-



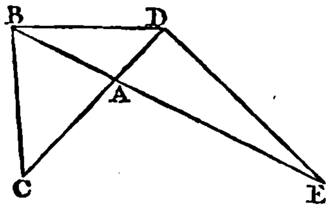
b 7. quinti. mum; erit ut A B ad F E[b], ita B C ad F E. Sed ut A B qui-
c 1. hujus. dem ad F E, ita [c]est D B ad B E; ut autem B C ad F E,
d 11. quinti. ita [c] G B ad B F; ut igitur[d] D B ad B E, ita G B ad B F. Ergo parallelogrammorum A B, B C latera, quæ circum æquales angulos, ex contrariâ parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sint, seu ex contrariâ parte sibi ipsis respondeant, latera, quæ sunt circum æquales angulos, nempe si ut B D ad B E, ita sit G B ad B F; dico parallelogrammum A B parallelogrammo B C æquale esse. Quoniam enim est ut D B ad B E, ita G B ad B F, ut autem D B ad B E, ita [c] A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E; et ut G B ad B F, ita [c] B C parallelogrammum ad parallelogrammum F E; erit[d] et ut A B ad
e 9. quinti. F E, ita B C ad F E. [e] Æquale igitur est A B parallelogrammum parallelogrammo B C. Ergo æqualium et unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contrariâ parte sibi ipsis respondent; et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt; ea inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XV.] PROP. XV. THEOR.

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula A B C, A D E, unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet B A C angulo D A E. Dico triangulorum A B C, A D E latera, quæ circum æquales angulos, reciproca esse, hoc est, ut C A ad A D, ita esse E A ad A B. Ponantur enim ita, ut in directum sit C A ipsi A D. Ergo et E A ipsi A B in directum erit; et jungatur B D. Quoniam igitur triangulum A B C æquale est triangulo A D E, aliud autem est

est A B D; erit ut C A B triangulum ad triangulum B A D, ita [d] triangulum A D E ad triangulum B A D. Sed ut triangulum quidem C A B ad B A D triangulum, ita [e] C A ad A D; ut autem triangulum E A D ad ipsum B A D, ita E A ad A B. Ut [f] igitur C A ad A D, ita E A ad A B. Quare triangulorum A B C, A D E latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sint latera triangulorum A B C, A D E, scil. sit ut C A ad A D, ita E A ad A B; dico triangulum A B C triangulo A D E æquale esse. Junctâ enim rursus B D, quoniam ut C A ad A D, ita est E A ad A B; ut autem C A ad A D, ita [e] A B C triangulum ad triangulum B A D; et ut E A ad A B, ita [e] triangulum E A D ad B A D triangulum, erit ut A B C triangulum ad triangulum B A D, ita triangulum E A D ad B A D triangulum. Utrumque igitur triangulorum A B C, A D E ad triangulum B A D eandem habet proportionem; ac propterea æquale est A B C triangulum triangulo A D E [d]. Æqualium igitur, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt: et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*



d 7. quinti.

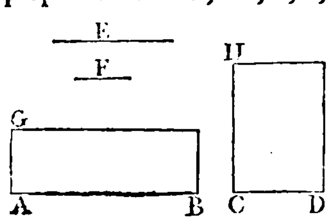
e 1. hujus.

f 11. quinti.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

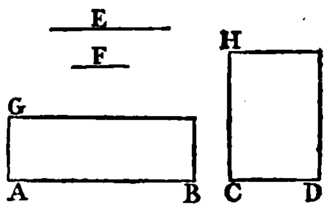
Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E, F, sitque ut A B ad C D, ita E ad F. Dico rectangulum contentum sub rectis lineis A B, F æquale esse ei, quod sub ipsis C D, E continetur. Ducantur enim a [g] punctis A, C ipsis A B, C D ad rectos angulos A G, C H;



g 11. primi.

ponaturque

ponaturque ipsi quidem F æqualis A G, ipsi vero E æqualis C H; et compleantur B G, D H parallelogramma. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; est autem E æqualis C H, et F



[g] 7. quinti. ipsi A G: erit [g] ut A B ad C D, ita C H ad A G. Parallelogrammorum igitur B G, D H latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos,

[h] 14. hujus. reciproca sunt, ea inter se sunt [h] æqualia. Ergo parallelogrammum B G æquale est parallelogrammo D H. Atque est parallelogrammum quidem B G, quod sub rectis lineis A B, F continetur, etenim A G est æqualis F; parallelogrammum vero D H, quod continetur sub ipsis C D, E; cum C H ipsi E sit æqualis. Rectangulum igitur contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub ipsis C D et E continetur. Et si rectangulum contentum sub A B, F sit æquale ei, quod sub C D et E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad C D, ita E ad F. Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub C D et E continetur, atque est contentum quidem sub A B, F rectangulum B G, etenim A G est æqualis F: contentum vero sub C D, E est rectangulum D H, cum C H ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H. Et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt [g]. Quare ut A B ad C D, ita C H ad A G; æqualis autem est C H ipsi E, et A G ipsi F. Ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

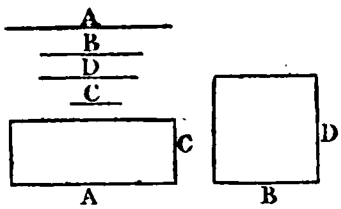
Cor. * Si quatuor rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam; rectangulum sub extremis rectangulo sub mediis majus erit. Et si rectangulum

rectangulum sub extremis majus fuerit rectangulo sub mediis; prima major erit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; et sit ut A ad B ita B ad C. Dico rectangulum contentum sub A, C æquale esse ei, quod a mediâ B fit, quadrato. Ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C; æqualis autem B ipsi D;



erit ut A ad B [h], ita D ad C. Si autem quatuor rectæ [h] 7. quinti.
lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est [i] æquale ei, quod sub mediis continetur. [i] 16. hujus.
Ergo rectangulum sub A, C contentum est æquale ei, quod continetur sub B, D. Sed rectangulum contentum sub B, D est æquale quadrato, quod fit ex ipsâ B; etenim B est æqualis D. Rectangulum igitur contentum sub A, C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Et si rectangulum contentum sub A, C æquale sit quadrato, quod fit ex B; dico ut A ad B, ita esse B ad C. Iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum sub A, C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum, quod sub ipsis B, D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A, C æquale ei, quod sub B, D continetur. Si autem rectangulum, sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales [i] erunt. Est igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipsi D. Ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum est æquale ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

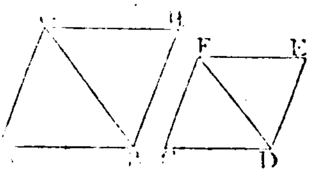
Cor.

Cor. * Si trium rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam; rectangulum sub extremis quadrato a mediâ majus erit. Et si rectangulum sub extremis majus fuerit quadrato a mediâ; prima major erit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam.

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

A datâ rectâ lineâ, dato rectilineo simile et similiter positum, rectilineum describere.

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. Oportet a rectâ lineâ A B, rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum describere. Jungatur D F, et ad rectam lineam A B, et ad puncta in ipsâ A, B, angulo quidem C æqualis angulus [k] constituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. Reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B est [l] æqualis. Ergo æquiangulum est F C D triangulum triangulo G A B; ac propterea [m] ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B. Rursus constituatur ad rectam lineam B G, et ad puncta in ipsâ B, G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo autem F D E æqualis G B H. Ergo reliquus [l] ad E reliquo ad H est æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum F D E triangulo G B H. Quare ut [m] F D ad G B, ita F E ad G H, et E D ad H B. Ostensum autem est et ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B; est igitur [n] ut F C ad A G, ita C D ad A B, et F E ad G H, et adhuc E D ad H B. Itaque quoniam angulus quidem C F D est æqualis angulo A G B, angulus autem D F E angulo B G H; erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. Eâdem ratione et C D E est æqualis ipsi A B H; et præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. Æquiangulum igitur est A H ipsi C E, et latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum A H rectilineo C E simile [o] erit. A datâ igitur rectâ lineâ A B, dato rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum A H descriptum est. *Q. E. F.*



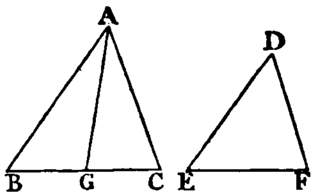
[k] 23. primi.
[l] 2. Cor. 32. primi.
[m] 4. hujus.
[n] 11. quinti.
[o] Def. 1. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Similia triangula inter se sunt in duplicatâ proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula A B C, D E F habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, et sit ut A B ad B C, ita D E ad E F, ita ut latus B C homologum sit lateri E F. Dico A B C triangulum ad triangulum D E F duplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F.



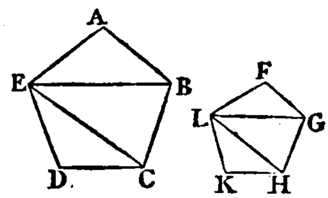
Sumatur enim ipsis [p] B C, E F tertia proportionalis B G, [p] 11. hujus. ut sit B C ad E F ita E F ad B G. Et jungatur G A. Quoniam igitur ut A B ad B C, ita est D E ad E F; erit permutando ut A B ad D E, ita B C ad E F. Sed ut B C ad E F, ita E F ad B G. Ut [q] igitur A B ad D E, ita E F [q] 11. quinti. ad B G. Quare triangulorum A B G, D E F latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem triangulorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [r] sunt. Æquale igitur est A B G [r] 15. hujus. triangulum triangulo D E F. Et quoniam est ut B C ad E F, ita E F ad B G; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [s] habet ejus, quam habet ad secundam: habebit igitur [s] Def. 10. quinti. B C ad B G duplicatam proportionem ejus, quam habet B C ad E F. Ut autem B C ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G [t]. Ergo et A B C triangulum ad [t] 1. hujus. triangulum A B G duplicatam proportionem habet ejus, quam B C habet ad E F. Est autem A B G triangulum triangulo D E F æquale. Et triangulum igitur A B C ad triangulum D E F duplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Quare similia triangula inter se in duplicatâ sunt proportione laterum homologorum. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit a primâ, ad triangulum, quod a secundâ, simile et similiter descriptum; quoniam ostensum est ut C B ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G, hoc est, ad triangulum D E F. *Q. E. D.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus, quam latus habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDE, FGHKL, et ſit latus AB homologum ipſi FG. Dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus, quam habet AB ad FG. Jungantur BE, EC, GL, LH. Et quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt æqualis: atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula ſunt ABE, FGL, unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit[t] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. Ergo et ſimile. Angulus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL. Eſt autem et totus ABC angulus æqualis[u] toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum. Ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL, eſt ut EB ad BA, ita LG ad GF; ſed et propter ſimilitudinem polygonorum[u], ut AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali ut[x] EB ad BC, ita LG ad GH. Hoc eſt, circum æquales angulos EBC, LGH latera triangulorum EBC, LGH ſunt proportionalia; æquiangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH. Quare et ſimile. Eadem ratione et ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia: nimirum cum tot ſint utriuſque polygoni triangula, quot ſunt latera, duobus demptis. Dico et homologa totis; hoc eſt, ut proportionalia ſint triangula, et antecedentia quidem ſunt ABE, EBC, ECD, conſequentia autem ipſorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE polygonum ad polygonum



[t] 6. hujus.

[u] Def. 1. hujus.

[x] 22. quinti.

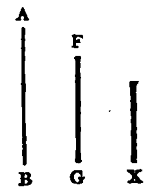
FGHKL duplicatam proportionem habere ejus, quam latus habet ad homologum latus; hoc eſt, AB ad FG. Quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL; habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [y] ejus, quam habet BE ad GL. Eâdem ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [y] proportionem habet ejus, quam BE ad GL. Eſt [z] igitur ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. Rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eâdem ratione et ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus, quam CE ad HL. Eſt [z] igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. Oſtenſum autem eſt et ut EBA triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, et triangulum ECD ad ipſum LHK. Et igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium [a], ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL; ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus, quam latus AB habet ad homologum latus FG: ſimilia enim triangula in duplicatâ ſunt proportione laterum homologorum. Ergo et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus, quam AB latus habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus ad homologum latus. *Q. E. D.*

[y] 19. hujus. [z] 11. quinti. [a] 12. quinti.

Eodem modo et in ſimilibus quadrilateris oſtendetur, ea eſſe in duplicatâ proportione laterum homologorum. Oſtenſum autem eſt et triangulis.

Cor. 1. Ergo univerſe ſimiles figuræ rectilineæ inter ſe ſunt in duplicatâ proportione homologorum laterum.

Cor. 2. Univerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram, quæ fit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter descriptam. Nam si ipsis A B, F G figurarum rectilinearum similium lateribus homologis tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit A B ad X duplicatam proportionem ejus, quam habet A B ad F G. Habet autem et figura ad figuram duplicatam proportionem ejus, quam latus A B ad latus homologum F G. Figura igitur ad figuram ut A B ad X. *Q. E. D.*



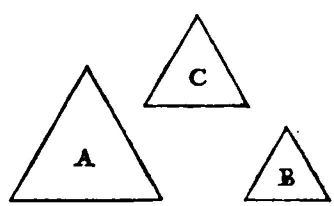
Cor. 3.* Si similes figuræ rectilineæ sint etiam æquales, earum latera homologa erunt inter se æqualia.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C. Dico et rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi æquiangulum [b] erit, et circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, et circum æquales angulos latera proportionalia habebit [b]. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C æquiangulum est, et circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare et rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. *Q. E. D.*

[b] Def. 1. hujus.

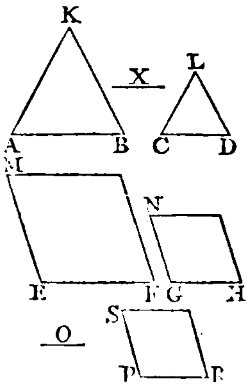


[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipsis fiant, similia et similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia et similiter descripta, proportionalia fuerint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H: nempe ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. Describanturque

ſcribanturque [c] ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſi- [c] 18. hujus.
militer poſita rectilinea K A B, L C D: ab ipſis vero E F, G H deſcribantur rectilinea ſimilia et ſimiliter poſita M F, N H. Dico ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſſe rectilineum M F ad ipſum N H rectilineum. Sumatur ipſis [d] quidem A B, C D tertia proportionalis X; ipſis vero E F, G H tertia proportionalis O. [d] 11. hujus.
Et quoniam eſt ut A B ad C D, ita E F ad G H; ut autem C D ad X, ita G H ad O; erit, ex æquali [e] ut A B ad X, ita E F ad O. Sed ut A B quidem ad X, ita eſt [f] rectilineum K A B ad L C D rectilineum; ut autem E F ad O, ita [f] rectilineum M F ad rectilineum N H. Ut igitur K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſt [g] rectilineum M F ad N H rectilineum. [e] 22. quinti. [f] 2. Cor. 20. hujus. [g] 11. quinti.



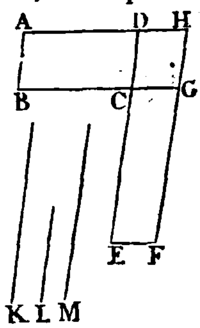
Et ſi ſit ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad rectilineum N H; dico ut A B ad C D, ita eſſe E F ad G H. Fiat enim ut A B ad C D, ita E F ad [h] P R, et [h] 12. hujus.
deſcribatur [c] ab ipſâ P R, alterutri rectilineorum M F, N H ſimile et ſimiliter poſitum, rectilineum S R. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita E F ad P R, et deſcripta ſunt ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſimiliter poſita K A B, L C D rectilinea, ab ipſis vero E F, P R ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea M F, S R; erit [i] ut K A B recti- [i] ex prius demonſtratis.
lineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad R S rectilineum. Ponitur autem et ut rectilineum K A B ad rectilineum L C D, ita M F rectilineum ad rectilineum N H. Ergo ut rectilineum M F ad rectilineum N H, ita M F rectilineum ad rectilineum S R. Quod cum rectilineum M F ad utrumque ipſorum N H, S R eandem habeat proportionem, erit [k] rectilineum N H ipſi S R æ- [k] 9. quinti.
quale. Eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum. Ergo G H eſt æqualis P R [l]. Et quoniam ut A B ad C D, ita eſt [l] 3. Cor. 20. hujus.
E F ad P R; æqualis autem P R ipſi G H; erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt: et ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter de-

ſcripta, proportionalia fuerint; et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.

Sint æquiangula parallelogramma A C, C F æqualem habentia B C D angulum angulo E C G. Dico parallelogrammum A C ad parallelogrammum C F proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet B C ad C G, et ex proportione, quam D C habet ad C E. Ponatur enim, ut B C ſit in directum ipſi C G. Ergo et D C ipſi C E in directum [l]erit; et compleatur D G parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, et fiat ut B C ad C G, ita [m] K ad L; ut autem D C ad C E, ita L ad M. Proportiones igitur ipſius K ad L, et L ad M eædem ſunt, quæ proportiones laterum, videlicet B C ad C G, et D C ad C E. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, et proportione L ad M. Quare et K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt ut B C ad C G [n], ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; ſed ut B C ad C G, ita K ad L: erit [o] ut K ad L, ita parallelogrammum A C ad C H parallelogrammum. Rurſus quoniam eſt ut D C ad C E, ita C H parallelogrammum ad parallelogrammum C F; ut autem D C ad C E, ita L ad M; ergo ut L ad M, ita erit [o] parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum. Itaque cum oſtenſum ſit ut K quidem ad L, ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H: ut autem L ad M, ita parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum; erit [p], ex æquali, ut K ad M, ita A C parallelogrammum ad ipſum C F. Habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. Ergo et A C parallelogrammum ad parallelogrammum C F proportionem habebit compoſitam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. *Q. E. D.*



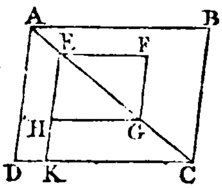
[l] 14. primi.
[m] 12. hujus.
[n] 1. hujus.
[o] 11. quinti.
[p] 22. quinti.

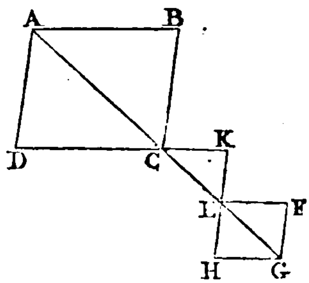
PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Parallelogramma, quæ circa eandem ſunt diagonalem, et quorum latera duo adjacentia duobus adjacentibus ſunt parallela, inter ſe ſimilia ſunt.

Parallelogrammi A B C D ſit A C diagonalis. Circa eandem A C ſit aliud parallelogrammum E F G H, cujus latera duo adjacentia E F, E H, duobus alterius adjacentibus, A B, A D ſint parallela; unde neceſſario conſequetur et reliqua duo adjacentia G F, G H reliquis duobus



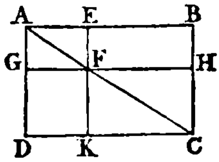


C B, C D adjacentibus eſſe parallela. Dico parallelogramma A B C D, E F G H eſſe inter ſe ſimilia. Conveniant enim E H, D C (ſi opus ſit productæ) in puncto K. Propter rectas E H, A D parallelas [q], angulus G E H angulo C A D æqualis erit [r]. Pari ratione et propter rectas E F, A B parallelas, angulus G E F angulo C A B æqualis erit. Duo igitur G E H, G E F ſimul ſumpti duobus C A D, C A B ſimul ſumpti ſunt æquales. Hoc eſt, totus F E H toti B A D æqualis erit. Æquiangula igitur ſunt parallelogramma A B C D, E F G H [s]. In triangulo autem A D C, cum recta E K parallela ſit baſi A D, erit A D ad D C ut E K ad K C [t]. Pari ratione in triangulo E K C, cum recta H G parallela ſit baſi, erit E K ad K C ut E H ad H G. Quare A D ad D C ut E H ad H G [u]. In parallelogrammis igitur æquiangulis A B C D, E F G H, latera circa angulos æquales D, H ſunt proportionalia. Unde efficietur et reliqua latera circa angulos æquales B, F eſſe proportionalia. Nimirum propter æqualia latera oppoſita utriuſque parallelogrammi [x], et eandem

[q] ex hyp.
[r] 29. primi.
[s] Cor. 34. primi.
[t] Cor. 2. hujus.
[u] 11. quinti.
[x] 34. primi.

[y] 7. quinti. æqualium ad æqualia proportionem [y]. Parallelogramma
[z] Def. 1. hujus. igitur A B C D, E F G H inter ſe ſimilia ſunt [z]. *Q. E. D.*

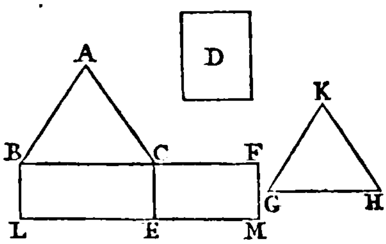
Cor. * Si per punctum quodvis F in A C, parallelogrammi A B C D diagonali, ducantur rectæ G F H, K F E lateribus parallelogrammi adjacentibus parallelæ, parallelogramma E F G A, H F K C circa diagonalem A C conſtituent toti et inter ſe ſimilia.



[XXV.] PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo ſimile, et alteri dato æquale, idem conſtituere.

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet ſimile conſtituere, A B C; cui autem æquale ſit, D. Oportet ipſi A B C ſimile, et ipſi D æquale, idem conſtituere. Applicetur [a] ad
[a] Cor. 45. primi. rectam quidem lineam B C rectilineo A B C æquale parallelogrammum B E.



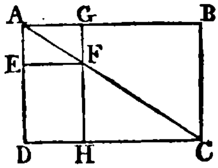
Ad rectam vero C E applicetur [a] parallelogrammum C M æquale ipſi D, in angulo F C E, qui C B L angulo eſt
[b] 14. primi. æqualis. In directum igitur [b] eſt B C ipſi C F, et L E
[c] 13. hujus. ipſi E M. Sumatur [c] inter B C, C F media proportio-
[d] 18. hujus. nalis G H; et [d] ab ipſâ G H deſcribatur rectilineum K G H ſimile et ſimiliter poſitum rectilineo A B C: Et quoniam eſt ut B C ad G H, ita G H ad C F, ſi autem tres
[e] 2. Cor. 20. hujus. rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam [e], ita eſt figura, quæ ſit a primâ, ad eam quæ a ſecundâ, ſimilem et ſimiliter deſcriptam: erit ut B C ad C F, ita A B C rectilineum ad rectilineum K G H. Sed et ut B C
[f] 1. hujus. ad C F, ita [f] parallelogrammum B E ad E F parallelo-
[g] 11. quinti. grammum. Ut [g] igitur rectilineum A B C ad rectilineum K G H, ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum E F. Eſt autem rectilineum A B C æquale parallelogrammo B E. Æquale igitur eſt et K G H rectilineum
[h] 14. quinti. parallelogrammo E F [h]. Sed E F parallelogrammum æquale

æquale eſt rectilineo D. Ergo et rectilineum K G H ipſi D eſt æquale. Eſt autem G K H ſimile rectilineo A B C. Dato igitur rectilineo A B C ſimile, et alteri dato D æquale, idem conſtitutum eſt K G H. *Q. E. F.*

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulem habens, circa eandem diametrum eſt toti.

A parallelogrammo enim A B C D parallelogrammum A F auferatur, ſimile ipſi A B C D, et ſimiliter poſitum, communemque ipſi angulum habens D A B. Dico parallelogrammum A B C D circa eandem eſſe diametrum parallelogrammo A F. Jungantur enim A F, C F, et G F producta ipſi D C in H occurrat. Cum ſimilia ſint parallelogramma E G, D B et ſimiliter poſita, angulus A E F angulo A D C æqualis erit; et latera circa æquales angulos proportionalia. Quare A D eſt ad D C, ut A E ad E F. Sed æquales inter ſe ſunt E F, D H, nempe parallelogrammi E F H D latera oppoſita [l]. Erit igitur A E ad D H, ut A E ad E F [k]. Quare A D erit ad D C, ut A E ad D H. Hoc eſt, tota A D ad totam D C, ut pars A E ad partem D H. Quare et reliqua E D ad reliquam H C, ut A D ad D C [l]. Illi autem E D æqualis eſt H F, nempe cum oppoſita ſint parallelogrammi latera. Quare H F erit ad H C, ut E D ad H C [k], hoc eſt, ut A D ad D C. Sed A D ad D C, ut A E ad E F (id enim oſtenſum.) Quare H F ad H C, ut A E ad E F [m]. Sed propter rectas F H, D E parallelas, angulus F H C angulo A D C æqualis eſt [n]: cui æqualis jam initio oſtenſus eſt A E F. Anguli igitur F H C, A E F inter ſe æquales. Duo igitur triangula A E F, F H C angulos ad E et H æquales habent, et latera circa æquales illos angulos proportionalia. Æquiangula igitur erunt triangula illa, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur [o]. Angulus igitur A F E angulo F C H æqualis. Addatur utrique E F C. Duo igitur A F E, C F E ſimul ſumpti duobus F C H, C F E ſimul ſumptis ſunt æquales. Sed propter rectas C D, E F parallelas, duo F C H, C F E ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales [n]. Duo igitur A F E, C F E ſimul ſumpti duobus



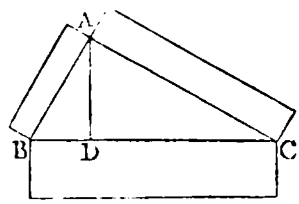
[l] 34. primi.
[k] 7. quinti.
[l] 19. quinti.
[m] 11. quinti.
[n] 29. primi.
[o] 6. hujus.

duobus rectis ſunt æquales. Directa igitur eſt linea
[r] 14. primi. A F C [r], et ipſa eſt parallelogrammi A B C D diagonalis. Parallelogrammum igitur A G F E, cum ſit circa lineam A F C, eſt circa diagonalem parallelogrammi A B C D. Si igitur &c. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXVII. THEOR.

In rectangulis triangulis figura, quæ ſit a latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus ſiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C. Dico figuram, quæ fit ex B C, æqualem eſſe eis, quæ ex B A, A C fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis A D. Quoniam igitur in triangulo rectangulo A C B ab angulo recto,



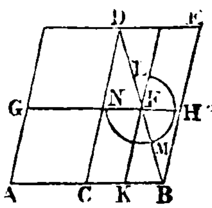
qui eſt ad A, ad B C baſim perpendicularis ducta eſt A D;
[s] 8. hujus. erunt [s] triangula A B D, A D C, quæ ſunt ad perpendicularem, ſimilia toti A B C, et inter ſe. Et quoniam ſi-
[t] 4. hujus. mile eſt A B C triangulum triangulo A B D, erit ut [t] C B ad B A, ita B A ad B D. Quod cum tres rectæ lineæ
[u] 2. Cor. 20. hujus. proportionales ſint, ut prima ad tertiam, ita erit [u] figura, quæ fit ex primâ ad eam, quæ ex ſecundâ, ſimilem et ſimiliter deſcriptam. Ut igitur C B ad B D, ita figura, quæ fit ex C B, ad eam, quæ ex B A, ſimilem et ſimiliter deſcriptam. Eâdem ratione, et ut B C ad C D, ita figura, quæ fit ex B C, ad eam, quæ ex C A. Quare et
[x] 24. quinti. ut B C ad ipſas B D, D C, ita [x] figura, quæ ex B C, ad eas, quæ ex B A, A C, ſimiles et ſimiliter deſcriptas. Æqualis autem eſt B C ipſis B D, D C. Ergo figura, quæ fit ex B C, æqualis eſt eis, quæ ex B A, A C fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit a latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR. [XXVII.]

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ei, quæ a dimidiâ deſcribitur, maximum eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Sit recta linea A B; ſeceturque bifariam in C; et ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammum A D deficiens figurâ parallelogrammâ C E, ſimili et ſimiliter poſitâ ei, quæ a dimidiâ ipſius A B deſcripta eſt. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ipſi C E, maximum eſſe A D. Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figurâ parallelogrammâ H K ſimili et ſimiliter poſitâ ipſi C E. Dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus eſſe. Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [y] ſunt. Ducatur eorum diameter D B, et deſcribatur figura. Quoniam igitur C F [z] eſt æquale ipſi F E, commune apponatur H K. Totum igitur C H toti K E eſt æquale. Sed C H eſt [a] æquale C G, quoniam et recta linea A C ipſi C B. Ergo et G C ipſi E K æquale eſt. Commune apponatur C F. Totum igitur A F eſt æquale gnomoni L M N: quare et C E, hoc eſt, A D parallelogrammum parallelogrammo A F eſt majus. Omnium igitur parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ei, quæ a dimidiâ deſcribitur, maximum eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum. *Q. E. D.*



y 26. hujus.
z 43. primi.
a 36. primi.

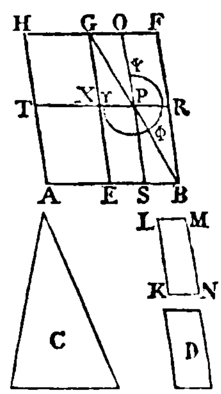
PROP.

[XXVIII.]

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, et eo, quod a dimidiâ, et eo, cui oportet simili deficere.

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C, non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simili deficere, sit D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, et ab ipsâ E B describatur rectilineum [b] simile et similiter positum ipsi D, quod sit E B F G; et compleatur A G parallelogrammum. Itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem; et si quidem A G sit æquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum A G applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ E F ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit H E majus quam C. Atqui E F æquale est H E. Ergo et E F quam C est majus. Quo autem E F superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile et similiter positum, idem [c] constituatur K L M N. Sed D est simile E F. Quare et K M ipsi E F simile erit. Sit igitur recta linea K L homologa ipsi G E, L M vero ipsi G F. Et quoniam æquale est E F ipsis C et K M, erit E F ipso K M majus. Major igitur est recta linea G E ipsâ K L; et G F ipsa L M. Ponatur G X æqualis K L, et G O æqualis L M, et compleatur X G O P parallelogrammum. Æquale igitur est et simile X O ipsi K M. Sed K M simile



[b] 18. hujus.
[c] 25. hujus.

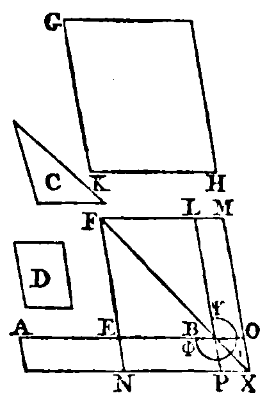
mile est E F. Ergo et [d] X O ipsi E F est simile. Circa eandem igitur est [e] diametrum X O ipsi E F. Sit ipsorum diameter G P B, et figura describatur. Itaque quoniam E F est æquale ipsis C et K M simul, quorum K M est æquale X O, erit reliquus Υ Φ Υ gnomon æqualis reliquo C. Et quoniam O R est æquale X S, commune apponatur S R. Totum igitur O B toti X B est æquale. Sed X B est æquale T E, quoniam et latus A E lateri E B. Quare et T E ipsi O B æquale. Commune apponatur X S. Ergo totum T S est æquale toti gnomoni Υ Φ Υ. Et Υ Φ Υ gnomon ipsi C ostensus est æqualis; et T S igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum T S applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ S R ipsi D simili, quoniam et S R simile est ipsi G B [f]. *Q. E. F.*

[d] 21. hujus.
[e] 26. hujus.
[f] 24. hujus.

PROP. XXX. PROBL. [XXIX.]

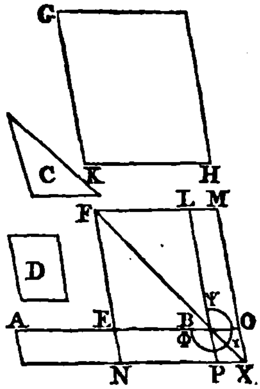
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea A B, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam A B applicare, sit C; cui autem oportet simili excedere, D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili D. Secetur A B bifariam in E, atque ex E B ipsi D simile et similiter [g] positum parallelogrammum describatur E L. Et utrique quidem E L et C æquale, ipsi vero D simile et similiter positum, idem [h] constituatur G H. Simile igitur est G H ipsi E L. Sitque K H quidem latus homologum lateri F L, K G vero ipsi F E. Et quoniam parallelogrammum G H majus est ipso E L, erit recta linea K H major quam F L, et K G major quam F E. Producantur F L, F E, et ipsi quidem K H æqualis sit F L M, ipsi vero K G æqualis F E N, et compleatur M N parallelogrammum. Ergo M N æquale est et simile ipsi G H. Sed G H est simile E L: M N igitur ipsi E L simile



[g] 18. hujus.
[h] 25. hujus.

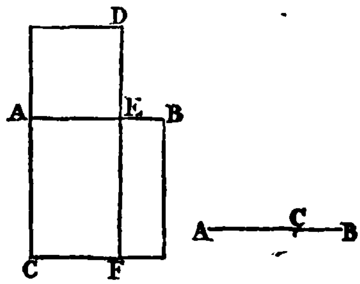
[h] 21. hujus. simile [e] erit; ac propterea circa eandem diametrum [f] est
[i] 26. hujus. E L ipsi M N. Ducatur ipsorum diameter F X, et figura describatur. Itaque quoniam G H ipsi E L et C est æquale, sed G H est æquale M N; erit et M N æquale ipsi E L et C. Commune auferatur E L. Reliquus igitur Φ Υ Ψ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam A E est æqualis E B,
[g] 36. primi. æquale [g] erit et A N parallelogrammum parallelogrammo E P,
[h] 43. primi. hoc est, ipsi [h] L O. Commune apponatur E X. Totum igitur A X æquale est gnomoni Φ Υ Ψ. Sed Φ Υ Ψ gnomon est æqualis C. Ergo et A X ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est A X, excedens figurâ parallelogrammâ
[i] 24. hujus. P O, ipsi D simili, quoniam et ipsi E L simile est [i] O P. *Q. E. F.*



[XXX.] PROP. XXXI. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extremâ ac mediâ ratione secare.

Sit data recta linea terminata A B. Oportet ipsam A B extremâ ac mediâ ratione secare. Descri-
[k] 46. primi. batur [k] ex A B quadratum B C; et ad A C ipsi B C æquale parallelo-
[l] 29. hujus. grammum [l] applicetur C D, excedens figurâ A D ipsi B C simili. Quadratum autem est B C, ergo et A D quadratum erit. Et quoniam B C est æquale C D; commune auferatur C E. Reliquum igitur B F reliquo A D est æquale. Est autem et ipsi æquiangulum. Ergo ipsorum B F, A D latera, quæ cir-
[m] 14. hujus. cum æquales angulos, reciproce sunt [m] proportionalia. Ut igitur F E ad E D, ita est A E ad E B. Est autem
[n] 34. primi. F E æqualis [n] A C, hoc est, ipsi A B; et E D ipsi A E. Quare



Quare ut B A ad A E, ita A E ad E B. Sed A B major est quam A E. Ergo A E quam E B est [o] major. Recta igitur linea A B extremâ ac mediâ ratione secta est in E. Et majus ipsius segmentum est A E. *Q. E. F.* [o] 14. quinti.

Aliter. Sit data recta linea A B. Oportet ipsam A B extremâ ac mediâ ratione secare. Secetur enim A B in C, ita ut rectangulum [p], quod continetur sub A B, B C, [p] 11. secundi. æquale sit quadrato ex A C. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C æquale [q] est quadrato ex A C, erit [q] 17. hujus. ut B A ad A C ita A C ad C B. Ergo A B recta linea extremâ ac mediâ ratione secta est. *Q. E. F.*

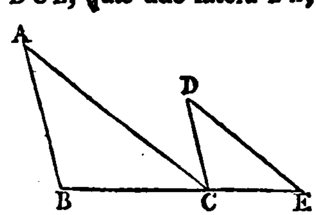
SCHOLION.*

Turbatam Theoni Propositionum seriem restituimus. Nempe quæ vicesimam sextam proxime sequuntur quatuor, tricesimæ primæ, quæ Theoni numerata est, demonstrandæ nihil prorsus inserviunt. In 29ª vero et tricesimâ fieri Euclides jubet, quod quâ ratione efficiendum sit, ex tricesimâ primâ demum intelligitur. Nos igitur, quæ Theoni est tricesima prima, vicesimæ septimæ loco reposuimus. Dein Theoni 27ª, 28ª, 29ª, 30ª, nostræ sunt 28ª, 29ª, 30ª, 31ª. Ita enim ab Euclide propositiones ordinatas fuisse existimamus.

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula A B C, D C E, quæ duo latera B A, A C duobus lateribus C D, D E proportionalia habeant, scil. sit sicut B A ad A C, ita C D ad D E; parallela autem sit A B ipsi D C, et A C ipsi D E. Dico B C ipsi C E in directum esse. Quoniam enim A B parallela est D C,



et in ipsas incidit recta linea A C; erunt [r] anguli alterni B A C, A C D æquales inter se. Eâdem ratione, et angulus C D E æqualis est angulo A C D. Quare et B A C ipsi [r] 29. primi.

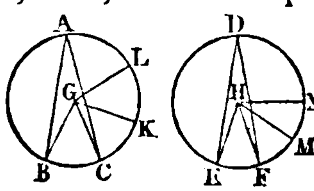
ipsi C D E est æqualis. Et quoniam duo triangula sunt A B C, D C E, unum angulum ad A uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut B A ad A C, ita C D ad
s 6. hujus. D E; erit [s] triangulum A B C triangulo D C E æquiangulum. Ergo A B C angulus est æqualis angulo D C E. Ostensus autem est et angulus A C D æqualis angulo B A C. Totus igitur A C E duobus A B C, B A C est æqualis. Communis apponatur A C B. Ergo anguli A C E, A C B angulis B A C, A C B, C B A æquales sunt. Sed B A C, A C B, C B A anguli duobus rectis sunt æquales. Et anguli igitur A C E, A C B duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam A C, et ad punctum in ipsâ C, duæ rectæ lineæ B C, C E non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A C E, A C B duobus rectis æquales efficiunt. Ergo B C ipsi C E in
t 14. primi. directum [t] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. *Q. E. D.*

[XXXIII.]

PROP. XXXIII. THEOR.

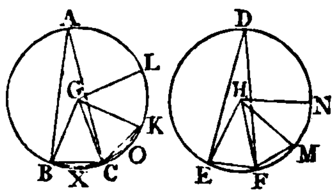
In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem et sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli A B C, D E F; et ad centra quidem ipsorum G, H sint anguli B G C, E H F, ad circumferentias vero anguli B A C, E D F. Dico ut circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita esse, et B G C angulum ad angulum E H F, et angulum B A C ad angulum E D F; et adhuc sectorem B G C ad E H F sectorem.



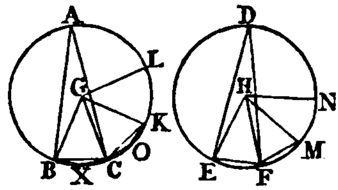
Ponantur enim circumferentiæ quidem B C æquales quotcunque deinceps C K, K L; circumferentiæ vero E F, rursus æquales quotcunque F M, M N. Et jungantur G K, G L, H M, H N. Quoniam igitur circumferentiæ B C, C K, K L inter se sunt æquales, et anguli B G C, C G K, K G L
u 27. tertii. inter se æquales [u] erunt. Quotuplex igitur est circumferentia

ferentia B L circumferentiæ B C, totuplex eſt et B G L angulus anguli B G C. Eadem ratione et quotuplex eſt circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex et E H N angulus anguli E H F. Si vero æqualis eſt B L circumferentia circumferentiæ E N, et angulus B G L angulo E H N erit æqualis; et ſi circumferentia B L major eſt circumferentiâ E N, major erit et B G L angulus angulo E H N; et ſi minor, minor. Quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis B C, E F, et duobus angulis B G C, E H F; ſumpta ſunt circumferentiæ quidem B C, et B G C anguli, æquimultiplicia; videlicet circumferentia B L et B G L angulus: circumferentiæ vero E F, et E H F anguli, æquimultiplicia; nempe circumferentia E N et angulus E H N. Atque oſtenſum eſt ſi circumferentia B L ſuperat circumferentiam E N, et B G L angulum ſuperare angulum E H N; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem eſſe. Ut [u] igitur circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita angulus B G C ad angulum E H F. Sed ut B G C angulus ad angulum E H F, ita [x] angulus B A C ad E D F angulum. Uterque enim utriuſque eſt duplex [y]. Ut igitur B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita et angulus B G C ad angulum E H F, et angulus B A C ad E D F angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. Dico inſuper et ut B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita eſſe ſectorem G B C ad H F E ſectorem. Jungantur enim B C, C K; et ſumptis in circumferentiis B C, C K punctis X, O, jungantur et B X, X C, C O, O K. Itaque quoniam duæ B G, G C duabus C G, G K æquales ſunt, et angulos æquales continent; erit et baſis B C baſi C K æqualis. Æquale [z] igitur eſt G B C triangulum triangulo G C K. Et quoniam circumferentia B C circumferentiæ C K eſt æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum A B C, æqualis eſt reliquæ, quæ eundem circulum complet. Quare et angulus B X C angulo C O K eſt æqualis [a]. Simile igitur eſt B X C



[u] Def. 5. quinti.
[x] 15. quinti.
[y] 20. tertii.
[z] 4. primi.
[a] 27. tertii.

[a] Def. 11. tertii. segmentum[a] segmento C O K; et sunt in æqualibus rectis lineis B C, C K. Quæ autem in æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, et inter se[b] æqualia sunt. Ergo segmentum B X C est æquale segmento C O K. Est autem et B G C triangulum triangulo C G K æquale. Et totus igitur sector B G C sectori C G K æqualis erit. Eâdem ratione et G K L sector utrique ipsorum G B C, G C K est æqualis. Sectores igitur B G C, C G K, K G L, quotquot fuerint, æquales sunt inter se. Similiter et sectores H E F, H F M, H M N inter se sunt æquales. Quotuplex igitur est L B circumferentia circumferentiæ B C, totuplex est et G B L sector sectoris G B C. Eâdem ratione et quotuplex est circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex est et H E N sector sectoris H E F. Sed si circumferentia B L circumferentiæ E N est æqualis, et sector B G L æqualis est sectori E H N; et si circumferentia B L superat circumferentiam E N, superat et B G L sector sectorem E H N; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem B C, E F circumferentiis, duobus vero sectoribus G B C, E H F; sumpta sunt æquimultiplicia circumferentiæ quidem B C, et G B C sectoris, circumferentia B L et G B L sector; circumferentiæ vero E F, et sectoris H E F, æquimultiplicia, circumferentia E N et H E N sector: atque ostensum est si B L circumferentia superat circumferentiam E N, et sectorem B G L superare sectorem E H N; et si æqualis, æqualem esse; et si minor, minorem. Est igitur ut B C circumferentia[c] ad circumferentiam E F, ita sector G B C ad H E F sectorem. *Q. E. D.*



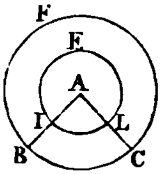
[b] 24. tertii.

[c] Def. 5. quinti.

Cor. 1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus, cui insistit, ad totam circumferentiam: nam ut angulus B A C ad rectum, ita B C arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus B A C ad quatuor rectos, ut arcus B C ad totam circumferentiam.

Cor. 2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C qui æquales

æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra, ſive ad peripherias, ſunt ſimiles. Nam eſt I L ad totam peripheriam I L E, ut angulus I A L ad quatuor rectos: eſt vero ut I A L ſeu B A C ad quatuor rectos, ita arcus B C ad totam peripheriam B C F. Quare ut I L ad totam peripheriam I L E, ita B C ad totam peripheriam B C F. Ac proinde arcus I L, B C ſunt ſimiles.



Cor. 3. Duæ ſemidiametri A B, A C a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles I L, B C.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

UNITAS eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt unum dicitur.

II.

Numerus autem, ex unitatibus conſtans multitudo.

III.

Pars eſt numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

IV.

Partes autem, quando non metitur.

V.

Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

VI.

Par numerus eſt, qui bifariam dividitur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur; vel qui a pari numero unitate differt.

VIII.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

IX.

Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

X.

Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

XII.

Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas communis menſura metitur.

XIII.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

XIV.

Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates ſunt in ipſo, toties componitur multiplicatus, et aliquis gignitur.

XVI.

Quando duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt, planus appellatur; latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis; vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecundi et tertius quarti æquimultiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes.

XXI.

XXI.

Similes plani et ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si duobus numeris inæqualibus expoſitis detracto ſemper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas; numeri a principio poſiti primi inter ſe erunt.

A . H . . F . . . . B
C . . G . . . D
E ----

Duobus enim inæqualibus numeris A B, C D detracto ſemper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas: dico numeros A B, C D inter ſe primos eſſe; hoc eſt, ipſos A B, C D unitatem ſolam metiri.

Si enim A B, C D non ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, ſitque E; et C D quidem ipſum A B metiens relinquat ſeipſo minorem F A; A F vero metiens D C relinquat ſeipſo minorem G C; et G C metiens F A unitatem H A relinquat.

Quoniam igitur numerus E ipſum C D metitur, C D vero metitur B F; et E ipſum B F metitur. Metitur autem et totum B A; ergo et reliquum A F metietur. Sed A F metitur D G: quare et E ipſum D G metietur. Metitur autem et totum D C: ergo et reliquum C G metietur. At C G metitur F H; et igitur E ipſum F H metietur. Sed et metitur totum F A; et igitur numerus E metietur reliquam A H unitatem, quod [a] fieri non poteſt: non igitur ipſos A B, C D metietur aliquis numerus. Ergo A B, C D primi inter ſe ſunt. *Q. E. D.*

[a] Def. 3. hujus.

PROP. II. PROBL. [II.]

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.

Sint dati duo numeri non primi inter ſe A B, C D, quorum minor ſit C D: oportet ipſorum A B, C D maximam communem menſuram invenire.

Si igitur C D metitur A B, cum etiam ſeipſum metiatur; erit C D ipſorum C D, A B communis menſura. Et perſpicuum eſt eam maximam eſſe; nullus enim major quam C D ipſum C D metietur.

A . . . . B
C . . . . D

Si vero C D non metitur A B; ipſorum A B, C D detracto ſemper minore de majore, unitas nunquam relinquetur. Nam ſi tandem relinquatur, erunt A B, C D primi inter ſe: quod hypotheſi contrarium eſt. Relinquetur igitur numerus quidam, qui metietur præcedentem. Et C D quidem ipſum A B metiens relinquat ſeipſo minorem A E; A E vero metiens C D relinquat ſeipſo minorem C F; C F vero ipſum A E metiatur. Itaque quoniam C F ipſum A E metitur, A E vero ipſum D F; et C F ipſum D F metietur. Sed et metitur ſeipſum; et totum igitur C D metietur. At C D ipſum B E metitur: ergo et C F metitur B E. Metitur autem et E A; et totum igitur B A metietur. Sed et metitur C D: ergo C F ipſos A B, C D metitur; ac propterea C F ipſorum A B, C D eſt communis menſura. Dico etiam maximam eſſe. Si enim C F non eſt maxima communis menſura ipſorum A B, C D; ipſos A B, C D metietur aliquis numerus major ipſo C F. Metiatur, ſitque G. Et quoniam G ipſum C D metitur; C D vero ipſum B E; et G ipſum B E metitur. Metitur autem et totum B A; et reliquum igitur A E metietur. Sed A E metitur D F: ergo et G ipſum D F metietur. Metitur autem et totum D C: quare et reliquum C F metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos A B, C D numeros metietur numerus aliquis major ipſo C F. Ergo C F eſt ipſorum A B, C D maxima communis menſura. *Q. E. D.*

A . . . . E . . . . . . B
C . . F . . . . D
G ----

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem menſuram metiri.

PROP.

PROP. III. PROBL. [III.]

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se A, B, C: oportet ipsorum A, B, C maximam communem mensuram invenire.

Sumatur duorum A, B maxima communis mensura D[b]: itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. Metiatur primum; metitur autem et ipsos A, B: ergo D numeros A, B, C metitur; et ob id ipsorum est communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim D non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura; metietur eos aliquis numerus major ipso D. Metiatur, et sit E. Quoniam igitur E metitur numeros A, B, C, et ipsos A, B metietur, et[c] ipsorum A, B maximam communem mensuram. Sed ipsorum A, B maxima communis mensura est D: ergo E ipsum D metitur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso D metietur: ergo D ipsorum A, B, C maxima est communis mensura.

A . . . .
B . . . . . .
C . . . .
D . .
E - - - -

[b] 2. hujus.
[c] Cor. 2. hujus.

Non metiatur autem D ipsum C. Dico primum numeros D, C non esse primos inter se. Quoniam enim A, B, C non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus; et qui metitur ipsos A, B, C, et ipsos A, B metietur, et[c] ipsorum A, B maximam communem mensuram, videlicet D, metietur. Metitur autem et ipsum C: ergo ipsos D, C numerus aliquis metietur; ideoque D, C non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E[b]. Et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos A, B, et E ipsos A, B metietur. Metitur autem et C; ergo et ipsos A, B, C metietur: eritque E ipsorum A, B, C communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim E non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura, metietur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso E. Metiatur, sitque F. Et quoniam F metitur numeros

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . . .
E . .
F - - -

A, B, C;

A, B, C; et ipſos A, B, et ipſorum A, B maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt D: ergo F ipſum D metitur. Metitur autem et ipſum C: quare F et ipſos D, C; et igitur ipſorum D, C maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum C, D maxima communis menſura eſt E: ergo F ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipſo E metietur. Ergo E ipſorum A, B, C maxima eſt communis menſura.

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . . .
E . .
F - - -

Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inventa eſt. *Q. E. F.*

Cor. Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem menſuram inveniemus.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes.

Sint duo numeri A, B C, quorum B C ſit minor: dico B C ipſius A vel partem eſſe, vel partes.

Numeri enim A, B C vel primi ſunt inter ſe, vel non. Sint prius inter ſe primi; et diviſo B C in unitates, quæ in ipſo ſunt, erit[c] unaquæque unitas, earum quæ in B C, pars aliqua ipſius A: ergo B C ipſius A partes eſt.

[c] Def. 1. & 2. hujus.

A . . . .
B C

Sed non ſint A, B C inter ſe primi: itaque B C vel ipſum A metitur, vel non. Et ſiquidem metitur, erit B C pars ipſius A.

A . . . .
B C

Si vero non; ſumatur[d] ipſorum A, B C maxima communis menſura D; et dividatur B C in numeros ipſi D æquales B E, E F, F C. Quoniam igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. Æqualis autem eſt D unicuique ipſorum B E, E F, F C: ergo et unuſquiſque ipſorum B E, E F, F C pars eſt ipſius A: ac propterea B C ipſius A partes eſt.

[d] 2. hujus.

A . . . .
B . . E . . F . . C
D . .

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes. *Q. E. D.*

PROP. V. THEOR. [V.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et uterque utriuſque eadem pars erit, quæ unus unius.

Numerus A numeri B C pars ſit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ eſt A ipſius B C: dico et utrumque A, D utriuſque B C, E F eandem partem eſſe, quæ eſt A ipſius B C.

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot erunt et in E F numeri æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, hoc eſt, E H, H F; erit utique æqualis multitudo numerorum B G, G C multitudini ipſorum E H, H F. Et quoniam æqualis eſt B G ipſi A, et E H ipſi D; erunt B G, E H ipſis A, D, æquales. Et eâdem ratione, cum G C ſit æqualis ipſi A, et H F ipſi D; erunt G C, H F ipſis A, D æquales: quot igitur numeri ſunt in B C, æquales ipſi A, tot ſunt et in B C, E F æquales ipſis A, D. Ergo quotuplex eſt B C ipſius A, totuplex erit et uterque B C, E F utriuſque A, D. Quæ igitur pars eſt A ipſius B C, eadem pars erit et uterque A, D utriuſque B C, E F. *Q. E. D.*

A . . .
B . . . G . . . C
D . . . .
E . . . . H . . . . F

PROP. VI. THEOR. [VI.]

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et uterque utriuſque eædem partes erit, quæ unus unius.

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes, quæ A B ipſius C: dico et utrumque A B, D E utriuſque C, F eaſdem partes eſſe, quæ A B ipſius C.

A . . . G . . . B
C . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . .

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem eſt D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes

partes ipsius F. Dividatur A B quidem in partes ipsius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipsius F, hoc est D H, H E.

Erit ipsorum A G, G B multitudo æqualis multitudini ipsorum D H, H E. Et quoniam quæ pars est A G ipsius C, eadem est pars et D H ipsius F; quæ pars est A G ipsius C, eadem pars erit[e] et uterque A G, D H utriusque C, F. Simili ratione et quæ pars est G B ipsius C, eadem pars erit et uterque G B, H E utriusque C, F. Quæ igitur partes est A B ipsius C, eædem partes est et uterque A B, D E utriusque C, F. *Q. E. D.*

A . . . G . . . B
C . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . .

[e] 5. hujus.

[VII.] PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim A B numeri C D pars sit, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D eandem partem esse, quæ est totus A B totius C D.

Quæ enim pars est A E ipsius C F, eadem pars sit et E B ipsius C G. Et quoniam quæ pars est A E ipsius C F, eadem pars est et E B ipsius C G; quæ A E ipsius C F, eadem pars est[f] et A B ipsius G F. Quæ autem pars est A E ipsius C F, eadem pars ponitur et A B ipsius C D: quæ igitur pars est A B ipsius G F, eadem est et A B ipsius C D: quare A B utriusque G F, C D eadem est pars: æqualis igitur est G F ipsi C D. Communis auferatur C F: ergo reliquus G C reliquo F D est æqualis. Et quoniam quæ pars est A E ipsius C F, eadem est et E B ipsius G C; æqualis autem est G C ipsi F D; quæ pars est A E ipsius C F, eadem erit et E B ipsius F D. Sed quæ pars est A E ipsius C F, eadem est[g] et A B ipsius C D; ergo quæ pars est E B ipsius F D, eadem est et A B ipsius C D. Et reliquus igitur E B reliqui F D eadem pars erit, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

[f] 5. hujus.
[g] ex hyp.

PROP.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; et reliquus erit reliqui eædem partes, quæ totus totius.

Numerus enim A B numeri C D sit partes, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D easdem partes esse, quæ totus A B totius C D.

Ponatur enim ipsi A B æqualis G H: quæ igitur partes est G H ipsius C D, eædem est et A E ipsius C F. Dividatur G H quidem in partes ipsius C D, videlicet G K, K H; A E vero dividatur in partes ipsius C F, videlicet

A . . . . . . L . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . M . . K . . . . . . N . . H

A L, L E: erit igitur ipsarum G K, K H multitudo æqualis multitudini ipsarum A L, L E. Et quoniam quæ pars est G K ipsius C D, eadem est et A L ipsius C F, major autem C D quam C F; et G K quam A L est major. Ponatur ipsi A L æqualis G M: quæ igitur pars est G K ipsius C D, eadem est et G M ipsius C F: quare [h] et reliquus M K reliqui F D eadem pars est, quæ totus G K totius C D. Rursus quoniam quæ pars est K H ipsius C D, eadem est et L E ipsius C F; major autem C D quam C F: erit et K H quam L E major. Ponatur ipsi L E æqualis K N: quæ igitur pars est K H ipsius C D, eadem est et K N ipsius C F: ergo et reliquus N H reliqui F D eadem pars est, quæ totus K H totius C D. Ostensum autem est et reliquum M K reliqui F D eandem partem esse, quæ totus G K totius D C; et uterque igitur simul M K, N H ipsius D F eædem partes est, quæ totus H G totius D C [i]. Æqualis autem est uterque simul M K, N H ipsi E B; nimirum cum H G ipsi B A æqualis sit, et G M, K N simul sumpti simul sumptis A L, L E. Et reliquus igitur E B reliqui F D eædem partes est, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

[h] 7. hujus.
[i] 6. hujus.

PROP. IX. THEOR. [IX.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et permutando quæ pars est, vel partes, primus tertii, eadem erit pars, vel eædem partes, et secundus quarti.

Numerus enim A numeri B C pars sit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ A ipsius B C; minor autem sit A quam D: dico et permutando quæ pars est A ipsius D, vel partes, eandem partem esse et B C ipsius E F, vel easdem partes.

Quoniam

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot ſunt et in E F æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros ipſi A æquales, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, E H, H F: erit ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

Et quoniam numeri B G, G C inter ſe ſunt æquales, ſunt autem et æquales E H, H F; atque eſt ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F: quæ pars eſt B G ipſius E H, vel partes, eadem pars erit et G C ipſius H F, vel eædem partes. Ergo[i] quæ pars eſt B G ipſius E H vel partes, eadem pars erit et uterque B C utriuſque E F vel eædem partes. Æqualis autem eſt B G ipſi A, et E H ipſi D. Quæ igitur pars eſt A ipſius D vel partes, eadem pars erit et B C ipſius E F vel eædem partes. *Q. E. D.*

[i] 5. & 6. hujus.

[X.] PROP. X. PROBL.

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et permutando quæ partes eſt primus tertii, vel pars, eædem partes erit et ſecundus quarti, vel eadem pars.

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes; ſit autem A B minor quam D E: dico et permutando quæ partes eſt A B ipſius D E vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem partes eſt et D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes ipſius F. Dividatur A B quidem in partes ipſius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipſius F, hoc eſt, D H, H E: erit utique ipſarum A G, G B multitudo multitudini ipſarum D H, H E æqualis. Et quoniam quæ pars eſt A G ipſius C, eadem pars eſt et D H ipſius F, et permutando[k] quæ pars eſt A G ipſius D H vel partes, eadem pars erit et C ipſius F vel eædem partes. Simili ratione et quæ pars eſt G B ipſius H E vel

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

[k] 9. hujus.

vel partes, eadem pars erit et C ipſius F vel eædem partes: ergo[l] quæ pars eſt A G ipſius D H vel partes, eadem pars erit et A B ipſius D E vel eædem partes. Sed quæ pars eſt A G ipſius D H vel partes, eadem pars eſt et C ipſius F vel eædem partes. Et igitur quæ partes eſt A B ipſius D E vel pars, eædem partes eſt et C ipſius F vel eadem pars. *Q. E. D.* [l] 5. & 6. hujus.

PROP. XI. THEOR. [XI.]

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus A B ad totum C D ita ablatus A E ad ablatum C F: dico et reliquum E B ad reliquum F D ita eſſe ut totus A B ad totum C D.

Quoniam enim eſt ut A B ad C D ita A E ad C F[m]: quæ pars eſt A B ipſius C D vel partes, eadem pars erit et A E ipſius C F vel eædem partes: ergo[n] et reliquus E B reliqui F D eadem pars erit vel eædem partes, quæ A B ipſius C D. Eſt igitur[m] ut E B ad F D ita A B ad C D. *Q. E. D.* [m] Def. 20. hujus. [n] 7. & 8. hujus.

A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales, A, B, C, D; ſitque ut A ad B ita C ad D: dico ut A ad B ita eſſe A, C ad B, D.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita C ad D[o]; quæ pars eſt A ipſius B vel partes, eadem pars erit et C ipſius D vel partes; et igitur[p] uterque A, C utriuſque B, D eadem pars eſt vel partes, quæ A ipſius B. Ergo[o] ut A ad B ita eſt A, C ad B, D. *Q. E. D.* [o] Def. 20. hujus. [p] 5. & 6. hujus.

A . .   C . . . .
B . . .   D . . . . . .

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si quatuor numeri proportionales fuerint; et permutando proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ſitque ut A ad B ita C ad D: dico et permutando proportionales eſſe, videlicet ut A ad C ita eſſe B ad D.

Quoniam

Quoniam enim eſt ut A ad B ita C ad D, quæ pars eſt A ipſius B vel partes[q], eadem pars erit et C ipſius D vel eædem partes: permutando igitur[r] quæ pars eſt A ipſius C vel partes, eadem pars eſt et B ipſius D vel partes. Ergo[q] ut A ad C ita eſt B ad D. *Q. E. D.*

[q] Def. 20. hujus.

[r] 9. & 10. hujus.

A . . C . . . . . .
B . . . D . . . .

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione; etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri A, B, C, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione, ſc. D, E, F; ſitque ut A ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico etiam ex æquo ut A ad C, ita eſſe D ad F.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita D ad E; erit permutando[s] ut A ad D ita B ad E. Rurſus, quoniam eſt ut B ad C ita E ad F; permutando ut B ad E ita erit C ad F, ut autem B ad E ita eſt A ad D; et igitur ut A ad D ita C ad F. Ergo permutando ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

[s] 13. hujus.

A . . . . D . . . . . .
B . . . . . . E . . . .
C . . . . F . .

[XV.] PROP. XV. THEOR.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque ſecundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem B C metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem E F: dico et permutando unitatem A æqualiter metiri numerum D, atque B C ipſum E F.

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum B C, atque D ipſum E F; quot unitates ſunt in B C, tot ſunt et in E F numeri æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in unitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet B G, G H, H C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, E K, K L, L F. Erit igitur ipſorum

A . D . .
B . G . H . C E . . K . . L . . F

ipsorum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini ipsorum E K, K L, L F. Et quoniam B G, G H, H C unitates inter se æquales sunt, suntque numeri E K, K L, L F inter se æquales; et unitatum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini numerorum E K, K L, L F: erit ut B G unitas ad numerum E K, ita G H unitas ad numerum K L, et unitas H C ad L F numerum. Et[t] ut[t] unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut unitas B G ad numerum E K ita B C ad E F. Æqualis autem est B G unitas unitati A, et E K numerus numero D: quare ut unitas A ad numerum D, ita est B C ad E F. Igitur[u] unitas A numerum D æqualiter metitur, atque B C ipsum E F. *Q. E. D.*

[t] 12. hujus.
[u] Def. 20. hujus.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis inter se æquales erunt.

Sint duo numeri A, B; et A quidem ipsum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D: dico C ipsi D æqualem esse.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C; [x]metietur B ipsum C per unitates, quæ sunt in A. Metitur autem et E unitas numerum A per unitates, quæ in ipso sunt: igitur E unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum C: quare permutando[y] unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipsum C. Rursus, quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per unitates, quæ sunt in B. Metitur autem et E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. Sed E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum C: igitur A utrumque ipsorum C, D æqualiter metitur. Erit ergo C ipsi D æqualis. *Q. E. D.*

E .
A . .   B . . .
C . . . . . .   D . . . . . .

[x] Def. 15. hujus.
[y] 15. hujus.

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, C multiplicans faciat ipsos D, E: dico ut B ad C ita esse D ad E.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D; metietur

[z] Def. 15. hujus.

tietur B ipſum D per unitates, quæ ſunt in A[z]. Metitur autem et F unitas numerum A per unitates, quæ in ipſo ſunt: igitur F unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipſum D. Ergo[a] ut F unitas ad numerum A, ita eſt B ad D. Eâdem ratione ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. Quare ut B ad D, ita C ad E; et permutando[b] ut B ad C, ita D ad E. *Q. E. D.*

[a] Def. 20. hujus.

[b] 13. hujus.

F .
A . .
B . . .   C . . . .
D . . . . . .   E . . . .

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipſos D, E: dico ut A ad B ita eſſe D ad E.

Quoniam enim A ipſum C multiplicans fecit D, et C multiplicans A[c] ipſum D fecit. Eâdem ratione et C ipſum B multiplicans fecit E: numerus igitur C duos numeros A, B multiplicans ipſos D, E fecit. Eſt igitur[d] ut A ad B ita D ad E. *Q. E. D.*

[c] 16. hujus.

[d] 17. hujus.

A . . .   B . . . .
C . .
D . . . . . .   E . . . .

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo et quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex ſecundo et tertio: et ſi numerus, qui fit ex primo et quarto, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo et tertio; quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D; ſitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem ipſum D multiplicans faciat E; B vero multiplicans ipſum C faciat F: dico E eſſe æqualem ipſi F.

A enim multiplicans C faciat G. Quoniam igitur A ipſum quidem C multiplicans fecit G, ipſum vero D multiplicans fecit E; numerus A duos numeros D, C multiplicans fecit ipſos G, E: eſt igitur[e] ut C ad D, ita G ad E. Ut autem C ad D, ita A ad B: quare ut A ad B, ita G ad E. Rurſus, quoniam A ipſum C multiplicans

[e] 17. hujus.

plicans fecit G; et B ipsum C multiplicans fecit F: duo numeri A, B numerum quendam C multiplicantes fecerunt ipsos G, F; igitur[f] ut A ad B, ita est G ad F. Sed ut A ad B, ita G ad E: ergo ut G ad E, ita est G ad F: igitur G ad utrumque ipsorum E, F eandem rationem habet. Erit igitur E ipsi F æqualis. [f] 18. hujus.

A . . . . . .
B . . . .
C . . .
D . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

Sed sit E æqualis ipsi F: dico ut A ad B ita esse C ad D.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos C, D multiplicans fecit G, E; erit ut C ad D, ita G ad E. Est autem E ipsi F æqualis: ut igitur G ad E, ita G ad F. Sed ut G ad E, ita C ad D: ergo ut C ad D, ita G ad F. Ut autem G ad F, ita[f] A ad B. Quare ut A ad B, ita C ad D. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Si primus sit ad secundum ut tertius ad quartum; factum ex secundo et tertio primus quarto, et quartus primo metietur.

Cor. 2.* Propositis tribus numeris, si factum ex secundo et tertio primus non metiatur, non datur tribus propositis proportione quartus.

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit a medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui a medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A, B, C; sitque ut A ad B ita B ad C: dico numerum qui fit ex A, C æqualem esse ei, qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis D; est igitur ut A ad B ita D ad C: ergo[g] qui fit ex A, C æqualis est ei, qui ex B, D. Qui autem fit ex B, D est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi D. Qui igitur fit ex A, C ipsi, qui fit ex B, est æqualis. [g] 19. hujus.

A . . . .
B . . . . . .
D . . . . . .
C . . . .

Sed qui fit ex A, C æqualis sit ei, qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad C.

Quoniam enim qui ex A, C fit æqualis eſt ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B eſt æqualis ei, qui ex B, D:
[h] 19. hujus. erit [h] ut A ad B ita D ad C. Sed B ipſi D eſt æqualis. Ut igitur A ad B ita eſt B ad C. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Si primus fit ad ſecundum ut ſecundus ad tertium, quadratum ex ſecundo primus metietur tertio, et tertius primo.

Cor. 2.* Duobus propoſitis, ſi quadratum ſecundi primus non metiatur, non datur duobus propoſitis proportione tertius.

SCHOLION.*

Si numerus numeros multiplicaverit, et compoſitum ex omnibus idem multiplicaverit; factus multiplicatione compoſiti compoſito ex factis omnibus prioribus æqualis erit.

Numeros BC, CD, DE numerus A multiplicans faciat FG, GH, HI.

Idem autem A numerum BE, ex BC, CD, DE compoſitum, multiplicans faciat numerum K.

A . .
B . . C . . . D . . . . E
F . . . . G . . . . . . H I
K . . . .

Dico numerum K numero FI, ex factis FG, GH, HI compoſito, æqualem eſſe. Cum enim numerus A, numerum BC multiplicans, numerum FG fecerit; ut unitas ad A, ita erit BC ad FG. Pari ratione ut unitas ad eundem A, ita CD ad GH, et DE ad HI. Eſt igitur BC ad FG ut CD ad GH, et ut DE ad HI. Quare et BE,
[i] 12. hujus. ex omnibus BC, CD, DE compoſitus, ad FI, ex omnibus FG, GH, GI compoſitum, ut BC ad FG [i]; *i. e.* ut unitas ad A. Sed cum A multiplicans BE numerum K fecerit; ut unitas ad A, ita erit BE ad K. Quare BE ad K ut BE ad FI. Quare K et FI inter ſe æquales. *Q. E. D.*

*Cor.** Hinc quæcunque de rectangulis ſub ſegmentis lineæ rectæ in ſecundo Elementorum Libro ad Euclide demonſtrata ſunt; ea omnia in numeris etiam planis locum habent ex partibus numeri cujuſvis factis.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem.

Sint C D, E F minimi, qui eandem quam A, B inter se rationem habeant. Dico C D æqualiter ipsum A metiri, atque E F ipsum B.

Cum enim numerus A ad B eandem quam C D ad E F rationem habeat; permutando, erit A ad C D ut B ad E F[k]. Duo autem C D, E F duobus A, B singuli singulis sunt minores[l]. Quæ pars igitur est C D ipsius A, vel quæ partes, eadem pars erit E F ipsius B, vel eædem partes[m]. At vero ipsorum A, B neutiquam sunt illi C D, E F partes. Sint enim, si esse possint. Quot sunt igitur in C D partes illius A, tot erunt in E F partes illius B. Dividatur igitur C D in partes numeri A, quæ sint C G, G D; et E F dividatur in partes numeri B, quæ sint E H, H F. Jam cum C G, G D sint inter se æquales, necnon E H, H F; erit C G ad E H ut G D ad H F. Numero autem æquales illi C G, G D illis E H, H F. Erit igitur ut unus antecedentium ad suum consequentem, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes[n]. Quare ut C G ad E H ita C D ad E F. Ac propterea C G, E H, eandem inter se rationem quam C D, E F habent, minores cum sint. Quod fieri nequit. Ponuntur enim C D, E F omnium minimi, qui eandem inter se rationem habent. Numeri igitur A neque partes est C D, neque numeri B ille E F. Pars igitur C D numeri A, numerique B eadem pars E F. Æqualiter igitur C D metitur ipsum A, atque E F ipsum B. *Q. E. D.*

A . . . .
B . . . . . .
C . . . G . . D
E . . H . F

[k] 13. hujus.
[l] ex hyp.
[m] Def. 3, 4. & 20. hujus.
[n] 12. hujus.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si sint tres numeri, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres numeri A, B, C, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione sc. D, E, F; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad F, ut autem B ad C ita D ad E: dico etiam ex æquo ut A ad C ita esse D ad F.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita E ad F; qui fit ex
[o] 19. hujus. A, F æqualis erit[o] ei, qui ex B, E. Rurſus, quoniam eſt ut B ad C ita D ad E; qui fit ex C, D æqualis erit ei, qui ex B, E. Oſtenſum autem eſt et qui fit ex A, F æqualem eſſe ei, qui ex B, E: ergo et qui fit ex A, F æqualis eſt ei, qui fit ex C, D. Igitur[o] ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

A ...... D ....
B .... E ....
C ... F ......

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter ſe minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Sint numeri A, B primi inter ſe: dico eos minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Sint enim C, D minimi omnium in ratione A ad B.
[p] 21. hujus. Quoniam igitur[p] minimi numeri eandem cum ipſis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem; numerus C ipſum A æqualiter metietur, atque D ipſum B. Quoties autem C metitur ipſum A, tot unitates ſint in E. Ergo quot ſunt unitates in numero E, toties D metietur B. Sed cum numerus C æqualiter
[q] ex hyp. metiatur A, ac unitas numerum E[q]; permutando, E æ-
[r] 15. hujus. qualiter metietur A, ac unitas numerum C[r]. Metitur igitur E numerum A. Similiter oſtendemus E numerum B metiri. Eſt igitur E numerorum A, B menſura communis. Numeri autem A, B, cum ſint inter ſe primi[q], nullam habent menſuram communem præter ipſam uni-
[s] Def. 12. tatem[s]. Unitas igitur eſt E. Quot vero ſunt in E unitates, tot numeri ſunt in A numero C æquales[q]. Cum igitur unitas ſit E, numerus A numero C æqualis erit. Similiter oſtendetur numerus B numero D æqualis. Sed ponuntur C, D minimi omnium in ratione numerorum A, D. Ergo et A, B minimi omnium in mutuâ ipſorum ratione. *Q. E. D.*

A ..... B ....
C ----- D ----
E ----

PROP.

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Sint A, B minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent: dico A, B primos inter se esse.

Si enim non sunt A, B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque C. Et quoties C ipsum quidem A metitur, tot unitates sint in D; quoties vero C metitur ipsum B, tot unitates sint in E.

A . . . . . . B . . . . .
C -------
D ----- E ---

Et quoniam C ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in D; C multiplicans ipsum D fecit A. Eädem ratione et C multiplicans B ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros D, E multiplicans fecerit A, B; erit[s] ut D ad E ita A ad B. Ergo D, E in eädem sunt ratione, in quâ A, B, minores ipsis existentes, quod[t] fieri non potest. Non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter se sunt. *Q. E. D.*

[s] 17. hujus.
[t] ex hyp.

PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui unum ipsorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B; et aliquis numerus C ipsum A metiatur: dico B, C inter se primos esse.

Si enim B, C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; et D ipsum A metietur. Metitur autem et ipsum B. Ergo D numeros A, B metitur primos inter se existentes, quod[u] fieri non potest. Non igitur numeros C, B numerus aliquis metietur; ideoque C B inter se primi sunt. *Q. E. D.*

A . . . . . .
B . . . . .
C . . .
D ---

[u] Def. 12. hujus.

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Si duo numeri ad aliquém numerum primi fuerint; et qui fit ex ipsis, ad eum primus erit.

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum C primi sint; et A ipsum B multiplicans faciat D: dico C, D inter se primos esse.

Si enim C, D non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, ſitque E.

A . . B . . .
C . . . . .
D . . . . . .
E -----
F ---

Et quoniam C, A primi inter ſe ſunt, et ipſum C metitur aliquis numerus
[x] 25. hujus. E; erunt[x] E, A inter ſe primi. Quoties autem E ipſum D metitur, tot unitates ſint in F: quare et F metitur ipſum D per unitates, quæ ſunt in E: ergo E ipſum F multiplicans fecit D. Sed et A multiplicans B ipſum D fecit. Qui igitur ſit ex E, F, eſt æqualis ei, qui ex A, B. Si vero qui ſit ex extremis æ-
[y] 19. hujus. qualis fuerit ei, qui ex mediis[y]; quatuor numeri proportionales erunt. Eſt igitur ut E ad A, ita B ad F. Sunt
[z] 23. hujus. autem A, E inter ſe primi; et qui primi etiam[z] minimi ſunt; minimi vero eandem cum ipſis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter meti-
[a] 21. hujus. untur[a], major majorem, minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: ergo E ipſum B metitur. Metitur autem et ipſum C: quare E ipſos B, C metitur, primos inter ſe exiſtentes: quod fieri non poteſt. Non igitur C, D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C, D inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; qui ſit ab uno ipſorum, ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter ſe primi A, B; et A ſeipſum multiplicans faciat C: dico B, C inter ſe primos eſſe.

A . . B . . .
C . . . .
D . .

Ponatur enim ipſi A æqualis D. Et quoniam A, B ſunt primi inter ſe, æqualis autem A ipſi D; et D, B inter ſe primi erunt. Uterque igitur ipſorum A, D ad B pri-
[b] 26. hujus. mus eſt: ergo et qui ex A, D ſit[b], primus erit ad B. Sed qui ſit ex A, D, eſt numerus C. Quare C, B inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; et qui ſiunt ex ipſis, inter ſe primi erunt.

Duo enim numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi ſint; et A quidem ipſum B multiplicans

multiplicans faciat E; C vero multiplicans D faciat F: dico E, F inter se primos esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad C primus est; et qui fit ex A, B[c], ad C primus erit. Qui autem fit ex A, B est E: ergo E, C primi inter se sunt. Eâdem ratione et E, D primi sunt inter se. Uterque igitur ipsorum C, D ad E primus est: ac propterea[c] qui fit ex C, D, primus erit ad E. Qui vero ex C, D fit, est numerus F. Ergo E, F primi inter se erunt. *Q. E. D.*

[c] 26. hujus.

A . . .   B . . . . .
E . . . .
C . .   D . . . .
F . . . .

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

Si duo numeri primi inter se fuerint, et uterque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis primi inter se erunt: et si numeri a principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos faciant; et ipsi inter se primi erunt; et semper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter se primi A, B, et A seipsum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E; et B seipsum multiplicans faciat D, multiplicans autem D faciat ipsum F: dico C, D et E, F inter se primos esse.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt; et A seipsum multiplicans fecit C; erunt[d] C, B primi inter se. [d] 27. hujus.

A . .   B . . .
C . . . .   D . . . .
E . . . .   F . . . .

Et quoniam C, B inter se primi sunt, et B seipsum multiplicans fecit D; erunt C, D inter se primi. Rursus quoniam A, B primi sunt inter se, et B seipsum multiplicans fecit D; A, D inter se primi erunt. Cum igitur duo numeri A, C ad duos numeros B, D, uterque ad utrumque, primi sint; et qui ex A, C fit ad eum, qui fit ex B, D[f], primus erit. Sed qui fit ex A, C est numerus E, qui vero ex B, D fit est F. Ergo E, F primi inter se sunt. *Q. E. D.*

[f] 28. hujus.

PROP.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint; et uterque simul ad utrumque ipsorum primus erit: quod si uterque simul ad unum aliquem ipsorum sit primus, et numeri a principio positi inter se primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter se primi, A B, B C: dico et utrumque simul, videlicet A C, ad utrumque ipsorum A B, B C primum esse.

Si enim non sint C A, A B inter se primi, metietur eos numerus aliquis. Metiatur, et sit D. Quoniam igitur D metitur ipsos C A, A B; et reliquum B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipsos A B, B C metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. Non igitur C A, A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B, A C inter se primi sunt. Ergo C A ad utrumque ipsorum A B, B C est primus.

A . . . . . B C
D -------

Sint rursus C A, A B primi inter se: dico et ipsos A B, B C inter se primos esse.

Si enim A B, B C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur utrumque ipsorum A B, B C, et totum C A metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsos C A, A B metitur primos inter se existentes, quod fieri non potest. Non igitur ipsos A B, B C numeros numerus aliquis metietur, ideoque A B, B C inter se primi sunt. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A, et numerum B non metiatur: dico B, A inter se primos esse.

Si enim non sint B, A inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, et sit C: ergo [f] C non est unitas. Et quoniam C ipsum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C idem qui A. Et quoniam C ipsos B, A metitur; metietur etiam ipsum A primum existentem, licet non sit idem cum eo; quod fieri

A . . . B . . . . .
C ----

[f] Def. 11. hujus.

fieri non poteſt. Non igitur ipſos B, A numeros numerus aliquis metietur: quare A, B inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

Si duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus: et unum ipſorum, qui a principio poſiti ſunt, metietur.

Duo enim numeri A, B ſe invicem multiplicantes faciant C, ipſum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui ſit D: dico D unum ipſorum A, B metiri.

Ipſum enim A non metiatur, atque eſt D numerus primus: ergo[g] A, D primi inter ſe ſunt. Et quoties D ipſum C metitur, tot unitates ſint in E. Quoniam igitur D metitur ipſum C per eas quæ ſunt in E unitates; numerus D ipſum E multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipſum C fecit. Ergo qui fit ex D, E æqualis eſt ei, qui ex A, B: eſt igitur[h] ut D ad A ita B ad E. Et ſunt D, A primi inter ſe; primi vero[i] ſunt et minimi, ſed[k] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem; ergo D ipſum B metitur. Similiter demonſtrabimus, ſi D non metiatur B, metiri ipſum A. Quare D metitur unum ipſorum A, B. *Q. E. D.*

A . .   B . . . . . .
C . . . .
D . . .
E . . . .

g 31. hujus.
h 19. hujus.
i 23. hujus.
k 21. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.

Sit compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipſum A.

Quoniam enim A eſt compoſitus numerus[l], metietur ipſum aliquis numerus. Metiatur, et ſit B. Et ſi quidem primus eſt B, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, ipſum aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque C. Et quoniam C metitur ipſum B; B vero ipſum A; et C ipſum A metitur. Et ſi quidem primus eſt C, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, eum aliquis numerus

A . . . .
B . . . .
C . .

l Def. 13. hujus.

merus

merus metitur; et hâc confideratione factâ, relinquetur tandem aliquis numerus primus, et qui ipfum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipfum A infiniti numeri, quorum alter altero eft minor, quod [m] in numeris fieri non poteft; ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipfum A.

A . . . .
B . . . .
C . .

[m] Def. 2. hujus.

Omnem igitur numerum compofitum primus aliquis numerus metitur. *Q. E. D.*

Aliter. Sit compofitus numerus A: dico primum aliquem numerum ipfum metiri.

Quoniam enim A compofitus eft[n], metietur ipfum aliquis numerus. Sit B minimus eorum, qui ipfum A metiuntur: dico B primum effe.

[n] Def. 13. hujus.

Si enim non; erit compofitus: ergo eum aliquis numerus metietur. Metiatur, fitque C metiens ipfum: erit igitur C minor quam B. Et quoniam C ipfum B metitur, fed et B ipfum A; et C ipfum A metietur, minor exiftens ipfo B, qui eft minimus omnium qui metiuntur A; quod eft abfurdum: igitur B non eft compofitus numerus. Ergo eft primus. *Q. E. D.*

A . . . .
B . . .
C --

[XXXV.]

PROP. XXXIV. PROBL.

Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium, qui eandem cum ipfis rationem habeant.

Sint dati quotcunque numeri A, B, C: oportet invenire minimos omnium, qui eandem cum ipfis A, B, C rationem habeant.

Vel igitur A, B, C primi inter fe funt, vel non. Si quidem primi, et minimi erunt[o] omnium eandem cum ipfis rationem habentium.

[o] 23. hujus.

A . . . . . . B . . . . C . . . .
D . .
E . . . F . . . . G . . . . .
H --- K ---- L -----
M --

Si vero non. Sumatur[p] ipforum A, B, C maxima communis menfura D, et quoties D unumquemque ipforum

[p] 3. hujus.

ſorum A, B, C metitur, tot unitates ſint in unoquoque horum E, F, G; et unuſquiſque igitur ipſorum E, F, G unumquemque ipſorum A, B, C metitur per eas, quæ ſunt in D unitates: ergo E, F, G ipſos A, B, C æqualiter metiuntur; ac propterea[q] E, F, G in eâdem ſunt ratione, [q] 18. hujus.
in quâ ipſi A, B, C. Dico eos etiam minimos eſſe. Si enim E, F, G non ſint minimi eandem cum ipſis A, B, C rationem habentium; erunt aliqui, ipſis E, F, G minores, in eâdem ratione, in quâ A, B, C. Sint H, K, L: æqualiter igitur[r] H metitur ipſum A, ac uterque ipſorum K, L [r] 21. hujus.
utrumque B, C metitur. Quoties autem H metitur ipſum A, tot unitates ſint in M; et uterque igitur K, L utrumque B, C metitur per eas quæ ſunt in M unitates. Et quoniam H ipſum A metitur per unitates, quæ ſunt in M; et M ipſum A per unitates quæ ſunt in H metietur. Eâdem ratione et M utrumque ipſorum B, C metietur per unitates, quæ ſunt in utroque K, L. Ergo M ipſos A, B, C metitur. Rurſus, quoniam H ipſum A metitur per unitates, quæ ſunt in M; H ipſum M multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans D ipſum A fecit: ergo qui ex E, D fit ei qui fit ex H, M eſt æqualis: ut igitur E ad H ita[s] M ad D. Major autem[s] [s] 19. hujus.
eſt E quam H: ergo et M quam D eſt major, et ipſos A, B, C metitur, quod fieri non poteſt; ponitur enim D ipſorum A, B, C maxima communis menſura. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis E, F, G in eâdem ratione, in quâ A, B, C: ergo E, F, G minimi ſunt eorum, qui eandem cum ipſis A, B, C rationem habent. *Q. E. D.*

PROP. XXXV. PROBL. [XXXVI.]

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter ſe ſunt, vel non. Sint primum A, B inter ſe primi, et A ipſum B multiplicans faciat C; ergo[t] et B multiplicans A ipſum C fecit; ac propterea numeri A, B ipſum C metiuntur. Dico etiam C minimum eſſe. Sit enim D numerus aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipſum

A . . .   B . . . .
C . . . .   [t] 16. hujus.
D --------------
E ---   F ----

ipsum D metitur, tot unitates sint in E, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in F: ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D; B vero multiplicans F ipsum D fecit. Quare numerus, qui ex A, E fit, est æqualis ei, qui fit ex B, F: ut igitur A ad B, ita est[u] F ad E. Et sunt A, B primi, primi autem[x] et minimi; sed[y] minimi eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem. Ergo B ipsum E metitur consequens consequentem. Et quoniam A numeros B, E multiplicans fecit C, D, erit[z] ut B ad E, ita C ad D. Metitur autem B ipsum E: ergo et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C alio quolibet eorum, quos numeri A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . . . .
D -------------
E ---   F ----

[u] 19. hujus.
[x] 23. hujus.
[y] 21. hujus.
[z] 18. hujus.

Sed non sint A, B primi inter se; et sumantur[a] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui sint F, E: æqualis igitur est[u] qui ex A, E fit ei, qui ex B, F. Et A ipsum E multiplicans faciat C: ergo et B multiplicans F ipsum C fecit: quare A, B ipsum C metiuntur. Dico et minimum esse. Sit enim D aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipsum D metitur, tot unitates sint in G, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in H: ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsum D fecit: qui igitur ex A, G fit est æqualis ei, qui fit ex B, H: ut igitur A ad B, ita[u] H ad G. Sed ut A ad B, ita F ad E: ergo et ut F ad E, ita H ad G. Et[b] sunt F, E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur[y], major majorem, et minor minorem: quare E ipsum G metitur. Et quoniam A numeros E, G multiplicans ipsos C, D fecit, ut E ad G ita erit[c] C ad D. Sed E metitur ipsum G: ergo[d] et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C quolibet eorum, quos A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . . .   B . . . . . .
F . .   E . . .
C . . . .
D --------------
G ---   H --

[a] 35. hujus.
[b] Per construct.
[c] 17. hujus.
[d] Def. 20. hujus.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVII.]

Si duo numeri metiantur numerum aliquem; et minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E: dico et E ipsum C D metiri.

Si enim E non metitur C D, E metiens F D relinquat seipso minorem C F. Et quoniam A, B ipsum E metiuntur, E vero ipsum D F; et A, B metientur D F. Sed et metiuntur totum C D: ergo et reliquum C F minorem ipso E metientur, quod[e] fieri non potest. Non igitur E non metitur ipsum C D, metitur igitur. *Q. E. D.*

A . . B . . .
C . . . . . . F ------ D
E . . . . . .

[e] ex hyp.

PROP. XXXVII. PROBL. [XXXVIII.]

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati numeri A, B, C: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sumatur[f] numerus D minimus, quem duo A, B metiuntur. Itaque C vel metitur D, vel non metitur. Metiatur primum. Sed et A, B metiuntur ipsum D: ergo A, B, C ipsum D metientur. Dico illum esse minimum. Sit enim E numerus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Quoniam igitur A, B, C metiuntur ipsum E, et A, B ipsum E metiuntur: ergo[g] et minimus, quem metiuntur A, B, ipsum E metietur. Minimus autem, quem metiuntur A, B, est D: quare D metitur ipsum E. Minor igitur est D numero E. Similiter ostendetur D minor quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . .
E ------------------

[f] 36. hujus.

[g] 37. hujus.

Non metiatur autem C ipsum D, et sumatur[f] minimus numerus E, quem C, D metiantur. Itaque quoniam A, B metiuntur ipsum D; D vero ipsum E: et A, B ipsum E metientur. Metitur autem et C ipsum E: ergo

ergo A, B, C ipſum E metiuntur. Dico illum etiam eſſe minimum. Sit enim F unus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Et quoniam A, B, C metiuntur F, et A, B ipſum F metientur: ergo[h] et minimus, quem A, B metiuntur, metietur ipſum F. Minimus autem, quem A, B metiuntur, eſt D: quare D ipſum F metitur. Sed et C metitur ipſum F: ergo D, C ipſum F metiuntur; ac propterea minimus, quem metiuntur D, C, metietur et F. Sed[i] minimus, quem metiuntur D, C, eſt E: ergo E ipſum F metitur. Minor igitur eſt E numero F. Similiter oſtendetur E alio quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . .
E . . . .
F -------------

[h] 37. hujus.
[i] Per construct.

SCHOLION.*

Reliqua tria hujus Libri Theoremata vix credo ab Euclide fuiſſe.

[XXXIX.] PROP. XXXVIII. THEOR.

Si numerum numerus aliquis metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipſo B denominatam.

Quoties enim B ipſum A metitur, tot unitates ſint in C; et quoniam B metitur ipſum A per eas, quæ ſunt in C unitates; metitur autem et unitas D ipſum C per unitates, quæ in ipſo ſunt; et D unitas ipſum C numerum æqualiter metietur, atque B ipſum A: quare permutando[k] unitas D ipſum B numerum æqualiter metietur, atque C ipſum A: quæ igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem pars eſt et C ipſius A. Sed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata: ergo et C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. Quare A partem habet ſc. C ab ipſo B denominatam. *Q. E. D.*

A . . . .
B . . .
C . . . .
D .

[k] 15. hujus.

PROP.

PROP. XXXIX. THEOR. [XL.]

Si numerus partem quamcumque habeat; eum numerus a parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et ab ipsâ parte B denominatus sit numerus C: dico C ipsum A metiri.

Quoniam enim B ipsius A pars est, et denominata ab ipso C; est autem et unitas D ipsius C numeri pars ab ipso denominata: quæ igitur pars est unitas D ipsius C numeri, eadem pars est et B ipsius A: ergo unitas D æqualiter metitur ipsum C numerum, atque B ipsum A; et permutando[l] unitas[l] D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. Ergo C ipsum A metitur. *Q. E. D.*

A . . . .
B . .
C . . . . . .
D .

[l] 15. hujus.

PROP. XL. PROBL. [XLI.]

Numerum invenire, qui minimus cum sit datas partes habeat.

Sint datæ partes A, B, C: oportet numerum invenire, qui cum minimus sit habeat datas partes A, B, C.

Sint ab ipsis A, B, C partibus denominati numeri D, E, F, et sumatur[m] minimus numerus G, quem ipsi D, E, F metiuntur. Quoniam igitur D, E, F metiuntur ipsum G; habebit[n] G partes ab ipsis D, E, F denominatas. Partes autem denominatæ ab ipsis D, E, F[o] sunt A, B, C; ergo G partes A, B, C habet. Dico et minimum esse. Si enim G non sit minimus, partes habens A, B, C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. Sit H. Quoniam igitur H partes habet A, B, C; eum[p] metientur numeri ab ipsis A, B, C partibus denominati. Sunt autem hi numeri D, E, F: ergo D, E, F ipsum H metientur minorem ipso G, quod[o] fieri non potest. Non igitur erit aliquis numerus minor ipso G, qui partes A, B, C habeat. *Q. E. D.*

A $\frac{1}{2}$ D . .
B $\frac{1}{3}$ E . . .
C $\frac{1}{4}$ F . . . .
G . . . .
H ——————

[m] 38. hujus.
[n] 39. hujus.
[o] Per construct.
[p] 40. hujus.

P EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si ſint quotcunque numeri, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

SINT quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D primi inter ſe ſint: dico A, B, C, D minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Si enim non, ſint minores ipſis A, B, C, D numeri E, F, G, H, et in eâdem ratione. Et quoniam A, B, C, D

A,* 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E ---	F ----	G -----	H ------

ſunt in eâdem ratione, in quâ E, F, G, H, atque eſt ipſorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipſorum E, F, G, H: erit ex æquo[a] ut A ad D ita E ad H. Et[a] 14. ſept.
ſunt A, D primi; primi autem et minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem rationem habent[b], [b] 21. ſept.
antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: ergo A ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur E, F, G, H minores ipſis A, B, C, D exiſtentes in eadem ſunt ratione cum ipſis: ac propterea

* *In hoc et ſequenti libro Literis adjecimus numeros illis reſpondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex neceſſitate adhibenda, moleſtiam crearet lectoribus.*

A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. *Q. E. D.*

[II.]

PROP. II. PROBL.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ea sc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor; et A seipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D; et B seipsum multiplicans faciat E; et adhuc A multiplicans C, D, E ipsos F, G, H faciat; B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit C, multiplicans vero B ipsum D fecit, numerus A duos numeros A, B multiplicans fecit C, D:

A, 2.	B, 3.		
C, 4.	D, 6.	E, 9.	
F, 8.	G, 12.	H, 18.	K, 27.

c 17. sept. est igitur[c] ut A ad B, ita C ad D. Rursus, quoniam A ipsum B multiplicans fecit D, et B seipsum multiplicans fecit E; uterque ipsorum A, B multiplicans B utrumque ipsorum D, E fecit:
d 18. sept. ut igitur A ad B, ita[d] D ad E. Sed ut A ad B, ita C ad D: ergo et ut C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C, D multiplicans ipsos F, G fecit: ut C ad D, ita erit F ad G. Ut autem C ad D, ita erat A ad B; quare ut A ad B, ita F ad G. Rursus, quoniam A numeros D, E multiplicans fecit G, H: erit ut D ad E, ita G ad H. Sed ut D ad E, ita A ad B: ergo ut A ad B, ita G ad H. Et quoniam A, B ipsum E multiplicantes fecerunt H, K; erit ut A ad B, ita H ad K. Ostensum autem est et ut A ad B, ita esse et F ad G, et G ad H: ergo ut F ad G, ita G ad H, et H ad K: numeri igitur C, D, E et etiam F, G, H, K proportionales sunt in ratione, quam habet A ad B. Dico etiam et minimos esse. Nimirum tres C, D, E in ternis minimos, quatuor item F, G, H, K
e ex hyp. minimos in quaternis. Quoniam enim[e] A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium;
f 23. sept. minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium[f] et primi sunt inter se: erunt ipsi A, B inter se primi. Et uterque quidem ipsorum A, B seipsum multiplicans utrumque C, E fecit; utrumque vero C, E multiplicans fecit

fecit utrumque F, K: ergo[g] C, E et F, K primi inter ſe ſunt. Si autem ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, et eorum extremi ſint inter ſe primi; minimi[h] erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium: ergo et C, D, E et etiam F, G, H, K minimi ſunt omnium eandem cum ipſis A, B rationem habentium. *Q. E. D.* [g] 29. ſept. [h] 1. hujus.

Cor. 1. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipſis rationem habentium, extremos eorum quadratos eſſe; ſi vero quatuor, eſſe cubos.

Cor. 2.* Si A, B non ſint omnium in datâ ratione minimi, ſimili tamen modo inveniendi ſunt numeri deinceps proportionales, in datâ ratione ipſius A ad B, ſed qui minimi non erunt.

PROP. III. THEOR. [III.]

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; eorum extremi primi inter ſe erunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: dico eorum extremos A, D inter ſe primos eſſe.

Sumantur enim[l] duo numeri minimi in ratione ipſorum A, B, C, D, qui ſint E, F; tres vero G, H, K; et ſemper deinceps uno plures, quoad aſſumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipſorum A, B, C, D. Sumantur, et ſint L, M, N, O. [l] 2. hujus.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E, 2.	F, 3.		
G, 4.	H, 6.	K, 9.	
L, 8.	M, 12.	N, 18.	O, 27.

Extremi igitur ipſorum L, O primi inter ſe ſunt. Quoniam enim E, F primi inter ſe ſunt, et uterque ipſorum ſeipſum multiplicans utrumque G, K fecit; utrumque vero G, K multiplicans fecit utrumque L, O: erunt[k] et G, K et L, O primi. Et quoniam A, B, C, D minimi ſunt eorum eandem cum ipſis rationem habentium; ſunt autem et L, M, N, O minimi in eâdem ratione, in quâ A, B, C, D; eſtque ipſorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipſorum L, M, N, O: erit unuſquiſque ipſorum A, B, C, D unicuique ipſorum L, M, N, O æqualis: ergo A quidem eſt æqualis L, et D ipſi O. Et [k] 29. ſept.

 quoniam

quoniam L, O primi ſunt inter ſe, L vero ipſi A æqualis, et O ipſi D; et A, D inter ſe primi erunt. *Q. E. D.*

[IV.] PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio A ad B, et ratio C ad D, et ratio E ad F: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione A ad B, et in ratione C ad D; et adhuc in ratione E ad F.

[l] 36. ſept. Sumatur enim[l] minimus numerus, quem B, C metiuntur; ſitque G. Et quoties B metitur G, toties A ipſum H metiatur: quoties vero C ipſum G metitur, toties

A, 2.	B, 5.	C, 3.	D, 4.	E, 5.	F, 6.
H, 6.	G, 15.	K, 20.	L, 24.		
N ---	O -----	M ------	P --------		

et D metiatur K. Itaque E ipſum K vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties E metitur K, toties F ipſum L metiatur. Et quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipſum G; erit[m] ut A ad B, ita H ad G. Eâdem ratione et ut C ad D, ita G ad K, et adhuc ut E ad F, ita K ad L. Ergo H, G, K, L deinceps proportionales ſunt in ratione A ad B, et in ratione C ad D, et adhuc in ratione E ad F. Dico etiam minimos eſſe. Si enim non ſint H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint N, O, M, P. Et quoniam eſt ut A ad B ita N ad O; et ſunt A, B minimi; minimi autem eos, qui eandem habent rationem[n], æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: metietur B ipſum O. Eâdem ratione et C ipſum O metietur: quare B, C metiuntur O: ac propterea[o] minimus, quem metiuntur B, C, ipſum O metietur. Minimus autem, quem metiuntur B, C[p], eſt G: ergo G metietur O, major minorem; quod fieri non poteſt. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F.

[m] 13. ſept.
[n] 21. ſept.
[o] 37. ſept.
[p] ex hyp.

Sed

Sed non metiatur E ipſum K. Et ſumatur[q] minimus numerus, quem ipſi E, K metiuntur; ſitque M. Quoties autem K metitur M, toties et uterque ipſorum H, G utrumque N, O metiatur; et quoties E metitur M, toties et F metiatur P. Quoniam igitur H ipſum N æqualiter metitur, atque G ipſum O; erit[r] ut H ad G, ita N ad O. Ut autem H ad G, ita A ad B; quare ut A ad B, ita N ad O. Eâdem ratione ut C ad D, ita O ad M. Rurſus,

[q] 36. ſept.

[r] 13. ſept.

A, 4.	B, 5.	C, 2.	D, 3.	E, 4.	F, 3.
H, 8.	G, 10.	K, 15.			
N, 32.	O, 40.	M, 60.	P, 45.		
Q --	R ---	S ----	T ---		

quoniam E ipſum M æqualiter metitur, atque F ipſum P; erit[r] ut E ad F, ita M ad P. Quare N, O, M, P deinceps proportionales ſunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Dico minimos quoque eſſe. Si enim non ſint N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint Q, R, S, T. Et cum ſit ut Q ad R, ita A ad B; ſintque A, B minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem[s], æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: numerus B ipſum R metietur. Eâdem ratione et C metietur ipſum R; ergo B, C ipſum R metiuntur; et ob id[t] minimus, quem metiuntur B, C, ipſum R metietur. Minimus autem, quem metiuntur B, C, eſt G: ergo G metitur ipſum R. Atque eſt[r] ut G ad R, ita K ad S: quare[u] et K ipſum S metitur. Metitur autem et E ipſum S; ideoque E, K ipſum S metiuntur; et minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipſum S. Sed minimus, quem metiuntur E, K[x], eſt M: ergo M ipſum S metietur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; ergo N, O, M, P deinceps minimi ſunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. *Q. E. D.*

[s] 21. ſept.

[t] 37. ſept.

[u] Def. 20. ſept.

[x] ex hyp.

[V.] PROP. V. THEOR.

*Plani numeri inter se rationem habent * ex lateribus compositam.*

Sint plani numeri A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D numeri: ipsius vero B latera sint E, F: dico A ad B rationem habere ex lateribus compositam.

[y] 4. hujus.

Rationibus enim datis, videlicet quam habet C ad E, et quam D ad F, sumantur [y] numeri deinceps minimi G, H, K in rationibus C ad E, et D ad F; sitque ut C ad

A, 6.		B, 20.	
	L, 12.		
C, 2.	D, 3.	E, 4.	F, 5.
G, 3.	H, 6.	K, 10.	

[z] Def. 5. sexti. [a] Def. 16. sept. [b] 17. sept. [c] Per construct. [d] 14. sept.

E, ita G ad H: ut autem D ad F, ita H ad K. Ergo G, H, K inter se rationes habent laterum. Sed [z] ratio G ad K composita est ex ratione G ad H et ratione H ad K: quare G ad K rationem habet ex lateribus compositam. Dico igitur ut A ad B, ita esse G ad K. Numerus D ipsum E multiplicans faciat L. Et quoniam [a] D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit [b] ut C ad E, ita A ad L. Ut autem C ad E, ita [c] G ad H: ergo et ut G ad H, ita A ad L. Rursus, quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L; multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit L ad B. Sed ut D ad F, ita est H ad K; et igitur ut H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est et ut G ad H, ita A ad L: quare ex æquo [d] ut G ad K, ita A ad B. Sed [z] G ad K rationem habet compositam ex lateribus. Ergo et A ad B rationem habebit ex lateribus compositam. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, et A ipsum B non metiatur: dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius *ex laterum rationibus.*

Et

Et quidem numeros A, B, C, D, E deinceps ſeſe non metiri, perſpicuum eſt. Neque enim A ipſum B metitur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. Dico

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

enim A, *ex. g.* non metiri ipſum C. Nam quot ſunt A, B, C, tot ſumantur[e] minimi numeri eandem cum ipſis A, B, C rationem habentes, et ſint F, G, H. Quoniam igitur F, G, H in eâdem ſunt ratione, in quâ A, B, C, atque eſt ipſorum A, B, C multitudo æqualis multitudini ipſorum F, G, H; erit ex æquo[f] ut A ad C, ita F ad H. Et quoniam eſt ut A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipſum B, neque[g] F ipſum G metietur: non igitur unitas eſt F; unitas enim[h] omnem numerum metitur. Et ſunt F, H primi inter ſe: ergo[i] neque F metitur ipſum H. Atque eſt ut F ad H, ita A ad C. Neque igitur A ipſum C metietur. Similiter demonſtrabimus neque alium ullum aliquem metiri. *Q. E. D.*

e 35. ſept.
f 14. ſept.
g Def. 20. ſept.
h Def. 1. ſept.
i Def. 12. ſept.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; et ſecundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A ipſum D metiatur: dico A ipſum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipſum B[k], neque alius aliquis ullum metietur, quod eſt abſurdum: ponitur enim A ipſum D metiri. Ergo et A ipſum B metietur. *Q. E. D.*

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

k 6. hujus.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter alios, eandem cum ipſis rationem habentes, cadent.

Inter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales C, D; et fiat ut A ad B, ita E ad F: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter E, F deinceps proportionales cadere.

Quot

Quot enim numeri sunt A, C, D, B, totidem sumantur[l] minimi numeri eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habentium G, H, K, L: ergo[m] extremi ipsorum G, L primi inter se sunt. Et quoniam A, C, D, B ad

[l] 35. sept.
[m] 3. hujus.

A, 2.	C, 4.	D, 8.	B, 16.
G, 1.	H, 2.	K, 4.	L, 8.
E, 3.	M, 6.	N, 12.	F, 24.

ipsos G, H, K, L in eàdem sunt ratione, atque est ipsorum A, C, D, B multitudo æqualis multitudini ipsorum G, H, K, L; erit ex æquo[n] ut A ad B, ita G ad L. Ut autem A ad B, ita E ad F; et igitur ut G ad L, ita E ad F. Et sunt G, L primi; sed primi[o] sunt et minimi; minimi vero eos qui eandem rationem habent[p] æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem: ergo G æqualiter metitur ipsum E, atque L ipsum F. Quoties autem G metitur ipsum E, toties et uterque ipsorum H, K utrumque M, N metiatur. Numeri igitur G, H, K, L ipsos E, M, N, F æqualiter metiuntur: ideoque[q] G, H, K, L in eâdem sunt ratione, in quâ ipsi E, M, N, F. At G, H, K, L in eâdem sunt ratione, in quâ A, C, D, B: ergo A, C, D, B in eâdem ratione erunt, in quâ E, M, N, F. Sed[r] A, C, D, B sunt deinceps proportionales: ergo et E, M, N, F deinceps proportionales erunt. Quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem deinceps proportionales et inter E, F cadent. *Q. E. D.*

[n] 14. sept.
[o] 23. sept.
[p] 21. sept.
[q] Def. 20. sept.
[r] ex hyp.

Cor. * Hinc datis numeris duobus A, B, aliisque duobus E, F qui eandem quam A, B inter se rationem habeant; datis etiam quotcunque inter A, B analogiâ mediis; totidem inter E, F analogiâ medii quâ ratione inveniantur, satis patet.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si duo numeri inter se primi fuerint, et inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter utrumque ipsorum et unitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A, B, et inter ipsos deinceps proportionales cadant C, D; exponaturque unitas E: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A, B, totidem et inter utrumque ipsorum

rum A, B et unitatem E numeros deinceps proportionales cadere.

Sumantur enim [s] duo quidem numeri minimi F, G in [s] eâdem ratione, in quâ sunt A, C, D, B; tres vero H, I, K, et semper deinceps uno plures, quoad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B, sumantur [t], [s] 35. sept. [t] 2. hujus.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 1.
F, 2. G, 3.
H, 4. I, 6. K, 9.
L, 8. M, 12. N, 18. O, 27.

et sint L, M, N, O. Itaque manifestum est [u] F seipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse L; et G seipsum multiplicantem fecisse K, multiplicantem vero K fecisse O. Est igitur E ad F, ut F ad H, et H ad L. Item E ad G, ut G ad K, et K ad O. Sunt igitur F, H proportione medii inter E, L; et G, K totidem proportione medii inter E, O. Quot vero sunt numeri L, M, N, O, sive A, C, D, B, tot sunt numerorum ordines ab E ultimum usque ordinem L, M, N, O. Quot sunt igitur numeri numerorum A, B intermedii, tot sunt intermedii numerorum ordines, inter E et ultimum ordinem L, M, N, O. At quot sunt inter E et ordinem ultimum intermedii numerorum ordines, tot sunt inter E et L, necnon inter E et O numeri proportione medii. Tot igitur sunt inter E et L, necnon inter E et O, quot inter ipsos A, B numeri proportione medii. Et quoniam L, M, N, O minimi sunt eandem cum ipsis F, G rationem habentium; sunt autem et A, C, D, B minimi eandem quam F, G rationem habentium; atque est ipsorum L, M, N, O multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B: erit unusquisque ipsorum L, M, N, O unicuique ipsorum A, C, D, B æqualis: æqualis igitur est L ipsi A, et O ipsi B. At ostensi sunt numeri F, H inter E, L proportione medii. Iidem igitur F, H inter E, A proportione medii. Similiter G, K inter E, B proportione medii. Numerorum autem F, H, necnon numerorum G, K numerus numero mediorum inter A, B ostensus est æqualis. Quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter utrumque ipsorum A, B, et unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. *Q. E. D.* [u] Per constr. 2. hujus.

Cor.

Cor. * Numeri inter se primi, inter quos unus cadit proportione medius, quadrati sunt. Quibus autem duo intercedunt proportione medii, primis inter se existentibus, ii cubi sunt.

[X.] PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros et unitatem deinceps proportionales numeri ceciderint; quot inter utrumque ipsorum et unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos numeri proportionales cadent.

Inter duos enim numeros A, B et unitatem C numeri deinceps proportionales cadant D, E, et F, G: dico quot inter utrumque ipsorum A, B et unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Quoniam C unitas est ad D, ut D ad E; D seipsum multiplicans fecit E. Et cum C unitas sit ad D, ut E ad A; D multiplicans E fecit A. Simili modo ostendetur, F seipsum multiplicando fecisse G; et multiplicando G fecisse B. Numeri igitur D, F seipsum quisque, et a se

A, 8.   I, 12.   K, 18.   B, 27.
E, 4.   H, 6.   G, 9.
D, 2.   F, 3.
C, 1.

factos multiplicando, numeros A, B fecerunt. Si capiantur igitur primum tres numeri in continuâ numerorum D, F ratione; tum in eâdem continuâ ratione quatuor; dein quinque; atque hoc semper fiat; in ordinem aliquem numerorum tandem devenietur, cujus A, B extremi erunt. Et ordinis illius tot erunt numeri, quot sunt ab unitate C, ordinem illum usque numerorum ordines. Ac proinde inter extremos A, B tot erunt intermedii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi A, B, intermedii numerorum ordines. Ast tot sunt inter unitatem C et A, tot etiam inter unitatem C et B, continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi sunt A, B, intermedii numerorum ordines. Id enim patet ex 2ª hujus et duobus ejus corollariis. Tot igitur inter A et B continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et A, vel inter unitatem C et B. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XI. THEOR. [XI.]

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; et quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus, quam latus habet ad latus.

Sint quadrati numeri A, B et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad D.

Sit F unitas. Quoniam A numerus quadratus est, cujus latus numerus C; [t]numerus C seipsum multiplicans fecit A. Pari ratione D seipsum multiplicans fecit B. Ergo F unitas est ad C, ut C ad A. Et F unitas ad D, ut D ad B. Unitati igitur et numero A, necnon unitati et numero B, unus intercedit proportione medius. Quare et numeris A, B unus intercedit proportione medius [u].

[t] Def. 18. sept.

A, 4.	E, 6.	B, 9.
C, 2.		D, 3.
	F, 1.	

[u] 10. hujus.

Dico præterea proportionem A ad B duplicatam esse proportionem numeri C ad D. Numerus C numerum D multiplicans faciet aliquem. Faciat E. Quoniam C seipsum multiplicans fecit A, et D multiplicans fecit E, erit A ad E ut C ad D [x]. Rursum, quoniam D seipsum multiplicans fecit B, et multiplicans C fecit E; erit E ad B ut C ad D. Sed ut C ad D, ita est A ad E (id enim ostensum.) Quare A est ad E ut E ad B. Continua est igitur trium A, E, B proportio. Proportio igitur A ad B duplicata est A ad E, id est, ipsius C ad D duplicata. *Q. E. D.*

[x] 17. sept.

Cor. * Proportione medius inter duos quoscunque quadratos, mutuâ laterum multiplicatione factus est. Continua autem trium ratio, laterum ratio est.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; et cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A, B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B duos numeros medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam habere rationem ejus, quam C habet ad D.

Sit

Sit K unitas. Numeri C, D fcipfum quifque multiplicando facient aliquos. Faciant E, G. Erit igitur K unitas ad C, ut C ad E; et K unitas ad D, ut D ad G.

A, 8. H, 12. I, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
C, 2. D, 3.
K, 1.

Quoniam A cubus eft cujus latus C; et E quadratus cujus latus idem C; idcirco C multiplicans E fecerit A. Pari ratione D multiplicans G fecerit B. Erit igitur K unitas ad C ut E ad A; et K unitas ad D ut G ad B. Sed oftenfum eft unitatem effe ad C, ut C ad E; necnon unitatem ad D, ut D ad G. Unitatis igitur et numerorum C, E, A, necnon unitatis et numerorum D, G, B continua eft proportio. Unitati igitur et A duo intercedunt proportione medii, C, E. Unitati quoque et B duo intercedunt D, G. Numeris igitur A, B totidem, duo nempe, intercedunt proportione medii [y].

[y] 10. hujus.

Dico præterea proportionem A ad B, ipfius C ad D triplicatam effe. Numerus C multiplicans D faciet aliquem. Faciat F. Numeri C, D numerum F multiplicantes duos aliquos facient. Facient duos H, I. Inter quadratos E, G eft F proportione medius; et E ad F, necnon F ad G, ut C ad D [z]. Quoniam vero C multiplicans E fecit A, et multiplicans F fecit H; erit A [a] ad H ut E ad F, id eft, ut C ad D. Rurfum, quoniam C multiplicans F fecit H, et D multiplicans F fecit I, erit [b] H ad I ut C ad D, id eft, ex oftenfis, ut A ad H. Denique cum D multiplicans F fecit I, et multiplicans G fecit B; erit I ad B ut F ad G, id eft, ut C ad D, id eft, ut A ad H. Numerorum igitur quatuor A, H, I, B continua eft proportio. Proportio igitur A ad B ipfius A ad H, feu C ad D, triplicata [c]. *Q. E. D.*

[z] Cor. 11. hujus.
[a] 17. fept.
[b] 18. fept.
[c] Def. 11. quinti.

PROP.

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et unusquisque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt: et si positi a principio numeri factos multiplicantes alios faciant; et ipsi proportionales erunt; et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, C, sitque ut A ad B, ita B ad C, et ipsi A, B, C seipsos multiplicantes faciant D, E, F; ipsos vero D, E, F multiplicantes faciant G, H, K: dico numeros D, E, F et G, H, K deinceps proportionales esse.

Numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; uterque autem ipsorum A, B multiplicans L faciat utrumque M, N. Et rursus, B quidem multiplicans C ipsum O

		A, 2	B, 4.	C, 8.		
	D, 4.	L, 8.	E, 16.	O, 32.	F, 64.	
G, 8.	M, 16.	N, 32.	H, 64.	P, 128.	Q, 256.	K, 512.

faciat; uterque vero ipsorum B, C multiplicans O faciat utrumque P, Q.

Eodem modo quo prius ostendemus D, L, E et G, M, N, H deinceps proportionales esse in ratione A ad B; et adhuc E, O, F et H, P, Q, K, deinceps esse proportionales in ratione B ad C. Atque est ut A ad B, ita B ad C: ergo et D, L, E in eâdem sunt ratione, in quâ E, O, F; et præterea G, M, N, H in eâdem ratione, in quâ H, P, Q, K. Estque ipsorum quidem D, L, E multitudo multitudini ipsorum E, O, F æqualis. Multitudo autem ipsorum G, M, N, H æqualis multitudini ipsorum H, P, Q, K: ex æquo igitur [d] ut D ad E, ita E ad F, et ut G ad H, ita H ad K. *Q. E. D.* [d] 14. sept.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A ipsum B metiatur: dico et latus C ipsum D metiri.

Numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat: ergo A, E, B [e] deinceps proportionales sunt in ratione C ad D. [e] Cor. 11. hujus.

Et

Et quoniam A, E, B deinceps sunt proportionales, metiturque A ipsum B; et [b] A ipsum E metietur. Atque est ut A ad E, ita C ad D: ergo [c] et C metitur ipsum D.

[b] 7. hujus.
[c] Def. 20. sept.

A, 4. E, 8. B, 16.
C, 2. D, 4.

Sed C metiatur ipsum D: dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam est ut C ad D, ita A ad E, metitur autem C ipsum D; et A ipsum E metietur. Et sunt A, E, B deinceps proportionales. Metitur igitur et A ipsum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur. *Q. E. D.*

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum; et latus latus metietur: et si latus latus metiatur; et cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico C ipsum D metiri.

Numerus enim C seipsum multiplicans faciat E, et multiplicans D faciat F; D vero seipsum multiplicans

A, 8. H, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. F, 8. G, 16.
C, 2. D, 4.

faciat G; et uterque ipsorum C, D multiplicans F utrumque H, K faciat. Manifestum autem est E, F, G et A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D; et quoniam A, H, K, B deinceps proportionales sunt, metiturque A ipsum B [d]; et A ipsum H metietur. Est autem ut A ad H, ita C ad D. Ergo [e] C ipsum D metietur.

[d] 7. hujus.
[e] Def. 20. sept.

Sed C metiatur D: dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam C ipsum D metitur, estque ut C ad D, ita A ad H; et A metitur ipsum H. Quare et A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A non metiatur ipsum B: dico neque C ipsum D metiri.

Si enim metitur C ipsum D, et A ipsum B metietur[f]. Non metitur autem A ipsum B: non igitur C ipsum D metietur.

A, 9.	B, 16.
C, 3.	D, 4.

[f] 14. hujus.

Sed non metiatur C ipsum D: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A metitur ipsum B, et [f] C ipsum D metietur. Atqui C non metitur D; neque igitur A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico C ipsum D non metiri.

Si enim C metitur ipsum D, et A ipsum B metietur[g]. Atqui non metitur A ipsum B: non igitur C ipsum D metietur.

A, 8.	B, 27.
C, 2.	D, 3.

[g] 15. hujus.

Sed non metiatur C ipsum D: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A ipsum B metitur, et [g] C metietur ipsum D. Non metitur autem C ipsum D: neque igitur A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Inter duos similes planos numeros unus medius proportionalis cadit; et planus ad planum duplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D, ipsius vero B latera homologa sint E, F. Et quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia[h]; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico inter

[h] Def. 21. sept.

inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere; et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F.

Quoniam enim est ut C ad D, ita E ad F; et permutando ut C ad E, ita erit D ad F [i]. Et quoniam planus numerus est A, cujus latera C, D; numerus D ipsum C

[i] 13. sept.

A, 6. G, 12. B, 24.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 6.

multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans F ipsum B fecit; numerus autem D ipsum E multiplicans faciat G. Et cum D ipsum quidem C multiplicans fecit A, multiplicans vero E fecit G; erit ut C ad E, ita A ad G [k]. Sed ut C ad E, ita D ad F; et igitur ut D ad F, ita A ad G. Rursus, quoniam E ipsum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit G ad B [k]. Ostensum est autem et ut D ad F, ita esse A ad G; et igitur ut A ad G, ita G ad B: ergo A, G, B deinceps proportionales sunt. Ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

[k] 17. sept.

Dico et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A, G, B deinceps proportionales sunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus, quam habet ad G [l]. Atque est ut A ad G, ita C ad E, et D ad F. Ergo et A ad B duplicatam rationem habet ejus, quam C habet ad E, vel D ad F. *Q. E. D.*

[l] Def. 10. quinti.

Cor. * Inter duos similes planos qui est proportione medius, et ipse planus est, ex lateribus utique numerorum principio positorum non homologis factus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt; et solidus ad solidum triplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D, E, ipsius vero B latera homologa sint F, G, H. Et quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia [m]; erit ut C ad D, ita F ad G, ut autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A, B duos medios

[m] Def. 21. sept.

medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H.

Numerus enim C ipſum D multiplicans faciat K; F vero multiplicans G ipſum L faciat. Et quoniam C, D in eâdem ſunt ratione, in quâ F, G, et ex ipſis C, D fit K,

A, 30. N, 60. O, 120. B, 240.
K, 6. M, 12. L, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

ex ipſis vero F, G fit L; erunt K, L ſimiles plani numeri[m]: quare inter ipſos unus medius proportionalis cadit[n]. Sit is numerus M: ergo M fit ex D, F[o]. Eſt autem K ad M, ut M ad L. Et quoniam D ipſum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit ut C ad F, ita K ad M[p]. Sed ut K ad M, ita M ad L: ergo K, M, L deinceps proportionales ſunt in ratione C ad F. Et quoniam ut C ad D, ita F ad G; erit permutando ut C ad F, ita D ad G[q]. Rurſus, quoniam ut D ad E, ita G ad H; et permutando erit ut D ad G, ita E ad H: ergo K, M, L deinceps proportionales ſunt in ratione C ad F, et D ad G, et E ad H. Uterque autem ipſorum E, H multiplicans M faciat utrumque N, O. Et quoniam ſolidus eſt A, latera autem ipſius C, D, E; numerus E eum, qui fit ex C, D, multiplicans fecit A; qui vero fit ex C, D eſt K: ergo E multiplicans K ipſum A fecit. Eâdem ratione et H multiplicans L, qui fit ex F, G, fecit ipſum B. Et quoniam E ipſum K multiplicans fecit A, ſed et multiplicans M fecit N; erit[o] ut K ad M, ita A ad N. Ut autem K ad M, ita C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H: ergo ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita A ad N. Rurſus, quoniam uterque ipſorum E, H multiplicans M fecit utrumque N, O; erit ut E ad H, ita N ad O. Sed ut E ad H, ita C ad F, et D ad G: eſt igitur ut C ad F, et D ad G, ita et A ad N, et N ad O. Rurſus, quoniam H multiplicans M fecit ipſum O, ſed et multiplicans L fecit B: erit ut M ad L, ita O ad B. Sed ut M ad L, ita C ad F, et D ad G, et E ad H; et igitur ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita non ſolum O ad B, ſed et A ad N, et N ad O. Ergo A, N, O, B deinceps proportionales ſunt in dictis laterum rationibus.

[m] Def. 21. ſept.
[n] 18. hujus.
[o] Cor. * 18. hujus.
[p] 17. ſept.
[q] 13. ſept.

Dico et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet

habet latus homologum ad homologum latus; hoc eſt, quam habet numerus C ad F, vel D ad G, vel E ad H. Quoniam enim quatuor numeri proportionales ſunt A, N, O, B; habebit A ad B triplicatam rationem ejus,
[p] Def. 11. quinti. quam habet A ad N [p]. Sed ut A ad N, ita oſtenſus eſt et C ad F, et D ad G, et E ad H. Ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt, quam C habet ad F, et D ad G, et E ad H. *Q. E. D.*

[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri ſimiles plani erunt.

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat C: dico numeros A, B ſimiles planos eſſe.

[q] 35. ſept. Sumantur enim D, E minimi omnium eandem cum ipſis A, C, rationem habentium [q]: æqualiter igitur

A, 8.		C, 12.	B, 18.
D, 2.	E, 3.	F, 4.	G, 6.

[r] 21. ſept. D ipſum A metitur, atque E ipſum C [r]. Et quoties D metitur A, tot unitates ſint in F; proptereaque F multiplicans D ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit
[s] Def. 15. ſept. C [s]: quare A planus numerus eſt, cujus latera D, F [t].
[t] Def. 16. ſept. Rurſus, quoniam D, E ſunt minimi omnium eandem cum C, B rationem habentium; D æqualiter ipſum C metitur, atque E ipſum B [r]. Quoties autem E ipſum B metitur, tot unitates ſint in G: quare G ipſum E multiplicans fecit B [s]: ideoque B numerus planus eſt, cujus latera E, G [t]: ergo numeri A, B ſunt plani. Dico et ſimiles eſſe. Quoniam enim uterque ipſorum F, G multiplicans E utrumque C, B fecit; ut F ad G, ita erit C ad
[u] 18. ſept. B [u]. Ut autem C ad B, ita D ad E; et igitur ut D ad E, ita F ad G. Quare A, B ſimiles plani ſunt; cum ipſo-
[x] Def. 21. ſept. rum latera ſint proportionalia [x]. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri similes solidi erunt.

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant C, D: dico ipsos A, B similes solidos esse.

Sumantur enim numeri tres, minimi trium omnium eandem cum A, C, D rationem habentium, qui sint E, F, G[x]: [x] 35. sept.

A, 24.		C, 72.	D, 216.		B, 648.
	E, 1.	F, 3.		G, 9.	
H, 1.	K, 1.	N, 24.	L, 3.	M, 3.	O, 72.

extremi igitur ipsorum E, G primi inter se sunt[y]. Et [y] 3. hujus. quoniam inter E, G unus medius proportionalis F cecidit; erunt numeri E, G similes plani[z]. Sint ipsius qui- [z] 20. hujus. dem E latera H, K, ipsius vero G latera homologa sint L, M. Manifestum igitur est ex antecedente E, F, G deinceps proportionales esse in ratione H ad L, et in ratione K ad M. Et quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam A, C, D rationem habentium; erit ex æquo ut E ad G, ita A ad D[a]. [a] 14. sept. Sunt autem E, G inter se primi: sed primi sunt et minimi[b]: [b] 23. sept. minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem[c]; hoc est, [c] 21. sept. antecedens antecedentem et consequens consequentem: ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. Quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N: ergo N ipsum E multiplicans fecit A. Sed E fit ex H, K: ac propterea N eum, qui fit ex H, K, multiplicans ipsum A fecit. Solidus igitur est A, cujus latera H, K, N. Rursus, quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam ipsi C, D, B rationem habentium; E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. Et quoties G metitur B, tot unitates sint in O: ideoque O multiplicans G ipsum B fecit. At G fit ex L, M: ergo O eum, qui fit ex L, M, multiplicans fecit B. Solidus igitur est B, et ejus latera L, M, O. Quare A, B solidi sunt. Dico etiam eos similes esse. Quoniam enim A ad C ut C ad D, et C ad D ut D ad B; erit ex æquo ut A ad D, ita C ad B[a]. Sed E, G minimi sunt omnium in ratione numerorum A, D. (Nimirum cum inter se sint primi.) Minimi igitur in ratione numerorum C, B. Numeri igitur E, G numeros C, B æqualiter

A, 24.		C, 72.	D, 216.		B, 648.
	E, 1.	F, 3.		G, 9.	
H, 1.	K, 1.	N, 24.	L, 3.	M, 3.	O, 72.

liter metiuntur. Quoties vero G metitur B, tot sunt in O unitates [a]. Quoties igitur E metitur C, tot sunt in O unitates. Quapropter O multiplicans E ipsum C fecerit. Sed ostensum est N multiplicando E fecisse A. Quare N, O multiplicantes E ipsos A, C fecerunt [b]. Ut igitur N ad O, ita erit A ad C, hoc est, E ad F. Sed ut E ad F, ita H ad L, et K ad M; et igitur ut H ad L, ita K ad M, et N ad O. Sunt autem H, K, N latera ipsius A, et L, M, O latera ipsius B. Ergo A, B similes solidi erunt. *Q. E. D.*

[a] ex hyp.
[b] 17. sept.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus; et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A, B, C; sitque primus A quadratus: dico et tertium C quadratum esse.

	E, 36.	
A, 4.	B, 6.	C, 9.
D, 2.	F, 3.	G, 9.

Numeri quadrati A latus sit numerus D. Et numerus B sui multiplicatione numerum E faciat. Propter proportionem trium A, B, C continuam; illum E, ex secundo B factum, primus A metietur [c]. Quadratus utique quadratum. Quare et D, qui latus est quadrati A, metietur B latus quadrati E [d]. Quoties igitur D metitur B, tot sint in F unitates. Numerus igitur D illum F multiplicans numerum B fecerit. Seipsum multiplicans numerus F faciat G. Jam cum numerus D seipsum multiplicans fecerit A, et illum F multiplicando fecerit B; erit A ad B ut D ad F [e]. Sed A ad B ut B ad C [f]. Quare B est ad C ut D ad F. Rursus cum numerus F illum D et seipsum multiplicans numeros B, G fecerit; erit B ad G ut D ad F [e]. Est igitur B ad G ut idem B ad C. Numeri igitur G, C inter se æquales: numerus autem G quadratus, ex F scilicet. Quadratus igitur C. *Q. E. D.*

[c] 1. Cor. 20. sept.
[d] 14. hujus.
[e] 17. sept.
[f] ex hyp.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A fit cubus: dico et D cubum esse.

Si quatuor illi A, B, C, D minimi sunt quatuor suæ deinceps analogiæ, res patet ex Corollario 1°. Prop. ii. hujus Libri.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.

Sed A, B, C, D non sint minimi quatuor suæ deinceps analogiæ. Inveniantur igitur minimi illi quatuor E, F, G, H [g], quorum extremi necessario cubi erunt.[g] Cuborum E, H sint K, L latera. Et cubi A latus sit M.

[g] 2. hujus.

A, 64.	B, 96.	C, 144.	D, 216.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.
K, 2.	L, 3.		
M, 4.	N, 6.		
O, 16.	P, 24.	Q, 36.	
R, 64.	S, 96.	T, 144.	V, 216.

Quatuor illorum E, F, G, H ac propterea et aliorum quatuor A, B, C, D, perpetua erit in ratione K ad L deinceps analogia (id enim ex constructione 2. hujus manifestum est.) Quatuor autem illi E, F, G, H, cum sint minimi quatuor suæ analogiæ, quatuor illos alios A, B, C, D, singuli singulos æqualiter metientur; antecedens antecedentem, consequens consequentem [h]. Numerus igitur E metietur numerum A; cubus cubum. Quare et K, latus cubi E, metietur M, latus cubi A [i]. Quoties K metitur M, toties L metiatur N. Erit igitur M ad N ut K ad L. Jam M seipsum multiplicando faciat O. Idem autem M, multiplicando N, faciat P. Et N seipsum multiplicando faciat Q. Ita tres facti fuerint O, P, Q, quorum perpetua, in ratione M ad N, sive K ad L, analogia; et extremi O, Q quadrati sunt ex M, N. Rursum numerus M tres O, P, Q multiplicando faciat tres R, S, T; et numerus N numerum Q multiplicando faciat V. Ita quatuor facti fuerint R, S, T, V, quorum perpetua, in eadem illâ numerorum K, L, ratione, analogia:

[h] 21. sept.

[i] 15. hujus.

logia: extremi autem R, V cubi ſunt ex M, N. Cum vero quatuor A, B, C, D, atque quatuor R, S, T, V, ordine ſumpti in eâdem ſint ratione, ex æquo erit A ad D ut R ad V [k]. Et permutando A ad R ut D ad V [l]. Sed æquales inter ſe ſunt A, R; nempe cum uterque cubus ſit ex M. Quare et D, V inter ſe æquales. Cubus autem V, nempe ex N. Quare et D cubus. *Q. E. D.*

[k] 14. ſept.
[l] 13. ſept.

[XXIV.] PROP. XXIV. THEOR.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, et ſecundus quadratus erit.

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D; ſitque A quadratus: dico et B quadratum eſſe.

Quoniam enim C, D quadrati ſunt, erunt C, D ſimiles plani: ideoque inter ipſos C, D unus medius proportionalis cadit [m]. Eſt autem ut C ad D, ita A ad B: quare etiam inter A, B cadit unus medius proportionalis [n]. Eſtque A quadratus. Ergo et B quadratus erit [o]. *Q. E. D.*

A, 4. B, 9.
C, 16. D, 36.

[m] 18. hujus.
[n] 8. hujus.
[o] 22. hujus.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum; primus autem ſit cubus, et ſecundus cubus erit.

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam cubus numerus C ad numerum cubum D; ſitque A cubus: dico et B cubum eſſe.

Quoniam enim C, D cubi ſunt, erunt C, D ſimiles ſolidi: idcirco inter ipſos duo medii proportionales

A, 8. E, 12. F, 18. B, 27.
C, 64. D, 216.

cadent [p]. Quot autem inter C, D cadunt medii proportionales, totidem cadent et inter eos, qui eandem quam ipſi rationem habent [q]: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. Cadant E, F. Quoniam igitur quatuor numeri A, E, F, B deinceps proportionales ſunt, eſtque A cubus; et B cubus erit [r]. *Q. E. D.*

[p] 19. hujus.
[q] 8. hujus.
[r] 23. hujus.

PROP.

PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Similes plani numeri inter ſe rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint ſimiles plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles plani ſunt, inter eos cadit unus medius proportionalis[s]. Cadat, ſitque C; et ſumantur minimi numeri eandem quam A, C, B rationem habentium ſc. D, E, F[t]: ergo ipſorum extremi D, F quadrati ſunt[u]. Et quoniam eſt ut D ad F, ita A ad B, et ſunt D, F quadrati; habebit A ad B rationem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. *Q. E. D.*

A, 6.	C, 12.	B, 24.
D, 1.	E, 2.	F, 4.

[s] 18. hujus.
[t] 35. ſept.
[u] Cor. 1. 2. hujus.

PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

Similes ſolidi numeri inter ſe rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint ſimiles ſolidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles ſolidi ſunt, inter ipſos duo medii proportionales cadent[x]. Cadant C, D; et ſumantur minimi numeri, qui eandem quam A, C, D, B

A, 16.	C, 24.	D, 36.	B, 54.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

rationem habeant, ipſis multitudine æquales E, F, G, H[y]: ergo eorum extremi E, H cubi ſunt[z]. Atque eſt ut E ad H, ita A ad B. Habet igitur A ad B rationem, quam numerus cubus ad cubum numerum. *Q. E. D.*

[x] 19. hujus.
[y] 2. hujus.
[z] Cor. 1. 2. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Si duo similes plani numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo similes plani numeri A, B; et A ipsum B multiplicans faciat C: dico C quadratum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B, ita erit D ad C[a]. Et quoniam A, B similes plani sunt; inter ipsos unus medius proportionalis cadet[b]. Si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ciderint; quot inter ipsos cadunt, totidem cadent et inter eos, qui eandem habent rationem[c]: quare et inter D, C unus medius proportionalis cadit. Atque est D quadratus. Ergo et C quadratus erit[d]. *Q. E. D.*

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

[a] 17. sept.
[b] 18. octavi.
[c] 8. octavi.
[d] 22. octavi.

Aliter *. Sint similes plani numeri A, B; et numerus A, numerum B multiplicans, faciat C. Dico numerum C quadratum esse. Numeri A, B, cum sint similes plani, unum capiunt proportione medium[b].

A, 6. D, 18. B, 54.
C, 324.
E, 324.

Esto

Esto medius ille D; et D seipsum multiplicans faciat E. Propter continuam trium A, D, B analogiam, E factus e medio facto ex extremis, C, æqualis erit. Quadratus autem E. Quare et C quadratus. *Q. E. D.*

Cor. * Numeri quadrati se mutuo multiplicantes quadratum facient; qui æqualis erit quadrato numeri plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

Quadratus A multiplicet quadratum B, et faciat C. Quadratorum A, B latera sint E, F. Numeri E, F se mutuo multiplicantes faciant G. G seipsum multiplicans faciat H. Dico quadratum esse C, et quadrato H æqualem.

A, 4.	G, 14.	B, 49.
	C, 196.	
E, 2.		F, 7.
	H, 196.	

Et quadratum esse C, id quidem hâc ipsâ ex propositione manifestum est. Dico præterea ipsi H æqualem esse. Cum enim numeri E, F quadratorum A, B sint latera; numerus G, mutuâ laterum E, F multiplicatione
[e] Cor.* 11. octavi. factus, inter ipsos A, B proportione medius est [e]. Et cum perpetua sit trium A, G, B proportio; factus ex extremis A, B facto ex medio G æqualis erit. Sed ex extremis A, B factus est C; et ex medio G factus est H. Quare C æqualis est ipsi H. *Q. E. D.*

SCHOLION. *

Numeris igitur duobus literis a, b designatis, et plano ex illis facto notis $a\,b$ designato, quadratum ex $a\,b$ factum notis a^2, b^2, rite exprimit Algebra.

[II.] PROP. II. THEOR.

Si duo numeri sese multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes quadratum numerum C efficiant: dico A, B similes planos esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B, ita erit
[f] 17. sept. D ad C [f]. Et quoniam D quadratus est, sed et C etiam; erunt D, C similes plani: quare inter

A, 3.	B, 12.
D, 9.	C, 36.

D, C

D, C unus medius proportionalis cadit[g]. Atque est ut D ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B cadet unus medius proportionalis[h]. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadat, erunt similes plani[i]. Ergo A, B similes plani sunt. *Q. E. D.*

[g] 18. octavi.
[h] 8. octavi.
[i] 20. octavi.

PROP. III. THEOR. [III.]

Si cubus numerus seipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A seipsum multiplicans faciat B: dico B cubum esse.

Sumatur enim ipsius A latus C, et C seipsum multiplicans faciat D: manifestum igitur est C multiplicantem D facere ipsum A[k]. Et quoniam C seipsum multiplicans fecit D; metitur C ipsum D per eas, quæ in ipso C sunt, unitates[l]. Sed et unitas metitur C per eas, quæ in ipso C sunt, unitates: est igitur ut unitas ad C, ita C ad D[m]. Rursus, quoniam C multiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per unitates, quæ sunt in C. Metitur autem et unitas ipsum C per unitates, quæ in ipso sunt: ergo ut unitas ad C, ita D ad A. Sed ut unitas ad C, ita C ad D: ut igitur unitas ad C, ita C ad D, et D ad A: ideoque inter unitatem et numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt C, D. Rursus, quoniam A seipsum multiplicans fecit B, et A ipsum B metitur per eas, quæ in ipso A sunt, unitates[l]. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates, quæ sunt in ipso: est igitur ut unitas ad A, ita A ad B[m]. Sed inter unitatem et A cadunt duo medii proportionales: ergo et inter A et B duo medii proportionales cadent[n]. Quod si inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit[o]. Atque est A cubus. Ergo et B cubus erit. *Q. E. D.*

	A, 8.			
		D, 4.		
			C, 2.	
B, 64.				1.

[k] Def. 19. septimi.
[l] Def. 15. septimi.
[m] Def. 20. septimi.
[n] 8. octavi.
[o] 23. octavi.

PROP. IV. THEOR. [IV.]

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum C faciat: dico C cubum esse.

Numerus

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[o] 3. hujus. D cubus est[o]. Et quoniam A seipsum multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit: ut A ad B, ita
[p] 17. sept. erit D ad C[p]. Et quoniam A, B cubi sunt, erunt similes solidi numeri: ac propterea inter
[q] 19. octavi. A, B cadent duo medii proportionales[q]: quare et inter
[r] 8. octavi. D, C duo medii proportionales cadent[r]. Estque D cubus.
[s] 23. octavi. ergo et C cubus erit[s]. *Q. E. D.*

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

Cor. * Cubus, cuborum multiplicatione factus, cubus erit plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

SCHOLION.*

Literis igitur *a*, *b* numeros duos significantibus, cubum ex numero plano *a b*, notis $a^3 b^3$, rite exprimit Algebra. Et progressio infinita est.

[V.] PROP. V. THEOR.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum C: dico B cubum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[t] 3. hujus. D cubus est[t]. Et quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B,
[u] 17. sept. ita erit D ad C[u]. Et quoniam D, C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos
[x] 19. octavi. cadunt duo medii proportionales[x]. Atque est ut D ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B duo medii proportionales
[y] 8. octavi. cadent[y]. Estque A cubus. Ergo et B cubus erit[z].
[z] 23. octavi. *Q. E. D.*

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit.

Numerus enim A seipsum multiplicans cubum B faciat: dico et A cubum esse.

Numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B
[a] Def. 19. sept. ipsum C fecit, erit C cubus[a]. Et quoniam A seipsum quidem

A, 8.	B, 64.	C, 512.

quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit C, ut A ad B, ita erit B ad C[b]. Et quoniam B, C cubi[b] sunt, similes solidi erunt: ideoque inter B, C duo medii proportionales cadunt[c]. Et est ut B ad C, ita A ad[c] B: quare et inter A, B duo medii proportionales cadunt[d]. Atque est B cubus. Ergo et A cubus erit[e]. *Q. E. D.*

b 17. sept.
c 19. octavi.
d 8. octavi.
e 23. octavi.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat: dico C solidum esse.

Quoniam enim A compositus est, eum numerus aliquis metietur[f]. Metiatur D. Et quoties D ipsum A

f Def. 13. sept.

A, 6. B, 7. C, 42.
D, 3. E, 2.

metitur, tot unitates sint in E: ergo E multiplicans D fecit A. Et quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estque A, qui fit ex D, E; numerus, qui fit ex D, E, ipsum B multiplicans fecit C: ergo B multiplicans eum, qui fit ex D, E, ipsum C fecit[g]. Ac propterea C solidus est, cujus latera D, E, B[h]. *Q. E. D.*

g 16. sept.
h Def. 17. sept.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus est, et unum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, et duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F: dico tertium quidem ab unitate sc. B quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum autem C cubum, et duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A, ita A ad B; unitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipsum B[i]. Sed

i Def. 20. sept.

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.

unitas metitur A per unitates, quæ in ipso sunt: ergo et

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F. 729.

et A ipsum B per unitates, quæ sunt in A, metitur: quare A seipsum multiplicans fecit B; quadratus igitur est B. Et quoniam B, C, D deinceps proportionales sunt, est-
[k] 22. octavi. que B quadratus; et D quadratus erit[k]. Eadem ratione erit et F quadratus. Similiter demonstrabimus et unum intermittentes omnes quadratos esse. Dico et quartum ab unitate, videlicet C, esse cubum, et duos intermittentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita B ad C; unitas numerum A æqualiter metitur, atque B
[l] Def. 20. sept. ipsum C[l]. Sed unitas numerum A metitur per unitates, quæ in A sunt: ergo et B metitur C per unitates, quæ sunt in A; et ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multi-
[m] Def. 19. sept. plicans vero B fecit C; erit C cubus[m]. Quod cum C, D, E, F deinceps proportionales sint, sitque C cubus,
[n] 23. octavi. et F cubus erit[n]. Ostensum autem est quadratum esse: septimus igitur ab unitate F et cubus est et quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes et cubos et quadratos esse. *Q. E. D.*

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem sit quadratus; et reliqui omnes quadrati erunt. Si post unitatem sit cubus; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem A sit quadratus: dico et reliquos omnes quadratos esse.

Tertium quidem ab unitate B esse quadratum, et
[o] 8. hujus. unum intermittentes omnes, demonstratum jam est[o].

I. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Sunt igitur B, D, F &c. quadrati. Dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim A, B, C deinceps sunt proportionales, estque A quadratus; et C quadratus
[p] 22. octavi. erit[p]. Rursus, quoniam C, D, E deinceps proportionales sunt; est autem C quadratus; et E quadratus erit. Similiter ostendemus et reliquos omnes quadratos esse.

Sit autem A cubus: dico et reliquos cubos esse.

Quartum quidem ab unitate C esse cubum, et duos intermittentes omnes, jam demonstratum est[o]. Sunt igitur

igitur C, F &c. cubi. Dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita A ad B, unitas numerum A æqualiter metitur, atque A ipsum B[p]. [p] Def. 20. sept.

I. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096 E, 32768. F, 262144.

Ergo A seipsum multiplicans fecit B[q]. Atqui est A[q] Def. 15. cubus. Si autem cubus numerus seipsum multiplicans sept. fecerit aliquem, factus cubus erit[r]; ergo B est cubus.[r] 3. hujus. Et quoniam quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales sunt, estque A cubus; et D cubus erit[s].[s] 23. octavi. Eâdem ratione et E est cubus, et similiter reliqui omnes cubi sunt. *Q. E. D.* [X.]

PROP. X. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Si qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem ipse A non sit quadratus: dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit C quadratus. Est autem et B quadratus[t]: ergo B, C inter se rationem habent, quam[t] 8. hujus.

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

numerus quadratus ad quadratum numerum. Atque est ut B ad C, ita A ad B: habent igitur A, B inter se rationem eam, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque A, B similes plani sunt[u]. Et est B[u] Def. 21. quadratus: ergo et A quadratus est, quod est contra septimi. hypothesin. Non igitur C quadratus erit. Similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Sed non sit A cubus. Dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, et duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit D cubus. Est autem et cubus C, quartus enim est ab unitate[x]; et ut C ad D, ita est[x] 8. hujus. B ad C: ergo et B ad C rationem habet, quam cubus ad

 cubum;

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

[x] Def. 21. sept. cubum; ac propterea B, C similes solidi sunt [x]. Atque est C cubus; ergo et B cubus erit. Et quoniam est ut unitas ad numerum A, ita A ad B; A æqualiter metietur
[y] Def. 20. sept. B, atque unitas ipsum A [y]. Quare A seipsum multiplicans cubum B fecit [z]. Si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit [a]: cubus igitur est A, cujus ponitur contrarium Ergo neque D est cubus. Similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes. *Q. E. D.*

[z] Def. 15. sept.
[a] 6. hujus.

[XI.] PROP. XI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F. Dico horum B, C, D, E, F

A, I. B, 3. C, 9. D, 27. E, 81. F, 243.

quemvis D majorem quemvis in serie, puta F, metiri, per aliquem eorum, qui sunt in serie. Sit enim C numerus ille unus in proportionalium serie, quem inter et unitatem tot in serie intercedunt medii, quot inter D et F. Et propter continuam numerorum analogiam, erit
[b] 14. sept. ex æquali A unitas ad C ut D ad F [b]. Quare numerus D metitur F per ipsum C. *Q. E. D.*

[XII.] PROP. XII. THEOR.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem et eum, qui unitati proximus est, metientur.

Sint ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, C, D: dico quicunque primorum numerorum metiuntur D, eosdem et ipsum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D: dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A. Atqui E est primus; omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus
[c] 31. sept. est [c]: ergo E, A numeri inter se primi sunt. Et cum E metitur ipsum D, metiatur per unitates, quæ sunt in F: ergo

ergo E multiplicans F ipſum D fecit. Rurſus, quoniam C metitur ipſum D per eas, quæ ſunt in A unitates [d]; A multiplicans C ipſum D fecit. Sed et E multiplicans F [d] 11. hujus.

I.	A, 4.	B, 16.	C, 64.	D, 256.
E, 2.	H, 8.	G, 32.	F, 128.	

fecit D: qui igitur fit ex A, C ei, qui fit ex E, F, eſt æqualis: ergo ut A ad E, ita F ad C [e]. Suntque A, E primi; primi autem, et minimi [f]; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem [g]: metitur igitur E ipſum C. Metiatur per G: ergo E ipſum G multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipſum C fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis eſt ei, qui ex E, G: ergo ut A ad E, ita G ad B. Et ſunt A, E primi, ſed primi etiam et minimi [f], minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem [g]: quare et E ipſum B metitur. Metiatur per H: multiplicans igitur E ipſum H fecit B. Sed et A ſeipſum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex H, E eſt æqualis ei, qui fit ab ipſo A: eſt igitur ut E ad A, ita A ad H [h]. Suntque A, E primi, ſed primi etiam et minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos, qui eandem quam ipſi rationem habent, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem [g]: ergo E metitur ipſum A, quem ponebatur non metiri. Non igitur A, E ſunt inter ſe primi: ergo compoſiti erunt. Compoſitos vero primus aliquis numerus metitur [i]: quare ipſos A, E metietur aliquis numerus primus. Et quoniam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus præter ſeipſum [k]: metitur igitur E ipſos A, E: ideoque E ipſum A metitur. Similiter demonſtrabimus quicunque primorum numerorum metiuntur ipſum D, eoſdem et ipſum A metiri. *Q. E. D.*

[e] 19. ſept.
[f] 23. ſept.
[g] 21. ſept.
[h] 20. ſept.
[i] Def. 14. ſept.
[k] Def. 11. ſept.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem primus sit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, C, D; et qui post unitatem, videlicet A, sit primus: dico maximum D nullum alium metiri, præter ipsos A, B, C.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, et non sit E idem qui aliquis ipsorum A, B, C: manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, et metiatur D;

I.	A, 5.	B, 25.	C, 125.	D, 625.
	E-----	H----	G-----	F-------

[l] 12. hujus. ipsum quoque A metietur primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: non igitur E primus est; ergo compositus: omnem autem compositum
[m] 33. sept. numerum primus aliquis numerus metitur[m]. Dico nullum alium primum metiri ipsum E, præterquam A. Si enim alius metitur E, et E metitur D, et alius ille ipsum D metietur: quare et ipsum A primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. Dico non esse F eundem cum aliquo ipsorum A, B, C. Si enim est idem, metiturque ipsum D per E; et unus ipsorum A, B, C ipsum D per E metietur. Sed quilibet ipsorum A, B, C metitur D
[n] 11. hujus. per aliquem ipsorum A, B, C[n]: quare et E idem erit qui unus ipsorum A, B, C. Similiter ostendetur F non esse primum, et A metiri F. Et quoniam E metitur D per F; et E multiplicans F ipsum D fecit. Sed
[o] ex hyp. et A multiplicans C fecit D[o]: qui igitur fit ex A, C est
[p] 19. sept. æqualis ei, qui ex E, F: ergo ut A ad E, ita est F ad C[p].
[q] Def. 20. sept. Sed A metitur E: quare et F ipsum C metitur[q]. Metiatur per G. Similiter demonstrabimus G non esse eundem qui unus ipsorum A, B, et A ipsum G metiri. Et quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicans F ipsum G fecit C. Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: ergo qui fit ex A, B ei, qui ex F, G, est æqualis: ut igitur A ad F, ita est G ad B. Metitur autem A ipsum F: ergo et G ipsum B metietur. Metiatur per H. Similiter demon-

demonstrabimus H non esse eundem qui A. Et quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. Sed et A, seipsum multiplicans fecit B[r]: qui[r] ex hyp. igitur fit ex H, G est æqualis quadrato, qui ex A. Ergo ut H ad A, ita A ad G[s]. Metitur autem A ipsum G; quare[s] 20. sept. et H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem qui A; quod est absurdum. Non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A, B, C. *Q. E. D.*

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius primus numerus metietur ipsum, præter eos qui a principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B, C, D metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A, præter ipsos B, C, D.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; et non sit E idem qui aliquis ipsorum B, C, D. Et quoniam E metitur A, ipsum per F metiatur. Ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B, C, D. Si autem duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant, et factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, et unum eorum qui a principio positi sunt metietur[t]. Ergo numeri B, C, D[t] 32. sept. metientur unum ipsorum E, F. Ipsum quidem E non metientur, etenim E primus est[u]; et non idem qui ali-[u] ex hyp. quis ipsorum B, C, D. Ergo metientur ipsum F, qui est minor quam A, quod fieri non potest; ponitur enim A minimus eorum, quos B, C, D metiantur. Non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B, C, D. *Q. E. D.*

A, 30.
B, 2. C, 3. D, 5.
E----- F-------

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

Sint A, B, C tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A, B ad C, et B, C ad A, et A, C ad B.

Sumantur enim duo minimi numeri, eandem cum ipſis A, B, C rationem habentes, D E, E F. Manifeſtum eſt D E ſeipſum quidem multiplicantem facere A[x]; multiplicantem vero E F facere B, et E F ſeipſum multiplicantem facere C. Et quoniam D E, E F, minimi ſunt; primi erunt inter ſe[y]. Si autem duo numeri primi inter ſe fuerint, et uterque ſimul ad utrumque primus erit[z]. Ergo D F ad utrumque ipſorum D E, E F primus eſt. Sed et D E ad E F eſt primus. Quare D F, D E ad E F primi ſunt. Ac propterea qui fit ex F D, D E, primus eſt ad E F[a]. Si autem duo numeri primi inter ſe fuerint; qui fit ex uno ipſorum ad reliquum primus erit[b]. Ergo qui fit ex F D, D E ad eum, qui fit ex E F, eſt primus. Sed † qui ex F D, D E eſt is, qui fit ex D E, una cum eo, qui ex D E, E F[c]. Qui igitur ex D E, una cum eo, qui ex D E, E F, primus eſt ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E eſt A; qui vero ex D E, E F eſt B, et qui ex E F eſt C. Ergo A, B compoſiti ad ipſum C primi ſunt. Similitur oſtendemus et B, C, ad A eſſe primos. Dico et A, C ad B primos eſſe. Quoniam enim D F, ad utrumque ipſorum D E, E F eſt primus[z]; et qui fit ex D F ad eum, qui ex D E, E F, primus erit[d]. Sed ei, qui fit ex D F, æquales ſunt qui ex D E et E F fiunt, una cum eo, qui bis fit ex D E, E F[e]. Qui igitur ex D E et E F fiunt, una cum eo, qui bis ex D E, E F, primi ſunt ad eum, qui ex D E, E F. Ergo et dividendo, qui fiunt ex D E et E F, una cum eo, qui ſemel fit ex D E, E F, primi ſunt ad eum, qui ex D E, E F; et rurſus dividendo, qui fiunt ex D E et E F, ad eum, qui ſit ex D E, E F, primi ſunt. Sed qui fit ex D E, eſt A; qui vero ex D E, E F, eſt B; et qui ex E F, eſt C. Ergo A, C compoſiti ad ipſum B primi erunt. *Q. E. D.*

A, 9. B, 12. C, 16.

D . . . E . . . . F.

[x] 2. octavi.
[y] 24. ſept.
[z] 30. ſept.
[a] 26. ſept.
[b] 27. ſept.
[c] 3. ſecundi.
[d] 26. & 27. ſept.
[e] 4. ſecundi.

† *Hoc ex eis eſt, quæ ab Euclide in rectangulis oſtenſa ſunt ſub partibus lineæ rectæ comprehenſis in Libro ii; a nobis autem in numeris planis ex partibus numeri factis in Scholio noſtro ad viceſimam ſeptimi, et ejuſce Scholii corollario. Hic igitur et in ſequentibus, Propoſitiones Libri ii. de rectangulis, in numerorum materia, quando opus ſit, laudamus, ac ſi de numeris planis pronuntiatæ eſſent.*

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium ullum.

Duo enim numeri A, B primi inter ſe ſint: dico non eſſe ut A ad B, ita B ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B, ita B ad C. Et ſunt A, B primi; primi vero ſunt et minimi [e]; minimi vero

A, 5. B, 8. C------ [e] 23. ſept.

eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, et conſequens conſequentem. Metitur igitur A ipſum B, ut antecedens antecedentem [f]. Sed et ipſe ſeipſum metitur. [f] 21. ſept. Ergo A metitur ipſos A, B primos inter ſe exiſtentes; quod eſt abſurdum. Non igitur eſt ut A ad B, ita B ad C. *Q. E. D.*

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ultimus ad alium ullum.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipſorum A, D primi ſint inter ſe: dico non eſſe ut A ad B, ita D ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B, ita D ad E. Quare permutando ut A ad D, ita erit B ad E [g]. Et etiam [g] 13. ſept.
ſunt A, D primi [h]; primi etiam et minimi [i]; minimi vero [h] ex hyp. [i] 23. ſept.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E-------

eos, qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem [k]. [k] 21. ſept.
Metitur igitur A ipſum B. Atque eſt ut A ad B, ita B ad C. Ergo et B metitur ipſum C, et ob id A quoque ipſum C metitur. Et quoniam eſt ut B ad C, ita C ad D, metitur autem B ipſum C; et C ipſum D metitur. Sed A metitur C; quare et A metitur ipſum D. Metitur autem et ſeipſum. Ergo A ipſos A, D primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt. Non igitur erit ut A ad B, ita D ad alium ullum. *Q. E. D.*

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris datis considerare, an tertius ipsis proportionalis invenire possit. Vide 2. Cor. * *20. septimi.*

[XIX.] PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis considerare, an quartus ipsis proportionalis inveniri possit. Vide 2. Cor. * *19. septimi.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures sunt omni propositâ multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A, B, C: dico ipsis A, B, C plures esse primos numeros.

Sumatur enim minimus, quem ipsi A, B, C metiantur [l], sitque D E; et ipsi D E apponatur unitas D F. Ergo E F, vel primus est, vel non. Sit primum primus: inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, E F plures quam ipsi A, B, C.

[l] 38. sept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30.
E———D . F.

Sed non sit E F primus. Ergo eum primus metitur [m]. Metiatur G: dico G nulli ipsorum A, B, C eundem esse. Si enim G idem sit qui unus ipsorum A, B, C, ipsi autem A, B, C metiantur D E; et G ipsum D E metietur. Metitur autem et E F; et reliquam igitur D F unitatem metietur G numerus existens, quod est absurdum. Ergo G non est idem qui unus ipsorum A, B, C. Et ponitur primus. Inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, G plures propositâ multitudine primorum numerorum A, B, C. *Q. E. D.*

[m] 33. sept.

A, 2. B, 3. C, 7.
105.
E———D . F.
G, 53.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque A B, B C, C D, D E: dico totum A E, parem esse.

Cum enim numeri A B, B C seorsim pares sint; numerus binarius utrumque metitur [n]. Compositum igitur A C metietur. Metitur autem C D, parem scilicet.

[n] Def. 6. sept.

Compositum

Compositum igitur A D metietur. Metitur autem D E,

A . . . . B . . . . . . C . . . . D . . . . E

parem. Compositum igitur A E. Par igitur est numerus A E. *Q. E. D.*

Cor. * Qui imparem metitur numerus impar erit.

PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcunque, multitudine pares, A B, B C, C D, D E: dico totum A E parem esse.

CAS. 1. Componantur primum duo numeri impares A B, B C. Ab A B auferatur unitas B F, et a B C auferatur unitas B G. Numerus A F erit par, necnon G C.

A . . F . B . G . . . . C . . . . D . . . . E

Cæterum F G par, ipse scilicet binarius. Totus igitur A C par, ex tribus utique paribus A F, F G, G C compositus [o]. [o] 21. hujus.

CAS. 2. Componantur vero numeri impares quotcunque, multitudine tantum pares, A B, B C, C D, D E. Dico totum A E parem. Bini enim A B, B C compositi parem conficiunt A C [p]. Similiter bini C D, D E parem conficiunt C E. Pares vero A C, C E parem conficiunt A E [q]. Et quotcunque fuerint numeri A B, B C, C D, D E, modo eorum multitudo sit par, totus A E in binos resolvetur. Quilibet vero bini simul sumpti conficiunt parem [p]. Quotlibet igitur e binis quisque compositi, simul sumpti, conficiunt parem [q]. Totus igitur A E par. *Q. E. D.*

[p] Per cas. 1.

[q] 21. hujus.

PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

Si impares numeri quotcunque componantur, et multitudo ipsorum sit impar; et totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo sit impar, A B, B C, C D: dico et totum A D imparem esse.

Auferatur ab ipso C D unitas D E: reliquus igitur C E

A . . . . . B . . . . . . C . . . . E . D

par est [r]. Est autem et A C par [s]. Ergo et totus A E par

[r] Def. 7. sept.

[s] 22. hujus.

[t] 21. hujus. par erit[t]. Atque est D E unitas. Impar igitur est A D. *Q. E. D.*

[XXIV.] PROP. XXIV. THEOR.

Si a pari numero par auferatur, et reliquus par erit.

A pari enim numero A B par auferatur B C: dico et reliquum C A parem esse.

Quoniam A B par est, binarius metietur A B. Sed et C B, parem scilicet[u]. Quare et reliquum A C. Par igitur est A C. *Q. E. D.*

[u] Per hyp.

A . . . . . . C . . . . B

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Si a pari numero impar auferatur, et reliquus impar erit.

A pari enim numero A B impar B C auferatur: dico et reliquum C A imparem esse.

Auferatur ab ipso B C unitas C D. Ergo D B par est[x]. Est autem par et A B. Et reliquus igitur A D est par[y]. Atque est C D unitas. Ergo C A impar est. *Q. E. D.*

[x] Def. 7. sept.

[y] 24. hujus.

A . . . . C . D . . . . B

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

Si ab impari numero impar auferatur, et reliquus par erit.

Ab impari enim numero A B impar B C auferatur: dico reliquum C A parem esse.

Quoniam enim A B impar est, auferatur unitas B D: reliquus A D igitur est par. Eâdem ratione et C D est par. Quare et reliquus A C par est[z]. *Q. E. D.*

[z] 24. hujus.

A . . . . C . . . . . . D . B

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero A B par auferatur B C: dico reliquum C A imparem esse.

Auferatur enim unitas A D. Ergo D B par est. Est autem par et B C. Et reliquus igitur C D est par[a]. Atque est D A unitas. Ergo C A impar est[b]. *Q. E. D.*

[a] 24. hujus.

[b] Def. 7. sept.

A . D . . . . C . . . . B

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR. [XXVIII.]

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A, parem numerum B multiplicans, faciat C: dico C parem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot unitates sunt in A. Atque est B par. Ergo C ex paribus numeris componitur. Si autem pares numeri quotcunque componantur, totus par erit[c]. Ergo C est par. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . . . .

[c] 21. hujus.

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A, numerum imparem B multiplicans, faciat C: dico C imparem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar. Ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. Qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, et ipse impar erit[d]. Ergo C est impar. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . . .
C . . . .

[d] 23. hujus.

PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

Si impar numerus parem numerum metiatur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C: dico C non esse imparem. Nam si fieri potest, sit impar.

A . . .   B . . . .
C . . . .
D . .   E . . . . . .

Et quoniam A ipsum B metitur per C; impar ille A, multiplicans ipsum C imparem, fecit B. Ac propterea impar

A . . .   B . . . .

C . . . .

D . .   E . . . . . .

[c] 29. hujus. impar eſt B [c]; quod eſt abſurdum, par enim ponitur. Non igitur C eſt impar. Ergo par. Paris igitur C ſit D dimidius. Impar autem A, numerum D multiplicans, faciat E. A igitur metietur E, ex A et D factum. Sed cum numerus A, numeros C, D multiplicans, fecerit [d] 17. ſept. B, E; erit B ad E ut C ad D [d]. Sed D dimidius eſt ipſius C. Quare et E ipſius B dimidius. Numerus igitur A, numerum E metiendo, dimidium ipſius B metitur. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

Si impar numerus ad aliquem numerum ſit primus, et ad ipſius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B ſit primus, et ſit C ipſius B duplus: dico A etiam ad C primum eſſe.

A . . .   B . . . . .

C . . . .

D ------

Si enim non ſint A, C primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque D. Et eſt A impar. Impar igitur eſt [e] Cor. 21. hujus. et D [e]. Et quoniam D impar exiſtens metitur ipſum C, atque eſt C par; et D ipſius C dimi- [f] 30. hujus. dium metietur [f]. Sed ipſius C dimidium eſt B. Ergo D ipſum B metitur. Metitur autem et ipſum A. Quare D ipſos A, B metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt. Numeros igitur A, C nullus quidem D metitur. Ergo A, C inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

Numerorum a binario duplatorum unuſquiſque pariter par eſt tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, C, D: dico B, C, D pariter pares eſſe tantum.

At vero unumquemque ipſorum B, C, D pariter parem [g] Def. 8. ſept. eſſe manifeſto conſtat [g]: a binario namque duplatus eſt.

E, 1.   A, 2.   B, 4.   C, 8.   D, 16.

Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

tionales ſunt, et poſt unitatem A primus eſt; maximum ipſorum numerorum A, B, C, D, videlicet D, nullus alius metietur præter ipſos A, B, C [h]. Atque eſt unuſquiſque ipſorum A, B, C par. Ergo D pariter par eſt tantum. Similiter demonſtrabimus et unumquemque ipſorum A, B, C pariter parem eſſe tantum. *Q. E. D.* [h] 13. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar eſt tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem eſſe tantum.

At vero pariter imparem eſſe perſpicuum eſt [i]: dimidius enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. Dico et tantum. Metiatur enim, ſi fieri poſſit, par numerus B numerum A (cujus dimidius eſt impar) pari C. Paris C ſit D dimidius. Et B multiplicans D faciat E. Jam cum numerus B numeros C, D multiplicans faciat A, E; erit A ad E, ut C ad D [k]. Sed D dimidius eſt illius C. Ergo et E ipſius A dimidius. Sed E factus eſt ex D et numero pari B. Par igitur eſt E [l]. Numerus igitur A dimidium parem habet. Quod hypotheſi repugnat. Nam imparem habere poſuimus. Non igitur pariter par eſt A. Pariter igitur impar tantum. *Q. E. D.*

B -------
A ....
C -------
D ----   E ---------

[i] Def. 9. ſept.
[k] 17. ſept.
[l] 21. hujus.

PROP. XXXIV. THEOR. [XXXIV.]

Si par numerus neque ſit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par eſt et pariter impar.

Numerus enim A neque ſit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A et pariter parem, et pariter imparem eſſe.

At vero A, pariter parem eſſe manifeſtum eſt [m]; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem eſſe. Nam ſi A bifariam ſecemus, et dimidium ipſius bifariam, et hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur. Si enim non incidemus in aliquem

A ....

[m] Def. 8. ſept.

aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium; atque erit A a binario duplatus, quod non ponitur. Quare A pariter impar eſt. Oſtenſum autem eſt et pariter eſſe parem. Eſt igitur A, et pariter par, et pariter impar. *Q. E. D.*

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem a ſecundo et ultimo æquales primo; erit ut ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B C, D, E F incipientes a minimo A; et auferatur ab ipſo B C, et ab E F, æqualis ipſi A; videlicet G C, F H: dico ut B G ad A, ita eſſe E H ad A, B C, D.

Ponatur enim ipſi quidem B C æqualis F K; ipſi vero D æqualis F L. Quoniam igitur F K eſt æqualis ipſi B C,

A . . . .
B . . . . G C
D . . . .
E . . . . L . . . . . . K . . . . H . . . . F

quorum F H eſt æqualis G C; erit reliquus H K reliquo G B æqualis. Et quoniam eſt ut E F ad D, ita D ad B C, et B C ad A; æqualis autem eſt D ipſi F L, et B C ipſi F K, et A ipſi F H. Erit ut E F ad L F, ita L F ad F K, et F K ad F H. Quare dividendo ut E L ad L F, ita L K ad F K, et K H ad F H; et ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes

[a] 12. ſept. conſequentes [a]. Eſt igitur ut K H ad F H, ita E L, L K, K H, ad L F, K F, H F. Atque eſt K H quidem æqualis B G; F H vero ipſi A; et L F, K F, H F æquales ipſis D, B C, A. Ergo ut B G ad A, ita eſt E H ad D, B C, A. Eſt igitur ut ſecundi exceſſus ad primum ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes. *Q. E. D.*

[XXXVI.] PROP. XXXVI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compoſitus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in duplâ analogiâ, ſc. A, B, C, D, quoad totus compoſitus primus fiat, et toti æqualis ſit E,

et

et E ipsum D multiplicans faciat F G: dico F G perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, C, D multitudine, tot sumantur ab ipso E in duplâ analogiâ, qui sint E, H K, L, M. Ergo ex æquo ut A ad D, ita erit E ad M. Ac propterea qui fit ex E, D, est æqualis ei, qui ex A, M [o]. Est [o] 19. sept.

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

62.

E, 31. H——N——K L, 124. M, 248.

31 31

496

F—— O ————————— G

31 465

Q -------- P ---------------

autem qui ex E, D ipse F G. Quare F G est qui fit ex A, M. Multiplicans igitur A ipsum M fecit F G. Atqui est A binarius: duplus igitur est F G ipsius M. Sunt autem et M, L, H K, E deinceps dupli inter se. Ergo E, H K, L, M, F G deinceps proportionales sunt in duplâ analogiâ. Auferatur a secundo H K, et ab ultimo F G ipsi primo E æqualis uterque H N, F O: est igitur ut secundi numeri excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes [p]. Quare ut N K ad E, ita O G ad [p] 35. hujus. M, L, H K, E. Atque est N K ipsi E æqualis [q]. Ergo [q] Per construct. et O G est æqualis ipsis M, L, H K, E. Est autem F O æqualis ipsi E [q]; atque E ipsis A, B, C, D, et unitati æqualis. Totus igitur F G æqualis est et ipsis E, H K, L, M, et ipsis A, B, C, D et unitati [r]; qui omnes ipsum [r] Ax. 2. primi. F G metiuntur. Scilicet cum numerus D ipsum F G, ex D et E factum, necessario metiatur. In numeris autem A, B, C, D, quorum continua est ab ipsâ unitate analogia, maximum D præcedentium quisque metitur [s], [s] 11. hujus. et quem maximus ille metitur, F G. Numerum igitur F G metitur quisque illorum, A, B, C, D. Rursum in numeris E, H K, L, M, F G, quorum perpetua inde ab E in ratione unitatis ad binarium analogia, metitur quisque proxime sequentem, ac proinde se sequentes omnes. Metitur igitur et eorum unusquisque numerum F G. Omnes igitur A, B, C, D, E, H K, L, M illum F G metiuntur. Dico nullum alium metiri F G præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsum F G, qui sit P. Sitque P nulli

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

62.

E, 31. H —— N —— K L, 124. M, 248.

31 31

496

F —— O —————— G

31 465

Q -------- P --------------

nulli ipsorum A, B, C, D, E, H K, L, M idem. Et quoties P ipsum F G metitur, tot unitates sint in Q. Ergo Q ipsum P multiplicans fecit F G. Sed et E
[s] Per construct. multiplicans D ipsum F G fecit[s]: est igitur ut E ad Q,
ita P ad D[t]. Et quoniam ab unitate deinceps propor-
[t] 19. sept. tionales sunt A, B, C, D, et qui unitatem sequitur A primus est; non metietur ipsum D aliquis alius numerus
[u] 13. hujus. præter ipsos A, B, C[u]; et ponitur P nulli ipsorum A, B, C idem. Non igitur P ipsum D metietur. Ut autem P
[x] Def. 20. sept. ad D, ita E ad Q. Ergo neque E metietur ipsum Q[x].
[y] ex hyp. Atqui est E primus[y]. Omnis autem primus numerus
[z] 31. sept. ad omnem numerum, quem non metitur, primus est[z]. Quare E, Q primi inter se sunt. Sed primi etiam et
[a] 23. sept. minimi[a]; minimi vero eos, qui eandem quam ipsi rationem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem
[b] 21. sept. et consequens consequentem[b]; atque est ut E ad Q, ita P ad D. Ergo E æqualiter metitur ipsum P, atque Q ipsum D. Sed nullus alius metitur numerum D præter ipsos A, B, C. Quare Q idem est qui unus ipsorum A, B, C. Sit idem qui B; et quot sunt B, C, D multitudine, tot ab ipso E sumantur E, H K, L. Suntque
[c] Per construct. E, H K, L in eâdem ratione, in quâ B, C, D[c]. Ex æquo igitur ut B ad D, ita est E ad L. Ergo qui fit ex B, L
[d] 19. sept. est æqualis ei, qui ex D, E[d]. Sed qui fit ex D, E est æqualis ei, qui ex Q, P. Qui igitur fit ex Q, P ei, qui ex B, L, æqualis erit. Quare ut Q ad B, ita est L ad P[d]. Estque Q idem qui B. Ergo et L idem erit qui P; quod fieri non potest; etenim P nulli ipsorum expositorum idem ponitur. Non igitur ipsum F G metitur aliquis numerus præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Atque ostensus est F G æqualis ipsis A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitati. Perfectus autem numerus est,
[e] Def. 22. sept. qui suis ipsius partibus est æqualis[e]. Ergo F G perfectus est. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

II.

Incommenſurabiles autem, quarum nullam eſſe communem menſuram contingit.

III.

Rectæ lineæ potentiâ commenſurabiles ſunt, cum ea, quæ ab ipſis fiunt, quadrata idem ſpatium metitur.

IV.

Incommenſurabiles autem, cum quadrata, quæ ab ipſis fiunt, nullum commune ſpatium metiri contingit.

V.

His poſitis oſtenditur, cuicunque rectæ lineæ propoſitæ rectas lineas, multitudine infinitas, et commenſurabiles eſſe et incommenſurabiles; alias quidem longitudine ſimul et potentiâ commenſurabiles, alias vero potentiâ ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, rationalis.

VI.

Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

VII.

Incommensurabiles vero, irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratum, quod a rectâ lineâ propositâ fit, dicatur rationale.

IX.

Et spatia huic commensurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommensurabilia vero, dicantur irrationalia.

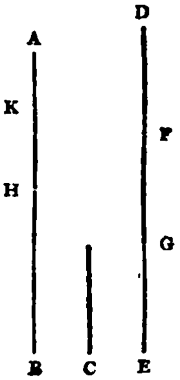
XI.

Et lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quæpiam rectilinea, ipsæ a quibus æqualia quadrata describuntur.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expositâ minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales A B, C, quarum major A B: dico si ab ipsâ A B auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur majus quam dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit.



Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine A B. Multiplicetur, et fit D E ipsius quidem C multiplex, major autem quam A B; dividaturque D E in partes ipsi C æquales D F, F G, G E; et ab ipsâ A B auferatur majus quam dimidium B H, ab ipsâ vero A H rursus majus quam dimidium auferatur H K, atque hoc semper fiat,

quoad

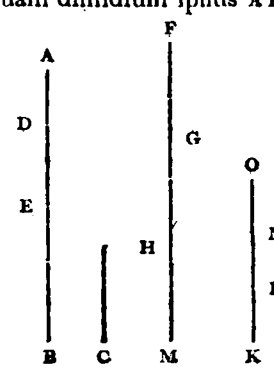
quoad divisiones, quæ sunt in A B, multitudine æquales fiant divisionibus, quæ in D E. Sint igitur divisiones A K, K H, H B divisionibus D F, F G, G E multitudine æquales.

Et quoniam major est D E quam A B, et ablatum est ab ipsâ quidem D E minus quam dimidium, sc. E G, ab ipsâ vero A B majus quam dimidium, sc. B H; erit reliquum G D reliquo H A majus. Rursus, quoniam major est G D quam H A, et ablatum est ab ipsâ quidem G D dimidium G F, ab ipsâ vero H A majus quam dimidium H K; reliquum D F reliquo A K majus erit. Estque D F æqualis ipsi C. Ergo C quam A K est major. Minor igitur est A K quam C. Ergo ex magnitudine A B relicta est magnitudo A K, expositâ minori magnitudine C minor. *Q. E. D.*

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint.

Aliter. Exponantur duæ magnitudines inæquales A B, C, sitque C minor; et quoniam minor est C, multiplicata erit aliquando magnitudine A B major. Fiat ut F M, dividaturque in partes ipsi C æquales M H, H G, G F; et ab ipsâ A B auferatur majus quam dimidium B E, et ab E A majus quam dimidium E D; atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in A B, numero æquales fiant divisionibus, quæ in F M. Fiant igitur ut B E, E D, D A; et ipsi D A unaquæque ipsarum K L, L N, N O sit æqualis, atque hoc fiat, quoad divisiones ipsius K O numero æquales sint divisionibus ipsius F M.

Et quoniam B E major est quam dimidium ipsius A B, erit B E major quam E A: multo igitur major est B E quam D A. Sed ipsi D A æqualis est O N. Ergo B E major est quam O N. Rursus, quoniam E D major est quam dimidium E A, erit E D major quam D A. Sed ipsi D A est æqualis N L. Quare E D quam N L est major: tota igitur D B major est quam O L. Ipsi vero D A æqualis est L K. Quare tota A B quam tota O K major erit.



Sed

Sed M F major eſt quam B A: multo igitur M F quam O K eſt major. Et quoniam O N, N L, L K inter ſe æquales ſunt; ſunt autem et M H, H G, G F inter ſe æquales, atque eſt multitudo earum, quæ ſunt in M F, æqualis multitudini ipſarum, quæ in O K: erit ut K L ad F G, ita O K ad F M [a]. Major autem eſt F M quam O K. Ergo et F G quam L K eſt major [b]. Atqui eſt F G ipſi C æqualis; et K L æqualis ipſi A D. Ergo C quam A D major erit. *Q. E. D.*

[a] 12. quinti.
[b] 14. quinti.

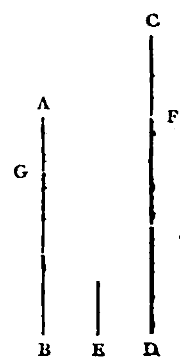
[II.]

PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expoſitis A B, C D, quarum minor ſit A B, et detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines A B, C D incommenſurabiles eſſe.

Si enim commenſurabiles ſint, eas magnitudo quædam metietur. Metiatur, ſi fieri poteſt; ſitque E; et A B quidem metiens D F relinquat ſeipſa minorem C F; C F vero metiens B G relinquat ſeipſâ minorem A G; et hoc ſemper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ ſit minor ipſâ E. Itaque fiat, et relinquatur A G ipſâ E minor. Quoniam igitur E metitur A B, A B vero metitur D F; et E ipſam D F metitur. Sed et metitur totam C D. Ergo et reliquam C F metietur. At C F metitur B G. Quare et E ipſam B G metitur. Metitur autem et totam A B. Et reliquam igitur A G metietur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur magnitudines A B, C D aliqua magnitudo metietur. Ergo A B, C D magnitudines incommenſurabiles erunt.



Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detractâ ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt. *Q. E. D.*

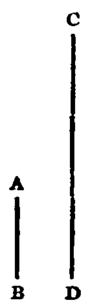
PROP.

PROP. III. PROBL. [III.]

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram invenire.

Sint datæ duæ magnitudines commenſurabiles A B, C D, quarum minor A B: oportet ipſarum A B, C D maximam communem menſuram invenire.

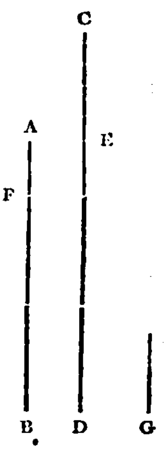
Vel igitur A B metitur C D, vel non metitur. Et ſi quidem A B metitur C D, metitur autem et ſeipſam; erit A B ipſarum A B, C D communis menſura. Et perſpicuum eſt maximam eſſe; magnitudo enim major magnitudine A B ipſam A B non metietur.



Si vero A B non metitur C D; detractâ ſemper minore de majore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metietur[c], propterea quod A B, C D non ſint incommenſurabiles; et A B quidem metiens C D relinquat ſeipſâ minorem E C; E C vero metiens A B relinquat ſeipſâ minorem A F; et A F ipſam C E metiatur.

[c] 2. hujus.

Quoniam igitur A F metitur C E, ſed C E metitur F B; et A F ipſam F B metitur. Metitur autem et ſeipſam; et totam igitur A B metietur. Sed A B metitur D E. Ergo A F ipſam D E metitur. Metitur autem et C E; et totam igitur C D metietur. Ergo A F ipſas A B, C D metitur. Ac propterea A F ipſarum A B, C D eſt communis menſura. Dico et maximam eſſe. Niſi enim ita ſit, erit aliqua magnitudo major ipſâ A F, quæ ipſas A B, C D metietur. Itaque metiatur, et ſit G. Et quoniam G metitur A B, A B vero metitur E D; et G ipſam E D metitur. Metitur autem et totam C D. Ergo et reliquam C E metietur. Sed C E metitur F B. Quare G ipſam F B metitur. Metitur autem et totam A B; et reliquam igitur A F metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur magnitudo quædam major ipſâ A F magnitudines A B, C D metietur.



Ergo A F ipſarum A B, C D maxima erit communis menſura.

Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis A B, C D, maxima ipſarum communis menſura A F inventa eſt. *Q. E. F.*

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, et maximam ipſarum communem menſuram metiri.

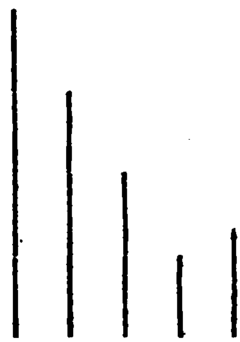
[IV.]

PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram invenire.

Sint datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C: oportet ipſarum A, B, C maximam communem menſuram invenire.

Sumatur enim duarum A, B maxima communis menſura[d], quæ ſit D; itaque D ipſam C vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoniam D ipſam C metitur, metitur autem et A, B; et ipſas A, B, C metietur. Quare D ipſarum A, B, C communis eſt menſura. Et manifeſtum eſt maximam eſſe; magnitudo enim major magnitudine D ipſas A, B, C non metietur. Nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitudo major ipſâ D, quæ ſit E. Quoniam igitur E magnitudines A, B, C metitur, et ipſas A, B metietur, et ipſarum A, B maximam communem menſuram D[e], major minorem, quod fieri non poteſt.



A B C D E

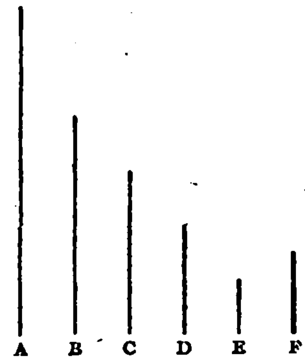
[d] 3. hujus.

[e] Cor. 3. hujus.

Sed non metiatur D ipſam C. Dico primum C, D commenſurabiles eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt A, B, C, metitur eas aliqua magnitudo, quæ ſcilicet et ipſas A, B metitur; ergo et ipſarum A, B maximam communem menſuram D. Metitur autem et ipſam C. Quare dicta magnitudo ipſas C, D metitur: ideoque C, D commenſurabiles ſunt[f]. Sumatur ipſarum maxima communis menſura[d]; et ſit E. Quoniam igitur E metitur D, D vero metitur A, B; et E ipſas A, B metietur.

[f] Def. 1. primi.

metietur. Metitur autem et C. Ergo E ipſarum A, B, C communis eſt menſura. Dico et maximam eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit aliqua magnitudo F major ipſâ E, quæ magnitudines A, B, C metiatur. Et quoniam F metitur A, B, C, et ipſas A, B metietur; et igitur ipſarum A, B maximam communem menſuram metietur[g]. Sed D eſt maxima communis menſura ipſarum A, B: ergo F metitur D. Metitur autem et C: quare F ipſas C, D metitur; et igitur F metitur ipſarum C, D maximam communem menſuram. Sed ipſarum C, D maxima communis menſura eſt E: ergo F ipſam E metietur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur magnitudo major ipſâ E magnitudines A, B, C metietur. Ergo E ipſarum A, B, C maxima erit communis menſura, ſi D ipſam C non metiatur; ſi vero metiatur, erit ipſa D.



[g] Cor. 3. hujus.

Tribus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis, maxima ipſarum communis menſura inventa eſt. *Q. E. F.*

Cor. Ex hoc perſpicue conſtat, ſi magnitudo tres metiatur magnitudines, et ipſarum maximam communem menſuram metiri.

Similiter et in pluribus magnitudinibus maxima communis menſura invenietur, et Corollarium procedet.

PROP. V. THEOR. [V.]

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

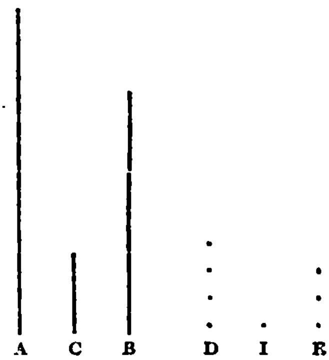
Sint commenſurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commenſurabiles ſunt, metietur ipſas aliqua magnitudo. Metiatur, et ſit C. Et quoties

 ties

ties C ipsam A metitur, tot unitates sint in D; quoties autem C metitur B, tot unitates sint in E.

Quoniam igitur C ipsam A metitur per unitates, quæ sunt in D, metitur autem et unitas numerum D per unitates, quæ in ipso sunt; unitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipsam A. Ergo ut C ad A, ita est unitas ad D, et invertendo ut A ad C, ita D ad unitatem. Rursus, quoniam C ipsam B metitur per unitates, quæ sunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates, quæ in ipso sunt; unitas numerum E æqualiter metietur, atque C ipsam B. Est igitur ut C ad B, ita unitas ad E. Ostensum autem est et ut A ad C, ita esse D ad unitatem. Quare ex æquo ut A ad B, ita numerus D ad E numerum.



Commensurabiles igitur magnitudines A, B inter se rationem habent, quam D numerus ad numerum E. *Q. E. D.*

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

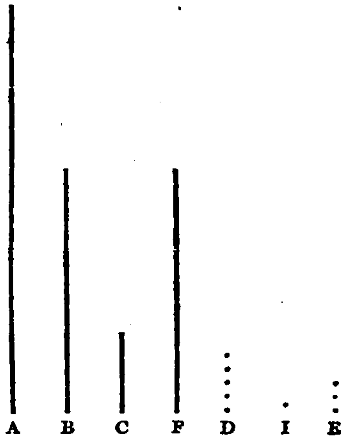
Si duæ magnitudines inter se rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commensurabiles.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam D numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commensurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in D, in tot partes æquales dividatur magnitudo A; et uni ipsarum æqualis sit C: quot autem unitates sunt in E, ex tot magnitudinibus, æqualibus ipsi C, componatur magnitudo F.

Quoniam igitur quot sunt in D unitates, tot magnitudines sunt in A ipsi C æquales; quæ pars est unitas ipsius D, eadem pars erit et C ipsius A; ut igitur C ad A, ita est unitas ad D. Erit igitur invertendo ut A ad C, ita D numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot unitates sunt in E, tot sunt et in F magnitudines

nitudines ipſi C æquales; ut C ad F, ita erit unitas ad E numerum. Oſtenſum autem eſt et ut A ad C, ita D eſſe ad unitatem. Ergo ex æquo ut A ad F, ita D ad E. Sed ut D ad E, ita A ad B; et igitur ut A ad B, ita A ad F. Quod cum A ad utramque ipſarum B, F eandem habeat rationem, erit B ipſi F æqualis[h]. Metitur autem C ipſam F. Ergo et ipſam B metietur. Sed et metitur A. Quare C ipſas A, B metitur: commenſurabilis igitur eſt A ipſi B[i].



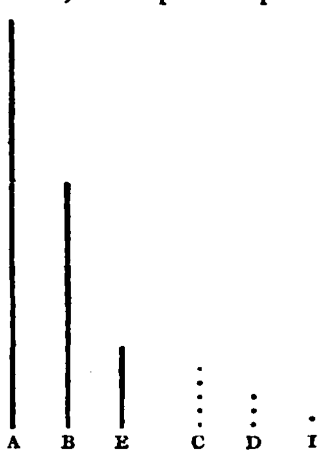
[h] 9. quinti.

[i] Def. 1. hujus.

Quare ſi duæ magnitudines inter ſe rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles. *Q. E. D.*

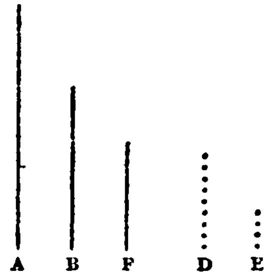
Aliter. Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant, quam numerus C ad numerum D: dico magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in C, in tot partes æquales dividatur A; et uni ipſarum æqualis ſit E: eſt igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. Eſt autem et ut C ad D, ita A ad B. Ergo ex æquo ut unitas ad D numerum, ita E ad B. Sed unitas metitur D. Ergo et E ipſam B metitur. Metitur autem et E ipſam A, quoniam et unitas metitur C. Quare E utramque ipſarum A, B metietur; ideoque A, B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.



Cor.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri ut D, E, et recta linea ut A, inveniri posse aliam rectam F, adquam A rationem habeat, quam numerus D ad numerum E. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis sumatur ut B, erit ut A ad F, ita quod fit ex A ad id quod ex B; hoc est, ut prima ad tertiam, ita figura, quæ fit a prima, ad eam, quæ a secunda, similem et similiter descriptam [k]. Sed ut A ad F, ita D numerus ad numerum E. Factum igitur est et ut D numerus ad numerum B, ita quod fit ex recta linea A ad id quod ex recta linea B.



[k] Cor. 2. 20. sexti.

[VII.]

PROP. VII. THEOR.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum; commensurabilis erit A ipsi B [l]. Atqui non est commensurabilis. Non igitur A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum.

Quare incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum. *Q. E. D.*

[l] 6. hujus.

[VIII.]

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Si enim commensurabilis est A ipsi B, rationem habet, quam numerus ad numerum [m]. Atqui non habet: incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.

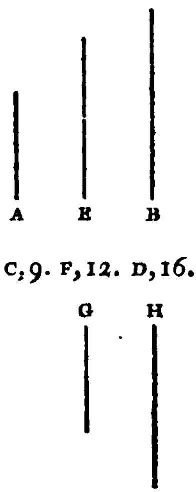
[m] 5. hujus.

Ergo

Ergo ſi duæ magnitudines inter ſe rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt. *Q. E. D.*

* LEMMA I.

Si quatuor quantitatum prima ſit ad ſecundam ut tertia ad quartam; erit et prima ad aliam, primæ utique et ſecundæ proportione mediam, ut tertia ad aliam, tertiæ et quartæ proportione mediam: modo tam tertia et quarta, quam prima et ſecunda, iſtiuſmodi ſint in ſuo genere quantitates, quæ proportione mediam capiant.



Sint A, B, C, D quatuor quantitates. Quarum prima A ad ſecundam B rationem habeat eandem, quam tertia C ad quartam D. Primæ et ſecundæ, A et B, ſit E proportione media. Tertiæ item et quartæ, C et D, ſit F proportione media. Dico eſſe A ad E ut C ad F. Non enim. Sed habeat A ad aliam quandam G proportionem eam, quam C ad F. Quam autem F ad D, eam habeat G ad H. Trium igitur A, G, H continua erit analogia; propter continuam trium C, F, D analogiam. Jam vero cum ſit A ad G ut C ad F, et G ad H ut F ad D; ex æquo eirt A ad H ut C ad D. Sed ut C ad D, ita A ad B [n]. Erit igitur A ad H ut eadem A ad B. Quantitates igitur H, B inter ſe æquales. Quare E quæ duarum A, B proportione media eſt, ipſi G æqualis erit, quæ duarum A, H proportione media. Quare A ad E eandem proportionem habet, quam A ad G. Eſt autem A ad G ut C ad F [o]. Quare et A ad E ut C ad F. *Q. E. D.*

[n] ex hyp.

[o] Per conſtruct.

PROP.

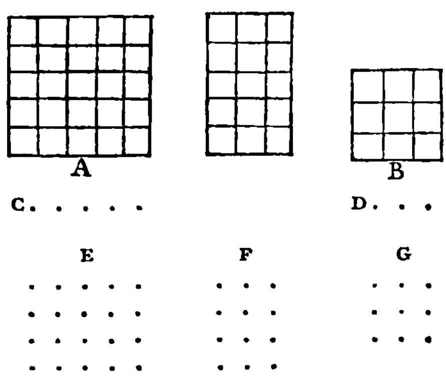
[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et latera habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quæ a longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint rectæ lineæ A, B longitudine commensurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longi-
[q] 5. hujus. tudine, rationem habet, quam numerus ad numerum [q].



Habeat, quam C ad D; et C seipsum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F; et D seipsum multiplicans faciat G. Itaque quoniam C seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero D fecit F; erit ut C ad D, hoc est, ut A ad B [r], ita E ad F [s]. Sed ut A ad B, ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum, quod fit sub A, B [t]. Est igitur ut quadratum

[r] Per construct.
[s] 17. sept.
[t] 1. sexti.

tum quod ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F. Rursus, quoniam D seipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero C ipsum F fecit; ut C ad D, hoc est, ut A ad B, ita erit F ad G [u]. Ut autem A ad B, ita rectangulum, quod fit sub A, B, ad quadratum, quod fit ex B: ergo ut rectangulum sub A, B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. Sed ut quadratum, quod fit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad F: ex æquo igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. Est autem uterque ipsorum E, G quadratus, et E quidem est a numero C, G vero ab ipso D. Quadratum igitur, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. *Q. E. D.* [u] 17. sept.

Sed quadratum, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; et C ipsum D multiplicans faciat F: ergo E, F, G deinceps proportionales sunt in ratione ipsius C ad D [u]. Et quoniam inter quadrata, quæ fiunt ex A, B, medium proportionale est rectangulum sub A, B [x]; inter numeros vero quadratos E, G medius proportionalis est F [y]: erit ut quadratum, quod fit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F [z]. Sed ut quadratum ex A, ad rectangulum sub A, B, ita A ad B: ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est, quam C ad D. *Q. E. D.* [x] 1. sexti. [y] 11. octavi. [z] Lem. 1. 8. hujus.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere, quam quadratus nnmerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine [a]. Non est autem. Non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. [a] ex demonstratis.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. Si enim commensurabils sit A ipsi B longitudine,

tudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Atqui non habet. Non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis.

Ergo quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, &c. *Q. E. D.*

Cor. Et manifestum est ex jam demonstratis, lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles esse; quæ vero potentiâ commensurabiles, non semper et longitudine; et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non semper et potentiâ incommensurabiles; quæ vero potentiâ incommensurabiles, omnino et longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt a rectis lineis longitudine commensurabilibus, rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectæ lineæ longitudine commensurabiles, non solum longitudine, sed et etiam potentiâ, commensurabiles.

Rursus, quoniam quæcunque quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, ut ostensum est, eorum igitur latera tam longitudine quam potentiâ commensurabilia sunt: quæcunque autem quadrata rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis numerus non quadratus ad alium numerum, commensurabilia sunt; hoc est, rectæ lineæ, a quibus ipsa describuntur, commensurabiles sunt potentiâ, non autem et longitudine. Ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles sunt; potentiâ vero commensurabiles, non semper et longitudine, nisi earum quadrata rationem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico et longitudine incommensurabiles non semper potentiâ incommensurabiles esse. Quoniam potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere, quam numerus ad numerum, ideoque cum potentiâ commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. Ergo non

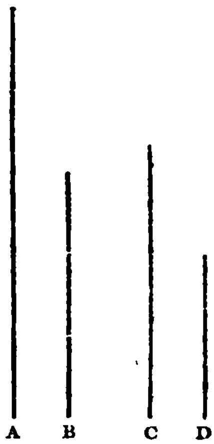
non quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, omnino et potentiâ: ſed longitudine incommenſurabiles exiſtentes aliæ etiam potentiâ aliæ potentiâ commenſurabiles erunt.

Potentiâ vero incommenſurabiles omnino et longitudine incommenſurabiles ſunt: ſi enim longitudine ſint commenſurabiles, et potentiâ commenſurabiles erunt[c]. Atqui ponuntur incommenſurabiles, quod eſt abſurdum: potentiâ igitur incommenſurabiles omnino et longitudine incommenſurabiles erunt. [c] Ex hactenus oſtenſis.

PROP. X. THEOR. [X.]

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; et tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; et tertia quartæ incommenſurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, C, D; ſitque ut A ad B, ita C ad D, et ſit A ipſi B commenſurabilis: dico et C ipſi D commenſurabilem eſſe.



Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit A ad B rationem, quam numerus ad numerum[d]. Atque eſt ut A ad B, ita C ad D: ergo et C ad D rationem habet, quam numerus ad numerum: commenſurabilis igitur eſt C ipſi D[e]. [d] 5. hujus. [e] 6. hujus.

Sed A ipſi B ſit incommenſurabilis: dico et C ipſi D incommenſurabilem eſſe. Non enim. Commenſurabilis igitur. Habet igitur C ad D rationem, quam numerus ad numerum. Sed ut C ad D, ita A ad B. Quare et numerus ad numerum. Si enim C ad D rationem habeat, quam numerus ad numerum; et A ad B eam, quam numerus ad numerum, rationem habebit[g]: atque erit A ipſi B commenſurabilis[h], quod eſt abſurdum; incommenſurabilis enim ponitur. Ergo C ad D rationem non habet, quam numerus ad numerum. Ideoque C ipſi D eſt incommenſurabilis[i]. [g] 11. quinti. [h] 6. hujus. [i] 8. hujus.

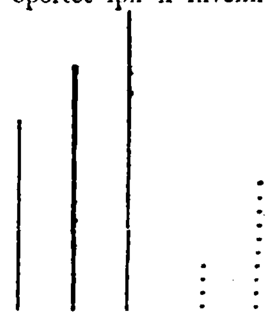
Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et quæ ſequuntur. *Q. E. D.*

PROP.

[XI.] PROP. XI. PROBL.

Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.

Sit proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.



Exponantur duo numeri B, C, inter se rationem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditum est [l]. Ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. Et quoniam B ad C rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex D rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine [m]. Sumatur inter ipsas A, D media proportionalis E: est igitur ut A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E [n]. Sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis: ergo et quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit [o]: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ. Ergo propositæ rectæ lineæ rationali, a qua dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentiâ quidem commensurabilis inventa est D, hoc est, rationalis potentiâ tantum commensurabilis, irrationalis vero E [p]. Irrationales enim universe appellantur, quæ rationali et longitudine et potentiâ incommensurabiles sunt. *Q. E. D.*

[l] Cor. 6. hujus.
[m] 9. hujus.
[n] Cor. 2. 20. sexti.
[o] 10. hujus.
[p] Def. 5. hujus.

PROP.

PROP. XII. THEOR. [XII.]

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt.

Utraque enim ipsarum A, B ipsi C sit commensurabilis: dico et A ipsi B commensurabilem esse.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C, habebit A ad C rationem, quam numerus ad numerum[p]. Habeat, [p] 5. hujus.

A C B

D . . . . . .   F . .
E . . . .   G . . . . .
H . . .
K . .
L . . . . .

quam numerus D ad numerum E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B rationem, quam numerus ad numerum. Habeat, quam F ad G. Et rationibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, et quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales H, K, L in datis rationibus[q]; sitque ut D ad E, ita H ad K; ut autem F ad G, ita K ad L. [q] 2. octavi.

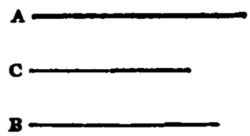
Quoniam igitur est ut A ad C, ita D ad E; sed ut D ad E, ita H ad K: erit et ut A ad C, ita H ad K. Rursus, quoniam est ut C ad B, ita F ad G, sed ut F ad G, ita K ad L; erit et ut C ad B, ita K ad L. Est autem et ut A ad C, ita H ad K: ex æquo igitur ut A ad B, ita H ad L[r]: ergo A ad B rationem habet quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis[s]. [r] 23. quinti. [s] 6. hujus.

Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt. *Q. E. D.*

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Si sint duæ magnitudines, et altera quidem alii cuidam sit commensurabilis, altera vero eidem incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem sit C; et A quidem ipsi C commensurabilis sit, B vero eidem incommensurabilis: dico et A ipsi B incommensurabilem esse.



Si enim commensurabilis est A ipsi B, quoniam et ipsi C commensurabilis est A; erit et C ipsi B commensurabilis [t]. Quod est contra hypothesin.

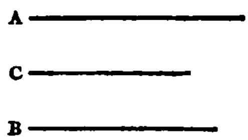
[t] 12. hujus.

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: dico et reliquam B ipsi C incommensurabilem esse.

Si enim commensurabilis est B ipsi C, quoniam et ipsi B commensurabilis est A; et A ipsi C commensurabilis erit [u]. Sed et incommensurabilis, quod fieri non potest. Non igitur commensurabilis est B ipsi C: ergo est incommensurabilis.



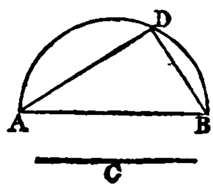
[u] 12. hujus.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit. *Q. E. D.*

LEMMA II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest quam minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B, C, quarum major sit A B: oportet invenire id, quo A B plus potest quam C.



Describatur super rectam lineam A B semicirculus A D B; et in eo aptetur

tetur recta linea A D, ipsi C æqualis [x]; et D B jungatur. [x] 1. quarti.
Perspicuum est angulum A D B rectum esse [y], et ipsam [y] 31. tertii.
A B plus posse quam A D, hoc est, quam C, quantum est rectæ lineæ D B quadratum [z]. [z] 47. primi.

Similiter autem et datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest hoc modo invenietur.

Sint duæ datæ rectæ lineæ A D, D B, et oporteat invenire rectam lineam, quæ ipsas possit. Exponantur enim ita, ut rectum angulum A D B contineant, et A B jungatur: patet rursus rectam lineam A B ipsas A D, D B posse [z].

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et tertia quam quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, sitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem plus possit quam B quadrato, quod fit ex E; C vero plus possit quam D quadrato ex F: dico si A ipsi E longitudine sit commensurabilis, et C ipsi F longitudine commensurabilem esse; si vero A ipsi E sit longitudine incommensurabilis, et C ipsi F longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam enim est ut A ad B, ita C ad D; erit ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id quod ex D fit quadratum [b]. Sed quadrato quidem, quod fit ex A, æqualia sunt quadrata, quæ ex ipsis E, B [c]; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F, D: igitur ut quadrata, quæ fiunt ex E, B, ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ fiunt ex F, D, ad quadratum ex D; et dividendo ut quadra-

[b] 22. sexti.
[c] ex hyp.

 tum

[d] 17. quinti. tum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F,
[e] 22. sexti. ad quadratum ex D[d]. Quare ut E ad B, ita est F ad D[e],
[f] 4. quinti. et invertendo ut B ad E, ita D ad F[f]. Est autem et ut A ad B, ita C ad D: ex æquo igitur ut A ad E, ita
[g] 22. quinti. est C ad F[g]. Ergo si A longitudine est commensurabilis ipsi E, et C ipsi F longitudine erit commensurabilis; si
[h] 10. hujus. vero incommensurabilis est A ipsi E, et C ipsi F incommensurabilis erit[h].

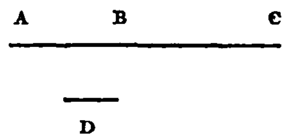
Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

[XVI.] PROP. XVI. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis; et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C commensurabilem esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A B, B C, me-
[i] Def. 1. hujus. tietur eas aliqua magnitudo[i]. Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B, B C: ergo D magnitudines A B, B C et ipsam A C metitur. Commensurabilis igitur est A C utrique ipsarum A B, B C.



Sed A C uni ipsarum A B, B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B: dico et A B, B C commensurabiles esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A C, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas A C, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas A B, B C metietur. Ac propterea A B, B C commensurabiles sunt.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si &c. *Q. E. D.*

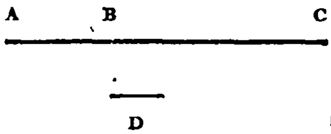
PROP

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit incommensurabilis; et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles C A, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, sitque D, si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas C A, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipsas A B, B C metitur; ac propterea commensurabiles sunt A B, B C[k]. Ponuntur autem et incommensurabiles, quod fieri non potest. Non igitur ipsas C A, A B metietur aliqua magnitudo: quare C A, A B incommensurabiles sunt. Similiter et A C, C B incommensurabiles esse demonstrabimus. Ergo A C utrique ipsarum A B, B C est incommensurabilis.



[k] Def. 1. hujus.

Sed A C uni ipsarum A B, B C incommensurabilis sit; et primum ipsi A B: dico et A B, B C incommensurabiles esse. Si enim sunt commensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur[k]. Metiatur, et sit D. Quoniam igitur D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas C A, A B metitur: ideoque C A, A B commensurabiles sunt. Ponuntur autem et incommensurabiles, quod fieri non potest. Non igitur ipsas A B, B C metietur aliqua magnitudo: quare A B, B C incommensurabiles erunt. Similiter demonstrabimus, si A C incommensurabilis sit ipsi C B, etiam A B, B C incommensurabiles esse.

Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. *Q. E. D.*

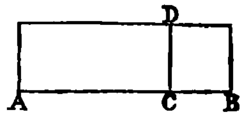
LEMMA III.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; parallelogram-

 mum

mum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub partibus rectæ lineæ, ex applicatione factis, continetur.

Ad aliquam enim rectam A B, applicetur A D parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ D B: dico parallelogrammum A D rectangulo sub A C, C B æquale esse.



Atque hoc per se patet: quoniam enim quadratum est D B, erit D C ipsi C B æqualis; atque A D est parallelogrammum, quod sub A C, C B continetur.

Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, &c. *Q. E. D.*

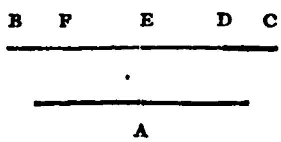
[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati quod fit a minori A, (hoc est, ei, quod fit a dimidiâ ipsius A) æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C; sitque B D ipsi D C commensurabilis longitudine: dico B C plus posse quam A quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

Secetur enim B C bifariam in puncto E, et ipsi D E æqualis ponatur E F: reliqua igitur D C est æqualis B F. Et quoniam recta linea B C secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit rectangulum sub B D, D C unà



1 5. secundi. cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E C[1]; quare et

et eorum quadrupla inter se æqualia erunt. Quod igitur quater sub B D, D C continetur unà cum quadrato, quod quater fit ex E D, æquale est quadrato, quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater sub B D, D C continetur, æquale est quadratum ex A; ei vero, quod quater fit ex D E, æquale est quadratum ex D F [m]; etenim D F ipsius D E est dupla; et ei, quod quater fit ex E C, æquale est quadratum ex B C; rursus enim B C dupla est ipsius E C. Ergo quadrata, quæ fiunt ex A, D F, æqualia sunt ei quod fit ex B C quadrato: ac propterea quadratum, quod fit ex B C, majus est quam quadratum, quod ex A, quadrato ex D F. Recta igitur linea B C tanto plus potest quam A, quantum est ipsius D F quadratum. Ostendendum est et B C ipsi D F commensurabilem esse. Quoniam B D commensurabilis est ipsi D C longitudine [m], erit et B C ipsi D C longitudine commensurabilis [n]. Sed D C ipsis C D, B F simul sumptis est commensurabilis longitudine; æqualis enim est C D ipsi B F [o]. Quare et B C ipsis B F, C D simul sumptis longitudine est commensurabilis; et reliquæ igitur F D longitudine commensurabilis erit [o]. Ergo B C plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

[m] ex hyp.
[n] 16. hujus.
[o] 6. hujus.

Sed B C plus possit quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurà quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C. Ostendendum est B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus B C plus posse quam A quadrato rectæ lineæ F D. Sed B C plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [n]: ergo B C commensurabilis est ipsi F D longitudine; et reliquæ igitur, duabus scilicet B F, D C simul sumptis, longitudine est commensurabilis [o]. Sed ex duabus B F, D C composita ipsi D C commensurabilis est longitudine, etenim B F est æqualis D C; ergo et B C ipsi D C longitudine est commensurabilis. Constat igitur B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse [o].

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, &c. *Q. E. D.*

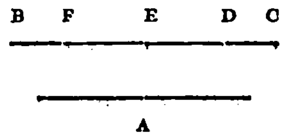
[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori A, æquale parallelogrammum ad ipsam B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub B D, D C; sitque B D ipsi D C longitudine incommensurabilis: dico B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendedemus ipsam B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Ostendendum igitur est B C ipsi D F longitudine incommensurabilem esse. Quoniam incommensurabilis est B D ipsi D C, erit et B C ipsi

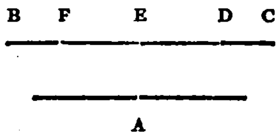


[q] 17. hujus. D C longitudine incommensurabilis [q]. Sed D C commensurabilis est duabus B F, D C simul sumptis: ergo et B C duabus B F, D C simul sumptis longitudine est incom-
[r] 14. hujus. mensurabilis [r]. Ac propterea B C reliquæ F D incommensurabilis est longitudine; et B C plus potest quam A, quadrato ex F D [q]. Igitur B C plus potest quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sed B C rursus plus possit quam A, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod sub B D, D C continetur. Ostendendum est B D ipsi D C longitudine incommensurabilem esse.

Iisdem

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus B C plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Sed B C plus potest quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [s]: incommensurabilis igitur est B C ipsi D F longitudine: quare et reliquæ, videlicet duabus B F, D C simul sumptis, est incommensurabilis [t]. Sed ex [t] duabus B F, D C composita commensurabilis est longitudine ipsi D C [u]. Ergo et B C ipsi D C est incommensurabilis longitudine [x]; ac propterea dividendo B D [x] ipsi D C longitudine incommensurabilis erit [t].



[s] ex hyp. [t] 17. hujus. [u] 6. hujus. [x] 14. hujus.

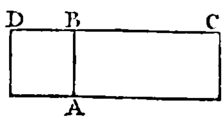
Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, &c. *Q. E. D.*

PROP. XX. THEOR. [XX.]

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, rationale est.

Exponatur recta quædam A B, et longitudine huic commensurabilis alia B C. Dico rectangulum A C, sub duabus A B, B C comprehensum, rationale esse.

Describatur ex A B quadratum A D: ergo A D est rationale [y]. Et quoniam A B commensurabilis est ipsi B C longitudine, atque est A B æqualis B D; erit B D ipsi B C longitudine commensurabilis. Est autem et ut B D ad B C, ita D A ad A C [z]; et commensurabilis est B D ipsi B C: ergo et D A ipsi A C commensurabile erit [a]. Estque rationale D A: quare et A C est rationale [b].



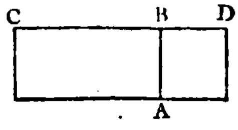
[y] Def. 8. hujus. [z] 1. sexti. [a] 10. hujus. [b] Def. 9. hujus.

Quod igitur sub rationalibus, &c. *Q. E. D.*

PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

Rationale enim A C ad rationalem, nempe A B, applicetur, latitudinem faciens B C: dico B C rationalem esse, et ipsi A B longitudine commensurabilem.



Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D rationale est. Sed et rationale est A C: ergo A D ipsi A C est commensurabile,

[a] Def. 9. hujus. [b] 1. sexti. mensurabile [a]. Atque est ut DA ad AC, ita DB ad ad BC [b]. Commensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est autem BD æqualis BA: quare AB ipsi BC longitudine commensurabilis est. Sed AB est rationalis. Rationalis igitur est et BC, et ipsi BA longitudine commensurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, &c. *Q. E. D.*

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

Quod sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale est; et recta linea, ipsum potens, est irrationalis, vocetur autem media.

Vide fig. Prop. 20. Sub rationalibus enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC contineatur rectangulum AC: dico AC irrationale esse; et rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse; vocetur autem media.

Describatur enim ex AB quadratum AD: ergo AD [c] Def. 8. hujus. rationale est [c]. Et quoniam AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentiâ enim solum ponuntur commensurabiles, atque est AB æqualis BD: incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est [d] 1. sexti. autem ut DB ad BC, ita AD ad AC [d]: ergo AC ipsi AD est incommensurabile. Sed AD rationale est: irratio- [e] Def. 10. hujus. nale igitur est AC [e]: quare et recta linea, quæ ipsum AC potest, videlicet, quæ potest quadratum ipsi æquale, [f] Def. 11. hujus. est irrationalis [f]. Vocetur autem media; propterea quod ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod sub AB, BC continetur, et inter ipsas AB, BC media sit proportionalis. *Q. E. D.*

[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

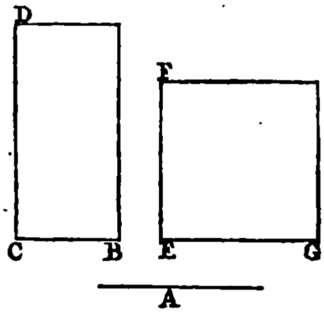
Quod fit a mediâ ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; sed ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Duarum quarundam rationalium, potentiâ solum commensurabilium, sit media A; et ad aliquam rationalem, CB, ei quod fit ex A æquale spatium applicetur BD, latitudinem faciens CD: dico CD rationalem esse, sed ipsi BC longitudine incommensurabilem.

Quoniam enim media est A, potest spatium contentum [g] 22. hujus. sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus [g]. Possit GF, sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus EG, EF comprehensum. Sed potest et BD.

Æquale

Æquale igitur eſt B D ipſi G F. Atque eſt illi æquiangulum; æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproce proportionalia[h]: ergo ut recta B C ad E G rectam, h 14. ſexti. ita eſt E F ad C D. Eſt igitur et ut quadratum ex B C ad quadratum ex E G, ita quadratum ex E F ad id quod fit ex C D quadratum[i]. Sed quadratum i 22. ſexti.



ex B C commenſurabile eſt quadrato ex E G[k], utraque enim k Def. 6. hujus. ipſarum eſt rationalis: commenſurabile igitur eſt et quadratum ex E F quadrato ex C D[l]. Eſt autem quadratum l 10. hujus. ex E F rationale; nimirum cum E G, E F rationales ſint potentiâ commenſurabiles. Ergo et rationale eſt quadratum ex C D. Ac propterea recta linea C D eſt rationalis[k]. Præterea quoniam F E incommenſurabilis eſt ipſi E G longitudine, potentiâ enim ſolum commenſurabiles ſunt[m], ut autem F E ad E G, ita quadratum ex E F ad re- m 22. hujus. ctangulum ſub F E, E G: erit quadratum ex E F incommenſurabile rectangulo ſub F E, E G[l]. Sed quadrato quidem ex E F commenſurabile eſt quadratum ex C D, id enim oſtenſum: ergo quadratum ex C D incommenſurabile eſt rectangulo ſub E F, E G. Sed eidem rectangulo ſub E F, E G eſt commenſurabile rectangulum ſub D C, C B, utrumque enim eſt æquale quadrato ex A: ergo quadratum ex C D incommenſurabile eſt rectangulo ſub D C, C B[n]. Sed ut quadratum ex C D ad n 13. hujus. rectangulum ſub D C, C B, ita eſt D C ad C B. Ergo D C ipſi C B incommenſurabilis eſt longitudine; et ob id D C eſt rationalis, ſed ipſi C B longitudine incommenſurabilis[k]. *Q. E. D.*

PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

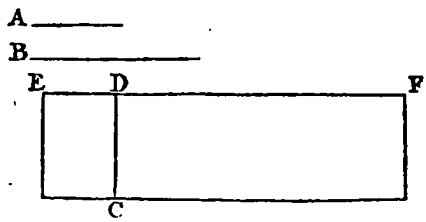
Mediæ commenſurabilis, ſive longitudine ſive potentiâ tantum, media eſt.

Sit media A, et ipſi A commenſurabilis ſit B: dico et B mediam eſſe.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale ad C D applicetur ſpatium rectangulum

C E,

C E, latitudinem efficiens E D. Rationalis igitur eſt E D,



[s] 23. hujus. ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis[s]. Quadrato autem ex B æquale ad D C applicetur ſpatium rectangulum C F, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur recta A potentiâ ſaltem commenſurabilis eſt ipſi B, erit

[t] Def. 3. hujus. quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile[t]. Sed quadrato quidem ex A æquale eſt rectangulum E C[u]; quadrato autem ex B æquale C F. Commenſurabile igitur eſt rectangulum E C rectangulo C F. Atque eſt ut E C ad C F,

[u] Per conſtruct.

[x] 1. ſexti. ita E D ad D F[x]: ergo E D ipſi D F longitudine eſt commenſurabilis. Eſt autem E D rationalis, et longitudine incommenſurabilis ipſi D C[s]: ergo et D F rationalis eſt,

[y] 13. hujus. et ipſi D C longitudine incommenſurabilis[y]: rationales igitur ſunt C D, D F, potentiâ ſolum commenſurabiles. Quod autem ſub rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale eſt; et recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vo-

[z] 22. hujus. caturque media[z]: ergo recta linea quæ poteſt rectangulum ſub C D, D F eſt media. Sed B poteſt rectangulum ſub C D, D F: quare B media erit.

* DEFINITIO XII.

Spatium medium dicitur, quod quadrato ex mediâ eſt æquale.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe. Poſſunt enim ipſa rectæ lineæ quæ ſunt potentiâ commenſurabiles, quarum altera media eſt: ergo et reliqua media erit.

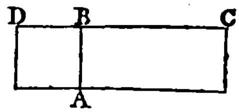
[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium eſt.

Sub mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C medium eſſe.

Deſcribatur

Deſcribatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D medium eſt. Et quoniam commenſurabilis eſt A B ipſi B C longitudine, æqualis autem A B ipſi B D; erit D B ipſi B C longitudine commenſurabilis: quare D A commenſurabile eſt ipſi A C. Sed A D eſt medium: ergo et A C medium erit[a]. *Q. E. D.*



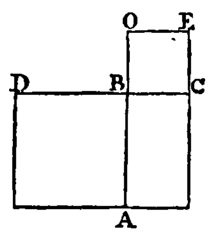
[a] Cor. 24. hujus.

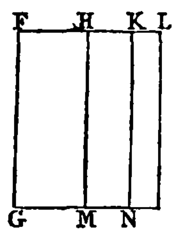
PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

Quod ſub mediis potentiâ ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale eſt vel medium.

Sub mediis enim potentiâ ſolum commenſurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C vel rationale eſſe, vel medium.

Deſcribantur enim ex A B, B C, quadrata A D, B E: utrumque igitur ipſorum A D, B E medium eſt. Exponatur rationalis F G; et ipſi quidem A D æquale ad F G applicetur parallelogrammum rectangulum G H, latitudinem faciens F H; ipſi vero A C æquale ad H M applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens H K[b]; et inſuper ipſi B E æquale ſimiliter ad K N applicetur N L, latitudinem faciens K L. In rectâ igitur lineâ ſunt F H, H K, K L[c]. Quoniam igitur medium eſt utrumque ipſorum A D, B E, atque eſt A D quidem æquale ipſi G H, B E vero ipſi N L; erit et utrumque ipſorum G H, N L medium, et ad rationalem F G applicata ſunt. Ergo et utraque ipſarum F H, K L eſt rationalis, et ipſi F G longitudine incommenſurabilis[d]. Et quoniam commenſurabile eſt A D ipſi B E[e]; erit et G H ipſi N L commenſurabile. Sed eſt ut G H ad N L, ita F H ad K L[f]. Ergo F H ipſi K L eſt commenſurabilis longitudine[g]; ac propterea F H, K L rationales ſunt longitudine commenſurabiles. Rationale igitur eſt rectangulum, quod ſub F H, K L continetur[h]. Et quoniam B D quidem ipſi B A eſt æqualis, O B vero ipſi B C; erit ut





[b] 45. primi.

[c] 14. primi.

[d] 23. hujus.

[e] ex hyp.

[f] 1. ſexti.

[g] 10. hujus.

[h] 20. hujus.

ut D B ad B C, ita A B ad B O. Sed ut D B ad B C, ita
[g] 1. sexti. D A quadratum ad rectangulum A C[g]. Ut autem A B ad B O, ita A C rectangulum ad quadratum C O: est igitur ut D A ad A C, ita A C ad C O. Æquale autem est A D ipsi G H, et A C ipsi M K, et C O ipsi N L. Quare ut G H ad M K, ita M K ad N L; et igitur ut F H ad H K, ita H K ad K L: ideoque quod sub F H, K L continetur
[h] 17. sexti. est æquale quadrato, quod fit ex H K[h]. Est autem quod
[i] 20. hujus. continetur sub F H, K L rationale[i]: ergo et rationale est quadratum ex H K; ac propterea recta linea H K rationalis. Et si quidem H K commensurabilis est ipsi H M, hoc est, ipsi F G, longitudine, erit rectangulum
[k] 22. hujus. & Def. 12. N H rationale[k]. Si vero H K est incommensurabilis ipsi F G longitudine, K H, H M rationales erunt potentiâ solum commensurabiles, et ob id rectangulum H N medium erit[k]: ergo H N vel rationale est vel medium. Sed H N est, æquale ipsi A C: quare A C vel rationale, vel medium est.

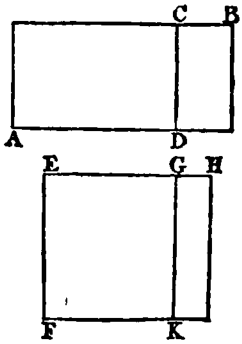
Quod igitur sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium. *Q. E. D.*

[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B; et exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H; ipsi vero
[l] 45. primi. A C æquale auferatur F G[l]: reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A B, A C, estque A B æquale F H, et A C æquale F G; erit et utrumque ipsorum F H, F G medium. Et ad rationalem E F applicata sunt: rationalis igitur est utraque earum E H, E G, sed ipsi E F longitudine incommensura-
[m] 23. hujus. bilis[m]. Et quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale; et K H rationale erit. Est autem ad rationalem E F applicatum: rationalis igitur est G H, et ipsi E F commen-



commenſurabilis longitudine[m]. Sed et E G eſt ratio- [m] 21. hujus.
nalis, et ipſi E F longitudine incommenſurabilis: ergo
E G incommenſurabilis eſt ipſi G H longitudine[n]. At- [n] 13. hujus.
que eſt ut E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectan-
gulum, quod ſub E G, G H continetur[o]: incommenſura- [o] 1. ſexti.
bile igitur eſt quadratum ex E G rectangulo ſub E G,
G H[p]. Sed quadratum quidem ex E G commenſura- [p] 10. hujus.
bile eſt quadratis ex E G, G H ſimul ſumptis; nimirum
cum quadrata illa ex E G, G H utraque ſunt rationalia.
Rectangulo autem ſub E G, G H commenſurabile eſt
quod bis ſub E G, G H continetur rectangulum, utpote
illius duplum. Quadratis igitur ex E G, G H ſimul
ſumptis incommenſurabile eſt id, quod bis ſub E G, G H
continetur rectangulum[q]. Quapropter et quod com- [q] 14. hujus.
ponitur ex quadratis ex E G, G H ſimul ſumptis, unà
cum eo, quod bis ſub E G, G H continetur, rectangulo,
hoc eſt, ipſum ex E H quadratum[r], incommenſurabile [r] 4. ſecundi.
eſt quadratis ex E G, G H[s]. Sunt autem rationalia quæ [s] 17. hujus
fiunt ex E G, G H quadrata: irrationale igitur eſt qua-
dratum ex E H[t]: ac propterea E H eſt irrationalis. Sed [t] Def. 10. hujus.
et rationalis, quod fieri non poteſt.

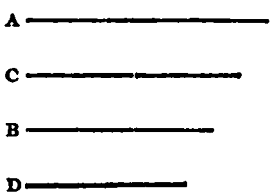
Non igitur medium ſuperat medium rationali. *Q. E. D.*

PROP. XXVIII. PROBL. [XXVIII.]

Datis duabus rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus, medias invenire potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles A, B, et ſumatur inter ipſas A, B media proportionalis C[u], fiatque ut A ad B, ita C ad D[x]. [u] 13. ſexti. [x] 12. ſexti.

Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles, erit quod ſub ipſis A, B continetur rectangulum[y], hoc eſt, quadratum ex C[z], medium: ergo recta linea C media eſt. Et quoniam ut A ad B, ita eſt C ad D, ſuntque A, B potentiâ ſolum commenſurabiles; et C, D potentiâ ſolum commenſurabiles erunt[a]. Eſt autem recta linea C media: media igitur eſt et D[b]: quare C, D mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Dico etiam ipſas rationale continere. Quoniam enim eſt ut A ad B, ita C ad D, erit permutando ut A ad C, ita B ad D[c]. [y] 22. hujus. [z] 17. ſexti. [a] 10. hujus. [b] 24. hujus. [c] 16. quinti.



Sed

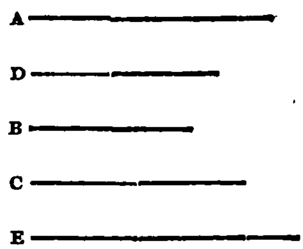
Sed ut A ad C, ita C ad B: ergo et ut C ad B, ita B ad D: quod igitur sub ipsis C, D continetur, quadrato ex B
[z] 17. sexti. est æquale [z]. Rationale autem est quadratum ex B. Ergo et quod continetur sub C, D, rationale erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent. *Q. E. F.*

[XXIX.] PROP. XXIX. PROBL.

Datis tribus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, C, sumaturque inter ipsas A, B media
[d] 13. sexti. proportionalis D [d], et fiat ut B ad C, ita D ad E [e].
[e] 12. sexti. Quoniam igitur A, B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod sub A, B continetur rectan-
[f] 22. hujus. gulum [f], hoc est, quadratum
[g] 17. sexti. ex D, medium [g]: ergo D media est. Et quoniam B, C sunt rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est ut B ad C, ita D ad E; rectæ lineæ D, E potentiâ so-
[h] 10. hujus. lum commensurabiles erunt [h]. Est autem D media: ergo et
[i] 24. hujus. E media est [i]; ac propterea D, E mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ipsas etiam medium continere. Quoniam enim est ut B ad C, ita D ad E, erit permutando ut B ad D, ita C ad E. Ut autem B ad D, ita est D ad A: ergo et ut D ad A, ita C ad E. Quod igitur sub A, C continetur rectangulum, est æquale
[k] 16. sexti. contento sub D, E [k]. Est autem quod continetur sub A, C medium [f]. Ergo et quod continetur sub D, E, medium erit.



Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent. *Q. E. F.*

LEMMA IV.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

Exponantur duo numeri A B, B C, qui vel pares sint

A . . . . . D . . . . . C . . . . B

utrique, vel utrique impares. Et quoniam sive a pari par auferatur,

auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est[l]; erit A C [l] 24. & 26.
numerus par. Secetur A C bifariam in D. Ergo qui fit noni.
sub A B, B C una cum quadrato ex C D est æqualis ei,
qui fit ex B D quadrato[m]. Sed et similes plani sint [m] 6. secundi.
A B, B C. Itaque qui fit ex A B, B C est quadratus;
ostensum enim est si duo similes plani sese multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum esse[n]. Inventi igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit [n] 1. noni.
sub A B, B C, et qui fit ex C D, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex B D. *Q. E. F.*

Cor. Et manifestum est rursus inventos esse duos numeros quadratos, et qui fit ex B D, et qui ex C D, ita ut ipsorum excessus, videlicet qui fit sub A B, B C, fit quadratus; quando A B, B C similes plani sunt. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et qui fit ex B D, et qui ex C D, quorum excessus, nempe qui sub A B, B C, non est quadratus.

LEMMA V.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit enim qui sub A B, B C quadratus[o], ut dictum est, [o] Lemma
et par numerus C A; secturque C A bifariam in D. præc.
Perspicuum est quadratum factum ex A B, B C, una cum quadrato ex C D, æqualem esse ei qui fit ex B D quadrato[m]. Auferatur unitas D E; ergo qui sub A B, B C quadratus una cum quadrato ex C E, minor est quadrato ex B D. Dico igitur numerum, ex quadrato sub A B, B C, una cum quadrato ex C E compositum, quadratum non esse.

Vel quod perinde est, si factus sub A B, B C et quadratus ex C E compositi efficiant numerum M, dico M non esse quadratum. Propter æquales A D, D C, major

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . B

M 160.

N ——

erit A E quam E C. Majori igitur A E auferatur E G, minori E C æqualis. Et cum E A major sit quam E G, addito communi B E, major erit B A quam B G. Factus igitur ex A B, B C facto ex G B, B C major. Et quadrato

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . B
M 160.
N ——

ex C E communiter addito, qui componitur ex facto sub A B, B C una cum quadrato ex C E major erit eo, qui componitur ex facto sub G B, B C una cum quadrato ex C E. Sed composito ex prioribus æqualis est numerus M; ex alteris composito, quadratus ex B E [p]. Numerus igitur M quadrato ex B E major erit. Idem vero numerus M, ex facto utique sub A B, B C una cum quadrato C E compositus, quadrato ex B D, ex supra ostensis, minor. Jam vero si quadratus sit numerus M, numerus aliquis seipsum multiplicans illum M fecerit. Sit igitur N numerus, qui, seipsum multiplicans, illum M fecit. Et cum quadratus M quadrato ex B E major, quadrato autem ex B D minor sit, quadrati autem majores ex majoribus necessario fiant; omnino numerus N, ex quo factus est quadratus M, numero B E major, numero autem B D minor erit. Quod est absurdum. Non datur enim numerus minor quam B D, qui major idem sit quam B E. Quando ipsi B D, B E unitate differunt. Non est igitur quadratus M. Inventi sunt igitur quadrati duo, nempe quadratus sub A B, B C factus, et quadratus ex C E, qui compositi non quadratum efficiunt.

[p] 6. secundi.

[XXX.] PROP. XXX. PROBL.

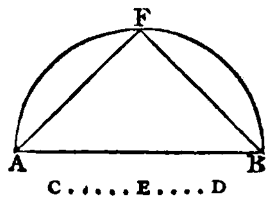
Invenire duas rationales, potentiâ solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur rationalis quædam A B, et duo quadrati numeri C D, D E, ita ut ipsorum excessus C E non sit quadratus [q]: describatur autem super rectam lineam A B semicirculus A F B, fiatque ut D C ad C E, ita ex A B quadratum ad quadratum ex A F [r]; et F B jungatur.

[q] Cor. Lem. 4.

[r] Cor. 6. hujus.

Quoniam igitur est ut quadratum ex B A ad quadratum ex A F, ita D C ad C E; habebit quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem eam, quam numerus D C ad C E numerum. Ergo quadratum ex B A quadrato ex A F est commensurabile.



C . . . . . E . . . . D

ſurabile[s]. Sed rationale eſt quadratum ex A B[t]: ergo et quadratum ex A F rationale erit[u]; ac propterea recta linea A F eſt rationalis[x]. Et quoniam D C ad C E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum[y], neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt recta linea B A ipſi A F longitudine[z]: ergo A B, A F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles[a]. Quod cum ſit ut D C ad C E, ita quadratum ex B A ad quadratum ex F A; erit per converſionem rationis ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F[b]. Sed C D ad D E rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ob id recta linea A B ipſi B F longitudine eſt commenſurabilis[z]. Atque eſt quadratum ex A B æquale quadratis ex A F, F B: ergo A B plus poteſt quam A F, quadrato rectæ lineæ B F ſibi commenſurabilis longitudine.

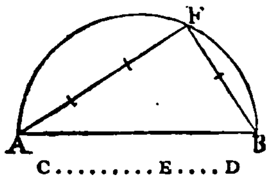
[s] 6. hujus. [t] Def. 8. hujus. [u] Def. 9. hujus. [x] Def. 6. hujus. [y] Per conſtruct. [z] 9. hujus. [a] Def. 3. hujus. [b] Cor. 19. quinti, & 47. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles B A, A F, ita ut major B A plus poteſt quam minor A F, quadrato ipſius F B, ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

Invenire duas rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur rationalis A B, et duo numeri quadrati C E, E D, ita ut C D, qui ex ipſis componitur, non ſit quadratus[c]; atque ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B deſcribatur, et fiat ut D C ad C E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex A F[d], et jungatur F B. Similiter quidem oſtendemus, ut in antecedente, A B, A F rationales eſſe potentiâ ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt ut D C ad C E, ita quadratum ex B A ad id quod ex A F quadratum; erit per converſionem rationis



[c] Lemma 5. hujus. [d] Cor. 6. hujus.

 ut

ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F. Sed C D ad D E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum [f]. Non igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo A B ipsi B F longitudine est incommensurabilis [g]. Et A B plus potest quam A F quadrato rectæ lineæ F B, sibi longitudine incommensurabilis. *Q. E. F.*

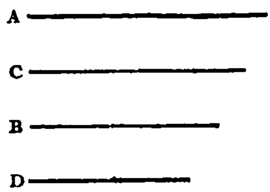
[f] Per construct.

[g] 9. hujus.

[XXXII.]

PROP. XXXII. PROBL.

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



Exponantur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, ita ut A major plus possit quam B minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [h]. Et sit rectangulo sub A, B æquale quadratum, quod sit a rectâ lineâ C. Media igitur est recta C [i]. Quadrato vero, quod sit ex B, æquale sit rectangulum sub C, D; rationale autem est quod ex B: ergo et rectangulum sub C, D est rationale. Et quoniam est ut A ad B, ita rectangulum sub A, B ad quadratum ex B; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex C, quadrato autem ex B æquale rectangulum sub C, D [k]: erit ut A ad B, ita quadratum ex C ad rectangulum sub C, D. Sed ut quadratum ex C ad rectangulum C, D, ita recta linea C ad ipsam D: ut igitur A ad B, ita C ad D. Commensurabilis autem est A ipsi B potentiâ solum: ergo et C ipsi D potentiâ solum est commensurabilis [l]. Atque est C media: media igitur est et D [m]. Et quoniam est ut A ad B, ita C ad D, et A plus potest quam B quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et C plus poterit quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [n].

[h] 30. hujus.

[i] 22. hujus.

[k] Per construct.

[l] 10. hujus.

[m] 24. hujus.

[n] 15. hujus.

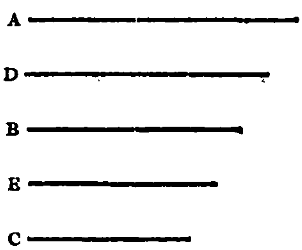
Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles C, D, quæ rationale continent, et C plus potest quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. *Q. E. F.*

Similiter

Similiter autem ostendetur, inveniri posse duas medias, potentiâ solum commensurabiles, et continentes rationale, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine. Id enim efficietur, si A plus possit quam B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

PROP. XXXIII. PROBL. [XXXIII.]

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



Exponantur tres rationales A, B, C potentiâ solum commensurabiles, quarum A plus possit quam C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; et sit rectangulo sub ipsis A, B æquale quadratum, quod sit ex D[s]. Itaque recta linea D media[t]. Rectangulo autem sub B, C æquale sit rectangulum sub D, E[u]. Quoniam igitur est ut rectangulum sub A, B ad rectangulum sub B, C, ita recta linea A ad ipsam C[x]; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quod fit ex D quadratum, rectangulo autem sub B, C æquale rectangulum sub D, E; erit ut A ad C, ita quadratum ex D ad rectangulum sub D, E. Sed ut quadratum ex D ad rectangulum sub D, E, ita D ad E[x]; et igitur ut A ad C, ita D ad E. Commensurabilis autem est A ipsi C potentiâ solum[y]: ergo et D ipsi E potentiâ solum est commensurabilis[z]. Atqui est D media: media igitur est et E[a]. Itaque quoniam est ut A ad C, ita D ad E, et A plus potest quam C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; et D plus poterit quam E quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[b]. Dico præterea rectangulum sub D, E medium esse. Quoniam enim rectangulo sub B, C æquale est rectangulum sub D, E[y]; medium autem est quod sub B, C[c]: ergo et quod sub D, E medium erit.

[s] 14. secundi.
[t] 22. hujus.
[u] 45. primi.
[x] 1. sexti.
[y] Per constr.
[z] 10. hujus.
[a] 24. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 22. & Def. 12. hujus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles D, E, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

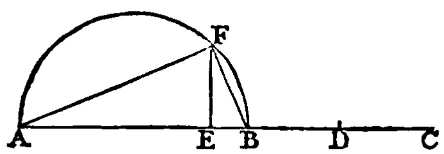
Rurſus ſimiliter oſtenditur, quomodo inveniantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles et medium continentes, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Id enim efficietur, ſi A plus poſſit quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, ita ut major A B plus poſſit quam minor B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incom-



[e] 31. hujus. menſurabilis [e]; et recta B C ſecta ſit bifariam ad D; et quadrato, quod fit ab alterutrâ ipſarum B D, D C, æquale parallelogrammum ad rectam lineam A B applicetur, de-
[f] 28. ſexti. ficiens figurâ quadratâ [f], et ſit quod continetur ſub A E, E B; et deſcribatur ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B, ducaturque ipſi A B ad rectos angulos E F; et A F, F B jungantur: quæ, propter ſemicirculum, angu-
[g] 31. tertii. lum A F B rectum continebunt [g].

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ A B, B C inæquales ſunt, et A B plus poteſt quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori B C, hoc eſt, quadrato dimidiæ ipſius, æquale parallelogrammum applicatum eſt ad A B, deficiens figurâ quadratâ, quod quidem ſub A E, E B
[h] 19. hujus. continetur; erit A E ipſi E B incommenſurabilis [h]. Et quoniam eſt ut A E ad E B, ita rectangulum ſub B A,
[i] 1. ſexti. A E ad rectangulum ſub A B, B E [i]; rectangulum autem ſub A B, A E, quadrato ex A F eſt æquale, et rectangulum ſub

ſub A B, B E æquale quadrato ex B F[k]; quadratum igitur ex A F incommenſurabile eſt quadrato ex F B: ideoque rectæ lineæ A F, F B potentiâ ſunt incommenſurabiles. Et quoniam A B rationalis eſt, et quadratum, quod fit ex A B, erit rationale: ergo et rationale compoſitum ex quadratis ipſarum A F, F B. Nimirum cum ex quadratis illis compoſitum ſit quadratum ipſum ex A B[l]. Rurſus, quoniam rectangulum ſub A E, E B eſt æquale quadrato ex E F[k], ponitur autem rectangulum ſub A E, E B quadrato etiam ex B D æquale: ergo F E eſt æqualis B D: ac propterea B C ipſius E F eſt dupla. Rectangulum igitur ſub A B, B C duplum eſt rectanguli ſub A B, E F[m]. Sed rectangulum ſub A B, B C eſt medium[n]: ergo et medium eſt, quod continetur ſub A B, E F. Eſt autem quod ſub A B, E F continetur æquale contento ſub A F, F B[o]. Nimirum cum utrumque trianguli A F B duplum ſit[p]. Contentum igitur ſub A F, F B medium eſt. Sed et oſtenſum eſt, rationale eſſe quod componitur ex ipſarum quadratis.

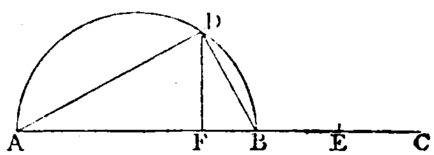
[k] Cor. 8. ſexti.
[l] 47. primi.
[m] 1. ſexti.
[n] 22. & Def. 12. hujus.
[o] Ax. 6. primi.
[p] 41. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A F, F B, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium. *Q. E. F.*

PROP. XXXV. PROBL. [XXXV.]

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale.

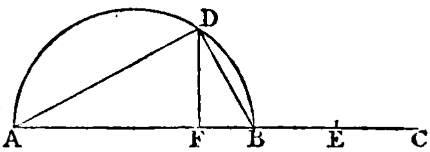
Exponantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ rationale contineant, ita ut A B plus poſſit quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longi-



tudine incommenſurabilis[q]; et ſuper ipſam A B, deſcribatur ſemicirculus A D B, ſeceturque B C bifariam in E; et applicetur ad A B parallelogrammum æquale quadrato ipſius B E, deficiens figurâ quadratâ[r], et ſit quod

[q] 32. hujus.
[r] 28. ſexti

 continetur



continetur ſub A F, F B. Incommenſurabilis igitur eſt A F ipſi F B longitudine[u]. A puncto autem F ipſi A B ad rectos angulos ducatur F D, et A D, D B jungantur: quæ, propter ſemicirculum, angulum A D B, rectum continebunt.

[u] 19. hujus.

Itaque quoniam A F eſt incommenſurabilis ipſi F B, erit et rectangulum ſub B A, A F rectangulo ſub A B, B F incommenſurabile[x]. Eſt autem rectangulum quidem ſub B A, A F quadrato ipſius A D æquale; rectangulum vero ſub A B, B F æquale quadrato ipſius D B[y]. Incommenſurabile igitur eſt quadratum ex A D ipſius D B quadrato; ac propterea rectæ lineæ A D, D B potentiâ ſunt incommenſurabiles. Et quoniam eſt medium quadratum ipſius A B, erit et compoſitum ex quadratis ipſarum A D, D B medium. Nimirum cum ex quadratis illis compoſitum ſit quadratum ipſum ex A B[z]. Quod cum dupla ſit B C ipſius D F, et rectangulum ſub A B, B C rectanguli ſub A B, F D duplum erit[a]: quare et commenſurabile. Rationale autem eſt rectangulum ſub A B, B C, ita enim ponitur: ergo et rectangulum ſub A B, F D eſt rationale. Sed rectangulo ſub A B, F D æquale eſt rectangulum ſub A D, D B: nimirum cum utrumque trianguli A D B duplum ſit[b]. Quare et ipſum ſub A D, D B rectangulum rationale erit.

[x] 1. ſexti. & 10. hujus.
[y] Cor. 8. ſexti.
[z] 47. primi.
[a] 1. ſexti.
[b] 41. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A D, D B, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, rationale. *Q. E. F.*

[XXXVI.]

PROP. XXXVI. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant et compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ medium contineant, ita ut A B plus poſſit quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine

dine incommensurabilis [b]; et super A B semicirculus A D B [b] describatur, et reliqua fiant, ut in iis quæ superius dicta sunt. [b] 33. hujus.

Quoniam igitur A F incommensurabilis est ipsi F B longitudine, erit et A D ipsi D B potentiâ incommensurabilis. Et quoniam medium est, quod fit ex A B, et compositum ex quadratis ipsarum D A, D B est medium. Quod cum rectangulum sub A F, F B æquale sit quadrato alterutrius ipsarum B E, D F, erit D F æqualis B E; ac propterea B C ipsius F D dupla. Rectangulum igitur sub A B, B C duplum est ejus, quod sub A B, F D continetur. Medium autem est rectangulum sub A B, B C [c]: ergo et quod continetur sub A B, F D est medium: atque est æquale contento sub A D, D B. Quare et ipsum sub A D, D B rectangulum medium erit. Et quoniam incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, commensurabilis autem C B ipsi B E; erit et A B ipsi B E longitudine incommensurabilis: ergo et quadratum ex A B incommensurabile est rectangulo sub A B, B E [d]. Sed quadrato quidem ex A B æqualia sunt quæ ex A D, D B sunt quadrata; rectangulo autem sub A B, B E æquale est rectangulum sub A B, F D, hoc est, rectangulum sub A D, D B. Compositum igitur ex quadratis ipsarum A D, D B rectangulo sub A D, D B est incommensurabile. [c] ex hyp. [d] 1. sexti. & 10. hujus.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. *Q. E. F.*

Principium

Principium Senariorum per Compositionem.

SCHOLION.*

Monitos Tyrones velim non omnia, quæ Junioribus sermone Algebraico Surdorum nomine veniunt, apud Veteres ἄλογα, Latinè irrationalia, nuncupari. Etenim illi rectas omnes, quæ expositæ cuidam ῥητῇ, id est, rationali, seu effabili potius, sive longitudine sive potentiâ tantum, commensurabiles essent, ῥητὰς seu effabiles statuerunt: cum nobis surdæ sint, quæcunque ipsi expositæ non sunt ipsâ longitudine commensurabiles. Quæ vero tam potentiâ quam longitudine incommensurabiles essent, eas demum Veteres ἀλόγους, seu irrationales, vocarunt. Quæcunque igitur illis irrationalia, nobis omnino surda sunt. Haud item quæ nobis surda, ea omnia Veteribus irrationalia. Nobis scilicet surda est radix quadratica binarii; $\sqrt{2}$. Veteribus, effabilis. Vel ut magis geometrice loquamur, positâ a effabili, illa quæ potest $2 . a^2$, sive $\sqrt{2} \times a$, nobis surda, illis effabilis. Quæ vero duabus a, $\sqrt{2} \times a$ proportione media est, cum nobis surda tum illis quoque irrationalis. Quadrati diagoniam, posito latere effabili, nos surdam habemus, quanquam Veteribus effabilem. At si lateri et diagoniæ capiatur proportione media, ea cum nobis surda tum Veteribus irrationalis. Cum igitur in sequentibus hujusmodi binomia $a + \sqrt{2} . a$, irrationalia esse Euclides statuit, hoc scilicet intelligi vult, ad simplices radices quadraticas talia non posse revocari.

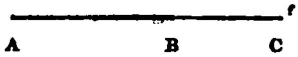
[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

Si duæ rationales, potentiâ solum commensurabiles, componantur, tota irrationalis erit; vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A B, B C: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles sunt; et ut A B ad B C, ita rectangulum sub A B, B C ad id quod fit

fit ex B C quadratum [e]: erit rectangulum sub A B, B C [e] 1. sexti.
quadrato ex B C incommensurabile [f]. Sed rectangulo [f] 10. hujus.



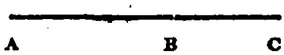
quidem sub A B, B C commensurabile est id quod bis sub A B, B C continetur [g]; quadrato autem ex B C com- [g] 6. hujus.
mensurabilia sunt quadrata ex A B, B C [h]. Quod igitur [h] 16. hujus.
bis sub A B, B C continetur, incommensurabile est quadratis ex A B, B C; et componendo, quod bis sub A B, B C continetur una cum quadratis ex A B, B C, hoc est quadratum ex A C [l], incommensurabile est composito ex [l] 4. secundi.
ipsarum A B, B C quadratis. Rationale autem est compositum ex quadratis ipsarum A B, B C. Ergo quadratum ex A C irrationale est; et ob id recta linea A C est irrationalis: vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXXVIII.]

Si duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles A B, B C, quæ rationale contineant: dico totam A C irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, et quadrata ex A B, B C incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur [k]. Ergo [k] 13. hujus.



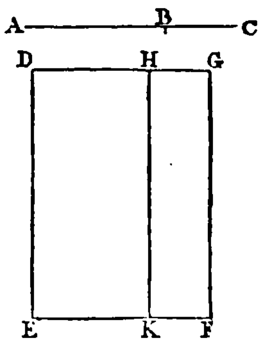
componendo, quadrata ex A B, B C, una cum eo quod bis sub A B, B C continetur, quod est ipsius A C quadratum [l], incommensurabile est rectangulo sub A B, B C. [l] 4. secundi.
Sed rectangulum rationale ponitur. Ergo quadratum ex A C irrationale est: igitur et recta linea A C irrationalis: vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. THEOR. [XXXIX.]

Si duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis secunda.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles, A B, B C, quæ medium contineant: dico A C irrationalem esse.

Exponatur



Exponatur rationalis D E, et quadrato ex A C æquale parallelogrammum rectangulum D F ad ipsam D E applicetur, latitudinem faciens D G [m]. Itaque quoniam quadratum ex A C æquale est quadratis ex A B, B C et rectangulo quod bis sub A B, B C continetur [n]; applicetur ad ipsam D E quadratis ex A B, B C, æquale parallelogrammum rectangulum E H. Reliquum igitur F H æquale est ei, quod bis sub A B, B C continetur. Et quoniam media est utraque ipsarum A B, B C, erunt et quadrata ex A B, B C media. Medium autem ponitur et quod bis continetur sub A B, B C; atque est quadratis quidem ex A B, B C æquale parallelogrammum E H, rectangulo autem bis sub A B, B C contento æquale est ipsum H F. Medium igitur est utrumque ipsorum E H, H F, et ad rationalem D E applicantur: ergo utraque recta linea D H, H G est rationalis, et ipsi D E longitudine incommensurabilis [o]. Et quoniam incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, atque est ut A B ad B C, ita quadratum ex A B ad rectangulum sub A B, B C [p]; erit quadrato ex A B rectangulum sub A B, B C incommensurabile [q]. Sed quadrato quidem ex A B commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum A B, B C; rectangulo autem sub A B, B C est commensurabile, quod bis sub A B, B C continetur [r]: ergo compositum ex quadratis ipsarum A B, B C incommensurabile erit ei, quod bis continetur sub A B, B C [s]. Sed quadratis ex A B, B C æquale est parallelogrammum E H, et rectangulo quod bis sub A B, B C continetur æquale H F parallelogrammum [t]. Quare E H ipsi H F est incommensurabile; et ob id recta linea D H ipsi H G incommensurabilis longitudine. Ostensæ autem sunt rationales: ergo D H, H G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est irrationalis [u]. Spatium igitur D F est irrationale. Nam si rationale esset, propter D E rationalem, talis enim ponitur, rationalis etiam esset D G [x]. Irrationale igitur est spatium D F, et ideo quæ ipsum potest est irrationalis. Potest autem ipsum D F recta linea A C [t]: ergo A C irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis secunda.

[m] 45. primi.
[n] 4. secundi.
[o] 23. hujus.
[p] 1. sexti.
[q] 10. hujus.
[r] ex hyp.
[s] 14. hujus.
[t] Per construct.
[u] 37. hujus.
[x] 21. hujus.

Cor.

Cor. * Quod sub rationali et irrationali continetur rectangulum irrationale est.

PROP. XL. THEOR. [XL.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; tota recta linea irrationalis erit: vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim id, quod sub A B, B C continetur, medium est; et quod bis continetur sub A B, B C medium erit [x]: quapropter et irrationale [y]. Compositum autem ex ipsarum A B, B C quadratis est rationale: ergo quod bis sub A B, B C continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum A B, B C; et ob id quadrata ex A B, B C unà cum eo, quod bis sub A B, B C continetur, quod est quadratum ex A C [z], incommensurabile est quadratis ex A B, B C [a]. Rationale autem est compositum ex quadratis A B, B C [b]. Ergo quadratum ex A C irrationale erit; ac propterea recta linea A C est irrationalis, vocetur autem major.

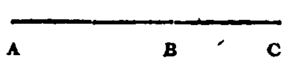
[x] Cor. 24. hujus.
[y] 22. hujus. & Def. 12.
[z] 4. secundi.
[a] 17. hujus.
[b] ex hyp.

PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis sub A B, B C continetur rationale: erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis incommensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur: quare componendo quadratum ex A C, est incommensurabile ei, quod bis continetur sub A B, B C [c]. Est autem rationale, quod bis sub A B, B C continetur: quadratum



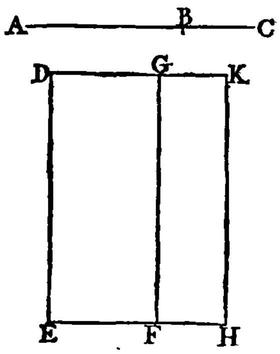
[c] 17. hujus.

quadratum igitur ex A C irrationale eſt. Ideoque recta linea A C eſt irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

[XLII.] PROP. XLII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium; et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A B, B C, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum A B, B C quadratis: dico A C irrationalem eſſe.



Exponatur enim rationalis D E, et ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum D F æquale quadratis ipſarum A B, B C, et parallelogrammum G H æquale ei, quod bis ſub A B, B C continetur[e]. Totum igitur D H quadrato ipſius A C eſt æquale[f]. Et quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C, et æquale parallelogrammo D F; erit ipſum quoque D F medium, et ad rationalem D E applicatum eſt. Rationalis igitur eſt D G, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis[g]. Ob eandem cauſam et G K eſt rationalis, et incommenſurabilis longitudine ipſi F G, hoc eſt, ipſi D E. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur; erit et parallelogrammum D F ipſi H G incommenſurabile: ergo et recta linea D G incommenſurabilis eſt ipſi G K[h]. Et ſunt rationales: quare D G, G K rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D K eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur[i]. Rationalis autem D E: ergo parallelogrammum D H irrationale eſt[k], et ipſum

[e] 45. primi.
[f] 4. ſecundi.
[g] 23. hujus.
[h] 1. ſexti. & 10. hujus.
[i] 37. hujus.
[k] Cor. 39. hujus.

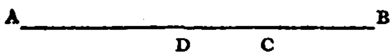
sum potens irrationalis. Sed ipsum D H potest recta linea A C[n]; quare A C irrationalis est, vocetur autem bina media potens. [n] Per construct.

Cor. * Omnis divisio rectæ in nomina fit extra punctum divisionis mediæ.

PROP. XLIII. THEOR. [XLIII.]

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B divisa in nomina ad punctum C: ergo A C, C B rationales sunt potentiâ solum



commensurabiles. Dico A B ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.

Si enim fieri potest, dividatur in D, ita ut A D, D B rationales sint potentiâ solum commensurabiles. Manifestum est rectam A B, in utroque puncto C, D inæqualiter dividi. Haud enim potentiâ tantum commensurabilia essent segmenta, si in æqualia divisio fieret. Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipsarum A D, D B quadratis, hôc differt et quod bis sub A D, D B continetur ab eo, quod bis continetur sub A C, C B; quoniam et quadrata rectarum linearum A C, C B, unà cum eo, quod bis continetur sub A C, C B, et quadrata ipsarum A D, D B, unà cum eo quod bis sub A D, D B continetur, æqualia sunt quadrato ipsius A B[o]. [o] 4. secundi. Sed quadrata ipsarum A C, C B a quadratis ipsarum A D, D B differunt rationali, etenim rationalia utraque sunt: ergo et quod bis sub A D, D B continetur a contento bis sub A C, C B differt rationali; cum ipsa media sint. Atqui medium non superat medium rationali[p]. Non igitur quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. [p] 27. hujus. *Q. E. D.*

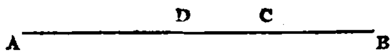
PROP. XLIV. THEOR. [XLIV.]

Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis prima A B divisa in puncto C, ita ut A C, C B mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur etiam in D, ita ut A D,

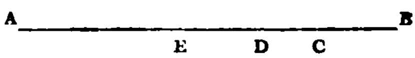
D B



D B fint mediæ potentiâ folùm commenfurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis fub A D, D B ab eo, quod bis fub A C, C B continetur, hôc differunt etiam quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipfarum A D, D B quadratis; rationali autem differt contentum bis fub A D, D B ab eo, quod bis fub A C, C B continetur, utraque enim funt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipfarum A C, C B a quadratis ipfarum A D, D B, exiftentia utra-
[q] 27. hujus. que media. Illud autem fieri non poteft [q]. Non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur neceffe eft. *Q. E. D.*

* LEMMA VI.

Recta quævis linea A B, in punctis C, D utcunque fecetur; ita tamen ut in neutro media dividatur. Segmentorum inæqualium A C, C B fit A C majus. Inæ-



qualium item A D, D B fit A D majus. Denique duorum A C, A D fit A C majus. Dico quadrata ex A C, C B fimul fumpta quadratis ex A D, D B fimul fumptis effe majora.

Media enim dividatur recta A B puncto E. Jam cum
[r] ex hyp. recta A C major eft quam A D [r], ablatâ communi A E, erit E C major quam E D, et quadratum ex E C quadrato ex E D majus. Illud igitur, quo quadratum ex E B fuperat quadratum ex E C, minus erit illo quo quadratum idem ex E B fuperat quadratum ex E D. Sed rectangulum fub A C, C B illud eft, quo quadratum ex E B fuperat quadratum ex E C; et rectangulum fub A D, D B illud eft, quo quadratum idem ex E B fuperat quadratum
[s] 5. fecundi. ex E D [s]. Rectangulum igitur fub A C, C B rectangulo fub A D, D B minus. Quapropter et duplum rectanguli fub A C, C B duplo rectanguli fub A D, D B minus erit. Illud igitur quo quadratum ex A B fuperat duplum rectanguli fub A C, C B majus erit illo, quo quadratum idem ex A B fuperat duplum rectanguli fub A D, D B. Sed quadratum ex A B fuperat duplum rectanguli fub A C, C B quadratis ex A C, C B fimul fumptis; et quadratum

dratum idem ex A B ſuperat duplum rectanguli ſub A D, D B, quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis [t]. Quadrata igitur ex A C, C B ſimul ſumpta quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis ſunt majora. *Q. E. D.* [t] 4. ſecundi.

Cor. * Iiſdem poſitis, dico quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B majora eſſe.

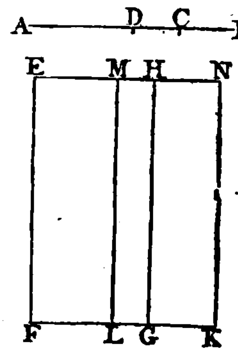
Nam quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo quadrati ex E B ſunt majora [u]. Sed rectangulum ſub A C, C B quadrato ex E B minus eſt [x]. Quare et duplum rectanguli ſub A C, C B duplo quadrati ex E B minus. Quadrata igitur ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B multo ſunt majora. Pari ratione quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A D, D B ſunt majora. [u] 9. ſecundi. [x] 5. ſecundi.

PROP. XLV. THEOR. [XLV.]

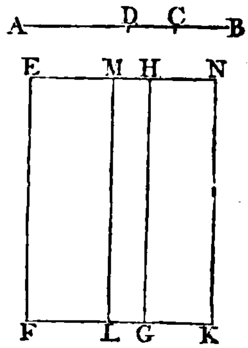
Quæ ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis ſecunda A B diviſa in nomina in puncto C; ita ut A C, C B mediæ ſint, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Dico ipſam A B in alio puncto præter C, in nomina non dividi.

Dividatur enim, ſi fieri poteſt, in alio puncto D, ita ut A D, D B mediæ ſint potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. Duarum autem A C, C B, neceſſario utique inæqualium, major ſit A C. Duarum item A D, D B, neceſſario inæqualium, major ſit A D. Duarum A C, A D inæqualium altera major erit. Sit A C major. Conſtat igitur quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis eſſe majora [y]. Exponatur rationalis E F; et quadrato quidem ex A B æquale parallelogrammum E K ad ipſam E F applicetur; quadratis vero ex A C, C B æquale auferatur E G. Reliquum igitur H K æquale eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur [z]. Rurſus, quadratis ex A D, D B, quæ minora ſunt quadratis ex A C, C B, ut oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur [y] Lemma 6. [z] 4. ſecundi.



E L: ergo reliquum M K est æquale ei, quod bis continetur sub A D, D B. Et quoniam media sunt et commensurabilia quæ ex A C, C B quadrata, erit E G medium; et ad rationalem E F applicatum est: quare E H rationalis est, et ipsi E F longitudine



t 23. hujus. incommensurabilis [t]. Eâdem ratione et H N est rationalis, et ipsi E F incommensurabilis longitudine. Quod cum A C, C B mediæ sint potentiâ solum commensurabiles; erit A C ipsi C B incommensurabilis longitudine. Ut autem A C ad C B, ita quadratum ex
u 1. sexti. A C ad id quod sub A C, C B continetur [u]: quadratum igitur ex A C incommensurabile est ei, quod contine-
x 10. hujus. tur sub A C, C B [x]. Sed quadrato quidem ex A C commensurabilia sunt quadrata ex A C, C B, etenim A C, C B
y 16. hujus. potentiâ sunt commensurabiles [y]; ei vero quod continetur sub A C, C B commensurabile est illud, quod bis sub A C, C B continetur. Ergo et quadrata ex A C, C B incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A C, C B continetur. Quadratis autem ex A C, C B æquale est parallelogrammum E G, et ei quod bis continetur sub A C, C B æquale est H K: ergo E G ipsi H K est incommensurabile; et ob id recta linea E H ipsi H N incommensurabilis longitudine, suntque rationales: ergo E H, H N rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solum commensurabiles componantur; tota irrationalis est, quæ ex binis
z 37. hujus. nominibus appellatur [z]: quare E N ex binis nominibus est divisa in puncto H. Eâdem ratione et E M, M N ostendentur rationales potentiâ solum commensurabiles. Diversa autem erunt puncta M et H. Rectangulum enim E G, quod quadratis ex A C, C B factum est æquale, majus erit rectangulo E L, quadratis ex A D, D B æquali; ac propterea rectæ E M, E H inæquales. Recta igitur E N ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum divisa erit in nomina, videlicet ad H et
a 43. hujus. ad M. Quod fieri nequit [a]; nisi forte E N ita sit divisa in punctis illis, ut segmenta alternè sint æqualia: nempe ut E M æquale sit ipsi H N, et N M ipsi E H. Hoc autem fieri

fieri nequit. Nam ſi fiat, rectangulum E L æquale erit rectangulo H K. Sed rectangulum E L æquale eſt quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis, et rectangulum H K duplum eſt rectanguli ſub A C, C B[b]. Quare quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B erunt æqualia. Quod eſt abſurdum. Cum quadrata duplo rectanguli ſunt majora[c]. Recta igitur ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina. *Q. E. D.*

[b] ex conſtruct.
[c] Cor. Lem. 6.

PROP. XLVI. THEOR. [XLVI.]

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit major A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D, ita ut A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem

ſub ipſis continetur medium. Et quoniam quo differunt quadrata ex A C, C B a quadratis ex A D, D B; hoc differt et id, quod bis continetur ſub A D, D B, ab eo, quod bis ſub A C, C B continetur[b]; ſed quadrata ex A C, C B ſuperant quadrata ex A D, D B rationali, etenim utraque rationalia ſunt: ergo quod bis continetur ſub A D, D B rationali ſuperat id, quod bis ſub A C, C B continetur; quod eſt impoſſibile, cum media ſint[c]. Non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur in nomina. Ergo ad idem duntaxat dividatur neceſſe eſt. *Q. E. D.*

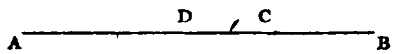
[b] 4. ſecundi.
[c] 27. hujus.

PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit rationale ac medium potens A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D; ita ut etiam A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub



ipſis continetur rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum ſub A D, D B ab eo, quod bis ſub A C, C B continetur, hoc differunt et quadrata ex A C, C B a quadratis ex A D, D B [d]; rectangulum autem bis contentum ſub A D, D B rationali ſuperat id, quod bis ſub A C, C B continetur: ergo et quadrata ex A C, C B ſuperant quadrata ex A D, D B rationali; quod eſt impoſſibile; cum media ſint [e]. Non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

[d] 4. ſecundi.
[e] 27. hujus.

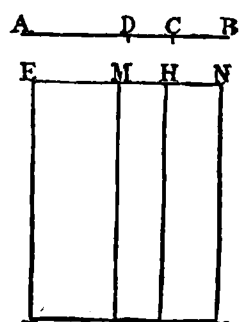
[XLVIII.]

PROP. XLVIII. THEOR.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit bina media potens A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis medium; et quod ſub ipſis continetur medium; et adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile rectangulo ſub ipſis: dico A B ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D; ita ut A D, D B potentiâ ſint incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et rectangulum ſub ipſis medium, et compoſito ex quadratis incommenſurabile. Duarum autem A C, C B, neceſſario inæqualium, major ſit A C. Duarum item A D, D B major A D. Duarum denique A C, A D ſit major A C. Exponaturque rationalis E F, et ad ipſam E F quadratis quidem ex A C, C B æquale parallelogrammum E G applicetur; rectangulo autem bis con-



tento

tento ſub A C, C B æquale applicetur H K. Totum igitur E K eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato[f]. Rurſus ad E F applicetur parallelogrammum E L æquale quadratis ex A D, D B: ergo reliquum quod bis ſub A D, D B continetur reliquo M K eſt æquale[f]. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B medium ponitur; erit et parallelogrammum E G medium; et ad rationalem E F applicatum eſt. Rationalis igitur eſt H E, et ipſi E F longitudine incommenſurabilis[g]. Eâdem ratione et H N eſt rationalis, ipſique E F incommenſurabilis longitudine. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur[h], erit et parallelogrammum E G ipſi H K incommenſurabile: ergo et recta linea E H incommenſurabilis eſt rectæ H N[i]. Et ſunt rationales: quare E H, H N rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id E N ex binis nominibus eſt, diviſa in puncto H. Similiter oſtendemus ipſam in puncto quoque M dividi. Diverſa autem eſſe puncta M, H eodem modo quo in Prop. xlv. oſtendamus: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur; quod eſt abſurdum[k]. Non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

[f] 4. ſecundi.
[g] 23. hujus.
[h] ex hyp.
[i] 10. hujus.
[k] 43. hujus.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Definitio I.

Expoſitâ rationali, et ex binis nominibus quâdam, cujus majus nomen plus poſſit quam minus quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, in nomina diviſâ: ſi quidem majus nomen expoſitæ rationali commenſurabile ſit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

II.

Si vero minus nomen expoſitæ rationali longitudine ſit commenſurabile, dicatur ex binis nominibus ſecunda.

III.

Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

IV.

Rursus si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

V.

Si vero minus, dicatur quinta.

VI.

Quod si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLION.*

Literis a, b, c, &c. significentur rectæ lineæ rationales, expositæ cuidam ῥητῇ, literâ ρ significandæ, longitudine commensurabiles. Literis autem m, n, p, &c. significentur numeri, qui neque quadrati sint, neque quadratorum numerorum inter se rationes habeant.

His positis, quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, rationalis est; ipsi ρ, et aliis a, c, &c. potentiâ tantum commensurabilis. Et si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi significatæ, $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, $\sqrt{\frac{p}{q}}\, a$, inter se etiam potentiâ, sed potentiâ solum, commensurabiles erunt; nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, numerorum inter se rationem gerant. Quod si evenerit, rectæ longitudine inter se commensurabiles erunt, quamquam utraque ipsi ρ potentiâ tantum. Ut si m sit 8; n, 3; p, 27; q, 2. Ita enim $\sqrt{\frac{m}{n}} : \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{8 \times 2} : \sqrt{27 \times 3} = 4 : 9$. Quare $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b : \sqrt{\frac{p}{q}}\, a = 4\,b : 9\,a$. Et cum b, a rationales sint longitudine commensurabiles, et $4\,b$ longitudine

gitudine commensurabilis sit ipsi b, necnon $9\,a$ ipsi a; omnino erunt $4\,b$, $9\,a$ longitudine commensurabiles.

2. Quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\,b$, vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, irrationalis est, sed media. Recta enim $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\,.\,b$ potest spatium $\sqrt{\frac{m}{n}}\,.\,b^2$ sive rectangulum sub rectis $\sqrt{\frac{m}{n}}\,b$, et b : quæ rectæ rationales sunt, potentiâ tantum commensurabiles. Quod si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi significatæ, $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\,b$, $\sqrt[4]{\frac{p}{q}}\,a$, etiam inter se potentiâ erunt incommensurabiles. Nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, in se quisque multiplicati, faciant qui numerorum inter se rationem habeant. Hoc est, nisi $\sqrt{\frac{m}{n}}$ sit ad $\sqrt{\frac{p}{q}}$, ut numerus ad numerum. Quod si evenerit, rectæ illæ inter se potentiâ commensurabiles erunt, quamquam ipsi ρ utraque incommensurabilis. Quod si ipsi duarum coefficientes sub signo radicali numerorum inter se rationem habeant; rectæ vel longitudine inter se commensurabiles, quamquam τῇ ρ nedum potentiâ.

Porro ut binominales Euclidæas Algebraice sistamus, literis a, b, c, &c. m, n, p, q quæ prius designantibus, per literas Græcas μ, ν, π, σ, &c. significentur numeri quilibet quadrati.

Et primum, rectæ $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a$, $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{4}} a$ mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ rationale continent. Prop. xxviii.

2. Rectæ $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a$, $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{4}} a$ mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continent. Prop. xxix.

3. Numerorum ν, μ sit major ν. Numerus autem $\nu - \mu$ non sit quadratus, cum ipsi ν, μ sint quadrati.

Rectæ a, $\overline{\left.\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|}^{\frac{1}{2}}a$, rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles; major autem a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine commensurabilis erit. Prop. xxx.

4. Numerus $\nu+\mu$, ex quadratis ν, μ compositus, non sit quadratus. Rectæ a, $\overline{\left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|}^{\frac{1}{2}}a$, rationales erunt, potentiâ tantum commensurabiles; quarum major a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxi.

5. Posito rursus numero $\nu-\mu$ non quadrato, existentibus ipsis ν, μ quadratis; rectæ $\overline{\left.\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|}^{\frac{1}{4}}a$, $\overline{\left.\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|}^{\frac{3}{4}}a$ mediæ erunt, potentiâ solum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major $\overline{\left.\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|}^{\frac{1}{4}}a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine commensurabilis erit. Prop. xxxii.

6. Posito numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|}^{\frac{1}{4}}a$, $\overline{\left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|}^{\frac{1}{4}}a$ mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxii.

7. Posito rursus numero $\nu-\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\left.\frac{m}{n}\right|}^{\frac{1}{4}}a$, $\overline{\left.\frac{m}{n}\right|}^{\frac{1}{4}}\times\overline{\left.\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|}^{\frac{1}{2}}a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, majori longitudine commensurabilis. Prop. xxxiii.

8. Posito autem numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\overline{\left.\frac{m}{n}\right|}^{\frac{1}{4}}a$, $\overline{\left.\frac{m}{n}\right|}^{\frac{1}{4}}\times\overline{\left.\frac{\nu}{\nu+\mu}\right|}^{\frac{1}{2}}a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ majori longitudine incommensurabilis. Prop. xxxiii.

9. Posito

9. Posito $\nu + \mu$ non quadrato, existentibus ν, μ quadratis; rectæ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}$ rectæ erunt potentiâ incommensurabiles, quæ compositum ex ipsarum quadratis rationale efficient, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium. Prop. xxxiv.

10. Rectæ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ potentiâ sunt incommensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. Prop. xxxv.

11. Rectæ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ rectæ sunt potentiâ incommensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum etiam, quod sub ipsis continetur, medium, et composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. Prop. xxxvi.

Ex hisce autem rectis, binas utique conjungendo, exoriuntur binomiorum series geminæ, quas ἑξάδας Euclides nominavit, pro variis scilicet rationum, si ita loqui liceat, speciebus, quas in binomiis suis sex diversas utraque complexa est.

Recensio Algebraica utriusque Ἑξάδος *per compositionem. Per compositionem autem sunt binomia, quorum nomina signo + conjuncta sunt.*

Series Prima.

I. Ex binis nominibus; $a + \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a + \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II

II. Ex binis mediis prima; $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a + \overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{3}{4}} a.$

III. Ex binis mediis fecunda; $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a + \overline{\frac{p}{q}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{n}{m}}\big|^{\frac{1}{4}} a.$

IV. Major; $\overline{\frac{1}{2}}\big|^{\frac{1}{2}} a \times \overline{\sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}\big|.$

V. Rationale ac medium potens; $\overline{\frac{1}{2}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\big|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}\big|.$

VI. Bina media potens; $\overline{\frac{1}{2}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1+\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}\big|.$

Series Secunda.

(Numerorum μ, ν fit ν major.)

I. Ex binis nominibus prima; $a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a.$

II. Ex binis nominibus fecunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a + a.$

III. Ex binis nominibus tertia; $\sqrt{\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}}\big| a + \sqrt{\overline{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}}\big| a.$

IV. Ex binis nominibus quarta; $a + \overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\big|^{\frac{1}{2}} a.$

V. Ex binis nominibus quinta; $\overline{\frac{\nu+\mu}{\nu}}\big|^{\frac{1}{2}} a + a.$

VI. Ex binis nominibus fexta; $\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\big|^{\frac{1}{2}} a + \overline{\frac{\pi}{\pi+\sigma}}\big|^{\frac{1}{2}} a;$

modo $\frac{\sigma\nu-\mu\pi}{\overline{\nu+\mu}\times\overline{\pi+\sigma}}$ non fit numerus quadratus, neque $\sigma\nu-\mu\pi$ ad $\overline{\nu+\mu}\times\overline{\pi+\sigma}$ numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

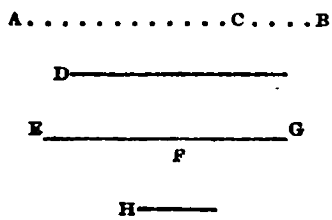
Hæc

Hæc quidem accuratius ediſſerenda ſuſcepimus, non quod lucis aliquid Euclidæis acceſſurum putaverimus, ſi Algebraice expoſita eſſent; quippe quæ, per ſe quam maximè perſpicua, caligine potius premuntur ſymbolorum involucris conveſtita: ſed e contrario, in mediis Algebræ tenebris Geometriæ facem accenſuri. Tum ut Algebræ cultores, ſi quando Euclidem forte evolvere velint, melius et facilius intelligant, ſubtiliſſima illa rationalium, irrationalium, mediarumque doctrina quorſum tendat; tum ut mirari inſtituantur eximiam illam ſive perſpicuitatem, ſive elegantiam, quâcum ille in hoc libro pertractavit, quæ illis, propriâ arte uſis, neglecto tanto præceptore et magiſtro, haud ſine ſudore et moleſtiâ calculis eruenda eſſent.

PROP. XLIX. PROBL. [XLIX.]

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponantur duo numeri quadrati A B, B C qui ipſo C A non quadrato differunt [m]. Et exponatur quædam rationalis D, et ipſi D longitudine commenſurabilis ſit E F: ergo E F eſt rationalis [n]. Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita ipſius E F quadratum ad quadratum F G [o]. Ergo quadratum ipſius E F ad quadratum ipſius F G rationem habebit, quam numerus ad numerum: commenſurabile igitur eſt quadratum ex E F quadrato ex F G [p] Atque eſt E F rationalis: ergo et rationalis F G. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E F ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo E F ipſi F G incommenſurabilis eſt longitudine [q]: et ob id E F, F G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles: igitur ex binis nominibus eſt E G [r]. Dico et primam eſſe.



[m] Cor. Lem. 4.

[n] Def. 6. hujus.

[o] Cor. 6. hujus.

[p] 6. hujus.

[q] 9. hujus.

[r] 37. hujus.

Quoniam enim eſt ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad id, quod ex F G, quadratum; major autem eſt B A quam A C: ergo et quadratum ex

E F

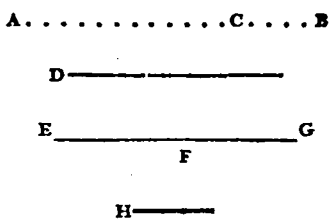
E F quadrato ex F G eſt majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H. Quoniam igitur eſt ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; erit per converſionem rationis ut A B ad B C, ita qua-
[s] Cor. 19. quinti. dratum ex E F ad quadratum ex H [s]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; et quadratum igitur ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quare E F ipſi H longitudine eſt
[t] 9. hujus. commenſurabilis [t]: ideoque E F plus poteſt quam F G quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Sunt autem E F, F G rationales, potentiâ tantum commenſurabiles; et majus nomen E F expoſitæ D longitu-
[u] Def. Secund. 1. hujus. dine eſt commenſurabile. Ergo E G ex binis nominibus eſt prima [u]. *Q. E. D.*

[L.]

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus ſecundam.

Exponantur duo numeri quadrati A B, B C, qui ipſo A C non quadrato diffe-
[x] Cor. Lem. 4. runt [x]. Et exponatur rationalis D, et ſit F G ipſi D longitudine commenſurabilis: ergo F G rationalis eſt. Fiatque ut C A numerus ad numerum A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex
[y] Cor. 6. hujus. F E [y]: commenſurabile



[z] 6. hujus. igitur eſt quadratum ex G F quadrato ex F E [z]: ergo et
[a] Def. 6. hujus. F E eſt rationalis [a]. Et quoniam C A numerus ad ipſum A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igi-
[b] 9. hujus. tur eſt G F ipſi F E longitudine [b]: quare E F, F G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propte-
[c] 37. hujus. rea ex binis nominibus eſt E G [c]. Oſtendendum eſt et ſecundam eſſe.

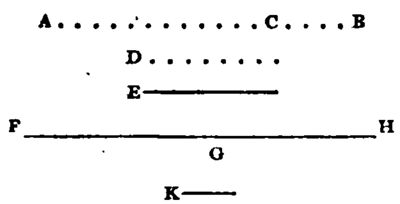
Quoniam enim invertendo eſt ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G, major autem eſt B A quam A C: ergo et quadratum ex E F quadrato ex F G eſt majus. Sint quadrato ex

ex E F æqualia quadrata ex F G, H : eſt igitur per converſionem rationis ut A B ad B C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex H [e]. Sed A B ad B C rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum : [e] Cor. 19. quinti.
ergo et quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; et ob id E F ipſi H longitudine eſt commenſurabilis [f]. Quare E F plus poteſt quam F G quadrato [f] 9. hujus.
rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Suntque rationales E F, F G potentiâ ſolum commenſurabiles, et F G minus nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi D expoſitæ rationali. Ergo E G eſt ex binis nominibus ſecunda [g]. *Q. E. D.* [g] Def. Secund. 2. hujus.

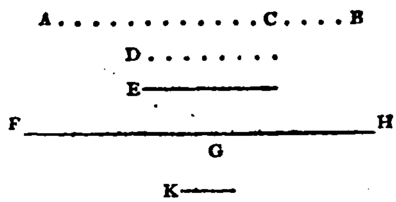
PROP. LI. PROBL. [LI.]

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur ut prius duo numeri quadrati A B, C B, qui ipſo C A non quadrato differunt. Exponatur etiam



alius numerus D non quadratus, qui ad neutrum ipſorum B A, A C rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea E ; fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G. Quadratum igitur ex E quadrato ex F G eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt E : ergo et F G eſt rationalis [h]. Et quoniam [h] 6. hujus.
D ad A B rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt E ipſi F G longitudine [i]. Rurſus, fiat ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H : ergo quadratum ex F G quadrato ex G H eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt F G : quare et G H eſt rationalis. Et quoniam A B ad A C rationem



rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est
[i] 9. hujus. F G ipsi G H longitudine [i]: quare F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: ideoque F H ex
[k] 37. hujus. binis nominibus est [k]. Dico et tertiam esse.

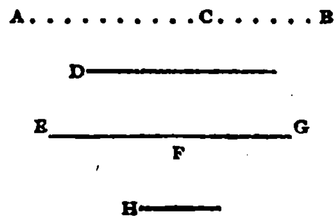
Quoniam enim est ut D numerus ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G; ut autem B A ad A C, ita quod fit ex F G quadratum ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut D ad A C, ita quadratum ex E ad qua-
[l] 22. quinti. dratum ex G H [l]. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi G H incommensurabilis est longitudine [i]. Et quoniam ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad id quod ex G H quadratum; erit quadratum ex F G majus quadrato ex G H. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: per conversionem igitur rationis est ut A B
[m] Cor. 19. quinti. ad B C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [m]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est F G ipsi K longitudine; et ob id F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensu-
[n] Def. Secund. 3. hujus. rabilis est ipsi E longitudine. Ergo F H est ex binis nominibus tertia [n]. *Q. E. D.*

[LII.] PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis

nalis D, et ipsi D commensurabilis sit E F longitudine: ergo E F est rationalis.



Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Commensurabile igitur est quadratum ex E F quadrato ex F G: ideoque recta linea F G est rationalis. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit E F ipsi F G longitudine incommensurabilis [o]. Ergo E F, F G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id E G ex binis nominibus est [p]. Dico eam et quartam esse.

[o] 9. hujus.
[p] 37. hujus.

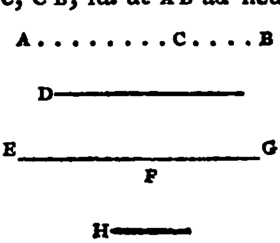
Quoniam enim est ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; major autem est B A quam A C: erit quadratum ex E F quadrato ex F G majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per conversionem igitur rationis est ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id, quod fit ex H, quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F ipsi H longitudine est incommensurabilis: ac propterea E F plus potest quam F G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ solum commensurabiles; et E F ipsi D commensurabilis est longitudine. Ergo E G ex binis nominibus est quarta [q]. *Q. E. F.*

[q] Def. Secund. 4. hujus.

PROP. LIII. PROBL. [LIII.]

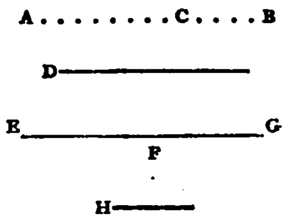
Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis D, et ipsi longitudine commensurabilis sit F G: ergo F G est rationalis. Et fiat ut C A ad A B, ita quadratum



ex

ex G F ad id quod fit ex F E quadratum: rationalis igitur eſt F E. Et quoniam C A numerus ad A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F, F G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [r]; et ob id E G ex binis nominibus eſt [s]. Dico eam et quintam eſſe.



[r] 9. hujus. [s] 37. hujus.

Quoniam enim eſt ut C A ad A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex F E; erit invertendo ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G: ergo quadratum ex E F quadrato ex F G eſt majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per converſionem igitur rationis eſt ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id quod ex H quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea E F ipſi H longitudine eſt incommenſurabilis. Quare E F plus poteſt quam F G quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, et F G minus nomen expoſitæ rationali D commenſurabilis eſt longitudine: ergo E G ex binis nominibus eſt quinta [t]. *Q. E. F.*

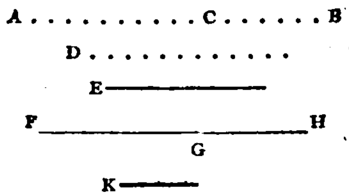
[t] Def. Secund. 5. hujus.

[LIV.]

PROP. LIV. PROBL.

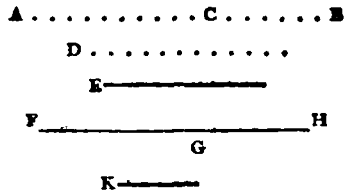
Invenire ex binis nominibus ſextam.

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipſorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Sit etiam alius numerus D, qui ad neutrum ipſorum B A, A C rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex



ex F G: commensurabilis igitur est E ipsi F G potentiâ. Atque E est rationalis: quare et rationalis est F G [x]. Et quoniam D ad A B rationem non habet, [x] Def. 6. hujus.
quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis [y]. Itaque rursus fiat ut B A ad A C, sic quadratum [y] 9. hujus.
ex F G ad quadratum ex G H: quadratum igitur ex F G quadrato ex G H est commensurabile. Rationale autem est quadratum ex F G: ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H est rationalis. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine [y]; et ideo F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est F H [z]. Ostendendum est et sextam esse. [z] 37. hujus.

Quoniam enim ut D ad A B, ita est quadratum ex E ad quadratum ex F G; est autem et ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: ex æquo est ut D, ad A C, ita quadratum ex E ad quadratum ex G H. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est E ipsi G H longitudine [y]. Ostensum autem est et ipsi F G incommensurabilem esse: quare utraque ipsarum F G, G H ipsi E longitudine est incommensurabilis. Et quoniam est ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit quadratum ex F G quadrato ex G H majus. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: ergo per conversionem ra-



tionis ut A B ad B C, ita est quadratum ex F G ad quadratum ex K. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea F G ipsi K longitudine est incommensurabilis. Ergo F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. Quare F H est ex binis nominibus sexta [a]. *Q. E. F.*

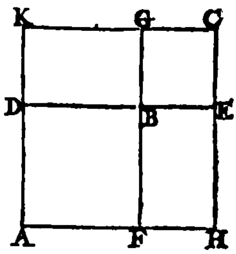
[a] Def. Secund. 6. hujus.

LEMMA VII.

Sint duo quadrata A B, B C, et ponantur ita ut D B sit in directum ipsi B E: ergo et F B ipsi B G in directum erit [b]. Et compleatur A C parallelogrammum. Dico A C quadratum esse; et inter quadrata A B, B C rectangulum D G medium esse proportionale, itemque inter ipsa A C, C B medium proportionale esse D C.

[b] 14. primi.

Quoniam enim D B quidem est æqualis F B, B E vero ipsi B G; erit tota D E toti F G æqualis. Sed D E æqualis est utrivis ipsarum K C, A H; et F G utrivis ipsarum A K, H C est æqualis. Ergo et utravis A H, K C utrivis A K, H C est æqualis; æquilaterum igitur est A C parallelogrammum. Est autem et rectangulum: ergo quadratum est A C. Et quoniam est ut F B ad B G, ita D B ad B E; ut autem F B ad B G, ita A B ad D G, et ut D B ad B E, ita D G ad B C [c]: ut igitur A B ad D G, ita est D G ad B C [d]: ideoque inter A B, B C medium proportionale est D G. Dico præterea inter ipsa A C,



[c] 1. sexti.
[d] 11. quinti.

C D

C B medium proportionale esse D C. Nam cum sit ut A D ad D K, ita K G ad G C, est enim utraque utrique æqualis; et componendo erit ut A K ad K D, ita K C ad C G. Sed ut A K ad K D, ita A C ad C D; et ut K C ad C G, ita D C ad C B[d]. Et igitur ut A C ad C D, ita est D C ad C B. Ac propterea inter ipsa A C, C B medium proportionale est C D. *Q. E. D.*

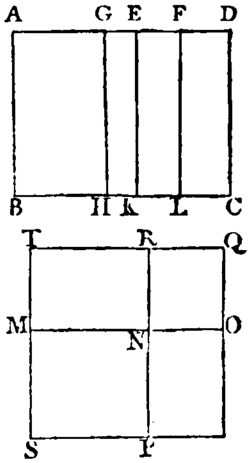
[d] 1. sexti.

PROP. LV. THEOR. [LV.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus primâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spatium enim A B C D contineatur sub rationali A B, et ex binis nominibus primâ A D: dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim A D est ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum E; et sit A E majus nomen. Manifestum est A E, E D rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et A E plus posse quam E D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[e]; et præterea ipsam A E expositæ rationali A B longitudine commensurabilem esse. Secetur E D bifariam in F. Quoniam igitur A E plus potest quam E D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; si quartæ parti quadrati, quod fit a minori, hoc est, si quadrato ex E F, æquale parallelogrammum ad majorem A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet[f]. Applicetur igitur ad A E quadrato ipsius E F æquale rectangulum sub A G, G E[g]: ergo A G ipsi G E longitudine est commensurabilis. Deinde per puncta G, E, F alterutri ipsarum A B, D C parallelæ ducantur G H, E K, F L; et parallelogrammo quidem A H æquale quadratum constituatur S N; parallelogrammo

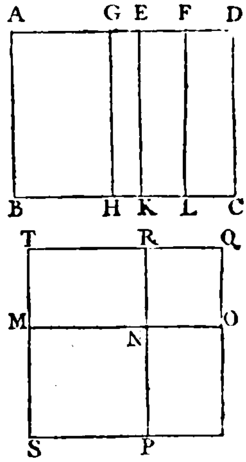


[e] Def. Secund. 1. hujus.

[f] 18. hujus.

[g] 28. sexti.

lelogrammo autem G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N sit in directum ipsi N O [h]: ergo R N ipsi N P in directum erit [i]. Et parallelogrammum S Q compleatur: quadratum igitur est S Q [k]. Et quoniam rectangulum sub A G, G E est æquale quadrato ex E F, erit ut A G ad E F, ita E F ad E G [l]: quare ut A H ad E L, ita est E L ad K G [m]: ac propterea inter parallelogramma A H, G K medium proportionale est E L. Sed parallelogrammo A H æquale est quadratum S N, et G K æquale quadrato N Q [n]: ergo inter quadrata S N, N Q medium proportionale est E L. Sed inter eadem S N, N Q medium proportionale est M R [o]: æquale igitur est M R ipsi E L. Sed M R est æquale P O [p], et E L ipsi F C [q]: ergo totum E C ipsis M R, P O est æquale. Sunt autem et A H, G K æqualia ipsis S N, N Q: totum igitur A C est æquale toti S Q, hoc est, quadrato ex M O; ideoque ipsa M O potest parallelogrammum A C. Dico M O ex binis nominibus esse. Quoniam enim A G commensurabilis est ipsi G E; erit A E utrique ipsarum A G, G E commensurabilis [r]. Ponitur autem et A E commensurabilis ipsi A B longitudine: ergo et A G, G E ipsi A B commensurabiles sunt [s]. Atque est A B rationalis: rationalis igitur est et utraque ipsarum A G, G E; et ob id rationale utrumque ipsorum A H, G K [t], et A H ipsi G K est commensurabile [u]. Sed A H est æquale ipsi S N, et G K ipsi N Q: ergo et quadrata S N, N Q, videlicet, quæ fiunt ex M N, N O, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est A E ipsi E D longitudine, et A E quidem est commensurabilis ipsi A G, et D E commensurabilis ipsi E F; erit et A G ipsi E F longitudine incommensurabilis: ergo et A H est incommensurabile ipsi E L. Sed A H est æquale S N, et E L ipsi M R: quare S N est incommensurabile ipsi M R. Ut autem S N ad M R, ita P N ad N R: incommensurabilis



[h] 14. secundi.
[i] 14. primi.
[k] Lemma 7. hujus.
[l] 17. sexti.
[m] 1. sexti.
[n] Per construct.
[o] Lemma 7.
[p] 43. primi.
[q] 36. primi.
[r] 16. hujus.
[s] 12. hujus.
[t] 20. hujus.
[u] 10. hujus.

bilis

bilis igitur eſt P N ipſi N R longitudine[u]. Eſt autem P N æqualis M N, et N R ipſi N O: ergo M N ipſi N O longitudine eſt incommenſurabilis. Atque eſt quadratum ex M N commenſurabile quadrato ex N O; et utrumque rationale. Nimirum cum rectangulis A H, G K, rationalibus et inter ſe commenſurabilibus, quadrata illa, ex M N, N O, ſingulatim ſint æqualia. Quare M N, N O rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ideoque M O ex binis nominibus eſt, et poteſt parallelogrammum A C[x]. *Q. E. D.*

[u] 10. hujus. [x] 37. hujus.

PROP. LVI. THEOR. [LVI.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſecundâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur.

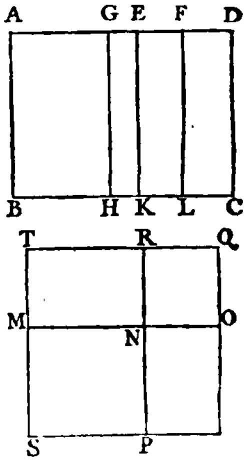
Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſecundâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A C poteſt, ex binis mediis primam eſſe.

Vide fig. Prop. 55.

Quoniam enim A D eſt ex binis nominibus ſecunda, dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen. Ergo A E, E D rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles[y], et A E plus poteſt quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, et minus nomen E D commenſurabile eſt ipſi A B longitudine. Secetur E D bifariam in F; et quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad rectam lineam A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum nempe ſub A G, G E. Commenſurabilis igitur eſt A G ipſi G E longitudine[z]. Et per puncta G, E, F ipſis A B, D C parallelæ ducantur G H, E K, F L; parallelogrammo autem A H æquale quadratum S N conſtituatur, et parallelogrammo G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N ſit in directum ipſi N O: ergo et R N ipſi N P in directum erit. Et compleatur S Q quadratum: manifeſtum igitur eſt ex iis quæ demonſtrata ſunt[a], parallelogrammum M R medium eſſe proportionale inter quadrata S N, N Q, et parallelogrammo E L æquale; et præterea rectam lineam M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum igitur eſt ipſam M O ex binis mediis primam eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A E ipſi E D longitudine, commenſurabilis autem E D ipſi A B[b]; erit A E ipſi A B longitudine incommenſurabilis[c]. Et quoniam A G commenſurabilis eſt longitudine ipſi

[y] Def. Secund. 2. hujus. [z] 18. hujus. [a] In antec. [b] 37. hujus. [c] 14. hujus.

GE; erit AE utrique ipsarum AG, GE longitudine com-
[d] 16. hujus. mensurabilis [d]. Atque est AE rationalis: rationalis igitur et utraque AG, GE. Quod cum AE sit incommensurabilis quidem ipsi AB longitudine, commensurabilis autem AE utrique ipsarum AG, GE; erunt AG, GE ipsi AB longitudine incommensurabiles: quare BA, AG, GE rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Medium igitur est utrumque parallelogram-
[e] 22. hujus. morum AH, GK [e]; et ob id utrumque quadratorum SN, NQ est medium: ergo rectæ lineæ MN, NO mediæ sunt. Rursus, quoniam commensurabilis est AG ipsi GE longitudine; erit parallelogrammum AH parallelo-



[f] 1. sexti, & 10. hujus. grammo GK commensurabile [f]; hoc est, quadratum SN ipsi NQ; hoc est, quadratum ex MN quadrato ex NO. Ergo MN, NO potentiâ commensurabiles sunt. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, et AE quidem est commensurabilis ipsi AG, ED vero ipsi EF: erit AG ipsi EF longitudine incommensurabilis. Quare et parallelogrammum AH incommensurabile parallelogrammo EL, hoc est, SN ipsi MR. Quare
[g] 1. sexti. et recta PN ipsi NR [g], hoc est, MN ipsi NO, incommensurabilis est longitudine. Ostensæ autem sunt MN, NO, et mediæ, et potentiâ commensurabiles: ergo MN, NO mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et rationale continere. Quoniam enim DE ponitur commensurabilis utrique ipsarum AB, EF; erit EF ipsi EK longitudine commensurabilis. Atque est rationalis utra-
[h] 20. hujus. que ipsarum: rationale igitur est parallelogrammum EL [h], hoc est, MR; estque MR quod sub MN, NO continetur. Si autem duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota
[i] 28. hujus. irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur [i]. Ergo MO ex binis mediis est prima. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. LVII. THEOR. [LVII.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis mediis ſecunda.

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus tertiâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, quorum majus ſit A E: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe; quæ ex binis mediis ſecunda appellatur. Vide fig. Prop. 56.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A D ex binis nominibus tertia eſt; erunt A E, E D rationales potentiâ ſolum commenſurabiles[k], et A E plus poterit quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, neutraque ipſarum A E, E D ipſi A B longitudine erit commenſurabilis. Similiter[l] oſtendemus M O eam eſſe, quæ ſpatium A C poteſt, et eſſe ex binis mediis M N, N O: itaque oſtendendum eſt et ſecundam eſſe. Quoniam enim D E incommenſurabilis eſt longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K; atque eſt D E commenſurabilis E F: erit E F ipſi E K longitudine incommenſurabilis. Et ſunt rationales: ergo F E, E K rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id E L, hoc eſt, M R, medium eſt; et continetur ſub M N, N O. Medium igitur eſt quod ſub M N, N O continetur. Quare M O ex binis mediis eſt ſecunda[m]. *Q. E. D.*

[k] Def. Secund. 3. hujus.
[l] Atque in præc.
[m] 39. hujus.

PROP. LVIII. THEOR. [LVIII.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur major.

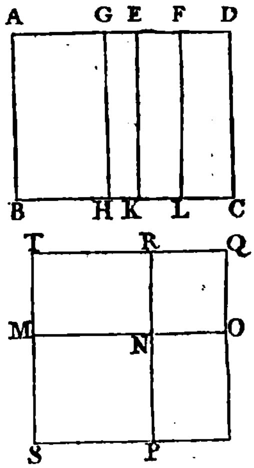
Spatium enim A C contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus quartâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, quorum A E ſit majus: dico rectam lineam, quæ ſpatium A C poteſt, irrationalem eſſe; quæ major appellatur.

Quoniam enim A D ex binis nominibus eſt quarta; erunt A E, E D rationales potentiâ ſolum commenſurabiles[n], et A E plus poterit quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, et A E ipſi A B commenſurabilis erit longitudine. Dividatur D E bifariam in F, et quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectan-

[n] Def. Secund. 4. hujus.

gulum nempe ſub A G, G E: erit igitur A G ipſi G E longitudine incommenſurabilis [o]. Ducantur ipſi A B parallelæ G H, E K, F L, et eadem fiant, quæ ſupra. Conſtat igitur M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum autem eſt M O irrationalem eſſe, quæ vocatur major. Quoniam enim A G ipſi G E incommenſurabilis eſt longitudine, erit et A H ipſi G K incommenſurabile [p], hoc eſt, S N ipſi N Q [q]. Ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A E ipſi A B longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum A K rationale eſt; atqui eſt æquale quadratis ipſarum M N, N O: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O eſt rationale.

[o] 19. hujus.
[p] 1. ſexti. & 10. hujus.
[q] Per conſtruct.



Quod cum D E ſit incommenſurabilis longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, ſit autem D E commenſurabilis ipſi E F: erit E F ipſi E K incommenſurabilis longitudine. Quare K E, E F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [r]; et ob id medium eſt L E, hoc eſt, M R, quod continetur ſub M N, N O. Medium igitur eſt quod ſub M N, N O continetur; eſtque compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O rationale; et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilis. Si autem duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; tota irrationalis erit: vocatur autem major [s]. Ergo M O irrationalis eſt, quæ major appellatur, et poteſt ſpatium A C. *Q. E. D.*

[r] 22. hujus.
[s] 40. hujus.

[LIX.] PROP. LIX. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur rationale et medium potens.

Vide fig. Prop. 58. Spatium enim A C contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus quintâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen ſit A E: dico rectam lineam, quæ

quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra: manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C. Oſtendere autem oportet M O eſſe, quæ rationale ac medium poteſt. Quoniam enim A G ipſi E G incommenſurabilis eſt longitudine; et parallelogrammum A H eſt incommenſurabile parallelogrammo H E [t], hoc eſt, quadratum ex M N quadrato ex N O: ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A D eſt ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio E D; erit E D ipſi A B commenſurabilis longitudine [u]. Sed A E ipſi E D longitudine eſt incommenſurabilis: ergo et A B incommenſurabilis eſt longitudine ipſi A E [x]: ac propterea B A, A E rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K [y], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Et quoniam D E commenſurabilis eſt longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, eſtque D E commenſurabilis ipſi E F: erit et E F ipſi E K commenſurabilis. Rationalis autem eſt E K: rationale igitur eſt et E L [z], hoc eſt, M R, hoc eſt, parallelogrammum quod ſub M N, N O continetur. Quare M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo M O eſt rationale ac medium potens, et poteſt ſpatium A C [a]. *Q. E. D.*

[t] 1. ſexti, & 10. hujus.
[u] Def. Secund. 5. hujus.
[x] 13. hujus.
[y] 22. hujus.
[z] 20. hujus.
[a] 41. hujus.

PROP. LX. THEOR. [LX.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus ſextâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſextâ A D, quæ dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe bina media potentem.

Vide fig. Prop. 58.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C, et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilem eſſe. Et quoniam E A ipſi A B incommenſurabilis eſt longitudine, erunt E A, A B rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K [b], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt E D ipſi A B longitudine, erit et F E ipſi E K longitudine incommenſurabilis:

[b] 22. hujus.

commensurabilis: ergo et F E, E K rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea medium est E L, hoc est, M R, hoc est, quod sub M N, N O continetur. Et quoniam E A est incommensurabilis ipsi E F longitudine; et parallelogrammum A K parallelogrammo E L incommensurabile erit. Sed A K quidem est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O; E L vero est quod sub M N, N O continetur. Incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O ei, quod sub M N, N O continetur. Atque est utrumque ipsorum medium; et M N, N O potentiâ sunt incommensurabiles: ergo M O est bina media potens, et potest spatium A C [c]. *Q. E. D.*

[c] 42. hujus.

LEMMA VIII.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo, quod bis sub dictis partibus continetur.

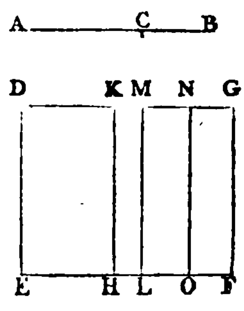
Demonstratur ex 5^a et 9^a secundi ad modum Corollarii Lemmatis sexti.

[LXI.] PROP. LXI. THEOR.

Quadratum ejus, quæ est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato rectæ lineæ A B æquale ad ipsam D E applicetur rectangulum parallelogrammum D E F G, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus primam esse.

Applicetur enim ad rationalem D E quadrato quidem ipsius A C æquale parallelogrammum D H; quadrato autem ipsius B C æquale K L [f]: reliquum igitur quod bis sub A C, C B continetur est æquale parallelogrammo M F [g]. Secetur M G bifariam in N, et alterutri ipsarum M L, G F parallela ducatur N O: utrumque igitur parallelogrammorum M O, N F est æquale ei, quod semel sub A C, C B continetur. Et quoniam ex binis nominibus



[f] 45. primi.

[g] 4. secundi.

minibus est A B, divisa in nomina ad punctum C; erunt A C, C B rationales potentiâ solum commensurabiles [h]. Ergo quadrata ex A C, C B rationalia sunt et commensurabilia inter se; et ob id compositum ex quadratis ipsarum A C, C B commensurabile est ipsarum A C, C B quadratis [i]: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum A C, C B. Atqui est æquale parallelogrammo D L. Ergo et D L est rationale, et ad rationalem D E applicatum rationalem efficit D M, et ipsi D E commensurabilem longitudine [k]. Rursus, quoniam A C, C B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; medium est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, rectangulum M F. Et ad rationalem M L applicatum rationalem efficit M G, sed ipsi M L, hoc est, ipsi E D, longitudine incommensurabilem [l]. Est autem et M D rationalis, et ipsi D E commensurabilis longitudine: ergo D M ipsi M G longitudine est incommensurabilis [m]. Suntque rationales: ergo D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est ex binis nominibus [h]. Ostendendum est et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex A C, C B medium proportionale est, quod sub A C, C B continetur; erit etiam inter parallelogramma D H, K L medium proportionale M O [n]. Est igitur ut D H ad M O, ita M O ad K L; hoc est, ut recta linea D K ad M N, ita M N ad M K [o]: ergo rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N est æquale [p]. Et quoniam quadratum ex A C commensurabile est quadrato ex C B, erit et parallelogrammum D H parallelogrammo K L commensurabile [p]: ergo et D K ipsi K M longitudine est commensurabilis. Quod cum quadrata ex A C, C B majora sint eo, quod bis sub A C, C B continetur [q]; erit et parallelogrammum D L majus parallelogrammo M F: ideoque recta linea D M ipsâ M G est major. Atqui est rectangulum sub D K, K M æquale quadrato ex M N, hoc est, quartæ parti quadrati ex M G; et D K ipsi K M longitudine est commensurabilis. Si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [r]. Quare D M plus potest quam M G quadrato rectæ ipsi D M longitudine commensurabilis. Suntque rationales D M,

M G;

[h] 37. hujus.
[i] 16. hujus.
[k] 21. hujus.
[l] 23. hujus.
[m] 13. hujus.
[n] Lemma 7.
[o] 1. sexti.
[p] 17. sexti.
[p] 10. hujus.
[q] Lem. 8. hujus.
[r] 18. hujus.

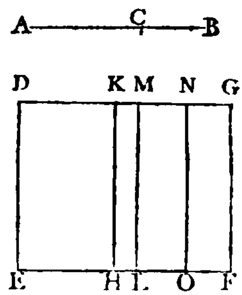
M G; atque D M, quæ eſt majus nomen, expoſitæ rationali D E longitudine eſt commenſurabilis: ergo D G eſt ex binis nominibus prima[a]. *Q. E. D.*

[a] Def. Secund. 1. hujus.

[LXII.] PROP. LXII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Sit ex binis mediis prima A B, diviſa in nomina ad punctum C, ita ut A C ſit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et ad ipſam D E applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius A B, quod ſit D F, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus ſecundam eſſe.



Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B ex binis mediis eſt prima, diviſa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent[t]. Quare et quæ ſiunt ex A C, C B quadrata media ſunt; ideoque D L eſt medium, et ad rationalem D E applicatum, rationalem efficit M D, ſed ipſi D E longitudine incommenſurabilem[u]. Rurſus, quoniam rationale eſt, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et M F rationale, et ad rationalem M L applicatum efficit M G rationalem, et ipſi M L[x], hoc eſt, ipſi D E, commenſurabilem longitudine. Incommenſurabilis igitur eſt D M ipſi M G[y]. Sed rationales ſunt. Quare D M, M G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D G eſt ex binis nominibus. Oſtendendum eſt et ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex A C, C B majora ſunt eo, quod bis ſub A C, C B continetur[z]; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F majus: ergo et recta linea D M major eſt ipſâ M G. Quod cum quadratum ex A C quadrato ex C B ſit commenſurabile; et D H parallelogrammum parallelogrammo K L commenſurabile erit: quare et D K commenſurabilis ipſi K M. Sed rectangulum, quod ſub D K, K M continetur, quadrato ipſius M N æquale eſt. (Id enim ut in præcedente oſtendatur.) Ergo D M plus poteſt

[t] 38. hujus.
[u] 23. hujus.
[x] 21. hujus.
[y] 13. hujus.
[z] Lem. 8. hujus.

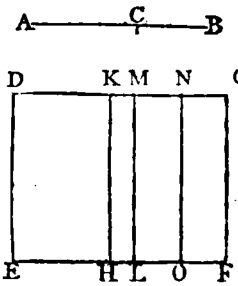
potest quam M G quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [a]. Estque M G commensurabilis longitudine ipsi D E. Quare D G est ex binis nominibus secunda [b]. *Q. E. D.*

[a] 18. hujus.
[b] Def. Secund. 2. hujus.

PROP. LXIII. THEOR. [LXIII.]

Quadratum ejus, quæ est ex binis mediis secunda, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis mediis secunda A B, divisa in nomina ad C, ita ut A C sit majus nomen; rationalis autem sit D E, et ad ipsam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus tertiam esse.



Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam A B est ex binis mediis secunda, divisa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent [c]: ergo et compositum ex ipsarum A C, C B quadratis medium est. Atqui est æquale ipsi D L: medium igitur est D L. Sed ad rationalem D E applicatur: ergo rationalis est M D, sed ipsi D E longitudine incommensurabilis [d]. Rectangulum autem quod sub A C, C B medium est [e]. Illius autem duplum M F. Quare et M F medium, et ad rationalem M L applicatum, efficit M G rationalem, sed ipsi M L, seu D E, longitudine incommensurabilem [d]. Utraque igitur ipsarum D M, M G rationalis est, et ipsi D E longitudine incommensurabilis. Et quoniam incommensurabilis est A C ipsi C B longitudine, ut autem A C ad C B ita quadratum ex A C ad rectangulum sub A C, C B [f]; erit et quadratum ex A C rectangulo sub A C, C B incommensurabile. Ergo compositum ex quadratis ipsarum A C, C B incommensurabile est ei, quod bis sub A C, C B continetur; hoc est, D L incommensurabile ipsi M F; et ob id recta linea D M ipsi M G longitudine est incommensurabilis. Suntque rationales: ergo D G est ex binis nominibus. Ostendendum est et tertiam esse. Similiter enim ac in præcedente concludemus D M ipsâ

[c] 39. hujus.
[d] 23. hujus.
[e] ex hyp.
[f] 1. sexti.

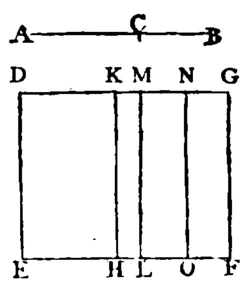
ipsâ M G majorem esse, et D K ipsi K M commensurabilem. Atqui est rectangulum sub D K, K M quadrato ipsius M N æquale: ergo D M plus potest quam M G
h 18. hujus. quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[h]. Et neutra ipsarum D M, M G est longitudine commen-
i Def. surabilis ipsi D E. Quare D G est ex binis nominibus
Secund. tertia[i]. *Q. E. D.*
3. hujus.

[LXIV.] PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major A B, divisa in nomina in puncto C, ita ut A C sit majus nomen; rationalis autem quædam sit D E, et quadrato ex A B æquale ad ipsam D E applicetur parallelogrammum D F, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quartam.

Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam A B est major, divisa in nomina in C; erunt A C, C B potentiâ in-
k 40. hujus. commensurabiles[k], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum A C, C B, erit et parallelogrammum D L rationale. Ergo et rationalis est recta linea D M, ipsique D E longitudine commen-



l 21. hujus. surabilis[l]. Rursus, quoniam medium est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, M F, et ad rationalem M L est applicatum; erit et M G rationalis, sed ipsi D E in-
m 23. hujus. commensurabilis longitudine[m]. Ergo et D M ipsi M G longitudine incommensurabilis est; ac propterea D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles:
n 37. hujus. quare ex duobus nominibus est D G[n]. Ostendendum est et quartam esse. Similiter enim atque in superioribus concludemus D M majorem esse quam M G, et rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N æquale. Quoniam igitur quadratum ex A C incommensurabile est quadrato ex C B; erit et D H parallelogrammum incommensurabile
o 10. hujus. parallelogrammo K L[o]; et ob id recta linea K D ipsi K M longitudine incommensurabilis. Si autem sint duæ rectæ

lineæ

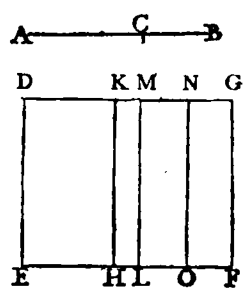
lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [p]. Ergo D M plus potest quam M G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque D M, M G rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est D M commensurabilis expositæ rationali D E. Quare D G est ex binis nominibus quarta [q]. *Q. E. D.* [p] 19. hujus. [q] Def. Secund. 4. hujus.

PROP. LXV. THEOR. [LXV.]

Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

Sit rationale ac medium potens A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato ipsius A B æquale parallelogrammum D F ad ipsam D E applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quintam.

Construantur enim, quæ supra. Et quoniam rationale ac medium potens est A B, divisa ad C punctum; erunt A C, C B potentiâ incommensurabiles [r], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum A C, C B quadratis; erit et parallelogrammum D L medium: ideoque recta linea D M rationalis est, sed ipsi D E longitudine incommensurabilis [s]. Rursus, quoniam rationale est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, parallelogrammum M F; erit M G rationalis et ipsi D E longitudine commensurabilis [t]. Incommensurabilis igitur est D M ipsi M G longitudine [u]. Quare D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est ex binis nominibus [x]. Dico et quintam esse. Similiter enim ac in præcedentibus demonstrabitur rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N esse æquale; et D K ipsi K M longitudine esse incommensurabilem. Quare D M plus



[r] 41. hujus. [s] 23. hujus. [t] 21. hujus. [u] 13. hujus. [x] 37. hujus.

plus poteſt quam M G quadrato rectæ lineæ ſibi incom-
[y] 19. hujus. menſurabilis longitudine [y]. Suntque D M, M G rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, et minor M G
[z] Def. Secund. 5. hujus. commenſurabilis eſt ipſi D E longitudine. Ergo D G eſt ex binis nominibus quinta [z]. *Q. E. D.*

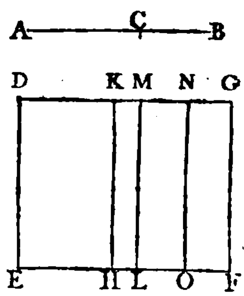
[LXVI.]

PROP. LXVI. THEOR.

Quadratum ejus, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

Sit bina media potens A B, diviſa in nomina ad punctum C; rationalis autem ſit D E, et ad ipſam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G eſſe ex binis nominibus ſextam.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B eſt bina media potens, diviſa ad C; erunt A C, C B potentiâ in-
[a] 42. hujus. commenſurabiles [a], facientes et compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. Ergo ex jam demonſtratis medium eſt utrumque parallelogrammorum D L, M F, et ad rationalem D E applicata ſunt: rationalis igitur eſt et utraque D M, M G, et ipſi D E longitudine incommen-



[b] 23. hujus. ſurabilis [b]. Et quoniam compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F incommenſurabile; et idcirco recta
[c] 10. hujus. D M longitudine incommenſurabilis rectæ M G [c]. Quare D M, M G rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; igitur D G eſt ex binis nominibus. Dico et ſextam eſſe. Similiter enim atque in præcedentibus rurſus oſtendemus rectangulum ſub D K, K M quadrato ex M N æquale, et D K ipſi K M longitudine incommenſurabilem eſſe. Ergo D M plus poteſt quam M G quadrato
[d] 19. hujus. rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine [d]. Et neutra ipſarum D M, M G longitudine commenſurabilis
[e] Def. Secund. 6. hujus. eſt expoſitæ rationali D E. Quare D G eſt ex binis nominibus ſexta [e]. *Q. E. D.*

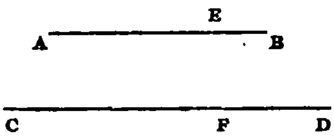
PROP.

PROP. LXVII. THEOR. [LXVII.]

Ei quæ eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, et ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

Sit ex binis nominibus A B, et ipſi A B longitudine commenſurabilis ſit C D: dico C D ex binis nominibus eſſe, et ordine eandem ipſi A B.

Quoniam enim ex binis nominibus eſt A B, dividatur in nomina ad punctum E, et ſit A E majus nomen: ergo A E, E B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[f]. Fiat ut A B ad C D, ita A E ad C F[g]; et reliqua igitur E B ad reliquam F D eſt ut A B ad C D[h]. Commenſurabilis autem eſt A B ipſi C D longitudine: ergo et A E ipſi C F, et E B ipſi F D, longitudine eſt commenſurabilis[i]. Suntque rationales A E, E B: rationales igitur ſunt et C F, F D. Et quoniam eſt ut A E ad C F, ita E B ad F D; erit permutando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sunt autem A E, E B potentiâ ſolum commenſurabiles: ergo et C F, F D potentiâ ſolum commenſurabiles erunt[i]. Et ſunt rationales: ex binis igitur nominibus eſt C D[f]. Dico et ipſi A B ordine eandem eſſe.



[f] 37. hujus.
[g] 12. ſexti.
[h] 19. quinti.
[i] 10. hujus.

Vel enim A E plus poteſt quam E B quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si quidem igitur A E plus poſſit quam E B quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine[k]. Quod ſi A E expoſitæ rationali longitudine ſit commenſurabilis, et C F eidem longitudine commenſurabilis erit[l]: et ob id utraque ipſarum A B, C D, ex binis nominibus eſt prima, hoc eſt, ordine eadem. Si vero E B longitudine ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, et F D eidem erit longitudine commenſurabilis: eamque ob cauſam C D ipſi A B ordine eadem eſt, utraque enim eſt ex binis nominibus ſecunda. Quod ſi neutra ipſarum A E, E B ſit expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis, et neutra ipſarum C F, F D eidem longitudine commenſurabilis erit; et utraque A B, C D eſt tertia. At ſi A E plus poſſit quam E B quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis

[k] 15. hujus.
[l] 12. hujus.

longitudine; et CF plus poterit quam FD quadrato rectæ
k 15. hujus. lineæ sibi longitudine incommensurabilis [k]. Et si AE longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et CF eidem longitudine commensurabilis erit; et est AB, CD utraque quarta. Quod si EB sit, et ipsa FD erit; et est utraque AB, CD quinta. Si vero neutra ipsarum AE, EB sit, et neutra CF, FD expositæ rationali erit longitudine commensurabilis; et est utraque AB, CD sexta.

Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem. *Q. E. D.*

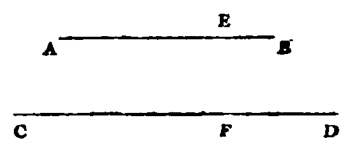
[LXVIII.]

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis AB, et ipsi AB commensurabilis longitudine sit CD: dico CD ex binis mediis esse, et ipsi AB ordine eandem.

Quoniam enim AB ex binis mediis est, dividatur in nomina ad punctum E. Erunt igitur AE, EB mediæ, potentiâ solum commensurabiles [l]. Itaque fiat ut AB ad CD, ita AE ad CF: ergo et reliqua EB ad reliquam FD est ut AB ad CD. Commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine [m]. Quare et AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, et EB ipsi FD. Suntque mediæ AE, EB: mediæ igitur et CF, FD [n]. Et quoniam est ut AE ad EB, ita CF ad FD, et sunt AE, EB commensurabiles potentiâ solum; erunt et CF, FD potentiâ solum commensurabiles [o]. Ostensæ autem sunt et mediæ: ergo CD est ex binis mediis [l]. Dico et ipsi AB ordine eandem esse.



l 38. & 39. hujus.
m ex hyp.
n 24. hujus.
o 10. hujus.

Quoniam enim est ut AE ad EB, ita CF ad FD; erit et quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB, ut quadratum ex CF ad rectangulum sub CF, FD [p]. Quare permutando ut quadratum ex AE ad quadratum ex CF, ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub CF, FD. Commensurabile autem est quadratum

p 11. quinti. & 1. sexti.

ex

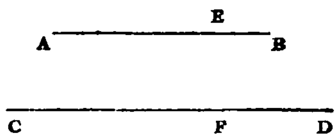
ex A E quadrato ex C F: ergo et rectangulum ſub A E, E B rectangulo ſub C F, F D eſt commenſurabile. Sive igitur rationale eſt rectangulum ſub A E, E B, et rectangulum ſub C F, F D rationale erit[n]; atque ob id eſt utra- [n] Def. 9. hujus.
que A B, C D ex binis mediis prima[o]. Sive vero me- [o] 38. hujus.
dium eſt rectangulum ſub A E, E B, et ipſum ſub C F, [p] Cor. Def.
F D erit medium[p]. Atque eſt utraque A B, C D ex binis 12.* hujus.
mediis ſecunda[q]; et propterea C D ipſi A B ordine eadem [q] 39. hujus.
eſt. *Q. E. D.*

PROP. LXIX. THEOR. [LXIX.]

Majori commenſurabilis et ipſa major eſt.

Sit major A B; et ipſi A B commenſurabilis longitudine ſit C D: dico C D majorem eſſe.

Dividatur A B in nomina in E: ergo A E, E B potentiâ ſunt incommenſurabiles[r], [r] 40. hujus.
quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. Et fiant eadem, quæ ſupra. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita A E ad C F, et E B ad F D; erit ut A E ad C F, ita E B ad F D[s]. Et permu- [s] 11. quinti.
tando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sed potentiâ incommenſurabiles ſunt A E, E B. Quare et C F, F D potentiâ ſunt incommenſurabiles[t]. Commenſurabilis au- [t] 10. hujus.
tem eſt A B ipſi C D longitudine: ergo et utraque ipſarum A E, E B utrique C F, F D longitudine eſt commenſurabilis[t]. Et quoniam eſt ut A E ad C F, ita E B ad F D; permutandoque ut A E ad E B, ita C F ad F D; erit componendo ut A B ad B E, ita C D ad D F: ut igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F[u]. Similiter demonſtrabimus [u] 22. ſexti.
et ut quadratum ex A B ad quadratum ex A E, ita eſſe quadratum ex C D ad quadratum ex C F. Ergo ut quadratum ex A B ad quadrata ex A E, E B, ita quadratum ex C D ad quadrata ex C F, F D[x]. Permutando igitur [x] 24. quinti.
ut quadratum ex A B ad quadratum ex C D, ita quadrata ex A E, E B ad quadrata ex C F, F D. Commenſurabile autem eſt quadratum ex A B quadrato ex C D: ergo et quadrata ex A E, E B quadratis ex C F, F D ſunt commenſurabilia. Atqui eſt compoſitum ex quadratis ipſa-



[u] 40. hujus. rum A E, E B rationale[u]: ergo et rationale erit compo-
[x] Def. 9. hujus. ſitum ex quadratis ipſarum C F, F D[x]. Rectangulum autem quod bis continetur ſub A E, E B commenſurabile eſt ei, quod bis ſub C F, F D continetur. Atqui eſt medium quod bis continetur ſub A E, E B[u]. Medium igi-
[y] Cor. Def. 12.* hujus. tur eſt et quod bis ſub C F, F D continetur[y]. Ergo C F, F D potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. Tota igitur irrationalis eſt, quæ vocatur major[u].

Ergo majori commenſurabilis et ipſa major eſt. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Rectangula quæ ſub A E, E B; C F, F D continentur inter ſe commenſurabilia eſſe ſic oſtendimus.

Rectæ A B, C D ponuntur longitudine commenſurabiles. Erit igitur A B ad C D, ut numerus
[z] 5. hujus. ad numerum[z]; puta ut M ad N. Ut autem A B ad C D, ſic eſt A E ad C F, et E B ad F D. Erit igitur tum A E ad C F, tum E B ad F D,
[a] 11. quinti. ut numerus M ad numerum N[a]. Quapropter rectangulum ſub A E, E B, ad rectangulum ſub C F, F D rationem habebit, quam quadratus numeri M, ad qua-
[b] 23. ſexti, & 5. octavi. dratum numeri N[b]: numeri igitur ad numerum rationem. Rectangulum igitur quod ſub A E, E B, illi quod
[c] 6. hujus. ſub C F, F D commenſurabile eſt[c]. *Q. E. D.*

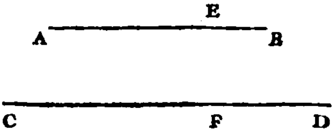
M . . .
N . . . .

*Cor.** Rectangula, quorum latera lateribus, ſingula ſingulis, longitudine ſint commenſurabilia, et ipſa inter ſe commenſurabilia erunt.

[LXX.] PROP. LXX. THEOR.

Rationale ac medium potenti commenſurabilis et ipſa rationale ac medium potens eſt.

Sit rationale ac medium potens A B; et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: oſtendendum eſt et C D rationale ac medium potentem eſſe.



Dividatur A B in rectas ſuas ad punctum E: ergo A E, E B potentiâ incom-

menſurabiles

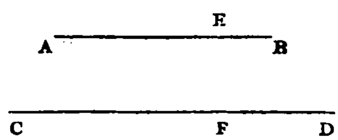
menſurabiles ſunt[d], facientes compoſitum ex ipſarum [d] 41. hujus.
quadratis medium; quod autem ſub ipſis continetur
rationale: et eadem, quæ prius, conſtruantur. Similiter
ac in præcedente demonſtrabimus C F, F D potentiâ eſſe
incommenſurabiles; et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis ipſarum C F, F D; quod autem continetur ſub
A E, E B commenſurabile eſſe ei, quod ſub C F, F D continetur. Ergo et compoſitum ex quadratis ipſarum C F, [e] Cor. Def.
F D eſt medium[e], quod autem continetur ſub C F, F D 12.* hujus.
rationale[f]; et igitur C D eſt rationale ac medium po- [f] Def. 9.
tens[g]. *Q. E. D.* hujus.
[g] 41. hujus.

PROP. LXXI. THEOR. [LXXI.]

Bina media potenti commenſurabilis et ipſa bina media potens eſt.

Sit bina media potens A B, et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: oſtendendum eſt C D bina media potentem eſſe.

Quoniam enim bina media potens eſt A B, dividatur in rectas ſuas ad punctum E. Quare A E, E B potentiâ ſunt incommenſurabiles[h], quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B incommenſurabile rectangulo ſub ipſis A E, E B: et conſtruantur eadem, quæ ſupra. Similiter ac in præcedentibus demonſtrabimus C F, F D potentiâ incommenſurabiles eſſe; et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B commenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum C F, F D; quod autem ſub A E, E B continetur commenſurabile eſſe ei, quod continetur ſub C F, F D. Quare et compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D medium eſt; itemque medium quod ſub C F, F D continetur[i]. Porro compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D rectangulo ſub ipſis C F, F D eſt incommenſurabile. Nam cum A E ſit ad E B, ut C F ad F D; erit quadratum ex A E ad rectangulum ſub A E, E B, ut quadratum ex C F ad rectangulum ſub C F, F D. Simili ratione quadratum ex E B ad rectangulum ſub A E, E B, ut quadratum



[h] 42. hujus.

[i] Cor. Def. 12.* hujus.

dratum

dratum ex F D ad rectangulum sub C F, F D. Quare et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B ad rectangulum sub A E, E B, ut compositum ex quadratis ipsarum C F, F D ad rectangulum sub C F, F D [d]. Compositum autem ex quadratis ipsarum A E, E B rectangulo sub A E, E B est incommensurabile. Quare et compositum ex quadratis ipsarum C F, F D est incommensurabile rectangulo sub C F, F D [e]. Ergo C D est bina media potens [f]. *Q. E. D.*

[d] 24. quinti.
[e] 10. hujus.
[f] 42. hujus.

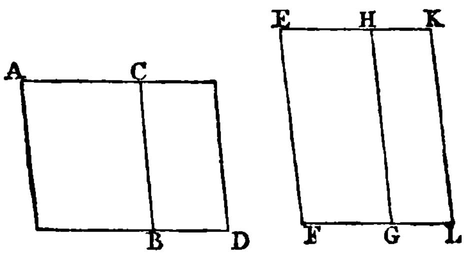
[LXXII.]

PROP. LXXII. THEOR.

Quæ potest spatium ex rationali et medio compositum, ex irrationalibus erit in serie primâ; nimirum vel prima in serie, vel secunda, vel quarta, vel quinta: hoc est, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem spatium A B, medium autem C D: dico eam, quæ potest spatium A D, vel esse ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim rationale A B vel majus est medio C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F, et ad ipsam applicetur parallelogrammum E G ipsi



A B æquale, quod latitudinem faciat E H; ipsi vero C D æquale ad E F, hoc est, ad H G, applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam rationale est A B, et ipsi est æquale E G; erit et E G rationale; et ad rationalem E F applicatum latitudinem efficiet E H rationalem, et ipsi E F longitudine commensurabilem [g]. Rursus quoniam medium est C D, et ipsi est æquale H L; erit et H L medium; et ad rationalem E F, hoc est, H G, applicatum latitudinem efficiet H K rationalem, sed incommensurabilem

[g] 21. hujus.

bilem ipſi E F longitudine [h]. Quod cum medium ſit [h] 23. hujus.
C D, rationale autem A B; erit A B ipſi C D incommenſurabile: ergo et E G incommenſurabile eſt ipſi H L. Ut autem E G ad H L, ita eſt recta linea E H ad H K [i]: [i] 1. ſexti.
ergo E H ipſi H K longitudine eſt incommenſurabilis. Et ſunt ambæ rationales. Quare E H, H K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id ex binis nominibus eſt E K, diviſa ad punctum H. Et quoniam majus eſt A B quam C D, æquale autem A B ipſi E G, et C D ipſi H L; erit et E G quam H L majus: ergo et E H major eſt quam H K. Vel igitur E H plus poteſt quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit major H E expoſitæ rationali E F commenſurabilis: erit E K ex binis nominibus prima [k]. Atqui eſt E F ra- [k] Def.
tionalis. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et Secund.
ex binis nominibus primâ; recta linea ſpatium potens 1. hujus.
ex binis nominibus eſt [l]: ergo quæ poteſt ſpatium E L [l] 55. hujus.
eſt ex binis nominibus. Quare et ea, quæ poteſt ſpatium A D, eſt ex binis nominibus.

Sed E H plus poſſit quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum ſit major E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis longitudine; erit E K ex binis nominibus quarta [m]. Sed ratio- [m] Def.
nalis eſt E F. Si autem ſpatium contineatur ſub ratio- Secund.
nali et ex binis nominibus quartâ; recta linea ſpatium 4. hujus.
potens irrationalis eſt, quæ major appellatur [n]. Potens [n] 58. hujus.
igitur ſpatium E L major eſt: ergo et potens ſpatium A D major.

Sed ſit ſpatium A B minus quam C D: erit igitur et E G quam H L minus; et ob id recta linea E H minor quam recta H K. Vel igitur K H plus poteſt quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit minor E H commenſurabilis expoſitæ rationali E F longitudine: erit E K ex binis nominibus ſecunda [o]. Ratio- [o] Def.
nalis autem E F. Quod ſi ſpatium contineatur ſub ra- Secund.
tionali et ex binis nominibus ſecundâ, recta linea ſpa- 2. hujus.
tium potens eſt ex binis mediis prima [p]. Potens igitur [p] 56. hujus.

 ſpatium

ſpatium E L eſt ex binis mediis prima: ergo et potens ſpatium A D.

Sed K H plus poſſit quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum minor E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis ſit longitudine; erit E K eſt ex binis nominibus quinta[q]. Atqui eſt rationalis E F. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus quintâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, rationale ac medium potens eſt[r]. Quæ igitur poteſt ſpatium E L, rationale et medium potens eſt; ideoque rationale et medium potens eſt, quæ poteſt ſpatium A D.

[q] Def. Secund. 5. hujus.

[r] 59. hujus.

Quæ poteſt igitur ſpatium ex rationali et medio compoſitum, ex irrationalibus erit in ſerie primâ; nimirum vel prima in ſerie, vel ſecunda, vel quarta, vel quinta; hoc eſt, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens. *Q. E. D.*

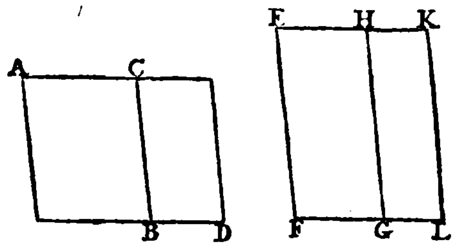
[LXXIII.]

PROP. LXXIII. THEOR.

Quæ poteſt ſpatium ex duobus mediis inter ſe incommenſurabilibus compoſitum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in ſerie primâ, vel tertia, vel ſexta: hoc eſt, vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommenſurabilia inter ſe A B, C D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A D poteſt, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.

Spatium enim A B vel majus eſt quam C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F; et ad E F ſpatio quidem A B æquale applicetur E G,



latitudinem faciens E H; ipſi vero C D æquale applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam medium eſt utrumque ipſorum A B, C D, erit et utrumque E G,

H L

H L medium. Sed ad rationalem E F applicata ſunt. Latitudines igitur E H, H K utramque efficiunt rationalem, et ipſi E F longitudine incommenſurabilem [r]. [r] 23. hujus.

Quod cum A B incommenſurabile ſit ipſi C D; ſitque A B quidem æquale ipſi E G; C D vero ipſi H L: erit et E G ipſi H L incommenſurabile. Sed ut E G ad H L, ita eſt E H ad H K: incommenſurabilis igitur eſt E H ipſi H K longitudine: ideoque E H, H K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Quare ex binis nominibus eſt E K. Itaque vel E H plus poteſt quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; et neutra ipſarum E H, H K longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali E F: ergo E K eſt ex binis nominibus tertia. Sed rationalis eſt E F. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus tertiâ, recta linea ſpatium potens eſt ex binis mediis ſecunda [s]: ergo quæ poteſt ſpatium E L, hoc eſt, A D, eſt ex binis mediis ſecunda. [s] 57. hujus.

Sed E H plus poſſit quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; et utraque ipſarum E H, H K longitudine incommenſurabilis eſt expoſitæ rationali E F. Quare E K eſt ex binis nominibus ſexta [t]. At ſi ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſextâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, eſt bina media potens [u]: ergo quæ poteſt ſpatium A D, bina media poteſt. Similiter demonſtrabimus, ſi et A B ſit minus quam C D, rectam lineam, quæ ſpatium poteſt A D, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem. [t] Def. Secund. 6. hujus. [u] 60. hujus.

Quæ poteſt igitur ſpatium ex duobus mediis inter ſe incommenſurabilibus compoſitum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in ſerie primâ, vel tertia, vel ſexta: hoc eſt, vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Quæ ex binis nominibus, et quæ poſt ipſam, ſunt irrationales, neque mediæ, neque inter ſe eædem ſunt; quadratum enim quod fit a mediâ, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatur, longitudine incommenſurabilem [x]: quod autem fit [x] 23. hujus.

fit ab eâ, quæ eſt ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus pri-
[y] 61. hujus. mam [y]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis no-
[z] 62. hujus. minibus ſecundam [z]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis ſecunda, ad rationalem applicatum, latitudinem, effi-
[a] 63. hujus. cit ex binis nominibus tertiam [a]: quod a majori, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nomi-
[b] 64. hujus. nibus quartam [b]: quod ab eâ, quæ rationale ac medium poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex
[c] 65. hujus. binis nominibus quintam [c]: quod ab eâ, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit
[d] 66. hujus. ex binis nominibus ſextam [d]. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter ſeſe, a primâ quidem quod rationalis ſit, inter ſeſe vero quod ordine non ſint eædem, conſtat et ipſas irrationales eſſe, aliam ab aliâ differentes.

Principium Senariorum per Detractionem †.

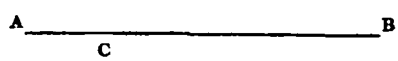
[LXXIV.]

PROP. LXXIV. THEOR.

Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem Apotome ‡.

A rationali enim A B rationalis auferatur B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt A B ipſi B C



longitudine, atque eſt ut A B ad B C, ita quadratum ex
[f] 1. ſexti. A B ad id, quod continetur ſub A B, B C [f]; erit quadratum

† *Per detractionem ſunt binomia, quorum nomina ſigno — conjuncta ſunt.*

‡ *Quam ſane* Reſiduam *Juniores dicerent.*

ex

ex A B incommenſurabile ei, quod ſub A B, B C, continetur: ſed quadrato ex A B commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C[f]; ei vero quod continetur ſub[g] A B, B C commenſurabile eſt quod bis ſub A B, B C continetur. Compoſitum igitur ex ipſarum A B, B C quadratis ei, quod bis continetur ſub A B, B C, eſt incommenſurabile. Ergo reliquo, nempe quadrato ex A C, incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C; quoniam quadrata ex A B, B C ſimul ſumpta æqualia ſunt ei, quod bis ſub A B, B C continetur una cum quadrato ex A C[g]. Rationale autem eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C[h]: (nimirum cum ipſa A B rationalis[h] ſit, et quadrata ex A B, B C inter ſe commenſurabilia[i]:) ergo recta linea A C eſt irrationalis: vocetur autem apotome[k]. *Q. E. D.*

[g] 16. hujus.
[g] 7. ſecundi.
[h] 16. & Def. 9. hujus.
[i] ex hyp.
[k] Def. 11. hujus.

PROP. LXXV. THEOR. [LXXV.]

Si a mediâ media auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi A B, et cum eâ rationale faciens, videlicet quod ſub A B, B C continetur: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim A B, B C mediæ ſunt, erunt et quadratorum quæ ex A B, B C utrumque medium. Incommenſurabile igitur utrumque ei quod bis continetur

ſub A B, B C, rationali. Compoſitum igitur ex quadratis A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur[l]: ergo et reliquo, ſc. quadrato ex A C, incommenſurabile eſt id, quod bis ſub A B, B C continetur[m]: quoniam ſi tota magnitudo uni componentium ſit incommenſurabilis, et quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt[n]. Rationale autem eſt, quod bis continetur ſub A B, B C. Irrationale igitur eſt quadratum ex A C: ideoque irrationalis eſt A C[o]: vocetur autem mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

[l] 16. & 14. hujus.
[m] 7. ſecundi.
[n] 17. hujus.
[o] Def. 11. hujus.

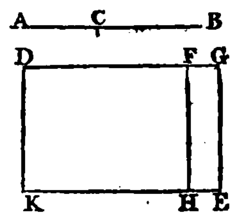
PROP.

[LXXVI.]

PROP. LXXVI. THEOR.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ medium continet; et reliqua irrationalis eſt: vocetur autem mediæ apotome ſecunda.

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti A B, et cum eâ medium continens, videlicet quod continetur ſub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem eſſe.



Exponatur enim rationalis D K, et quadratis quidem ex A B, B C ſimul ſumptis æquale parallelogrammum D E ad ipſam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis ſub A B, B C continetur æquale parallelogrammum D H ad eandem D K applicetur, latitudinem faciens D F: reliquum igitur F E eſt æquale quadrato ex A C [m]. Et quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C [n]; (nempe cum quadrata illa media ſint inter ſe commenſurabilia) erit et parallelogrammum D E medium. Et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D G: ergo D G eſt rationalis, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis [o]. Rurſus, quoniam medium eſt quod ſub A B, B C continetur; erit et quod bis continetur ſub A B, B C medium. Atqui eſt æquale parallelogrammo D H: ergo et D H eſt medium, et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D F: rationalis igitur eſt D F, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis. Et quoniam A B, B C potentiâ ſolum commenſurabiles ſunt; erit A B ipſi B C incommenſurabilis longitudine: ergo quadratum ex A B incommenſurabile eſt ei, quod ſub A B, B C continetur [p]. Sed quadrato quidem ex A B commenſurabile eſt compoſitum ex iis, quæ ex A B, B C fiunt, quadratis [q]; ei vero quod ſub A B, B C continetur commenſurabile eſt id quod bis continetur ſub A B, B C [r]. Compoſitum igitur ex quadratis A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur. D E autem eſt æquale quadratis ex A B, B C ſimul ſumptis; et parallelogrammum D H æquale eſt ei, quod bis continetur ſub A B, B C [s]: ergo D E ipſi D H eſt

[m] 7. ſecundi.
[n] 16. & Cor. Def. 12.* hujus.
[o] 23. hujus.
[p] 1. ſexti, & 10. hujus.
[q] 16. hujus.
[r] 6. hujus.
[s] Per conſtruct.

eſt incommenſurabile. Sed ut D B ad D H, ita recta linea G D ad D F[t]: incommenſurabilis igitur eſt G D ipſi D F longitudine. Sed ſunt ambæ rationales: quare G D, D F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ergo F G apotome eſt[u]. Et D K eſt rationalis. Quod autem ſub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt[x]; ideo et ipſum potens eſt irrationalis. Sed recta linea A C poteſt F E parallelogrammum: ergo A C eſt irrationalis: vocetur autem mediæ apotome ſecunda. *Q. E. D.*

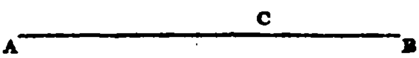
[t] 1. ſexti. [u] 74. hujus. [x] Cor. 39. hujus.

PROP. LXXVII. THEOR. [LXXVII.]

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem minor.

A rectâ lineâ A B auferatur recta B C, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, facienſque cum totâ A B compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis rationale, quod autem bis ſub A B, B C continetur medium: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis rationale eſt: quod autem bis ſub A B,



B C continetur medium; erit compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile ei, quod bis continetur ſub A B, B C. Ergo per converſionem, compoſitum ex quadratis ex A B, B C quadrato ex A C eſt incommenſurabile[y]. Sed compoſitum ex quadratis ex A B, B C rationale eſt[z]: irrationale igitur eſt quadratum ex A C; ideoque recta linea A C eſt irrationalis: vocetur autem minor. *Q. E. D.*

[y] 17. hujus. [z] ex hyp.

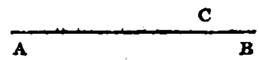
PROP.

LXXVIII.] PROP. LXXVIII. THEOR.

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium; quod autem sub A B, B C continetur, rationale: dico reliquam A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis continetur sub A B, B C rationale; erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis incommensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur. Et reliquum igitur quadratum ex A C incommensurabile est ei, quod bis continetur sub A B, B C [a]. Atqui est quod bis continetur sub A B, B C rationale: ergo quadratum ex A C irrationale est; et ob id recta linea A C irrationalis: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. *Q. E. D.*



[a] 17. hujus.

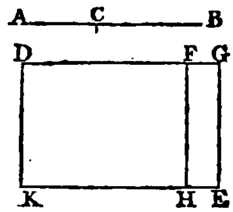
[LXXIX.] PROP. LXXIX. THEOR.

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium, quod autem sub A B, B C continetur medium; et adhuc quadrata ipsarum A B, B C incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis D K, et composito quidem ex quadratis ex AB, B C æquale parallelogrammum D E ad ipsam

ipſam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis continetur ſub A B, B C æquale auferatur D H, latitudinem faciens D F: ergo reliquum F E eſt æquale quadrato ex A C [b]; et ob id recta linea A C ipſum F E poteſt. [b] 7. ſecundi.



Itaque quoniam compoſitum ex ipſarum A B, B C quadratis medium eſt, et parallelogrammo D E æquale; erit ipſum D E medium. Sed ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D G. Quare D G eſt rationalis, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis [c]. Rurſus, quoniam id quod bis ſub A B, B C, continetur medium eſt, et æquale parallelogrammo D H, erit D H medium; et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D F. Ergo D F eſt rationalis, ipſique D K incommenſurabilis longitudine. Et quoniam compoſitum ex quadratis ex A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur; et parallelogrammum D E ipſi D H eſt incommenſurabile. Ut autem D E ad D H, ita eſt recta linea D G ad ipſam D F [d]: incommenſurabilis igitur eſt D G ipſi D F longitudine [e]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo D G, D F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles: apotome igitur eſt F G [f]. Sed F H eſt rationalis. Quod autem ſub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt [g]; ipſumque potens eſt irrationalis. Irrationale igitur eſt rectangulum F E, et quæ poteſt ipſum A C eſt irrationalis. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*

[c] 23. hujus. [d] 1. ſexti. [e] 10. hujus. [f] 74. hujus. [g] Cor.* 39. hujus.

PROP. LXXX. THEOR. [LXXX.]

Apotomæ una tantum congruit† recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Sit apotome A B, congruens autem ipſi ſit B C: ergo A C, C B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [h]. Dico ipſi A B alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti ‡. [h] 74. hujus.

† *Congruere* (προσαρμόζειν) *apotomæ Euclidi dicitur recta, quæ, in binomio per detractionem, nomen negativum conſtituit. Contra Totam appellat; quæ nomen poſitivum. Ut ſi ponatur* x — y = z. *Tota eſt* x, *Apotome* z, *Congruens* y.

‡ *Senſus eſt nullam aliam dari rationalem, quæ ipſi* A B *addita Totam efficiat ipſi rationali potentiâ ſolum commenſurabilem, præter illam* B C.

Si

Si enim fieri poteſt, congruat B D: ergo A D, D B
h 74. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[h]. Et quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id

A ——————————— D
B C

quod bis continetur ſub A D, D B, eo et quadrata ex A C, C B excedunt id quod bis ſub A C, C B continetur; (utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex A B) et permutando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et id, quod bis continetur ſub A D, D B, excedet id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quadrata ex A D, D B
i ex hyp. excedunt quadrata ex A C, C B rationali[i]: utraque enim rectarum linearum D B, C B rationalis eſt; necnon utraque ipſarum A D, A C. Quod igitur bis continetur ſub A D, D B excedit id quod bis ſub A C, C B continetur rationali; quod fieri non poteſt; ambo enim media ſunt,
k 27. hujus. medium autem medium non ſuperat rationali[k]. Ergo rectæ lineæ A B altera non congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti. *Q. E. D.*

[LXXXI.] PROP. LXXXI. THEOR.

Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim mediæ apotome prima A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, nempe quod
l 75. hujus. fit ſub A C, C B[l]. Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ rationale contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat D B: ergo A D, D B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles[l], quæ rationale continent, nempe quod fit ſub A D, D B. Et

A ——————————— D
B C

quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id, quod bis continetur ſub A D, D B, eodem et quadrata ex A C, C B excedunt quod bis ſub A C, C B continetur;
m 7. ſecundi. (excedunt enim eodem quadrato ex A B[m];) et permutando,

tando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur rationali; ambo enim rationalia ſunt. Ergo et quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali, quod fieri non poteſt; ambo enim ſunt media [n], medium autem medium non [n] ex hyp.
ſuperat rationali [o]. [o] 27. hujus.

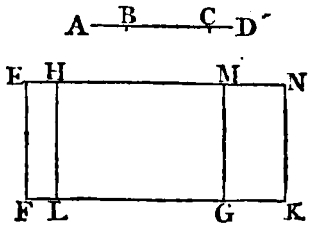
Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ ſolum toti ſit commenſurabilis, et cum totâ rationale contineat. *Q. E. D.*

PROP. LXXXII. THEOR. [LXXXII.]

Mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, mediumque continentes ſub A C, C B [p]. [p] 76. hujus.
Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ medium contineat.

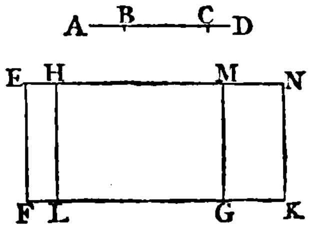
Si enim fieri poteſt, congruat B D. Quare A D, D B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium ſub A D, D B continent [p].



Exponatur rationalis E F, quadratiſque ex A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E M; et ei quod bis continetur ſub A C, C B æquale auferatur parallelogrammum H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur E L eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato [r]. Ergo A B ipſum E L po- [r] 7. ſecundi.
teſt. Rurſus, quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E N; eſt autem et E L æquale quadrato ex A B: reliquum igitur H K eſt æquale ei quod bis ſub A D, D B continetur [r]. Et quoniam mediæ ſunt A C, C B, potentiâ commenſurabiles; erunt et quadrata ex A C, C B media [s], [s] Def. 12. hujus.
inter ſe commenſurabilia. Quare et compoſitum ex

 quadratis

quadratis A C, C B (utrique ſcilicet eorum commenſu-
q 16. hujus. rabile[q]) medium erit[r]. Com-
r Cor. Def. 12.* hujus. poſito autem ex quadratis A C, C B æquale eſt parallelogrammum E G. Quare E G eſt medium, et ad rationalem E F applicatum eſt, latitudinem faciens E M: ergo E M eſt rationalis, ſed ipſi



s 23. hujus. E F longitudine incommenſurabilis[s]. Rurſus, quoniam medium eſt quod continetur ſub A C, C B; et quod bis ſub A C, C B continetur medium erit[r]. Atque eſt æquale parallelogrammo H G: ergo et H G eſt medium, et ad rationalem E F applicatum eſt, latitudinem faciens H M: rationalis igitur H M, ſed ipſi E F incommenſurabilis lon-
t ex hyp. gitudine[s]. Et quoniam A C, C B potentiâ ſolum ſunt commenſurabiles[t]; erit A C incommenſurabilis ipſi C B
u 1. ſexti. longitudine. Ut autem A C ad C B, ita quadratum ex A C ad id quod continetur ſub A C, C B[u]: incommenſurabile igitur eſt et quadratum ex A C ei, quod ſub A C, C B continetur. Sed quadrato quidem ex A C commenſurabilia ſunt quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta; ei vero,
x 16. hujus. quod continetur ſub A C, C B, commenſurabile eſt quod bis ſub A C, C B continetur[x]: ergo quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub A C, C B continetur. Atqui quadratis ex A C, C B ſimul
y Per conſtruct. ſumptis æquale eſt parallelogrammum E G; ei vero, quod bis ſub A C, C B continetur, æquale ipſum H G[y]: ergo E G ipſi H G eſt incommenſurabile. Sed ut E G ad H G, ita eſt recta linea E M ad ipſam H M[u]. Quare E M ipſi H M eſt incommenſurabilis longitudine. Et ſunt ambæ rationales. Ergo E M, H M rationales ſunt,
z 74. hujus. potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt E H, et ipſi congruens H M[z]. Similiter demonſtrabimus et H N ipſi congruere: apotomæ igitur
a 80. hujus. alia atque alia congruit recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti; quod fieri non poteſt[a].

Ergo mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ medium contineat. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. LXXXIII. THEOR. [LXXXIII.]

Minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.

Sit minor A B, et ipsi A B congruat B C: ergo A C, C B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium[c]. Dico ipsi A B alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat. [c] 77. hujus.

Si enim fieri potest, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem

sub ipsis continetur medium[c]. Et quoniam quo excessu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur sub A D, D B excedit id, quod bis sub A C, C B continetur[d]: quadrata autem ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali; ambo enim rationalia sunt[e]: igitur et quod bis continetur sub A D, D B id quod bis sub A C, C B continetur rationali excedet; quod fieri non potest[f]; etenim ambo sunt media[g], nimirum cum mediorum ex hypothesi sint dupla.

[d] 7. secundi.
[e] ex hyp.
[f] 27. hujus.
[g] Cor. Def. 12.* hujus.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod vero sub ipsis continetur medium. *Q. E. D.*

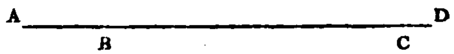
PROP. LXXXIV. THEOR. [LXXXIV.]

Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens A B, congruens autem ipsi B C: ergo A C, C B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum A C, C B quadratis medium, quod autem sub

[h] 78. hujus. ipſis continetur rationale [h]. Dico ipſi A B alteram non congruere, eadem facientem.

Si enim fieri poteſt, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A D, D B quadratis medium, quod



autem ſub ipſis continetur rationale [h]. Quoniam igitur quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem quod bis continetur ſub A D,
[i] 7. ſecundi. D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur [i]; quod autem bis continetur ſub A D, D B excedit id quod bis ſub A C, C B continetur rationali, etenim ambo rationalia ſunt, utpote ex hypotheſi rationalium dupla: igitur et quadrata ex A D, D B rationali excedent qua-
[k] 27. hujus. drata ex A C, C B; quod fieri non poteſt [k]; cum ambo ſint media. Non igitur ipſi A B altera congruit, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale. Quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, una tantum congruet recta linea. *Q. E. D.*

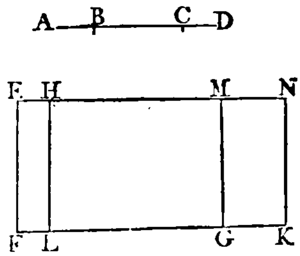
[LXXXV.] PROP. LXXXV. THEOR.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.

Sit cum medio medium totum faciens A B, ipſi vero congruens B C; ergo A C, C B potentiâ ſunt incom-
[l] 79. hujus. menſurabiles [l], facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis A C, C B, continetur medium; et adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B incommenſurabile ei, quod continetur ſub ipſis A C, C B. Dico ipſi A B alteram non congruere, potentiâ incommenſurabilem toti, et cum totâ facientem ea, quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, congruat B D; ita ut A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A D, D B quadratis medium; quod autem ſub ipſis A D, D B continetur medium; et adhuc

huc compositum ex quadratis ipsarum A D, D B incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis A D, D B. Exponatur rationalis E F; et quadratis ipsarum A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E M; ei vero quod bis continetur sub A C, C B æquale parallelogrammum auferatur H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur quadratum ex A B est æquale parallelogrammo E L [m]. Ergo A B ipsum E L potest. Rursus, [m] 7. secundi.
quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E N. Est autem et quadratum ex A B æquale parallelogrammo E L: ergo reliquum quod bis sub A D, D B continetur ipsi H K est æquale [m]. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum A C, C B medium est [n], et æquale [n] ex hyp.
parallelogrammo E G [o]; erit et E G medium. Et ad [o] Per construct.
rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens E M; quare E M est rationalis, sed ipsi E F longitudine incommensurabilis [p]. Rursus, quoniam quod bis sub [p] 23. hujus.
A C, C B continetur est medium, (medii utique duplum) et æquale ipsi H G; erit et H G medium; et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens H M: rationalis igitur est H M, sed ipsi E F incommensurabilis longitudine [p]. Et quoniam compositum ex quadratis ex A C, C B incommensurabile est ei, quod bis sub A C, C B continetur; erit et E G incommensurabile ipsi H G; ideoque recta linea E M rectæ M H longitudine est incommensurabilis [q]. Et sunt ambæ rationales. Cum [q] 1. sexti, &
igitur E M, M H rationales sint, potentiâ solum com- 10. hujus.
mensurabiles; recta linea E H apotome est, et ipsi congruens H M [r]. Similiter demonstrabimus E H rursus [r] 74. hujus.
apotomen esse, ipsique congruentem H N: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentiâ solum commensurabilis existens toti; quod fieri non posse ostensum est [s]. Non igitur ipsi A B altera congruet recta [s] 80. hujus.
linea. Ipsi igitur A B una tantum congruet, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,



quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei, quod continetur ſub ipſis. *Q. E. D.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

Definitio I.

Expoſitâ rationali et apotomâ, ſi quidem tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; ſitque tota expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis: vocetur apotome prima.

II.

Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, et tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

III.

Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, et tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

IV.

Rurſus ſi tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

V.

Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

VI.

Quod ſi neutra, dicatur apotome ſexta.

SCHOLION.*

Manifeſtum eſt, geminas eſſe Binomiorum per detractionem ſeries (ἑξάδα utramque) priorum, formâ algebraicâ, ſigno tantum diſſimiles.

Recenſio

Recensio Algebraica utriusque Ἐξάδος *per detractionem.*

Series Prima.

I. Apotome; $a - \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a - \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II. Mediæ apotome prima; $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a - \overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{3}{4}} a$.

III. Mediæ apotome secunda; $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a - \overline{\frac{p}{q}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}} a$.

IV. Minor; $\overline{\frac{1}{2}}\big|^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}.$

V. Cum rationali medium totum efficiens;

$$\overline{\frac{1}{2}}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\Big|^{\frac{1}{4}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}.$$

VI. Cum medio medium totum efficiens;

$$\overline{\frac{1}{2}}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{m}{n}}\Big|^{\frac{1}{4}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}.$$

Series Secunda.

I. Apotome prima; $a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a$.

II. Apotome secunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a - a$.

III. Apotome tertia; $\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}\, a$.

IV. Apotome quarta; $a - \sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a$.

V. Apotome quinta; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{\nu}}\, a - a$.

VI. Apotome sexta; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi}{\pi+\sigma}}\, a$.

Series autem secunda oritur ex divisione irrationalis ejus quæ prima est Seriei primæ in species, quas complexa eſt, diverſas. Quod de Serie ſecundâ earum quæ per compoſitionem ſimiliter monendum erat.

Neque illud diſſimulandum: tertiam et ſextam ſecundæ utriuſque ſeriei Algebraice aliâ formâ, et elegantiori, repræſentari poſſe.

Nimirum, Seriei ſecundæ earum quæ per compoſitionem

III^a^, quæ tertia eſt ex binis nominibus, hiſce notis ſignificabitur; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\,a.$

Hiſce, autem ejuſdem Seriei

VI^a^, quæ ſexta eſt ex binis nominibus

$\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\,a + \sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a.$

Seriei item ſecundæ earum, quæ per detractionem, hiſce notis

III^a^, quæ tertia eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\,a.$

Hiſce denique

VI^a^, quæ ſexta eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\,a - \sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a.$

Literâ ſcilicet m numerum aliquem non quadratum deſignante, qui neque ad quadratum ν, neque ad quadratorum ν, μ differentiam $\nu-\mu$, vel ſummam $\nu+\mu$, numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

[LXXXVI.] PROP. LXXXVI. PROBL.

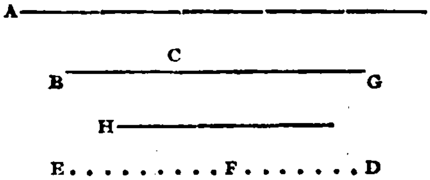
Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BG: ergo et BG eſt rationalis. Et exponantur duo quadrati numeri ED, BF, quorum exceſſus DF non ſit quadratus[t]: neque igitur ED ad DF rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Et fiat ut ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC.

[t] Cor. Lem. 4. hujus.

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex B G quadrato ex G C[t]. Rationale autem est quadratum ex B G; ergo[u] et quadratum ex G C est rationale: ideoque recta linea [u] 6. hujus.



G C rationalis est. Et quoniam E D ad D F rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est B G ipsi G C longitudine[x]. Et sunt ambæ rationales. [x] 9. hujus. Ergo B G, G C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id B C apotome est[y]. Dico et primam [y] 74. hujus. esse. Sit enim quadratum ex H id, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Et quoniam est ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per conversionem ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex H[z]. Sed D E ad E F rationem [z] Cor. 19. quinti. habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterque enim quadratus est[a]: ergo et quadratum [a] Per construct. ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est B G ipsi H longitudine[x]. Et B G plus potest quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poterit quam G C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Atqui est tota B G expositæ rationali A commensurabilis longitudine. Ergo B G est apotome prima[c]. [c] Def. Tert. 1. hujus.

Inventa igitur est prima apotome. *Q. E. F.*

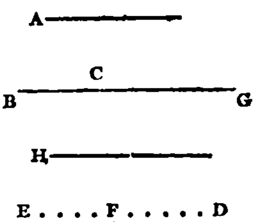
PROP. LXXXVII. PROBL. [LXXXVII.]

Invenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipsi A longitudine commensurabilis sit C G: ergo C G est rationalis. Et exponantur duo numeri quadrati D E, E F[d], quorum excessus [d] Cor. Lem. 4. hujus.

ceſſus D F non ſit quadratus. Fiatque ut F D ad D E, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex C G quadrato ex G B [e]. Sed quadratum ex C G eſt rationale: ergo et rationale eſt quadratum ex G B; ac propterea ipſa G B eſt rationalis. Et quoniam quadratum ex C G ad quadratum ex G B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit C G ipſi G B incommenſurabilis longitudine [f]. Et ambæ ſunt rationales. Ergo C G, G B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id B C eſt apotome [g]. Dico et ſecundam eſſe. Sit enim quadratum ex H illud, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Quoniam igitur eſt ut quadratum ex B G ad quadratum ex G C, ita E D numerus ad numerum D F; erit per converſionem rationis ut quadratum ex B G ad quadratum ex H, ita D E ad E F. Atque eſt uterque ipſorum D E, E F quadratus [h]: quadratum igitur ex B G ad quadratum ex H rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque B G ipſi H longitudine eſt commenſurabilis [f]. Et plus poteſt B G quam G C quadrato ex H [h]. Ergo B G plus poteſt quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Atqui eſt congruens C G expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine. Ergo B C eſt apotome ſecunda [i].



[e] 6. hujus.
[f] 9. hujus.
[g] 74. hujus.
[h] Per conſtruct.
[i] Def. Tert. 2. hujus.

Inventa igitur eſt ſecunda apotome B C. *Q. E. F.*

[LXXXVIII.]

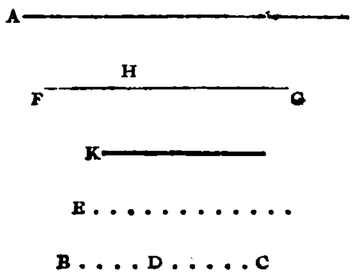
PROP. LXXXVIII. PROBL.

Invenire tertiam apotomen.

Exponantur duo numeri quadrati B C, B D, qui ipſo C D, non quadrato, differant. Exponatur alius non quadratus E, qui neque ad ipſum C D rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato[l] 6. hujus.
ex F G[l]. Atqui est quadratum ex A rationale: ergo et rationale est quadratum ex F G; ac propterea recta linea F G est rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine[m]. Rursus, quoniam est ut B C ad C D, ita[m] 9. hujus.
quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G quadrato ex G H commensurabile[l]. Rationale autem est quadratum ex F G; ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine[m]. Et sunt ambæ rationales. Ergo F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: ac propterea apotome est F H[n]. Dico et tertiam esse. Quo-[n] 74. hujus.
niam enim est ut E quidem ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H[o]. [o] 22. quinti.
Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum[p]; neque igitur quadra-[p] Per con-
tum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam struct.
numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis[m]. Neutra igitur ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo autem recta F G plus potest quam G H, sit illud quod ex K sit quadratum. Quoniam igitur ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H[p]; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K[q]. [q] Cor. 19.
quinti.



Sed

Sed numeri C B, B D ſunt quadrati. Ergo quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Com-
[r] 9. hujus. menſurabilis igitur eſt F G ipſi K longitudine [r]. Et plus poteſt F G quam G H quadrato ex K. Ergo F G plus poteſt quam G H quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et neutra ipſarum F G, G H longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A.
[s] Def. Tert. 3. hujus. Quare F H eſt apotome tertia [s].

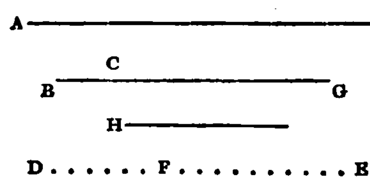
Inventa igitur eſt tertia apotome F H. *Q. E. F.*

[LXXXIX.]

PROP. LXXXIX. PROBL.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit B G: ergo B G eſt rationalis. Exponantur præterea duo numeri D F, F E; ita ut totus D E ad



neutrum ipſorum D F, E F rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: et fiat ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C.

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex B G qua-
[t] 6. hujus. drato ex G C [t]. Eſt autem quadratum ex B G rationale. Quare et rationale eſt quadratum ex G C; ideoque recta linea G C eſt rationalis. Et quoniam D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt B G
[u] 9. hujus. ipſi G C longitudine [u]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo B G, G C rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles;
[x] 74. hujus. et ob id B C eſt apotome [x]. Dico et quartam eſſe. Quo enim plus poteſt B G quam G C, ſit illud quadratum ex H. Et quoniam eſt ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per converſionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum

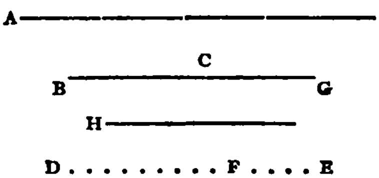
tum ex H. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum[y]. Incommensurabilis igitur est B G ipsi H longitudine[u]. Et plus potest B G quam G C quadrato ex H[y]. [y] ex hyp.
Ergo B G plus potest quam G C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Atqui est tota B G longitudine commensurabilis expositæ rationali A. Ergo B C est apotome quarta[z]. [z] Def. Tert. 4. hujus.

Inventa igitur est quarta apotome B C. *Q. E. F.*

PROP. XC. PROBL. [XC.]

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A; et ipsi A longitudine commensurabilis sit C G: ergo C G est rationalis. Et exponantur duo numeri D F, F E; ita ut D E ad utrumque



ipsorum D F, F E rationem rursus non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut F E ad E D, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Ergo quadratum ex C G commensurabile est quadrato ex G B[a]. Est autem quadratum ex C G rationale: ergo [a] 6. hujus.
et rationale est quadratum ex G B; et idcirco recta linea G B est rationalis. Et quoniam ut D E ad E F, ita est quadratum ex B G ad quadratum ex G C; et D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est B G ipsi G C longitudine[b]. Et sunt ambæ [b] 9. hujus.
rationales. Ergo B G, G C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id B C est apotome[c]. Dico et [c] 74. hujus.
quintam esse. Quo enim majus est quadratum ex B G quam quadratum ex G C, sit illud quadratum ex H.

Quoniam

Quoniam igitur quadratum ex B G ad quadratum ex G C eſt ut D E ad E F; erit per converſionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad id quod fit ex H quadratum. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ideoque recta linea B G ipſi H longitudine eſt incommenſurabilis [b]. Et plus poteſt B G quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poteſt quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Atqui eſt congruens C G expoſitæ rationali A longitudine commenſurabilis [c]. Quare B C eſt apotome quinta [d].

[b] 9. hujus.
[c] Per conſtruct.
[d] Def. Tert. 5. hujus.

Inventa igitur eſt quinta apotome B C. *Q. E. F.*

[XCI.]

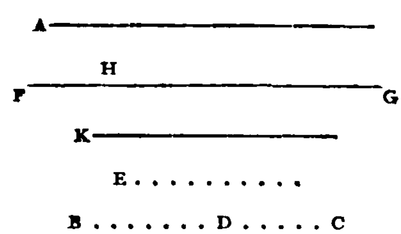
PROP. XCI. PROBL.

Invenire ſextam apotomen.

Exponantur duo numeri B D, D C tales, ut compoſitus ex ipſis, B C, ad neutrum ipſorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam numerus alius E, qui ad neutrum ipſorum B C, C D rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur recta linea rationalis A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Quoniam igitur eſt ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; erit quadratum ex A quadrato ex F G commenſurabile [e]. Rationale autem eſt quadratum

[e] 6. hujus.



ex A: ergo et quadratum ex F G rationale erit; et ob id recta linea F G rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum [f]; neque quadratum ex A ad quadratum

[f] Per conſtruct.

dratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine [g]. Rursus, quoniam est ut [c] B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G commensurabile quadrato ex G H [h]. Est autem quadratum ex F G rationale; rationale [h] igitur est et quadratum ex G H; et ipsa G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo F G ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Et sunt ambæ rationales. Quare F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; quapropter apotome est F H [i]. Dico et sextam esse. Quoniam enim est ut E ad [i] B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H. Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Quare neutra ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo plus potest recta F G quam G H, sit illud quadratum ex K. Et quoniam est ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [k]. At C B ad B D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo incommensurabilis est F G ipsi K longitudine [l]. Et [l] F G plus potest quam G H quadrato ex K. Plus igitur potest F G quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et neutra ipsarum F G, G H est longitudine commensurabilis expositæ rationali A. Ergo F H est apotome sexta [m].

Inventa est igitur sexta apotome F H. *Q. E. F.*

[c] 9. hujus.
[h] 6. hujus.
[i] 74. hujus.
[k] Cor. 19. quinti.
[l] 9. hujus.
[m] Def. Tert. 6. hujus.

SCHOLION.

* SCHOLION.

Submonendum videtur in Tyronum gratiam, quod tamen ex Definitionum collatione, tertiarum cum secundis, facile quivis colliget; binomiorum nomina singula, ex quibus constant, eodem modo inter se habere, sive per compositionem sive per detractionem sint binomia, modo ejusdem sint ordinis in propriâ cujusque Serie. Nimirum, Majoris quæ vocatur nomina eodem modo inter se habent, ac nomina Minoris. Cum Major quarta sit in Serie primâ irrationalium binominum per compositionem, Minor itidem Seriei secundæ earum quæ per detractionem quarta. Similiter secundæ earum quæ ex binis nominibus eodem modo inter se habent nomina, quo nomina secundæ apotomes. Cum secunda ex binis nominibus secundæ Seriei earum quæ per compositionem sit secunda; secunda autem apotome, Seriei secundæ earum quæ per detractionem secunda.

Hinc autem efficitur eam esse rectarum quæ ex binis nominibus, et earum quæ apotomæ dicuntur, inter se cognationem; ut si duarum irrationalium altera sit ex binis nominibus, altera ejusdem ordinis apotome, si majus nomen ejus quæ ex binis nominibus Tota sit apotomes; minus nomen prioris apotomes Congruens erit. E contrario, si minus nomen sit Congruens, majus Tota erit.

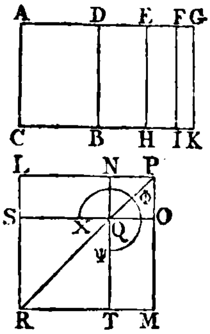
Neque tamen idcirco verum est, quod in Scholio imperiti nescio cujus hominis in libris antehac editis ferebatur, expeditius inveniendas esse sex apotomas, inveniendo eas quæ ex binis sunt nominibus, quam quâ ratione Euclides docuit; cum neque expeditior, neque facilior, neque alia est omnino, sed eadem plane illas quæ ex binis nominibus, quæ apotomas ipsas inveniendi ratio. Quod cuivis planum et apertum erit, qui problemata sex, quæ Definitiones Secundas subsecuta sunt, cum sex quæ tertias, ordine contulerit. Barrovius sane, nimio brevitatis studio, apotomarum constructiones omisit, utpote ex binominum prius traditis facillime colligendas. Sed de viâ ad apotomas per binomines expeditiori sapientissimo Geometræ tacere placuit.

PROP.

PROP. XCII. THEOR. [XCII.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ primâ, recta linea ſpatium potens apotome eſt.

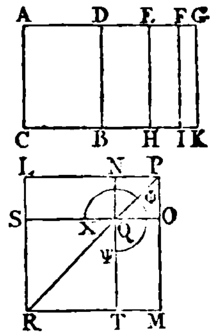
Contineatur enim ſpatium A B ſub rationali A C, et apotomâ primâ A D: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A B, apotomen eſſe.



Quoniam enim A D prima apotome eſt, ſit ipſi congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [r]. Et tota A G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; et præterea A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex D G, æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet [s]. Secetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Commenſurabilis igitur eſt A F ipſi F G longitudine. Et per E, F, G puncta ipſi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Et quoniam A F ipſi F G longitudine eſt commenſurabilis; erit et A G utrique ipſarum A F, F G commenſurabilis longitudine [t]. Sed A G commenſurabilis eſt ipſi A C: utraque igitur A F, F G ipſi A C longitudine eſt commenſurabilis [u]. Atqui eſt A C rationalis: ergo et rationalis utraque A F, F G; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K eſt rationale [x]. Cæterum D G utrique D E, E G commenſurabilis eſt longitudine nimirum cum utriuſque ſit dupla. Eſtque rationalis D G, ſed ipſi A C longitudine incommenſurabilis: ergo et utraque D E, E G rationalis eſt, et incommenſurabilis ipſi A C longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum D H, E K medium eſt [y]. Ponatur ipſi quidem A I parallelogrammo æquale quadratum L M [z]: parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur, communem cum ipſo angulum L P M habens, ſcilicet N O: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [a]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur. Itaque

[r] Def. Tert. 1. hujus.
[s] 18. hujus.
[t] 16. hujus.
[u] 12. hujus.
[x] 20. hujus.
[y] 22. & Cor. Def. 2. hujus.
[z] 14. ſecundi.
[a] 26. ſexti.

quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G, erit ut A F ad E G, ita E G ad F G [b]. Sed ut A F ad E G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K; et ut E G ad F G, ita parallelogrammum E K ad ipsum F K [c]. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N, ut superius ostensum est [d]; parallelogrammumque A I est æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K quadrato N O æquale [e]. Ergo et parallelogrammum M N est æquale ipsi E K.



[b] 17. sexti. [c] 1. sexti. [d] Lemma 7. hujus. [e] Per construct.

Sed parallelogrammum quidem E K est æquale parallelogrammo D H [f]; parallelogrammum vero M N ipsi L O [g]. Parallelogrammum igitur D K est æquale gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O. Est autem et parallelogrammum A K quadratis L M, N O æquale [e]: ergo et reliquum A B est æquale quadrato S T. At quadratum S T est id, quod fit ex L N: quadratum igitur ex L N est æquale parallelogrammo A B; ideoque recta linea L N ipsum A B potest. Dico L N apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum A I, F K, et sunt æqualia quadratis L M, N O; erit et utrumque L M, N O rationale, hoc est, utrumque ipsorum, quæ fiunt ex L P, P N; et utraque igitur L P, P N rationalis est. Rursus, quoniam parallelogrammum D H est medium, atque est æquale ipsi L O; erit et L O medium. Cum igitur L O quidem medium sit, N O vero rationale; incommensurabile est L O ipsi N O; utque L O ad N O, ita est recta linea L P ad P N [h]. Ergo L P ipsi P N longitudine est incommensurabilis [i]. Et sunt ambæ rationales. Quare L P, P N rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: idcirco L N est apotome [k]. Et potest spatium A B. Quæ igitur potest spatium A B, est apotome.

[f] 36. primi. [g] 43. primi. [h] 1. sexti. [i] 10. hujus. [k] 74. hujus.

Ergo si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est. *Q. E. D.*

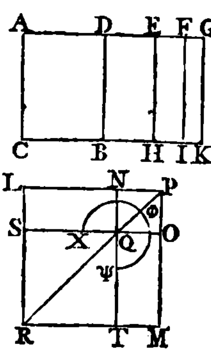
PROP.

PROP. XCIII. THEOR. [XCIII.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ secundâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

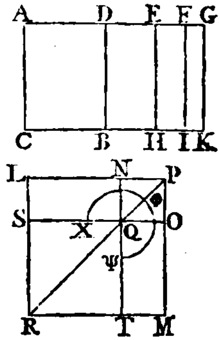
Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ secundâ A D: dico rectam lineam, quæ spatium A B potest, esse mediæ apotomen primam.

Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et congruens D G commensurabilis est expositæ rationali A C; totaque A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[l]. Quoniam igitur A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quartæ parti quadrati ipsius G D æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet[m]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ipsius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub A F, F G. Ergo commensurabilis est A F ipsi F G longitudine. Et per puncta E, F, G ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Quoniam igitur A F ipsi F G longitudine est commensurabilis; erit A G utrique ipsarum A F, F G commensurabilis longitudine[n]. Rationalis autem est A G, sed ipsi A C longitudine incommensurabilis: ergo et utraque A F, F G est rationalis, ipsique A C incommensurabilis longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum A I, F K medium est[o]. Rursus, quoniam D E commensurabilis est ipsi E G; erit et D G utrique D E, E G commensurabilis. Sed D G commensurabilis est ipsi A C longitudine. Ergo et utraque D E, E G rationalis est, et ipsi A C longitudine commensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum D H, E K est rationale[p]. Constituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M[q]; parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur N O, communem cum ipso L M angulum L P M habens: ergo



[l] Def. Tert. 2. hujus.
[m] 18. hujus.
[n] 16. hujus.
[o] 22. hujus.
[p] 20. hujus.
[q] 14. secundi.

q 26. ſexti. ergo circa eandem diametrum ſunt quadrata L M, N O[q]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur. Cum igitur parallelogramma A I, F K media ſint, et ſibi ipſis commenſurabilia, et æqualia quadratis ex L P, P N; erunt et quadrata ex L P, P N media: ergo rectæ lineæ L P, P N mediæ ſunt, potentiâ commenſurabiles. Et quoniam rectangulum ſub A F, F G eſt æquale quadrato ex E G; erit ut A F ad E G, ita E G



r 17. ſexti. ad G F[r]. Sed ut A F ad E G, ita eſt parallelogrammum A I ad ipſum

s 1. ſexti. E K[s]; ut autem E G ad G F, ita parallelogrammum E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale eſt E K. Eſt autem et inter qua-

t Lemma 7. hujus. drata L M, N O medium proportionale M N[t]; et paral-

u Per conſtruct. lelogrammum A I quidem eſt æquale quadrato L M[u]; parallelogrammum vero F K æquale quadrato N O. Ergo

x 36. primi. M N ipſi E K eſt æquale. Sed D H eſt æquale ipſi E K[x],

y 43. primi. et L O ipſi M N[y]. Totum igitur D K gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O æquale erit. Itaque quoniam totum A K æquale eſt quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Ψ Φ X et quadrato N O; erit reliquum A B æquale S T, hoc eſt, ei, quod fit ex L N. Quadratum igitur ex L N eſt æquale ſpatio A B; ideoque recta linea L N ſpatium A B poteſt. Dico L N mediæ apotomen eſſe primam. Quoniam enim rationale eſt E K, et æquale ipſi M N, hoc eſt, ipſi L O; erit et L O rationale, illud ſc. quod ſub L P, P N continetur. Medium autem oſtenſum eſt N O. Quare L O eſt incommenſurabile ipſi N O;

z 1. ſexti. et ut L O ad N O, ita L P ad P N[z]: ergo L P, P N longitudine ſunt incommenſurabiles. Ac propterea L P, P N mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ ratio-

a 75. hujus. nale continent. Quare L N eſt mediæ apotome prima[a]; et poteſt ſpatium A B. Recta igitur linea, ſpatium A B potens, eſt mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

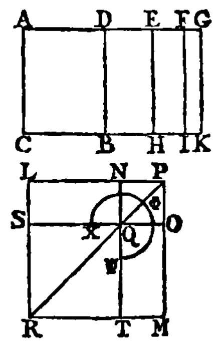
PROP.

PROP. XCIV. THEOR. [XCIV.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ tertiâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome secunda.

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ tertiâ A D: dico rectam lineam, quæ potest spatium A B, mediæ esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum A G, G D longitudine commensurabilis est expositæ rationali A C; tota autem A G plus potest quam congruens D G quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[b]. Quoniam ideo recta A G plus potest quam D G quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: si quartæ parti quadrati ipsius D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet[c].



[b] Def. Tert. 3. hujus.

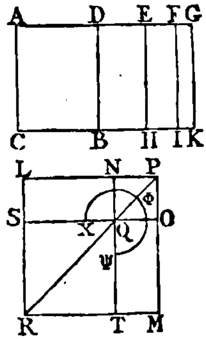
[c] 18. hujus.

Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ipsius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, sitque quod continetur sub A F, F G; et per puncta E, F, G ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Ergo A F, F G commensurabiles sunt; atque ob id parallelogrammum A I parallelogrammo F K est commensurabile. Et quoniam A F, F G commensurabiles sunt longitudine; erit et A G utrique ipsarum A F, F G longitudine commensurabilis[d]. Est autem rationalis A G, sed ipsi A C incommensurabilis longitudine; et utraque igitur A F, F G rationalis est, et ipsi A C longitudine incommensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K est medium[e]. Rursus quoniam D E commensurabilis est ipsi E G longitudine; erit et D G utrique D E, E G commensurabilis. Sed D G rationalis est, et ipsi A C incommensurabilis longitudine: rationalis igitur est et utraque D E, E G, et ipsi A C longitudine incommensurabilis. Ergo utrumque parallelogrammorum D H, E K medium est[e]. Quod cum A G, G D potentiâ solum commensurabiles sint; A G ipsi G D longitudine erit incommensurabilis. Sed A G commensurabilis

[d] 16. hujus.

[e] 22. hujus.

mensurabilis est ipsi AF longitudine, et DG ipsi GE: est igitur AF ipsi EG longitudine incommensurabilis[f]. Ut autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum[g]: ergo incommensurabile est AI ipsi EK. Constituatur ipsi quidem AI æquale quadratum LM[h]; ipsi vero FK æquale auferatur quadratum NO, angulum habens eundem, quem LM: ergo quadrata LM, NO circa eandem sunt diametrum[i]. Sit ipsorum diameter PR; et figura describatur. Quoniam igitur rectangulum sub AF, FG est æquale quadrato ex EG; erit ut AF ad EG, ita EG ad FG[k]. Ut autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum[g]; et ut EG ad GF, ita EK ad FK. Ergo et ut AI ad EK, ita EK ad FK. Inter parallelogramma igitur AI, FK medium proportionale est EK. Est autem et inter quadrata LM, NO medium proportionale MN; et parallelogrammum AI quidem æquale est quadrato LM, FK vero ipsi NO[l]: ergo et EK est æquale MN. Sed MN æquale est LO[m], et EK ipsi DH[n]. Totum igitur DK gnomoni ΨΦX et quadrato NO est æquale. Est autem et parallelogrammum AK æquale quadratis LM, NO. Ergo reliquum AB est æquale ipsi ST, hoc est, quadrato ex LN; et ob id recta linea LN ipsum AB spatium potest. Dico LN mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim parallelogramma AI, FK ostensa sunt media, et sunt æqualia quadratis ex LP, PN; erit et utrumque quadratorum ex LP, PN medium; igitur utraque recta linea LP, PN media est. Et quoniam commensurabile est AI ipsi FK; erit et quadratum ex LP quadrato ex PN commensurabile. Rursus, quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi EK; et LM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est, quadratum ex LP rectangulo sub LP, PN. Quare et recta linea LP longitudine incommensurabilis est ipsi PN. Sunt igitur LP, PN mediæ, potentia solum commensurabiles. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim EK demonstratum est medium, atque est æquale rectangulo sub LP, PN; erit et rectangulum sub LP, PN medium.



[f] 13. hujus.
[g] 1. sexti.
[h] 14. secundi.
[i] 26. sexti.
[k] 17. sexti.
[l] Per construct.
[m] 43. primi.
[n] 36. primi.

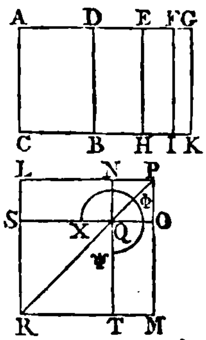
Ergo

Ergo L P, P N mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea L N eſt mediæ apotome ſecunda[o]; et poteſt ſpatium A B. Recta [o] 76. hujus.
igitur linea, ſpatium A B potens, eſt mediæ apotome ſecunda. *Q. E. D.*

PROP. XCV. THEOR. [XCV.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quartâ, recta linea ſpatium potens minor eſt.

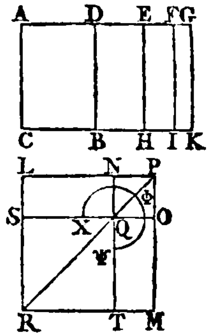
Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quartâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, minorem eſſe.



Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et A G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis[p]. Quoniam igitur A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet[q]. Itaque ſecetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F ipſi F G longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta E, F, G ipſis A C, B D parallelæ E H, F I, G K. Quoniam igitur A G rationalis eſt, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; erit totum parallelogrammum A K rationale[r]. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt D G ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum D K medium[s]. Quod cum A F ipſi F G longitudine ſit incommenſurabilis; erit et parallelogrammum A I incommenſurabile F K[t]. Conſtituatur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; parallelogrammo autem F K æquale quadratum N O auferatur, angulum habens eundem L P M, quem L M. Quadrata igitur L M, N O circa eandem ſunt diametrum[u]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur.

[p] Def. Tert. 4. hujus.
[q] 19. hujus.
[r] 20. hujus.
[s] 22. hujus.
[t] 1. ſexti.
[u] 26. ſexti.

scribatur. Itaque quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G; ut A F ad E G, ita erit E G ad G F [u]. Sed ut A F quidem ad E G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K [x]: ut autem E G ad F G, ita E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N; atque est parallelogrammum A I æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K æquale est ipsi N O [y]: est igitur E K æquale ipsi M N. Sed E K quidem est æquale parallelogrammo D H [z]; M N vero ipsi L O [a]. Totum igitur parallelogrammum gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O est æquale. Et quoniam totum A K æquale est quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Ψ Φ X, et N O quadrato; erit reliquum A B æquale quadrato S T, hoc est, quadrato ex L N: ergo L N spatium A B potest. Dico L N irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum A K rationale est, et æquale quadratis ipsarum L P, P N; erit et compositum ex quadratis ipsarum L P, P N rationale. Rursus, quoniam parallelogrammum D K medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur sub L P, P N; erit et quod bis sub L P, P N continetur medium. Et quoniam ostensum est A I incommensurabile ipsi F K; erit et quadratum ex L P incommensurabile quadrato ex P N; ac propterea L P, P N potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium. Quare L N irrationalis est, quæ minor appellatur [b]. Et potest spatium A B. Recta igitur linea, spatium A B potens, minor est. *Q. E. D.*



[u] 17. sexti.
[x] 1. sexti.
[y] Per construct.
[z] 36. primi.
[a] 43. primi.
[b] 77. hujus.

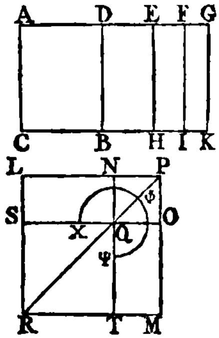
PROP.

PROP. XCVI. THEOR. [XCVI.]

Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quintâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit.

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quintâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, eſſe eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et congruens D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam D G quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine[c]. Si igitur quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet[d]. Itaque ſecetur D G bifariam in puncto E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F incommenſurabilis eſt ipſi F G longitudine. Ducantur per puncta E, F, G ipſi A C parallelæ E H, F I, G K. Et quoniam A G incommenſurabilis eſt ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum A K medium[e]. Rurſus, quoniam rationalis eſt D G, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; parallelogrammum D K rationale erit[f]. Conſtituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; ipſi vero F K æquale quadratum auferatur N O, angulum habens eundem, quem L M, videlicet L P M: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum[g]. Sit diameter ipſorum P R; et figura deſcribatur. Similiter oſtendemus rectam lineam L N ſpatium A B poſſe. Dico L N eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim oſtendimus parallelogrammum A K medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum L P, P N; erit et compoſitum ex quadratis ipſarum L P, P N medium. Rurſus, quoniam D K rationale eſt, et æquale ei, quod bis



c Def. Tert. 5. hujus.

d 19. hujus.

e 22. hujus.

f 20. hujus.

g 26. ſexti.

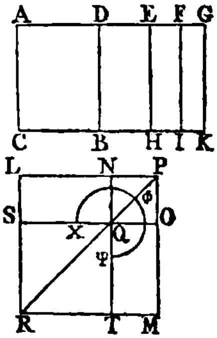
bis continetur sub L P, P N; erit et quod bis sub L P, P N continetur rationale. Et quoniam A I est incommensurabile ipsi F K, incommensurabile igitur est quadratum ex L P quadrato ex P N; ideoque L P, P N potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis bis continetur rationale. Ergo reliqua L N irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens [h]; et potest spatium A B. Recta igitur linea, spatium A B potens, est quæ cum rationali medium totum efficit. *Q. E. D.*

h 78. hujus.

[XCVII.] PROP. XCVII. THEOR.

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ sextâ, recta linea spatium potens est quæ cum medio medium totum efficit.

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ sextâ A D: dico rectam lineam, quæ spatium A B potest, esse eam quæ cum medio medium totum efficit.



Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum A G, G D commensurabilis est longitudine expositæ rationali A C; totaque A G plus potest quam congruens D G quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis [i]. Itaque quoniam A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: si quartæ parti quadrati ex D G æquale ad rectam lineam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividet [k]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, nempe quod continetur sub A F, F G. Incommensurabilis igitur est A F ipsi F G longitudine. Ut autem A F ad F G, ita est A I ad ipsum F K [l]: ergo A I ipsi F K est incommensurabile [m]. Et quoniam A G, A C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; erit A K medium [n]. Rursus, quoniam

i Def. Tert. 6. hujus.
k 19. hujus.
l 1. sexti.
m 10. hujus.
n 22. hujus.

quoniam A C, D G rationales sunt, et incommensurabiles longitudine, medium erit et D K. Quod cum A G, G D potentiâ solum commensurabiles sint; erit A G ipsi G D longitudine incommensurabilis. Sed ut A G ad G D, ita est A K ad K D [o]: incommensurabile igitur est A K ipsi K D [p]. Itaque constituatur parallelogrammo A I æquale quadratum L M [q]; parallelogrammo autem F K æquale auferatur quadratum N O, angulum habens eundem, quem L M. Ergo quadrata L M, N O circa eandem sunt diametrum [r]. Sit eorum diameter P R; et figura describatur. Similiter ut supra ostendemus rectam lineam L N posse spatium A B. Dico L N esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim A K ostensum est medium, atque est æquale quadratis ipsarum L P, P N; erit et compositum ex quadratis ipsarum L P, P N medium. Rursus, quoniam D K ostensum est medium, et est æquale ei, quod bis continetur sub L P, P N; et quod bis sub L P, P N continetur medium erit. Et quoniam ostensum est A K incommensurabile ipsi K D; ergo et quadrata ex L P, P N incommensurabilia sunt ei, quod bis sub L P, P N continetur. Et quoniam incommensurabile est A I ipsi F K; erit et quadratum ex L P quadrato ex P N incommensurabile. Ergo L P, P N potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur medium, et adhuc quadrata ipsarum incommensurabilia ei, quod bis sub ipsis continetur. Ergo L N irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens [s]. Et potest A B spatium. Recta igitur linea, spatium A B potens, est quæ cum medio medium totum efficit. *Q. E. D.*

[o] 1. sexti.
[p] 10. hujus.
[q] 14. secundi.
[r] 26. sexti.
[s] 79. hujus.

PROP. XCVIII. THEOR. [XCVIII.]

Quadratum apotomæ, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam.

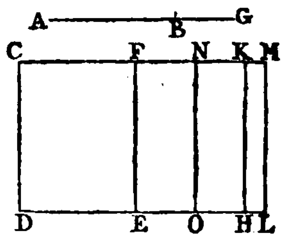
Sit apotome A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F esse apotomen primam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [t]. Et ad ipsam C D applicetur quadrato quidem ex A G æquale

[t] 74. hujus.

C H;

[u] 45. primi. C H; quadrato autem ex B G æquale K L [u]. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B; ex quibus parallelogrammum C E æquale est quadrato ex A B. Ergo reliquum F L ei, quod bis sub A G,
[x] 7. secundi. G B continetur, est æquale [x]. Secetur F M bifariam in N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur ipsorum F O, L N est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quadrata ex A G, G B



rationalia sunt, atque est quadratis ex A G, G B æquale parallelogrammum D M; erit ipsum D M rationale. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: ergo C M est rationalis, et ipsi C D commensura-
[y] 21. hujus. bilis longitudine [y]. Rursus, quoniam medium est quod bis continetur sub A G, G B, estque ei, quod bis sub A G, G B continetur, æquale parallelogrammum L F; erit ipsum L F medium. Et applicatum est ad rationalem C D, latitudinem faciens F M. Quare F M est ra-
[z] 23. hujus. tionalis, ipsique C D longitudine incommensurabilis [z]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B rationalia sunt; quod autem bis continetur sub A G, G B medium: quadrata ex A G, G B incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A G, G B continetur. Sed quadratis ex A G, G B æquale est parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur sub A G, G B æquale est F L: ergo C L ipsi F L est incommensurabile. Ut autem C L ad F L, ita est
[a] 1. sexti. recta linea C M ad M F [a]: incommensurabilis igitur est C M ipsi M F longitudine. Et sunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commen-
[b] 74. hujus. surabiles; ac propterea C F est apotome [b]. Dico et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex A G, G B
[c] Lemma 7. hujus. medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur [c]; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelo-
[d] Per construct. grammum C H [d]; ei vero quod sub A G, G B continetur æquale N L; et quadrato ex B G æquale K L: erit inter ipsa C H, K L medium proportionale N L. Ut igitur C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M. Ut autem N L ad K L, ita recta linea N M ad M K: ergo ut C K ad N M, ita est

N M

N M ad K M; et ob id rectangulum ſub C K, K M eſt æquale quadrato ex M N [d], hoc eſt, quartæ parti quadrati ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commenſurabile eſt quadrato ex G B [e]; erit et parallelogrammum C H parallelogrammo K L commenſurabile. Sed ut C H ad K L, ita eſt recta linea C K ad ipſam K M; commenſurabilis igitur eſt C K ipſi K M [f]. Itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales ſint C M, M F, et quartæ parti quadrati ex F M æquale parallelogrammum ad ipſam C M applicatum ſit, deficiens figurâ quadratâ, quod ſcilicet ſub C K, K M continetur; ſitque C K commenſurabilis ipſi K M: recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [g]. Atqui eſt C M commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt prima apotome [h].

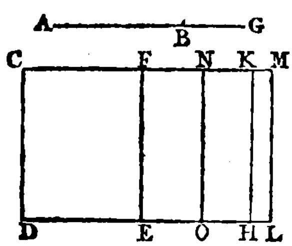
[d] 17. ſexti.
[e] ex hyp.
[f] 10. hujus.
[g] 18. hujus.
[h] Def. Tert. 1. hujus.

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. *Q. E. D.*

PROP. XCIX. THEOR. [XCIX.]

Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam.

Sit mediæ apotome prima A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F; dico C F eſſe apotomen ſecundam.

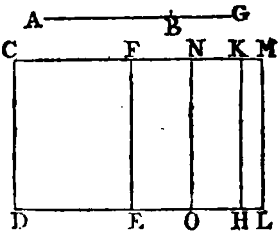


Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent [i]. Et quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H ad C D applicetur, latitudinem faciens C K [k]; quadrato autem ex G B æquale K L ad eandem applicetur, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, quæ media ſunt. Quare et C L eſt medium. Et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem faciens C M: rationalis igitur eſt C M, et ipſi C D longitudine incommenſurabilis [l]. Itaque quoniam C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus quadratum ex A B æquale eſt parallelogrammo

C E;

[i] 75. hujus.
[k] 45. primi.
[l] 23. hujus.

C E; erit reliquum, sc. quod bis continetur sub A G,
m 7. secundi. G B, æquale ipsi F L [m]. Est autem quod bis sub A G, G B continetur rationale. Rationale igitur est et F L; et ad rationalem F E applicatum est, latitudinem faciens F M. Quare F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis lon-
n 21. hujus. gitudine [n]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B, hoc est, parallelogrammum C L, medium est; quod autem



bis continetur sub A G, G B, videlicet F L, est rationale: erit C L incommensurabile ipsi F L. Ut autem C L ad
o 1. sexti. F L, ita recta linea C M ad M F [o]: ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis. Et sunt ambæ rationales. Sunt igitur C M, M F rationales, potentiâ solum
p 74. hujus. commensurabiles: ideoque C F est apotome [p]. Dico et secundam esse. Secetur enim F M bifariam in puncto N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L est æquale ei, quod continetur sub A G, G B. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur; estque quadratum ex A G æquale parallelogrammo C H, quod autem continetur sub A G, G B æquale parallelogrammo N L, et quadratum ex G B æquale ipsi K L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M, et ut N L ad K L, ita N M ad K M [o]. Ergo ut C K ad N M, ita est N M ad K M: ac propterea
q 17. sexti. rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex N M [q]; hoc est, quartæ parti quadrati ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B; erit et C H parallelogrammum parallelogrammo K L commensurabile, hoc est, recta linea C K commensurabilis ipsi K M. Quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F, quartæ autem parti quadrati ex M F æquale ad majorem C M applicatum sit, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub C K, K M, et in partes commensurabiles ipsam dividat; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi
r 18. hujus. commensurabilis longitudine [r]. Atque est congruens F M

expositæ

expositæ rationali C D commensurabilis [s]. Quare C F est apotome secunda [t]. [s] ex hyp. [t] Def.

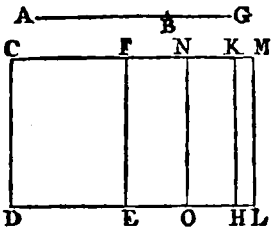
Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. *Q. E. D.* Tert. 2. hujus.

PROP. C. THEOR. [C.]

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit mediæ apotome secunda A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F esse apotomen tertiam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent [u]. Et quadrato quidem ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K [x]; quadrato autem ex G B æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B. Et sunt

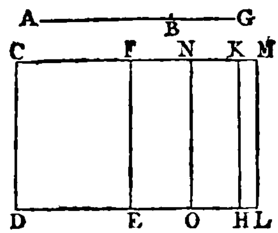


[u] 76. hujus. [x] 45. primi.

quadrata ex A G, G B media. Ergo et C L est medium; et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: ergo C M est rationalis, sed ipsi C D incommensurabilis longitudine [y]. Et quoniam totum C L est æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus C E æquale est quadrato ex A B; erit reliquum F L æquale ei, quod bis continetur sub A G, G B [z]. Secetur F M bifariam in N; et ipsi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Est autem quod continetur sub A G, G B medium: ergo et medium est F L; et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens F M. Quare et F M est rationalis, sed ipsi C D longitudine incommensurabilis [y]. Et quoniam A G, G B potentiâ solum commensurabiles sunt; erit A G ipsi G B incommensurabilis longitudine: ideoque quadratum ex A G rectangulo sub A G, G B est incommensurabile [a]. Sed quadrato quidem ex A G commensurabilia sunt ex A G, G B quadrata; rectangulo autem sub A G, G B commensurabile est

[y] 23. hujus. [z] 7. secundi. [a] 1. sexti. & 10. hujus.

eſt quod bis ſub A G, G B continetur: ergo quadrata ex A G, G B ſunt incommenſurabilia ei, quod bis ſub A G, G B continetur. At quadratis ex A G, G B æquale eſt parallelogrammum C L [b]; ei vero, quod bis continetur ſub A G, G B, æquale eſt F L: incommenſurabile igitur eſt C L ipſi F L. Ut autem C L ad F L, ita eſt recta linea C M ad F M: ergo C M ipſi F M incommenſurabilis eſt longitudine [c]. Et ſunt ambæ rationales. Quare C M, F M rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id C F eſt apotome [d]. Dico et tertiam eſſe. Quoniam enim quadratum ex A G commenſurabile eſt quadrato ex G B; erit parallelogrammum C H parallelogrammo K L commenſurabile: ergo et recta linea C K eſt commenſurabilis ipſi K M. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub A G, G B [e]; atque eſt quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H; quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo ſub A G, G B æquale N L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Eſt igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita eſt recta linea C K ad N M [f]; ut autem N L ad K L, ita N M ad K M; ergo et ut C K ad N M, ita N M ad K M. Ac propterea rectangulum ſub C K, K M eſt æquale quadrato ex N M [g], hoc eſt, quartæ parti quadrati ex F M. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex F M æquale ad C M applicatum eſt, deficiens figurâ quadratâ, quod in partes commenſurabiles ipſam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [h]. Et neutra ipſarum C M, M F longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt apotome tertia [l].



[b] Per conſtruct.

[c] 10. hujus.

[d] 74. hujus.

[e] Lemma 7. hujus.

[f] 1. ſexti.

[g] 17. ſexti.

[h] 18. hujus.

[l] Def. Tert. 3. hujus.

Quadratum igitur mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. *Q. E. D.*

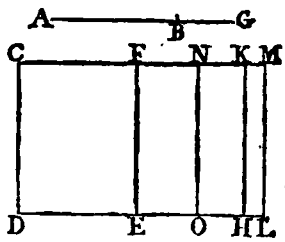
PROP.

PROP. CI. THEOR. [CI.]

Quadratum minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen quartam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A G, G B quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium[k]. Quadrato igitur ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K[l]: quadrato autem ex B G æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M.



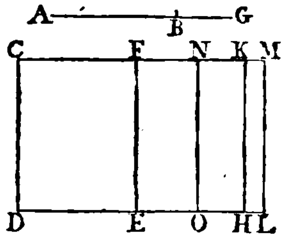
[k] 77. hujus.
[l] 45. primi.

Totum igitur C L quadratis ex A G, G B eſt æquale. Atqui eſt compoſitum ex quadratis A G, G B rationale: ergo et rationale eſt C L; et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem faciens C M. Quare C M eſt rationalis, et ipſi C D longitudine commenſurabilis[m]. Et quoniam totum C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur[n]. Itaque ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N alterutri ipſarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale ei, quod continetur ſub A G, G B. Et quoniam quod bis continetur ſub A G, G B medium eſt, et æquale parallelogrammo L F: erit et L F medium; et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M. Ergo F M eſt rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis[o]. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A G, G B eſt rationale, quod autem bis ſub A G, G B continetur medium; erunt quadrata ex A G, G B ei, quod bis continetur ſub A G, G B, incommenſurabilia. Quadratis autem ex A G, G B æquale eſt parallelogrammum C L, et ei, quod bis ſub A G, G B continetur, eſt æquale F L: incommenſurabile igitur eſt C L ipſi L F. Sed ut C L

[m] 21. hujus.
[n] 7. ſecundi.
[o] 23. hujus.

C C ad

[p] 1. sexti. ad F L, ita est C M ad F M [p]. Quare C M ipsi F M longitudine est incommensurabilis [q]. Et sunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et igitur C F est apotome [r]. Dico et quartam esse. Quoniam enim A G, G B potentiâ sunt incommensurabiles; erit quadratum ex A G incommensurabile quadrato ex G B. Et quadrato quidem ex A G æquale est parallelogrammum C H [s]; quadrato autem ex G B est æquale K L: incommensurabile igitur est C H ipsi K L. Sed ut C H ad K L, ita est C K ad K M. Ergo C K ipsi K M est incommensurabilis longitudine. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est rectangulum sub A G, G B [t]; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo sub A G, G B æquale N L; erit N L medium proportionale inter parallelogramma C H, K L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita C K ad M N. Et ut N L ad K L, ita M N ad K M. Ergo ut C K ad M N, ita M N ad K M; ac propterea rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex M N [u], hoc est, quartæ parti quadrati ex M F. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex M F æquale, ad C M applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, sc. contentum sub C K, K M; et in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine [x]. Et est tota C M longitudine commensurabilis expositæ rationali C D. Ergo C F est apotome quarta [y].



Quadratum igitur minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam. *Q. E. D.*

[p] 1. sexti.
[q] 10. hujus.
[r] 74. hujus.
[s] Per construct.
[t] Lemma 7. hujus.
[u] 17. sexti.
[x] 19. hujus.
[y] Def. Tert. 4. hujus.

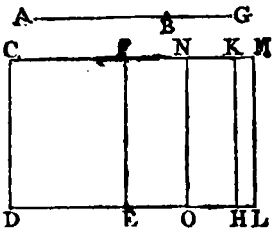
PROP.

PROP. CII. THEOR. [CII.]

Quadratum ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quæ cum rationali medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale ad C D applicetur parallelogrammum C E, latitudinem faciens C F: dico C F apotomen esse quintam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B rectæ lineæ potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale[a]. Et quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C K[a]; quadrato autem ex G B æquale applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B. Sed compositum ex quadratis ipsarum A G, G B est medium: ergo et medium est parallelogrammum C L. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M. Quare C M est rationalis, sed ipsi C D longitudine incommensurabilis[b]. Et quoniam totum C L est æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis sub A G, G B continetur[c]. Itaque secetur F M bifariam in puncto N, et ab ipso N alterutri ipsarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur F O, N L est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quod bis continetur sub A G, G B rationale est, et æquale parallelogrammo F L; erit et F L rationale. Et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens F M. Ergo F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis longitudine[d]. Et quoniam parallelogrammum C L est medium, et F L rationale: incommensurabile est C L ipsi F L. Et ut C L ad F L, ita C M ad M F[e]. Ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis[f]. Et sunt ambæ rationales; quare C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ideoque C F est apotome[g]. Dico et quintam esse.



[a] 78. hujus.
[a] 45. primi.
[b] 23. hujus.
[c] 7. secundi.
[d] 21. hujus.
[e] 1. sexti.
[f] 10. hujus.
[g] 74. hujus.

Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub C K, K M esse æquale quadrato ex N M, hoc est, quartæ parti quadrati ex F M [h]. Quod cum quadratum ex A G incommensurabile sit quadrato ex G B; sitque quadratum ex A G parallelogrammo C H æquale, quadratum autem ex G B parallelogrammo K L: erit C H ipsi K L incommensurabile. Sed ut C H ad K L, ita C K ad K M. Ergo C K ipsi K M longitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ C M, M F inæquales sunt; et quartæ parti quadrati ex F M æquale, ad ipsam C M applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [i]. Atqui est congruens F M commensurabilis longitudine expositæ rationali C D. Ergo C F est apotome quinta [k].

[h] Ut in præc.

[i] 19. hujus.

[k] Def. Tert. 5. hujus.

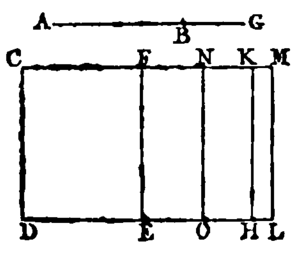
Quadratum igitur ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam. *Q. E. D.*

[CIII.] PROP. CIII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quæ cum medio medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F esse apotomen sextam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis A G, G B continetur medium, et adhuc quadrata ipsarum A G, G B incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub ipsis A G, G B [l]. Itaque ad C D applicetur quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H, latitudinem faciens C K; quadrato autem ex B G æquale applicetur K L. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B: ac propterea C L est medium. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem



[l] 79. hujus.

latitudinem faciens C M: ergo C M rationalis eſt, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [m]. Quoniam igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur [n]. Atqui eſt quod bis continetur ſub A G, G B medium: ergo et F L eſt medium. Et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M; eſt igitur F M rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis. Et quoniam quadrata ex A G, G B incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub A G, G B continetur; atque eſt quadratis quidem ex A G, G B æquale parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur ſub A G, G B æquale F L; erit C L ipſi F L incommenſurabile. Sed ut C L ad F L, ita eſt C M ad M F [o]. Quare C M ipſi M F incommenſurabilis eſt longitudine [p]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id C F eſt apotome [q]. Dico et ſextam eſſe. Quoniam enim F L eſt æquale ei, quod bis continetur ſub A G, G B, ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N ipſi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale rectangulo ſub A G, G B. Et quoniam A G, G B potentiâ ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A G incommenſurabile quadrato ex G B. Sed quadrato quidem ex A G eſt æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L [r]. Ergo C H ipſi K L eſt incommenſurabile. Ut autem C H ad K L, ita eſt C K ad K M: incommenſurabilis igitur eſt C K ipſi K M [o]. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub A G, G B [s]; eſtque quadrato ex A G æquale C H, et quadrato ex G B æquale K L, rectanguloque ſub A G, G B æquale N L; erit et inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Et eâdem ratione ac in ſuperiori C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et neutra ipſarum eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt ſexta apotome [t].

Quadratum igitur ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen ſextam. *Q. E. D.*

[m] 23. hujus.
[n] 7. ſecundi.
[o] 1. ſexti.
[p] 10. hujus.
[q] 74. hujus.
[r] Per conſtruct.
[s] Lemma 7. hujus.
[t] Def. Tert. 6. hujus.

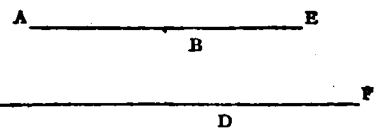
[CIV.]

PROP. CIV. THEOR.

Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis, et ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D apotomen esse, atque ordine eandem, quæ A B.

Quoniam enim A B est apotome, sit ipsi congruens B E: ergo A E, E B rationales sunt, potentiâ solum com-
[x] 74. hujus. mensurabiles [x]. Et fiat ratio B E ad D F eadem, quæ



est A B ad C D. Quare ut una ad unam, ita erunt
[y] 12. quinti. omnes ad omnes [y]: est igitur ut tota A E ad totam C F, ita A B ad C D. Commensurabilis autem est A B ipsi C D longitudine. Ergo et A E ipsi C F longitudine com-
[z] 10. hujus. mensurabilis erit, et B E ipsi D F [z]. Sunt autem A E, E B rationales, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et C F, F D rationales erunt, potentiâ solum commensu-
[a] 74. hujus. rabiles [z]; ac propterea C D est apotome [a]. Dico et ordine eandem esse, quæ A B. Quoniam enim est ut A E ad C F, ita B E ad F D; erit permutando ut A E ad E B,
[b] 16. quinti. ita C F ad F D [b]. Vel igitur A E plus potest quam E B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si quidem A E plus potest quam E B quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Et si quidem A E commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et C F etiam erit. Si vero E B est commensurabilis, et D F commensurabilis erit. Et si neutra ipsarum A E, E B commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et neutra ipsarum C F, F D eidem longitudine erit commensurabilis. Quod si A E plus possit quam E B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem A E sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, et C F eidem

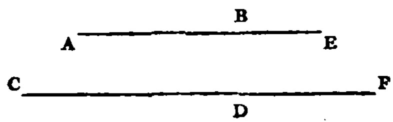
eidem longitudine commensurabilis erit. Si vero B E, et F D. Et si neutra ipsarum A E, E B, et neutra ipsarum C F, F D erit expositæ rationali longitudine commensurabilis. Ergo C D apotome est, et ordine eadem, quæ A B [c]. *Q. E. D.* [c] Def. Tert.

PROP. CV. THEOR. [CV.]

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, et ipsa mediæ apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D mediæ apotomen esse, et ordine eandem, quæ A B.

Quoniam enim mediæ apotome est A B, sit B E ipsi A B congruens. Ergo A E, E B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles [d]. Et fiat ut A B ad C D, ita B E [d] 75. & 76. hujus.



ad D F. Sunt autem A E, E B mediæ, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et C F, F D mediæ potentiâ solum commensurabiles erunt; ac propterea mediæ apotome est C D. Ostendendum est et ordine eandem esse, quæ A B. Quoniam enim ut A E ad E B, ita C F ad F D; ut autem A E ad E B, ita quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B [e]; et ut C F ad F D, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D: erit et ut quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D. Permutando igitur est ut quadratum ex A E ad quadratum ex C F, ita rectangulum sub A E, E B ad rectangulum sub C F, F D. Sed quadratum ex A E commensurabile est quadrato ex C F: rectangulum igitur sub A E, E B rectangulo sub C F, F D est commensurabile. Et si quidem rationale est rectangulum sub A E, E B, et rectangulum sub C F, F D rationale erit: si vero rectangulum sub A E, E B medium est, et medium erit rectangulum sub C F, F D. Mediæ igitur apotome est C D, atque ordine eadem, quæ A B. *Q. E. D.* [e] 1. sexti.

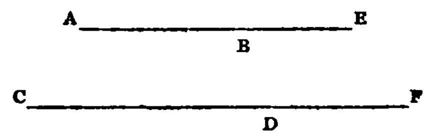
[CVI.]

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea minori commenſurabilis, et ipſa minor eſt.

Sit minor A B, et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: dico et C D minorem eſſe.

Fiant enim eadem, quæ prius. Et quoniam A E, E B potentiâ ſunt incommenſurabiles, et C F, F D potentiâ incommenſurabiles erunt. Quoniam autem eſt ut A E

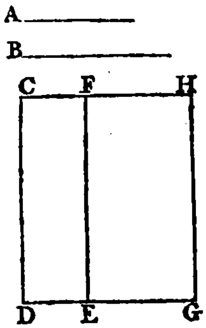


ad E B, ita C F ad F D: erit et ut quadratum ex A E ad quadratum ex E B, ita quadratum ex C F ad quadratum
[f] 22. ſexti. ex F D [f]; et componendo ut quadrata ex A E, E B ad quadratum ex E B, ita quadrata ex C F, F D ad quadra-
[g] 18. quinti. tum ex F D, et permutando [g]. Commenſurabile autem eſt quadratum ex B E quadrato ex D F. Ergo et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B compoſito ex
[h] 10. hujus. quadratis ipſarum C F, F D commenſurabile erit [h]. Sed compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B eſt rationale: ergo et rationale erit compoſitum ex quadratis ipſarum C F, F D. Rurſus, quoniam eſt ut quadratum ex A E ad rectangulum ſub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum ſub C F, F D, et permutando; commenſurabile autem eſt quadratum ex A E quadrato ex C F: erit igitur et rectangulum ſub A E, E B rectangulo ſub C F, F D commenſurabile. Sed rectangulum ſub A E, E B medium eſt: medium igitur eſt et rectangulum ſub
[i] 24. hujus. C F, F D [i]. Quare C F, F D potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium.
[k] 77. hujus. Ergo C D eſt minor [k]. *Q. E. D.*

Aliter. Sit minor A, et ipſi A commenſurabilis ſit B: dico B minorem eſſe.

Exponatur enim C D rationalis, et quadrato ex A æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur,
[l] 101. hujus. latitudinem faciens C F. Apotome igitur quarta eſt C F [l]. Quadrato autem ex B æquale ad F E applicetur F G, latitudinem

latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. Sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum C E, quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E commensurabile est ipsi F G. Ut autem C E ad F G, ita C F ad F H[m]: commensurabilis igitur est C F ipsi F H longitudine[n]. Sed C F est apotome quarta. Ergo et F H apotome quarta est[o]. Ergo et spatium F G sub rationali et apotomâ quartâ continetur: recta igitur linea spatium potens minor est[p]. Potest autem spatium F G ipsa B. Ergo B est minor. *Q. E. D.*



m 1. sexti.

n 10. hujus.

o 104. hujus.

p 95. hujus.

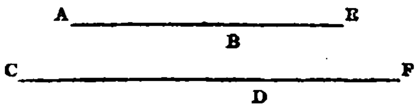
PROP. CVII. THEOR. [CVII.]

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, et ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens A B. Et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico C D esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi A B congruens B E. Ergo A E, E B potentiâ incommensurabiles sunt[q], facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub

q 78. hujus.

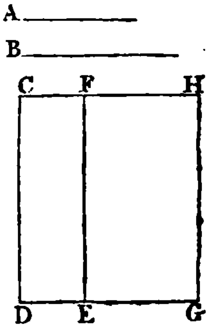


ipsis continetur rationale. Et eadem construantur. Similiter demonstrabitur, atque prius, C F, F D in eâdem esse ratione, in quâ A E, E B; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum C F, F D; rectangulum autem sub A E, E B rectangulo sub C F, F D commensurabile. Quare et C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum C F, F D medium, quod autem sub ipsis continentur rationale. Ergo C D est, quæ cum rationali medium totum efficit[q]. *Q. E. D.*

Aliter.

Aliter. Sit cum rationali medium totum efficiens A, et ipſi A ſit commenſurabilis B: dico B eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F. Ergo C F eſt apotome quinta [r]. Quadrato autem ex B æquale F G ad ipſam F E applicetur, latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. Sed quadrato ex A æquale eſt parallelogrammum C E; quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E eſt commenſurabile ipſi F G; et ob id recta linea C F ipſi F H longitudine eſt commenſurabilis. Apotome autem quinta eſt C F. Ergo et F H eſt apotome quinta [s]; eſtque F E rationalis. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quintâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit [t]. Sed ipſa B poteſt ſpatium F G [u]. Ergo ipſa B cum rationali medium totum efficiens eſt. Q. E. D.



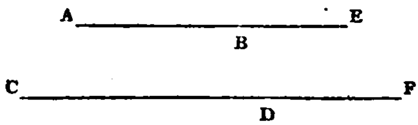
[r] 102. hujus.
[s] 104. hujus.
[t] 96. hujus.
[u] Per conſtruct.

[CVIII.] PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, et ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

Sit cum medio medium totum efficiens A B, et ipſi A B commenſurabilis ſit C D: dico C D eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipſi A B congruens B E; et eadem conſtruantur. Ergo A E, E B potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes



[x] 79. hujus. compoſitum ex quadratis ipſarum medium [x], quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex ipſarum

ipſarum quadratis incommenſurabile ei, quod ſub ipſis continetur. Et ſunt A E, E B commenſurabiles ipſis C F, F D ut in ſuperioribus oſtenſum eſt; et compoſitum ex quadratis ipſarum A E, E B commenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum C F, F D; rectangulumque ſub A E, E B rectangulo ſub C F, F D. Ergo C F, F D potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei, quod ſub ipſis continetur. Ergo C D eſt quæ cum medio medium totum efficit [y]. *Q. E. D.* [y] 79. hujus.

* SCHOLION.

De mutuo Irrationalium uniuſcujuſque Ἑξάδος inter ſe commenſu, in decem hujus Libri propoſitionibus Euclides pertractavit: quarum quinque, nimirum quæ ſeptima ſexageſima numeratur, quæque ab eâ quatuor ſunt proximæ, irrationales per compoſitionem reſpiciunt; quinque aliæ, a quartâ poſt centeſimam incipientes, eas quæ per detractionem ſunt irrationales. Ad pleniorem ſubtiliſſimæ doctrinæ intelligentiam, illud, ut opinor, haud inutile erit, e Clavio monuiſſe: ex decem propoſitionibus, quas memoravimus, duas, lxvii^m dico et civ^m, latius non ſumendas quam ab Euclide pronuntiatæ ſunt; de rectis ſcilicet ipſâ longitudine commenſurabilibus. Quamquam enim ei quæ ex binis eſt nominibus, vel ei quæ apotome, vel potentiâ tantum commenſurabilis et ipſa ex binis nominibus aut apotome erit; haud tamen neceſſario ejuſdem ordinis, cujus illa cui eo modo eſt commenſurabilis. Propoſitiones autem octo reliquæ (68, 69, 70, 71; 105, 106, 107, 108.) apud commenſurabiles potentiâ tantum æque ac longitudine vigent. Ut demonſtrationes, quibus ſingulæ confirmatæ ſunt, accurate perpendenti manifeſtum erit.

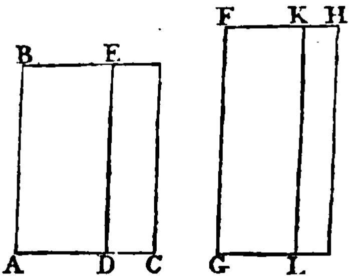
PROP. CIX. THEOR. [CIX.]

Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum ſpatium poteſt una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim B C medium B D detrahatur: dico eam quæ reliquum ſpatium E C poteſt unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G; et parallelogrammo quidem B C æquale G H ad F G applicetur; parallelogrammo autem B D æquale auferatur G K: reliquum igitur C E est æquale L H. Itaque quoniam rationale est B C, medium autem B D; atque est B C æquale G H, et B D ipsi G K; erit G H rationale, medium autem



G K; et ad rationalem F G utrumque applicatum est. Rationalis igitur est F H, et ipsi F G longitudine commensurabilis[z], F K vero rationalis et incommensurabilis ipsi F G longitudine[a]. Ergo F H ipsi F K longitudine incommensurabilis est[b]: quare F H, F K rationales sunt, potentiâ solùm commensurabiles: ac propterea K H est apotome, ipsi vero congruens K F[c]. H F igitur plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. Atqui est tota H F commensurabilis longitudine expositæ rationali F G. Ergo K H est apotome prima[d]. Recta autem linea, quæ potest spatium sub rationali et apotomâ primâ contentum, est apotome[e]. Ergo quæ potest L H, hoc est, ipsum C E, apotome est. Quod si H F plus possit quam F K quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, estque tota H F expositæ rationali F G longitudine commensurabilis; erit K H apotome quarta[f]. Et quæ potest spatium sub rationali et apotomâ quartâ contentum minor est[g]. Quæ igitur potest spatium L H, hoc est, ipsum E C, est minor. *Q. E. D.*

[z] 21. hujus.
[a] 23. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 74. hujus.
[d] Def. Tert. 1. hujus.
[e] 92. hujus.
[f] Def. Tert. 4. hujus.
[g] 95. hujus.

[CX.] PROP. CX. THEOR.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Vide fig. Prop. 109. De medio enim B C rationale B D detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum spatium E C potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G, et ad ipsam similiter spatia applicentur [h]; erit rationalis quidem F H, et ipsi F G longitudine incommensurabilis [i]. Rationalis autem F K, et commensurabilis ipsi F G longitudine [k]: ergo F H, F K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ac propterea H K est apotome, et ipsi congruens F K [l]. F H igitur plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi longitudine vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem H F plus potest quam F K quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quoniam congruens F K commensurabilis est expositæ rationali F G longitudine: erit H K apotome secunda [m]. Est autem F G rationalis. Ergo quæ potest spatium L H, hoc est, ipsum C E, est mediæ apotome prima [n]. Quod si H F plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quoniam congruens F K commensurabilis est expositæ rationali F G longitudine: erit H K apotome quinta [o]. Recta igitur linea potens spatium E C est quæ cum rationali medium totum efficit [p]. *Q. E. D.*

[h] Ut in præc.
[i] 23. hujus.
[k] 21. hujus.
[l] 74. hujus.
[m] Def. Tert. 2. hujus.
[n] 93. hujus.
[o] Def. Tert. 5. hujus.
[p] 96. hujus.

PROP. CXI. THEOR. [CXI.]

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur ut in propositis figuris de medio B C medium B D, quod sit incommensurabile toti: dico rectam lineam, quæ potest spatium C E, unam esse ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen secundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.

Vide fig. Prop. 109.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum B C, B D, et B C incommensurabile est ipsi B D, hoc est, G H ipsi G K; erit H F ipsi F K incommensurabilis longitudine [q]. Ergo H F, F K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [r]; et ob id H K est apotome, et ipsi congruens K F [s]. Itaque H F plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ longitudine sibi vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem H F plus potest quam F K quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum neutra ipsarum H F, F K commensurabilis sit expositæ rationali F G longitudine; erit H K apotome tertia [t]. Rationalis autem est K L. Quæ vero potest rectangulum, sub rationali et apotomâ tertiâ contentum,

[q] 1. sexti, & 10. hujus.
[r] 23. hujus.
[s] 74. hujus.
[t] Def. Tert. 3. hujus.

[u] 94. hujus. tentum, mediæ eſt apotome ſecunda [u]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt ipſum C E, mediæ eſt apotome ſecunda. Si vero H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; cum neutra ipſarum H F, F K longitudine commenſurabilis
[x] Def. Tert. 6. hujus. ſit expoſitæ rationali F G; erit H K apotome ſexta [x]. At recta linea, potens quod ſub rationali et apotomâ ſextâ continetur, eſt quæ cum medio medium totum
[y] 97. hujus. efficit [y]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt, ipſum E C, eſt cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*

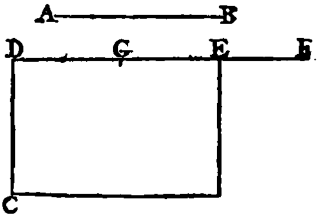
[CXII.]

PROP. CXII. THEOR.

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome A B: dico A B non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus.

Sit enim, ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis D C, et quadrato ex A B æquale rectangulum C E ad ipſam D C applicetur, latitudinem
[z] 45. primi. faciens D E [z]. Quoniam igitur A B eſt apotome, erit
[a] 98. hujus. D E apotome prima [a]. Sit ipſi congruens E F. Ergo D F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſu-



[b] Def. Tert. 1. hujus. rabiles [b], et D F plus poteſt quam F E quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt D F commenſurabilis expoſitæ rationali C D longitudine.
[c] ex hyp. Rurſus, quoniam A B eſt ex binis nominibus [c], erit D E
[d] 61. hujus. ex binis nominibus prima [d]. Dividatur in nomina ad punctum G, ſitque D G majus nomen. Ergo D G, G E
[e] Def. Secund. 1. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [e]. Et D G plus poteſt quam G E quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, et major D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali D C. Quare D F
[f] 12. hujus. ipſi D G longitudine eſt commenſurabilis [f]; et reliquæ igitur F G commenſurabilis erit. Itaque quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G, atque eſt rationalis D F; erit et F G rationalis. Rurſus, quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G longitudine, atque eſt D F ipſi F E incommenſurabilis longitudine; erit et F G ipſi F E longitudine incommenſurabilis. Et ſunt rationales. Ergo G F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles;

surabiles; ac propterea E G est apotome [g]. Sed et rationalis, quod fieri non potest. [g] 74. hujus.

Ergo apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, apotomen, et cæteras ipsam consequentes irrationales lineas, neque medias esse, neque inter se easdem.

Quadratum enim mediæ ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, ipsi rationali longitudine incommensurabilem [h]. [h] 23. hujus.

At quadratum apotomæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen primam [i]. Et quadratum [i] 98. hujus. mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen secundam [k]. Quadratum vero [k] 99. hujus. mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen tertiam [l]. Quadratum [l] 100. hujus. deinde Minoris ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quartam [m]. At vero quadratum ejus, [m] 101. hujus. quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quintam [n]. [n] 102. hujus. Quadratum denique ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen sextam [o]. Itaque cum hæ latitudines [o] 103. hujus. differant et a latitudine mediæ, et inter se; a latitudine quidem mediæ, quod hæc rationalis sit, illæ vero irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem apotomæ: manifestum est, apotomen, et reliquas irrationales ipsam consequentes, et a mediâ, et inter se differre. Quoniam vero in hoc theoremate demonstravimus, apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: et quadrata apotomæ, et cæterarum quinque irrationalium eam consequentium, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, et sextam: at vero quadrata ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum quinque irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam: liquido constat, latitudines apotomæ, et aliarum irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum post ipsam irratio-

irrationalium: quandoquidem nulla apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur et apotome, et quæ ipſam ſequuntur, differunt ab eâ, quæ ex binis nominibus, et quæ poſt ipſam. Quamobrem cum tam illæ, quam hæ a mediâ ſint diverſæ; efficitur, rationali quâpiam expoſitâ, viginti tres numero eſſe lineas irrationales, inter ſe diverſas, de quibus hactenus Euclides in hoc libro diſſeruit. Sunt autem hæ,

1. Media.
2. Ex binis mediis prima.
3. Ex binis mediis ſecunda.
4. Major.
5. Rationale ac medium potens.
6. Bina media potens.
7. Ex binis nominibus prima.
8. ——————— ſecunda.
9. ——————— tertia.
10. ——————— quarta.
11. ——————— quinta.
12. ——————— ſexta.
13. Mediæ apotome prima.
14. Mediæ apotome ſecunda.
15. Minor.
16. Cum rationali medium totum efficiens.
17. Cum medio medium totum efficiens.
18. Apotome prima.
19. ——— ſecunda.
20. ——— tertia.
21. ——— quarta.
22. ——— quinta.
23. ——— ſexta.

In hâc recenſione, neque ejus quæ ex binis nominibus ſimpliciter vocata eſt, neque ejus quæ ſimpliciter apotome, quarum altera primæ ἑξάδος earum quæ per compoſitionem, altera primæ earum quæ per detractionem prima eſt, ullam ſeorſum mentionem fecimus. Quoniam utramque in ſpecies diviſam, ut ſupra monuimus, ἑξάδες poſteriores ſiſtunt. Ne cui igitur mirari ſubeat numerum linearum, quæ quatuor ἑξάδας conficiunt, accedente mediâ ipſâ extra omnem ἑξάδα, ad viginti quinque non aſſurgere.

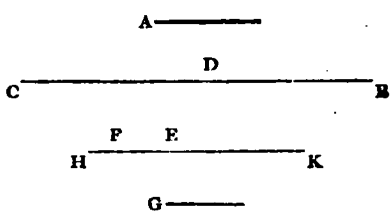
PROP.

PROP. CXIII. THEOR. [CXIII.]

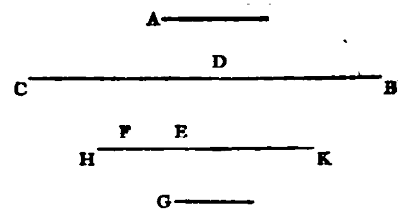
Quadratum rationalis, ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit apotomen, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ejus, quæ eſt ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc apotome, quæ ſit, eundem babet ordinem, quem ea quæ eſt ex binis nominibus.

Sit rationalis A; ea quæ eſt ex binis nominibus B C, cujus majus nomen C D; et quadrato ex A æquale rectangulum ſit, quod ſub B C, E F continetur: dico E F apotomen eſſe, cujus nomina commenſurabilia ſunt ipſis C D, D B, et in eâdem ratione; et adhuc E F eundem ordinem habere, quem habet B C.

Sit enim rurſus quadrato ex A æquale rectangulum, quod ſub B D et G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum ſub B C, E F eſt æquale ei, quod



ſub B D, G continetur; erit ut C B ad B D, ita G ad E F[p]. [p] 16. ſexti.
Major autem eſt C B quam B D. Ergo et G quam E F major erit. Sit ipſi G æqualis E H. Eſt igitur ut C B ad B D, ita H E ad E F; et dividendo, ut C D ad D B, ita H F ad F E[q]. Fiat ut H F ad F E, ita F K ad K E. Ergo [q] 17. quinti.
et tota H K ad totam K F eſt ut F K ad K E; ut enim unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia[r]. Sed ut F K [r] 12. quinti.
ad K E, ita C D ad D B; et igitur ut H K ad K F, ita C D ad D B. Commenſurabile autem eſt quadratum ex C D quadrato ex D B[s]. Ergo et quadratum ex H K quadrato [s] 37. hujus.
ex K F eſt commenſurabile[t]. Atqui eſt ut quadratum [t] 10. hujus.
ex H K ad quadratum ex K F, ita recta linea H K ad K E, quoniam tres rectæ lineæ H K, K F, K E deinceps proportionales ſunt[u]: commenſurabilis igitur eſt H K ipſi [u] Cor. 2. 20.
K E longitudine. Ergo et H E ipſi E K longitudine eſt ſexti.



[x] 16. hujus. commenſurabilis [x]. Et quoniam quadratum ex A eſt æquale ei, quod ſub H E, B D continetur, rationale autem eſt quadratum ex A: erit et quod ſub H E, B D continetur rationale. Et ad rationalem B D applicatum eſt; rationalis igitur eſt H E, et ipſi B D longitudine commen-
[y] 21. hujus. ſurabilis [y]; ideoque et E K, quæ eſt commenſurabilis ipſi H E, rationalis erit, et ipſi B D commenſurabilis longitudine. Quoniam igitur eſt ut C D ad D B, ita F K ad K E; ſunt autem C D, D B potentiâ ſolum commenſurabiles; et F K, K E potentiâ ſolum commenſurabiles erunt. Rationalis autem eſt K E, et ipſi B D commenſurabilis longitudine. Quare et F K eſt rationalis, ipſique C D longitudine commenſurabilis. Sunt igitur F K, K E rationales, et potentiâ ſolum commenſurabiles; et id-
[z] 74. hujus. circo E F apotome eſt [z]. Jam vero C D plus poteſt quam D B quadrato rectæ lineæ ſibi vel commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Et ſi quidem C D plus poteſt quam D B quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, etiam F K plus poterit quam K E quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Et ſi C D eſt commenſurabilis expoſitæ rationali longitudine, et F K eidem commenſurabilis erit. Si autem B D, et K E. Et ſi neutra ipſarum C D, D B, et neutra ipſarum F K, K E. Quod ſi C D plus poteſt quam D B quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, et F K plus poterit quam K E quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et ſi quidem C D eſt longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, erit et F K eidem commenſurabilis. Et ſi B D, et K E. At ſi neutra ipſarum C D, D B, et neutra ipſarum F K, K E. Ergo F E apotome eſt, cujus nomina F K, K E commenſurabilia ſunt nominibus C D, D B ejus quæ eſt ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et eundem habet ordinem, quem C B. *Q. E. D.*

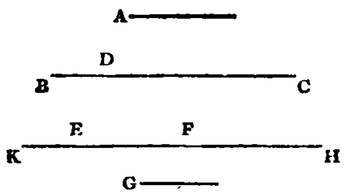
PROP.

PROP. CXIV. THEOR. [CXIV.]

Quadratum rationalis, ad apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quem ipsa apotome.

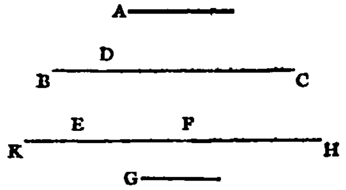
Sit rationalis quidem A, apotome autem B D; et quadrato ex A æquale sit quod sub B D, K H continetur, ita ut quadratum rationalis A, ad B D applicatum, latitudinem faciat K H: dico K H esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius B D, et in eâdem ratione; et K H eundem habere ordinem, quem habet B D.

Sit enim ipsi B D congruens D C. Ergo B C, C D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [a]. Et quadrato ex A æquale sit quod sub B C, G continetur. [a] 74. hujus.



Rationale autem est quadratum ex A. Ergo quod sub B C, G continetur est rationale. Et ad rationalem B C applicatum est: rationalis igitur est recta linea G, ipsique B C longitudine commensurabilis [b]. Sed quoniam rectangulum, contentum sub B C, G, est æquale ei, quod sub B D, K H continetur; erit ut C B ad B D, ita K H ad G [c]. Major autem est C B quam B D. Ergo et K H quam G est major. Ponatur ipsi G æqualis K E: commensurabilis igitur est K E ipsi B C longitudine. Et quoniam est ut C B ad B D, ita H K ad K E; erit, per conversionem rationis, ut B C ad C D, ita K H ad H E. Fiat ut K H ad H E, ita H F ad F E; et reliqua igitur K F ad F H est ut K H ad H E, hoc est, ut B C ad C D [d]. Sed B C, C D potentiâ solum sunt commensurabiles. Ergo et K F, F H potentiâ solum commensurabiles erunt. Et cum sit ut K H ad H E, ita K F ad F H; ut autem K H ad H E, ita H F ad F E; erit et ut K F ad

[b] 21. hujus.
[c] 16. sexti.
[d] 19. quinti.



F H, ita H F ad F E. Quare ut prima ad tertiam, ita quadratum ex primâ ad quadratum ex secundâ[c]: ut igitur K F ad F E, ita quadratum ex K F ad id quod fit ex F H quadratum. Commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim K F, F H potentiâ commensurabiles. Ergo et K F ipsi F E commensurabilis est longitudine: ac propterea F K ipsi K E longitudine commensurabilis[f]. Sed K E rationalis est, et ipsi B C longitudine commensurabilis. Ergo et K F rationalis erit, et ipsi B C commensurabilis longitudine. Et quoniam est ut B C ad C D, ita K F ad F H; erit permutando ut B C ad K F, ita D C ad F H. Commensurabilis autem est B C ipsi K F. Quare et C D ipsi F H est commensurabilis[g]. Suntque B C, C D rationales potentiâ solum commensurabiles. Ergo et K F, F H rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles: ex binis igitur nominibus est K H[h]. Et si quidem B C plus potest quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et si B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D est commensurabilis longitudine expositæ rationali, erit et ipsa F H eidem commensurabilis. Et si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. At si B C plus poterit quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et si quidem B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D, et ipsa F H. Quod si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. Ex binis igitur nominibus est K H, cujus nomina K F, F H commensurabilia sunt nominibus apotomæ B C, C D, et in eâdem ratione; et K H eundem tenet ordinem, quem ipsa B C[i]. *Q. E. D.*

[c] Cor. 2. 20. sexti.
[f] 16. hujus.
[g] 10. hujus.
[h] 37. hujus.
[i] Deff. Secund. et Tert. hujus.

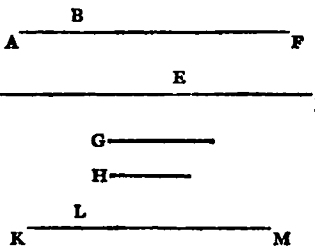
PROP.

PROP. CXV. THEOR. [CXV.]

Si spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea, spatium potens, est rationalis.

Spatium enim contineatur sub A B, C D; videlicet sub apotomâ A B, et quæ fit ex binis nominibus C D, cujus majus nomen C E; et sint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, C E, E D, commensurabilia nominibus apotomæ A F, F B, et in eâdem ratione; sitque recta linea G, potens spatium contentum sub A B, C D: dico ipsam G rationalem esse.

Exponatur enim rationalis H, et quadrato ex H æquale ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens K L [k]; [k] 45. primi.



apotome igitur est K L, cujus nomina K M, M L commensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis nominibus, sc. C E, E D, et in eâdem ratione [l]. Sed C E, [l] 113. hujus. E D commensurabiles sunt ipsis A F, F B, atque in eâdem ratione [m]. Est igitur ut A F ad F B, ita K M ad M L [n]; et [m] ex hyp. permutando ut A F ad K M, ita F B ad M L. Quare et [n] 11. quinti. reliqua A B ad reliquam K L est ut A F ad K M [o]. Com- [o] 19. quinti. mensurabilis autem est A F ipsi K M: ergo et A B ipsi K L est commensurabilis [p]. Estque ut A B ad K L, ita [p] 10. hujus. rectangulum contentum sub C D, A B ad id, quod continetur sub C D, K L [q]: commensurabile igitur est re- [q] 1. sexti. ctangulum contentum sub C D, A B rectangulo, quod sub C D, K L continetur. Sed rectangulum contentum sub C D, K L est æquale quadrato ex H [r]: ergo rectan- [r] Per construct. gulum, quod continetur sub C D, A B, quadrato ex H est commensurabile. Rectangulum autem, quod continetur sub C D, A B, est æquale quadrato ex G [m]. Ergo quadratum

dratum ex G commensurabile est quadrato ex H. Atqui est quadratum ex H rationale: rationale igitur est quadratum ex G; et idcirco ipsa G, quæ potest quod sub C D, A B continetur, est rationalis.

Si igitur spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea spatium potens est rationalis. *Q. E. D.*

Cor. Ex iis manifesto constat fieri posse, ut spatium rationale sub irrationalibus rectis lineis contineatur.

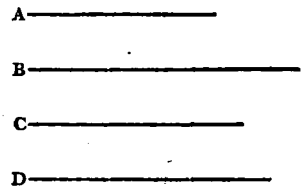
[CXVI.]

PROP. CXVI. THEOR.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A: dico ex ipsâ A infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem esse.

Exponatur rationalis B, et rectangulo, contento sub A, B, æquale fit quadratum ex C. Irrationalis igitur est ipsa C[s]: nam quod sub irrationali et rationali continetur irrationale est. Et est eadem nulli earum, quæ prius[t]; non enim quadratum alicujus antecedentium, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam (per 61, 62, 63, 64, 65, 66, et 98, 99, 100, 101, 102, 103. hujus.) Rursus, rectangulo, quod sub B, C continetur, æquale fit quadratum ex D: irrationale igitur est quod fit ex D; et idcirco ipsa D est irrationalis, et nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum, quæ prius sunt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipsam C. Similiter et eodem ordine infinite protracto, manifestum est a mediâ infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem esse. *Q. E. D.*



[s] Def. 11. hujus.

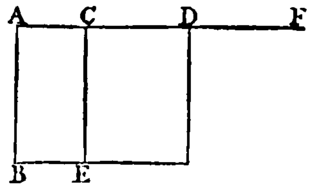
[t] In hoc lib.

† Aliter. Sit media A C: dico ex ipsâ A C infinitas irrationales fieri, et nullam alicui priorum eandem esse.

† *Demonstratio hæc, quæ pro aliâ habetur tam in Codd. MSS. quam in editis, parum differt a præcedente. Illam tamen cum Commandino retinuimus.*

Ducatur

Ducatur ipsi A C ad rectos angulos A B, sitque A B rationalis, et B C compleatur: irrationale igitur est B C, et ipsum potens est irrationalis. Possit autem ipsum recta linea C D; ergo C D irrationalis est, et nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam. Rursus, compleatur E D, erit E D irrationale; et recta linea ipsum potens irrationalis. Possit ipsum recta linea D F: ergo D F irrationalis est, et nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipsam C D.

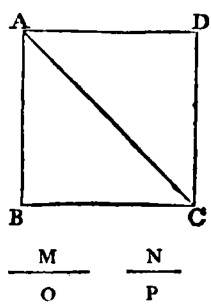


Ergo a mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui priorum est eadem.

* PROP. CXVII. THEOR. [CXVII.]

Quadrati cujusque diagonalis lateri ejusdem longitudine est incommensurabilis.

Quadrati A B C D, cujus latus A B, diagonalis sit A C. Dico A C ipsi A B longitudine incommensurabilem. Non enim. Commensurabilis igitur est A C ipsi A B longitudine. A C igitur ad A B rationem habet, quam numerus ad numerum [u]. Habeat, quam numerus M ad numerum N. Numerus autem M, seipsum multiplicans, faciat quadratum O. Numerus item N, seipsum multiplicans, faciat quadratum P. Jam cum recta A C ad rectam A B rationem habet, quam numerus M ad numerum N; quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam numerus quadratus O ad numerum quadratum P [x]. Sed propter triangulum isosceles A B C, ad B rectangulum, quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam binarius ad unitatem [y]. Numerus igitur quadratus O ad numerum quadratum P rationem habet, quam binarius ad unitatem [z]. Numeris autem O, P quadratis unus intercedit proportione medius [a]. Quare binario etiam



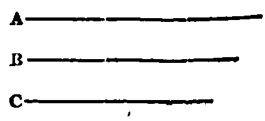
[u] 5. hujus.
[x] 9. hujus.
[y] 47. primi.
[z] 11. quinti.
[a] 11. octavi.

[a] 8. octavi. et unitati unus intercedet proportione medius[a]; binario utique minor, major idem unitate. Quod est absurdum. Cum binarius et unitas ipsâ tantum unitate differant. Non est igitur A C ipsi A B longitudine commensurabilis. Incommensurabilis igitur longitudine. Quadrati igitur cujusque &c. *Q. E. D.*

Aliter (e Clavio.) Quoniam quadratum ex diagonali
[b] 47. primi. duplum est quadrati ex latere[b], habebit quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere rationem binarii ad unitatem, vel quaternarii ad binarium, vel octonarii ad quaternarium, &c. Et quia sumptis in proportione duplâ quotcunque numeris ab unitate, 1, 2. 4. 8. 16. 32, &c. solum tertius ab unitate quadratus est, et cæ-
[c] 10. noni. teri omnes unum intermittentes[c], (quia primus ad unitate, nempe 2, quadratus non sit) erunt solum hi numeri, 4. 16. 64, &c. quadrati, reliqui vero, 2. 8. 32, non quadrati. Quare cum quaternarius quadratus sit et binarius non quadratus, non habebit quaternarius ad binarium proportionem, quam quadratus aliquis nume-
[d] 24. octavi. rus ad quadratum[d]. Ac propterea neque quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est diagonalis longitudine ipsi
[e] 9. hujus. lateri[e]. *Q. E. D.*

* SCHOLION (e Clavio.)

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cujus intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in eâ continetur doctrina non contemnenda, ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, et incommensurabilitatem, pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt.



Est igitur appendix hæc. Inventis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, invenientur et aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, C, longitudine inter se incommensurabiles, inter

ter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ut A ad C, ita est figura rectilinea quævis super A constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super B[f]; et sunt A et C longitudine incommensurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ super A et B incommensurabiles[g]. Rursus, quoniam circuli, quorum diametri A, B proportionem habent, quam quadrata ex A, B descripta: quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterque positæ, proportionem habent, quam rectæ A, C[f]: habebunt quoque circuli diametrorum A, B eandem proportionem, quam rectæ A, C[h]. Sed rectæ A, C incommensurabiles sunt longitudine. Igitur et circuli diametrorum A, B incommensurabiles sunt[g]. Jam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A, B, habebunt pyramides atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ (5, 6, vel 7. duod.) Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, et prismata[g]. Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B; habebunt hujusmodi coni et cylindri eandem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis[i]. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, erunt quoque incommensurabiles dicti coni, et cylindri[g]. Inventæ sunt igitur non solum lineæ et superficies incommensurabiles, verum etiam et corpora, sive solida, incommensurabilia. Quod est propositum.

[f] Cor. 2. 20. sexti.
[g] 10. hujus.
[h] 11. quinti.
[i] 11. duod.

Eâdem autem ratione, si rectæ A et B longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon et ipsarum circulos commensurabiles esse[g]; atque adeo et earundem pyramides et prismata; ac denique conos, et cylindros, si modo eandem habeant altitudinem; ut perspicuum est (5, 6, 7, & 11. duod.)

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [I.]

SOLIDUM eſt, quod longitudinem, latitudinem, et craſſitudinem habet.

II. [II.]

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III. [III.]

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV. [IV.]

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V. [V.]

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque a puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta;

juncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente lineâ et adjunctâ comprehenſus.

[VI.] VI.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus, rectis lineis contentus, quæ, in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

[VII.] VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

* VIII.

Linea recta plano dicitur parallela, quæ infinite producta infinite producto nuſquam occurrit.

[VIII.] * IX.

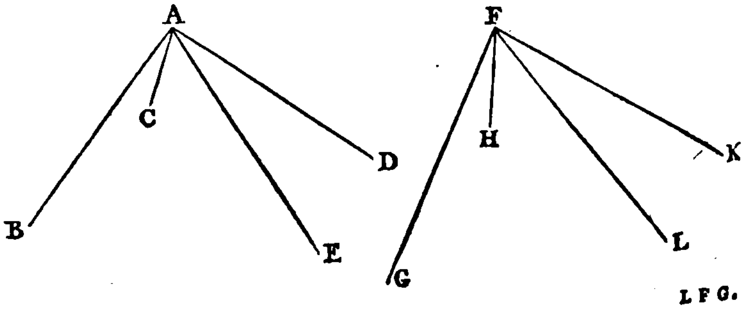
Parallela ſunt plana, quæ infinite producta nuſquam conveniunt.

[XI.] * X.

Solidus eſt angulus plurium quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingunt, nec in eâdem ſunt ſuperficie, mutua inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quam duobus angulis planis, in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

Cor. * Anguli ſolidi, qui planis angulis æqualibus continentur, quorum æqualium plana, ſingula ſingulis, ſimiliter ſunt inclinata, inter ſe æquales ſunt.

Sint anguli ſolidi ad A et F. Quorum ille ad A angulis planis contineatur BAC, CAD, DAE, EAB. Alter autem ad F angulis planis GFH, HFK, KFL,



LFG.

L F G; qui prioribus, angulum A constituentibus, B A C, C A D, D A E, E A B singuli singulis sint æquales. Plana etiam B A C, C A D, D A E, E A B similiter inter se, atque inter se altera G F H, H F K, K F L, L F G, sint inclinata. Dico angulum solidum ad A solido ad F æqualem.

Admoveatur enim punctum A puncto F. Rectaque A B rectæ F G applicetur. Planum item A B C plano G F H superimponatur. Ita, propter angulum B A C angulo G F H æqualem, recta A C rectæ F H se applicabit. Jam vero plano B A C alteri G F H applicato, cum planis illis, B A C, G F H, altera illa, D A C, K F H, similiter sunt inclinata; omnino planum C A D plano H F K se applicabit. Rectis A C, F H congruentibus, id enim ostensum; propter angulum C A D angulo H F K æqualem, recta A D rectæ F K se applicabit. Rursum plano C A D alteri H F K applicato, cum planis illis, C A D, H F K, altera, D A E, K F L, similiter sint inclinata, planum D A E plano K F L se applicabit. Rectisque D A, F K congruentibus, id enim ostensum; propter angulum D A E angulo K F L æqualem, recta A E rectæ F L se applicabit. Rectæ igitur A B, A C, A D, A E rectis F G, F H, F K, F L, singulæ singulis, se applicuerint. Quapropter angulus solidus ad A solido ad F congruit, et cui congruit æqualis est. *Q. E. D.*

* Definitio XI. [IX.]

Similes sunt figuræ solidæ, quæ planis similibus continentur, multitudine æqualibus, et similiter inter se inclinatis: eâ nempe lege, ut similes sint, planorum in diversis figuris similium, inclinationes.

Cor. * Similes figuræ solidæ, quarum similia latera plana sunt etiam æqualia, inter se æquales sunt.

Nam si planum unius plano simili et æquali alterius superimponatur, sic ut latera planorum homologa et æqualia congruant, reliqua plana unius similibus et æqualibus alterius, singula singulis, congruent, et anguli solidi unius solidis alterius angulis, singuli quoque singulis, congruent. Quod facile quivis intelliget, qui demonstrationem Corollarii decimæ diligenter meditatus fuerit. Inde autem efficietur, figuras ipsas perfecte congruere.

XII.

[XII.] XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

[XIII.] XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt et æqualia, et ſimilia, et parallela; alia vero parallelogramma.

[XIV.] XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

[XV.] XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

[XVI.] XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod et ſemicirculi.

[XVII.] XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, et utrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

[XVIII.] XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

[XIX.] XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

[XX.] XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui a circumductâ rectâ lineâ deſcribitur.

[XXI.] XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

XXII. [XXII.]

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII. [XXIII.]

Baſes vero cylindri ſunt circuli a duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV. [XXIV.]

Similes coni et cylindri ſunt, quorum et axes, et baſium diametri proportionales ſunt.

XXV. [XXV.]

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI. [XXVI.]

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVII. [XXVII.]

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVIII. [XXVIII.]

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æquiangulis contenta.

XXIX. [XXIX.]

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

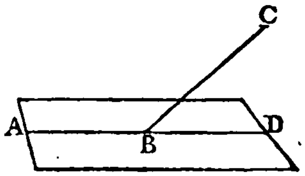
XXX. [XXX.]

Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ A B pars quidem A B ſit in ſubjecto plano, pars vero B C in ſublimi. Erit recta linea quædam ipſi A B in directum continuata in ſubjecto plano. Sit D B. Duabus igitur datis rectis lineis A B C, A B D commune



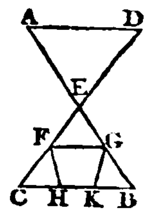
ſegmentum

ſegmentum eſt A B; quod fieri non poteſt †. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. *Q. E. D.*

[II.] PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D ſe invicem in puncto E ſecent. Dico ipſas A B, C D in uno eſſe plano, et omne triangulum in uno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis E B, E C quævis puncta B, C, et jungatur B C. Dico primum triangulum E B C conſiſtere in uno plano. Sumantur enim in ipſis E B, E C puncta quævis alia G, F; et in rectâ C B puncta quævis H, K; et F G, F H, G K jungantur. Si trianguli E B C pars quædam F H C, vel G B K, in ſubjecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit et lineæ E B, vel E C, pars in ſubjecto plano, et pars in alio. Quod ſi trianguli E C B pars F C B G, ſit in ſubjecto plano, reliqua vero in alio; utrarumque rectarum linearum E C, E B quædam pars erit in ſubjecto plano, quædam vero in alio. Quod abſurdum eſſe oſtendimus ᵃ. Triangulum igitur E B C in uno eſt plano. In quo autem plano eſt B C E triangulum, in hoc eſt utraque ipſarum E C, E B: in quo autem utraque ipſarum E C, E B, in hoc et A B, C D. Ergo rectæ lineæ A B, C D in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit. *Q. E. D.*

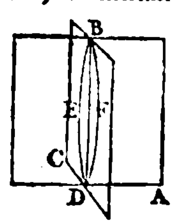


ᵃ 1. hujus.

[III.] PROP. III. THEOR.

Si duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

Duo plana A B, B C ſe invicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit D B linea. Dico lineam D B rectam eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur a puncto D ad B, in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C, recta linea D F B. Erunt utique duarum rectarum linearum D E B, D F B iidem termini, et ipſæ ſpatium continebunt; quod eſt abſurdum.

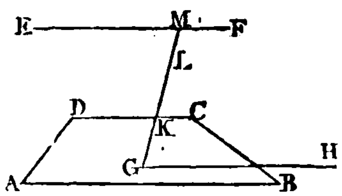


† *Cum naturæ Recti (τῦ εὐθέος) in lineis aperte contrarium eſſet.*

ſurdum [b]. Si igitur duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit. *Q. E. D.* [b] Ax. 10.

Cor. 1.* Si linea recta ſubjecto plano ſit parallela, et per punctum quodlibet eorum, quæ in plano, ducatur recta priori parallela, hæc in ſubjecto plano tota erit.

Puta rectam E F, plano ſubjecto A B C D parallelam. In plano A B C D ſumatur utcunque punctum G; et per G ducatur G H, rectæ E F parallela. Dico rectam G H in plano A B C D totam eſſe. Non enim. Planum igitur parallelarum, E F, G H, planum



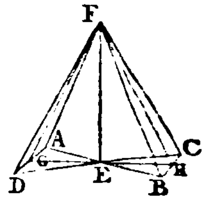
A B C D (cui parallelum eſſe nequit, cum punctum G utrique ſit commune) ſecabit: et communis interſectio linea recta erit. Sit K L. Tres igitur rectæ E F, G H, K L ſunt in uno eodemque plano. Punctum autem G, cum ſit planis A B C D, E F G H commune, erit ad communem ipſorum interſectionem. Hoc eſt, ad rectam K L. Recta igitur K L rectæ G H in ipſo puncto G occurrit; et rectæ E F, cui parallela eſt G H, nequit eſſe parallela, cum tamen ſit in eodem plano. Occurret igitur K L rectæ E F. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum ſit ad communem planorum E F G H, A B C D interſectionem K L, omnino erit in plano A B C D. Eſt autem ad rectam E F. Punctum igitur M plano A B C D et rectæ E F eſt commune. Recta igitur E F plano ſubjecto A B C D in puncto M occurrit. Plano igitur A B C D recta E F non eſt parallela [c]. Quod hypotheſi contrarium eſt. Recta igitur G H in plano A B C D. *Q. E. D.* [c] Def. 8. hujus.

Cor. 2.* Si rectæ E F in plano ſubjecto A B C D duci poſſit parallela G H; recta E F plano A B C D parallela erit. Non enim. Occurret igitur plano. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum ſit ad rectam E F, erit in plano parallelarum E F, G H. Eſt autem in plano A B C D [d]; ad communem igitur planorum A B C D, F E G H interſectionem, quæ eſt ipſa recta G H. Parallelæ igitur rectæ E F, G H in puncto M conveniunt. Quod eſt abſurdum. Recta igitur E F plano A B C D nullibi occurrit. Recta igitur E F parallela eſt plano [c]. *Q. E. D.* [d] ex hyp.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis, se invicem secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam E F duabus rectis lineis A B, C D, se invicem secantibus in E puncto, in ipso E ad rectos angulos insistat. Dico E F etiam plano per A B, C D ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ E A, E B, C E, D E inter se æquales: perque E ducatur recta linea G E H utcunque; et jungantur A D, C B; deinde a quovis puncto F ducantur F A, F G, F D, F C, F H, F B. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E, E D duabus rectis lineis B E, E C æquales sunt, et angulos æquales A E D, C E B continent [c]; erit A D basis basi C B æqualis, et triangulum A E D triangulo C E B æquale [f]. Ergo et angulus D A E æqualis est angulo E B C. Est autem et angulus A E G æqualis angulo B E H [c]. Duo igitur triangula sunt A G E, B E H, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus A E uni lateri E B æquale, quod est ad æquales angulos. Quare et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [g]. Ergo G E quidem est æqualis ipsi E H; A G vero ipsi B H. Quod cum A E sit æqualis E B, communis autem et ad rectos angulos F E; erit basis A F basi F B æqualis [f]. Eadem quoque ratione, et C F æqualis erit F D. Præterea quoniam A D est æqualis C B, et A F ipsi F B, erunt duæ F A, A D duabus F B, B C æquales, altera alteri; et ostensa est basis D F æqualis basi F C. Angulus igitur F A D angulo F B C est æqualis [h]. Rursus ostensa est A G æqualis B H; sed et A F ipsi F B æqualis. Duæ igitur F A, A G duabus F B, B H æquales sunt, et angulus F A G æqualis est angulo F B H, ut demonstratum fuit; basis igitur G F basi F H est æqualis [f]. Rursus quoniam G E ostensa est æqualis E H, communis autem E F; erunt duæ G E, E F æquales duabus H E, E F; et basis H F est æqualis basi F G. Angulus igitur G E F, angulo H E F est æqualis [h]; et idcirco rectus est uterque angulorum G E F, H E F. Ergo F E ad G H, utcunque per E ductam, rectos efficit angulos. Similiter ostendemus F E etiam ad omnes rectas



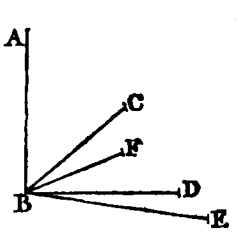
c 15. primi.
f 4. primi.
g 26. primi.
h 8. primi.

rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. Recta autem ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, ipſam contingentes, et eodem exiſtentes plano, rectos efficit angulos[i]. Quare F E ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. At ſubjectum planum eſt, quod per A B, C D rectas lineas ducitur. Ergo F E ad rectos angulos erit ducto per A B, C D plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis, ſe invicem ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

[i] Def. 3. hujus.

PROP. V. THEOR. [V.]

Si recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.



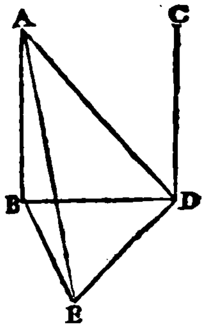
Recta linea quædam A B tribus rectis lineis B C, B D, B E, in contactu B, ad rectos angulos inſiſtat. Dico B C, B D, B E in uno plano eſſe. Non enim. Sed ſi fieri poteſt, ſint B D, B E quidem in ſubjecto plano; B C vero in ſublimi: et planum per A B, B C producatur. Communem utique ſectionem in ſubjecto plano faciet rectam lineam[k]; faciat B F. In uno igitur ſunt plano, per A B, B C ducto, tres rectæ lineæ A B, B C, B F. Et quoniam A B utrique ipſarum B D, B E ad rectos angulos inſiſtit, et ducto per ipſas D B, B E plano ad rectos angulos erit. Planum autem per D B, B E eſt ſubjectum planum. Ergo A B ad ſubjectum planum recta eſt[l]. Quare et omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos[m]; ſed ipſam tangit B F in ſubjecto exiſtens plano. Ergo angulus A B F rectus eſt. Ponitur autem et A B C angulus rectus. Æqualis igitur eſt angulus A B F angulo A B C. Et in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt. Recta igitur linea B C non eſt in ſublimi. Quare tres rectæ lineæ B C, B D, B E in uno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. *Q. E. D.*

[k] 3. hujus.
[l] 4. hujus.
[m] Def. 3. hujus.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico A B ipsi C D parallelam esse. Occurrant enim subjecto plano in punctis B, D; jungaturque B D recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur D E; et positâ D E ipsi A B æquali, jungantur B E, A E, A D. Quoniam igitur A B recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in subjecto sunt plano, rectos angulos efficiet[n]. Contingit autem A B utraque ipsarum B D, B E, existens in subjecto plano. Ergo uterque angulorum A B D, A B E rectus est. Eâdem ratione rectus etiam est uterque ipsorum C D B, C D E. Et quoniam A B æqualis est ipsi D E, communis autem B D; erunt duæ A B, B D duabus E D, D B æquales; et rectos angulos continent; basis igitur A D basi B E est æqualis[o]. Rursus quoniam A B est æqualis D E, et A D ipsi B E; duæ A B, B E duabus E D, D A æquales sunt, et basis ipsarum A E communis; ergo angulus A B E angulo E D A est æqualis[p]. Sed A B E rectus est. Rectus igitur et E D A; et idcirco E D ad D A est perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum B D, D C. Quare E D tribus rectis lineis B D, D A, D C in contactu ad rectos insistit angulos. Tres igitur rectæ lineæ B D, D A, C D in uno sunt plano[q]. In quo autem sunt B D, D A, in eo est A B, omne enim triangulum in uno est plano[r]. Ergo A B, B D, D C in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum A B D, B D C rectus. Parallela igitur est A B ipsi C D[s]. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. *Q. E. D.*



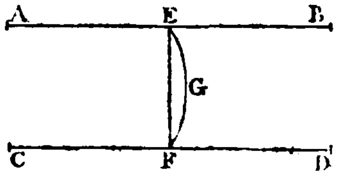
[n] Def. 3. hujus.
[o] 4. primi.
[p] 8. primi.
[q] 5. hujus.
[r] 2. hujus.
[s] 28. primi.

PROP.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utrâque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta, in eodem erit plano, in quo et parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D; et in utrâque ipsarum sumantur quælibet puncta E, F. Dico rectam lineam, quæ puncta E, F conjungit, in eodem plano esse,



in quo sunt parallelæ. Non enim; sed si fieri potest, sit in sublimi, ut E G F; et per E G F planum ducatur, quod in subjecto plano sectionem faciet rectam lineam [t]; faciat ut E F. Ergo duæ rectæ lineæ E G F, E F spatium continebunt; quod fieri non potest [u]. Non igitur quæ a puncto E ad F ducitur recta linea, in sublimi est plano; quare erit in eo, quod per A B, C D parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. *Q. E. D.*

t 3. hujus.

u Ax. 10. primi.

PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D, et altera ipsarum A B subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico et reliquam C D eidem plano ad rectos angulos esse. Occurrant enim A B, C D subjecto plano in punctis B, D; et B D jungatur. Ergo A B, C D, B D in uno sunt plano [x]. Ducatur ipsi B D ad rectos angulos in subjecto plano D E; et ponatur D E ipsi A B æqualis: junganturque B E, A E, A D. Et quoniam A B perpendicularis est ad subjectum planum; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, perpendicularis erit [y]. Rectus igitur est uterque angulorum A B D, A B E. Quod cum in parallelas rectas lineas A B, C D recta incidit B D, erunt anguli A B D, C D B duobus rectis æquales [z]. Rectus autem est A B D. Ergo et C D B est rectus; ac propterea C D perpendicularis est ad B D. Et quoniam A B est æqualis D E, communis autem B D;

Vide fig. Prop. 6.

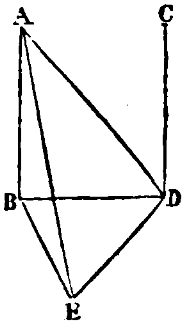
x 7. hujus.

y Def. 3. hujus.

z 29. primi.

 duæ

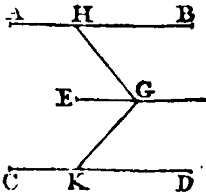
duæ A B, B D duabus E D, D B æquales sunt; et angulus A B D est æqualis angulo E D B, rectus enim uterque est; basis igitur
[a] 4. primi. A D basi B E est æqualis [a]. Rursus quoniam A B æqualis est D E, et B E ipsi A D; erunt duæ A B, B E duabus E D, D A æquales, altera alteri; et basis earum communis A E. Quare angulus
[b] 8. primi. A B E est æqualis angulo E D A [b]. Rectus autem est A B E. Ergo et E D A est rectus, et E D ad D A perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad B D. Ergo E D etiam ad planum per
[c] 4. hujus. B D, D A perpendicularis erit [c]; et ad omnes rectas lineas, quæ in eodem existentes plano ipsam
[d] Def. 3. hujus. contingunt, rectos faciet angulos [d]. At in plano per B D, D A est D C, quoniam tam B D, quam B A est in plano parallelarum B A, D C. Quare E D ipsi D C est ad rectos angulos: ideoque C D ad rectos angulos est ipsi D E; sed et etiam ipsi D B. Ergo C D duabus rectis lineis D E, D B se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per D E, D B est ad rectos angulos [c]. Planum autem per D E, D B est subjectum planum. Ergo C D subjecto plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*



[IX.] PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano; etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum A B, C D parallela ipsi E F, non existentes in eodem in quo ipsa plano. Dico A B ipsi C D parallelam esse. Sumatur in E F quodvis punctum G, a quo ipsi E F, in plano quidem per E F, A B transeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem transeunte per E F, C D, rursus ducatur ipsi E F ad rectos angulos G K. Et quoniam E F ad utramque ipsarum G H, G K est perpendicularis, erit E F etiam ad rectos angulos plano
[e] 4. hujus. per G H, G K transeunti [e]. Atque est E F ipsi A B parallela. Ergo et A B plano per H G K ad rectos angulos
[f] 8. hujus. est [f]. Eadem ratione et C D plano per H G K est ad rectos



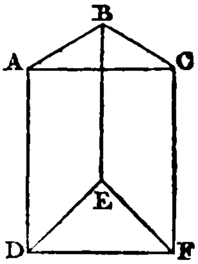
rectos

rectos angulos. Utraque igitur ipsarum A B, C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint; parallelæ erunt inter se [g]. Ergo A B ipsi C D est parallela. *Q. E. D.* [g] 6. hujus.

PROP. X. THEOR. [X.]

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B, B C, duabus rectis lineis D E, E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum A B C, angulo D E F æqualem esse. Assumantur enim B A, B C, E D, E F inter se æquales; et jungantur A D, C F, B E, A C, D F. Quoniam igitur B A ipsi E D æqualis est, et parallela; erit et A D æqualis, et parallela ipsi B E [h]. Eadem ratione et C F ipsi B E æqualis, et parallela erit. Utraque igitur ipsarum A D, C F ipsi B E æqualis est, et parallela. Quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano, et inter se parallelæ erunt [i]. Ergo A D parallela est ipsi C F, et æqualis. Atque ipsas conjungunt A C, D F; et A C igitur ipsi D F æqualis est, et parallela [h]. Et quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus D E, E F æquales sunt, et basis A C est æqualis basi D F; erit angulus A B C angulo D E F æqualis [k]. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. *Q. E. D.*



[h] 33. primi.
[i] 9. hujus.
[k] 8. primi.

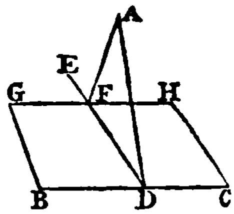
PROP. XI. PROBL. [XI.]

A dato puncto in sublimi ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum B H. Oportet a puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque B C; et a puncto A ad B C perpendicularis agatur A D [l]. Siquidem igitur A D perpendicularis sit etiam ad subjectum planum, factum jam erit, quod propone- [l] 33. primi.

proponebatur. Sin minus; ducatur a puncto D ipsi B C in subjecto plano ad rectos angulos D E [m]; et a puncto A ad D E perpendicularis ducatur A F [n]. Dico A F subjecto plano B H perpendicularem esse. Ducatur enim per F ipsi B C parallela G H. Quoniam B C utrique ipsarum D A, D E est ad rectos angulos; erit et B C ad rectos angulos plano per E D, D A transeunti [o]. Quin ipsi B C parallela est G H. Si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit [p]. Quare et G H plano per E D, D A transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis [q]. Contingit autem ipsam A F existens in plano per E D, D A. Ergo G H perpendicularis est ad A F. Et ob id A F est perpendicularis ad G H. Est autem A F ad D E perpendicularis. Ergo A F perpendicularis est ad utramque ipsarum H G, D E. Si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit [o]. Quare A F plano per E D, G H ducto est ad rectos angulos. Planum autem per E D, G H est subjectum planum B H. Ergo A F ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est A F. *Q. E. F.*

[m] 11. primi.
[n] 12. primi.
[o] 4. hujus.
[p] 8. hujus.
[q] Def. 3. hujus.



Cor. 1.* Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C H G recta A F ad perpendiculum deducta sit; et a puncto F, ubi recta deducta incidit plano, ad rectam quamlibet in plano B C ad perpendiculum ducatur F D, rectæ illi B C in D occurrens; juncta A D eidem rectæ B C ad perpendiculum erit.

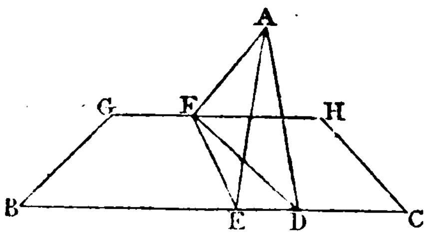
Ducatur enim in plano B C H G recta G H ipsi B C parallela. Recta igitur F D, quæ ad perpendiculum est rectæ B C, rectæ etiam G H ad perpendiculum erit [r]. Eadem autem G F ad perpendiculum rectæ A F [q]. Recta igitur G F, quæ duabus rectis D F, F A in puncto F occurrentibus ad perpendiculum est, plano trianguli A F D ad

[r] 29. primi.

ad perpendiculum erit[s]. Recta autem B D rectæ G F [s] 4. hujus.
parallela. Quare B D eidem plano A F D ad perpendi- [t] 8. hujus.
culum erit[t]. Angulus igitur B D A rectus[u]. *Q. E. D.* [u] Def. 3. hujus.

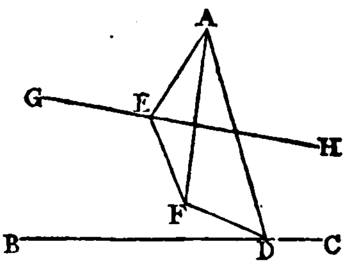
Cor. 2. * Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C G H recta A F ad perpendiculum deducatur, et si in rectam quamlibet in eodem plano B C alia ad perpendiculum deducatur A D; juncta D F eidem B C ad perpendiculum erit.

Non enim. A puncto igitur F in rectam B C ad perpendiculum deducatur F E. Juncta A E rectæ B C ad



perpendiculum erit[x]. Trianguli igitur A E D anguli [x] Cor. 1.*
duo A D E, A E D duobus rectis sunt æquales. Quod est absurdum.

Cor. 3. * Si a puncto in sublimi A in rectas duas B C, G H in subjecto plano, quæ non sunt inter se parallelæ, rectæ A D, A E ad perpendiculum deducantur; et a punctis D, E eisdem rectis B C, G H ad perpendiculum educantur in subjecto plano D F, E F, quæ sibi mutuo in F occurrant; recta A F, quæ jungit



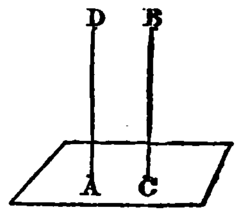
punctum mutui occursus F, et punctum in sublimi A, ad perpendiculum erit subjecto plano. Nam recta, a puncto A in subjectum planum B C H G ad perpendiculum deducta, occurret plano in puncto aliquo rectæ D F[y]. Et [y] Per construct. Probl.
ob eandem rationem in puncto aliquo rectæ E F. In puncto igitur F, duarum D F, E F communi. *Q. E. D.*

PROP.

[XII.] PROP. XII. PROBL.

Dato plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum; punctum autem, quod in ipso sit, A. Oportet a puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, a quo ad subjectum planum agatur perpendicularis B C [x]; et per A ipsi B C parallela ducatur A D [y]. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D, C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; et reliqua A D subjecto plano ad rectos angulos erit [z]. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. *Q. E. F.*

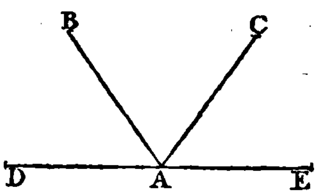


[x] 11. hujus.
[y] 31. primi.
[z] 8. hujus.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eâdem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B, A C ad rectos angulos constituantur ex eâdem parte; et ducatur planum per B A, A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam [a]. Faciat D A E. Ergo rectæ lineæ A B, A C, D A E in uno sunt plano. Et quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est; et ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos [b]. Contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. Angulus igitur C A E rectus est. Eâdem ratione et rectus est B A E. Ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis. Et in uno sunt plano; quod fieri non potest. Non igitur dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eâdem parte. *Q. E. D.*



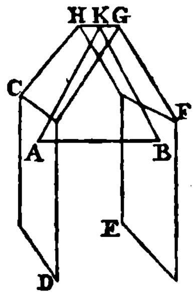
[a] 3. hujus.
[b] Def. 3. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta quædam linea A B ad utrumque ipsorum planorum C D, E F sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, et communem sectionem faciant rectam lineam G H; et in ipsa G H sumpto quovis puncto K, jungatur A K, B K. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad E F planum; erit et perpendicularis ad ipsam B K rectam lineam in plano E F producto existentem. Quare angulus A B K rectus est. Eâdem ratione et B A K est rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K, B A K duobus rectis sunt æquales; quod fieri non potest[c]. Non igitur plana C D, E F producta inter se convenient. Quare C D, E F parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. *Q. E. D.*



[c] 17. primi.

Cor. * Et e converso, si sint duo plana parallela, quæ alteri ipsorum ad perpendiculum est linea recta, ea alteri etiam ad perpendiculum erit. Plano enim D C ad perpendiculum sit recta B A. Dico plano alteri E F, priori parallelo, eandem A B ad perpendiculum esse. Non enim. Duci igitur poterit in plano E F recta, quæ angulum cum A B obliquum faciat[d]. Ducatur B K. Duarum autem A B, B K planum secabit planum B C in lineâ rectâ[e]. Secet in A K. Angulus igitur B A K rectus est[d]. Angulus autem A B K obliquus[f]. Duo igitur B A K, A B K duobus rectis non sunt æquales. Rectæ igitur A K, B K, cum in eodem sint plano, in puncto aliquo convenient[g]. Concursus sit punctum K. Jam cum omne punctum in rectâ A K sit in plano D C, et omne punctum in rectâ B K in plano E F; punctum K, quod in utrâque est rectâ, planis duobus D C, E F commune erit. Plana igitur D C, E F non sunt inter se parallela. Quod hypothesi contrarium est. Si sint igitur duo plana parallela &c. *Q. E. D.*

[d] Def. 3. hujus.
[e] 3. hujus.
[f] Per construct.
[g] Ax. 12. primi.

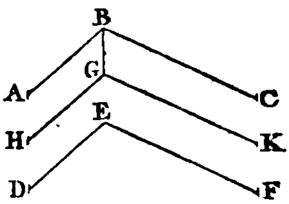
PROP.

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B, B C duabus rectis lineis sese tangentibus D E, E F parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico plana, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur a puncto B ad planum, quod per D E, E F transit, perpendicularis B G, quæ plano in



puncto G occurrat; et per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. Itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E, E F; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos faciet angulos[d]. Contingit autem ipsam utraque earum G H, G K, quæ sunt in eodem plano. Rectus igitur est uterque angulorum B G H, B G K. Et quoniam B A parallela est ipsi G H, (nimirum cum utraque earum ipsi D E parallela sit) anguli G B A, B G H duobus rectis sunt æquales[e]. Rectus autem est B G H. Ergo et G B A rectus erit, ideoque G B ad B A est perpendicularis. Eadem ratione et G B est perpendicularis ad B C. Cum igitur recta linea B G duabus rectis lineis B A, B C se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit B G etiam ad planum per B A, B C ductum perpendicularis[f]. Atqui est ad planum per D E, E F perpendicularis. Ergo B G perpendicularis est ad utrumque planorum, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt[g]. Parallelum igitur est planum per A B, B C plano per D E, E F. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana, parallela erunt. *Q. E. D.*

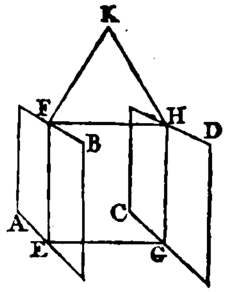
[d] Def. 3. hujus.
[e] 29. primi.
[f] 4. hujus.
[g] 14. hujus.

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt.

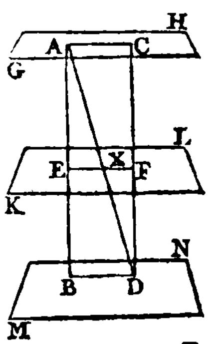
Duo plana parallela A B, C D a plano aliquo E F H G ſecentur; communes autem ipſorum ſectiones ſint E F, G H. Dico E F ipſi G H parallelam eſſe. Si enim non ſint parallelæ, E F, G H productæ inter ſe convenient, vel ad partes F H, vel ad partes E G. Producantur prius ad partes F H, et conveniant in K. Quoniam igitur E F K eſt in plano A B; et omnia quæ in E F K ſumuntur puncta, in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ ſunt in E F K, eſt ipſum K punctum. Ergo K eſt in plano A B. Eâdem ratione et K eſt in C D plano. Ergo plana A B, C D producta inter ſe convenient. Non conveniunt autem, cum parallela ponantur. Non igitur E F, G H rectæ lineæ productæ convenient ad partes F, H. Similiter demonſtrabimus neque ad partes E, G convenire, ſi producantur. Quæ autem neutrâ ex parte conveniunt, parallelæ ſunt. Ergo E F ipſi G H eſt parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt. *Q. E. D.*



PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

Si duæ rectæ lineæ a parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur.

Duæ rectæ lineæ A B, C D a parallelis planis G H, K L, M N ſecentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut A E recta linea ad ipſam E B, ita eſſe C F ad F D. Jungantur enim A C, B D, A D; et occurrat A D plano K L in puncto X; et E X, X F jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela K L, M N a plano E B D X ſecantur, communes ipſorum ſectiones E X, B D parallelæ ſunt [h]. Eâdem ratione, quoniam duo plana parallela G H, K L a plano A X F C ſecantur, communes ipſorum ſectiones A C, F X ſunt parallelæ.



[h] 16. hujus.

Et

Et quoniam uni laterum trianguli A B D, videlicet ipsi B D, parallela ducta est E X, ut A E ad E B, ita erit A X ad X D[i]. Rursus, quoniam uni laterum trianguli A D C, nempe ipsi A C, parallela ducta est X F, erit ut A X ad X D, ita C F ad F D[i]. Ostensum autem est ut A X ad X D, ita esse A E ad E B. Ut igitur A E ad E B, ita est C F ad F D[k]. Quare si duæ rectæ lineæ a parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. *Q. E. D.*

[i] 2. sexti.

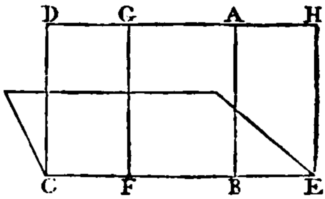
[k] 11. quinti.

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipsum transeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam A B subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico et omnia plana, quæ per ipsam A B transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per A B planum D E, sitque plani D E, et subjecti plani communis sectio C E; et sumatur in C E quodvis punctum F; a quo ipsi C E ad rectos angulos, in D E plano, ducatur F G. Quoniam igitur A B ad subjectum planum est perpendicularis; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in eodem sunt plano, perpendicularis erit[l]. Quare etiam ad C E est perpendicularis. Angulus igitur A B F rectus est: sed et G F B est rectus. Ergo A B parallela est ipsi F G. Est autem A B subjecto plano ad rectos angulos. Et F G igitur eidem plano ad rectos angulos erit[m]. At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos sint[n]: at communi planorum sectioni C E, in uno plano D E, ad rectos angulos ducta F G, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. Ergo planum D E rectum est ad subjectum planum. Similiter demonstrabuntur et omnia quæ per A B transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipsam transeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt. *Q. E. D.*



[l] Def. 3. hujus.

[m] 8. hujus.

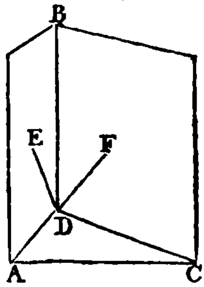
[n] Def. 4. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia A B, B C subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit B D. Dico B D subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim. Plana A B, B C secent subjectum planum, secundum rectas A D, C D. Jam neutri illarum ad rectos erit illa B D. Nam si alterutri illarum ad rectos esset, esset etiam ad rectos subjecto plano A D C °; cujus contrarium posuimus. A puncto igitur D ducatur, in plano quidem A B, ipsi A D rectæ lineæ ad rectos angulos D E: in plano autem B C ducatur ipsi C D ad rectos angulos D F. Et quoniam planum A B ad subjectum planum rectum est, et communi ipsorum sectioni A D ad rectos angulos in plano A B ducta est D E; erit D E ad subjectum planum perpendicularis °. Similiter ostendemus et D F perpendicularem esse ad subjectum planum. Quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eâdem parte; quod fieri non potest P. Recta igitur B D subjecto plano non est non ad rectos. Quare D B subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*



° Def. 4. hujus.

P 13. hujus.

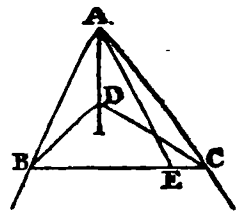
PROP. XX. THEOR. [XX.]

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis B A C, C A D, D A B contineatur. Dico angulorum B A C, C A D, D A B duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim B A C, C A D, D A B anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Sin minus, trium maximus sit B A C. Manifestum est maximum

B A C,

B A C cum reliquorum alterutro, tertio majorem esse. Sed dico duos BAD, CAD simul sumptos, maximo B A C majores esse. Ad rectam enim lineam AB, et ad punctum in ipsâ A, constituatur angulo D A B, in plano per B A, A C transeunte, æqualis angulus B A E [q].



[q] 23. primi.

In rectâ A D sumatur utcunque punctum D, ponaturque ipsi AD æqualis A E; et per E ducta B E C secet rectas lineas A B, A C in punctis B, C; et D B, D C jungantur. Itaque quoniam D A est æqualis A E, communis autem A B; duæ D A, A B æquales sunt duabus A E, A B; et angulus D A B æqualis est angulo B A E. Basis igitur D B basi B E est æqualis [r]. Et quoniam duæ D B, D C ipsâ B C majores sunt [s], quarum D B æqualis ostensa est ipsi B E; erit reliqua D C quam reliqua E C major. Quod cum D A sit æqualis A E, communis autem A C, et basis D C major basi E C; erit angulus D A C angulo E A C major [t]. Sed ex constructione est D A B angulus æqualis ipsi B A B. Quare D A B, D A C anguli angulo B A C majores sunt. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

[r] 4. primi.

[s] 20. primi.

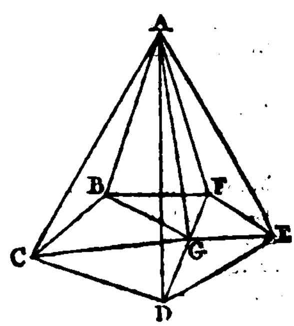
[t] 25. primi.

[XXI.]

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus solidus ad A planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B comprehensus. Dico planos illos, simul sumptos, quatuor rectis esse minores. Plana angulorum omnium, qui solidum ad A comprehendunt, secentur plano, cujus communes cum illis intersectiones sint rectæ B C, C D, D E, E F, F B, quæ figuram aliquam rectilineam (trigonam, tetragonam, vel etiam polygoniam, prout numerus angulorum fuerit qui solidum componunt) in plano illo secante formabunt.



A puncto

A puncto A in planum illud ad perpendiculum deducatur AG, quæ plano in G occurrat[s]. Junguntur GB, GC, GD, GE, GF. Jam quot ſunt triangula ABC, ACD, ADE, AEF, AFB vertice communi A, tot erunt in plano GBC, GCD, GDE, GEF, GFB vertice communi G. Quapropter anguli omnes omnium triangulorum, vertice communi A, ſimul ſumpti, angulis omnibus omnium triangulorum in plano, vertice communi G, ſimul ſumptis, æquales erunt. Sed anguli omnes omnium triangulorum in plano, vertice communi G, anguli ſunt figuræ rectilinearis BCDEF cum angulis omnibus circa punctum G. Anguli igitur omnes omnium triangulorum vertice communi A, angulis omnibus figuræ BCDEF cum angulis circa punctum G æquales ſunt. Jam vero cum ſolidus angulus ad B tribus planis angulis contineatur, ABF, ABC, CBF, duo quilibet eorum reliquo majores erunt[t]. Duo igitur ABC, ABF reliquo CBF majores. Eodem modo oſtendemus (propter angulum ſolidum ad C tribus ACB, ACD, BCD comprehenſum) duos ACB, ACD ſimul reliquo BCD majores. Et ſic per angulos reliquos omnes ad puncta D, E, F pergendo, efficiemus tandem angulos omnes ad baſes triangulorum omnium ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, quorum vertex communis A, angulis omnibus figuræ BCDEF majores eſſe. Jam vero cum anguli omnes triangulorum omnium, vertice communi A, angulis omnibus figuræ planæ BCDEF cum omnibus circa punctum G æquales ſint, (id enim oſtenſum) omnes autem ad baſes triangulorum omnibus figuræ planæ majores; omnino omnes ad verticem triangulorum communem A, qui ſunt omnes, qui ſolidum ad A comprehendunt, omnibus circa punctum G minores erunt. Omnes autem circa G quatuor rectis ſunt æquales[u]. Omnes igitur, qui ſolidum ad A comprehendunt, ſimul ſumpti, quatuor rectis ſunt minores. *Q. E. D.*

s 11. hujus.
t 20. hujus.
u Cor. 2. 15. prim.

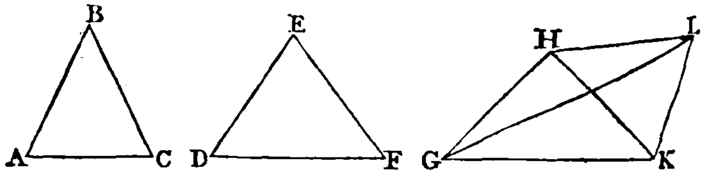
* SCHOLION.

Theonis demonſtrationem repudiavimus, utpote propoſitionis generalis minime generalem. Demonſtrationi huic noſtræ haud abſimilem, collatione factâ angulorum planorum ſolidum continentium cum angulis figuræ in plano polygoniæ, ſed alio modo concinnatam, et ante nos Simpſonus protulit; qui tamen caſum anguli ſolidi, tribus planis comprehenſi, ab aliis inutiliter ſeparavit.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

Si ſint tres anguli plani, quorum duo reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti, contineant autem ipſos rectæ lineæ æquales; fieri poteſt, ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum conſtituatur.

Sint tres anguli plani, A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti. Et æquales ſint lineæ rectæ A B, B C, D E, E F, G H, H K.



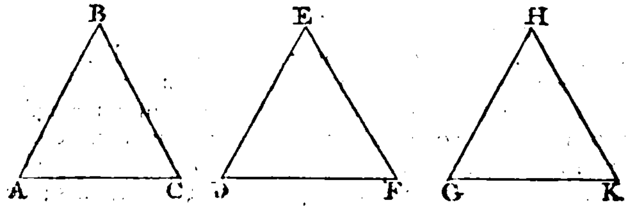
Jungantur autem A C, D F, G K. Dico, ex tribus lineis rectis, quæ ſint tribus illis A C, D F, G K ſingulæ ſingulis æquales, triangulum poſſe conſtitui. Et primum, ſi æquales inter ſe ſint anguli tres, A B C, D E F, G H K, manifeſtum eſt, cum in hoc caſu æquales ſint rectæ A C, D F, G K, ex tribus, quæ illis æquales ſint, triangulum poſſe conſtitui. Sed anguli illi ad B, E, H non ſint inter ſe æquales. Et ad rectam H K, ad punctum H, conſtituatur angulus K H L, angulo A B C æqualis. Capiatur H L, uni ipſarum A B, B C, D E, E F, G H, H K æqualis, et jungantur G L, K L. Jam in triangulis A B C, K H L, cum ſint duæ A B, B C duabus K H, H L æquales, et angulus A B C angulo K H L æqualis; erit baſis A C, [x] 4. primi. æqualis baſi K L [x]. Et quoniam anguli A B C, G H K, ſimul ſumpti, angulo D E F ſunt majores; erit angulus G H L (qui duobus illis A B C, G H K, ſimul ſumptis, eſt æqualis) angulo D E F major. Rurſum quoniam duæ G H, H L duabus D E, E F, ſingulæ ſingulis, ſunt æquales, et angulus G H L major angulo D E F; erit baſis G L baſi [y] 24. primi. D F major [y]. Sed duæ G K, K L ſimul ipſâ G L ſunt [z] 20. primi. majores [z]. Multo igitur majores quam D F. Sed A C æqualis eſt ipſi K L. Duæ igitur G K, A C ſimul ipſâ D F ſunt majores. Similiter demonſtrabimus, et A C, D F ſimul ipſâ G K majores. Et D F, G K ſimul ipſâ A C majores. Fieri igitur poteſt, ut ex tribus lineis rectis, quæ tribus illis A C, D F, G K, ſingulæ ſingulis, ſint æquales, triangulum conſtituatur. *Q. E. D.*

PROP.

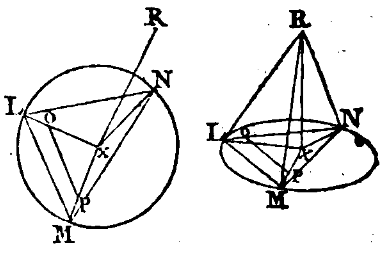
PROP. XXIII. PROBL. [XXIII.]

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis minores. Oportet ex

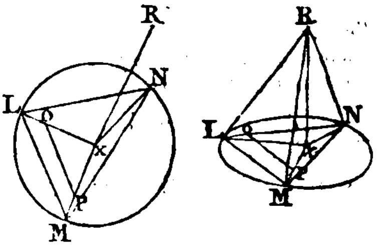


angulis, qui ipsis A B C, D E F, G H K æquales sint, solidum angulum constituere. Abscindantur æquales A B, B C, D E, E F, G H, H K; et A C, D F, G K jungantur. Fieri igitur potest ut ex rectis lineis, quæ ipsis A C, D F, G K æquales sint, constituatur triangulum [a]. Itaque [a] 22. hujus.
constituatur L M N; ita ut L M quidem sit æqualis ipsi A C, M N vero ipsi D F; et præterea L N ipsi G K [b]; et circa [b] 22. primi.
L M N triangulum circulus L M N describatur [c]: sumatur- [c] 5. quarti.
que ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum L M N, vel in laterum ejus uno, vel extra. Sit primo intra; et L X, M X, N X jungantur. Dico A B majorem esse ipsâ L X. Si enim non ita sit, vel A B erit æqualis ipsi L X, vel eâ minor. Sit primo æqualis. Quoniam igitur A B est æqualis L X, atque est A B ipsi B C æqualis; erit L X æqualis B C. Est autem L X æqualis X M. Duæ igitur A B, B C



duabus L X, X M æquales sunt, altera alteri; et A C basis basi L M æqualis ponitur. Quare angulus A B C angulo L X M est æqualis [d]. Eâdem ratione et angulus quidem [d] 8. primi.
D E F est æqualis angulo M X N, angulus vero G H K angulo

gulo N X L. Tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L æquales sunt. Sed tres L X M, M X N, N X L quatuor rectis sunt æquales [c]. Ergo et tres A B C, D E F, G H K æquales erunt quatuor rectis. Atqui ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. Non igitur A B ipsi L X est æqualis.



[c] Cor. 2. 15. primi.

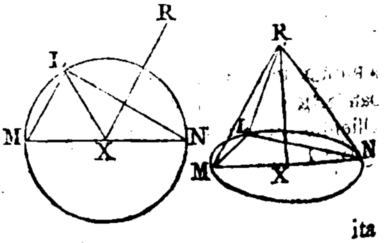
Dico præterea neque A B minorem esse ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor, et ponatur ipsi quidem A B æqualis X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B est æqualis B C, et X O ipsi X P æqualis erit. Ergo et reliqua O L reliquæ P M est æqualis; ac propterea L M parallela est ipsi O P [f]; et L M X triangulum triangulo O P X æquiangulum. Est igitur ut X L ad L M, ita X O ad O P [g]; et permutando ut X L ad X O, ita L M ad O P. Major autem est L X quam X O. Ergo et L M quam O P est major. Sed L M posita est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus O X, X P æquales sunt, et basis A C major basi O P; erit angulus A B C angulo O X P major [h]. Similiter demonstrabimus et D E F angulum majorem esse angulo M X N, et angulum G H K angulo N X L; tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L sunt majores. At anguli A B C, D E F, G H K quatuor rectis minores ponuntur. Multo igitur anguli L X M, M X N, N X L minores erunt quatuor rectis. Sed et æquales [c]; quod est absurdum. Non igitur A B minor est quam L X. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo major sit necesse est.

[f] 2. sexti.

[g] 4. sexti.

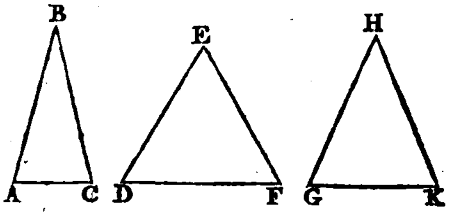
[h] 25. primi.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in M N, quod sit X, et X L jungatur. Dico rursus A B majorem esse ipsâ L X. Si enim non ita

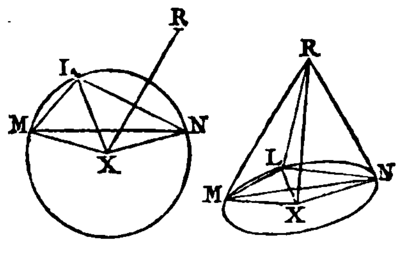


ita ſit, vel A B eſt æqualis L X, vel ipſâ minor. Sit primo æqualis. Duæ igitur A B, B C, hoc eſt, D E, E F, duabus M X, X L, hoc eſt, ipſi M N æquales ſunt. Sed M N ponitur æqualis D F. Ergo D E, E F ipſi D F ſunt æquales; quod fieri non poteſt [p]. Non igitur A B eſt æqualis L X. Similiter neque minor. Multo enim magis id, quod fieri non poteſt, ſequeretur. Ergo A B ipſâ L X major eſt. [p] 20. primi.

Sed ſit centrum circuli extra triangulum L M N, quod ſit X; et L X, M X, N X jungantur. Dico et ſic A B ipſâ L X majorem eſſe. Si enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. Sit primo æqualis. Ergo duæ A B, B C duabus M X, X L æquales ſunt, altera alteri; et baſis A C eſt æqualis baſi M L. Angulus igitur A B C æqualis eſt angulo M X L. Eâdem ratione et G H K angulus ipſi L X N eſt æqualis; ac propterea totus M X N



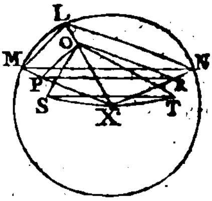
æqualis duobus A B C, G H K. Sed et anguli A B C, G H K angulo D E F majores ſunt. Et angulus igitur M X N ipſo D E F eſt major. At quoniam duæ D E,



E F duabus M X, X N æquales ſunt, et baſis D F æqualis baſi M N; erit M X N angulus angulo D E F æqualis. Oſtenſus autem eſt major; quod eſt abſurdum. Non igitur A B eſt æqualis L X.

 Dico

Dico vero neque minorem esse A B ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor; et ipsi quidem A B æqualis ponatur X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B ipsi B C est æqualis; erit X O æqualis X P. Ergo et reliqua O L reliquæ P M æqualis.



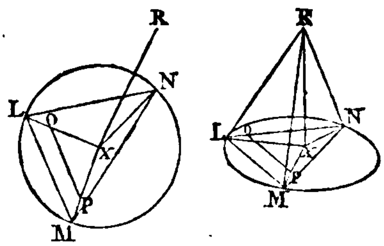
[k] 2. sexti. Parallela igitur est L M ipsi P O[k]; et triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum est. Quare ut X L ad
[l] 4. sexti. L M, ita X O ad O P[l]; et permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P. Major autem est L X quam X O. Ergo L M quam O P est major. Sed L M est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ A B, B C duabus O X, X P sunt æquales, altera alteri; et basis A C major est basi O P; erit angulus A B C angulo
[m] 25. primi. O X P major[m]. Similiter si X R sumatur æqualis utrivis ipsarum X O, X P, et jungatur O R; ostendemus angulum G H K angulo O X R majorem. Constituatur ad rectam lineam L X, et punctum in ipsâ X, angulo quidem A B C æqualis angulus L X S, angulo autem G H K æqualis L X T; et ponatur utraque X S, X T ipsi O X æqualis; junganturque O S, O T, S T. Et quoniam duæ A B, B C duabus O X, X S æquales sunt, et angulus A B C æqualis angulo O X S; erit basis A C, hoc est, L M basi O S æqualis. Eâdem ratione, et L N est æqualis ipsi O T. Quod cum duæ M L, L N duabus O S, O T sint æquales; et angulus M L N major angulo S O T†; erit et basis M N basi S T major. Sed M N est æqualis D F. Ergo et D F quam S T major erit. Quoniam igitur duæ D E, E F duabus S X, X T æquales sunt, et basis D F major basi S T; erit angulus D E F angulo S X T major. Æqualis autem est angulus S X T angulis A B C, G H K. Ergo D E F angulus angulis A B C, G H K major est; sed et minor; quod fieri non potest.

Utcunque igitur cadat centrum circuli, recta A B major erit quam L X.

† *Angulus autem* M L N *angulo* S O T *major sic ostenditur. In triangulo isoscele* L X M, *angulus ad verticem* L X M *angulo* O X S, *ad verticem isoscelis*
[o] Ex construct. O X S, *minor est*[o]. *Quapropter angulus* X L M *ad basin isoscelis* L X M *angulo* X O S *ad basin isoscelis* O X S *major erit*[p]. *Simili modo ostendatur angulus*
[p] 5, & 32. primi. X L N *angulo* X O T *major. Totus igitur* M L N, *ex duobus* X L M, X L N *compositus, toto* S O T, *ex duobus* X O S, X O T *composito, major.* Q. E. D.

Consti-

Conſtituatur a puncto X circuli L M N plano ad rectos angulos X R [n]. Et exceſſui, quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum, quod ſit ex R X; et R L, R M, R N jungantur. Quoniam igitur R X perpendicularis eſt ad planum L M N circuli, et ad unamquamque ipſarum L X, M X, N X erit perpendicularis [o]. Et quoniam L X eſt æqualis X M, communis autem et ad rectos angulos X R; erit baſis L R æqualis baſi R M [p]. Eâdem ratione, et R N utrique ipſarum R L, R M eſt æqualis. Tres igitur rectæ lineæ R L, R M, R N inter ſe æquales ſunt. Et quoniam quadratum ex X R ponitur æquale exceſſui, quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B quadratis ex L X, X R æquale. Quadratis autem ex L X, X R æquale eſt quadratum ex R L [q]; rectus enim angulus eſt L X R. Ergo quadratum ex A B quadrato ex R L æquale erit; ideoque A B ipſi R L eſt æqualis. Sed ipſi quidem A B æqualis eſt unaquæque ipſarum B C, D E, E F, G H, H K: ipſi vero R L æqualis utraque ipſarum R M, R N. Unaquæque igitur ipſarum A B, B C, D E, E F, G H, H K unicuique ipſarum R L, R M, R N eſt æqualis. Quod cum duæ R L, R M duabus A B, B C æquales ſint, et baſis L M ponatur æqualis baſi A C: erit angulus L R M æqualis angulo A B C [r]. Eâdem ratione, et angulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N angulo G H K eſt æqualis. Ex tribus igitur angulis planis L R M, M R N, L R N, qui æquales ſunt tribus datis A B C, D E F, G H K, ſolidus angulus conſtitutus eſt ad R. *Q. E. F.*



[n] 12. hujus.
[o] Def. 3. hujus.
[p] 4. primi.
[q] 47. primi.
[r] 8. primi.

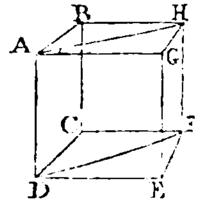
PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, et æqualia, et parallelogramma erunt.

Solidum enim C D G H parallelis planis A C, G F; B G, C E; F B, A E contineatur. Dico oppoſita ejus plana, et æqualia, et parallelogramma eſſe. Quoniam enim duo plana parallela B G, C E a plano A C ſecantur, communes

ipſorum

[s] 16. hujus. ipſorum ſectiones parallelæ ſunt [s]: ergo A B ipſi C D eſt parallela. Rurſus quoniam duo plana parallela B F, A E ſecantur a plano A C, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt [s]: parallela igitur eſt A D ipſi B C. Oſtenſa autem eſt et A B parallela C D. Ergo A C parallelogrammum erit. Similiter demonſtrabimus, et unumquodque ipſorum C E, F G, G B, B F, A E parallelogrammum eſſe. Jungantur A H, D F. Et quoniam parallela eſt A B quidem ipſi D C; B H vero ipſi C F; erunt duæ A B, B H, ſeſe tangentes, duabus D C, C F, ſeſe tangentibus, parallelæ; et non in eodem plano: quare æquales



[t] 10. hujus. angulos continebunt [t]. Angulus igitur A B H angulo D C F eſt æqualis. Et quoniam duæ A B, B H duabus
[u] 34. primi. D C, C F æquales ſunt [u]; et angulus A B H æqualis
[x] 4. primi. angulo D C F; erit baſis A H baſi D F æqualis [x]; et A B H triangulum æquale triangulo D C F. Quod cum ipſius quidem A B H trianguli duplum ſit B G parallelogrammum; ipſius vero D C F trianguli, duplum parallelo-
[y] 41. primi. grammum C E [y]: erit B G parallelogrammum æquale parallelogrammo C E. Similiter demonſtrabimus et A C parallelogrammum parallelogrammo G F; et parallelogrammum A E parallelogrammo B F æquale eſſe. Si igitur ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, et æqualia, et parallelogramma ſunt. *Q. E. D.*

Cor. Ex jam demonſtratis conſtat, ſi ſolidum parallelis contineatur planis, oppoſita ipſius plana, et æqualia eſſe, et ſimilia; quippe quæ et ſingulos angulos æquales, et circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

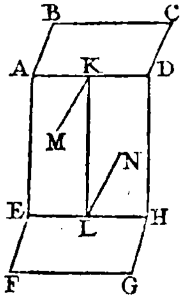
* LEMMA.

Si quo plana parallela ſecentur plano, ſimiliter ei inclinata ſunt.

Plana parallela A B C D, E F G H plano A E H D ſecentur. Dico plana A B C D, E F G H plano A E H D ſimiliter inclinata eſſe. Sint rectæ A D, E H communes plani A E H D cum planis parallelis interſectiones. Rectæ
[z] 16. hujus. igitur A D, E H erunt inter ſe parallelæ [z]. In rectâ A D ſumatur punctum quodvis K. A puncto K, in plano A E H D, rectæ A D ad perpendiculum educatur K L, quæ

rectæ

rectæ E H, ipſi A D parallelæ, in L occurrat. Ab eodem puncto K, in plano A B C D, ad perpendiculum rectæ A D educatur K M. Angulus L K M planorum A E H D, A B C D mutua erit inclinatio [a]. Planum rectarum M K, K L ſecet planum E F G H in rectâ L N. Rectæ igitur K M, L N, quæ communes ſunt plani M K L cum planis parallelis A B C D, E F G H interſectiones, inter ſe parallelæ erunt [b]. Sed A K, E L parallelæ; id enim oſtenſum. Angulus igitur N L E angulo A K M æqualis [c]. Angulus autem A K M rectus [d]. Rectus igitur N L E. Recta igitur N L in plano E F G H ad perpendiculum eſt rectæ E H. Sed recta K L in plano A E H D ad perpendiculum erit eidem E H, cum ad perpendiculum ſit rectæ A D [d], cui parallela eſt E H. Angulus igitur K L N planorum A E H D, E F G H eſt mutua inclinatio [e]. Sed angulus L K M planorum A E H D, A B C D eſt mutua inclinatio; id enim oſtenſum. Et propter parallelas K M, L N, anguli L K M, K L N ſunt inter ſe æquales [f]. Plana igitur A B C D, E F G H plano A E H D ſimiliter ſunt inclinata. *Q. E. D.*



[a] Def. 6. hujus.
[b] 16. hujus.
[c] 10. hujus.
[d] Per conſtruct.
[e] Def. 6. hujus.
[f] 29. primi.

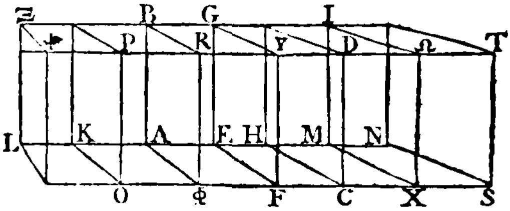
Cor. *. Parallela plana parallelis planis ſimiliter ſunt inclinata.

PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

Solidum enim parallelepipedum A B C D plano Y E ſecetur, oppoſitis planis R A, D H parallelo. Dico ut E F Φ A baſis ad baſim E H C F, ita eſſe A B F Y ſolidum ad ſolidum E G C D. Producatur enim A H ex utrâque parte; et ponantur ipſi quidem E H æquales quotcunque H M, M N; ipſi vero A E, æquales quotcunque A K, K L; et compleantur parallelogramma L O, K Φ, H X, M S; et ſolida L P, K R, H Ω, M T. Quoniam igitur æquales inter ſe ſunt L K, K A, A E rectæ lineæ; erunt et parallelogramma L O, K Φ, A F inter ſe æqualia [g]; quin et

[g] 1. ſexti.



et similia esse manifestum est: itemque æqualia et similia inter se parallelogramma K Ξ, K B, A G; et adhuc parallelogramma L Ψ, K P, A R, inter se æqualia; opposita enim sunt[g]; et hæc quoque inter se similia. Quin et plana parallela L Ψ, K P, A R, E Y parallelis Ψ G, L P similiter esse inclinata; parallela item F Ψ, H Ξ parallelis Y Ξ, F L; necnon parallelis Ψ L, Y E similiter esse inclinata, ex Lemmate et Corollario ejus manifestum est. Eadem ratione, et parallelogramma E C, H X, M S æqualia inter se sunt, et similia: itemque parallelogramma H G, H I, I N inter se æqualia, et similia. Et horum omnium, sicut priorum, plana parallela parallelis aliis similiter sunt inclinata. Et insuper parallelogramma D H, M Ω, N T. Tria igitur plana solidorum L P, K R, A Y tribus planis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata. Sed tria tribus oppositis sunt æqualia, et similia, et similiter inclinata. Ergo solida L P, K R, A Y inter se æqualia erunt[h]. Eadem ratione, et solida E D, H Ω, M T sunt æqualia inter se. Quotuplex igitur est basis L F ipsius A F basis, totuplex est et L Y solidum solidi A Y. Eadem ratione, quotuplex est N F basis ipsius basis H F, totuplex est et solidum N Y ipsius E D solidi. Et si basis L F est æqualis basi N F, et solidum L Y solido N Y æquale erit; et si basis L F superat N F basim, et L Y solidum N Y superabit; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus A F, F H, et duobus solidis A Y, E D; sumpta sunt æquimultiplicia, basis quidem A F, et A Y solidi, videlicet basis L F, et solidum L Y; basis vero H F, et E D solidi, nempe basis N F, et solidum N Y. Et demonstratum est, si basis L F superat basim N F, et L Y solidum solidum N Y superare; et si æqualis, æquale; et si minor minus. Est igitur ut A F basis ad basim F H, ita A Y solidum ad solidum E D[i]. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis

[g] 24. hujus.

[h] Cor. Def. 11. hujus.

[i] Def. 5. quinti.

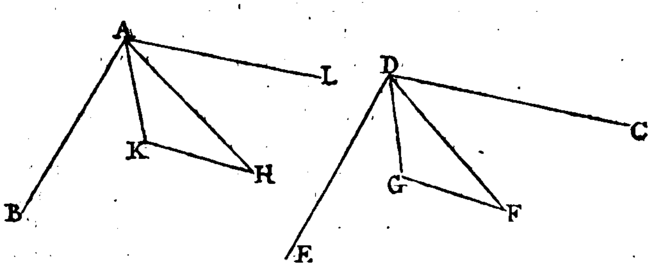
ſitis planis parallelo; erit ut baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. *Q. E. D.*

Cor. * Omnis parallelepipedi parallelogramma contigua ſimiliter inter ſe, atque oppoſita contigua, inclinata ſunt.

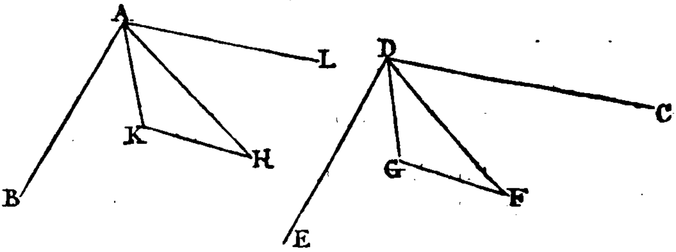
PROP. XXVI. PROBL. [XXVI.]

Ad datam rectam lineam, et ad datum in ipſâ punctum, dato angulo ſolido æqualem ſolidum angulum conſtituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum autem in ipſâ punctum A, et datus ſolidus angulus ad D. Oportet



ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ipſâ punctum A, dato angulo ſolido ad D æqualem ſolidum angulum conſtituere. Solidus ad D vel tribus angulis planis continetur, vel pluribus. Primum tribus contineatur E D C, E D F, F D C. Sumatur in lineâ D F quodvis punctum F; a quo ad planum per E D, D C tranſiens ducatur perpendicularis F G [k], quæ plano in puncto G occurrat; jungaturque D G: et ad rectam lineam A B, [k] 11. hujus.
et ad datum in ipſâ punctum A, angulo quidem E D C æqualis angulus conſtituatur B A L [l]; angulo autem E D G [l] 23. primi.
in ipſo plano B A L conſtituatur æqualis B A K. Deinde ipſi D G ponatur æqualis A K, et a puncto K, plano per B A L ad rectos angulos, erigatur H K [m]; ponaturque ipſi [m] 10. hujus.
G F æqualis K H; et H A jungatur. Dico angulum ſolidum ad A, qui angulis B A L, B A H, H A L continetur, æqualem eſſe ſolido angulo ad D, angulis E D C, E D F, F D C contento. Admoveatur enim punctum A puncto D; recta autem A B rectæ D E applicetur, et planum B A L plano E D C ſuperimponatur. Ita propter angulos B A L, E D C æquales [n], recta A L rectæ D C ſe [n] Per conſtruct.
applicabit;

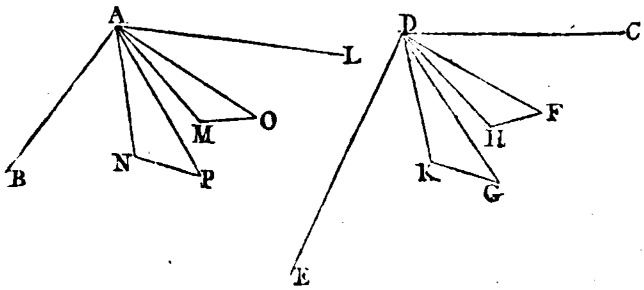


applicabit; et propter æquales angulos B A K, E D G, recta A K rectæ D G. Sed recta A K æqualis rectæ D G [n]. Punctum igitur K puncto G incidet. Planis autem B A L, E D C congruentibus, punctis etiam K, G in unum convenientibus, rectæ K H, G F, quæ a punctis illis ad perpendiculum eductæ sunt congruentibus planis, et ipsæ congruent. Et cum K H ipsi G F æqualis sit [n], punctum H ipsi F incidet. Et punctis A, D in unum quoque compositis, rectæ A H, D F congruent. Tribus autem rectis A B, A L, A H tribus D E, D C, D F singulatim congruentibus, angulus solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, ei æqualis erit. *Q. E. D.*

[n] Per construct.

CAS. 2. Jam vero solidus ad D contineatur angulis planis plus tribus. Puta, planis E D C, C D F, F D G, G D E.

Sumantur in rectis D F, D G, puncta quælibet F, G. Et a punctis F, G in planum E D C ad perpendiculum



deducantur rectæ F H, G K [o], quæ plano illi in punctis H, K occurrant. Jungantur D H, D K. Jam vero ad rectam A B, ad punctum in eâ A, angulo E D C æqualis consti-

[o] 11. hujus.

constituatur B A L; item in plano B A L angulo E D H æqualis B A M; et angulo E D K æqualis B A N. Capiantur A M, A N illis D H, D K singulatim æquales. A punctis M, N plano B A L ad perpendiculum educantur M O, N P[p]; capiantur N P, M O illis K G, H F singulatim æquales. Denique jungantur A P, A O. Dico factum esse, quod fieri oportuit. Nempe ad rectam A B, et punctum in eâ A, constitutum esse angulum solidum, planis angulis B A L, L A O, O A P, P A B contentum, æqualem solido ad D, planis E D C, C D F, F D G, G D E contento.

p 12. hujus.

Puncto enim A, ut in casu priore, puncto D admoto, rectâ A B rectæ D E applicatâ, planoque B A L plano E D C superimposito; propter angulos B A L, B A M, B A N angulis E D C, E D H, E D K, singulos singulis, æquales[q], rectæ A L, A M, A N rectis D C, D H, D K singulatim se applicabunt. Unde propter rectas A M, A N rectis D H, D K, singulas singulis, æquales, puncta M, N punctis H, K singulatim incident. Unde propter rectas M O, N P plano B A L, rectasque H F, K G plano E D C, ad perpendiculum eductas; et propter illas M O, N P alteris H F, K G æquales; efficietur puncta O, P punctis F, G singulatim incidere. Quapropter rectæ A O, A P rectis D F, D G singulatim congruent. Ita vero rectæ A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G, singulæ singulis, congruent. Angulus igitur solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, illi æqualis erit. Ad datam igitur rectam lineam &c. *Q. E. F.*

q Per construct.

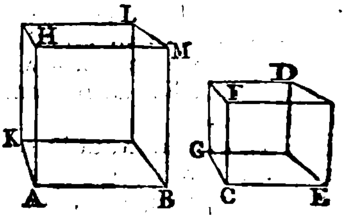
*Cor.** Ex constructione manifestum est angulos planos, qui solidum ad A constituunt, planis, qui solidum ad D, æquales esse; et plana planis similiter esse inclinata. Rectis enim A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G congruentibus, congruent tum anguli plani, tum angulorum plana. Hoc tamen haud ita intelligendum est, quasi solidi anguli æquales esse nesciant, nisi planis angulis æqualibus, et planis similiter inclinatis contineantur; sed eâ conditione futuros solidos, qui ope hujus problematis constituuntur æquales.

PROP.

[XXVII.] PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B, et ad datum in ipsâ punctum A, angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis planis



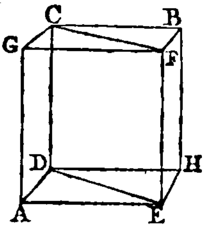
[q] 26. hujus. B A H, H A K, K A B contineatur [q]. Hi plani planis solidum ad C continentibus, singuli singulis, æquales erunt, et æqualium plana similiter inclinata erunt [r].
[r] Cor.* 26. hujus. Sunto æquales B A H, E C F; H A K, F C G; B A K, E C G. Et fiat ut E C ad C G, ita B A ad A K; ut autem
[r] 12. sexti. G C ad C F, ita K A ad A H [r]. Ergo ex æquali ut E C ad C F, ita erit B A ad A H. Compleatur parallelogrammum B H, et A L solidum. Quoniam igitur est ut E C ad C G, ita B A ad A K; erit parallelogrammum K B parallelogrammo G F simile: nempe, cum circa æquales angulos E C G, B A K latera sunt proportionalia. Eadem quoque ratione parallelogrammum K H simile est parallelogrammo G F, et parallelogrammum H B parallelogrammo F E. Tria igitur parallelogramma solidi A L tribus parallelogrammis solidi C D similia sunt, et similiter inclinata: sed tria tribus oppositis in utroque solido sunt æqualia,
[s] Cor. 24. hujus. et similia [s], et similiter inclinata [t]. Ergo totum A L solidum toti solido C D simile erit. Ad datam igitur re-
[t] Cor.* 25. hujus. ctam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum A L descriptum est. *Q. E. F.*

[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Sit solidum parallelepipedum A B. Oppositorum ejus parallelogrammorum C G F B, D A E H ducantur diagonales C F, D E. Jam cum recta C D parallela et æqualis sit rectæ G A (nempe cum opposita sint parallelogrammi

lelogrammi C A latera) cum eidem G A recta F E parallela et æqualis sit; rectæ C D, F E inter se sunt parallelæ et æquales [t]. In plano igitur sunt rectæ quatuor C F, D E, C D, F E [u]. Dico solidum A B a plano C D E F bifariam secari. Quoniam enim æquale et simile est C G F triangulum triangulo C B F, triangulum vero A D E triangulo D E H [x]; est autem et C A parallelogrammum parallelogrammo B E æquale et simile [y], oppositum enim est; et parallelogrammum G E æquale et simile parallelogrammo C H: quoniam etiam parallelepipedi A B contigua quælibet parallelogramma similiter oppositis inter se sunt inclinata [z]: quoniam denique planum C D E F parallelis planis G B, A H similiter est inclinatum, necnon parallelis A F, C H; A C, E B: erit prisma contentum duobus triangulis C G F, A D E, et tribus parallelogrammis G B, A C, C E, æquale prismati, quod continetur duobus triangulis C F B, D E H, et tribus parallelogrammis C H, B E, C E; etenim planis, et numero et magnitudine æqualibus, et similibus, et similiter inclinatis, continentur. Ergo totum A B solidum a plano C D E F bifariam secatur. *Q. E. D.*

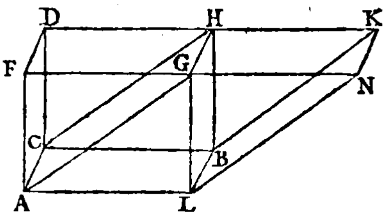


[t] 9. hujus, et Ax. 1. primi.
[u] 7. hujus.
[x] 34. primi.
[y] 24. hujus.
[z] Cor. 25. hujus.

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

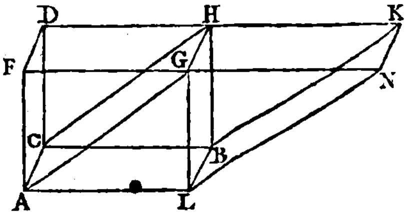
Solida parallelepipeda, quæ in eâdem sunt basi, et eâdem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eâdem basi A B solida parallelipida A H, A K, eâdem altitudine; quorum stantes A F, A G, L G, L N; C D, C H, B H, B K sint in eisdem rectis lineis F N, D K. Dico solidum A H solido A K æquale esse. Parallelepipedi A K stans parallelogrammum C G stanti L H opposito alterius parallelepipedi A H, vel ad ipsum planum D N occurrit, vel productum supra ipsum, vel infra.



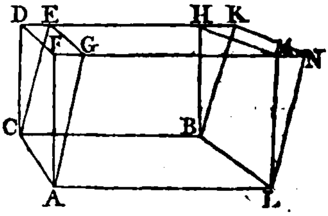
CAS.

CAS. 1.* Primum occurrat ſtans C G ſtanti L H ad ipſum planum D N. Ita vero plana C G, L H ipſum D N in eâdem lineâ rectâ H G ſecant; et parallelogramma D G, G K; necnon A H, B G, latus commune habent H G. Parallelepipedum autem A H plano A G H C per diagonales ſecatur. Parallelepipedum item A K per diagonales plano B H G L. Priſma igitur triangulis duobus A L G, C B H, et parallelogrammis tribus B A, B G, G C comprehenſum, dimidium erit parallelepipedi A H, et idem priſma parallelepipedi A K dimidium[a]. Solidum igitur A H ſolido A K æquale. *Q. E. D.*



[a] 28. hujus.

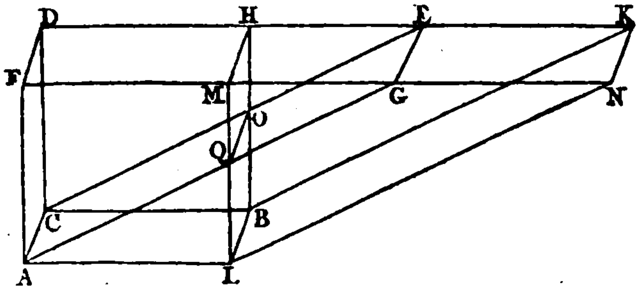
CAS. 2. Jam vero ſtantia C G, L H non niſi producta ſupra planum D N conveniant. Quoniam igitur parallelogrammum eſt utrumque ipſorum CH, CK; erit C B utrique ipſarum D H, E K æqualis[b]: ergo et D H eſt æqualis E K. Communis auferatur E H. Reliqua igitur D E æqualis eſt reliquæ H K. Quare et D E C triangulum eſt æquale et ſimile triangulo H K B[c]. Parallelogrammum autem D G eſt æquale et ſimile parallelogrammo H N. Eâdem ratione et A F G triangulum æquale et ſimile eſt triangulo L M N. Eſt autem parallelogrammum C F parallelogrammo B M, et parallelogrammum C G parallelogrammo B N æquale et ſimile, oppoſita enim ſunt[d]. Præterea plana A D, A E ſimiliter inter ſe ac parallela illis plana L H, L K inclinata ſunt. Planum etiam D N planis triangulorum D C E, F A G, H B K, M L N parallelis ſimiliter eſt inclinatum. Quin et idem planum D N parallelogrammorum A D, L H planis parallelis ſimiliter eſt inclinatum; necnon planis parallelogrammorum A E, L K parallelis[d]. Ergo et priſma contentum duobus triangulis A F G, D E C et tribus parallelogrammis



[b] 34. primi.
[c] 8. primi.
[d] 24. hujus.
[d] Per Lem. et Cor.* 24. hujus.

lelogrammis A D, D G, G C est æquale prismati, quod duobus triangulis L M N, H B K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N continetur. Commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum A B, oppositum autem ipsi G E H M. Ergo totum A H solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo A K est æquale. *Q. E. D.*

CAS. 3.* Denique conveniant stantia C G, L H infra planum D N, sitque communis eorum intersectio O Q,



quæ rectæ C A, ac proinde rectis H M, E G parallela erit. (Nimirum cum O Q, C A communes sint plani C G cum parallelis planis A D, L H intersectiones*, et C A rectæ F D, atque idcirco utrique illarum H M, E G sit parallela.) Prisma duobus triangulis A F G, C D E et tribus parallelogrammis A D, D G, G C comprehensum æquale esse prismati, duobus triangulis L M N, B H K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N comprehenso, eodem modo ostendetur, quo in casu priori. Æqualibus hisce auferatur pars communis, prisma utique, quod duobus triangulis Q M G, O H E et tribus parallelogrammis Q H, H G, G O continetur. Quæ reliqua fuerint inter se æqualia erunt. Id est, solidum, trapeziis duobus Q M F A, O H D C et parallelogrammis quatuor O M, C F, M D, Q C comprehensum, solido, trapeziis duobus L Q G N, B O E K et parallelogrammis quatuor B Q, E N, O G, B N comprehenso, æquale erit. Hisce solidis æqualibus commune apponatur prisma, duobus triangulis A L Q, C B O et tribus parallelogrammis Q B, Q C, C L comprehensum, fiet solidum totum A H toti C K æquale. *Q. E. D.*

 Ubicunque

Ubicunque igitur conveniant ſtantia C G, L H, parallelepipedum parallelepipedo æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*

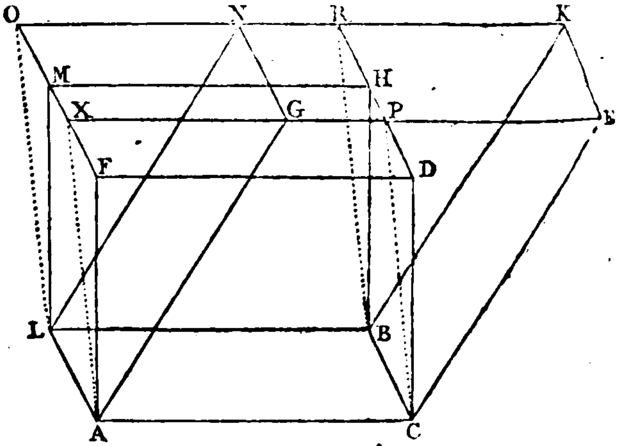
* SCHOLION.

Propoſitionem univerſam in caſus tres diſtribuendam Simpſonus primus, juniorum ſaltem, intellexit. Caſûs ſecundi et tertii elegantiſſimam ſane Viri magni demonſtrationem nos lubenter certe in noſtras ſchedas tranſtuliſſemus, niſi Euclidis ipſius veſtigia non perſequi religio eſſet. Secundi autem caſûs demonſtrationem (qualem nunc eam emendatam damus) ab Euclide minime abjudicamus, licet ita Simpſonus ſententiam tulerit.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in iiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

Sint in eâdem baſi A B ſolida parallelepipeda C M, C N, et eâdem altitudine, quorum ſtantes A F, A G, L M,



L N; C D, C E, B H, B K non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum C M ſolido C N æquale eſſe. Recta enim

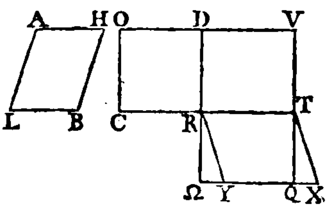
D H,

D H, si opus sit producta, rectis G E, N K, si opus sit productis, in punctis P, R occurrat. Recta item F M, si opus sit producta, eisdem G E, N K, si opus sit productis, in X, O occurrat. Et A X, L O, C P, B R jungantur. Solidum C M, cujus basis quidem A C B L parallelogrammum, oppositum autem ipsi F D H M, est æquale solido C O, cujus basis parallelogrammum A C B L et ei oppositum X P R O; in eâdem enim sunt basi A C B L, et ipsorum stantes A F, A X, L M, L O; C D, C P, B H, B R sunt in eisdem rectis lineis F O, D R[f]. Sed solidum C O, [f] 29. hujus. cujus basis quidem parallelogrammum A C B L, oppositum autem ipsi X P R O, est æquale solido C N, cujus basis A C B L parallelogrammum, et ipsi oppositum G E K N[f]. Etenim in eâdem sunt basi A C B L, et eorum stantes A G, A X, C E, C P; L N, L O, B K, B R sunt in eisdem rectis lineis G P, N R. Quare et C M solidum solido C N æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem sunt basi, et eâdem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

PROP. XXXI. THEOR. [XXXI.]

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia.

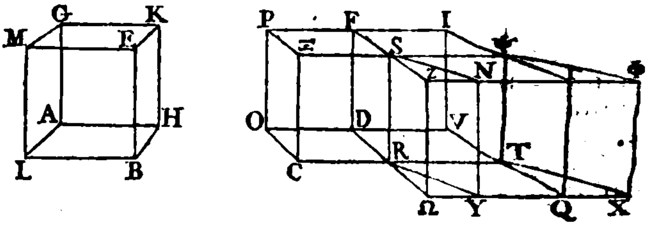
Sint in æqualibus basibus A B, C D solida parallelepipeda A E, C F, et eâdem altitudine. Dico solidum A E solido C F æquale esse. Sint primo stantes † H K, B E, A G, L M; O P, D F, C Ξ, R S ad rectos angulos basibus A B, C D: angulus autem A L B angulo C R D



sit inæqualis, et producatur ipsi C R in directum R T: constituaturque ad rectam lineam R T, et ad punctum in ipsâ R, angulo A L B æqualis angulus T R Y[g]. Et [g] 23. primi. ponatur ipsi quidem A L æqualis R T, ipsi vero L B æqualis R Y; et ad punctum Y ipsi R T parallela ducatur X Y, compleaturque parallelogrammum R X, et Ψ Y solidum. Quoniam igitur duæ T R, R Y duabus A L, L B æquales sunt, et angulos continent æquales; erit parallelogrammum R X æquale et simile parallelogrammo

† *Vide diagramma paginæ sequentis.*

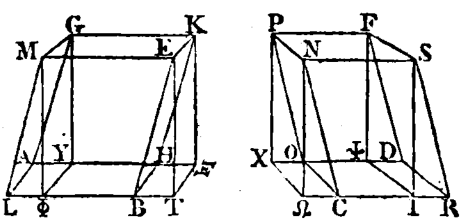
 R L,



H L; et quoniam rurſus A L eſt æqualis R T, et L M ipſi R S, anguloſque æquales continent, parallelogrammum R Ψ parallelogrammo A M æquale et ſimile erit. Eâdem ratione L E parallelogrammum ipſi S Y æquale eſt et ſimile. Tria igitur parallelogramma ſolidi A E tribus parallelogrammis ſolidi Ψ Y æqualia et ſimilia ſunt. Præterea cum rectæ M L, S R plana L H, R X ad perpendiculum inſiſtant; plano L H plana omnia per M L, plano autem R X omnia per R S, ad perpendiculum erunt[g]. Plano igitur L H ad perpendiculum ſunt L E, L G plana; plano item R X plana R N, R Ψ. Rurſum recta L M, cum ad perpendiculum ſit plano L H, rectarum L A, L B utrique, cum ſint in illo plano, ad perpendiculum erit. Eſt autem illa L M planorum L E, L G communis interſectio. Quare angulus A L B mutua eſt planorum L G, L E inclinatio[h]. Similiter oſtendemus angulum Y R T planorum R N, R Ψ mutuam eſſe inclinationem. Anguli autem A L B, Y R T ſunt inter ſe æquales. Plana igitur L G, L E ſimiliter inter ſe, ac plana R N, R Ψ inclinata ſunt. Solidi igitur A E tria contigua parallelogramma L H, L G, L E, quæ tribus ſolidi Ψ Y contiguis R X, R Ψ, R N oſtenſa ſunt æqualia et ſimilia, eadem tria inter ſe ſimiliter eiſdem tribus inclinata erunt; homologa utique homologis. Sed et tria tribus oppoſita, et æqualia ſunt, et ſimilia[i], et ſimiliter inclinata[k]. Totum igitur A E ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo Ψ Y eſt æquale. Producantur D R, X Y, conveniantque inter ſe in puncto Ω; et per T ipſi D Ω parallela ducatur T Q; et producantur T Q, O D, et conveniant in V; compleanturque ſolida Ω Ψ, R I. Solidum igitur Ψ Ω, cujus baſis eſt R Ψ parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi Ω Γ, eſt æquale ſolido Ψ Y, cujus baſis eſt R Ψ parallelogrammum, et oppoſitum ipſi Y Φ; in eâdem enim ſunt baſi R Ψ, et eâdem altitudine, et eorum ſtantes R Ω, R Y, T Q, T X;

[g] 18. hujus.
[h] Def. 6. hujus.
[i] Cor. 24. hujus.
[k] Cor. 25. hujus.

S Z, S N, Ψ Γ, Ψ Φ in eiſdem ſunt rectis lineis Ω X, Z Φ [l]. [l] 29. hujus.
Sed ſolidum Ψ Y æquale eſt ſolido A E. Ergo et Ψ Ω ſolido A E eſt æquale. Præterea quoniam parallelogrammum R Y X T eſt æquale parallelogrammo Ω T [m], [m] 35. primi.
(etenim in eâdem eſt baſi R T, et in eiſdem parallelis R T, Ω X) et parallelogrammum R Y X T parallelogrammo C D æquale (quoniam utrumque eſt æquale ipſi A B) idcirco parallelogrammum Ω T æquale eſt parallelogrammo C D. Eſt autem aliud parallelogrammum D T. Eſt igitur ut C D baſis ad baſim D T, ita Ω T ad ipſam D T [n]. [n] 7. quinti.
Et quoniam ſolidum parallelepipedum C I ſecatur plano R F, planis oppoſitis parallelo; erit ut C D baſis ad baſim D T, ita ſolidum C F ad R I ſolidum [o]. Eâdem ratione, [o] 25. hujus.
quoniam ſolidum parallelepipedum Ω I ſecatur plano R Ψ, oppoſitis planis parallelo; ut Ω T baſis ad baſim D T, ita erit ſolidum Ω Ψ ad R I ſolidum [o]. Sed ut C D baſis ad baſim D T, ita baſis Ω T ad ipſam T D. Ut igitur ſolidum C F ad R I ſolidum, ita ſolidum Ω Ψ ad ſolidum R I. Quod cum utrumque ſolidorum C F, Ω Ψ ad ſolidum R I eandem habeat proportionem, ſolidum C F ſolido Ω Ψ eſt æquale [p]. Solidum autem Ω Ψ oſtenſum eſt [p] 9. quinti.
eſt æquale ſolido A E. Ergo et A E ipſi C F æquale erit.



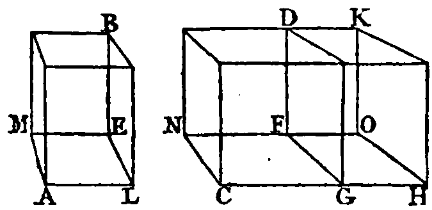
Sed non ſint ſtantes A G, H K, B E, L M, C N, O P, D F, R S ad rectos angulos ipſis A B, C D baſibus. Dico rurſus ſolidum A E æquale eſſe ſolido C F. Ducantur a punctis K, E, G, M; P, F, N, S ad ſubjectum planum perpendiculares K Ξ, E T, G Y, M Φ; S I, F Ψ, N Ω, P X [q], quæ [q] 11. hujus.
plano in punctis Ξ, T, Y, Φ; Ψ, X, Ω, I occurrant; et jungantur Ξ T, Y Φ, Ξ Y, T Φ; X Ψ, X Ω, Ω I, Ψ I. Æquale igitur eſt K Φ ſolidum ſolido P I; in æqualibus enim ſunt baſibus K M, P S, et eâdem altitudine, et utriuſque ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. Sed K Φ ſolidum ſolido A E eſt æquale [r]: ſiquidem in eâdem ſunt baſi, et eâdem [r] 29. hujus.
altitudine, et utriuſque ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis.

lineis. Pari ratione solidum P I solido C F est æquale. Ergo et solidum A E solido C F æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.

Sint solida parallelepipeda A B, C D, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse, ut bases; hoc est, ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad C D

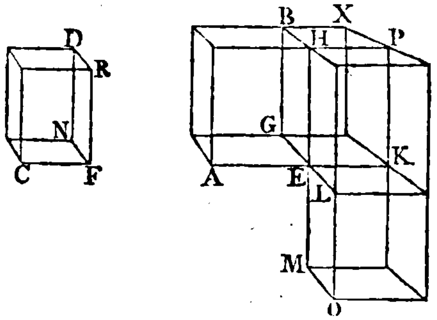


solidum. Applicetur enim ad rectam lineam F G parallelogrammo A E æquale F H, in angulo F G H ipsi G C N æquali. Et a basi F H eâdem altitudine ipsi C D solidum parallelepipedum G K compleatur. Solidum
p 31. hujus. igitur A B solido G K est æquale [p]; in æqualibus enim sunt basibus A E, E H, et eâdem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum C K plano D G secatur oppositis planis parallelo; erit ut H F basis ad
q 25. hujus. basim F C, ita solidum H D ad D C solidum [q]; atqui est basis quidem F H basi A E æqualis, solidum vero G K æquale solido A B. Est igitur et ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad solidum C D. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases. *Q. E. D.*

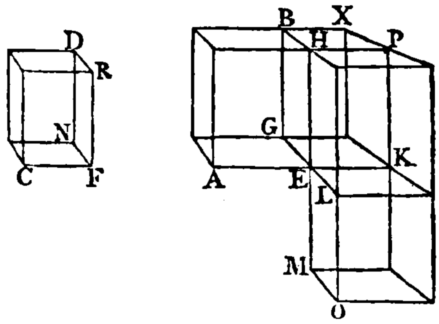
[XXXIII.] PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicatâ proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda A B, C D. Latus autem A E homologum sit lateri C F. Dico solidum A B ad C D solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet A E ad C F. Producantur enim E K, E L, E M in directum ipsis A E, G E, H E; et ipsi quidem



dem C F æqualis ponatur E K, ipsi vero F N æqualis E L; et adhuc ipsi F R æqualis E M; et K L parallelogrammum, et K O solidum compleatur. Quoniam igitur duæ K E, E L duabus C F, F N æquales sunt; sed et angulus K E L angulo C F N æqualis; quia et angulus A E G ipsi C F N ob similitudinem solidorum A B, C D: erit et K L parallelogrammum simile et æquale parallelogrammo C N. Eâdem ratione, et parallelogrammum K M æquale est et simile parallelogrammo C R; et adhuc parallelogrammum O E ipsi D F parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma solidi K O tribus parallelogrammis C D solidi æqualia et similia sunt. Eadem autem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata esse, manifestum est. Cum ex ipsâ constructione figuræ, solidi K O plana illa tria K L, K M, O E solidi A B sint plana ipsa A G, A H, E B. Quæ quidem similiter inter se ac solidi C D tria illa C N, C R, D F inclinata sunt, propter solidorum similitudinem. Sed in utroque solido tria tribus oppositis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata[r]. [r] Cor. 24. hujus. Totum igitur K O solidum æquale est et simile toti solido C D. Compleatur G K parallelogrammum; et a basibus quidem G K, K L parallelogrammis, altitudine vero eâdem ipsi A B, solida compleantur E X, L P. Et quoniam ob similitudinem solidorum A B, C D, est ut A E ad C F, ita E G ad F N; et E H ad F R; æqualis autem F C ipsi E K, et F N ipsi E L, et F R ipsi E M: erit ut A E ad E K, ita G E ad E L, et H E ad E M. Sed ut A E quidem ad E K, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K[s]: ut autem G E ad E L, ita G K[s] ad K L; et ut H E ad E M, ita P E ad K M[s]. Ut igitur A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K, ita [s] 1. sexti.



GK ad KL, et PE ad KM. Sed ut AG quidem ad [t 32. hujus.] GK, ita AB ſolidum ad ſolidum EX[t]: ut autem GK ad KL, ita ſolidum EX ad PL ſolidum; et ut PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. Et ut igitur ſo- [u 11. quinti.] lidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, et PL ad KO[u]. Si autem quatuor ſint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [x Def. 11. quinti.] habet ejus, quam habet ad ſecundam[x]. Ergo et AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. Sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; et AE recta linea ad ipſam EK. Quare et AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. Æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, et recta linea EK rectæ CF eſt æqualis. Ergo et AB ſolidum ad ſolidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod fit a primâ, ad ſolidum, quod a ſecundâ, ſimile, et ſimiliter deſcriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam.

* SCHOLION.

Quod in hâc propoſitione demonſtrandâ Euclides aſſumpſit, proportionum, quæ eædem inter ſe ſunt, earum triplicatas quoque inter ſe eaſdem eſſe; ut et ejus contrarium, proportiones inter ſe eaſdem eſſe, quarum triplicatæ

plicatæ ſunt eædem; operæ pretium facturi ſumus, ſi brevi demonſtratione utrumque confirmemus, cum ſine confirmatione temere aſſumi nonnulli judicarint. Primum dico, proportionum, quæ inter ſe eædem ſunt, eaſdem eſſe triplicatas. Sint quatuor A, B, C, D continue proportionales, et aliæ quatuor E, F, G, H continue proportionales. Ita proportio primæ A ad quartam D triplicata erit ejus, quam prima A habet ad ſecundam B; et proportio primæ E ad quartam H triplicata ejus, quam prima eadem E habet ad ſecundam F [y]. Sit autem A ad B, ut E ad F. Erit igitur et B ad C, ut F ad G; et C ad D ut G ad H. Quare ex æquo A ad D ut E ad H [z]. Proportionum igitur, quæ eædem inter ſe ſunt, earum eædem erunt triplicatæ. Sed poſitis ut prius quatuor proportionalibus A, B, C, D, item aliis quatuor E, F, G, H; ſit A ad D, ut E ad H. Dico et A ad B ut E ad F. Non enim. A igitur vel major vel minor quam ad B in ratione E ad F. Sit major primum. Erit igitur et B major quam ad C ut F ad G; et C major quam ad D ut G ad H [a]. Minor itaque aliqua quam A habet ad B rationem eam, quam E ad F [b]; et B ad majorem quam C rationem eam, quam F ad G [c]. Ex æquo igitur minor quam A ad majorem quam C rationem habet, quam E ad G. A igitur ad majorem quam C majorem rationem habet, quam E ad G. Omnino igitur ad ipſam C longe majorem. Pari ratione, cum major ſit A ad C, quam ut E ad G, et C major quam ad D ut G ad H, oſtendetur A longe major quam ad D ut E ad H. Quod eſt abſurdum; cum A ſit ad D, ut E ad H. Non igitur minor quam A habebit ad B rationem eam, quam E ad F. Eodemque modo oſtendetur neque major. Eſt igitur A ad B, ut E ad F. Proportiones igitur, quarum triplicatæ ſunt eædem, inter ſe eædem erunt.

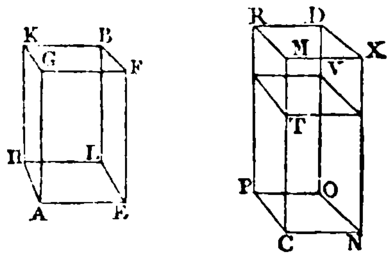
[y] Def. 11. quinti.
[z] 22. quinti.
[a] 13. quinti.
[b] Def. 7. quinti.
[c] 10. quinti.

PROP.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda A B, C D. Dico ipsorum bases et altitudines reciprocari, hoc est, ut E H basis ad basim N P, ita esse altitudinem solidi C D ad solidi A B altitudinem. Sint enim primo stantes A G, E F, L B, H K; C M, N X, O D, P R ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut E H basis ad basim N P, ita esse C M ad A G.



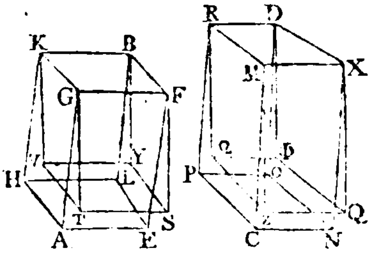
Capiatur enim in C M ipsi A G æqualis C T; et a basi quidem N P, altitudine autem C T, solidum parallelepipedum V C compleatur. Quoniam igitur solidum A B solido C D est æquale, aliud autem aliquod est V C, et
[c] 7. quinti. æqualia ad idem eandem habent proportionem[c]; erit ut A B solidum ad solidum C V, ita C D solidum ad solidum C V. Sed ut A B solidum ad solidum C V, ita basis E H
[d] 32. hujus. ad N P basim[d]; æque alta enim sunt A B, C V solida. Ut autem solidum C D ad ipsum C V, ita M P basis ad
[e] 25. hujus. [f] 1. sexti. basim P T[e], et M C ad C T[f]. Et igitur ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Est autem C T æqualis A G. Ergo et ut E H basis ad basim N P, ita M C ad A G. Quare solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocantur.

Rursus solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocentur: sitque ut E H basis ad basim N P, ita solidi C D altitudo ad altitudinem solidi A B. Dico solidum A B solido C D æquale esse. Ponatur ipsi A G æqualis rursus C T, et similiter solidum C V compleatur. Itaque quoniam est ut E H basis ad basim N P, ita M C ad ipsam A G; æqualis autem est A G ipsi C T: erit ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Sed ut
[g] 32. hujus. basis E H ad N P basim, ita A B solidum ad solidum V C[g];

æq-

æque alta enim ſunt ſolida A B, C V. Ut autem M C ad C T, ita et M P baſis ad baſim P T, et ſolidum C D ad C V ſolidum[h]. Et igitur ut ſolidum A B ad ſolidum C V, [h] 1. ſexti, et ita C D ſolidum ad ſolidum C V [i]. Quod cum utrumque 25. hujus. ſolidorum A B, C D ad ipſum C V eandem proportionem [i] 11. quinti. habeat; erit A B ſolidum ſolido C D æquale[k]. *Q. E. D.* [k] 9. quinti.

Non ſint autem ſtantes F E, B L, G A, K H; X N, D O, M C, R P ad rectos angulos baſibus ſolidorum. Dico et



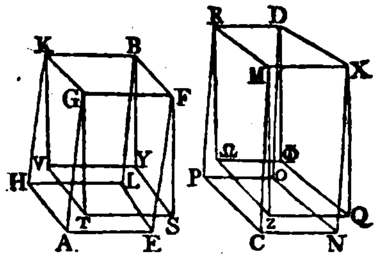
ſic, æqualibus exiſtentibus ſolidis A B, C D, baſes et altitudines reciprocari. Scilicet ut E H baſis ad baſim N P, ita eſſe altitudinem ſolidi C D ad ſolidi A B altitudinem. Ducantur enim a punctis F, G, B, K; X, M, D, R ad plana baſium E H, N P perpendiculares, quæ planis in punctis S, T, Y, V; Q, Z, Ω, Φ occurrant; et compleantur ſolida F V, X Ω. Itaque ſolidum A B ſolido B T eſt æquale; in eâdem namque ſunt baſi F K, et eâdem altitudine, ſtantes autem non ſunt in eiſdem rectis lineis[l]. Pari ratione ſolidum D C eſt æquale ſolido D Z. Erit igitur et ſolidum B T ſolido D Z æquale. Æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes et altitudines reciprocantur[m]. Eſt igitur ut F K baſis ad baſim X R, ita ſolidi D Z altitudo ad altitudinem ſolidi B T. Atqui eſt baſis quidem F K baſi E H æqualis, baſis vero X R æqualis baſi N P[n]. Quare ut E H baſis ad baſim N P, ita eſt altitudo ſolidi D Z ad ſolidi B T altitudinem. Eædem autem ſunt altitudines ſolidorum D Z, D C, itemque ſolidorum B T, B A. Eſt igitur ut E H baſis ad baſim N P, ita ſolidi D C altitudo ad altitudinem ſolidi A B. Ergo ſolidorum parallelepipedorum A B, C D baſes et altitudines reciprocantur.

[l] 30. hujus.

[m] Ex ante demonſtratis.

[n] 24. hujus.

Rurſus ſolidorum parallelepipedorum A B, C D baſes et



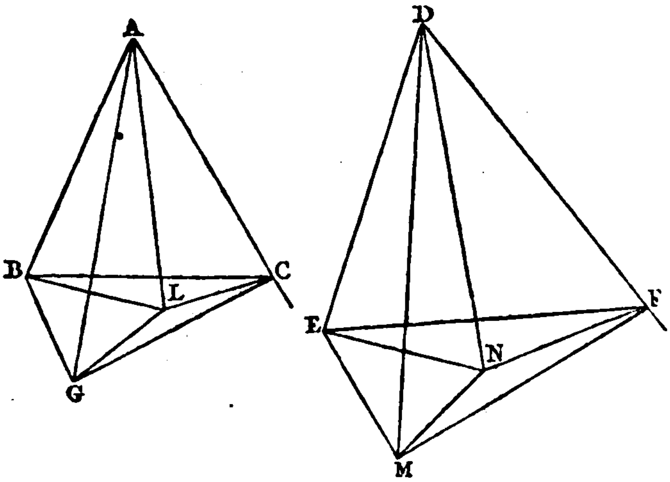
et altitudines reciprocentur; sitque ut E H basis ad basim N P, ita altitudo solidi C D ad solidi A B altitudinem. Dico solidum A B solido C D æquale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut E H basis ad basim N P, ita solidi C D altitudo ad altitudinem solidi A B; et basis quidem E H est æqualis basi F K; N P vero ipsi X R: erit ut F K basis ad basim X R, ita altitudo solidi C D ad solidi A B altitudinem. Eædem autem sunt altitudines solidorum A B, B T; necnon ipsorum C D, D Z. Est igitur ut F K basis ad basim X R, ita solidi D Z altitudo ad altitudinem solidi B T. Quare solidorum B T, D Z parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur. Quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, et bases et altitudines reciprocantur; ea inter se sunt æqualia. Ergo B T solidum solido D Z est æquale. Sed solidum quidem B T æquale est solido B A, etenim in eâdem sunt basi F K, et eâdem altitudine, stantes autem non sunt in eisdem rectis lineis. Pari autem ratione solidum D Z est æquale solido D C. Ergo et solidum A B solido C D est æquale. *Q. E. D.*

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis a principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis, quæ a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A C, E D F; et a punctis A, D sublimes rectæ lineæ A G, D M constituantur,

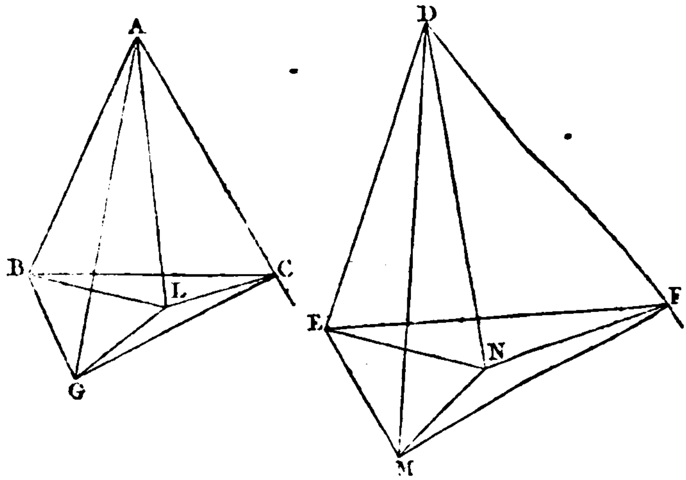
quæ



quæ cum rectis lineis a principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero M D F angulo G A C æqualem; et sumantur in ipsis A G, D M quævis puncta G, M, a quibus ad plana per B A C, E D F ducantur perpendiculares G L, M N, occurrentes planis in punctis L, N; et L A, N D jungantur. Dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. A puncto enim L ad rectas A B, A C deducantur ad perpendiculum L B, L C. A puncto quoque N in rectas D E, D F deducantur ad perpendiculum N E, N F. Et jungantur G B, G C; M E, M F. Jungantur quoque B C, E F. Ita rectæ G B, G C rectis A B, A C, necnon M E, M F rectis D E, D F, ad perpendiculum erunt[i]. In triangulis igitur A B G, D E M æquales sunt anguli A B G, D E M; rectus enim uterque. Angulus autem B A G angulo E D M æqualis[k]. Reliquus igitur A G B reliquo D M E æqualis, et triangulum A B G triangulo D E M simile[l]. Quare A B ad D E, et B G ad E M, ut A G ad D M. Pari ratione, propter angulos G C A, M F D rectos, angulosque C A G, F D M inter se æquales, simile erit triangulum A C G triangulo D F M; et A C ad D F, et C G ad F M, ut A G ad D M. Jam vero cum sit A B ad A G, ut D E ad D M, et A G ad A C, ut D M ad D F; ex æquo erit A B ad A C, ut D E ad D F. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis[k]. Triangula igitur

i Cor. 1. 11. hujus.
k ex hyp.
l 4. sexti.

B A C,



B A C, E D F habent angulum angulo æqualem, et latera circa æquales angulos proportionalia. Æquiangula igitur ſunt triangula B A C, E D F, et æquales habent angulos, quibus latera homologa ſubtenduntur [m]. Angulus igitur A B C angulo D E F eſt æqualis, et angulus A C B angulo D F E. Præterea latus B C erit ad latus E F, ut A B ad D E, et A C ad D F [n]. Rurſum cum æquales ſint anguli A B L, D E N, rectus enim uterque [o], æquales item A B C, D E F, et reliquus C B L reliquo F E N æqualis erit. Pari ratione propter angulos A C L, D F N rectos, anguloſque A C B, D F E æquales, anguli B C L, E F N inter ſe æquales erunt. Æquiangula igitur ſunt triangula B L C, E N F. Latera igitur circa æquales angulos proportionalia habent [n]. Quare B L eſt ad E N, ut B C ad E F. Sed B C eſt ad E F, ut A B ad D E, et A B ad D E, ut B G ad E M. Eſt igitur B L ad E N, ut B G ad E M [p]. Sed cum rectæ G L, M N ad perpendiculum ſint planis B A C, E D F, in quibus ſunt rectæ L B, N E, recti ſunt anguli G L B, M N E [q]. Duo igitur triangula G L B, M N E angulum angulo æqualem habent (rectum utique G L B recto M N E), et circa alios G B L, M E N latera proportionalia, nempe B L ad E N, ut B G ad E M; reliquos autem angulos B G L, E M N, rectis ſingulatim minores. Æquiangula igitur ſunt triangula G L B, M N E, et æquales habent angulos, circa quos latera ſunt proportionalia [r]; angulum ſcilicet G B L angulo M E N, et reliquum

[m] 6. ſexti.
[n] 4. ſexti.
[o] Per conſtruct.
[p] 11. quinti.
[q] Def. 3. hujus.
[r] 7. ſexti.

reliquum BGL reliquo EMN [s]. Similia igitur sunt triangula GLB, MNE, et GB est ad ME, ut GL ad MN [t]. Sed GB est ad ME, ut AG ad DM (id enim initio ostensum.) Quare GL est ad MN, ut AG ad DM [u]. Sed cum rectæ GL, MN ad perpendiculum sint planis BAC, EDF, in quibus sunt rectæ LA, ND, recti sunt anguli GLA, MND. Duo igitur triangula GLA, MND angulum angulo æqualem habent (rectum utique GLA recto MND) et circa alios angulos AGL, DMN latera proportionalia; nempe AG ad DM, ut GL ad MN; angulos autem reliquos GAL, MDN rectis singulatim minores. Æquiangula igitur sunt triangula GLA, MND, et æquales habent angulos, circa quos latera sunt proportionalia [a]. Nempe angulum AGL angulo DMN, et reliquum GAL reliquo MDN æqualem. Anguli igitur GAL, MDN sunt inter se æquales. Si sint igitur duo anguli plani &c. *Q. E. D.*

[s] 7. sexti.
[t] 4. sexti.
[u] 11. quinti.

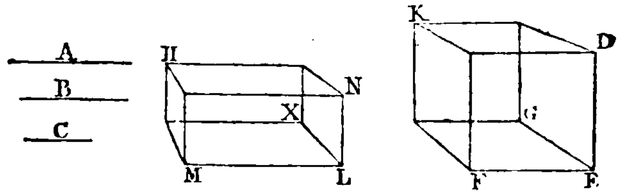
Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis a principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse. Nam triangulorum similium GAL, MDN si latera homologa GA, MD inter se æqualia sint; homologa etiam GL, MN erunt inter se æqualia.

PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVI.]

Si tres rectæ lineæ proportionales sint; solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, æquale est solido parallepipedo, quod fit a mediâ, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; sit scilicet ut A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis A, B, C, æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E, contentus tribus angulis planis DEG, GEF, FED; et ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE, GE, EF; et solidum parallelepipedum EK compleatur. Rectæ autem A ponatur æqualis LM; et ad rectam lineam LM, et ad punctum in ipsâ L, constituatur angulo solido ad E æqualis angulus, contentus tribus

planis



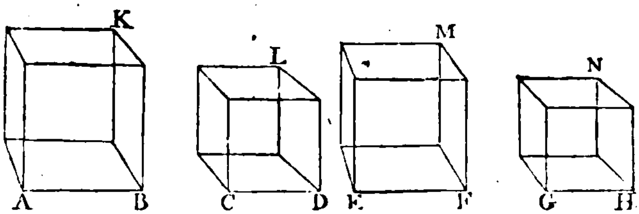
[x] 26. hujus. planis N L X, X L M, M L N [x]; et ponatur ipsi quidem B æqualis L N, ipsi vero C æqualis L X. Quoniam igitur est ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi L M, et B unicuique ipsarum L N, E F, E G, E D, et C ipsi L X; erit ut L M ad E F, ita G E ad L X; et circum æquales angulos M L X, G E F latera sunt reciproca. Ergo M X parallelogrammum parallelogrammo [y] 14. sexti. G F est æquale [y]. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt G E F, X L M, et in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur L N, E D æquales inter se, et cum rectis lineis a principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ a punctis N, D ad plana per X L M, G E F ducuntur, inter [z] Cor. 35. hujus. se æquales [z]. Ergo solida L H, E K eâdem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, et eâdem altitudine, inter se sunt æ- [a] 31. hujus. qualia [a]. Ergo solidum H L æquale est solido E K. Atqui est solidum quidem H L, quod fit a tribus A, B, C, solidum vero E K, quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod fit a tribus, æquale est solido parallelepipedo, quod fit &c. *Q. E. D.*

[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; et quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H, sit scilicet ut A B ad C D, ita E F ad G H, et describantur ab ipsis A B, C D, E F, G H similia et similiter posita solida parallelepipeda K A, L C, M E, N G. Dico ut K A ad L C, ita esse M E ad N G. Quoniam enim solidum parallelepipedum K A simile est ipsi L C, habebit

K A



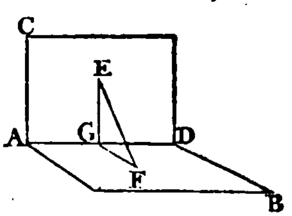
K A ad L C triplicatam proportionem ejus, quam A B habet ad C D[b]. Eâdem ratione, et solidum M E ad ipsum N G triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet E F ad G H[b]. Atqui est ut A B ad C D, ita E F ad G H. Ut igitur A K ad L C, ita M E ad N G. [b] 33. hujus.

Sed sit ut solidum A K ad solidum L C, ita M E solidum ad solidum N G. Dico, ut recta linea A B ad rectam C D, ita esse rectam E F ad ipsam G H. Quoniam enim rursus A K ad L C triplicatam proportionem habet ejus, quam A B habet ad C D[b]; habet autem et M E ad N G triplicatam proportionem ejus, quam E F ad G H; atque ut A K ad L C, ita M E ad N G: erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

PROP. XXXVIII. THEOR. XXXVIII.]

Si planum ad planum rectum sit; et ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe C D ad planum A B rectum sit, communis autem eorum sectio sit A D, et in ipso C D plano, quodvis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quæ a puncto E ad planum A B ducitur, cadere in ipsam A D. Non enim; sed, si fieri potest, cadat extra, ut E F; et plano A B in puncto F occurrat: a puncto autem F ad D A in plano A B perpendicularis ducatur F G, quæ quidem et plano C D ad rectos angulos erit[c]; et E G jungatur. Quoniam igitur recta F G plano C D est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea E G, quæ est in eodem



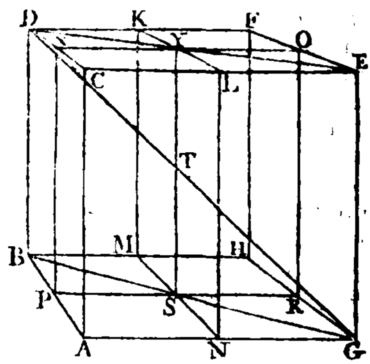
[c] Def. 4. hujus.

d Def. 3. hujus. C D plano: erit angulus F G E rectus[d]. Sed et E F plano A B ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus E F G. Quare trianguli E F G duo anguli duobus e 17. primi. rectis sunt æquales; quod est absurdum[e]. Non igitur a puncto E ad A B planum perpendicularis ducta extra rectam lineam D A cadet. Ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. *Q. E. D.*

[XXXIX.] PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, et solidi parallelepipedi diagonalis, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo A F, oppositorum planorum C F, A H latera bifariam secentur in punctis



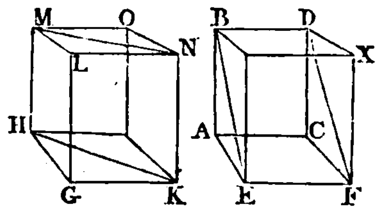
K, L, M, N, X, O, P, R. Et jungantur K L, M N; K M, L N; X O, P R; X P, O R. Æquales sunt rectæ D K, C L, æqualium utique D F, C E dimidiæ. Sed et parallelæ. Parallelæ igitur et æquales K L, D C, quæ illas f 33. primi. D K, C L conjungunt[f]. Simili modo ostendentur M N, B A parallelæ et æquales. Jam vero cum K L parallela sit ipsi D C, erit et B A, quæ eidem D C est parallela, parallela g 9. hujus. ipsi K L[g]. Sed eadem B A ipsi M N est parallela. Quare K L, M N inter se sunt parallelæ. Quare et rectæ K M, L N, quæ puncta K, M; L, N, in parallelis K L, M N sumpta, conjungunt, in eodem sunt, in quo ipsæ h 7. hujus. parallelæ, plano[h]. Plana igitur est figura K M N L. Simili modo plana ostendetur figura X P O R. Oppositorum

ſitorum igitur planorum C F, A H lateribus in punctis K, L, M, N, X, O, P, R bifariam diviſis, per ſectiones plana ducuntur K N, X R. Communis planorum ſectio ſit Y S, et ſolidi parallelepipedi diagonalis ſit D G. Dico Y S, D G ſeſe bifariam ſecare. Jungantur enim D Y, Y E, B S, S G. Quoniam igitur D X parallela eſt ipſi O E, alterni anguli D X Y, Y O E inter ſe æquales ſunt[h]. Et [h] 29. primi. quoniam D X quidem eſt æqualis O E, X Y vero ipſi Y O, et angulos æquales continent; erit baſis D Y æqualis baſi Y E; et triangulum D X Y triangulo Y O E, et reliqui anguli reliquis angulis æquales[i]. Angulus igitur [i] 4. primi. X Y D eſt æqualis angulo O Y E, et ob id recta linea eſt D Y E[k], et D Y, Y E ſunt æquales. Eâdem ratione, et [k] 14. primi. B S G recta eſt, et B S æqualis S G. Et quoniam C A ipſi D B æqualis eſt et parallela, et eadem C A æqualis et parallela ipſi E G; erit et D B ipſi E G æqualis et parallela; et ipſas conjungunt rectæ lineæ D E, G B: parallela igitur eſt D E ipſi B G[l]. Et ſumpta ſunt in utrâque ip- [l] 33. primi. ſarum quævis puncta D, Y, G, S, et junctæ ſunt D G, Y S. Ergo D G, Y S in uno ſunt plano[m]; neque tamen [m] 7. hujus. inter ſe parallelæ; nimirum cum Y S (ipſi K M parallela) parallela erit D B, cui non eſt parallela D G. Rectæ igitur D G, Y S, quæ in eodem plano non ſunt parallelæ, ſibi invicem in puncto aliquo occurrent. Occurrant in T. Dico igitur in T bifariam dividi; hoc eſt, Y T ipſi T S, D T vero ipſi T G æqualem eſſe. Nam cum D E ſit parallela B G, erit et E D T angulus angulo B G T æqualis, alterni enim ſunt[h]. Eſt autem et D T Y angulus æqualis ipſi G T S[n]. Duo igitur ſunt triangula D T Y, G T S duos [n] 15. primi. angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, videlicet D Y ipſi G S: dimidia enim ſunt ipſorum D E, B G. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt[o]. Quare D T quidem eſt æ- [o] 26. primi. qualis T G, Y T vero ipſi T S. Si igitur in ſolido parallelepipedo, &c. *Q. E. D.*

[XL.] PROP. XL. THEOR.

Si ſint duo priſmata æque alta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum ſit trianguli; ea inter ſe æqualia erunt.

Sint priſmata æque alta A B C D E F, G H K L M N. Et unum quidem baſim habeat parallelogrammum A F,



alterum vero G H K triangulum, et duplum ſit A F parallelogrammum trianguli G H K. Dico priſma A B C D E F priſmati G H K L M N æquale eſſe. Compleantur enim A X, G O ſolida. Et quoniam parallelogrammum A F trianguli G H K eſt duplum; eſt autem et H K parallelo-
[q] 41. primi. grammum duplum trianguli G H K[q]: erit A F parallelogrammum parallelogrammo H K æquale. Quæ vero in æqualibus ſunt baſibus ſolida parallelepipeda,
[r] 31. hujus. et eâdem altitudine, inter ſe æqualia ſunt[r]. Æquale igitur A X ſolidum ſolido G O. Atque eſt ſolidi quidem A X dimidium A B C D E F priſma, ſolidi vero G O di-
[s] 28. hujus. midium eſt priſma G H K L M N[s]. Ergo A B C D E F priſma priſmati G H K L M N eſt æquale. Si igitur ſint duo priſmata æque alta, &c. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

EUCLIDIS

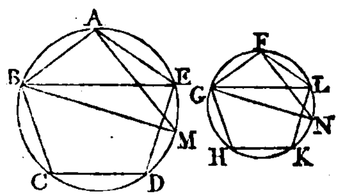
ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt, ut diametrorum quadrata.

SINT circuli ABCDE, FGHKL, et in ipsis similia polygona ABCDE, FGHKL; diametri autem circulorum sint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Jungantur enim BE, AM,

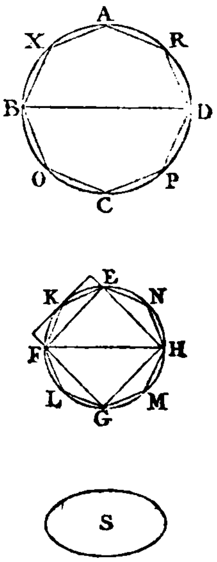


GL, FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; idcirco BAE angulus angulo GFL est æqualis, atque ut BA ad AE, ita est GF ad FL. Duo igitur triangula sunt BAE, GFL, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL; circa æquales autem angulos latera proportionalia. Quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est [a]; ac propterea angulus AEB æqualis [a] 6. sexti. est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis [b]; in eâdem enim circumferentiâ [b] 21. tertii. consistunt. Angulus autem FLG æqualis est angulo FNG [b]. Ergo et AMB angulus est æqualis angulo FNG. Est autem et rectus angulus BAM æqualis recto GFN [c]. Quare et reliquus trianguli AMB angulus re- [c] 31. tertii. liquo trianguli FGN æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. Ergo ut BM ad GN, ita BA ad GF [d]. Sed proportionis quidem [d] 4. sext. BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN; proportionis vero BA ad GF duplicata

plicata eſt proportio A B C D E polygoni ad polygonum
[e] 20. ſexti. F G H K L [e]: eſt igitur ut quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita polygonum A B C D E ad F G H K L polygonum. Quare ſimilia polygona, quæ in circulis deſcribuntur, inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

[II.] PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata.

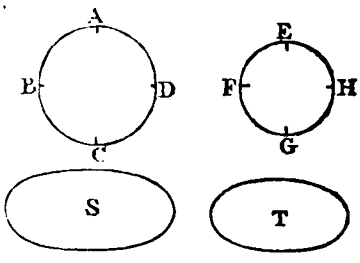


Sint circuli A B C D, E F G H, diametri autem ipſorum ſint B D, F H. Dico ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſſe circulum A B C D ad E F G H circulum. Si enim non ita ſit; erit ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulus A B C D, vel ad ſpatium aliquod minus circulo E F G H, vel ad majus. Sit primum ad minus, quod ſit S. Et in circulo E F G H deſcribatur quadratum E F G H. Itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli E F G H; quoniam ſi per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium E F G H †. Deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. Ergo quadratum E F G H majus eſt dimidio circuli E F G H. Secentur bifariam circumferentiæ E F, F G, G H, H E in punctis K, L, M, N: et E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E jungantur. Unumquodque igitur triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit: quoniam ſi per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma, quæ ſunt in rectas lineas E F, F G,

† *Nimirum quadratum circulo circumſcriptum quadrato ex diametro circuli eſt æquale. Id enim ex conſtructione ſeptimæ quarti manifeſtum eſt. Quadratum igitur circulo* E F G H *circumſcriptum quadrato ex* F H *eſt æquale.*
[f] 31. tertii. *Sed, propter angulum* F E H *in ſemicirculo rectum* [f], *quadratum ex* F H *qua-*
[g] 47. primi. *dratis duobus ex* F E, E H, *ſimul ſumptis, eſt æquale* [g]. *Et cum æquales inter ſe ſint rectæ* F E, E H *(quadrati utique inſcripti latera) duo ex* F E, E H *quadrata, quadrati ex alterutrâ, id eſt, inſcripti quadrati, duplo ſunt æqualia. Quadratum igitur ex diametro* F H, *ac proinde quadratum circulo circumſcriptum, inſcripti duplum eſt. Et inſcriptum viciſſim dimidium circumſcripti.*

G H,

GH, HE, compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt [f]. Sed ſegmentum minus eſt parallelogrammo. Quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. Etenim duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod relinquitur, rurſus majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua, quæ minori magnitudine expoſitâ ſit minor [g]. Itaque relicta ſint ſegmenta circuli EFGH in rectis lineis EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. Eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum [h]. Sed et ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium S. Ergo et ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum [i]. Major autem eſt circulus ABCD eo, quod in ipſo eſt polygono. Quare et ſpatium S majus eſt polygono EKFLGMHN [k]. Sed et minus [l]. Quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum



f 41. primi.
g 1. decimi.
h 1. hujus.
i 11. quinti.
k 14. quinti.
l ex hyp.

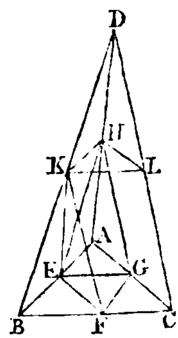
A B C D ad aliquod ſpatium majus circulo E F G H. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. Erit igitur invertendo ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita ſpatium S ad A B C D circulum. Sed quoniam S majus eſt E F G H circulo; erit ut ſpatium S ad A B C D circulum, ita circulus E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D [m]. Ergo et ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita E F G H circulus ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſt circulus A B C D ad ſpatium aliquod majus E F G H circulo. Oſtenſum autem eſt neque ad minus. Quare ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita erit A B C D circulus ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

[m] 14. quinti.

[III.] PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis, triangularem habens baſim, dividitur in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimileſque toti; et in duo priſmata æqualia; quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt majora.

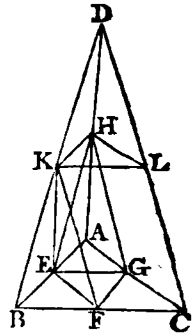
Sit pyramis, cujus baſis quidem A B C triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem A B C D dividi in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, triangulares baſes habentes, et ſimiles toti; et in duo priſmata æqualia; et duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora. Secentur enim A B, B C, C A, A D, D B, D C biſariam in punctis E, F, G, H, K, L; et E H, E G, G H, H K, K L, L H, E K, K F, F G jungantur. Quoniam igitur A E quidem eſt æqualis E B, A H vero ipſi H D; erit E H ipſi D B parallela [n]. Eadem ratione et H K eſt parallela ipſi A B. Parallelogrammum igitur eſt H E B K. Quare H K eſt æqualis E B [o]. Sed E B ipſi A E eſt æqualis. Ergo et A E ipſi H K æqualis erit. Eſt autem et A H æqualis H D. Duæ igitur A E, A H duabus K H, H D æquales ſunt, altera alteri, et angulus E A H æqualis angulo K H D [p]; baſis igitur



[n] 2. ſexti.
[o] 34. primi.
[p] 29. primi.

igitur E H basi K D est æqualis [q]. Quare triangulum [q 4. primi.] A E H æquale est et simile triangulo H K D. Eadem ratione et triangulum A H G triangulo H L D æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes E H, H G duabus rectis lineis sese tangentibus K D, D L parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos continebunt [r]. Ergo angulus E H G est æqualis [r 10. undecimi.] angulo K D L. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ E H, H G duabus K D, D L æquales sunt, altera alteri, et angulus E H G æqualis angulo K D L; erit basis E G basi K L æqualis [s]: æquale igitur est et simile triangulum [s 4. primi.] E H G triangulo K D L. Eadem ratione et A E G triangulum est æquale et simile triangulo H K L. Planum autem D B A, seu D K H, planis parallelis H K L, A B C similiter est inclinatum. Et eisdem planis parallelis planum D C A, seu D L H, similiter est inclinatum. Eisdem etiam planum D B C, seu D K L, similiter est inclinatum. Quare pyramis, cujus basis quidem est A E G triangulum, vertex autem punctum H, æqualis et similis est pyramidi, cujus basis est triangulum H K L, et vertex D punctum. Simili modo ostendetur pyramis, cujus basis quidem triangulum A B C, vertex autem punctum D, similis pyramidi, cujus basis triangulum H K L, et vertex punctum D. Planis enim numero æqualibus et similibus et similiter inclinatis continentur. Sed pyramis, cujus basis quidem H K L triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum A E G, et vertex H punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum A B C, et vertex punctum D, similis est pyramidi, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H. Utraque igitur ipsarum A E G H, H K L D pyramidum similis est toti pyramidi A B C D. Et quoniam B F est æqualis F C, erit E B F G parallelogrammum duplum trianguli G F C [t]. [t 41. primi.] Et quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia [u]. Ergo prisma, [u 40. undecimi.] contentum duobus triangulis B K F, E H G, et tribus parallelogrammis E B F G, E B K H, K H G F, est æquale prismati, quod duobus triangulis G F C, H K L, et tribus parallelogrammis K F C L, L C G H, H K F G continetur. Et manifestum est utrumque ipsorum prismatum, et cujus basis est E B F G parallelogrammum, opposita autem ipsi H K recta linea, et cujus basis est G F C triangulum,

gulum, et oppofitum ipfi triangulum K L H, majus effe utrâque pyramidum, quarum bafes quidem A E G, H K L triangula, vertices autem puncta H, D: quoniam fi jungamus E F, E H rectas lineas, prifma quidem, cujus bafis eft E B F G parallelogrammum, et oppofita ipfi recta linea K H, majus eft pyramide, cujus bafis E B F triangulum, vertex autem punctum K. Sed pyramis, cujus bafis triangulum E B F, et vertex K punctum, eft æqualis pyramidi, cujus bafis A E G triangulum, et vertex punctum H [u]; æqualibus enim et fimilibus planis continentur, et fimiliter inclinatis. Quare et prifma, cujus bafis parallelogrammum E B F G, oppofita autem ipfi recta linea H K, majus eft pyramide, cujus bafis A E G triangulum, et vertex punctum H. Prifma vero, cujus bafis parallelogrammum E B F G, et oppofita ipfi recta linea H K, eft æquale prifmati, cujus bafis G F C triangulum, et ipfi oppofitum triangulum H K L: et pyramis, cujus bafis triangulum A E G, vertex autem H punctum, eft æqualis pyramidi, cujus bafis H K L triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo prifmata, de quibus dictum eft, funt majora duabus dictis pyramidibus, quarum bafes triangula A E G, H K L, vertices autem H, D puncta. Tota igitur pyramis, cujus bafis A B C triangulum, vertex autem punctum D, divifa eft in duas pyramides æquales, et fimiles inter fe, et fimiles toti: et in duo prifmata æqualia: funtque duo prifmata æqualia dimidio totius pyramidis majora. *Q. E. D.*



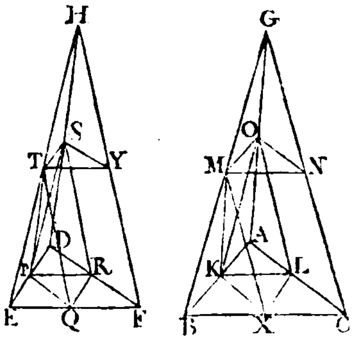
[u] Def. 10. undecimi.

[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Si fint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bafes habeant, dividatur autem utraque ipfarum, et in duas pyramides æquales inter fe, fimilefque toti, et in duo prifmata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc femper fiat: erit ut unius pyramidis bafis ad bafim alterius, ita et in unâ pyramide prifmata omnia ad prifmata omnia in alterâ pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bafes habeant A B C, D E F, vertices autem fint puncta G, H; et et dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſque toti, et in duo priſmata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur: atque hoc ſemper fiat. Dico ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſſe priſmata omnia, quæ ſunt in pyramide A B C G ad priſmata omnia, quæ in pyramide D E F H, multitudine æqualia. Quoniam enim B X quidem



eſt æqualis X C, A L vero æqualis L C; erit X L ipſi A B parallela[x], et triangulum A B C triangulo L X C ſimile.[x] Eâdem ratione et triangulum D E F ſimile eſt triangulo R Q F. Et quoniam B C quidem eſt dupla C X, E F vero dupla ipſius F Q, ut B C ad C X, ita erit E F ad F Q. Et deſcripta ſunt ab ipſis B C, C X ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea A B C, L X C; ab ipſis vero E F, F Q ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea D E F, R Q F. Eſt igitur ut B A C triangulum ad triangulum L X C, ita triangulum D E F ad R Q F triangulum[y]; et permutando ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita L X C triangulum ad triangulum R Q F. Sed ut L X C triangulum ad triangulum R Q F, ita priſma, cujus baſis eſt triangulum L X C, oppoſitum autem ipſi O M N, ad priſma, cujus baſis R Q F triangulum, et oppoſitum ipſi S T Y[z]. Ut[a] igitur A B C triangulum ad triangulum D E F, ita priſma, cujus baſis eſt triangulum L X C, oppoſitum autem ipſi O M N, ad priſma, cujus baſis R Q F triangulum, et oppoſitum ipſi S T Y[a]. Et quoniam duo priſmata, quæ in pyramide A B C G inter ſe æqualia ſunt, ſed et quæ in pyramide D E F H priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma, cujus baſis parallelogrammum K L X B, oppoſita vero ipſi recta linea M O, ad priſma, cujus baſis L X C triangulum, et oppoſitum ipſi O M N, ita priſma, cujus baſis parallelogrammum E P R Q, et oppoſita recta linea S T, ad priſma, cujus baſis R Q F triangulum, oppoſitum vero ipſi S T Y. Quare componendo, ut priſmata K B X L M O, L X C M N O ad priſma L X C M N O, ita

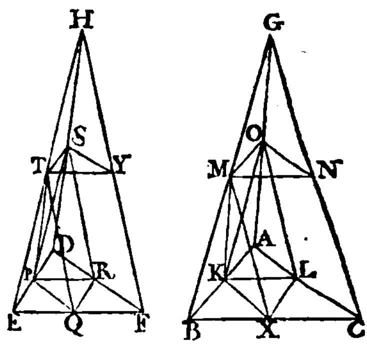
x 2. ſexti.

y 22. ſexti.

z 28. et 32. undecimi.

a 11. quinti.

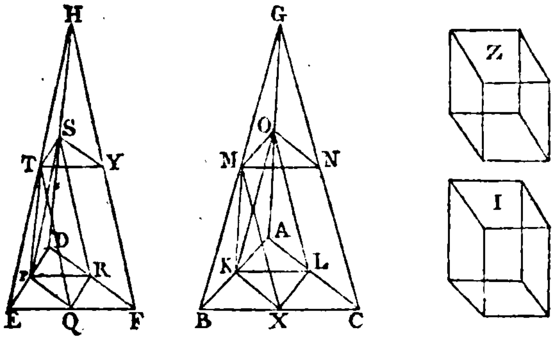
ita prisimata P E Q R S T, R Q F S T Y ad prisma R Q F S T Y. Et permutando, ut prismata K B X L M O, L X C O M N ad prismata P E Q R S T, R Q F S T Y, ita prisma L X C M N O ad prisma R Q F S T Y. Ut autem prisma LXCMNO ad prisma R Q F S T Y, ita ostensa est basis L X C ad R Q F basim, et A B C basis ad basim D E F. Ergo et ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita quæ in pyramide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H. Similiter autem, et si factas pyramides dividamus eodem modo velut O M N G, S T Y H, erit ut O M N basis ad basim S T Y, ita quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide S T Y H. Sed ut O M N basis ad basim S T Y, ita basis A B C ad D E F basim. Et ut igitur A B C basis ad basim D E F, ita quæ in pyramide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H; et quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide S T Y H; et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum A K L O, et D P R S, et omnium simpliciter multitudine æqualium. *Q. E. D.*



[V.] PROP. V. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eâdem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F, vertices autem puncta G, H. Dico ut A B C basis ad basim D E F, sic esse pyramidem A B C G ad D E F H pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut A B C basis ad basim D E F, sic A B C G pyramis, vel ad solidum minus pyramide D E F H, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. Et dividatur pyramis D E F H in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia. Sunt duo igi-
[a] 3. hujus. tur prismata dimidio totius pyramidis majora[a]. Et rursus



ſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat, quoad ſumantur quædam pyramides a pyramide D E F H, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis D E F H ſolidum Z ſuperat. Itaque ſumantur, et ſint exempli cauſâ, pyramides D P R S, S T Y H. Erunt igitur reliqua in pyramide D E F H priſmata ſolido Z majora. Dividatur etiam A B C G pyramis in totidem partes ſimiles pyramidi D E F H. Ergo ut A B C baſis ad baſim D E F, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata, quæ in pyramide D E F H [b]. Sed ut [b] A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramis A B C G ad ſolidum Z. Et igitur ut A B C G pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata, quæ in pyramide D E F H. Major autem eſt pyramis A B C G priſmatibus, quæ in ipſâ ſunt. Ergo et ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide D E F H, eſt majus. Sed et minus [c]; quod fieri non poteſt. Non igitur ut [c] A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt pyramis A B C G ad ſolidum aliquod minus pyramide D E F H. Similiter oſtendemus neque ut D E F baſis ad baſim A B C, ita eſſe pyramidem D E F H ad ſolidum aliquod pyramide A B C G minus. Dico igitur neque eſſe ut A B C baſis ad baſim D E F, ita A B C G pyramidem ad aliquod ſolidum majus pyramide D E F H. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus, videlicet ad ſolidum I. Erit igitur invertendo ut D E F baſis ad baſim A B C, ita ſolidum I ad A B C G pyramidem. Cum autem ſolidum I majus eſt pyramide E D F H, erit ut ſolidum I ad A B C G pyramidem, ita D E F H pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide A B C G. Et ut igitur D E F baſis ad baſim A B C, ita pyramis D E F H ad ſolidum

[b] 4. hujus.

[c] ex prius demonſtratis.

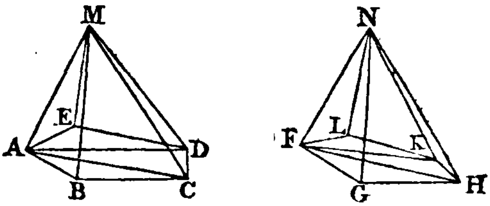
ſolidum aliquod pyramide A B C G minus, quod eſt abſurdum, ut modo oſtenſum eſt. Non igitur ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt A B C G pyramis ad ſolidum aliquod majus pyramide D E F H. Oſtenſum autem eſt, neque ad minus. Quare ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt pyramis A B C G ad D E F H pyramidem. Pyramides igitur, quæ eâdem ſunt altitudine, et triangulares baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes. *Q. E. D.*

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem ſunt altitudine, et polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eâdem altitudine pyramides, quæ polygonas baſes habeant A B C D E, F G H K L; vertices autem M, N puncta. Dico ut A B C D E baſis ad baſim F G H K L,



ita eſſe A B C D E M pyramidem ad pyramidem F G H K L N. Dividatur enim baſis quidem A B C D E in triangula A B C, A C D, A D E; baſis vero F G H K L dividatur in triangula F G H, F H K, F K L. Et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides, quæ a principio. Quoniam igitur eſt ut triangulum A B C ad triangulum A C D, ita A B C M pyramis ad pyramidem A C D M[c]: et componendo ut A B C D trapezium ad triangulum A C D, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A C D M. Sed et ut A C D triangulum ad A D E, ita pyramis A C D M ad A D E M pyramidem[d]. Ergo ex æquali, ut A B C D baſis ad baſim A D E, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A D E M. Et rurſus componendo ut A B C D E baſis ad baſim A D E, ita A B C D E M pyamis ad pyramidem A D E M. Eâdem ratione, et ut F G H K L baſis ad baſim F K L, ita et F G H K L N pyramis ad F K L N pyramidem. Et quodiam duæ pyramides ſunt A D E M, F K L N, quæ triangulares baſes habent, et eâdem ſunt altitudine; erit ut

[d] 5. hujus.

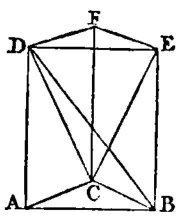
ut A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N [e]. Quod cum sit ut A B C D E basis ad basim A D E, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem A D E M; ut autem A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N: erit ex æquali, ut basis A B C D E ad F K L basim, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem F K L N. Sed et ut F K L basis ad basim F G H K L, ita erat et F K L N pyramis ad pyramidem F G H K L N. Quare rursus ex æquali, ut A B C D E basis ad basim F G H K L, ita est A B C D E M pyramis ad pyramidem F G H K L N. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[e] 5. hujus.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

Sit prisma, cujus basis quidem triangulum A B C, oppositum autem ipsi D E F. Dico prisma A B C D E F dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim B D, E C, C D. Et quoniam parallelogrammum est A B E D, cujus diagonalis B D; erit A B D triangulum triangulo E B D æquale [f]. Ergo pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C [g]. Sed pyramis, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum E B C, et vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. Ergo et pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E B C triangulum, et vertex punctum D. Rursus quoniam F C B E parallelogrammum est, cujus diagonalis C E, triangulum E C F triangulo C B E est æquale [f]. Ergo et pyramis, cujus basis B E C triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum E C F, et vertex punctum D [g]. Sed pyramis, cujus basis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex

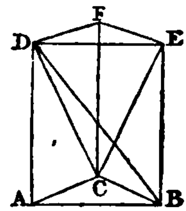


[f] 34. primi.

[g] 5. hujus.

tex

tex C punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum C E F, et vertex punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex C punctum. Prisma igitur A B C D E F dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cujus basis A B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum C A B, et vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum A B D, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cujus basis A B C triangulum, et oppositum ipsi D E F: pyramis igitur, cujus basis triangulum A B C, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet A B C triangulum, et oppositum ipsi triangulum D E F. *Q. E. D.*



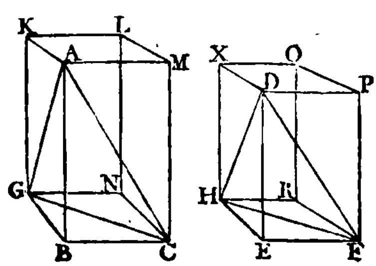
Cor. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, et oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata, quæ triangulares bases habent, et quæ ipsis opponuntur.

Cor. 2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F; vertices autem



G, H, puncta. Dico A B C G pyramidem ad pyramidem D E F H,

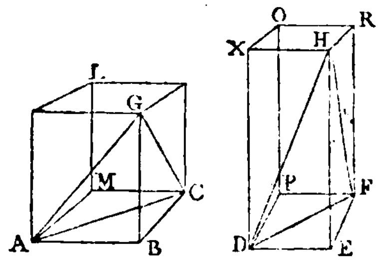
D E F H triplicatam proportionem habere ejus, quam
B C habet ad E F. Compleantur enim B G M L, E H P O
solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis A B C G
similis est pyramidi D E F H, triangula tria A B C, A B G,
G B C, tribus D E F, D E H, H E F singula singulis similia
erunt, et similes similium inclinationes[h]. Sed propter [h] Def. 9.
similia triangula A B C, D E F, angulus A B C æqualis est undecimi.
angulo D E F, et A B ad B C ut D E ad E F[i]. Quoniam igi- [i] Def. 1.
tur est ut A B ad D E, ita B C ad E F, et circum æquales an- sexti.
gulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum B M
parallelogrammo E P simile erit. Eàdem ratione, et
parallelogrammum B N simile est parallelogrammo E R,
et parallelogrammum B K ipsi E X parallelogrammo.
Tria igitur parallelogramma B M, K B, B N tribus E P,
E X, E R sunt similia. Sed et plana similium similiter
inclinata. Et tria quidem M B, B K, B N tribus oppo-
sitis æqualia et similia sunt, et similiter inclinata, tria
vero E P, E X, E R tribus oppositis æqualia et similia, et
similter incltnata[k]. Quare solida B G M L, E H P O si- [k] 24. un-
milibus planis et numero æqualibus et similiter incli- decimi.
natis continentur; ac propterea simile est B G M L soli-
dum solido E H P O[b]. Similia autem solida parallele-
pipeda in triplicatâ sunt proportione homologorum la-
terum[r]. Ergo solidum B G M L ad solidum E H P O [l] 33. un-
triplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus decimi.
homologum B C ad E F homologum latus. Sed ut
B G M L solidum ad solidum E H P O, ita A B C G pyramis
ad pyramidem D E F H[m]; pyramis enim sexta pars est ip- [m] 15. quinti.
sius solidi, cum prisma, quod est dimidium solidi paral-
lelepipedi, sit pyramidis triplum[n]. Quare et pyramis [n] Cor. 1.
A B C G ad pyramidem D E F H triplicatam proportionem 7. hujus.
habebit ejus, quam B C habet ad E F. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides, quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicatâ proportione homologorum laterum. Ipsis enim divisis in similes pyramides triangulares bases habentes: quoniam et similia polygona, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et numero æqualia et homologa totis; erit ut una pyramis in unâ pyramide, triangularem habens basim, ad pyramidem in alterâ, triangularem basim habentem, ita et omnes pyramides in unâ pyramide, triangulares habentes bases, ad omnes in alterâ, triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa, multangulam habens basim, ad pyramidem, quæ multangulam basim habet. Sed pyramis, triangularem habens basim, ad pyramidem, quæ triangularem basim habet, est in triplicatâ proportione homologorum laterum. Et pyramis igitur, polygonam habens basim, ad pyramidem, similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales; illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant A B C, D E F, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum A B C G, D E F H bases et altitudines



reciprocari; scilicet ut A B C basis ad basim D E F, ita esse pyramidis D E F H altitudinem ad altitudinem pyramidis A B C G. Compleantur enim B G M L, E H P O solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis A B C G est æqualis pyramidi D E F H, atque est pyramidis quidem A B C G sextuplum B G M L solidum, pyramidis vero D E F H sextuplum solidum E H P O; erit solidum B G M L solido E H P G æquale[m]. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur[*]. Est igitur ut B M basis ad basim E P, ita E H P O solidi altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed ut B M basis ad basim E P, ita A B C triangulum ad triangulum D E F[m]. Ergo et ut A B C triangulum ad triangulum D E F, ita solidi E H P O altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed solidi quidem E H P O altitudo eadem est cum altitudine pyramidis D E F H; solidi vero B G M L altitudo eadem

[m] 15. quinti.
[*] 34. undecimi.

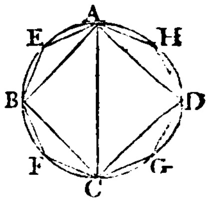
eadem eſt cum altitudine pyramidis A B C G: eſt igitur ut ABC baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Quare pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales. Et ſi pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, ſitque ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G: dico A B C G pyramidem pyramidi D E F H æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt D E F H pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G; ut autem A B C baſis ad baſim D E F, ita B M parallelogrammum ad parallelogrammum E P: erit et ut parallelogrammum B M ad E P parallelogrammum, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Sed pyramidis quidem D E F H altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi E H P O; pyramidis vero A B C G altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi B G M L: eſt igitur ut B M baſis ad baſim E P, ita E H P O ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi B G M L. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes et altitudines reciprocantur, ea ſunt æqualia °. Solidum igitur parallelepipedum B G M L æquale eſt ſolido parallelepipedo E H P O. Atque eſt ſolidi quidem B G M L ſexta pars pyramis A B C G: ſolidi vero E H P O itidem ſexta pars pyramis D E F H. Ergo pyramis A B C G pyramidi D E F H eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, et triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; illæ ſunt æquales. *Q. E. D.*

° 34. undecimi.

PROP. X. THEOR. [X.]

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet et altitudinem æqualem.

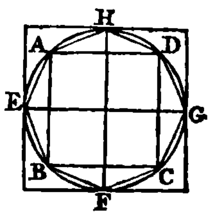
Habeat conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum A B C D, et altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt, cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus. Et deſcribatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus eſt quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur priſma æque altum cylindro. Quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum A B C D quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. Et ſint ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æque alta, nimirum priſmata ipſa. Quare priſmata inter ſe ſunt ut



p Cor. 2. 7. hujus. baſes[p]. Et priſma igitur erectum a quadrato A B C D dimidium eſt priſmatis erecti a quadrato, quod circa circulum A B C D deſcribitur. Atqui eſt cylindrus minor priſmate erecto a quadrato, quod deſcribitur circa circulum A B C D. Priſma igitur erectum a quadrato A B C D æque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H; et A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A jungantur. Unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus eſt dimidio portionis

q oſtenditur ad 2. hujus. circuli A B C D, in quâ conſiſtit[q]. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A priſmata æque alta cylindro. Ergo et unumquodque erectorum priſmatum majus eſt dimidio portionis cylindri, quæ ad ipſum eſt. Quoniam ſi per puncta E, F, G, H parallelæ ipſis A B, B C, C D, D A ducantur, et compleantur in ipſis A B, B C, C D, D A parallelogramma, a quibus ſolida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia priſmata ea, quæ ſunt in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A[p]. Et ſunt cylindri portiones erectis ſolidis parallelepipedis minores. Ergo et priſmata, quæ in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A, majora ſunt dimidio portionum cylindri, quæ ad ipſa ſunt. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes priſmata æque alta cylindro, et hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quaſdam portiones cylindri, quæ ſint minores exceſſu, quo cylindrus coni triplum ſuperat. Relinquantur jam, et ſint A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliquum igitur priſma, cujus baſis quidem polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri, majus eſt quam triplum coni. Sed priſma, cujus

cujus baſis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, triplum eſt pyramidis, cujus baſis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni [r]. Et pyramis igitur cujus baſis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, major eſt cono, qui baſim habet A B C D circulum. Sed et minor: (ab ipſo enim comprehenditur.) Quod fieri non poteſt. Non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico inſuper neque cylindrum minorem eſſe quam triplum coni. Si enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor quam triplus coni. Erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. Deſcribatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus eſt quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur pyramis, verticem habens eundem, quem conus; pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum A B C D dimidium ejus, quod circa circulum deſcriptum eſt; et ſi a quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æque alta cono, quæ et priſmata appellantur, erit quod a quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum eſt a quadrato circa circulum deſcripto; etenim inter ſe ſunt ut baſes [s]. Quare et tertiæ partes ipſarum. Pyramis igitur, cujus baſis quadratum A B C D, dimidia eſt ejus pyramidis, quæ a quadrato circa circulum deſcripto erigitur. Sed pyramis, erecta a quadrato deſcripto circa circulum, major eſt cono; ipſum namque comprehendit. Ergo pyramis, cujus baſis A B C D quadratum, vertex autem idem, qui coni, major eſt quam coni dimidium. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H. Et jungantur A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Et unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus eſt quam dimidium portionis circuli A B C D, in quâ conſiſtit. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A pyramides, verticem habentes eundem, quem conus. Ergo et unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major eſt quam dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, et ab uno-

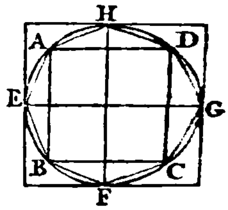


[r] Cor. 1. 7. hujus.

[s] Cor. 2. 7. hujus.

quoque triangulorum erigentes pyramides, verticem habentes eundem, quem conus, et hoc femper facientes, relinquemus tandem quafdam coni portiones, quæ minores erunt exceffu, quo conus tertiam cylindri partem fuperat[r]. Relinquantur; et fint quæ in ipfis A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliqua igitur pyramis, cujus bafis polygonum AEBFCGDH, et vertex idem, qui coni, major eft quam tertia cylindri pars. Sed pyramis, cujus bafis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, tertia pars eft prifmatis, cujus bafis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri. Prifma igitur, cujus bafis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, majus eft cylindro, cujus bafis eft circulus A B C D. Sed et minus: (ab ipfo enim comprehenditur.) Quod fieri non poteft. Non igitur cylindrus minor eft quam triplus coni. Oftenfum autem eft neque majorem effe quam triplum. Ergo cylindrus coni triplus fit neceffe eft; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eft cylindri, eandem quam ipfe bafim habentis, et altitudinem æqualem. *Q. E. D.*

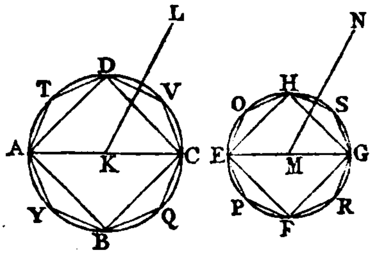
[r] 1. decimi.



[XI.] PROP. XI. THEOR.

Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter fe funt ut bafes.

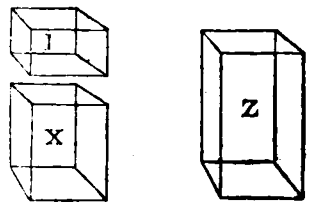
Sint in eâdem altitudine coni et cylindri, quorum bafes circuli A B C D, E F G H, axes autem K L, M N, et diametri bafium A C, E G. Dico ut A B C D circulus



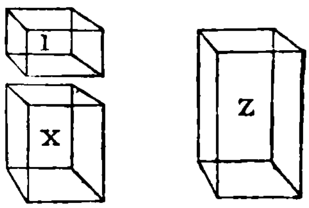
ad circulum E F G H, ita effe conum A L ad E N conum. Si enim non ita fit; erit ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod folidum minus cono

E N,

E N, vel ad majus. Sit primo ad minus, quod fit X. Et quo minus eſt ſolidum X cono E N, ei æquale ſit I ſolidum. Conus igitur E N ipſis ſolidis X, I eſt æqualis. Deſcribatur in E F G H circulo quadratum E F G H, quod majus eſt dimidio circuli. Erigatur a quadrato E F G H pyramis æque alta cono. Pyramis igitur erecta major eſt coni dimidio. Nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, et ab ipſo erigamus pyramidem æque altam cono; erit inſcripta pyramis pyramidis circumſcriptæ dimidium: etenim inter ſe ſunt ut baſes [s]. [s] 6. hujus.



Conus autem circumſcripta pyramide eſt minor. Ergo pyramis, cujus baſis quadratum E F G H, vertex autem idem, qui coni, major eſt coni dimidio. Secentur circumferentiæ E F, F G, G H, H E bifariam in punctis P, R, S, O; et O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H, H O jungantur. Unumquodque igitur triangulorum H O E, E P F, F R G, G S H majus eſt quam dimidium ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Erigatur ab unoquoque triangulorum H O E, E P F, F R G, G S H pyramis æque alta cono. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major eſt dimidio portionis coni, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ ſolido I minores erunt [t]. Relinquantur, et ſint quæ in ipſis [t] 1. decimi. H O, O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H. Reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum H O E P F R G S, altitudo autem eadem, quæ coni, major eſt ſolido X. Deſcribatur in circulo A B C D polygono H O E P F R G S ſimile et ſimiliter poſitum polygonum D T A Y B Q C V, et ab ipſo erigatur pyramis æque alta cono A L. Quoniam igitur eſt ut quadratum ex A C ad quadratum ex E G, ita D T A Y B Q C V polygonum ad polygonum H O E P F R G S [u]; [u] 1. hujus. ut autem quadratum ex A C ad quadratum ex E G, ita A B C D circulus ad circulum E F G H [x]; erit ut A B C D [x] 2. hujus. circulus ad circulum E F G H, ita polygonum D T A Y B Q C V ad polygonum H O E P F R G S [y]. Sed ut A B C D circulus [y] 11. quinti ad circulum E F G H, ita conus A L ad X ſolidum; et ut polygonum D T A Y B Q C V ad polygonum H O E P F R G S, ita pyramis, cujus baſis D T A Y B Q C V polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus baſis polygonum H O E P F R G S, et vertex punctum N. Ut igitur conus A L ad X ſolidum, ita pyramis, cujus baſis polygonum D T A Y B Q C V, et vertex punctum L, ad pyramidem, cujus baſis polygonum H O E P F R G S, et vertex N punctum. Conus autem A L major eſt pyramide, quæ eſt in ipſo. Majus igitur eſt ſolidum X pyramide, quæ eſt in cono E N. Sed et oſtenſum eſt minus. Quod fieri non poteſt. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita eſt A L conus ad ſolidum aliquod minus cono E N. Similiter demonſtrabitur neque ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita eſſe conum E N ad aliquod ſolidum minus cono A L. Dico præterea neque eſſe ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita A L conum ad aliquod ſolidum majus cono E N. Si enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum majus, quod ſit Z. Ergo invertendo ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita erit ſolidum Z ad A L conum. Sed cum ſit ſolidum Z majus cono E N; erit ut ſolidum Z ad A L conum, ita conus E N ad aliquod ſolidum minus cono A L. Et igitur ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita conus E N ad aliquod ſolidum minus cono A L, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod ſolidum majus cono E N. Oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus. Ergo ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita eſt conus A L ad E N conum.

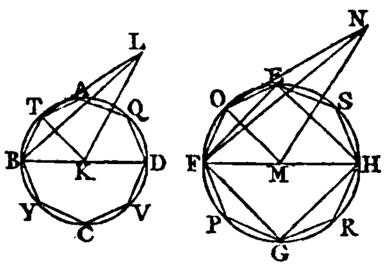


x 15. quinti. Sed ut conus ad conum, ita eſt cylindrus ad cylindrum [x];
y 10. hujus. eſt enim uterque utriuſque triplus [y]. Et igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita in ipſis cylindri æque alti conis. Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. *Q. E. D.*

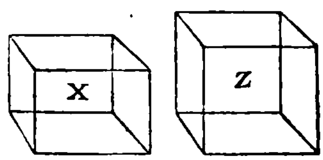
[XII.] PROP. XII. THEOR.

Similes coni et cylindri inter ſe ſunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ ſunt in baſibus.

Sint ſimiles coni et cylindri, quorum baſes quidem circuli A B C D, E F G H, diametri vero baſium B D, F H, et

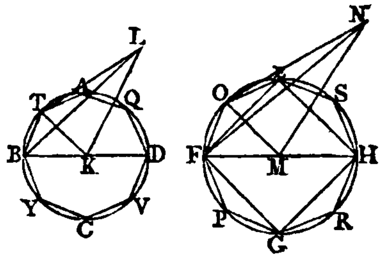


et axes conorum vel cylindrorum K L, M N. Dico conum, cujus basis A B C D circulus, vertex autem punctum L, ad conum, cujus basis circulus E F G H, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus, quam habet B D ad F H. Si enim non habet conus A B C D L ad conum E F G H N triplicatam proportionem ejus, quam B D habet ad F H, habebit A B C D L conus ad aliquod solidum minus cono E F G H N triplicatam proportionem, vel ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X. Et describatur in E F G H circulo quadratum E F G H. Quadratum igitur E F G H

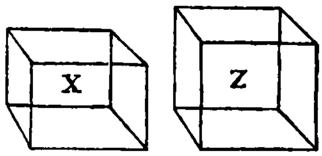


majus est dimidio E F G H circuli. Et erigatur a quadrato E F G H pyramis æque alta cono. Ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. Itaque secentur E F, F G, G H, H E circumferentiæ bifariam in punctis O, P, R, S, et jungantur E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Unumquodque igitur triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E majus est dimidio segmenti circuli E F G H, in quo consistit. Et erigatur ab unoquoque triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E pyramis, eundem verticem habens, quem conus. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus E F G H N ipsum X solidum superat [z]. Relinquantur, et [z] 1. decimi.
sint quæ in ipsis E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem polygonum

E O F-



E O F P G R H S, vertex autem N punctum, major est solido X. Describatur etiam in circulo A B C D, polygono E O F P G R H S simile et similiter positum polygonum A T B Y C V D Q: a quo erigatur pyramis, eundem verticem habens, quem conus; et triangulorum continentium pyramidem, cujus basis quidem



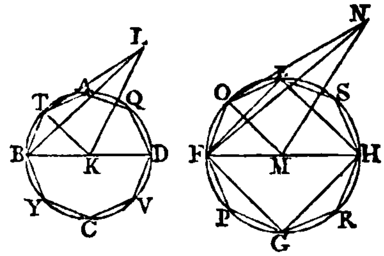
est polygonum A T B Y C V D Q, vertex autem punctum L, unum sit L B T; triangulorum vero continentium pyramidem, cujus basis E O F P G R H S polygonum, et vertex punctum N, unum sit N F O; et jungantur K T, M O. Quoniam igitur conus A B C D L similis est cono E F G H N, erit ut B D ad F H, ita K L axis ad axem M N [x]. Ut autem B D ad F H, ita B K ad F M [y]. Itaque ut B K ad F M, ita K L ad M N; et permutando ut B K ad K L, ita F M ad M N. Et cum perpendicularis utraque est, et circa æquales angulos B K L, F M N latera sunt proportionalia: simile igitur est B K L triangulum triangulo F M N [z]. Rursus quoniam est ut B K ad K T, ita F M ad M O, et circa æquales angulos B K T, F M O latera sunt proportionalia (etenim quæ pars est angulus B K T quatuor rectorum, qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus F M O quatuor rectorum, qui sunt ad centrum M) erit triangulum B K T triangulo F M O simile [z]. Et quoniam ostensum est ut B K ad K L, ita esse F M ad M N; æqualis autem est B K ipsi K T, et F M ipsi M O: erit ut T K ad K L, ita O M ad M N; et circa æquales angulos T K L, O M N latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur L K T simile est triangulo M N O. Quod cum ob similitudinem triangulorum B K L, F M N, sit ut L B ad B K, ita N F ad F M; ob similitudinem vero triangulorum B K T, F M O, ut

[x] Def. 24. undecimi.
[y] 15. quinti.
[z] 6. sexti.

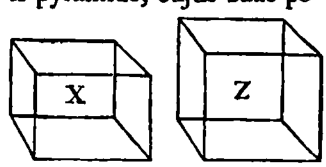
K B

K B ad B T, ita M F ad F O: erit ex æquali ut L B ad B T, ita N F ad F O. Rursus cum ob similitudinem triangulorum L T K, N O M, sit ut L T ad T K, ita N O ad O M; et ob similitudinem triangulorum K B T, O M F, ut K T ad T B, ita M O ad O F: ex æquali erit ut L T ad T B, ita N O ad O F. Ostensum autem est et ut T B ad B L, ita O F ad F N. Quare rursus ex æquali ut T L ad L B, ita O N ad N F. Triangulorum igitur L T B, N O F proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt L T B, N O F triangula, et inter se similia[y]. Sed [y] 5. sexti.
cum angulorum planorum æqualium T B K, O F M verticibus rectæ sublimes B L, F N insistant, quæ cum rectis B T, F O; B K, F M angulos æquales faciunt; angulum scilicet T B L angulo O F N æqualem, et angulum K B L angulo M F N: similes erunt planorum L B T, L B K inter se et tertio T B K, atque planorum N F O, N F M inter se et tertio O F M, inclinationes[z]. Quare et pyramis, [z] 2 Cor. 30. hujus. Vide Addenda.
cujus basis triangulum B K T, vertex autem L punctum, similis est pyramidi, cujus basis F M O triangulum, et vertex punctum N; similibus enim planis continentur, et multitudine æqualibus, et similiter inclinatis. Pyramides autem similes, et quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum[a]. Ergo [a] 8. hujus.
pyramis B K T L ad pyramidem F M O N triplicatam habet proportionem ejus, quam B K habet ad F M. Similiter a punctis quidem A, Q, D, V, C, Y ad K, a punctis vero E, S, H, R, G, P ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides, vertices eosdem habentes, quos coni; ostendemus et unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B K latus ad homologum latus M F, hoc est, quam B D ad F H. Sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia[b]. [b] 12. quinti.
Est igitur et ut B K T L pyramis ad pyramidem F M O N, ita tota pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Quare et pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Ponitur autem conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X tripli-

catam



catam proportionem habere ejus, quam B D ad F H. Ut igitur conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Dictus autem conus major est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit. Majus igitur est et solidum X pyramide, cujus basis polygonum E O F P G R H S, vertex autem punctum N. Sed et minus. Quod fieri non potest. Non igitur conus, cujus basis A B C D circulus, et vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus E F G H, et vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Similiter demonstrabimus neque conum E F G H N ad aliquod solidum minus cono A B C D L triplicatam proportionem habere ejus, quam habet F H ad B D. Itaque dico neque A B C D L conum ad solidum majus cono E F G H N triplicatam habere proportionem ejus, quam B D habet ad F H. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. Invertendo igitur, solidum Z ad conum A B C D L triplicatam proportionem habet ejus, quam F H ad B D. Cum autem est solidum Z majus cono E F G H N; erit ut solidum Z ad conum A B C D L, ita E F G H N conus ad aliquod solidum minus cono A B C D L. Ergo et conus E F G H N ad solidum aliquod minus cono A B C D L triplicatam proportionem habebit ejus, quam F H habet ad B D, quod fieri non posse demonstratum est. Non igitur A B C D L conus ad solidum aliquod majus cono E F G H N triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ostensum autem est neque



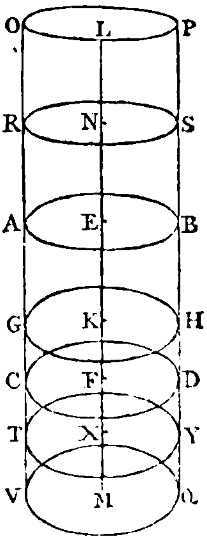
neque ad minus. Quare conus A B C D L ad E F G H N conum triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum [c]. Cylindrus enim in eâdem existens basi, in quâ conus, et ipsi æque altus, coni triplus est [d]. Cum ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habentis, et æqualem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus, quam B D habet ad F H. Similes igitur coni et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ sunt in basibus. *Q. E. D.*

[c] 15. quinti.
[d] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim A D plano G H secetur oppositis planis A B, C D parallelo. Planum autem G H occurrat axi E F in K puncto. Dico ut B G cylindrus ad cylindrum G D, ita esse E K axem ad axem K F. Producatur enim E F axis ex utrâque parte ad puncta L, M; et ipsi quidem E K axi ponantur æquales quotcunque E N, N L; ipsi vero F K æquales quotcunque F X, X M; et per puncta L, N, X, M, ducantur plana ipsis A B, C D parallela: atque in planis per L, N, X, M circa centra L, N, X, M intelligantur circuli O P, R S, T Y, V Q æquales ipsis A B, C D; et cylindri P R, R B, D T, T Q intelligantur. Quoniam igitur axes L N, N E, E K inter se sunt æquales, erunt cylindri P R, R B, B G inter se ut bases [e]. Æquales autem sunt bases. Ergo et cylindri P R, R B, B G sunt æquales. Quod cum axes L N, N E, E K inter se æquales sint, itemque cylindri P R, R B, B G inter se æquales; sitque ipsorum L N, N E, E K multitudo æqualis multitudini ipsorum P R, R B, B G: quotuplex est axis K L ipsius E K axis, totuplex erit et P G cylindrus cylindri G B. Eâdem ratione et quotuplex est M K axis ipsius axis K F, totuplex est et Q G cylindrus cylindri G D. Et si quidem



[e] 11. hujus.

axis

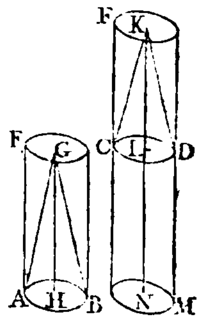
axis KL ſit æqualis axi KM, erit et PG cylindrus cylindro GQ æqualis; ſi autem axis LK major ſit axe KM, et cylindrus PG major erit cylindro GQ; et ſi minor, minor. Quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK, KF, et cylindris BG, GD, ſumpta ſunt æquimultiplicia axis quidem EK, et BG cylindri, nempe axis KL, et cylindrus PG; axis vero KF, et cylindri GD æquimultiplicia, axis ſcilicet KM, et GQ cylindrus; et demonſtratum eſt, ſi LK axis ſuperat axem KM, et PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Eſt igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD[f]. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. *Q. E. D.*

[f] Def. 5. quinti.

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB, CD cylindri EB, FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL. Producatur enim KL, axis ad punctum N; ponaturque ipſi GH axi æqualis LN; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB, CM eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes[g]. Baſes autem ſunt æquales. Ergo et cylindri EB, CM inter ſe æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM ſecatur plano CD, oppoſitis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem[h]. Æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. Eſt igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. Ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conum CDK[i]; cylindri ſunt enim conorum tripli[k]. Ergo et ut GH axis ad axem KL, ita eſt ABG conus ad conum CDK, et cylindrus EB ad FD cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines. *Q. E. D.*



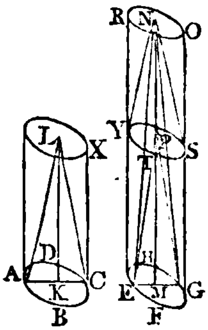
[g] 11. hujus.
[h] 13. hujus.
[i] 15. quinti.
[k] 10. hujus.

PROP.

PROP. XV. THEOR. [XV.]

Æqualium conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni et cylindri, quorum baſes quidem ſint A B C D, E F G H circuli, diametris A C, E G; axes autem K L, M N; qui quidem et conorum vel cylindorum ſunt altitudines. Dico cylindrorum A X, E O baſes et altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut A B C D baſis ad baſim E F G H, ita eſſe altitudinem M N ad altitudinem K L. Altitudo enim K L vel æqualis eſt altitudini M N, vel non æqualis. Sit primo æqualis. Atque eſt A X cylindrus æqualis cylindro E O. Qui autem eandem habent altitudinem coni et cylindri, inter ſe ſunt ut baſes[l]. Æqualis igitur eſt baſis A B C D baſi E F G H. Eſt igitur ut baſis A B C D ad E F G H baſim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Non ſit autem altitudo K L altitudini M N æqualis. Altera igitur ipſarum major. Major ſit M N; et auferatur ab ipſâ M N altitudini L K æqualis P M, et per P ſecetur E O cylindrus plano T Y S, oppoſitis planis circulorum E F G H, R O parallelo; intelligaturque cylindrus E S, cujus baſis quidem E F G H circulus, altitudo autem P M. Quoniam igitur A X cylindrus æqualis eſt cylindro E O, alius autem aliquis eſt cylindrus E S; erit ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Sed ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita baſis A B C D ad E F G H baſim[l]; cylindri enim A X, E S eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus E O ad E S cylindrum, ita M N altitudo ad altitudinem M P[m]; nam cylindrus E O ſecatur plano T Y S, oppoſitis planis parallelo. Eſt igitur ut A B C D baſis ad baſim E F G H, ita altitudo M N ad M P altitudinem. Æqualis autem eſt M P altitudo altitudini K L. Quare ut baſis A B C D ad E F G H baſim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Æqualium igitur

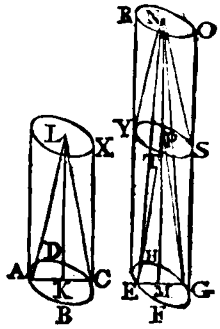


l 11. hujus.

m 13. hujus.

igitur cylindrorum A X, E O bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed si cylindrorum A X, E O bases et altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem. Dico A X cylindrum cylindro E O æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem; altitudo autem K L æqualis est altitudini M P: erit ut A B C D basis ad basim E F G H, ita M N altitudo ad altitudinem M P. Sed ut A B C D basis ad basim E F G H, ita A X cylindrus ad cylindrum E S; eandem enim habent altitudinem[n]. Ut autem M N altitudo ad altitudinem M P, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Est igitur ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Cylindrus igitur A X cylindro E O est æqualis. Similiter autem et in conis. *Q. E. D.*



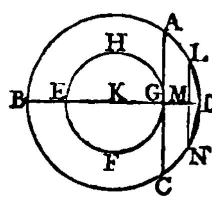
[n] 11. hujus.

[XVI.]

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æquilaterum, et pari laterum numero describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli A B C D, E F G H circa idem centrum K. Oportet in majori circulo A B C D polygonum æquilaterum et pari laterum numero describere, non tangens minorem circulum E F G H. Ducatur per K centrum recta linea B D, atque a puncto G ipsi B D ad rectos angulos ducatur A G, et ad C producatur, quæ A C circulum E F G H tanget[o]. Itaque circumferentiam B A D bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipsâ A D. Relinquatur, sitque L D: et a puncto L ad B D perpendicularis agatur L M, et ad N producatur; junganturque



[o] 16. tertii.

L D,

L D, D N. Ergo L D ipsi D N est æqualis [p], et quoniam L N parallela est A C, et A C tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget. Et multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D, D N. Quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium et numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. *Q. E. F.* [p] 29. tertii.

PROP. XVII. PROBL. [XVII.]

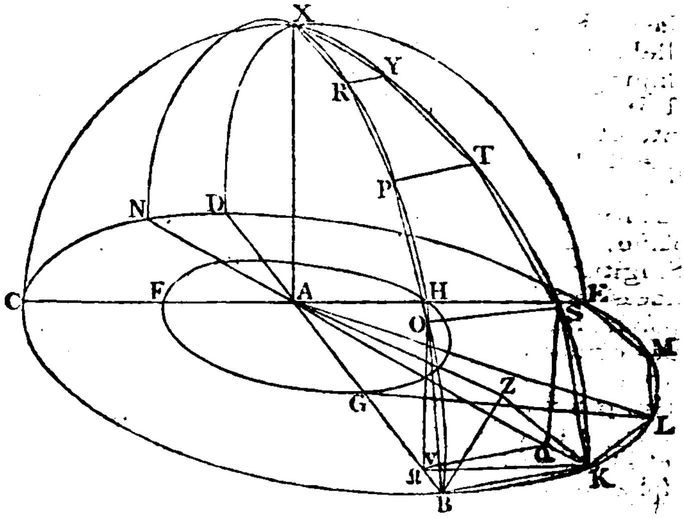
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod suâ superficie minorem non contingat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori sphærâ describere solidum polyhedrum, quod suâ superficie minorem non contingat. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente et semicirculo circumducto sphæra facta est [q]. Ergo in quâcunque positione semicirculum intelligamus, quod per centrum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; et constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ et semicirculi diameter est, maxima sit rectarum, quæ in circulo vel sphærâ ducuntur [r]. Sit igitur in majori quidem sphærâ circulus B C D E, in minori autem circulus F G H; et ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D, C E. Occurrat B D minori circulo in G; ducatur a puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, et jungatur A L. Itaque circumferentiam E B bifariam secantes, et dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem eâ parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur a rectâ æquali ipsi G L. Relinquatur, sitque circumferentia B K. Minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium et parium numero laterum non tangentis minorem circulum. Sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K, K L, L M, M E; et juncta K A producatur ad N; et a puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos constituatur A X [s], quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, et per A X et utramque ipsarum B D, K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, et sint in diametris B D, K N eorum semicirculi B X D, K X N. Quoniam igitur

[q] Def. 14. undecimi.

[r] 15. tertii.

[s] 12. undec.

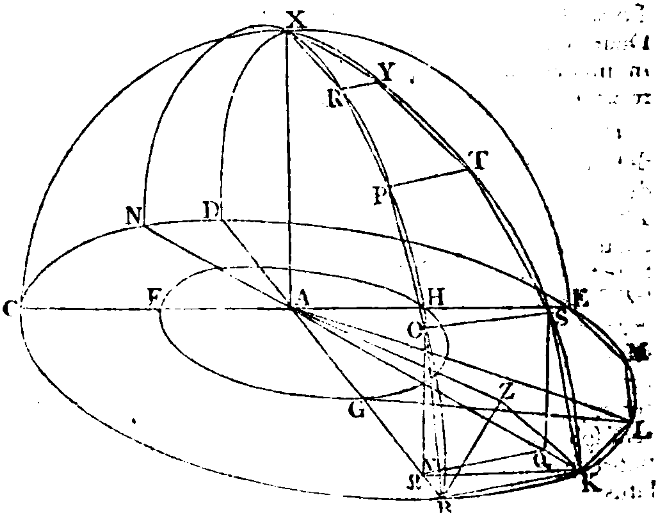


igitur X A recta est ad planum circuli B C D E, erunt omnia plana, quæ per ipsam X A transeunt, ad idem circuli planum recta[t]: quare et semicirculi B X D, K X N recti sunt ad idem planum. Et quoniam semicirculi B E D, B X D, K X N æquales sunt, in æqualibus enim consistunt B D, K N diametris; erunt et eorum quadrantes B E, B X, K X inter se æquales. Quot igitur latera polygoni sunt in quadrante B E, tot erunt et in quadrantibus B X, K X, æqualia ipsis B K, K L, L M, M E. Inscribantur, et sint B O, O P, P R, R X; K S, S T, T Y, Y X: junganturque S O, T P, Y R; et ab ipsis O, S ad planum circuli B C D E perpendiculares ducantur. Cadent hæ in communes planorum sectiones B D, K N; quoniam et plana semicirculorum B X D, K X N ad planum circuli B C D E recta sunt[u]. Itaque cadant, sintque O V, S Q; et V Q jungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis B X D, K X N æquales circumferentiæ sumptæ sint B O, K S, et ductæ perpendiculares O V, S Q; erit O V quidem ipsi S Q æqualis, B V vero æqualis K Q. Est autem et tota B A æqualis toti K A. Ergo et reliqua V A reliquæ Q A est æqualis. Igitur ut B V ad V A, ita K Q ad Q A: ideoque V Q ipsi B K parallela est[x]. Quod cum utraque ipsarum O V, S Q recta sit ad circuli B C D E planum, erit O V ipsi S Q parallela[y]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Ergo Q V, S O æquales sunt et parallelæ.

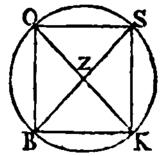
[t] 18. undecimi.
[u] 38. undecimi.
[x] 2. sexti.
[y] 6. undecimi.

lelæ[z]. Et quoniam Q V parallela est ipsi S O, sed et parallela ipsi K B; erit et S O ipsi K B parallela[a]; et ipsas conjungunt B O, K S. Ergo et K B O S quadrilaterum est in uno plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, et in utrâque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ[b]. Et eâdem ratione ipsorum quadrilaterorum S O P T, T P R Y utrumque in uno est plano. Est autem in uno plano et triangulum Y R X[c]. Si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias B X, K X, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem K B O S, S O P T, T P R Y quadrilatera, et triangulum Y R X; vertex autem punctum A. Quod si in unoquoque laterum K L, L M, M E, quemadmodum in K B eadem construamus; et in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo hemisphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphærâ descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et Y R X triangulum, et aliæ ejusdem ordinis simili modo constructæ, cum vertex omnium communis sit punctum A. Dico dictam figuram polyhedram suâ superficie non contingere minorem sphæram, in quâ est circulus F G H. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri K B S O perpendicularis A Z[d], quæ plano in puncto Z occurrat; et B Z, Z K jungantur. Itaque quoniam A Z recta est ad quadrilateri K B S O planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos angulos faciet[e]. Ergo A Z ad utramque ipsarum B Z, Z K est perpendicularis. Et quoniam A B est æqualis A K, erit et quadratum ex A B quadrato ex A K æquale; et sunt quadrato quidem ex A B æqualia quadrata ex A Z, Z B, angulus enim ad Z rectus est[f]; quadrato autem ex A K æqualia ex A Z, Z K quadrata. Ergo quadrata ex A Z, Z B quadratis ex A Z, Z K æqualia sunt. Commune auferatur quadratum ex A Z. Reliquum igitur quod ex B Z reliquo quod ex Z K est æquale. Ergo recta B Z rectæ Z K æqualis. Similiter ostendemus, et quæ a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum B Z, Z K æquales esse. Circulus igitur centro Z et intervallo unâ ipsarum Z B, Z K descriptus etiam per puncta O, S transibit. Et quoniam in circulo est B K S O quadrilaterum, et sunt æquales O B, B K, K S, et minor

[z] 33. primi.
[a] 9. undecimi.
[b] 7. undecimi.
[c] 2. undecimi.
[d] 11. undecimi.
[e] Def. 3. undecimi.
[f] 47. primi.



O S; erit angulus B Z K obtusus†; ideoque B K major quam B Z. Sed et G L quam B K est major. Multo igitur major est G L quam B Z; et quadratum ex G L quadrato ex B Z majus. Et cum æqualis sit A L ipsi A B, erit quadratum ex A L quadrato ex A B æquale: sed quadrato quidem ex A L æqualia sunt quadrata ex A G, G L, quadrato autem ex A B, æqualia quadrata ex B Z, Z A; quadrata igitur ex A G, G L æqualia sunt quadratis ex B Z, Z A: quorum quadratum ex B Z minus est quadrato ex G L. Ergo reliquum ex Z A quadratum majus est quadrato ex A G; et ob id recta linea Z A major est rectâ A G. Sed punctum G est ad superficiem sphæræ minoris. Quare punctum Z extra illam sphæram. Recta autem A Z, in planum B O K S ad perpendiculum deducta, minima est rectarum omnium, quæ a puncto A in planum illud deduci poterunt. Quare aliud omne punctum plani B O K S, vel magis etiam quam punctum Z, extra sphæram minorem erit. Totum igitur planum B O K S extra sphæram minorem. Similiter et de alio quovis polyhedri plano ostendetur extra sphæram minorem esse.



† *Nimirum cum tres* B K, B O, K S *circulo* B K S O *inscriptæ, inter se æquales sint, quarta autem* O S *unaquæque trium minor, erit arcus* B K *quadrante major. Quapropter angulus* B Z K, *ad circuli centrum* Z *arcui* B K *insistens, recto major erit.*

Tota

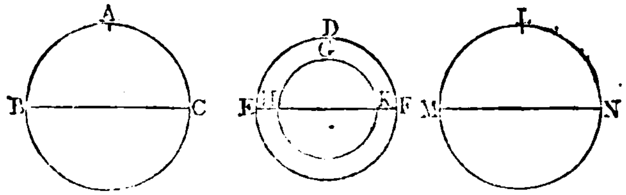
Tota igitur polyhedri ſuperficies extra ſphæram illam. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt, quod ſuâ ſuperficie minorem non contingit. *Q. E. F.*

Cor. Quod ſi etiam in alterâ ſphærâ ſolido polyhedro deſcripto, in ſphærâ B C D E ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphærâ B C D E ad ſolidum polyhedrum in alterâ ſphærâ triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. Diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, et ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. Similes autem pyramides inter ſe in triplicatâ ſunt proportione homologorum laterum. Ergo pyramis, cujus baſis eſt K B O S quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in alterâ ſphærâ ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt, quam habet A B ex centro ſphæræ, circa centrum A exiſtentis, ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Similiter et unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphærâ circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. Quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphærâ circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet B D diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

Sphæræ inter ſe in triplicatâ ſunt proportione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ A B C, D E F; quarum diametri B C, E F. Dico A B C ſphæram ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita eſt, ſphæra A B C ad ſphæram minorem ipſâ D E F, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. Et intelligatur ſphæra D E F circa idem centrum, circa quod ſphæra G H K: deſcribaturque in majori ſphærâ D E F ſolidum



ſolidum polyhedrum ſuperficie ſuâ non contingens minorem ſphæram G H K [g]; et in ſphærâ A B C deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphærâ D E F deſcriptum eſt. Solidum igitur polyhedrum, quod in ſphærâ A B C, ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphærâ D E F, triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F [h]. Habet autem A B C ſphæra ad ſphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. Ergo ut A B C ſphæra ad ſphæram G H K, ita ſolidum polyhedrum in ſphærâ A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphærâ D E F; et permutando, ut A B C ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſâ eſt, ita G H K ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphærâ D E F. Major autem eſt ſphæra A B C ſolido polyhedro, quod eſt in ipſâ. Ergo et G H K ſphæra polyhedro, quod in ſphærâ D E F, eſt major. Sed et minor, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt. Non igitur A B C ſphæra ad ſphæram minorem ipſâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Similiter oſtendemus neque D E F ſphæram ad ſphæram minorem ipſâ A B C triplicatam habere proportionem ejus, quam habet E F ad B C. Dico inſuper ſphæram A B C neque ad majorem ſphæram ipſâ D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam B C ad E F. Si enim fieri poteſt, habeat ad majorem L M N. Invertendo igitur, ſphæra L M N ad A B C ſphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter E F ad B C diametrum. Ut autem ſphæra L M N ad A B C ſphæram, ita ſphæra D E F ad ſphæram quandam minorem ipſâ A B C, quoniam ſphæra L M N major eſt ipſâ D E F. Ergo et D E F ſphæra ad ſphæram minorem ipſâ A B C triplicatam proportionem habet ejus, quam E F ad B C; quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur A B C ſphæra ad ſphæram majorem ipſâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Oſtenſum autem eſt neque ad minorem. Ergo A B C ſphæra ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habebit ejus, quam B C ad E F. *Q. E. D.*

[g] 17. hujus.

[h] Cor. 17. hujus.

AD-

ADDENDA.

LIB. V. PROP. XXVI.

Cor. * (Clavii) Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, habeat autem et quinta quædam, primæ detracta, ad ſecundam eandem proportionem quam ſexta quædam, tertiæ detracta, ad quartam; et reliqua primæ ad ſecundam eandem proportionem habet, quam reliqua tertiæ ad quartam.

LIB. X. PROP. X.

Cor. * Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima autem ſecundæ potentiâ tantum ſit commenſurabilis; tertia quoque quartæ potentiâ tantum commenſurabilis erit.

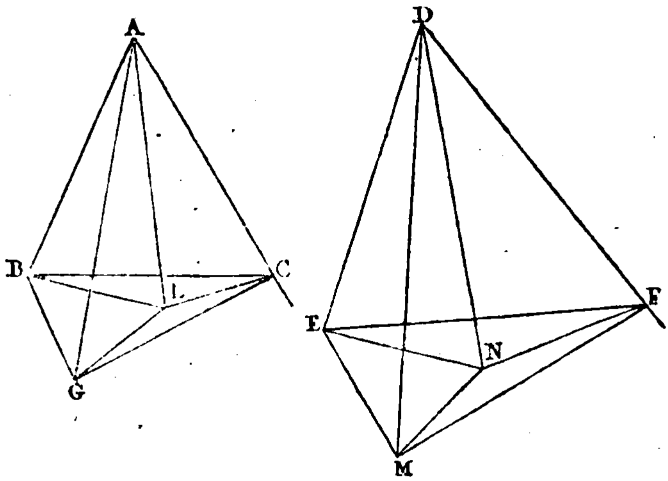
LIB. XI. PROP. XXXV.

Cor. 2. * Si ſint duo anguli plani æquales (B A C, E D F) quorum verticibus (A, D) ſublimes rectæ lineæ (A G, D M) inſiſtant, quæ cum rectis principio poſitis (A B, D E, A C, D F) angulos æquales, alterum alteri, contineant; angulum quidem M D E angulo G A B, et angulum M D F angulo G A C æqualem; plana angulorum B A G, C A G ſimiliter inter ſe, et tertio anguli B A C plano, ſunt inclinata, atque plana angulorum E D M, F D M inter ſe, et tertio anguli E D F plano. Et ſolidus angulus ad A ſolido ad D æqualis eſt.

Sumptis enim A G, D M æqualibus, et a punctis G, M rectis G L, M N in plana B A C, E D F ad perpendiculum demiſſis; rectæ illæ G L, M N inter ſe æquales erunt [a]. Junctiſque L A, N D, anguli G A L, M D N inter ſe æquales [b]. Et figuris ut prius conſtructis, in triangulis A B L,

[a] Cor. 1.

[b] Per hanc Prop.



A B L, D E N, ad B et E rectangulis, erit B L ad E N, ut A B ad D E. Sic enim ostensum. Similia igitur sunt triangula A B L, D E N, et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur. Anguli igitur B A L, E D N inter se æquales. Hæc cum ita sint, plana B A G, C A G similiter inter se, et tertio A B C, atque plana E D M, F D M inter se, et tertio E D F inclinari, et angulum solidum ad A solido ad D æqualem esse, ex constructione vicesimæ sextæ hujus libri manifestum est. *Q. E. D.*

LIB. XI. PROP. XXXIX.

Cor. 1.* Duæ parallelepipedi cujusque diagonales se mutuo medias dividunt.

Cor. 2.* Parallelepipedi cujusque rectanguli diagonales inter se æquales sunt.

Ea autem parallelepipeda voco *rectangula*, quorum stantes rectæ lineæ ad perpendiculum sunt basium planis.

CORRIGENDA.

Pag.	lin.	
14	17,	*pro* G H *lege* C H
15	10,	*pro* duabus *lege* duobus
20	1,	*pro* ponatur *lege* Exponatur
46	10,	*dele* Sed et rectangulum
56	4,	*pro* fiunt lateribus *lege* fiunt a lateribus
63	24,	*pro* E *lege* F
75	36,	*pro* duabus *lege* duobus
80	34,	*pro* habent. Sed *lege* habent; sed
130	26,	*pro* G *lege* H
147	28,	*pro* conditione *lege* conditioni
167	17,	*pro* sumpti *lege* sumptis
169	7,	*pro* angulem *lege* angulum
262	39,	*pro* Def. 1. primi *lege* Def. 1. hujus.
267	25,	*pro* eirt *lege* erit
281	18,	*pro* quædam A B *lege* quædam rationalis A B
291	23,	*pro* potest *lege* possit
347	24,	*pro* erunt *lege* erit
393	penult.	*pro* continentur *lege* continetur
408	14,	*pro* ad *lege* ab
412	21,	*pro* superficie, mutua *lege* superficie planâ, mutua †
427	30,	*pro* B C *lege* D C
433	penult.	*pro* Simpsonus *lege* Simsonus
477	18,	*pro* A E C G *lege* A B C G.

† * *Nempe in Græcis, in definitione anguli solidi excidisse arbitramur adjectivum* ἐπιπέδῳ, *substantivo* ἐπιφανείᾳ *apponendum, ut definitio generalis fiat. Etenim ad* Coni *verticem (ex. gr.) angulus proculdubio est solidus, quem rectæ lineæ innumeræ constituunt, ad punctum unum, coni verticem, collectæ; quæ quidem rectæ in eâdem omnes sunt superficie, minime vero in eâdem* planâ, *in* conicâ *enim superficie: et alii complures sunt anguli solidi, quorum par est ratio. Quos tamen definitione suâ Euclidem excludere voluisse haud putamus; præsertim cum angulus quisque solidus ad coni verticem, aliique complures qui superficiebus non planis continentur, aliis, qui planis continentur, æquales sint.*

Illud autem accurate animadvertendum—Alteram, quæ ponitur anguli solidi, definitionem, utpote planis comprehensi, ita ad conicum accommodari, si angulorum planorum numerus infinite augeri intelligatur, magnitudine cujusque singulatim infinite imminutâ. Cæterum inscite admodum Simsonus definitionum anguli solidi, quas duas Euclides posuit, alterâ repudiatâ, alteram illam retinere maluit, quæ vel minus universalis est, vel, si aliter, ea saltem de quâ, universalem esse, non æque manifestum est.